Н. ДАНФОРД и ДЖ. Т. ШВАРЦ

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

LINEAR OPERATORS

Part III

SPECTRAL OPERATORS

Nelson DUNFORD and Jacob T. SCHWARTZ
With the assistance
of William G. BADE and Robert G. BARTLE

1 9 7 1
WILEY-INTERSCIENCE
A DIVISION OF JOHN WILEY & SONS, INC.
NEW YORK • LONDON • SYDNEY • TORONTO

Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц

при участии

У. Бейда и Р. Бартла

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
Спектральные операторы

Перевод с английского

Р. С. Исмагилова и Б. С. Митягина

Под редакцией

А. Г. Костюченко

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1974

octopus scanning ! by

УДК 517.43

Эта книга — заключительный том хорошо известной фундаментальной монографии по теории операторов, первые два тома которой вышли в русском переводе в Издательстве иностранной литературы в 1962 г. и в издательстве «Мир» в 1966 г. соответственно. Третий том посвящен спектральным операторам — важному классу несамосопряженных операторов. В нем систематически излагается теория этих операторов, рассматривается вопрос об их месте в общей теории, изучаются волновые операторы.

Нет сомнения, что этот том, как и предыдущие, заслужит широкое признание математической общественности.

Книга интересна специалистам в различных областях математики, теоретической физики, а также всем, кто хочет обстоятельно изучить современный математический анализ. Она доступна студентам-математикам университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

Д $\frac{20203-003}{041(01)-74}$ 03-74 © Перевод на русский язык, «Мир», 1973

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Этим томом заканчивается обширная монография по теории операторов, написанная известными американскими математиками Н. Данфордом и Дж. Шварцем. Два предыдущих тома содержали общую теорию операторов и спектральную теорию самосопряженных операторов (как общих, так и дифференциальных). Думается, что эти два тома заняли весьма почетное место в обширной литературе по этим вопросам, которая представлена такими превосходными монографиями как «Лекции по функциональному анализу» Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя, «Теория линейных операторов» Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана, «Линейные дифференциальные операторы» М. А. Наймарка.

Н. Данфорд и Дж. Шварц в своем труде стремились как можно полнее охватить общие вопросы теории операторов. Естественно, что они не могли оставить в стороне спектральную теорию несамосопряженных операторов. Спектральная теория таких операторов весьма трудна и еще далека от своего завершения, однако в последние два десятилетия она обогатилась целым рядом замечательных фактов. Очень хорошее изложение достижений в этой области имеется в вышедшей у нас трехтомной монографии И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна. Следует сказать, что интерес к этой теории в значительной степени стимулируется задачами механики и физики.

Третий том целиком посвящен одному весьма специальному классу несамосопряженных операторов, которые были впервые выделены и детально изучены Н. Данфордом и его сотрудниками. Это — так называемые спектральные операторы. Они представляются в виде суммы двух коммутирующих слагаемых, одно из которых нильпотентно, а другое является скалярным оператором, т. е. имеет полную систему ограниченных проекторов, приводящих оператор. Спектральные операторы составляют весьма важный и интересный класс, так как для них ввиду существования ограниченного разложения единицы можно построить хорошее операционное исчисление. Само же спектральное представление таких операторов можно рассматривать как их жорданову форму.

Вопрос о том, какие конкретные операторы являются спектральными, часто бывает трудным. Например, не найдено эффективных условий на комплекснозначный потенциал $q(x)$, даже если он финитен, при которых оператор с непрерывным спектром

$$Ly = -y'' + q(x)\,y, \quad y(0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

будет спектральным. Этому весьма простому оператору быть спектральным мешает существование на непрерывном спектре так называемых спектральных особенностей, открытых М. А. Наймарком в 1951 г. Правда, можно написать некоторые условия, связанные с малостью $q(x)$, которые приводят к отсутствию спектральных особенностей, но они не интересны.

Все содержание этого тома делится на две части. Первая часть (гл. XV — XVIII) посвящена общей теории спектральных операторов. Ее итог — построение операционного исчисления. Изложение ведется на основе коммутативных банаховых алгебр. Другой важный результат этой части — нахождение условий на резольвенту оператора, которые обеспечивают его спектральность. Вторая часть (гл. XIX — XX) посвящена изучению некоторых конкретных примеров спектральных операторов и построению волновых операторов в том случае, когда невозмущенный оператор является спектральным.

Несомненно, что заключительный том обширного труда Н. Данфорда и Дж. Шварца будет принят у нас с тем же интересом, что и два предыдущие.

Перевод гл. XV—XVII выполнен Б. С. Митягиным, гл. XVIII—XX—Р. С. Исмагиловым.

А. Г. Костюченко

La pensée n'est qu'un éclair au milieu de la nuit.
Mais c'est cet éclair qui est tout.

Henri Poincaré

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

В предисловии к первому тому этой монографии мы писали о своем намерении включить теорию спектральных операторов во второй том. Мы считали (и считаем до сих пор), что эта теория является превосходным введением в более изящную и совершенную теорию самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Однако скоро стало очевидным, что естественные ограничения, связанные с объемом настоящего трактата, не позволят осуществить это намерение. Исключение теории спектральных операторов из второго тома объясняется не только появлением большого числа работ, посвященных этой теме, но и нашим стремлением продемонстрировать ряд важных применений общей теории спектральных операторов, описание которых занимает несколько сотен страниц.

При изложении теории спектральных операторов в третьем томе мы столкнулись с двумя не зависящими друг от друга проблемами, с которыми не встречались в первых двух томах. Мы сейчас кратко опишем их, поскольку это даст читателю представление об историческом развитии предмета третьей части, как и всего трактата в целом, покажет ему, где существующая математическая теория примыкает к границе между известным и неизвестным, и продемонстрирует ее тесные связи с некоторыми глубокими эмпирическими результатами современной физики. Приложения к физике включают в себя не только проблемы, возникающие в таких современных теориях, как квантовая механика, теория рассеяния, квантовая теория поля и квантовомеханическая задача трех тел, но также и несамосопряженные задачи, связанные с более классическими проблемами как, например, с всевозможными явлениями диффузии, и в особенности с теорией электромагнитных волн. Мы излагаем абстрактную теорию операторов в основном тексте, а физические интерпретации и краткое обсуждение старых и новых задач, относящихся к этой теории, приводим в «Примечаниях и дополнениях» (особенно см. § XX.6).

Первая проблема, с которой мы раньше не сталкивались, — это проблема отбора материала. Чтобы понять ее характер, кратко напомним, как обстояло дело со спектральной теорией, изложенной в гл. XIII. Спектральная теория самосопряженных операторов своим возникновением обязана исследованиям колеблющейся струны, предпринятым Б. Тейлором в 1713 г., ровно через четверть столетия после опубликования «Начал» Ньютона («Математические начала натуральной философии» — таково полное название этого выдающегося труда, имевшего огромное влияние на развитие науки). Последующее стремительное развитие математики вызвало к жизни теорию ортогональных разложений, которая была хорошо известна уже в восемнадцатом веке. В начале девятнадцатого века Штурм и Лиувилль заложили основы весьма мощной общей теории таких разложений. В 1910 г. была опубликована основополагающая работа Г. Вейля. В первые десятилетия нашего века началось плодотворное развитие абстрактного линейного анализа в работах Ф. Вольтерра и М. Рисса, Д. Гильберта и его школы в Гёттингене, Банаха, Мазура, Шаудера и многих других математиков в Польше. В последние сорок лет оно было продолжено в трудах Гельфанда, Крейна и Наймарка в Советском Союзе, Какутани, Като, Куроды и Иосиды в Японии (и в Соединенных Штатах), группы Бурбаки во Франции, Коложоары и Фойаша в Румынии, Хилле и Филлипса, Фридрихса, фон Неймана, Пэли [1]) и Винера в США. Следовало бы упомянуть и многих других математиков, которые внесли свой вклад в развитие спектральной теории за эти более чем два с половиной чрезвычайно плодотворных столетия в истории математики. В этот период были заложены основы теории самосопряженных операторов и в удовлетворительной форме решены многие основные проблемы этой теории. Таким образом, излагая в главах X, XII и XIII спектральную теорию самосопряженных операторов, мы располагали открытиями, накопленными и сформировавшимися на протяжении более чем двух с половиной столетий, а возможность рассматривать их в исторической перспективе помогала нам при решении вопроса, что является существенным и, следовательно, должно быть включено в основной текст, а что можно опустить или отнести в «Примечания и дополнения».

В противоположность теории самосопряженных операторов, в которой наши знания столь обширны, история соответствующих несамосопряженных задач сравнительно коротка. К счастью, мы располагаем глубокими исследованиями Г. Д. Биркгофа [1—7], выполненными в начале столетия еще до появления современной теории операторов. Эти работы убедительно указывали на существование сильных разложений по корневым векторам для широкого класса несамосопряженных граничных задач, и потому крайне удивительно, что общие факты такого рода были доказаны лишь спустя полвека. Изложение результатов Биркгофа в терминах теории

[1]) Английский математик Р. Пэли (1907—1933) работал с Н. Винером в Массачусетском технологическом институте, где они сделали ряд важных открытий. Несчастный случай на лыжах в канадских Скалистых горах привел к безвременной кончине этого замечательного ученого.

операторов и их многочисленные обобщения, полученные в основном Дж. Т. Шварцем и распространенные Г. Крамером, содержатся в гл. XIX, но общие методы спектральной теории несамосопряженных операторов созданы не более четверти века назад (исключение составляют лишь некоторые отдельные результаты, как, например, принадлежащая Ф. Риссу изящная теория компактных операторов). Но обилие новых теорий превзошло всякие ожидания; они развивались в многочисленных часто непредвиденных направлениях, образуя столь причудливые переплетения, что трудно предсказать, какая из теорий окажется жизнеспособной. Даже при поверхностном взгляде на размеры списка литературы, который в отличие от предыдущего относится только к третьему тому, хотя и является продолжением предыдущих списков, становится ясно, что любое стремление хотя бы в некоторой степени охватить весь относящийся к данной теме материал привело бы к разнородной смеси, вряд ли полезной тому, кто намерен работать в этой области, а также настолько увеличило бы объем книги, что многие интересные результаты, которые находят применения в современной физике, пришлось бы опустить. Поэтому мы были вынуждены отнести много интересного материала в параграфы «Примечания и дополнения» (в виде кратких ссылок). Мы хотим подчеркнуть, что отказ от подробного изложения этих результатов отнюдь не выражает нашего мнения об их научной ценности.

Вторая проблема, с которой мы не сталкивались в предыдущих томах, состоит в том, чтобы дать читателю, обладающему минимумом знаний по элементарной теории операторов, полное представление об основных идеях, связанных со спектральными операторами и некоторыми наиболее элементарными применениями несамосопряженных операторов к задачам математической физики. Другими словами, мы стремились к тому, чтобы значительную часть третьего тома можно было читать, зная лишь немногое из содержания первого и второго томов. Поэтому мы излагаем в гл. XV понятие спектрального оператора, многие его специальные свойства и ряд иллюстративных приложений теории, предполагая, что читатель лишь несколько больше знаком с предметом, чем аспирант первого года обучения. Хотя таблица зависимости глав показывает, что глава XV зависит от главы XIV, результаты главы XIV, использованные в главе XV, сводятся, за одним исключением, к отдельным элементарным леммам о приближении интегрируемых функций гладкими. Исключением является теорема Соболева, которая применяется лишь для доказательства следствия, несущественного с точки зрения развития идей главы XV. Для чтения главы XV от читателя требуется знакомство с элементарными понятиями алгебры и топологии множеств, которые можно найти в гл. I, тремя основными принципами, изложенными в гл. II, и элементарными положениями теории интегрирования как относительно конечно аддитивной функции множеств, так и относительно счетно аддитивной меры. Таким образом, читатель должен быть знаком только с небольшой частью содержания гл. III. Он должен также хорошо владеть теорией конечных квадратных матриц с комплексными элементами, предпочтительно в той форме, в которой эта теория изложена в § VII.1, а также с теорией конечномерных и бесконечномерных гильбертовых пространств в том виде, как она изложена в § IV.3 и IV.4. Кроме того, от читателя требуется знание результатов § VII.3, главы IX о B-алгебрах и начала главы X, где рассматривается спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов. Спектральная теорема для самосопряженных операторов не является логически необходимой для чтения главы XV, но знакомство с содержанием этой теоремы полезно, поскольку время от времени она используется в иллюстративных целях. Материал, который мы сейчас описали в общих чертах, с некоторыми незначительными добавлениями позволит читателю усвоить бóльшую часть содержания третьего тома. Исключение составляет важная глава XX, в которой существенные и сильные результаты главы XIII широко используются в приложениях к некоторым глубоким проблемам современной физики, а также классической теории электромагнитных волн. Особенность главы XV состоит в элементарном изложении теории Парсеваля — Планшереля преобразования Фурье. Это позволяет рассмотреть в § XV.11 и XV.12 иллюстративные примеры и избежать каких-либо ссылок на § XI.3, в котором эта теория с помощью общей спектральной теоремы построена для локально компактных групп. В отличие от § XV.11 трактовка рассматриваемых вопросов в § XI.3 более сложна. Указанный элементарный подход оказывается достаточным для наших целей, так как всюду в третьем томе преобразование Фурье используется только в конечномерном евклидовом пространстве. Таким образом, для чтения третьего тома, за исключением его последней главы, читателю, знакомому с обычными элементарными понятиями теоретико-множественной топологии, алгебры, теории аналитических функций и теории функций вещественной переменной (включая интеграл Лебега), потребуется лишь незначительное количество сведений из функционального анализа (в основном главы II и IX).

В главе XV мы более всего стремились выделить те основные элементарные свойства спектральных операторов, которые отличают их от других операторов. Эти свойства проявляются в различных формах и не вытекают непосредственно из определения спектрального оператора. Например, бóльшая часть спектральных соотношений, установленных в основном С. Фогелем и изложенных в § XV.8, ни в коей мере не подсказывается спектральными свойствами самосопряженных или нормальных операторов. Наибольший интерес в этой теории представляют свойства резольвенты $R(\lambda;\ T) = (\lambda - T)^{-1}$ спектрального оператора T. Более двадцати лет назад Н. Данфорд и Г. Нейбауер независимо заметили, что для любого вектора x в комплексном B-пространстве, в котором действует оператор T, аналитическая функция $R(\lambda; T)x$ обладает только однозначным аналитическим распространением. Глубокое замечание С. Какутани о том, что этим свойством не обладают произвольные линейные операторы, позволяет думать, что естественная область определения разложения единицы спектрального оператора состоит скорее из борелевских подмножеств бесконечнолистной римановой поверхности, чем из борелевских подмножеств комплексной плоскости. Насколько нам известно, исследования в этом направлении еще не начаты. Свойство однозначности распространения является одним из трех свойств резольвенты спектрального оператора, которые будут описаны в главе XV. В следующей главе показано, насколько близки три эти свойства к достаточным условиям, обеспечивающим спектральность оператора.

Желая сосредоточить наше внимание на новых понятиях и избежать ненужных отклонений в сторону не относящихся к делу проблем, мы ограничились изучением спектральных операторов в комплексном B-пространстве. Однако мы рассматриваем не только ограниченные операторы, поскольку применения граничных задач из главы XX к современной атомной физике требуют использования неограниченных спектральных операторов. Задачи Коши из главы XV также определяются в терминах некоторых несамосопряженных систем дифференциальных уравнений в частных производных (или в ряде случаев уравнений, весьма близких к ним), которые появляются при решении широкого класса задач о диффузии. Подобные приложения, а также другие иллюстрации к общей теории главы XV намеренно подобраны так, что они носят элементарный характер и, как правило, относятся к случаю гильбертова пространства, так как в этом случае изложение проще, чем для других B-пространств. Другая причина такого ограничения состоит в том, что не все утверждения, связанные с этими примерами, справедливы в произвольном B-пространстве. Мы не установили границ применимости этих утверждений, и это обстоятельство, возможно, побудит некоторых читателей к дальнейшим исследованиям.

Глава XV является элементарным введением в предмет третьего тома. Она содержит вывод большей части характеристических свойств спектральных операторов, ряд примеров, иллюстрирующих явления, которые не имели места в теории самосопряженных или нормальных операторов, и несколько задач Коши для несамосопряженных систем, составленных из возмущенных операторов Лапласа (теоремы XV.12.19, XV.12.21 и XV.12.22). Решения задачи Коши, разобранной в теореме XV.12.19, а также многих других подобных задач выражаются в виде сверток с ядрами, которые записываются в явной форме, включающей только элементарные функции, в противоположность тем несложным на первый взгляд граничным задачам для возмущенных операторов вида $d^2/dt^2 + q$ с комплексной функцией $q(t)$ на бесконечном вещественном интервале $0 \leqslant t < \infty$, решения которых могут оказаться крайне трудными. Подробные вычисления решений приводятся в тексте. Даже в весьма общей задаче, разобранной в теореме XV.12.21, ядро, с помощью которого выражается решение, представляется в виде достаточно быстро сходящегося ряда.

В § XV.15 приводится несколько результатов, довольно слабо связанных со спектральными операторами. Все они имеют отношение к различным вариантам теорем Винера — Хопфа и Винера — Леви. Глава заканчивается большим количеством упражнений, собранных в § 16, и многочисленными примечаниями и дополнениями в § 17. В главе XV мы преследовали двоякую цель. С одной стороны, мы хотели написать элементарное, исчерпывающее и законченное введение в предмет, а с другой — отобрать самый существенный материал для семинара или курса лекций, предназначенных для аспирантов первого или второго года обучения.

В главе XVI рассматривается трудная задача: исходя из свойств резольвенты оператора, установить, является ли он спектральным. Спектральность операторов, фигурировавших в иллюстративных примерах главы XV, выводилась непосредственно из определения, в то время как выяснение типа операторов, приведенных в главе XVI, требует более тонкого анализа, а также введения ряда новых понятий. Мы верим, что теоремы XVI.4.5, 5.15 и 5.18, подводящие итог этим очень длинным исследованиям, еще получат ряд глубоких и интересных применений. Теорему XVI.5.18 в ее первоначальном варианте мы получили как следствие из предыдущей теоремы, но, поскольку она является существенной для многих глубоких результатов главы XX, имеющих важные приложения к некоторым наиболее трудным проблемам современной атомной физики, мы привели ее новое доказательство, не зависящее от результатов главы XV. Это оказалось возможным по той причине, что в теореме XVI.5.19 речь идет о классе операторов, обладающих рядом специальных свойств, одно из которых состоит в том, что резольвента оператора имеет порядок роста не выше первого при приближении к спектру оператора. Таким образом, читатель, интересующийся в первую очередь приложениями теории к теории рассеяния, квантовомеханической задаче трех тел и другим современным проблемам математической физики, к которым применимы результаты главы XX, оказывается на прямом и коротком пути к их решению, а именно: теорема XVI.5.19, ее аналог для неограниченных операторов, содержащийся в теореме XVIII.2.34, а затем глава XX; при этом он оставляет в стороне тонкий анализ, необходимый для большей части главы XVI, а также весь материал, содержащийся в главах с XVII по XIX включительно. И все же мы напоминаем читателю, что основные результаты главы XIII часто используются в главе XX.

Глава XVII содержит исследование алгебр спектральных операторов, начиная с равномерно замкнутых алгебр, их представлений и разложений типа разложения Веддерберна. Вторая ее часть является изложением проведенного У. Бейдом глубокого исследования сильно замкнутых алгебр спектральных операторов и полных булевых алгебр проекторов. Тесно связанную с этой темой содержательную теорию кратности, также принадлежащую Бейду, мы отнесли в конец главы XVIII, так как в ней используется функциональное исчисление для неограниченных спектральных операторов, развитое в первой части этой главы.

Главы XIX и XX содержат различные приложения и обобщения, возникающие в связи с применениями общей теории, построенной в первых главах этого тома. В главе XIX рассматриваются операторы с дискретным спектром; глава XX посвящена операторам с непрерывным спектром. Методы, использованные в главе XIX, связаны с теорией возмущений. Рассматривается спектральный оператор T с дискретным спектром, точки которого разделены достаточно большими промежутками. К оператору T добавляется возмущение P, достаточно малое относительно оператора T в некотором подходящем смысле; тогда можно оценить резольвенту оператора $T' = T + P$ в терминах резольвенты оператора T и тем самым сравнить спектральные проекторы операторов T' и T. В некоторых случаях удается затем доказать, что T' — спектральный оператор. Полученные результаты применяются к спектральному анализу несамосопряженных дифференциальных операторов в ограниченном замкнутом интервале. Эти приложения восходят к Биркгофу и Тамаркину и обобщают классическую теорию Штурма — Лиувилля для самосопряженного случая. Их вывод носит алгебраический характер и состоит в проверке того, что в рассматриваемых случаях справедливы асимптотические оценки, которые требуются в общей теории возмущений. Глава XIX заканчивается параграфом, в котором приведены результаты, касающиеся условий полноты системы корневых векторов возмущенного оператора. Утверждения этих теорем носят менее специальный характер, чем полученные в первых параграфах главы XIX, но они могут быть доказаны при значительно более общих предположениях; их доказательство основано в конечном счете на обобщенных неравенствах Карлемана из главы X.

Глава XX посвящена применениям общей теории к изучению возмущений операторов с непрерывным спектром. Устанавливается, что многие такие операторы либо являются спектральными, либо обладают очень близкими свойствами. Приводится целый ряд результатов, принадлежащих Наймарку, Фридрихсу, Като и Куроде, а также некоторые полученные в последнее время обобщения. Многие утверждения, установленные в главе XX (или аналогичные, но более сложные), применимы к некоторым трудным несамосопряженным задачам современной, а также классической механики Эти теоремы подводят строгую математическую базу под некоторые эмпирические законы физики, которые до сих пор обосновывались путем нестрогих рассуждений. В настоящей главе мы довольно близко подходим к некоторым активно развивающимся областям исследований математической физики. В первом параграфе главы XX общая спектральная теория применяется, в основном непосредственно, к сингулярным несамосопряженным дифференциальным операторам второго порядка на полуоси. Эти операторы имеют вид

$$T = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t),$$

где функция q быстро убывает на бесконечности и может быть комплексной. Доказательство того, что эти операторы являются спектральными, проводится по существу методами прямого асимптотического анализа, с помощью которого проверяются условия, необходимые в общей теории спектральных операторов.

Во втором и третьем параграфах главы XX вводится совершенно новый подход, впервые указанный Фридрихсом и развитый впоследствии им самим, а также его учениками и сотрудниками. Цель этой теории — установить *подобие* между невозмущенным оператором T и его возмущением $T' = T + P$, т. е. доказать существование такого оператора U, что

$$UTU^{-1} = T'.$$

Это уравнение можно привести к такому виду, который делает возможным применение методов теории возмущений. Основное преимущество такого подхода заключается в его независимости от каких-либо предположений о самосопряженности и естественном характере его применения к операторам с непрерывным спектром. Аналитическая часть работы, связанной с применением метода Фридрихса, оказывается наиболее простой в том случае, когда спектр оператора T заполняет целую область, и потому сначала разбирается именно этот случай. Затем разрабатывается несколько более громоздкий технический аппарат в случае оператора, непрерывный спектр которого заполняет интервал вещественной оси, и изучаются приложения к интегральным операторам Вольтерра и операторам, полученным возмущением оператора Лапласа ∇^2. Эти последние операторы и многие обобщенные операторы такого же рода, весьма сложный анализ которых мы не приводим, являются важными в квантовой теории. В ряде интересных последующих работ Фридрихс распространил эту аналитическую программу на системы операторов, возникающих в квантовой теории поля.

В § 3 главы XX показано, как приспособить метод Фридрихса к операторам с дискретным спектром; это приводит к результатам, дополняющим результаты главы XIX.

В § 4 развивается другая идея, имеющая большое значение для применений спектральной теории к физике. Она состоит в следующем. Если невозмущенный оператор T и полученный из него возмущенный оператор T' являются самосопряженными, то некоторые нестрогие формальные рассуждения дают основания ожидать, что оператор Фридрихса U, осуществляющий подобие $UTU^{-1} = T'$, может быть выражен в виде предела

$$U = \lim_{t\to\infty} e^{itT'}e^{-itT}.$$

Это наводит нас на мысль изучить указанный выше предел, и, действительно, оказывается, что если разность $T' - T$ удовлетворяет некоторым условиям, то предел существует в сильной топологии и обладает теми свойствами, которые могут быть получены с помощью формальных рассуждений. Оригинальный метод доказательства этих фактов был предложен Като и Куродой; впоследствии он был обобщен многими другими авторами, которые также установили связи между их методом «волновых операторов», или методом «рассеяния», и различными вариантами метода Фридрихса, описанными в § XX.2. (Формальная часть рассуждений, лежащих в основе строгих результатов Като — Куроды, имеет длинную историю в физике: с их помощью было проделано много искусных вычислений, а, кроме того, они подсказывали такую точку зрения, которую многие физики склонны были рассматривать как лежащую в основе аксиоматики квантовой теории.) Отметим также, что метод Като — Куроды дает некоторые очень точные результаты, применимые в спектральном анализе дифференциальных операторов в частных производных.

Заметим для математиков-теоретиков, что в «Примечаниях и дополнениях» содержится масса идей, предоставляющих широкий простор для дальнейших исследований. Кроме того, много предстоит еще сделать в теории счетно аддитивных спектральных мер на общих римановых поверхностях. Некоторые разделы теории кратностей, принадлежащей Бейду, наводят на мысль о возможности построения теории спектральных представлений, аналогичной теории Вейля — Кодаиры, для граничных задач в L_1, хотя техническая сторона такой теории может оказаться очень трудной. Одной из наиболее увлекательных задач, о которой, по-видимому, пока ничего неизвестно, является выяснение природы операторов, резольвента которых имеет порядок роста выше первого при приближении к каждой точке кривой и к которым применимы варианты основных теорем главы XVI, относящиеся к неограниченным операторам; такие операторы возникают при описании ряда естественных явлений. У нас нет никаких априорных или философских оснований думать, что эти операторы встречаются реже, чем те, которые изучены за последние три столетия и сводятся в основном к самосопряженным операторам. Возможно, недостаток таких примеров в литературе объясняется отсутствием какой бы то ни было теории, посвященной их точному анализу. Для того чтобы сделать возможным строгий анализ уравнения, возникшего при решении физической задачи, приходится обычно несколько изменять его вид. Однако кажется совершенно невероятным, чтобы существовал способ, позволяющий изменить порядок роста резольвенты и не приводящий к существенному изменению характера проблемы.

А теперь несколько слов о черной стрелке, стоящей перед некоторыми утверждениями. В первых двух томах мы ставили этот знак с целью обратить внимание на идеи, особенно важные для дальнейшего изложения. В третьем томе стрелка используется также и для выделения тех результатов и понятий, которые мы считаем особо интересными, даже если они не используются в последующем изложении.

Мы применяем сокращение «ч. т. д.», обычно используемое только математиками, правда, в несколько ином смысле, чем «что и требовалось доказать». Этот символ означает просто конец доказательства, что особенно полезно при чтении длинного рассуждения, занимающего много страниц и включающего в себя доказательства ряда предварительных утверждений.

Мы благодарим сотрудников Управления научных исследований Военно-воздушных сил и Службы морских исследований за их содействие, оказанное нам в то время, когда были получены первые результаты, положенные в основу этой книги.

Сарасота, Флорида
Нью-Йорк
Май 1971 г.

Нельсон Данфорд
Джекоб Т. Шварц

ГЛАВА XV

Спектральные операторы

1. Введение

Далеко продвинутая теория самосопряженных краевых задач для дифференциальных уравнений, развитая в предыдущих главах, еще раз демонстрирует силу и значение спектральной теории ограниченных и неограниченных самосопряженных (или нормальных) операторов, изложенной в гл. X и XII. Проблема распространения этой теории на операторы, не входящие в класс нормальных, является одной из важнейших нерешенных задач теории линейных операторов. Рассмотрим, например, задачу отыскания разложения единицы для формального дифференциального оператора $T = -d^2/dx^2 + q$ на бесконечном интервале $0 \leqslant x < \infty$. Если q — вещественная функция, то, как мы видели в гл. XIII, возможен весьма детальный анализ свойств оператора T. Но если q принимает комплексные значения — случай, с которым мы часто сталкиваемся в конкретных примерах, — то спектральный анализ оператора T, проведенный в гл. XIII, уже неприменим и трудно сформулировать даже более простые утверждения о спектральном разложении оператора T.

Чтобы дать адекватный спектральный анализ этого и многих других несамосопряженных операторов, мы хотим попытаться распространить спектральную теорию приведения гл. X и XIII на операторы, не входящие в класс нормальных, в гильбертовом пространстве и на операторы в B-пространствах, отличных от гильбертовых. Если буквально понимать свойства нормальных операторов, то прежде всего можно было бы подумать, что подходящими для изучения являются операторы, имеющие представление

$$T = \int\limits_{\sigma(T)} \lambda E\,(d\lambda)$$

с помощью некоторой проекторнозначной меры, определенной на спектре $\sigma(T)$. То, что такой ограниченный класс операторов не имеет достаточной степени общности, можно лучше всего, вероятно, понять, рассмотрев случай конечномерного унитарного пространства $\mathfrak{H}$. Если T — оператор в таком пространстве, то операционное исчисление для аналитических функций может быть определено формулой (см. VII.1.8)

$$f(T)=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\sum_{n=0}^{\nu(\lambda)-1}\frac{(T-\lambda I)^n}{n!}f^{(n)}(\lambda)E(\lambda)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\frac{(T-\lambda I)^n}{n!}f^{(n)}(\lambda)E(\lambda).$$

Если T — нормальный оператор, то $(T-\lambda I)E(\lambda)=0$, и эта формула сводится к формуле

$$f(T)=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}f(\lambda)E(\lambda),$$

которая для произвольного оператора уже неверна. Чтобы нагляднее увидеть различие между исчислениями, задаваемыми этими двумя формулами, перепишем их, введя соответственно следующие соотношения для нильпотента N и разложения единицы E:

$$N=T-\sum_{\lambda\in\sigma(T)}\lambda E(\lambda),\qquad E(\delta)=\sum_{\lambda\in\delta}E(\lambda).$$

В терминах N и E операционное исчисление для произвольного оператора имеет вид

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!}\int_{\sigma(T)}f^{(n)}(\lambda)E(d\lambda),$$

в то время как в случае нормального оператора T для представления $f(T)$ необходимо лишь первое слагаемое

$$f(T)=\int_{\sigma(T)}f(\lambda)E(d\lambda)$$

этого ряда. Поскольку, как показывает этот пример, теория нормальных операторов не может быть непреложным законом даже в теории произвольных операторов в конечномерном пространстве, мы должны обратиться к более общим рассмотрениям, пытаясь построить удовлетворительную общую спектральную теорию.

Более общая задача приведения для оператора T в B-пространстве $\mathfrak{X}$ может быть сформулирована следующим образом: разложить $\mathfrak{X}$ в прямую сумму $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\oplus\mathfrak{X}_2$ двух собственных подпространств так, чтобы $T\mathfrak{X}_1\subseteq\mathfrak{X}_1$, $T\mathfrak{X}_2\subseteq\mathfrak{X}_2$. Если E обозначает проекцию $\mathfrak{X}$ на пространство $\mathfrak{X}_1$, то два условия $T\mathfrak{X}_1\subseteq\mathfrak{X}_1$, $T\mathfrak{X}_2\subseteq\mathfrak{X}_2$ эквивалентны одному алгебраическому условию $TE=$ $=ET$. Таким образом, более общей задачей приведения для оператора T была бы следующая: найти проекцию, коммутирующую с T.

То, что эта формулировка слишком обща для того, чтобы дать удачное описание задачи *спектрального* представления, можно понять, рассмотрев случай оператора $T = I$. Так как I коммутирует со всякой проекцией, то сформулированная выше задача спектрального приведения для оператора I приняла бы такой вид: найти все проекции в $\mathfrak{X}$. Эта задача, интересная сама по себе, ведет, очевидно, несколько дальше, чем просто к спектральному анализу оператора I. Действительно, поскольку $\sigma(I)$ состоит из одной-единственной точки, так что спектр этого оператора геометрически неприводим, нам следовало бы ожидать, что оператор I будет неприводимым также и с точки зрения спектрального анализа.

Чтобы получить спектральное разложение оператора, мы должны найти проекцию E, коммутирующую с T, такую, что спектр сужения $T \mid E\mathfrak{X}$ содержится в заданном замкнутом множестве. Другими словами, мы хотим найти для данного подмножества δ спектра $\sigma(T)$ два подпространства $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, такие, что $T\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1$, $T\mathfrak{X}_2 \subseteq \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, причем

$$\sigma(T \mid \mathfrak{X}_1) \subseteq \overline{\delta}, \qquad \sigma(T \mid \mathfrak{X}_2) \subseteq \overline{\delta'}.$$

Напомним (см. X.2.6), что разложение единицы E, связанное с нормальным оператором T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, обладает для всякого борелевского множества δ этим свойством: $\sigma(T \mid E(\delta)\mathfrak{H}) \subseteq \overline{\delta}$. Аналогично, для произвольного оператора T в комплексном B-пространстве было показано (см. VII.3.20), что для подмножества δ, одновременно открытого и замкнутого в спектре $\sigma(T)$, можно построить коммутирующий с T проектор $E(\delta)$, для которого спектр сужения $T \mid E(\delta)\mathfrak{X}$ содержится в δ.

Общее свойство, т. е. $\sigma(T \mid E(\delta)\mathfrak{X}) \subseteq \overline{\delta}$, только что рассмотренных примеров не есть случайное совпадение: именно оно явно или неявно лежит в основе определяющих результатов спектральной теории. Таким образом, мы приходим к тому, чтобы начать формулировку задачи спектрального представления со следующего требования: для каждого множества δ из некоторого семейства Σ подмножеств плоскости существует проекция $E(\delta)$, коммутирующая с T и такая, что $\sigma(T \mid E(\delta)\mathfrak{X}) \subseteq \overline{\delta}$. В только что упомянутых примерах Σ является полем и для $E(\delta)$ выполнены следующие алгебраические законы:

$$\begin{aligned}
E(\delta \cap \sigma) &= E(\delta)E(\sigma),\\
E(\delta \cup \sigma) &= E(\delta) + E(\sigma) - E(\delta)E(\sigma),\\
E(\delta') &= I - E(\delta),\\
E(\sigma(T)) &= I.
\end{aligned}$$

В случае нормального оператора в гильбертовом пространстве множество Σ является σ-полем всех борелевских подмножеств, а E счетно аддитивна в сильной операторной топологии. Именно это свойство счетной аддитивности обусловливает возможности замечательных разложений по собственным функциям, полученных в теории самосопряженных краевых задач.

В общей формулировке задачи разложения мы собираемся потребовать, чтобы Σ было полем борелевских множеств, $E(\delta)$ удовлетворяло выписанным выше алгебраическим тождествам и, кроме того, чтобы E была счетно аддитивной функцией на Σ в сильной операторной топологии. Хотя формальные определения будут даны в следующем параграфе, оператор, для которого задача спектрального разложения имеет решение, мы будем называть спектральным. Основной целью настоящей главы является не столько выяснение вопроса, какие операторы являются спектральными, сколько анализ свойств ограниченных спектральных операторов. Тем не менее в § 11 и 12 будут приведены некоторые примеры спектральных операторов, а в § 13 выяснены связи с некоторыми смежными вопросами.

В следующей главе будет предпринята попытка найти условия на резольвенту оператора, которые обеспечивают положительное решение задачи спектрального приведения. В дальнейших главах мы попытаемся найти другие примеры спектральных операторов и понять, в какой мере общую теорию можно применять в анализе несимметрических краевых задач.

2. Терминология и предварительные понятия

Понятия булевой алгебры проекторов, спектральной меры, интеграла относительно спектральной меры и т. д., которые были описаны в § X.1, являются основными в настоящей главе. Желательно, чтобы читатель просмотрел эти понятия в гл. X, поскольку здесь они напоминаются в довольно сжатой форме. Имеется, однако, несколько новых понятий, которые будут введены здесь и разъясняются более полно.

На протяжении всей главы буква $\mathfrak{X}$ будет использоваться для обозначения комплексного B-пространства, а T — для ограниченного линейного оператора в $\mathfrak{X}$. Под *проектором* в $\mathfrak{X}$ понимается ограниченный линейный оператор E в $\mathfrak{X}$, такой, что $E^2 = E$. *Пересечение* $A \wedge B$ и *объединение* $A \vee B$ двух коммутирующих проекторов A и B в $\mathfrak{X}$ по определению суть проекторы AB и $A + B - AB$ соответственно. Области значений пересечения и объединения двух коммутирующих проекторов задаются соотношениями

$$(A \wedge B)\,\mathfrak{X} = (A\mathfrak{X}) \cap (B\mathfrak{X}), \qquad (A \vee B)(\mathfrak{X}) = (A\mathfrak{X}) + (B\mathfrak{X}) = \overline{\mathrm{sp}}\,(A\mathfrak{X}, B\mathfrak{X}),$$

где $\overline{\mathrm{sp}}\,(A\mathfrak{X}, B\mathfrak{X})$ — замкнутое линейное многообразие, порожденное множествами $A\,\mathfrak{X}$ и $B\,\mathfrak{X}$. Поэтому *естественное упорядочение* $A \leqslant B$ двух коммутирующих проекторов A и B имеет простой геометрический смысл: $A \leqslant B$ эквивалентно тому, что $A\mathfrak{X} \subseteq B\mathfrak{X}$. *Булева алгебра проекторов* в $\mathfrak{X}$ есть множество проекторов в $\mathfrak{X}$, которое является булевой алгеброй (см. § I.12) относительно операций пересечения $A \wedge B$, и объединения $A \vee B$ и имеет в качестве нулевого и единичного элементов операторы 0 и I в $\mathfrak{X}$.

1. Определение. *Спектральная мера* в $\mathfrak{X}$ есть гомоморфное отображение булевой алгебры множеств в булеву алгебру проекционных операторов в $\mathfrak{X}$, которое обладает свойством аддитивности и переводит единицу своей области определения в тождественный оператор I области значений. Спектральная мера называется *ограниченной*, если нормы проекторов в ее области значений ограничены.

Напомним, что если область определения ограниченной спектральной меры E является полем Σ подмножеств множества S, то для любой ограниченной Σ-измеримой числовой функции f на S может быть определен интеграл $\int\limits_S f(\lambda)\, E(d\lambda)$. В § X.1 показано, что этот интеграл является ограниченным гомоморфизмом B-алгебры $B(S, \Sigma)$, состоящей из Σ-измеримых функций на S, в B-алгебру $B(\mathfrak{X})$ ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$, т. е.

$$\int\limits_S [\alpha f(s) + \beta g(s)]\, E(ds) = \alpha \int\limits_S f(s)\, E(ds) + \beta \int\limits_S g(s)\, E(ds),$$

$$\int\limits_S f(s)\, g(s)\, E(ds) = \left[\int\limits_S f(s)\, E(ds)\right]\left[\int\limits_S g(s)\, E(ds)\right],$$

$$\left|\int\limits_S f(s)\, E(ds)\right| \leqslant v(E) \sup_{s \in S} |f(s)|,$$

где $v(E)$ — постоянная, зависящая только от спектральной меры E. Другие свойства интеграла, которые будут нами использоваться и были объяснены в § X.1, выражаются следующими соотношениями:

$$x^*\left[\int\limits_S f(s)\, E\, ds)\right] x = \int\limits_S f(s)\, x^*E(ds)\, x,$$

$$\left[\int\limits_S f(s)\, E(ds)\right] x = \int\limits_S f(s)\, E(ds)\, x,$$

$$\int\limits_S g(t) \int\limits_S f(s)\, E(ds \cap dt) = \int\limits_S g(s)\, f(s)\, E(ds)$$

и

$$\int\limits_S f(s)\, E(h^{-1}(ds)) = \int\limits_S f(h(s))\, E(ds),$$

где h — отображение S в себя с тем свойством, что для всякого δ из Σ множество $h^{-1}(\delta) = \{s \mid h(s) \in \delta\}$ также лежит в Σ.

Иногда будет удобно использовать более общее, чем в § X.1, понятие разложения единицы для оператора.

→ 2. Определение. Пусть Σ является булевой алгеброй подмножеств комплексной плоскости, которая содержит пустое множество и всю плоскость, или, короче, пусть Σ является полем множеств в комплексной плоскости. Спектральная мера E на Σ называется *разложением единицы* (или *спектральным разложением*) *для оператора* T, если

$$E(\delta)T = TE(\delta), \qquad \sigma(T_\delta) \subseteq \bar{\delta}, \qquad \delta \in \Sigma.$$

Здесь мы используем, и будем это делать в дальнейшем, обозначение T_δ для сужения $T \mid \mathfrak{X}_\delta$ оператора T на многообразие $\mathfrak{X}_\delta = E(\delta)\mathfrak{X}$.

Проиллюстрируем это определение; напомним (см. VII.3.17 и VII.3.20), что, определив *спектральное множество* для оператора T как множество δ, для которого $\delta \cap \sigma(T)$ одновременно открыто и замкнуто в $\sigma(T)$, и определив для всякого δ в поле Σ спектральных множеств проектор $E(\delta)$ по формуле

$$E(\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C R(\lambda; T)\, d\lambda,$$

где C — спрямляемая жорданова дуга, содержащая $\delta \cap \sigma(T)$, но не содержащая других точек спектра $\sigma(T)$ внутри себя, мы получим отображение $\delta \to E(\delta)$ поля Σ, являющееся разложением единицы для оператора T. Это разложение единицы, которое существует для произвольного ограниченного оператора T, не определено, вообще говоря, для всех борелевских множеств плоскости и не является в общем случае ни ограниченным, ни счетно аддитивным. Однако, как мы видели в следствии X.2.4, для ограниченного нормального оператора в гильбертовом пространстве всегда существует однозначно определенное ограниченное и счетно аддитивное разложение единицы, заданное на поле всех борелевских подмножеств плоскости.

В нескольких следующих главах мы будем изучать операторы, имеющие разложение единицы со свойствами, близкими к тем, которыми обладают спектральные разложения нормальных операторов в гильбертовом пространстве. На самом деле мы будем изучать разложения единицы, которые счетно аддитивны на поле $\mathscr{B}$ борелевских множеств плоскости. В связи с этим следует напомнить (см. IV.10.1), что если E — спектральная мера на σ-поле $\mathscr{B}$, для которой функция $x^* E(\cdot)x$ счетно аддитивна для всякого функционала x^* из $\mathfrak{X}^*$ и всякого элемента x из $\mathfrak{X}$, то E счетно аддитивна на $\mathscr{B}$ в сильной операторной топологии. Так как всякий проектор $E \neq 0$ имеет норму $|E| \geqslant 1$, то спектральная мера E не может быть счетно аддитивной в равномерной операторной топологии, кроме того случая, когда ее область определения состоит самое большее из конечного числа непересекающихся множеств. Тем самым мы приходим к следующим определению и следствию.

3. Определение. Спектральная мера E называется *счетно аддитивной*, если для любых x^* из $\mathfrak{X}^*$ и x из $\mathfrak{X}$ числовая функция множества $x^*E(\cdot)\,x$ счетно аддитивна на области определения меры E.

→ 4. Следствие. *Если область определения счетно аддитивной спектральной меры E является σ-полем, то E счетно аддитивна в сильной операторной топологии и ограничена.*

Ограниченность $E(\sigma)$ вытекает из следствий IV.10.2 и II.3.21.

Спектральные операторы в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, составляющие основной объект изучения в настоящей главе, можно теперь определить следующим образом.

→ 5. Определение. *Спектральный оператор* — это оператор со счетно аддитивным разложением единицы, заданным на борелевских множествах плоскости.

Конечно, совсем не очевидно, что счетно аддитивное разложение единицы, заданное на борелевских множествах плоскости, однозначно определяется спектральным оператором T. На самом деле это верно, но пока это не доказано, любую такую спектральную меру мы будем рассматривать как *некоторое* разложение единицы для оператора T. Как только единственность будет доказана, мы будем говорить о *вполне определенном* разложении единицы для оператора T.

В анализе спектральных операторов мы воспользуемся еще одним новым понятием, а именно понятием аналитического распространения функции $R(\xi; T)\,x$. Здесь и далее символ $R(\xi; T)$ обозначает резольвенту $(\xi I - T)^{-1}$ оператора T в точке ξ резольвентного множества $\rho(T)$. Если x — вектор из $\mathfrak{X}$, то под *аналитическим распространением* $R(\xi; T)$ будет пониматься $\mathfrak{X}$-значная функция f, определенная и аналитическая на открытом множестве $D(f) \supseteq \rho(T)$ и такая, что

$$(\xi I - T)\,f(\xi) = x, \qquad \xi \in D(f).$$

Очевидно, что для такого распространения

$$f(\xi) = R(\xi; T)\,x, \qquad \xi \in \rho(T).$$

Понятие аналитического распространения отличается от понятия аналитического продолжения, так как область определения $D(f)$ распространения может содержать точки, которые невозможно соединить ни с какой точкой из $\rho(T)$ кривой, лежащей в $D(f)$.

→ 6. Определение. Говорят, что функция $R(\xi; T)x$ обладает *свойством однозначного распространения*, если для всякой пары аналитических распространений f, g функции $R(\xi; T)x$ мы имеем $f(\xi) = g(\xi)$ для всякой точки ξ из $D(f)D(g)$. Объединение множеств $D(f)$, когда f пробегает все аналитические распространения функции $R(\xi; T)x$, называется *резольвентным множеством вектора* x и обозначается через $\rho(x)$. *Спектр* $\sigma(x)$ *вектора* x определяется как дополнение $\rho(x)$.

Очевидно, что если $R(\xi; T)x$ обладает свойством однозначного распространения, то существует максимальное распространение $x(\cdot)$ для $R(\xi; T)x$ с областью определения $\rho(x)$. *Во всей оставшейся части этого параграфа* $x(\xi)$ *будет обозначать такое максимальное распространение функции* $R(\xi; T)x$ *во всех случаях, когда* $R(\xi; T)x$ *обладает свойством однозначного распространения. Тогда* $x(\xi)$ — *однозначная аналитическая функция с областью определения* $\rho(x)$, *причем*

$$x(\xi) = R(\xi; T)x, \qquad \xi \in \rho(T).$$

В следующем параграфе будет показано, что если T — спектральный оператор, то функция $R(\xi; T)x$ для всякого x из $\mathfrak{X}$ обладает свойством однозначного распространения. Следующий элегантный пример С. Какутани показывает, что это не так в случае произвольного оператора T.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{X}$ функций f, аналитических в единичном круге $|z| \leqslant 1$ и таких, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = |f|^2 < \infty.$$

В этом пространстве определим оператор T, полагая

$$T(f, z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Спектр оператора T есть множество таких λ, что $|\lambda| \leqslant 1$, и для $\lambda \in \rho(T)$ функцию $R(\lambda; T)(g, z)$ можно вычислить, решая уравнение

$$(\lambda I - T)f = g$$

для f. Элементарные вычисления показывают, что

$$f(z) = \frac{zg(z) - f(0)}{\lambda z - 1}.$$

Так как $f(z)$ аналитична в точке $z = \lambda^{-1}$, то мы должны иметь

$$f(0) = \lambda^{-1} g(\lambda^{-1}),$$

и потому

$$R(\lambda; T)(g, z) = \frac{zg(z) - \lambda^{-1} g(\lambda^{-1})}{\lambda(z - \lambda^{-1})}.$$

Таким образом, векторнозначная аналитическая функция $R(\lambda; T)g$, $\lambda \in \rho(T)$, будет иметь многозначные распространения, если функция g имеет многозначное аналитическое продолжение вне единичного круга.

3. Резольвента спектрального оператора

Векторнозначные аналитические функции $R_{\lambda}^{\tilde{}}(\xi; T)x$, связанные с резольвентой ограниченного спектрального оператора, обладают рядом важных свойств, которыми не обладают функции вида $R(\xi; T)x$, если T не является спектральным оператором. В этом параграфе мы рассмотрим несколько таких свойств. В следующей главе будет показано, насколько три из этих свойств близки к тому, чтобы быть достаточными условиями спектральности оператора T.

1. Лемма. *Пусть E — разложение единицы для ограниченного спектрального оператора T. Пусть σ — замкнутое множество комплексных чисел и $\xi_0 \notin \sigma$. Если $(\xi_0 I - T)x_0 = 0$, то*

$$E(\sigma)x_0 = 0, \qquad E(\{\xi_0\})x_0 = x_0,$$

где $\{\xi_0\}$ — множество, состоящее из единственной точки ξ_0.

Доказательство. Пусть T_σ — сужение оператора T на подпространство $E(\sigma)\mathfrak{X}$; поскольку $\xi_0 \notin \bar{\sigma}$, то $\xi_0 \in \rho(T_\sigma)$ и

$$R(\xi_0; T_\sigma)(\xi_0 I - T)E(\sigma) = E(\sigma).$$

Но так как

$$(\xi_0 I - T)E(\sigma)x_0 = E(\sigma)(\xi_0 I - T)x_0 = 0,$$

мы имеем $E(\sigma)x_0 = 0$. Положим теперь

$$\sigma_n = \left\{\xi \,\Big|\, |\xi - \xi_0| \geqslant \frac{1}{n}\right\},$$

так что $E(\sigma_n)x_0 = 0$, а поскольку E счетно аддитивно, то

$$[I - E(\{\xi_0\})]x_0 = \lim_n E(\sigma_n)x_0 = 0,$$

и тем самым $x_0 = E(\{\xi_0\})x_0$, ч. т. д.

Иногда в дальнейшем мы будем использовать обозначение $E(\xi_0)$ вместо $E(\{\xi_0\})$.

2. Теорема. *Если T — ограниченный спектральный оператор в $\mathfrak{X}$, то для всякого вектора x из $\mathfrak{X}$ функция $R(\xi; T)x$ обладает свойством однозначного распространения.*

Доказательство. Пусть f и g — два распространения функции $R(\xi; T)x$; положим

$$h(\xi) = f(\xi) - g(\xi), \qquad \xi \in D(f)D(g).$$

Предположим, чтобы провести доказательство от противного, что $h(\xi_0) \neq 0$ в некоторой точке $\xi_0 \in D(f)\,D(g)$. Тогда существует окрестность $N(\xi_0)$ точки ξ_0, такая, что $N(\xi_0) \subseteq D(f)\,D(g)$ и

$$\text{(i)} \qquad h(\xi) \neq 0, \quad (\xi I - T)\,h(\xi) = 0, \quad \xi \in N(\xi_0).$$

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность точек из $N(\xi_0)$, такая, что $\xi_n \neq \neq \xi_0$ и $\xi_n \to \xi_0$. Тогда из соотношений (i) и леммы 1 вытекает, что

$$0 = E(\xi_0)\,E(\xi_n)\,h(\xi_n) = E(\xi_0)\,h(\xi_n) \to E(\xi_0)\,h(\xi_0) = h(\xi_0),$$

но это противоречит тому, что $h(\xi_0) \neq 0$, ч. т. д.

Таким образом, если T — спектральный оператор и $x \in \mathfrak{X}$, то функция $R(\xi; T)\,x$ имеет максимальное аналитическое распространение, определенное на $\rho(x)$, которое мы будем обозначать через $x(\xi)$.

3. Следствие. *Если T — ограниченный спектральный оператор, то спектр $\sigma(x)$ вектора x пуст тогда и только тогда, когда $x = 0$.*

Доказательство. Согласно теореме 2, если спектр $\sigma(x)$ пуст, то функция $x(\xi)$ будет всюду определенной, однозначной и, следовательно, целой. Поскольку в силу VII.3.4

$$\lim_{\xi\to\infty} x^*x(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} x^*R(\xi; T)\,x = 0,$$

о $x^*x(\xi) = 0$ для всех ξ и всех $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Тогда, согласно следствию II.3.14, $x(\xi) = 0$ и тем самым $x = (\xi I - T)\,x(\xi) = 0$, ч. т. д.

→ 4. Теорема. *Пусть T — ограниченный спектральный оператор с разложением единицы E и δ — замкнутое множество комплексных чисел. Тогда*

$$E(\delta)\,\mathfrak{X} = \{x \mid \sigma(x) \subseteq \delta\}.$$

Доказательство. Пусть $E(\delta)\,x = x$, а T_δ — сужение оператора T на подпространство $E(\delta)\,\mathfrak{X}$. Так как $\sigma(T_\delta) \subseteq \delta$, то соотношение

$$R(\xi; T_\delta)\,E(\delta)\,x = R(\xi; T_\delta)\,x$$

показывает, что $R(\xi; T_\delta)\,E(\delta)\,x$ является аналитическим распространением $R(\xi; T)\,x$ на δ', дополнение множества δ. Таким образом, $\rho(x) \supseteq \delta'$ и $\sigma(x) \subseteq \delta$.

Обратно, предположим, что $\sigma(x) \subseteq \delta$, и пусть δ_1 — замкнутое подмножество дополнения δ' к δ. Тогда если $T_{\delta_1} = T \mid E(\delta_1)\,\mathfrak{X}$, то функция $R(\xi; T_{\delta_1})\,E(\delta_1)\,x$ является аналитическим распространением $R(\xi; T)\,E(\delta_1)\,x$ на δ_1'. Более того, как легко видеть, $E(\delta_1)\,x(\xi)$ является распространением $R(\xi; T)\,E(\delta_1)\,x$ на $\rho(x)$. Так как $R(\xi; T)\,E(\delta_1)\,x$ обладает аналитическим распространением на $\rho(x) \cup \delta_1'$, т. е. на всю комплексную плоскость, то спектр $\sigma(E(\delta_1)\,x)$ пуст. В силу предыдущего следствия $E(\delta_1)\,x = 0$.

Пусть δ_n — возрастающая последовательность замкнутых множеств, объединением которых является δ'. Как показано выше, $E(\delta_n)x = 0$, и поэтому

$$E(\delta')x = \lim_n E(\delta_n)x = 0,$$

так что $E(\delta)x = x$, ч. т. д.

5. Следствие. *Если E — разложение единицы для спектрального оператора T, то $E(\sigma(T)) = I$.*

6. Следствие. *Если T — спектральный оператор в $\mathfrak{X}$, то множество всех векторов, спектр которых лежит в заданном замкнутом множестве комплексных чисел, является замкнутым линейным многообразием в $\mathfrak{X}$.*

→ 7. Следствие. *Пусть T — спектральный оператор и A — ограниченное линейное преобразование, коммутирующее с T. Тогда A коммутирует с каждым разложением единицы для оператора T. Более того, $\sigma(Ax) \subseteq \sigma(x)$ для всякого вектора x из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть δ, δ_1 — непересекающиеся замкнутые множества комплексных чисел и E — разложение единицы для оператора T. Так как

$$(\xi I - T)Ax(\xi) = A(\xi I - T)x(\xi) = Ax,$$

то, очевидно, что $Ax(\xi)$ является аналитическим распространением $R(\xi; T)Ax$ на $\rho(x)$. Поэтому $\rho(Ax) \supseteq \rho(x)$, так что $\sigma(Ax) \subseteq \sigma(x)$. Тогда в силу теоремы 4

$$AE(\delta)\,\mathfrak{X} \subseteq E(\delta)\,\mathfrak{X}$$

и, следовательно,

$$E(\delta)AE(\delta) = AE(\delta), \qquad E(\delta)AE(\delta_1) = E(\delta)E(\delta_1)AE(\delta_1) = 0.$$

Так как дополнение δ' к δ является счетным объединением замкнутых множеств, то из счетной аддитивности E вытекает соотношение $E(\delta)AE(\delta') = 0$, и потому

$$E(\delta)A = E(\delta)A[E(\delta) + E(\delta')] = E(\delta)AE(\delta) = AE(\delta).$$

Поскольку в наших рассуждениях δ было произвольным замкнутым множеством, то A коммутирует с $E(\sigma)$ для всякого борелевского множества σ, ч. т. д.

→ 8. Следствие. *Всякий спектральный оператор имеет однозначно определенное счетно аддитивное разложение единицы, заданное на поле борелевских множеств.*

Доказательство. Пусть E и A — два разложения единицы для оператора T и δ — замкнутое множество комплексных чисел.

Тогда по теореме 4

$$A(\delta)\, E(\delta) = E(\delta), \quad E(\delta)\, A(\delta) = A(\delta),$$

и в силу следствия 7 $E(\delta) = A(\delta)$. Так как E счетно аддитивно, то $E(\sigma) = A(\sigma)$ для любого борелевского множества σ, ч. т. д.

→ 9. Определение. Единственное счетно аддитивное разложение единицы, заданное на борелевских множествах плоскости, которое определяется спектральным оператором T, называется *разложением единицы для оператора* T.

10. Теорема. *Пусть* $I = E_1 + \ldots + E_n$, *где* $E_1, \ldots, E_n$ — *ограниченные дизъюнктные проекторы в* $\mathfrak{X}$, *каждый из которых коммутирует с ограниченным оператором* T. *При этом* T *является спектральным оператором тогда и только тогда, когда каждое из сужений* $T \mid E_i\mathfrak{X}$ *есть спектральный оператор. Если* T — *спектральный оператор, то разложение единицы для сужения* $T \mid E_i\mathfrak{X}$ *является соответствующим сужением разложения единицы для оператора* T.

Доказательство. Пусть T — спектральный оператор. В силу следствия 7 E_i коммутирует с каждым проектором $E(\sigma; T)$ в разложении единицы для оператора T. Очевидно, что $E(\sigma; T) \mid E_i\mathfrak{X}$ является счетно аддитивной спектральной мерой в $E_i\mathfrak{X}$. Ясно также, что для любого оператора A, коммутирующего со всеми проекторами $E_1, \ldots, E_n$, резольвентное множество $\rho(A) = \bigcap_{i=1}^{n} \rho(A \mid E_i\mathfrak{X})$. Это замечание, примененное к оператору $T \mid E(\sigma; T)\,\mathfrak{X}$, показывает, что

$$\rho(T \mid E(\sigma; T)\,\mathfrak{X}) = \bigcap_{i=1}^{n} \rho((T \mid E(\sigma; T)\,\mathfrak{X}) \mid E_i\mathfrak{X}) =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \rho((T \mid E_i\mathfrak{X}) \mid E(\sigma; T)\, E_i\mathfrak{X}).$$

Поэтому если $\lambda \notin \overline{\sigma}$, то λ лежит в каждом из резольвентных множеств

$$\rho((T \mid E_i\mathfrak{X}) \mid E(\sigma; T)\, E_i\mathfrak{X}),$$

и потому

$$\sigma((T \mid E_i\mathfrak{X}) \mid E(\sigma; T)\, E_i\mathfrak{X}) \subseteq \overline{\sigma};$$

тем самым доказано, что сужение $E(\sigma; T) \mid E_i\mathfrak{X}$ является разложением единицы для сужения $T \mid E_i\mathfrak{X}$.

Обратно, предположим, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ сужение $T_i = T \mid E_i\mathfrak{X}$ является спектральным оператором, и положим

$$E(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} E(\sigma; T_i)\, E_i.$$

Тогда

$$E(\sigma)T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(\sigma;T_i)E_iT_jE_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E(\sigma;T_i)E_iT_iE_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}T_iE(\sigma;T_i)E_i=TE(\sigma).$$

Аналогично можно проверить, что $E(\cdot)$ является спектральной мерой и что она счетно аддитивна. Далее, если $\lambda\notin\bar{\sigma}$, то

$$\lambda\in\bigcap_{i=1}^{n}\rho(T_i\,|\,E(\sigma;T_i)E_i\mathfrak{X})=\rho(T\,|\,E(\sigma)\mathfrak{X}).$$

Тем самым доказано, что $E(\cdot)$ является разложением единицы для оператора T, ч. т. д.

4. Каноническое представление спектрального оператора

Если $E(\lambda_i)$, $i=1,\ldots,k$,— проекторы, связанные с оператором T в конечномерном пространстве $\mathfrak{X}$ с помощью построений, описанных в § VII.1, то существуют (см. VII.1.7) целые числа ν_i, $i=1,\ldots,k$, такие, что $(T-\lambda_iI)^{\nu_i}E(\lambda_i)=0$. Таким образом, оператор

$$TE(\lambda_i)=\lambda_iE(\lambda_i)+(T-\lambda_iI)E(\lambda_i)$$

оказывается суммой скалярного кратного тождественного оператора в пространстве $E(\lambda_i)\mathfrak{X}$ и нильпотентного оператора. Так как $\mathfrak{X}$ является прямой суммой (см. VII.1.6) подпространств $E(\lambda_i)\mathfrak{X}$, то оператор T можно представить в виде суммы:

$$T=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iE(\lambda_i)+\sum_{i=1}^{k}(T-\lambda_iI)E(\lambda_i)$$

оператора $S=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iE(\lambda_i)$, эквивалентного диагональной матрице, и нильпотентного оператора $N=\sum_{i=1}^{k}(T-\lambda_iI)E(\lambda_i)$. Другими словами, это классическое представление матрицы в жордановой форме показывает, что всякая конечная квадратная матрица комплексных чисел эквивалентна сумме диагональной матрицы и нильпотентной матрицы.

В настоящем параграфе описано аналогичное каноническое представление для ограниченного спектрального оператора в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Будет показано, что всякий такой оператор T является суммой $T = S + N$ квазинильпотентного оператора N и оператора S скалярного типа в смысле следующего определения.

→ 1. Определение. Ограниченный оператор S называется *оператором скалярного типа*, если он является спектральным и выполнено соотношение

$$S = \int \lambda E(d\lambda),$$

где E — разложение единицы для S.

Так как спектральная мера E обращается в нуль вне компактного множества $\sigma(S)$ (см. следствие 3.5), то функция $f(\lambda) = \lambda$ ограничена на $\sigma(S)$ и интеграл, определяющий S, существует.

Следует также заметить, что если исходить из спектральной меры E, счетно аддитивной на поле борелевских множеств и обращающейся в нуль вне данного компактного множества, то оператор S, определяемый соотношением

$$S = \int \lambda E(d\lambda),$$

является ограниченным оператором спектрального типа, для которого разложение единицы совпадает с E. Чтобы убедиться в этом, заметим, во-первых, что S коммутирует с проекторами $E(\delta)$, и, во-вторых, что для чисел λ_0, не лежащих в замыкании множества δ, функция $(\lambda_0 - \lambda)^{-1}$ ограничена на δ и потому

$$\left(\int_\delta \frac{E(d\lambda)}{\lambda_0 - \lambda}\right)(\lambda_0 I - S)\, E(\delta) = \left(\int_\delta \frac{E(d\lambda)}{\lambda_0 - \lambda}\right)\left(\int_\delta (\lambda_0 - \lambda)\, E(d\lambda)\right) =$$

$$= \int_\delta E(d\lambda) = E(\delta).$$

Этим показано, что спектр сужения S на $E(\delta)\mathfrak{X}$ содержится в $\bar{\delta}$, и доказано, что S является спектральным оператором скалярного типа с разложением единицы E.

Кроме понятия оператора скалярного типа в каноническом разложении спектральных операторов фигурирует и понятие квазинильпотентного оператора; для удобства напомним его:

2. Определение. Ограниченный линейный оператор в B-пространстве называется *квазинильпотентным*, если $\lim\limits_n |T^n|^{1/n} = 0$.

Следующее утверждение дает в терминах спектра полезное необходимое и достаточное условие того, что оператор является квазинильпотентным.

3. Следствие. *Ограниченный оператор T квазинильпотентен тогда и только тогда, когда $\sigma(T) = \{0\}$.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из леммы VII.3.4, ч. т. д.

4. Лемма. *Если S и N — ограниченные коммутирующие операторы и N квазинильпотентен, то $\sigma(S+N)=\sigma(S)$.*

Доказательство. Это — следствие теоремы VII.6.10 (или леммы IX.2.6 и теоремы IX.2.9).Для удобства читателя мы снова докажем его здесь. Так как N квазинильпотентен, то, в силу определения 2, $|N^k|=o(\varepsilon^k)$ для любого $\varepsilon>0$ и, таким образом, для всякого $\lambda\in\rho(S)$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}N^kR(\lambda;S)^k$ сходится в равномерной операторной топологии. Поскольку

$$\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}N^kR(\lambda;S)^k\Big\}\{I-NR(\lambda;S)\}=(I-NR(\lambda;S))\sum_{k=0}^{\infty}N^kR(\lambda;S)^k=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}N^kR(\lambda;S)^k-\sum_{k=1}^{\infty}N^kR(\lambda;S)^k=$$
$$=I,$$

то сумма этого ряда равна $(I-NR(\lambda;S))^{-1}$. Тем самым показано, что оператор

$$(\lambda I-S-N)^{-1}=R(\lambda;S)(I-NR(\lambda;S))^{-1}$$

существует как всюду определенный и ограниченный оператор. Таким образом, $\lambda\in\rho(S+N)$ и $\sigma(S)\supseteq\sigma(S+N)$. Аналогично доказывается, что $\sigma(S+N)\supseteq\sigma(S)$, ч. т. д.

Используя понятия квазинильпотентного оператора и оператора скалярного типа, мы можем сформулировать следующую теорему о *каноническом представлении* спектрального оператора.

→ 5. Теорема. *Ограниченный оператор T является спектральным оператором тогда и только тогда, когда его можно представить в виде суммы $T=S+N$ ограниченного оператора S скалярного типа и квазинильпотентного оператора N, коммутирующего с S. Более того, это разложение единственно и операторы T и S имеют один и тот же спектр и одно и то же разложение единицы.*

Доказательство. Покажем сначала, что сумма $T=S+N$ оператора скалярного типа S и квазинильпотентного оператора N, коммутирующего с S, является спектральным оператором, имеющим то же разложение единицы, что и S. Пусть E — разложение единицы для S; тогда, в силу следствия 3.7, $NE(\delta)=E(\delta)N$, и потому оператор $T=S+N$ коммутирует с $E(\delta)$. Таким образом, чтобы показать, что E является разложением единицы для оператора T, достаточно проверить включение $\sigma(T_\delta) \subseteq \bar{\delta}$ для всякого борелевского множества δ. По лемме 4, $\sigma(T_\delta) = \sigma(S_\delta)$, и так как E есть разложение единицы для оператора S, то $\sigma(S_\delta) \subseteq \bar{\delta}$, и, следовательно, $\sigma(T_\sigma) \subseteq \bar{\delta}$. Это показывает, что операторы T и S имеют одно и то же разложение единицы. Поскольку $S = \int \lambda E(d\lambda)$, то из следствия 3.8 вытекает, что оператор S однозначно определяется оператором T. Поэтому и оператор $N = T - S$ однозначно определяется оператором T. Из леммы 4 следует, что операторы T и S имеют один и тот же спектр.

Далее будет показано, что всякий спектральный оператор T имеет представление, указанное в формулировке теоремы. Операторы S и N определяются соотношениями

$$S = \int \lambda E(d\lambda), \qquad N = T - S,$$

где E — разложение единицы для оператора T. Очевидно, что S — оператор скалярного типа с разложением единицы E. Так как оператор T коммутирует с $E(\delta)$, то он коммутирует и с оператором S, и потому N коммутирует с S. Поэтому требуемое утверждение будет установлено, как только мы покажем, что оператор N квазинильпотентен. В силу следствия 3 для доказательства этого факта достаточно показать, что спектр $\sigma(N)$ оператора N содержится в круге $C_\varepsilon = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant \varepsilon\}$ сколь угодно малого радиуса $\varepsilon > 0$. Пусть спектр оператора T разложен в сумму непересекающихся борелевских множеств $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$, каждое из которых имеет диаметр, меньший положительного числа $\alpha < \varepsilon$; величина α будет уточнена немного позже. Если λ лежит в резольвентном множестве каждого из сужений $N_{\sigma_i} = N \mid E(\sigma_i)\mathfrak{X}$ и $R_i = R(\lambda; N_{\sigma_i})$, то, полагая $R = \sum_{i=1}^{k} R_i E(\sigma_i)$, имеем

$$(\lambda I - N) R = \sum_{i=1}^{k} (\lambda I - N_{\sigma_i}) R_i E(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{k} E(\sigma_i) = I$$

и

$$R(\lambda I - N) = \sum_{i=1}^{k} R(\lambda I - N) E(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{k} R(\lambda I - N_{\sigma_i}) E(\sigma_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} R_i (\lambda I - N_{\sigma_i}) E(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{k} E(\sigma_i) = I.$$

Таким образом, $\lambda \in \rho(N)$. Следовательно, спектр оператора N содержится в объединении спектров $\sigma(N_{\sigma_i})$ сужений $N \mid E(\sigma_i)\mathfrak{X}$, и поэтому достаточно показать, что $\sigma(N_{\sigma_i}) \subseteq C_\varepsilon$ для каждого

$i=1, \ldots, k$. Для этого запишем оператор N_{σ_i} в виде

$$N_{\sigma_i}=(T-\lambda_i I)_{\sigma_i}+(\lambda_i I-S)_{\sigma_i},$$

где λ_i — точка из $\sigma(T_{\sigma_i})$. Так как $\sigma(T_{\sigma_i}) \subseteq \bar{\sigma}_i$, то мы имеем

$$\sigma((T-\lambda_i I)_{\sigma_i}) \subseteq \bar{\sigma}_i-\lambda_i \subseteq C_\alpha \subseteq C_\varepsilon.$$

Поскольку $(\lambda_i I-S)_{\sigma_i}$ является сужением оператора $\int\limits_{\sigma_i}(\lambda_i-\lambda)\, E(d\lambda)$ на σ_i, то выполняются неравенства

$$|(\lambda_i I-S)_{\sigma_i}| \leqslant v(E) \max_{\lambda \in \sigma_i}|\lambda-\lambda_i| \leqslant \alpha v(E),$$

и поэтому оператор $(\lambda I - S)_{\sigma_i}$ мал по норме, если α мало. Таким образом (см. VII.6.1), $\sigma(N_{\sigma_i}) \subseteq C_\varepsilon$ при малом α. В силу изложенного выше, $\sigma(N) \subseteq C_\varepsilon$, и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда вытекает, что $\sigma(N)=\{0\}$. Поэтому, согласно следствию 3, оператор квазинильпотентный, ч. т. д.

6. Определение. Полученное в теореме 5 представление спектрального оператора $T = S + N$ в виде суммы оператора S скалярного типа и квазинильпотентного оператора N, коммутирующего с S, называется *каноническим представлением* оператора T. Оператор S называется *скалярной частью* оператора T, а N — *квазинильпотентной частью* (или *радикальной частью*) T.

5. Операционное исчисление для ограниченных спектральных операторов

Следует напомнить, что (см. VII.3.8—10) для произвольного ограниченного оператора T в комплексном B-пространстве формула

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(\lambda)\, R(\lambda; T)\, d\lambda,$$

где C — допустимый контур, охватывающий спектр T, дает операционное исчисление на классе $\mathcal{F}(T)$ числовых функций, аналитических на спектре оператора T. В этом параграфе показано, что если T — спектральный оператор и функция f лежит в $\mathcal{F}(T)$, то оператор $f(T)$ может быть вычислен лишь через значения, которые функция f принимает *на* спектре T.

→ 1. Теорема. *Пусть T — ограниченный спектральный оператор, N — его квазинильпотентная часть и E — его разложение единицы. Тогда для всякой числовой функции f, аналитической* *и однозначной на спектре* $\sigma(T)$, *выполнено соотношение*

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!}\int\limits_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda)\,E(d\lambda),$$

где ряд в правой части сходится в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Теорему можно вывести из следствия VII.6.12, показав, что скалярная часть S оператора T удовлетворяет соотношению $f(S)=\int f(\lambda)\,E(d\lambda)$ для всякой функции f из $\mathscr{F}(T)$. Однако мы дадим здесь доказательство, не зависящее от следствия VII.6.12. Оно основано на следующей лемме:

2. Лемма. *Пусть E — разложение единицы для спектрального оператора T и N — его радикальная часть. Тогда ряд*

$$R(\xi;T)=\sum_{n=0}^{\infty}N^n\int\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}$$

сходится в равномерной операторной топологии, причем равномерно по ξ на любом замкнутом множестве ρ, содержащемся в $\rho(T)$.

Доказательство. Если ξ лежит в ρ, то функция $(\xi-\lambda)^{-n}$ ограничена на $\sigma(T)$, так что интеграл существует. Более того,

$$\left|\int\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right|\leqslant r^{n+1}v(E),$$

где $r=\sup|\xi-\lambda|^{-1}$; эта верхняя грань берется по λ из $\sigma(T)$ и ξ из ρ. Так как N является обобщенным нильпотентным оператором, то

$$\sqrt[n]{|N^n|}\to 0,$$

и, следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|N^n|\,r^{n+1}$$

сходится. Таким образом, ряд

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}N^n\int\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}$$

сходится в равномерной операторной топологии, причем равномерно по ξ из ρ. Если S — скалярная часть T, то

$$(\xi I-S)\int\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}=\left[\int(\xi-\lambda)\,E(d\lambda)\right]\left[\int\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right]=\int\frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n}},$$

и потому

$$(\xi I - T)\,U = (\xi I - S - N)\sum_{0}^{\infty} N^n \int \frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{0}^{\infty}\left\{N^n \int \frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n}} - N^{n+1}\int \frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right\} = I,$$

что доказывает лемму, ч. т. д.

Вернемся теперь к доказательству теоремы; пусть C — допустимая жорданова кривая в $\rho(T)$, содержащая спектр $\rho(T)$ внутри себя и такая, что функция f аналитична внутри C и на C. Тогда мы имеем

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\xi)\,R(\xi;\,T)\,d\xi,$$

и из леммы 2 вытекает что

$$(*)\qquad f(T) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} N^n \int_C f(\xi)\left[\int_{\sigma(T)} \frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right] d\xi,$$

причем ряд сходится в равномерной операторной топологии. Для функционала $x^* \in \mathfrak{X}^*$ и вектора $x \in \mathfrak{X}$ по теореме Фубини имеем

$$x^*\left\{\int_C f(\xi)\left[\int_{\sigma(T)} \frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right] d\xi\right\} x =$$

$$= \int_C f(\xi)\left[\int_{\sigma(T)} \frac{x^*E(d\lambda)\,x}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right] d\xi =$$

$$= \int_{\sigma(T)}\left[\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\,d\xi\right] x^*E(d\lambda)\,x =$$

$$= \frac{2\pi i}{n!}\int_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda)\,x^*E(d\lambda)\,x.$$

Таким образом,

$$\int_C f(\xi)\left[\int_{\sigma(T)} \frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right] d\xi = \frac{2\pi i}{n!}\int_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda)\,E(d\lambda),$$

так что в силу соотношения (*)

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} N^n \int_{\sigma(T)}\left[\int_C \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\right] E(d\lambda) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!}\int_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda)\,E(\lambda),$$

при этом ряды сходятся в равномерной операторной топологии, ч. т. д.

→ 3. Определение. Говорят, что T является *оператором типа* m, если он является спектральным с разложением единицы E и выполнено соотношение

$$f(T)=\sum_{n=0}^{m}\frac{N^n}{n!}\int f^{(n)}(\lambda)\,E(d\lambda),\qquad f\in\mathcal{F}(T).$$

4. Теорема. *Пусть N — радикальная часть ограниченного спектрального оператора T; тогда T имеет тип m в том и только том случае, если $N^{m+1}=0$.*

Доказательство. Если $N^{m+1}=0$, то ясно, что формула из теоремы 1 сводится к формуле определения 3. Обратно, если T — оператор типа m, то, полагая в этих двух формулах

$$f(\lambda)=\frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!},$$

мы видим, что

$$0=N^{m+1}\int E(d\lambda)=N^{m+1},\quad \text{ч. т. д.}$$

5. Следствие. *Спектральный оператор является оператором скалярного типа тогда и только тогда, когда он имеет тип* 0.

→ 6. Теорема. *Если T — ограниченный спектральный оператор и функция f из класса $\mathcal{F}(T)$, то $f(T)$ является спектральным оператором и его разложение единицы определяется по спектральному разложению оператора T соотношением*

$$E(\delta;\ f(T))=E(f^{-1}(\delta);\ T).$$

Кроме того, если S — скалярная часть оператора T, то $f(S)$ — скалярная часть оператора $f(T)$.

Доказательство. По теореме 1

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!},$$

причем ряд сходится в равномерной операторной топологии. Так как

$$f(S)=\int f(\lambda)\,E(d\lambda),$$

то по принципу изменения меры мы имеем $f(S)=\int\lambda E_1(d\lambda)$, где $E_1(\delta)=E(f^{-1}(\delta))$. Из замечания, сделанного после определения 4.1, вытекает, что $f(S)$ является оператором скалярного типа с разложением единицы E_1. Таким образом, если мы покажем, что оператор

$$N_1=\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!}$$

квазинильпотентен, то теорема будет вытекать из теоремы 4.5. По лемме IX.2.6 радикал в коммутативной B-алгебре является идеалом, и поэтому оператор $N^{(m)}$, определяемый соотношением

$$N^{(m)}=\sum_{n=1}^{m} f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!},$$

лежит в радикале замкнутой коммутативной подалгебры из $B(\mathfrak{X})$, порожденной операторами I, S и N. По лемме IX.1.12(e) этот радикал замкнут. Так как $N^{(m)}\to N_1$, то отсюда вытекает, что оператор N_1 также лежит в этом радикале, и потому он квазинильпотентен, ч. т. д.

7. Следствие. *В предположениях предыдущей теоремы $f(T)$ — оператор типа m, если T — оператор типа m.*

Доказательство. В ходе предыдущего доказательства мы показали, что радикальной частью оператора $f(T)$ является оператор

$$N_1=\sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!}.$$

Так как $N^{m+1}=0$, то

$$N_1=\sum_{n=1}^{m} f^{(n)}(S)\frac{N^n}{n!}$$

и, значит, $N_1^{m+1}=0$, ч. т. д.

6. Ограниченные спектральные операторы в гильбертовом пространстве

Как связаны между собой ограниченные спектральные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и ограниченные нормальные операторы в $\mathfrak{H}$? Основным результатом в этом направлении является теорема Уэрмера, которая утверждает, что всякий оператор скалярного типа в гильбертовом пространстве эквивалентен нормальному оператору. Эта теорема и другие специальные свойства спектральных операторов в гильбертовом пространстве обсуждаются в этом параграфе.

1. Лемма. *Пусть G — ограниченная абелева группа операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда существует ограни-*

ченный самосопряженный оператор B в $\mathfrak{H}$ с ограниченным всюду определенным обратным, такой, что для всякого оператора T из G оператор BTB^{-1} унитарен.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}$ — линейное пространство всех числовых функций на $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{P}$ состоит из тех функций f из $\mathfrak{L}$, которые билинейны, эрмитово симметричны и таковы, что $f(x, x)\geqslant 0$ для всех x из $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{L}$ наделено слабой топологией произведения, так что по определению множества

$$\{f \mid f\in\mathfrak{L},\ \ |f(x, y)-g(x, y)|<\varepsilon\},$$

где $x, y\in\mathfrak{H}$ и $\varepsilon>0$, образуют подбазис окрестностей точки g в $\mathfrak{L}$. Очевидно, что $\mathfrak{P}$ — замкнутое множество в $\mathfrak{L}$ и что выпуклое множество, порожденное функциями f вида $f(x, y)=(Tx, Ty)$, где T принадлежит G, является подмножеством в $\mathfrak{P}$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ замыкание этого выпуклого множества, так что $\mathfrak{K}$ — замкнутое выпуклое подмножество в $\mathfrak{P}$. Если M — верхняя грань норм операторов из G, то $|(Tx, Ty)|\leqslant M^2|x|\,|y|$, так что

$$\text{(i)}\qquad |f(x, y)|\leqslant M^2|x|\,|y|, \qquad f\in\mathfrak{K}.$$

К тому же поскольку $|x|^2=(T^{-1}Tx, T^{-1}Tx)\leqslant M^2|Tx|^2$, то

$$\text{(ii)}\qquad \frac{|x|^2}{M^2}\leqslant f(x, x), \qquad f\in\mathfrak{K}$$

Поскольку $\mathfrak{K}$ замкнуто в $\mathfrak{P}$, а $\mathfrak{P}$ замкнуто в $\mathfrak{L}$, то из неравенства (i) и теоремы Тихонова о компактности пространств-произведений (I.8.5) вытекает, что $\mathfrak{K}$ — компактное множество. Для каждого T из G определим непрерывное линейное отображение J_T пространства $\mathfrak{L}$ в себя по формуле

$$(J_Tf)(x, y)=f(Tx, Ty), \qquad x, y\in\mathfrak{H}.$$

Так как $J_{T_1}J_{T_2}=J_{T_1T_2}$, а G — абелева группа, то набор $\{J_T\}$ также является абелевой группой непрерывных линейных операторов в пространстве $\mathfrak{L}$. Кроме того, легко видеть, что $\{J_T\}$ отображает $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}$. Из теоремы Маркова о неподвижной точке (V.10.6) вытекает существование элемента $f_0\in\mathfrak{K}$, такого, что $J_Tf_0=f_0$ для всех T из G.

По лемме X.2.2 существует такой ограниченный самосопряженный оператор A в $\mathfrak{H}$, что $f_0(x, y)=(Ax, y)$. Следовательно,

$$(Ax, y) = (ATx, Ty) = (T^*ATx, y), \qquad T\in G,$$

так что $A = T^*AT$ для всякого оператора T из G. Поскольку $f_0\in\mathfrak{P}$, то $(Ax, x) = f_0(x, x)\geqslant 0$, и тогда по теореме X.4.2 спектр оператора A положителен. Если E — разложение единицы для A, то оператор $B = \int \lambda^{1/2}E(d\lambda)$ является ограниченным самосопряженным оператором, причем $B^2 = A$. В силу неравенства (ii) мы имеем

$$\frac{|x|^2}{M^2} \leqslant (Ax, x) = (B^2x, x) = |Bx|^2;$$

это показывает, что B имеет ограниченный обратный. Тогда по лемме XII.1.2 образ $B\mathfrak{H}$ замкнут. Для проверки того, что B^{-1} определен всюду, достаточно поэтому показать, что лишь нулевой вектор $y = 0$ ортогонален к $B\mathfrak{H}$. Если y ортогонален к $B\mathfrak{H}$, то $0 = (B^2y, y) = (By, By)$, и потому $By = 0$. Так как B обратим, то $y = 0$. Этим доказано, что B является самосопряженным линейным гомеоморфизмом $\mathfrak{H}$ на все $\mathfrak{H}$. Но поскольку $T^*AT = A$, то $B^2T = (T^*)^{-1} B^2$ и тем самым

$$BTB^{-1} = B^{-1} (T^*)^{-1} B = ((BTB^{-1})^*)^{-1},$$

что доказывает унитарность оператора BTB^{-1}, ч. т. д.

2. Лемма. *Пусть $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$ — конечный набор коммутирующих ограниченных булевых алгебр проекторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда существует ограниченный самосопряженный оператор B в $\mathfrak{H}$ с ограниченным всюду определенным обратным, такой, что оператор BEB^{-1} является самосопряженным проектором для всякого проектора E из булевой алгебры, порожденной алгебрами $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k$.*

Доказательство. Для $E \in \mathfrak{B}_i$ положим $F(E) = I - 2E$ Тогда $F(E)^2 = I - 4E + 4E^2 = I$ и $F(E_1) F(E_2) = I - 2E_1 - 2E_2 + 4E_1E_2 = F(E_1 \wedge (I - E_2)) \vee (E_2 \wedge (I - E_1))$. Таким образом, набор G_i всех $F(E)$, где $E \in \mathfrak{B}_i$, образует ограниченную абелеву группу операторов в гильбертовом пространстве. Очевидно, что все элементы G_i коммутируют со всеми элементами G_j. Таким образом, множество G произведений элементов $g_1, \ldots, g_k$, где $g_i \in G_i$, является ограниченной абелевой группой операторов в гильбертовом пространстве. Из предыдущей леммы сразу же вытекает существование ограниченного самосопряженного оператора B, имеющего ограниченный всюду определенный обратный и такого, что оператор $BF(E)B^{-1} = U$ унитарен для всех $E \in \mathfrak{B}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Так как $F(E)^2 = I$, то $U^2 = I$, и тем самым $U^* = U^{-1} = U$. Таким образом, U — самосопряженный оператор и, следовательно, оператор

$$BEB^{-1} = \frac{1}{2} B (I + F(E)) B^{-1} = \frac{1}{2} (I + U)$$

также самосопряжен для всякого E из $\mathfrak{B}_i$, $i = 1, \ldots, k$. Отсюда непосредственно вытекает нужное утверждение, ч. т. д.

3. Следствие. *Наименьшая булева алгебра проекторов в гильбертовом пространстве, содержащая каждую алгебру из конечного набора коммутирующих ограниченных булевых алгебр проекторов, сама является ограниченной.*

4. Теорема. *Пусть* $S_1, \ldots, S_k$ — *коммутирующие операторы скалярного типа в гильбертовом пространстве. Тогда существует ограниченный самосопряженный оператор* B, *имеющий ограниченный всюду определенный обратный, такой, что все операторы* BS_iB^{-1}, $i = 1, \ldots, k$, *являются нормальными.*

Доказательство. Пусть E_i — разложение единицы для S_i. По лемме 2 существует оператор B с требуемыми свойствами, такой, что для всякого борелевского множества δ все проекторы $P(\delta) = BE_i(\delta)B^{-1}$, $i = 1, \ldots, k$, являются самосопряженными операторами. Таким образом, операторы

$$BS_iB^{-1} = \int \lambda BE_i(d\lambda)B^{-1}, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

являются нормальными, ч. т. д.

5. Следствие. *Сумма и произведение двух коммутирующих ограниченных спектральных операторов в гильбертовом пространстве также являются спектральными операторами.*

Доказательство этого следствия основано на следующей лемме.

6. Лемма. *Пусть* A *и* B — *ограниченные операторы в гильбертовом пространстве и* A *нормален. Тогда если* B *коммутирует с* A, *то он коммутирует и с* A^*.

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 3.7, ч. т. д.

Доказательство следствия 5. Пусть T_1 и T_2 — коммутирующие спектральные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а $S_1 + N_1$ и $S_2 + N_2$ — их канонические представления. Из следствия 3.7 вытекает, что все операторы S_1, S_2, N_1 и N_2 коммутируют друг с другом. Таким образом, сумма и произведение операторов T_1 и T_2 имеют вид

$$T_1 + T_2 = S_1 + S_2 + N, \qquad T_1T_2 = S_1S_2 + M,$$

где N и M — квазинильпотентные операторы, коммутирующие с S_1 и S_2. Для проверки того, что операторы $T_1 + T_2$ и T_1T_2 являются спектральными, достаточно в силу теоремы 4.5 показать, что $S_1 + S_2$ и S_1S_2 — операторы скалярного типа. По теореме 4 существует линейный гомеоморфизм B пространства $\mathfrak{H}$ на все $\mathfrak{H}$, такой, что BS_1B^{-1} и BS_2B^{-1} являются коммутирующими нормальными операторами. Следовательно, их сумма и произведение также нормальные операторы, и поэтому очевидно, что $S_1 + S_2$ и S_1S_2 — операторы скалярного типа, ч. т. д.

Далее мы постараемся охарактеризовать операторы конечного типа в терминах скорости роста резольвенты.

7. Теорема. *Пусть T — ограниченный спектральный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, E — его разложение единицы, а T_σ — его сужение на многообразие $E(\sigma)\mathfrak{H}$. Оператор T имеет тип $m-1$ тогда и только тогда, когда существует постоянная K, не зависящая от борелевского множества σ, такая, что*

$$(*)\qquad |R(\xi;\, T_\sigma)\, E(\sigma)| \leqslant \frac{K}{\operatorname{dist}(\xi,\, \bar{\sigma})^m}, \qquad \xi \notin \bar{\sigma},\ |\xi| \leqslant |T|+1.$$

Доказательство. В силу теоремы 5.4 достаточно доказать, что условие $(*)$ эквивалентно условию $N^m = 0$. Если $N^m = 0$ и $\xi \notin \bar{\sigma}$, то по лемме 5.2

$$R(\xi;\, T_\sigma)\, E(\sigma) = \sum_{n=0}^{m-1} N^n \int_\sigma \frac{E(d\lambda)}{(\lambda-\xi)^{n+1}},$$

откуда вытекает соотношение $(*)$.

Для доказательства импликации $(*) \Rightarrow N^m = 0$ нам понадобится следующая лемма:

8. Лемма. *Пусть T — спектральный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и E — его разложение единицы. Тогда существует такая постоянная M, что для любого конечного набора A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, коммутирующих с T, и любого набора σ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, непересекающихся борелевских множеств выполнено неравенство*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j E(\sigma_j)\Big| \leqslant M \sup_{1\leqslant j\leqslant n} |A_j|.$$

Доказательство. По лемме 2 существует линейное взаимно однозначное отображение B, такое, что $B\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, оба оператора B и B^{-1} непрерывны и для всякого борелевского множества σ проектор

$$P(\sigma) = BE(\sigma)B^{-1}$$

самосопряжен. Если $B_j = BA_jB^{-1}$, то

$$B\Big\{\sum_{j=1}^{n} A_j E(\sigma_j)\Big\} B^{-1} = \sum_{j=1}^{n} B_j P(\sigma_j).$$

В силу следствия 3.7 оператор A_j коммутирует с $E(\sigma)$ и поэтому B_j коммутирует с $P(\sigma)$. Таким образом,

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} B_j P(\sigma_j)x\Big|^2 = \Big|\sum_{j=1}^{n} P(\sigma_j) B_j x\Big|^2 = \sum_{j=1}^{n} |P(\sigma_j) B_j x|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_j |B_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |P(\sigma_j)x|^2 \leqslant \sup_j |B_j|^2 \cdot |x|^2,$$

что доказывает лемму.

Пусть δ — борелевское множество диаметра меньшего, чем ε, и ξ — точка из δ. Тогда

$$(T-\xi I)^m E(\delta)=(T_\delta-\xi I_\delta)^m E(\delta)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda-\xi)^m R(\lambda;\ T_\delta)\, E(\delta)\, d\lambda,$$

где C — окружность с центром в точке ξ радиуса 2ε. По предположению подинтегральная функция ограничена величиной $KM_1 2^m$, где $M_1=\sup\limits_\delta |E(\delta)|$, так что мы имеем

$$|(T-\xi I)^m E(\delta)|\leqslant 2\varepsilon K M_1 2^m.$$

Пусть теперь спектр $\sigma(T)$ разбит на борелевские множества σ_j, $j=1, \ldots, n(\varepsilon)$, каждое из которых диаметра меньшего, чем ε, и пусть точки $\xi_j \in \sigma_j$. Тогда в силу предыдущей леммы

$$\left|\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} (T-\xi_i I)^m E(\sigma_i)\right|\leqslant 2\varepsilon KMM_1 2^m.$$

Используя теорему о биноме, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} (T-\xi_i I)^m E(\sigma_i)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k T^{m-k}\left\{\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} \xi_i^k E(\sigma_i)\right\}.$$

Так как функция λ^k равномерно непрерывна по λ, когда λ пробегает $\sigma(T)$, то суммы $\sum\limits_{i=1}^{n(\varepsilon)} \xi_i^k E(\sigma_i)$ равномерно стремятся к

$$\int_{\sigma(T)} \lambda^k E(d\lambda)=S^k$$

при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, из двух последних соотношений и предшествующего им неравенства мы имеем

$$0=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k T^{m-k} S^k=(T-S)^m=N^m, \quad \text{ч. т. д.}$$

7. Соотношения между спектральным оператором и его скалярной частью

В этом параграфе излагаются элегантные результаты Фогеля о топологических и алгебраических свойствах, которыми обладает скалярная часть спектрального оператора. Спектральные соотношения между спектральным оператором и его скалярной частью будут рассмотрены в следующем параграфе. На протяжении всего этого параграфа буквой T обозначается спектральный оператор, буквами S и N — его скалярная и радикальная части, а буквой E — его разложение единицы. Следует напомнить, что $T = S + N$, $\sigma(T) = \sigma(S)$ и что E также является разложением единицы для S. Символ $B(\mathfrak{X})$ будет использоваться для обозначения алгебры всех ограниченных линейных операторов в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$.

1. Лемма. *Скалярная часть S лежит в замкнутом линейном многообразии в $B(\mathfrak{X})$, порожденном теми проекторами $E(\sigma)$, для которых $0 \notin \bar{\sigma}$.*

Доказательство. По определению интеграла, данному в § X.1, для всякого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ множества $\sigma(S)$ на подмножества, такое, что точка $\lambda = 0$ принадлежит замыканию самое большее одного из этих множеств $\bar{\sigma}_i$ и

$$\left| S - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i E(\sigma_i) \right| < \varepsilon$$

для любого набора комплексных чисел λ_i в σ_i. Если 0 не лежит в $\sigma(S)$, то лемма доказана. Если же $\lambda = 0$ принадлежит спектру $\sigma(S)$, скажем $0 \in \sigma_0$, то можно считать, что в последнем неравенстве $\lambda_0 = 0$; тем самым лемма доказана и в этом случае, ч. т. д.

2. Теорема. *Пусть T лежит в правом (левом) идеале $\mathfrak{J}$ в $B(\mathfrak{X})$. Тогда каждый проектор $E(\sigma)$ при $0 \notin \bar{\sigma}$ принадлежит идеалу $\mathfrak{J}$. Если идеал $\mathfrak{J}$ замкнут, то операторы S и N также принадлежат $\mathfrak{J}$.*

Доказательство. Пусть $0 \notin \bar{\sigma}$ и $T_\sigma = TE(\sigma) \mid E(\sigma)\mathfrak{X}$ — сужение оператора T на инвариантное подпространство $E(\sigma)\mathfrak{X}$. Так как $\sigma(T_\sigma) \subseteq \bar{\sigma}$, то $0 \in \rho(T_\sigma)$, и поэтому T_σ^{-1} существует как ограниченный линейный оператор в пространстве $E_\sigma(\mathfrak{X})$. Пусть V_σ — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{X}$, определяемый соотношением

$$V_\sigma x = T_\sigma^{-1} E(\sigma)\mathfrak{X}, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Тогда $TV_\sigma = E(\sigma) = V_\sigma T$, и мы доказали, что $E(\sigma)$ лежит в $\mathfrak{J}$. Из леммы 1 вытекает, что оператор S, а следовательно, и оператор N принадлежат идеалу $\mathfrak{J}$, если $\mathfrak{J}$ замкнут, ч. т. д.

3. Следствие. *Если T — компактный оператор, то компактны также операторы S, N и каждый проектор $E(\sigma)$, где $0 \notin \bar{\sigma}$.*

Доказательство. В силу следствия VI.5.5 компактные операторы образуют замкнутый двусторонний идеал в $B(\mathfrak{X})$; из этого факта непосредственно вытекает наше следствие, ч. т. д.

4. Следствие. *Если T — слабо компактный оператор, слабо компактны также операторы S, N и каждый проектор $E(\sigma)$, где $0 \notin \overline{\sigma}$.*

Доказательство. В силу следствия VI.4.6 слабо компактные операторы образуют замкнутый двусторонний идеал в $B(\mathfrak{X})$, откуда непосредственно вытекает наше следствие, ч. т. д.

Если $\mathfrak{Y}$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathfrak{X}$, то множество ограниченных линейных операторов A в $\mathfrak{X}$, для которых $A\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, образует замкнутый правосторонний идеал в $B(\mathfrak{X})$. Поэтому следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.

5. Следствие. *Образы операторов S, N и $E(\sigma)$, если $0 \notin \overline{\sigma}$, содержатся в замыкании образа оператора T.*

Пусть A_0 — фиксированный ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{X}$. Тогда множество всех ограниченных линейных операторов A в $\mathfrak{X}$, для которых $A_0A = 0$ ($AA_0 = 0$), является замкнутым правосторонним (левосторонним) идеалом в $B(\mathfrak{X})$. Поэтому следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.

6. Следствие. *Если $A_0T = 0$ (соответственно $TA_0 = 0$), то $A_0S = A_0N = A_0E(\sigma) = 0$ при $0 \notin \overline{\sigma}$ (соответственно $SA_0 = NA_0 = E(\sigma)A_0 = 0$ при $0 \notin \overline{\sigma}$).*

7. Следствие. *Спектральный оператор является оператором конечного типа тогда и только тогда, когда он аннулируется некоторой степенью своей радикальной части.*

Доказательство. Если T — оператор конечного типа, то $N^n = 0$ для некоторого натурального n (теорема 5.4), так что $TN^n = 0$. Обратно, если некоторая степень N аннулирует T, скажем $TN^p = 0$, то из следствия 6 вытекает, что $N^{p+1} = 0$, и потому T — оператор конечного типа, ч. т. д.

8. Следствие. *Если $Tx = 0$, то $Sx = Nx = E(\sigma)x$ при $0 \notin \overline{\sigma}$.*

Доказательство. Для данного вектора x в $\mathfrak{X}$ класс ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$, для которых $Ax = 0$, является замкнутым левосторонним идеалом в $B(\mathfrak{X})$, ч. т. д.

9. Следствие. *Пусть $0 \notin \overline{\sigma}$, и $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathfrak{X}$, для которой $\{Tx_n\}$ сходится (сходится к нулю). Тогда последовательность $\{E(\sigma)x_n\}$ сходится (сходится к нулю). Если $\{x_n\}$ ограничена, то последовательности $\{Sx_n\}$ и $\{Nx_n\}$ также ограничены.*

Доказательство. Множество всех операторов A из $B(\mathfrak{X})$, для которых последовательность $\{Ax_n\}$ сходится (сходится к нулю), образует левосторонний идеал, и этот идеал замкнут, если $\{x_n\}$ ограничена. Поэтому следствие непосредственно вытекает из теоремы 2, ч. т. д.

10. Теорема. *Пусть A — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{X}$. При этом $AT = 0$ тогда и только тогда, когда $AN = 0$ и $AE(\{0\}') = 0$. Аналогично, $TA = 0$ тогда и только тогда, когда $E(\{0\}')A = NA = 0$.*

Доказательство. Если $AT = 0$, то из следствия 6 вытекает, что $AN = 0$ и

$$AE\left(\left\{\lambda \mid |\lambda| \geqslant \frac{1}{n}\right\}\right) = 0,$$

так что соотношение $AE(\{0\}') = 0$ является следствием счетной аддитивности E.

Предположим теперь, что $AN = 0$ и $AE(\{0\}') = 0$. Пусть $0 \notin \bar{\sigma}$, так что $\bar{\sigma} \subset \{0\}'$ и $E(\sigma) = E(\sigma)E(\{0\}')$. Тогда

$$AE(\sigma) = AE(\{0\}')E(\sigma) = 0.$$

Таким образом, проекция $E(\sigma)$ принадлежит замкнутому идеалу, состоящему из всех операторов C из $B(\mathfrak{X})$, для которых $AC = 0$. Из леммы 1 вытекает, что $AS = 0$. Так как $AN = 0$, то мы также имеем $AT = 0$. Вторая часть теоремы может быть доказана тем же способом, ч. т. д.

11. Следствие. *Если $E(\{0\}) = 0$, то нулевой оператор $A = 0$ является единственным ограниченным линейным оператором, для которого либо $AT = 0$, либо $TA = 0$.*

Доказательство. Если либо $AT = 0$, либо $TA = 0$, то по теореме или $A = AE(\{0\})$, или $A = E(\{0\})A$. Таким образом, $A = 0$, ч. т. д.

12. Следствие. *Если $E(\{\lambda\}) = 0$, то образ $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ всюду плотен в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\lambda = 0$. Если образ $T\mathfrak{X}$ не всюду плотен, то в силу следствия II.3.13 существует функционал x^* из $\mathfrak{X}^*$, такой, что $x^* \neq 0$ и $x^*T\mathfrak{X} = 0$. Выберем $x_1 \neq 0$ и определим оператор A соотношением $Ax = x^*(x)x_1$, так что $A \neq 0$. Но $AT = 0$, что противоречит следствию 11. Далее, для произвольного λ теорема 5.6 показывает, что оператор $\lambda I - T$ является спектральным, и его спектральное разложение, вычисленное на множестве $\{0\}$, равно проектору $E(\{\lambda\})$. Поэтому из уже доказанного вытекает, что образ $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ всюду плотен в $\mathfrak{X}$, ч. т. д.

13. Теорема. *Если оператор T имеет замкнутый образ, то это же верно и для оператора S.*

Доказательство. Доказательство разбивается на два случая, зависящие от того, будет ли проектор $E(\{0\}) = 0$ или нет. Предположим сначала, что $E(\{0\}) = 0$. Тогда, поскольку образ T замкнут, из следствия 12 вытекает, что $T\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. По лемме 3.1 оператор T взаимно однозначен. По теореме II.2.2 оператор T имеет ограниченный обратный, и, следовательно, $0 \in \rho(T) = \rho(S)$, так что $S\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

Предположим теперь, что $E(\{0\}) \neq 0$. Заметим сначала, что для любого борелевского множества α сужение оператора T на подпространство $E(\alpha)\mathfrak{X}$ является спектральным оператором, разложение единицы F которого задается соотношением $F(\beta) = E(\alpha\beta)$ для всякого борелевского множества β. Это вытекает непосредственно из определения 2.5. Таким образом, сужение V оператора T на подпространство $E(\{0\}')\mathfrak{X}$ является спектральным оператором, разложение единицы F которого задается соотношением $F(\beta) = E(\beta - \{0\})$. Следовательно, $F(\{0\}) = 0$, и мы сможем применить к оператору V уже доказанный в первой части результат, если покажем, что образ V замкнут. Пусть вектор y лежит в замыкании образа V. Тогда для некоторой последовательности $\{x_n\}$ из $E(\{0\}')\mathfrak{X}$ мы имеем $Vx_n \to y$, и поскольку образ оператора T замкнут, существует такой вектор x в $\mathfrak{X}$, что $Tx = y$. Следовательно,

$$VE(\{0\}')x = TE(\{0\}')x = E(\{0\}')Tx = E(\{0\}')y = y.$$

Таким образом, V удовлетворяет условиям, налагаемым в первой части доказательства на оператор T, и потому можно сделать вывод, что скалярная часть оператора V отображает $E(\{0\}')\mathfrak{X}$ на все это подпространство. Из единственности канонического разложения спектрального оператора вытекает, что скалярная часть сужения является сужением скалярной части, и потому

$$SE(\{0\}')\mathfrak{X} = E(\{0\}')\mathfrak{X}.$$

Но $SE(\{0\}) = 0$, так что $S\mathfrak{X} = E(\{0\}')\mathfrak{X}$; это показывает, что оператор S имеет замкнутый образ, ч. т. д.

В ходе предыдущего доказательства было показано, что для оператора T с замкнутым образом точка $\lambda = 0$ не лежит в спектре оператора $V = T \mid E(\{0\}')\mathfrak{X}$. Поэтому для всех достаточно малых комплексных чисел $\lambda \neq 0$ оператор

$$\lambda I - T = \lambda E(\{0\}) - T_{\{0\}} + \lambda E(\{0\}') - T_{\{0\}'}$$

имеет ограниченный всюду определенный обратный. Это означает, что точка $\lambda = 0$, если она все же попадает в спектр оператора T, является изолированной точкой спектра.

14. Теорема. *Оператор T имеет замкнутый образ тогда и только тогда, когда*

(i) *точка $\lambda = 0$ или лежит в резольвентном множестве оператора T, или является изолированной точкой его спектра, и*

(ii) *оператор $TE(\{0\})$ имеет замкнутый образ.*

Доказательство. Пусть T имеет замкнутый образ. В этом случае (i) уже доказано. Для доказательства утверждения (ii) выберем y в замыкании образа $TE(\{0\})$ и предположим, что

$$TE(\{0\})\, x_n \to y.$$

Так как оператор T имеет замкнутый образ, то в $\mathfrak{X}$ существует вектор x, такой, что $Tx = y$, и, следовательно,

$$TE(\{0\})\, x = E(\{0\})\, Tx = E(\{0\})\, y = y;$$

тем самым (ii) доказано. Обратно, предположим, что условия (i) и (ii) выполнены; выберем y в замыкании образа T и допустим, что $Tx_n \to y$. Тогда $TE(\{0\})\, x_n \to E(\{0\})\, y$, и, поскольку образ оператора $TE(\{0\})$ замкнут, существует такой вектор w, что $TE(\{0\})\, w = E(\{0\})\, y$. Так как точка $\lambda = 0$ изолирована в спектре $\sigma(T)$, она лежит в множестве $\rho(T_{\{0\}'})$, и для некоторого вектора z из $E(\{0\}')\,\mathfrak{X}$ мы имеем $Tz = E(\{0\}')\, y$. Следовательно,

$$T(z + E(\{0\})\, w) = E(\{0\}')\, y + E(\{0\})\, y = y;$$

тем самым утверждение (i) доказано, ч. т. д.

8. Спектр спектрального оператора

В этом параграфе изучаются свойства спектра спектрального оператора T и выясняются соотношения между ними и соответствующими свойствами скалярной части оператора T. Большинство излагаемых здесь результатов принадлежит Фогелю. Как и раньше, буква T будет использоваться для обозначения ограниченного спектрального оператора в B-пространстве $\mathfrak{X}$, а символы S, N и E — для обозначения его скалярной части, радикальной части и разложения единицы соответственно.

Мы будем более тщательно изучать структуру спектра; спектральные точки оператора в $\mathfrak{X}$ будут классифицироваться, как и в случае гильбертова пространства, в соответствии со следующим определением:

→ 1. Определение. Пусть A — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{X}$. *Точечный спектр* оператора A есть множество $\sigma_p(A)$, состоящее из всех комплексных чисел λ, для которых оператор $\lambda I - A$ не является взаимно однозначным. *Непрерывный спектр* оператора A есть множество $\sigma_c(A)$ комплексных чисел λ, для которых оператор $\lambda I - A$ взаимно однозначен и имеет всюду плотный образ, не совпадающий со всем $\mathfrak{X}$. *Остаточный спектр* оператора A есть множество $\sigma_r(A)$, состоящее из тех комплексных чисел λ, для которых оператор $\lambda I - A$ взаимно однозначен и имеет образ, не плотный в $\mathfrak{X}$. Точки точечного спектра оператора A иногда называются *собственными значениями* A, а вектор $x \neq 0$, для которого $(\lambda I - A)x = 0$, называется *собственным вектором* оператора A, соответствующим собственному значению λ.

Очевидно, множества $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ и $\sigma_r(A)$ не пересекаются и

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

2. Теорема. *Для вектора x из $\mathfrak{X}$ и неотрицательного целого n соотношение $(\lambda I - T)^n x = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $E(\{\lambda\})x = x$ и $N^n x = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $(\lambda I - T)^n x = 0$, и пусть σ — замкнутое множество комплексных чисел, не содержащее точки λ. Тогда λ лежит в резольвентном множестве сужения T_σ оператора T на $E(\sigma)\mathfrak{X}$ и

$$E(\sigma)x = R(\lambda; T_\sigma)^n (\lambda I - T)^n E(\sigma);$$

это показывает, что

$$E(\sigma)x = R(\lambda; T_\sigma)^n E(\sigma)(\lambda I - T)^n x = 0.$$

Таким образом,

$$E\left(\left\{\xi \,\middle|\, |\xi - \lambda| > \frac{1}{n}\right\}\right)x = 0,$$

и в силу счетной аддитивности E отсюда вытекает, что

$$E(\{\lambda\}')x = 0, \qquad E(\{\lambda\})x = x.$$

Следовательно,

$$Sx = SE(\{\lambda\})x = \int_{\{\lambda\}} \mu E(d\mu)x = \lambda E(\{\lambda\})x = \lambda x;$$

поэтому

$$(\lambda I - T)x = -Nx,$$

так что

$$0 = (\lambda I - T)^n x = (-1)^n N^n x.$$

Этим доказана необходимость условий теоремы.

Предположим теперь, что $E(\{\lambda\})x = x$ и $N^n x = 0$. Как и выше, легко показать, что $(\lambda I - S)x = 0$, и, следовательно, $(\lambda I - T)^n x = (-1)^n N^n x$. Таким образом, $(\lambda I - T)^n x = 0$, ч. т. д.

3. Теорема. *Если T — оператор конечного типа, то его остаточный спектр пуст, а точка λ лежит в его точечном спектре тогда и только тогда, когда $E(\{\lambda\}) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть λ лежит в спектре оператора T. Если $E(\{\lambda\}) \neq 0$, то $E(\{\lambda\})x = x$ для некоторого вектора $x \neq 0$ и $N^n = 0$ для некоторого неотрицательного целого n. Из теоремы 2 следует, что λ лежит в точечном спектре оператора T. Если $E(\{\lambda\}) = 0$, то из теоремы 2 вытекает, что оператор $\lambda I - T$ взаимно однозначен. В силу следствия 7.12 множество $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ плотно в $\mathfrak{X}$, и, следовательно, точка λ лежит в непрерывном спектре оператора T, ч. т. д.

4. Следствие. *Для спектра скалярной части S оператора T выполнены соотношения*

$$\sigma(S) = \sigma_p(S) \cup \sigma_c(S),$$
$$\sigma_c(S) \subseteq \sigma_c(T),$$
$$\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \subseteq \sigma_p(S).$$

Доказательство. Так как S — оператор конечного типа, то $\sigma_r(S) = \varnothing$ и первое соотношение вытекает из теоремы. Пусть теперь λ лежит в $\sigma_c(S)$. Так как разложение единицы для оператора S то же, что и для оператора T, то из теоремы вытекает, что $E(\{\lambda\}) = 0$. Из этого факта и теоремы 2 следует, что λ не лежит в множестве $\sigma_p(T)$. Заключительная часть теоремы показывает, что образ $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ всюду плотен в $\mathfrak{X}$, и поскольку λ лежит в спектре $\sigma(T)$, то λ должно лежать в $\sigma_c(T)$. Этим доказано второе включение, из которого вытекает последнее утверждение, если перейти к дополнительным множествам и воспользоваться тем фактом, что $\sigma_r(S) = \varnothing$, ч. т. д.

5. Следствие. *Пусть комплексное число λ лежит в дополнении борелевского множества σ, а T — спектральный оператор. Тогда число λ лежит или в резольвентном множестве сужения T_σ оператора T на $E(\sigma)\mathfrak{X}$, или в непрерывном спектре этого сужения.*

Доказательство. Ясно, что $T_\sigma = S_\sigma + N_\sigma$, а так как сужение обобщенного нильпотентного оператора также является обобщенным нильпотентным оператором, а сужение скалярного оператора является скалярным оператором, то из теоремы 4.5 вытекает, что S_σ — скалярная часть оператора T_σ. Таким образом, в силу предыдущего следствия мы имеем $\sigma_c(S_\sigma) \subseteq \sigma_c(T_\sigma)$, а потому для доказательства настоящего следствия достаточно показать, что точка λ лежит в непрерывном спектре оператора S_σ. Допустим, что $(S - \lambda I)x = 0$, где x — вектор из $E(\sigma)\mathfrak{X}$. Так как операторы S и T имеют одно и то же разложение единицы, то по теореме 2 $E(\{\lambda\})x = x$, а поскольку множества $\{\lambda\}$ и σ не пересекаются, то $x = E(\sigma)x = 0$. Таким образом, оператор $S - \lambda I$ взаимно однозначен на $E(\sigma)\mathfrak{X}$, и потому точка λ лежит или в резольвентном множестве оператора S_σ (а следовательно, и оператора T_σ), или в непрерывном спектре оператора S_σ, так как, будучи оператором конечного типа, S_σ по теореме 3 не имеет остаточного спектра, ч. т. д.

Требование теоремы 3, чтобы спектральный оператор имел конечный тип, весьма существенно. Следующий элементарный пример показывает, что существуют спектральные операторы с остаточным спектром. Рассмотрим оператор $Tf = g$ в пространстве $C([0, 1])$, полагая

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,dx.$$

Заметим сначала, что если $g = 0$, то $f = 0$, так что оператор T взаимно однозначен. Столь же очевидно, поскольку всякая функция из образа оператора T обращается в нуле в нуль, что этот образ не плотен в $C([0, 1])$, а потому точка $\lambda = 0$ лежит в остаточном спектре оператора T. Покажем теперь, что оператор T является спектральным. Действительно, из теоремы 4.5 вытекает, что T — спектральный оператор со скалярной частью $S = 0$, если T квазинильпотентен. Для проверки последнего утверждения заметим, что

$$|g(t)| \leqslant t\,|f|$$

и по индукции что

$$|(T^n f)(t)| \leqslant \frac{t^n}{n!}\,|f|,$$

но это показывает, что

$$|T^n| \leqslant \frac{1}{n!}.$$

В силу определения 4.2 отсюда вытекает, что T — квазинильпотентный оператор.

Предыдущий пример приобретает еще большее значение в свете следующей теоремы, которая показывает, как по свойствам радикальной части спектрального оператора можно судить о существовании точек в его остаточном спектре.

6. Теорема. *Пусть λ — точка спектра спектрального оператора T. Если $E(\{\lambda\}) = 0$, то λ лежит в непрерывном спектре оператора T. Если же $E(\{\lambda\}) \neq 0$, то обозначим через N_λ сужение N на $E(\{\lambda\})\mathfrak{X}$. При этом*

(a) *$\lambda \in \sigma_p(T)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_p(N_\lambda)$;*
(b) *$\lambda \in \sigma_r(T)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_r(N_\lambda)$;*
(c) *$\lambda \in \sigma_c(T)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \sigma_c(N_\lambda)$.*

Доказательство. Если $E(\{\lambda\}) = 0$, то из теоремы 2 вытекает, что λ не лежит в точечном спектре оператора T, а в силу следствия 7.12 очевидно, что λ на самом деле лежит в непрерывном спектре T. Предположим теперь, что $E(\{\lambda\}) \neq 0$. Так как $SE(\{\lambda\}) = \lambda E(\{\lambda\})$, то мы имеем

(i) $$(T - \lambda I) E(\{\lambda\}) = NE(\{\lambda\}).$$

Далее,

(ii) $$(T - \lambda I)\mathfrak{X} = (T - \lambda I) E(\{\lambda\})\mathfrak{X} \oplus (T - \lambda I) E(\{\lambda\}')\mathfrak{X}.$$

В силу следствия 5 $(T - \lambda I) E(\{\lambda\}')\mathfrak{X}$ плотно в $E(\{\lambda\}')\mathfrak{X}$, и поэтому из соотношения (ii) вытекает, что $(T - \lambda I)\mathfrak{X}$ плотно в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $(T - \lambda I) E(\{\lambda\})\mathfrak{X}$ плотно в $E(\{\lambda\})\mathfrak{X}$. Так как по теореме 2 всякий собственный вектор оператора T, соответствующий числу λ, должен лежать в подпространстве $E(\{\lambda\})\mathfrak{X}$, то все три утверждения (a), (b) и (c) вытекают теперь из соотношения (i), ч. т. д.

7. Теорема. *Если пространство $\mathfrak{X}$ сепарабельно, то точечный и остаточный спектры спектрального оператора не более чем счетны.*

Доказательство. Пусть T — спектральный оператор со скалярной частью S и разложением единицы E. Из теоремы 6 вытекает, что

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \subseteq \{\lambda \mid E(\{\lambda\}) \neq 0\}.$$

Пусть теперь M — верхняя грань разложения E, а x_λ — вектор, такой, что $|x_\lambda| = 1$ и $E(\{\lambda\})x_\lambda = x_\lambda$; тогда для двух различных точек λ и μ мы имеем

$$|x_\lambda - x_\mu| \geqslant \frac{1}{M} |E(\{\lambda\})(x_\lambda - x_\mu)| = \frac{|x_\lambda|}{M} = \frac{1}{M}.$$

Так как множество в правой части предыдущего включения сепарабельно, то последнее неравенство показывает, что оно счетно, ч. т. д.

8. Теорема. *Спектр спектрального оператора T состоит из тех комплексных чисел λ, для которых найдется такая последовательность $\{x_n\}$ векторов, что*

(i) $$|x_n| = 1, \quad (T - \lambda I)x_n \to 0.$$

Доказательство. Очевидно, что такая точка λ принадлежит спектру оператора T. Обратно, пусть λ лежит в спектре T. Если λ — собственное значение, то можно положить $x_n = x$, где x — собственный вектор оператора T, соответствующий λ и нормированный так, что $|x| = 1$. Поэтому можно (и мы будем это делать) предполагать, что оператор $T - \lambda I$ взаимно однозначен. Допустим сначала, что $E(\{\lambda\}) = 0$. Из следствия 7.12 вытекает, что λ лежит в непрерывном спектре, и, таким образом, обратный оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ не является непрерывным. Поэтому существование последовательности, удовлетворяющей соотношениям (i), обеспечено. Предположим, наконец, что $E(\{\lambda\}) \neq 0$. Так как $SE(\{\lambda\}) = \lambda E(\{\lambda\})$, то мы имеем

$$\text{(ii)} \qquad (T-\lambda I)^n E(\{\lambda\}) = N^n E(\{\lambda\}), \qquad n \geqslant 0.$$

Пусть теперь $x \neq 0$ — произвольный ненулевой вектор в $E(\{\lambda\})\mathfrak{X}$. Так как λ не лежит в точечном спектре оператора T, то из соотношения (ii) вытекает, что $N^n x \neq 0$ для $n \geqslant 0$, и мы положим $x_n = (N^n x)/|N^n x|$. Покажем, что для некоторой подпоследовательности $\{x_{n_i}\}$ имеет место соотношение $Nx_{n_i} \to 0$. В противном случае для некоторого положительного δ выполняются неравенства

$$\delta < \frac{|N^{n+1}x|}{|N^n x|}, \qquad n \geqslant 0,$$

и, следовательно,

$$|x| < \frac{|Nx|}{\delta} < \frac{|N^2 x|}{\delta^2} < \ldots < \frac{|N^n x|}{\delta^n} < \ldots.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}\, |N^n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |N^n|^{1/n} |x|^{1/n} &\geqslant \\ \geqslant \overline{\lim}\, |N^n x|^{1/n} &\geqslant \\ \geqslant \overline{\lim}\, \delta |x|^{1/n} = \delta &> 0, \end{aligned}$$

но это невозможно, так как оператор N обобщенный нильпотентный. Поэтому $Nx_{ni} \to 0$ для некоторой подпоследовательности $\{x_{ni}\}$, и так как $x_{ni} = E(\{\lambda\})x_{ni}$, то из соотношения (ii) вытекает, что $(T-\lambda I)x_{ni} \to 0$, ч.т.д.

9. Алгебры $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$

В этом параграфе вводится в рассмотрение один достаточно простой тип некоммутативной B^*-алгебры операторов в прямой сумме гильбертовых пространств. Короче говоря, алгебра $\mathfrak{A}^p$ — это алгебра всех операторов A в прямой сумме $\mathfrak{H}^p$ p экземпляров гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, матричное представление (a_{ij}) которых имеет в качестве своих элементов операторы a_{ij} из некоторой коммутативной B^*-алгебры $\mathfrak{A}$ операторов в $\mathfrak{H}$. Здесь изучаются лишь некоторые основные свойства алгебры $\mathfrak{A}^p$ и ее элементов. В следующем параграфе будет решена задача полного описания всех спектральных операторов из $\mathfrak{A}^p$, а в § 11 даны применения этих результатов.

Начнем с беглого рассмотрения операторов в прямой сумме

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{H}^p = \mathfrak{H} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}$$

p экземпляров гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Здесь p — положительное целое число, а пространство $\mathfrak{H}$ по предположению имеет положительную размерность. Элементами пространства $\mathfrak{H}^p$ по определению являются конечные упорядоченные множества $x = [x_1, \ldots, x_p]$ из p элементов пространства $\mathfrak{H}$, а сложение, умножение на числа и скалярное произведение определяются в $\mathfrak{H}^p$ при помощи соответствующих операций в $\mathfrak{H}$ следующими соотношениями:

$$
(2)\qquad
\begin{gathered}
[x_1, \ldots, x_p]+[y_1, \ldots, y_p]=[x_1+y_1, \ldots, x_p+y_p],\\
\alpha[x_1, \ldots, x_p]=[\alpha x_1, \ldots, \alpha x_p],\\
([x_1, \ldots, x_p], [y_1, \ldots, y_p])=\sum_{i=1}^{p}(x_i, y_i).
\end{gathered}
$$

Пространство $\mathfrak{H}^p$ с этими операциями является на самом деле гильбертовым пространством (IV.4.19) с нормой

$$
(3)\qquad |[x_1, \ldots, x_n]|=\Big(\sum_{i=1}^{p}|x_i|^2\Big)^{1/2}.
$$

Очевидно, что если a_{ij}, $i, j=1, \ldots, p$, — любой набор из p^2 ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, то соотношения

$$
(4)\qquad y_i=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}x_j, \qquad i=1, \ldots, p,
$$

задают ограниченное линейное отображение A: $[x_1, \ldots, x_p] \to [y_1, \ldots, y_p]$ пространства $\mathfrak{H}^p$ в себя. Если воспользоваться обозначениями x и y для векторов $[x_1, \ldots, x_p]$ и $[y_1, \ldots, y_p]$ соответственно, то соотношения (4) можно записать просто в виде $y = Ax$. Обратно, если исходить из произвольного ограниченного линейного отображения A: $x \to y$ пространства $\mathfrak{H}^p$ в себя, то легко найти набор из p^2 ограниченных линейных отображений a_{ij} в $\mathfrak{H}$, такой, что соотношение $y = Ax$ эквивалентно системе (4). Проверим это; пусть A — ограниченное линейное отображение в $\mathfrak{H}^p$, а $\mathfrak{H}_i$ — множество векторов $[x_1, \ldots, x_p]$ из $\mathfrak{H}^p$, таких, что $x_j = 0$ при $j \neq i$. Таким образом, отображение H_i, определенное на $\mathfrak{H}_i$ соотношением $H_i x = x_i$, является, очевидно, линейной изометрией пространства $\mathfrak{H}_i$ на все $\mathfrak{H}$, а отображение

$$
(5)\qquad P_i[x_1, \ldots, x_p] = H_i^{-1}x_i
$$

является ортогональным проектором $\mathfrak{H}^p$ на $\mathfrak{H}_i$. Таким образом, для векторов $x = [x_1, \ldots, x_p]$ и $Ax = y = [y_1, \ldots, y_p]$ мы имеем

$$
\begin{gathered}
x_j=H_jP_jx,\\
x=\sum_{i=1}^{p}P_jx=\sum_{j=1}^{p}H_j^{-1}x_j,
\end{gathered}
$$

и потому

$$y = H_iP_iy = H_iP_iAx = \sum_{j=1}^{p} H_iP_iAH_j^{-1}x_j.$$

Следовательно, если положить $a_{ij} = H_iP_iAH_j^{-1}$, то эти элементы a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, p$, являются ограниченными операторами в $\mathfrak{H}$, и уравнения (4) устанавливают те же самые соотношения между векторами x и y, что и уравнение $y = Ax$. Это представление оператора A с помощью матрицы (a_{ij}) единственно; действительно, если бы нашелся другой набор из p^2 операторов b_{ij} в $\mathfrak{H}$, дающий представление A, то разности $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ удовлетворяли бы соотношениям $\sum_{j=1}^{p} c_{ij}x_j = 0$ для всех $i = 1, \ldots, p$ и любого $x = [x_1, \ldots, x_p]$ из $\mathfrak{H}^p$. Если заменить x на P_kx, то мы получим, что $c_{ik} = 0$ для всех $i, k = 1, \ldots, p$. Таким образом, только что построенное отображение $A \leftrightarrow (a_{ij})$ является взаимно однозначным соответствием между алгеброй $B(\mathfrak{H}^p)$ ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$ и матричной алгеброй $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$ порядка p над алгеброй $B(\mathfrak{H})$ ограниченных линейных отображений в $\mathfrak{H}$. Эта алгебра $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$ по определению есть множество $(p \times p)$-матриц (a_{ij}) элементов a_{ij} из $B(\mathfrak{H})$, где сложение, умножение и умножение на числа определяются соотношениями

$$(6)\qquad \begin{gathered} (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \\ (a_{ij})(b_{ij}) = \Big(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\Big), \\ \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}). \end{gathered}$$

Единицей в $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$ является матрица (e_{ij}) с элементами

$$(7)\qquad e_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ e, & i = j, \end{cases}$$

где e — единица из $B(\mathfrak{H})$, т. е. тождественный оператор в $\mathfrak{H}$.

Символ I будет использоваться для обозначения единицы в $B(\mathfrak{H}^p)$, т. е. тождественного оператора в $\mathfrak{H}^p$. Таким образом, $I \leftrightarrow (e_{ij})$, что является исключением из общепринятых обозначений, когда одна и та же прописная и строчная буква используется соответственно для обозначения сходных элементов. Ясно, что отображение $A \leftrightarrow (a_{ij})$ линейно. На самом деле это алгебраический изоморфизм между алгебрами $B(\mathfrak{H}^p)$ и $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$; действительно, если $A \leftrightarrow (a_{ij})$, $B \leftrightarrow (b_{ij})$ и $y = ABx$, то

$$y_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\Big(\sum_{j=1}^{p} b_{kj}x_j\Big) = \sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\Big)x_j.$$

Тем самым показано, что $AB \leftrightarrow (a_{ij})(b_{ij})$.

Алгебра $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$ нормируется по правилу

(8) $$|(a_{ij})| = |A|,$$

где A и (a_{ij}) — соответствующие друг другу элементы, так что отображение $A \leftrightarrow (a_{ij})$ является изометрическим изоморфизмом между B-алгебрами $B(\mathfrak{H}^p)$ и $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$. Следует заметить, что сходимость в топологии, заданной соотношением (8), эквивалентна сходимости, задаваемой нормой

$$|(a_{ij})|_0 = \sup_{1 \leqslant i, j \leqslant p} |a_{ij}|.$$

Для проверки этого заметим сначала, что поскольку $|H_i| = |P_i| = |H_j^{-1}| = 1$, то $|a_{ij}| \leqslant |A|$ и потому $|(a_{ij})|_0 \leqslant |(a_{ij})|$. С другой стороны, если $|x| \leqslant 1$, то $|x_i| \leqslant 1$ и соотношение (4) показывает, что $|y_i| \leqslant p|(a_{ij})|_0$, $|y_i|^2 \leqslant p^2|(a_{ij})|_0^2$, $|y|^2 \leqslant p^3|(a_{ij})|_0^2$ и $|y| = |Ax| \leqslant p^{3/2}|(a_{ij})|_0$. Таким образом,

$$|(a_{ij})|_0 \leqslant |(a_{ij})| \leqslant p^{3/2}|(a_{ij})|_0.$$

Выясним теперь природу сопряженного пространства $(\mathfrak{H}^p)^*$. Линейный функционал x^* на $\mathfrak{H}^p$ определяет p линейных функционалов $x_1^*, \ldots, x_p^*$ на $\mathfrak{H}$ по следующим соотношениям:

(9) $$x_i^* x_i = x^* H_i^{-1} x_i, \qquad x_i \in \mathfrak{H},$$

и, обратно, любое множество p линейных функционалов $x_1^*, \ldots, x_p^*$ однозначно определяют точку x^* из $(\mathfrak{H}^p)^*$, связанную с ними соотношением (9). Этот функционал можно задать формулой

(10) $$x^*[x_1, \ldots, x_p] = x_1^* x_1 + \ldots + x_p^* x_p, \qquad [x_1, \ldots, x_p] \in \mathfrak{H}^p.$$

Очевидно, что это соответствие $x^* \leftrightarrow [x_1^*, \ldots, x_p^*]$ является взаимно однозначным линейным отображением между двумя пространствами $(\mathfrak{H}^p)^*$ и $(\mathfrak{H}^*)^p$. Подчеркнем, что это также изометрическое отображение, т. е.

(11) $$\sup_{|x| \leqslant 1} |x^* x| = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i^*|^2\right)^{1/2},$$

где функционалы x_i^* связаны с x^* соотношением (9). Так как $\mathfrak{H}^p$ — гильбертово пространство, то существует (IV.4.5) однозначно определенная точка $y = [y_1, \ldots, y_p]$ в $\mathfrak{H}^p$, такая, что $x^* x = (x, y)$ для любого вектора x из $\mathfrak{H}^p$, и этот единственный вектор y также обладает свойством $|x^*| = |y|$. Поскольку $(x, y) = (x_1, y_1) + \ldots + (x_p, y_p)$ для всякого вектора x из $\mathfrak{H}^p$, то соотношение (10) показывает, что $x_i^* x_i = (x_i, y_i)$ для всякого вектора x_i из $\mathfrak{H}$. Таким образом, в силу той же теоремы IV.4.5 $|y_i| = |x_i^*|$ и поскольку $|x^*| = |y|$, то $|x^*| = |[x_1^*, \ldots, x_p^*]|$. Последнее соотношение представляет собой просто переформулировку равенства (11), и тем самым оно установлено. Следовательно, соответствие $x^* \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow [x_1^*, \ldots, x_p^*]$, задаваемое соотношениями (9), является изометрическим изоморфизмом между пространствами $(\mathfrak{H}^p)^*$ и $(\mathfrak{H}^*)^p$, и мы можем, если это не приводит к недоразумению, писать $\mathfrak{H}^{*p} = (\mathfrak{H}^*)^p = (\mathfrak{H}^p)^*$ и $x^* = [x_1^*, \ldots, x_p^*]$.

Пусть A — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{H}^p$ и A^* — сопряженный к нему в гильбертовом пространстве оператор, так что

$$(12) \qquad (Ax, y) = (x, A^*y), \qquad x, y \in \mathfrak{H}^p.$$

Пусть (a_{ij}) и (b_{ij}) — матрицы из $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$, соответствующие операторам A и A^*. Тогда в силу (12) мы имеем соотношение

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j,\ y_i\Big) = \sum_{i=1}^{p} \Big(x_i,\ \sum_{k=1}^{p} b_{ik}y_k\Big),$$

которое является тождеством относительно $2p$ элементов x_i, y_i, $i = 1, \ldots, p$, из $\mathfrak{H}$. Зафиксируем два элемента x, y в $\mathfrak{H}$ и два целых числа μ, ν, такие, что $1 \leqslant \mu, \nu \leqslant p$. Положим $x_\mu = x$, $y_\nu = y$ и $x_i = y_j = 0$, если $i \neq \mu$ и $j \neq \nu$. Тогда соотношение (13) переходит в равенство $(a_{\mu\nu}x, y) = (x, b_{\nu\mu}y)$, которое, поскольку векторы x и y произвольны, показывает, что $b_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}^*$. Так как $B(\mathfrak{H}^p)$ является B^*-алгеброй (IX.3.2) с инволюцией $A \to A^*$, то отсюда вытекает, что отображение $(a_{ij}) \to (b_{ij})$ является инволюцией в алгебре $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$ и что с этой инволюцией $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$ является B^*-алгеброй. Отображение $A \longleftrightarrow (a_{ij})$ между B^*-алгебрами $B(\mathfrak{H}^p)$ и $\mathfrak{M}_p(B(\mathfrak{H}))$ является поэтому изометрическим *-изоморфизмом, и эти алгебры *-эквивалентны. В дальнейшем мы их будем отождествлять и писать просто $A = (a_{ij})$ вместо $A \longleftrightarrow (a_{ij})$.

Операторы, которые мы будем исследовать, принадлежат некоторой некоммутативной B^*-подалгебре $\mathfrak{A}^p$ в $B(\mathfrak{H}^p)$; матричные элементы a_{ij} всех этих операторов принадлежат коммутативной B^*-подалгебре в $B(\mathfrak{H})$. Алгебра $\mathfrak{A}^p$ будет теперь определена явно в терминах понятия пространства со спектральной мерой. Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольное множество и Σ есть σ-поле множеств в $\mathfrak{S}$, такое, что $\mathfrak{S}$ лежит в Σ. Пусть $e(\cdot)$ — счетно аддитивная спектральная мера на Σ, значениями которой являются самосопряженные проекторы в $\mathfrak{H}$. Следствие 2.4 показывает, что $e(\cdot)$ ограничена и счетно аддитивна в сильной операторной топологии. Предположим, что поле Σ полно в том смысле, что оно содержит все подмножества любого множества σ из Σ, для которого $e(\sigma) = 0$. Таким образом, тройка $(\mathfrak{S}, \Sigma, e)$ составляет то, что мы будем называть *полным пространством со счетно аддитивной самосопряженной мерой проекторов в* $\mathfrak{H}$.

С пространством со спектральной мерой $(\mathfrak{S}, \Sigma, e)$ связывается B^*-алгебра $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$ e-существенно ограниченных Σ-измеримых комплекснозначных функций $\hat{a}$ на $\mathfrak{S}$. Норма в $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$ — это

e-существенная верхняя грань, которая определяется соотношением

$$(14) \qquad e\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} |\hat{a}(s)| = \inf_{e(\delta)=e} \sup_{s \in \delta} |\hat{a}(s)|,$$

а инволюция $\hat{a} \to \hat{a}^*$ — это комплексное сопряжение $\hat{a}^*(s) = \overline{\hat{a}(s)}$. Хотя мы говорим об элементах из $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$ как о функциях, они являются, более точно, классами эквивалентности функций, где две функции $\hat{a}$ и $\hat{b}$ на $\mathfrak{S}$ эквивалентны, если $\hat{a}(s) = \hat{b}(s)$ для e-почти всех s в $\mathfrak{S}$. Пространство $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$ с естественными алгебраическими операциями является, очевидно, коммутативной B^*-алгеброй с единицей $\hat{e}(s) = 1$, $s \in \mathfrak{S}$.

Символ $\hat{\mathfrak{A}}$ будет использоваться для обозначения B^*-подалгебры из $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$ с той же единицей $\hat{e}$. Интеграл

$$(15) \qquad a = \int_{\mathfrak{S}} \hat{a}(s)\, e(ds), \qquad \hat{a} \in \hat{\mathfrak{A}},$$

отображает алгебру $\hat{\mathfrak{A}}$ в коммутативную B^*-подалгебру $\mathfrak{A}$ в $B(\mathfrak{H})$, и это отображение $\hat{a} \to a$ является изометрическим *-изоморфизмом между $\hat{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}$ (X.2.9). Символы $\hat{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}$ будут использоваться в наших рассмотрениях для обозначения введенных здесь B^*-алгебр, которые *-эквивалентны при изоморфизме, задаваемом соотношением (15). Обычно мы имеем в виду случай $\hat{\mathfrak{A}} = eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$, но общую теорию предпочтительнее излагать для случая произвольной B^*-подалгебры $\hat{\mathfrak{A}}$ с той же единицей $\hat{e}$. Так как $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ имеют одну и ту же единицу, то следствие IX.3.10 показывает, что элемент из $\hat{\mathfrak{A}}$ имеет обратный в $\hat{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда он имеет обратный в $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$. Этот факт потребуется нам в случае некоммутативных B^*-алгебр и будет доказан далее в лемме 2.

В том случае, когда $\mathfrak{S}$ — топологическое пространство, мы будем предполагать, что Σ содержит борелевские подмножества $\mathfrak{S}$ и что $e(\sigma) \neq 0$, если σ — непустое открытое множество, т. е. $\mathfrak{S}$ является носителем спектральной меры $e(\cdot)$. Это дает нам возможность рассматривать B^*-алгебру $C(\mathfrak{S})$ всех ограниченных непрерывных комплексных функций на $\mathfrak{S}$ как B^*-подалгебру в $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$; действительно, если $e(\delta) = e$, то δ плотно в $\mathfrak{S}$, и, следовательно,

$$(16) \qquad \sup_{s \in \mathfrak{S}} |\hat{a}(s)| = e\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} |\hat{a}(s)|, \qquad \hat{a} \in C(\mathfrak{S}).$$

Таким образом, любая B^*-подалгебра $\hat{\mathfrak{C}}$ в $C(\mathfrak{S})$, имеющая ту же единицу, что и $C(\mathfrak{S})$, может быть выбрана в качестве алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$. В том случае, когда $\hat{\mathfrak{A}}$ — такая алгебра непрерывных функций, мы будем иногда вместо $\mathfrak{A}$ писать $\mathfrak{C}$ для обозначения эквивалентной алгебры операторов. В этом случае можно также использовать символы $\hat{\mathfrak{C}}^p$ и $\mathfrak{C}^p$ для обозначения двух алгебр $\hat{\mathfrak{A}}^p$ и $\mathfrak{A}^p$, которые будут определены ниже.

Произвольная коммутативная B^*-подалгебра $\mathfrak{A}$ в $B(\mathfrak{H})$ может быть представлена способом, описываемым формулой (15). Действительно, согласно общей спектральной теореме для коммутативных B^*-алгебр операторов (X.2.1), любая такая алгебра $\mathfrak{A}$ порождает компактное хаусдорфово пространство $\mathfrak{S}$, регулярную счетно аддитивную самосопряженную спектральную меру $e(\cdot)$, определенную на борелевских множествах в $\mathfrak{S}$, такую, что соотношение (15) дает $*$-эквивалентность между $\mathfrak{A}$ и B^*-алгеброй $\hat{\mathfrak{C}} = C(\mathfrak{S})$ всех непрерывных комплекснозначных функций на $\mathfrak{S}$. Эта спектральная мера $e(\cdot)$, существование которой обеспечено спектральной теоремой, обладает упомянутым выше свойством, т. е. $e(\sigma) \neq 0$, если σ непусто и открыто. Чтобы убедиться в этом, заметим, что, поскольку $\mathfrak{S}$ — нормальное пространство (I.5.9), теорема Урысона (I.5.2) обеспечивает существование ненулевой вещественной непрерывной функции $\hat{a}$ на $\mathfrak{S}$, обращающейся в нуль на дополнении к σ. Таким образом, в силу общей спектральной теоремы (X.2.1) оператор a из соотношения (15) не равен нулю. Однако, поскольку $\hat{a}$ обращается в нуль на σ', мы имеем $\hat{a}(s) = \hat{a}(s)\chi_\sigma(s)$, но так как отображение (15) гомоморфно, то это соотношение показывает, что $a = ae(\sigma)$ и тем самым $e(\sigma) \neq 0$.

Мы связываем с $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ две алгебры $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$ следующим образом. Алгебра $\mathfrak{A}^p$ — это B^*-подалгебра в $B(\mathfrak{H}^p)$, состоящая из всех операторов $A = (a_{ij})$, таких, что a_{ij} лежит в $\mathfrak{A}$. Алгебра $\hat{\mathfrak{A}}^p$ — это матричная алгебра порядка p над $\hat{\mathfrak{A}}$, т. е. алгебра всех матриц $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ с элементами $\hat{a}_{ij}$ из $\hat{\mathfrak{A}}$. Элементы $\hat{A}$ из $\hat{\mathfrak{A}}^p$ следует рассматривать как e-существенно ограниченные отображения $s \to \hat{A}(s) = (\hat{a}_{ij}(s))$ множества $\mathfrak{S}$ в $B(E^p)$, B^*-алгебру линейных операторов в p-мерном унитарном пространстве E^p, и в соответствии с этим они и нормируются. Таким образом, для ξ из E^p

$$|\hat{A}(s)| = \sup_{|\xi|=1} |\hat{A}(s)\xi|$$

и

$$|\hat{A}| = e\text{-ess}\sup_{s\in\mathfrak{S}} |\hat{A}(s)|. \tag{17}$$

Алгебраические операции, инволюция и единица $\hat{I}$ в $\hat{\mathfrak{A}}^p$ определяются соотношениями

$$(\alpha\hat{A})(s) = \alpha\hat{A}(s), \qquad (\hat{A}+\hat{B})(s) = \hat{A}(s)+\hat{B}(s),$$
$$(\hat{A}\hat{B})(s) = \hat{A}(s)\hat{B}(s), \qquad (\hat{A}^*)(s) = \hat{A}(s)^*, \qquad \hat{I}(s) = (\hat{e}_{ij}(s)),$$

где $\hat{e}_{ij}(s)=1$, если $i=j$, и $\hat{e}_{ij}(s)=0$, если $i\neq j$, для всех $s\in\mathfrak{S}$. Очевидно, что при таких определениях аглебра $\hat{\mathfrak{A}}^p$ является B-алгеброй с инволюцией. Это также B^*-алгебра, поскольку

$$|\hat{A}^*\hat{A}|=e\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}}|\hat{A}^*(s)\hat{A}(s)|=e\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}}|\hat{A}(s)|^2=|\hat{A}|^2,$$

где при записи равенства $|\hat{A}^*(s)\hat{A}(s)|=|\hat{A}(s)|^2$ используется тот факт, что $B(E^p)$ есть B^*-алгебра (IX.3.2). Как и в случае алгебры $eB(\mathfrak{S},\Sigma)$, элементами алгебры $\hat{\mathfrak{A}}^p$ являются классы эквивалентности, где две матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ эквивалентны, если $\hat{A}(s)=\hat{B}(s)$ для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$.

Для данной матрицы $\hat{A}=(\hat{a}_{ij})$ из $\hat{\mathfrak{A}}^p$ мы будем использовать символ $\int_{\mathfrak{S}}\hat{A}(s)\,e(ds)$ для обозначения матрицы $A=(a_{ij})$, элементами которой являются $a_{ij}=\int_{\mathfrak{S}}\hat{a}_{ij}(s)\,e(ds)$. Таким образом, в матричной форме соотношение (15) имеет вид

$$A=\int_{\mathfrak{S}}\hat{A}(s)\,e(ds). \tag{18}$$

Мы покажем теперь, что это соотношение устанавливает изометрический $*$-изоморфизм между двумя алгебрами $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$.

Поскольку алгебры $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$ некоммутативны (если $p>1$), мы приведем две простые леммы о B^*-алгебрах, которые не обязательно коммутативны. Первая из них будет использована для проверки того, что соотношение (18) устанавливает изометрический $*$-изоморфизм между алгебрами $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$.

1. Лемма. *Любой $*$-изоморфизм между B^*-алгебрами является изометрией.*

Доказательство. Пусть x и y — соответствующие элементы в $*$-изоморфных B^*-алгебрах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Так как $|x^*|^2=|x^*x|$, достаточно доказать, что соответствующие самосопряженные элементы $u=x^*x$ и $v=y^*y$ имеют одну и ту же норму. Поскольку алгебры изоморфны, спектры $\sigma(u)$ и $\sigma(v)$ совпадают, но это показывает, что u и v имеют один и тот же спектральный радиус. Таким образом (IX.1.8), мы имеем $\lim_n|u^n|^{1/n}=\lim_n|v^n|^{1/n}$. Но так как элементы u и v самосопряженные, то они порождают коммутативные B^*-подалгебры в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно; поэтому (IX.3.3) мы имеем $|u^n|=|u|^n$ и $|v^n|=|v|^n$, если n — степень числа 2. Следовательно,

$$|u|=\lim_n|u^n|^{1/n}=\lim_n|v^n|^{1/n}=|v|,\quad \text{ч.т.д.}$$

2. Лемма. *Если B^*-подалгебра $\mathfrak{X}$ в B^*-алгебре $\mathfrak{Y}$ имеет ту же единицу e, что и $\mathfrak{Y}$, то элемент из $\mathfrak{X}$, обратимый в $\mathfrak{Y}$, имеет обратный и в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $e = e^*$. Так как e — единица, то $e^* = ee^*$, так что $e = ee^* = (ee^*)^* = e^{**}e^* = ee^* = e^*$. Предположим теперь, что x из $\mathfrak{X}$ имеет обратный x^{-1} в $\mathfrak{Y}$. Тогда $(x^{-1})^* x^* = (xx^{-1})^* = e^* = e$, и потому x^* также имеет обратный в $\mathfrak{Y}$. Поскольку $\mathfrak{X}$ есть B^*-подалгебра в $\mathfrak{Y}$, то x^* принадлежит $\mathfrak{X}$ и, следовательно, элемент $z = xx^*$ также лежит в $\mathfrak{X}$. Если z^{-1} лежит в $\mathfrak{X}$, то $e = xx^*z^{-1}$, так что x имеет обратный x^*z^{-1} в $\mathfrak{X}$. Это сводит задачу к доказательству того, что самосопряженный элемент z из $\mathfrak{X}$, имеющий обратный z^{-1} в $\mathfrak{Y}$, имеет обратный z^{-1} в $\mathfrak{X}$. Так как $z = z^*$, то резольвентные множества элемента z, рассматриваемого и как элемент из $\mathfrak{X}$, и как элемент из $\mathfrak{Y}$, содержат мнимую ось, за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$. Таким образом, для чисто мнимых $\lambda \neq 0$ элемент $\lambda e - z$ обратим как в $\mathfrak{X}$, так и в $\mathfrak{Y}$. Поскольку e — единица для обеих этих алгебр, обратные элементы совпадают, и мы будем обозначать их через $(\lambda e - z)^{-1}$. Так как z^{-1} существует в $\mathfrak{Y}$ и резольвента является непрерывной функцией от λ, мы имеем

$$-z^{-1} = \lim_{\lambda \to 0} (\lambda e - z)^{-1},$$

откуда, в силу замкнутости $\mathfrak{X}$, z^{-1} лежит в $\mathfrak{X}$, ч. т. д.

Эта лемма показывает, что если оператор $A = (a_{ij})$ из $\mathfrak{A}^p$ имеет обратный A^{-1} в алгебре $B(\mathfrak{H}^p)$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$, то этот обратный лежит также и в $\mathfrak{A}^p$.

→ 3. Теорема. *Алгебры $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$ изометрически $*$-изоморфны при соответствии $A \leftrightarrow \hat{A}$, задаваемом соотношением*

$$A = \int_{\mathfrak{S}} \hat{A}(s) e(ds).$$

Доказательство. Это соответствие взаимно однозначно, так как если $\int \hat{A}(s) e(ds) = 0$, то $\int \hat{a}_{ij}(s) e(ds) = 0$, а поскольку соотношение (15) устанавливает $*$-эквивалентность между $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$, то $\hat{a}_{ij} = 0$; это означает, что $\hat{A} = 0$. Таким образом, $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$ суть $*$-изоморфные B^*-алгебры, и требуемое заключение вытекает из леммы 1, ч. т. д.

4. Следствие. *Если N — обобщенный нильпотент из $\mathfrak{A}^p$, то $N^p = 0$.*

Доказательство. Если $|N^n|^{1/n} \to 0$, то $|\hat{N}(s)^n|^{1/n} \to 0$ для e-почти всех s в $\mathfrak{S}$, так что $(p \times p)$-матрица $\hat{N}(s)$ комплексных чисел для этих s является обобщенным нильпотентом в $B(E^p)$. Следовательно, $\hat{N}^p(s) = 0$ для почти всех s в $\mathfrak{S}$, и поэтому $N^p = 0$, ч. т. д.

5. Следствие. *Для каждого A из $\mathfrak{A}^p$*

$$\sup_{|x|=1} |Ax| = e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} |\hat{A}(s)|.$$

Доказательство. Это лишь переформулировка свойства изометричности отображения $A \leftrightarrow \hat{A}$, ч. т. д.

Для оператора $A = (a_{ij})$ из $\mathfrak{A}^p$ можно обычным способом (§ I.13) ввести понятие определителя $\det(a_{ij})$, поскольку элементы матрицы принадлежат коммутативной алгебре $\mathfrak{A}$. Определитель $\delta = \det(a_{ij})$ также является элементом $\mathfrak{A}$, и так как отображение $\hat{a} \to a$, определяемое соотношением (15), есть гомоморфизм, то (в обозначениях § I.13)

$$\hat{\delta} = \sum_{i_1=1}^{p} \ldots \sum_{i_p=1}^{p} \delta_{i_1, \ldots, i_p} \hat{a}_{i_1 1} \ldots \hat{a}_{i_p p} = \det(\hat{a}_{ij})$$

и, таким образом,

$$\det(a_{ij}) = \int_{\mathfrak{S}} \det(\hat{a}_{ij}(s))\, e(ds). \tag{19}$$

Следующее утверждение позволяет описать спектр оператора из $\mathfrak{A}^p$ в терминах спектров $\sigma(\hat{A}(s))$ конечных $(p \times p)$-матриц $\hat{A}(s)$ комплексных чисел.

→ 6. Следствие. *Для оператора A из $\mathfrak{A}^p$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *A имеет обратный в $B(\mathfrak{H}^p)$;*

(ii) *A имеет обратный в $\mathfrak{A}^p$;*

(iii) *$\det(a_{ij})$ имеет обратный в $\mathfrak{A}$;*

(iv) *$e\text{-}\operatorname{ess\,sup} |\det(\hat{a}_{ij}(s))|^{-1} < \infty$.*

Доказательство. Эквивалентность условий (i) и (ii) следует из леммы 2. Из теоремы вытекает, что (ii) эквивалентно существованию $\hat{A}^{-1}$ в $\hat{\mathfrak{A}}^p$, что в свою очередь эквивалентно e-существенной ограниченности числовой функции $\det(\hat{A}^{-1}(s)) = [\det(\hat{a}_{ij}(s))]^{-1}$. Это доказывает эквивалентность условий (i), (ii) и (iv). Равенство (19) вместе с тем фактом, что отображение $a \leftrightarrow \hat{a}$, задаваемое соотношением (15), является изоморфизмом между алгебрами $\mathfrak{A}$ и $\hat{\mathfrak{A}}$, показывает, что условия (iii) и (iv) эквивалентны, ч. т. д.

7. Следствие. *Если $\mathfrak{S}$ — компактное пространство и $\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{C}}$, то условие* (iv) *предыдущего следствия можно заменить условием*

$$\det \hat{A}(s) \neq 0, \quad s \in \mathfrak{S}.$$

8. Следствие. *В предположениях предыдущего следствия спектр оператора A из $\mathfrak{C}^p$ есть множество*

$$\sigma(A) = \bigcup_{s \in \mathfrak{S}} \sigma(\hat{A}(s)).$$

В общем случае, когда в $\mathfrak{S}$ нет никакой топологии, спектр оператора A из $\mathfrak{A}^p$ описывается следующим образом:

→ 9. Следствие. *Спектр оператора A из $\mathfrak{A}^p$ вычисляется по формуле*

$$\sigma(A) = \bigcap_{e(\delta)=e} \overline{\bigcup_{s \in \delta} \sigma(\hat{A}(s))}.$$

Доказательство. Пусть δ — произвольное множество из Σ, такое, что $e(\delta) = e$, и пусть λ_0 — комплексное число, такое, что

$$\lambda_0 \notin \overline{\bigcup_{s \in \delta} \sigma(\hat{A}(s))}.$$

Тогда $(\lambda_0 \hat{I}(s) - \hat{A}(s))^{-1}$ существует, и по правилу Крамера эта матричная функция ограничена на δ, так как элементы $\lambda_0 \hat{I}(s) - \hat{A}(s)$ ограничены на δ. Это показывает, что обратный $(\lambda_0 \hat{I} - \hat{A})^{-1}$ существует как элемент из $\hat{\mathfrak{A}}^p$. Из следствия 6 вытекает, что λ_0 лежит в резольвентном множестве $\rho(A)$. Поэтому если $e(\delta) = e$, то

$$\sigma(A) \subseteq \overline{\bigcup_{s \in \delta} \sigma(\hat{A}(s))},$$

и потому

$$(*) \qquad \sigma(A) \subseteq \bigcap_{e(\delta)=e} \overline{\bigcup_{s \in \delta} \sigma(\hat{A}(s))}.$$

Пусть теперь λ_0 — произвольная точка из $\rho(A)$. В силу следствия 6, λ_0 лежит в $\rho(\hat{A})$, и $(\lambda_0 \hat{I} - \hat{A})^{-1}(s) = (\lambda_0 \hat{I} - \hat{A}(s))^{-1}$ существует e-почти всюду на $\mathfrak{S}$ и является e-существенно ограниченной функцией на $\mathfrak{S}$. Таким образом, для некоторого δ из Σ, такого, что $e(\delta) = e$, точка λ_0 лежит в $\rho(\hat{A}(s))$ для всех s из δ и

$$\sup_{s \in \delta} |(\lambda_0 \hat{I} - \hat{A}(s))^{-1}| = K < \infty.$$

Это неравенство показывает, что λ_0 лежит в множестве $R = \bigcap_{s \in \delta} \rho(\hat{A}(s))$, а также, что λ_0 попадает в его внутренность R^0.

Действительно, в противном случае существовали бы последовательность $\{s_n\}$ точек из δ и последовательность $\{\lambda_n\}$, такие, что λ_n лежат в $\sigma(\hat{A}(s_n))$ и $\lambda_n \to \lambda_0$. Тогда можно выбрать последовательность $\{\xi_n\}$ в E^p так, чтобы $\hat{A}(s_n)\xi_n = \lambda_n\xi_n$ и $|\xi_n| = 1$. Таким образом, векторы

$$\eta_n = (\lambda_0\hat{I} - \hat{A}(s_n))\,\xi_n = (\lambda_0 - \lambda_n)\,\xi_n \to 0$$

и

$$1 = |\xi_n| = |(\lambda_0\hat{I} - \hat{A}(s_n))^{-1}\eta_n| \leqslant K\,|\eta_n| \to 0,$$

и это противоречие показывает, что λ_0 лежит в R^0.

Так как λ_0 — произвольная точка из $\rho(A)$, то мы доказали, что

$$\rho(A) \subseteq \bigcup_{e(\delta)=e} \Big(\bigcap_{s\in\delta} \rho(\hat{A}(s))\Big)^0;$$

переходя к дополнениям, мы получаем

$$\sigma(A) \supseteq \bigcap_{e(\delta)=e} \overline{\bigcup_{s\in\delta} \sigma(\hat{A}(s))},$$

что в сочетании с неравенством (*) дает необходимое представление спектра $\sigma(A)$, ч. т. д.

10. Спектральный анализ операторов из $\mathfrak{A}^p$

На протяжении всего этого параграфа алгеброй $\hat{\mathfrak{A}}$ будет $eB(\mathfrak{S}, \Sigma)$. Мы изучаем конкретные операторы в $\mathfrak{A}^p$ с тем, чтобы исследовать их спектральные свойства; в частности, описывается метод определения того, имеет ли данный оператор из $\mathfrak{A}^p$ счетно аддитивное разложение единицы. Начнем анализ задачи с выяснения некоторых взаимосвязей между корнями и коэффициентами многочлена.

1. Лемма. *Существует измеримое по Борелю отображение* $\Gamma \to [\lambda_1(\Gamma), \ldots, \lambda_p(\Gamma)]$ *алгебры* $B(E^p)$ *в* E^p, *такое, что* $\sigma(\Gamma) = \{\lambda_1(\Gamma), \ldots, \lambda_p(\Gamma)\}$.

Доказательство. Пусть система комплексных чисел упорядочена следующим образом: $u_1 \prec u_2$ означает, что $|u_1| \leqslant |u_2|$, а если $|u_1| = |u_2|$, то $\arg u_1 < \arg u_2$. Под $\arg u$ мы будем понимать наименьшее неотрицательное вещественное число, для которого $u = |u| \exp(i \arg u)$. С помощью этого упорядочения определим $\lambda_1(\Gamma)$ как наименьший корень многочлена $d(\lambda;\ \Gamma) = \det(\lambda I - \Gamma)$. Покажем сначала, что $|\lambda_1(\Gamma)|$ — непрерывная функция от Γ. Предположим, что $\Gamma_m \to \Gamma_0$; так как $|\lambda_1(\Gamma)| \leqslant |\Gamma|$ (VII.3.4), то можно выбрать подпоследовательность $\{\Gamma'_m\}$, для которой $\lambda_1(\Gamma'_m)$ сходится к некоторому комплексному числу u. Поскольку $0 = d(\lambda_1(\Gamma'_m);\ \Gamma_m) \to$

$\to d(u;\ \Gamma_0)$, то отсюда вытекает, что либо $\lambda_1(\Gamma_0) \prec u$, либо $\lambda_1(\Gamma_0) = u$. Таким образом, если $|\lambda_1(\Gamma_m)|$ не сходится к $|\lambda_1(\Gamma_0)|$, то существует подпоследовательность $\{\Gamma''_m\}$, такая, что

$$|\lambda_1(\Gamma''_m)| > |\lambda_1(\Gamma_0)| + \varepsilon$$

для некоторого положительного ε. В этом случае число $\lambda_1 = \lambda_1(\Gamma_0)$ удалено по меньшей мере на ε от каждого из спектров $\sigma(\Gamma''_m)$, так что последовательность $\{R(\lambda_1;\ \Gamma''_m)\}$ резольвент ограничена. Мы можем и будем предполагать, что осуществлен переход к сходящейся подпоследовательности, так что $R(\lambda_1;\ \Gamma''_m) \to B$. Следовательно,

$$I = (\lambda_1 I - \Gamma''_m) R(\lambda_1;\ \Gamma''_m) = R(\lambda_1;\ \Gamma''_m)(\lambda_1 I - \Gamma''_m),$$

и, переходя к пределу, мы получаем, что матрица B обратна к сингулярной матрице $\lambda_1(\Gamma_0) I - \Gamma_0$, а это невозможно. Тем самым доказано, что $|\lambda_1(\Gamma)|$ — непрерывная функция от Γ. Пусть теперь сходящаяся к Γ_0 последовательность $\{\Gamma_m\}$ выбрана так, что

$$\arg \lambda_1(\Gamma_m) \to \theta_0,$$

где $\theta_0 = \varliminf_{\Gamma \to \Gamma_0} \arg \lambda_1(\Gamma)$. Так как $|\lambda_1(\Gamma_m)| \to |\lambda_1(\Gamma_0)|$, то мы имеем

$$\lim_m (\lambda_1)(\Gamma_m) = |\lambda_1(\Gamma_0)| e^{i\theta_0}.$$

Как было показано выше, отсюда вытекает, что либо $\lambda_1(\Gamma_0) \prec \prec |\lambda_1(\Gamma_0)| \exp(i\theta_0)$, либо $\arg \lambda_1(\Gamma_0) = \theta_0$. В любом случае

$$\arg \lambda_1(\Gamma_0) \leqslant \varliminf_{\Gamma \to \Gamma_0} \arg \lambda_1(\Gamma).$$

Для вещественных неотрицательных чисел r и θ положим

$$S(r,\ \theta) = \left\{u \,\middle|\, |u| \leqslant r,\ \arg u \leqslant \theta\right\}.$$

Из только что установленных свойств функций $|\lambda_1(\Gamma)|$ и $\arg \lambda_1(\Gamma)$ вытекает, что множество $\lambda_1^{-1}(S(r,\ \theta))$ замкнуто. Так как множества $S(r,\ \theta)$ порождают борелевское поле комплексных чисел, то функция λ_1 является измеримой по Борелю функцией от Γ. Доказательство будет завершено, если выбрать в качестве $\lambda_2(\Gamma)$ наименьший корень многочлена $d(\lambda;\ \Gamma)(\lambda - \lambda_1(\Gamma))^{-1}$ и повторить этот процесс для определения всех корней $\lambda_2(\Gamma), \ldots, \lambda_p(\Gamma)$, ч. т. д.

2. Следствие. *Пусть $s \to \Gamma(s)$ есть Σ-измеримое отображение $\mathfrak{S}$ в $B(E^p)$. Тогда существуют такие Σ-измеримые числовые функции $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_p$ на $\mathfrak{S}$, что*

$$\sigma(\Gamma(s)) = \{\hat{\lambda}_1(s), \ldots, \hat{\lambda}_p(s)\}, \qquad s \in \mathfrak{S}.$$

Доказательство. Положим $\hat{\lambda}_i(s)=\lambda_i(\Gamma(s))$, где λ_i — функция леммы 1, и пусть G — открытое множество комплексных чисел. Тогда

$$\hat{\lambda}_i^{-1}(G)=\Gamma^{-1}(\lambda_i^{-1}(G)),$$

что доказывает Σ-измеримость функции $\hat{\lambda}_i$, ч. т. д.

3. Лемма. *Пусть $s\to\Gamma(s)$ есть Σ-измеримое отображение $\mathfrak{S}$ в $B(E^p)$. Тогда существуют непересекающиеся множества $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_p$ из Σ, объединение которых есть все $\mathfrak{S}$, такие, что*

$$\text{(i)} \qquad \det(\lambda I-\Gamma(s))=\prod_{j=1}^{i}(\lambda-\hat{\lambda}_{ij}(s))^{\nu_{ij}(s)}, \qquad s\in\mathfrak{S}_i,$$

где $\hat{\lambda}_{ij}$, $j=1, \ldots, i$, суть Σ-измеримые функции на $\mathfrak{S}_i$, и для $1\leqslant i\leqslant p$ мы имеем

$$\text{(ii)} \qquad \hat{\lambda}_{i1}(s)\prec\hat{\lambda}_{i2}(s)\prec\ldots\prec\hat{\lambda}_{ii}(s), \qquad s\in\mathfrak{S}_i.$$

Разложение единицы для $\Gamma(s)$ задается формулой

$$\text{(iii)} \qquad E(\sigma;\ \Gamma(s))=\sum_{j=1}^{i}\chi_\sigma(\hat{\lambda}_{ij}(s))\,E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\ \Gamma(s)), \qquad s\in\mathfrak{S}_i,\ \sigma\in\mathscr{B}.$$

Проектор $E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\Gamma(s))$, соответствующий отдельному собственному значению $\hat{\lambda}_{ij}(s)$ матрицы $\Gamma(s)$, является Σ-измеримой функцией от s и имеет вид

$$\text{(iv)} \qquad E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\Gamma(s))=\frac{R_{ij}}{m_{ij}(\hat{\lambda}_{ij}(s))^{\nu_{ij}}}, \qquad s\in\mathfrak{S}_i,$$

где R_{ij} — многочлен от $\Gamma(s)$ и $\hat{\lambda}_{ij}(s)$,

$$\text{(v)} \qquad m_{ij}(\lambda)=\frac{\prod_{k=1}^{i}(\lambda-\hat{\lambda}_{ik}(s))^{\nu_{ik}}}{(\lambda-\hat{\lambda}_{ij}(s))^{\nu_{ij}}}$$

и ν_{ij} — любое множество неотрицательных чисел, такое, что

$$\text{(vi)} \qquad \sup_{s\in\mathfrak{S}_i}\nu_{ij}(s)\leqslant\nu_{ij}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}_i$ — множество тех s из $\mathfrak{S}$, для которых спектр $\sigma(\Gamma(s))$ состоит из i точек. Тогда очевидно, что множества $\mathfrak{S}_i$ не пересекаются и их объединение есть все $\mathfrak{S}$. Следствие 2 и соотношения

$$\mathfrak{S}_1=\{s\,|\,\hat{\lambda}_1(s)=\hat{\lambda}_2(s)=\ldots=\hat{\lambda}_p(s)\},$$

$$\mathfrak{S}_2=\bigcup_{k=1}^{p-1}\{s\,|\,\hat{\lambda}_1(s)=\ldots=\hat{\lambda}_k(s)\neq\hat{\lambda}_{k+1}(s)=\ldots=\hat{\lambda}_p(s)\},$$

$$\mathfrak{S}_3=\bigcup_{1\leqslant k\leqslant j<p}\{s\,|\,\hat{\lambda}_1(s)=\ldots=\hat{\lambda}_k(s)\neq\hat{\lambda}_{k+1}(s)=\ldots$$
$$\ldots=\hat{\lambda}_j(s)\neq\hat{\lambda}_{j+1}(s)=\ldots=\hat{\lambda}_p(s)\}$$

и т. д. показывают, что множества $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_p$ лежат в Σ. Для каждого s из $\mathfrak{S}_i$ возьмем в качестве $\hat{\lambda}_{ij}(s)$, $j=1, \ldots, i$, различные характеристические числа матрицы $\Gamma(s)$, расположенные в том же возрастающем порядке, как в следствии 2, так что $\hat{\lambda}_{ij}$ суть Σ-измеримые функции на $\mathfrak{S}_i$, удовлетворяющие неравенствам (ii). Таким образом, определитель $\det(\lambda I - \Gamma(s))$ имеет вид, указанный в (i). Дальнейшие рассуждения посвящены нахождению явного вида проекторов в разложении единицы для конечной матрицы.

Напомним, что в случае $(p \times p)$-матрицы Γ комплексных чисел, такой, что

$$\det(\lambda I - \Gamma) = \prod_{k=1}^{i} (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ различны, проектор $E(\lambda_j; \Gamma)$, связанный с отдельным собственным значением λ_j, есть матрица $e_j(\Gamma)$, где $e_j(\lambda)$ — аналитическая функция, тождественно равная 1 в окрестности λ_j и 0 в окрестности каждой точки спектра λ_k, если $k \neq j$. Отсюда вытекает (VII.1.5), что проекция $E(\lambda_j; \Gamma)$ является многочленом $P_j(\Gamma)$ от Γ и что любой многочлен P_j, обладающий свойствами

$$P_j^{(\nu)}(\lambda_k) = 0, \qquad 0 \leqslant \nu < \nu_k, \quad k \neq j,$$
$$P_j(\lambda_j) = 1, \qquad P_j^{(\nu)}(\lambda_j) = 0, \qquad 0 < \nu < \nu_j,$$

где ν_k — произвольные целые числа, такие, что $\nu_k \geqslant m_k$, $k = 1, \ldots, i$, будет удовлетворять соотношению $P_j(\Gamma) = E(\lambda_j; \Gamma)$. Чтобы построить такой интерполяционный многочлен, положим

$$m(\lambda) = \prod_{k=1}^{i} (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}, \qquad m_j(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i,$$

и заметим, что при любом выборе чисел $c_0, \ldots, c_{\nu_j - 1}$ многочлен

$$P_j(\lambda) = m_j(\lambda) \sum_{k=0}^{\nu_j - 1} c_k (\lambda - \lambda_j)^k$$

и его первые $\nu_k - 1$ производных обращаются в нуль в точке λ_k, если $k \neq j$. Мы хотим выбрать ν_j постоянных $c_0, \ldots, c_{\nu_j - 1}$ так, чтобы многочлен P_j удовлетворял ν_j условиям, налагаемым на него в точке λ_j. Легко видеть, используя правило Лейбница для производной произведения, что эти условия имеют вид

$$P_j(\lambda_j) = m_j(\lambda_j)\, c_0 = 1,$$
$$\vdots$$
$$P_j^{(\nu)}(\lambda_j) = \sum_{r=0}^{\nu} \binom{\nu}{r} r!\, m_j^{(\nu - r)}(\lambda_j)\, c_r = 0, \qquad 0 < \nu < \nu_j.$$

Эти уравнения можно решить рекуррентно; получается, что их единственное решение $c_0, \ldots, c_{\nu_j-1}$ имеет вид

$$c_\nu = \frac{Q_j}{m_j(\lambda_j)^{\nu+1}}, \qquad 0 \leqslant \nu < \nu_j,$$

где Q_j — многочлен от корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$. Таким образом, многочлен P_j имеет вид

$$P_j(\lambda) = \frac{R_j(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_i)}{m_j(\lambda_j)^{\nu_j}}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i,$$

где R_j — многочлен от λ и корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$, и элементарные проекторы задаются соотношениями $E(\lambda_j;\ \Gamma) = P_j(\Gamma)$. Таким образом, для произвольного борелевского множества σ комплексных чисел

$$E(\sigma;\ \Gamma) = \sum_{j=1}^{i} \chi_\sigma(\lambda_j) E(\lambda_j;\ \Gamma).$$

Предыдущие замечания, примененные к матрице $\Gamma(s)$, завершают доказательство, ч. т. д.

Замечание. В применениях этой леммы, как и других теорем, в которых участвуют функции $\hat{\lambda}_{ij}$, не существенно то, что они упорядочены, как в соотношении (ii). Перенумерация этих функций определялась этим упорядочением только для того, чтобы гарантировать их измеримость. *На самом деле существенным является то, что для всех* $i = 1, \ldots, p$ *и* $j = 1, \ldots, i$ *функции* $\hat{\lambda}_{ij}$ *определены и* Σ*-измеримы на* $\mathfrak{S}_i$ *и для каждого* s *из* $\mathfrak{S}_i$ *числа* $\hat{\lambda}_{i1}(s), \ldots, \hat{\lambda}_{ii}(s)$ *являются собственными значениями матрицы* $\Gamma(s)$.

→ 4. Лемма. *Пусть* $s \to \Gamma(s)$ *есть* Σ*-измеримое отображение* $\mathfrak{S}$ *в* $B(E^p)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $$\sup_{\sigma \in \mathscr{B}} e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} |E(\sigma;\ \Gamma(s))| < \infty;$$

(ii) $$e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}_i} |E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\ \Gamma(s))| < \infty, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p;$$

(iii) $$e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} \sup_{\sigma \in \mathscr{B}} |E(\sigma;\ \Gamma(s))| < \infty.$$

Доказательство. Формула (iii) леммы 3 показывает, что соотношение (ii) влечет за собой (iii). Очевидно, что из (iii) вытекает (i), и потому для доказательства леммы достаточно показать, что (i) влечет за собой (ii). Положим

(a) $$\sup_{\sigma \in \mathscr{B}} e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} |E(\sigma;\ \Gamma(s))| = K < \infty$$

и допустим, что для некоторых $i=1, \ldots, p$, $j=1, \ldots, i$ и некоторого множества $G \subseteq \mathfrak{S}_i$ с $e(G) \neq 0$ мы имеем

$$\text{(b)} \qquad |E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \Gamma(s)| > K, \qquad s \in G.$$

Пусть функция $\delta(s)$ определяется на $\mathfrak{S}_i$ соотношением

$$\delta(s) = \inf_{k \neq j} |\hat{\lambda}_{ik}(s) - \hat{\lambda}_{ij}(s)|, \qquad s \in \mathfrak{S}_i.$$

Из леммы 3 (ii) вытекает, что $\delta(s) > 0$. Поэтому можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы множество $G(\varepsilon) = \{s \mid s \in G, \delta(s) > 2\varepsilon\}$ имело e-меру $e(G(\varepsilon)) \neq 0$. Выберем теперь λ_0 так, что

$$|\hat{\lambda}_{ij}(s) - \lambda_0| < \varepsilon$$

для любого s из множества $G_1(\varepsilon) \subseteq G(\varepsilon)$ с $e(G_1(\varepsilon)) \neq 0$. Положим $\sigma = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$, так что если $s \in \hat{\lambda}_{ik}^{-1}(\sigma) \cap \hat{\lambda}_{ij}^{-1}(\sigma)$ для некоторого $k \neq j$, то мы имеем $\hat{\lambda}_{ij}(s) - \hat{\lambda}_{ik}(s) | < 2\varepsilon$, и, следовательно, s не лежит в $G(\varepsilon)$. Поэтому для любого $k \neq j$ пересечение

$$\text{(c)} \qquad \hat{\lambda}_{ik}^{-1}(\sigma) \cap \hat{\lambda}_{ij}^{-1}(\sigma) \cap G(\varepsilon) = \varnothing.$$

пустое множество. Из леммы 3 (iii) вытекает, что

$$\text{(d)} \qquad \chi_{G(\varepsilon)}(s) E(\sigma; \Gamma(s)) = \sum_{k=1}^{i} \chi_\sigma(\hat{\lambda}_{ik}(s)) E(\hat{\lambda}_{ik}(s); \Gamma(s)) \chi_{G(\varepsilon)}(s).$$

Далее, если s — точка из $G_1(\varepsilon)$, то $\hat{\lambda}_{ij}(s) \in \sigma$ и $s \in G(\varepsilon)$ и, таким образом, соотношение (c) показывает, что $\hat{\lambda}_{ik}(s) \notin \sigma$ при $k \neq j$. Поэтому для точек s из $G_1(\varepsilon)$ соотношение (d) дает

$$\text{(e)} \qquad E(\sigma; \Gamma(s)) = E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \Gamma(s)), \qquad s \in G_1(\varepsilon)$$

а поскольку $G_1(\varepsilon) \subseteq G(\varepsilon)$, то соотношения (b) и (e) показывают, что

$$|E(\sigma; \Gamma(s))| = |E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \Gamma(s))| > K. \qquad s \in G_1(\varepsilon).$$

Так как $e(G_1(\varepsilon)) \neq 0$, то это противоречит соотношению (a), ч. т. д.

Вернемся теперь к анализу B^*-алгебр $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$, которые, согласно теореме 9.3, $*$-эквивалентны; их эквивалентность устанавливается при помощи отображения $A \leftrightarrow \hat{A}$, задаваемого формулой

$$\text{(1)} \qquad A = \int_{\mathfrak{S}} \hat{A}(s) \, e(ds), \qquad \hat{A} \in \hat{\mathfrak{A}}^p.$$

Сосредоточим сначала наше внимание на задаче выделения тех операторов из $\mathfrak{A}^p$, которые являются спектральными. При этом существенную роль играет теорема типа теоремы Фубини:

5 Теорема. *Пусть для оператора A из $\mathfrak{A}^p$ выполнено условие*

$$\text{(i)}\qquad \sup_{\sigma\in\mathscr{B}} e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} |E\ (\sigma;\ \hat{A}(s))| < \infty.$$

Тогда для всякой ограниченной борелевской числовой функции φ, определенной на спектре $\sigma(A)$, интеграл

$$\text{(ii)}\qquad \int_{\sigma(A)} \varphi(\lambda)\, E(d\lambda;\ \hat{A}(s))$$

является e-существенно ограниченной Σ-измеримой функцией от s. Интеграл

$$\text{(iii)}\qquad \int_{\mathfrak{S}} E(\sigma;\ \hat{A}(s))\, e(ds), \qquad \sigma\in\mathscr{B},$$

является ограниченной счетно аддитивной спектральной мерой в $\mathfrak{H}^p$ и

$$\text{(iv)}\qquad \int_{\mathfrak{S}} \left[\int_{\sigma(A)} \varphi(\lambda) E(d\lambda;\hat{A}(s))\right] e(ds) =$$

$$= \int_{\sigma(A)} \varphi(\lambda) \left[\int_{\mathfrak{S}} E(d\lambda;\ \hat{A}(s))\, e(ds)\right].$$

Доказательство. Для точек s из $\mathfrak{S}_i$ интеграл (ii) равен

$$\text{(v)}\quad \int_{\sigma(A)} \varphi(\lambda)\, E(d\lambda;\ \hat{A}(s)) = \sum_{j=1}^{i} \varphi(\hat{\lambda}_{ij}(s))\, E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\ \hat{A}(s)), \qquad s\in\mathfrak{S}_i,$$

и лемма 3 показывает, что это Σ-измеримая функция от s. Неравенство (ii) леммы 4 означает, что эта функция e-существенно ограничена. Этим доказано первое утверждение. Пусть теперь $e_{ij}(\sigma;\ \hat{A}(s))$ — элемент i-й строки и j-го столбца матрицы $E(\sigma;\ (\hat{A}(s))$, а x и y — произвольные векторы из $\mathfrak{H}$. Тогда счетная аддитивность интеграла (iii) эквивалентна счетной аддитивности интеграла

$$\int_{\mathfrak{S}} e_{ij}(\sigma;\ \hat{A}(s))\, (e(ds)\, x,\ y).$$

Если $\{\sigma_m\}$ — возрастающая последовательность борелевских множеств с объединением σ, то из леммы 4 (iii) вытекает, что функции $e_{ij}(\sigma_m;\ \hat{A}(s))$ равномерно ограничены по m и s, за исключением точек s из множества нулевой e-меры. Таким образом, поскольку мера $(e(\cdot)x,\ y)$ ограничена,

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathfrak{S}} e_{ij}(\sigma_m;\ \hat{A}(s))\, (e(ds)\, x,\ y) = \int_{\mathfrak{S}} e_{ij}(\sigma;\ \hat{A}(s))\, (e(ds)\, x,\ y).$$

Таким образом доказана счетная аддитивность интеграла (iii). Тот факт, что этот интеграл является спектральной мерой в $\mathfrak{H}^p$, вытекает из теоремы 9.3, а его ограниченность — из следствия 2.4. Итак, доказано второе утверждение. Так как интеграл (iii) ограничен по σ, то интеграл в правой части (iv) является непрерывной функцией от φ, рассматриваемой как элемент B-пространства ограниченных борелевских функций на $\sigma(A)$. Из соотношения (v) и леммы 3 вытекает, что левая часть в (iv) также непрерывна по φ. Поскольку обе части линейны по φ, для доказательства равенства достаточно проверить его для всех элементов φ из некоторого фундаментального множества. Такое множество состоит из характеристических функций борелевских множеств. Если же φ — характеристическая функция борелевского множества σ, то обе части этого равенства совпадают с интегралом (iii), ч. т. д.

6. Теорема. *Оператор A из $\mathfrak{A}^p$ является спектральным тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\text{(i)} \qquad \sup_{\sigma\in\mathcal{B}} e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} |E(\sigma; \hat{A}(s))| < \infty.$$

Если это условие выполнено, то A является спектральным оператором типа $p-1$ и его разложение единицы задается формулой

$$\text{(ii)} \qquad E(\sigma; A) = \int_{\mathfrak{S}} E(\sigma; \hat{A}(s))\, e(ds), \qquad \sigma\in\mathcal{B}.$$

Доказательство. Предыдущая теорема показывает, что операторнозначная мера $E(\sigma; A)$, определяемая формулой (ii), есть счетно аддитивная спектральная мера в $\mathfrak{H}^p$, заданная на борелевских множествах $\mathcal{B}$ в комплексной плоскости. Так как матрицы $E(\sigma; \hat{A}(s))$ и $\hat{A}(s)$ коммутируют при всех s из $\mathfrak{S}$, а соотношение (1) устанавливает $*$-изоморфизм между алгебрами $\hat{\mathfrak{A}}^p$ и $\mathfrak{A}$, то операторы $E(\sigma; A)$ и A также коммутируют. Применим теперь предыдущую теорему к функции $\varphi(\lambda) = \lambda$, так что скалярная часть матрицы $\hat{A}(s)$, т. е. матрица

$$\hat{S}(s) = \int_{\sigma(A)} \lambda E(d\lambda; \hat{A}(s)), \qquad s\in\mathfrak{S},$$

определяет некоторую точку $\hat{S}$ в $\hat{\mathfrak{A}}^p$. Значит, если $\hat{N}(s)$ — радикальная часть $\hat{A}(s)$, то функция $\hat{N}$ принадлежит $\hat{\mathfrak{A}}^p$ и $\hat{N}^p = 0$. Таким образом, если

$$S = \int_{\mathfrak{S}} \hat{S}(s)\, e(ds), \qquad N = \int_{\mathfrak{S}} \hat{N}(s)\, e(ds),$$

то мы имеем $A = S + N$, $SN = NS$, $N^p = 0$, и в силу соотношения (iv) предыдущей теоремы

$$S = \int\limits_{\sigma(A)} \lambda E(d\lambda; A).$$

Это показывает, что A является спектральным оператором типа $p - 1$ со скалярной частью S и радикальной частью N.

Обратно, предположим теперь, что для некоторого элемента $\hat{A}$ из $\hat{\mathfrak{A}}^p$ оператор A в $\mathfrak{H}^p$, определяемый равенством (1), является спектральным. Для любого положительного целого k положим

$$\mathfrak{S}^k = \{s \mid \sup_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p} |E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \hat{A}(s))| \leqslant k\}.$$

Пусть E_k — проектор в $\mathfrak{H}^p$, задаваемый матрицей $E_k = Ie(\mathfrak{S}^k)$ с проектором $e(\mathfrak{S}^k)$ на главной диагонали и нулями на остальных местах, так что $E_k A = A E_k$. Теорема 3.10 показывает, что сужение $A \mid E_k \mathfrak{H}^p$ является спектральным оператором с разложением единицы $E(\sigma; A) \mid E_k \mathfrak{H}^p$. Так как $E(\sigma; A)$ ограничена по σ, то

$$|E(\sigma; A) \mid E_k \mathfrak{H}^p| \leqslant |E(\sigma; A)| \leqslant K, \qquad \sigma \in \mathscr{B},$$

с некоторой постоянной K. Сужение $A \mid E_k \mathfrak{H}^p$ удовлетворяет условию (i) на множестве $\mathfrak{S}^k$, так что из уже доказанного вытекает соотношение

$$E(\sigma; A) \mid E_k \mathfrak{H}^p = \int\limits_{\mathfrak{S}^k} E(\sigma; \hat{A}(s)) \, e(ds) \mid E_k \mathfrak{H}^p.$$

Таким образом, поскольку отображение (1) изометрично,

$$e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}^k} |E(\sigma; \hat{A}(s))| = |E(\sigma; A) \mid E_k \mathfrak{H}^p| \leqslant K.$$

Так как $\{\mathfrak{S}^k\}$ — возрастающая последовательность с объединением равным $\mathfrak{S}$, мы получаем, что

$$e\text{-}\operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} |E(\sigma; \hat{A}(s))| \leqslant K.$$

Поскольку постоянная K не зависит от борелевского множества σ, отсюда вытекает требуемое неравенство (i), ч. т. д.

Замечание. Чтобы нагляднее проиллюстрировать взаимосвязи между теоремой 6 и хорошо известным результатом для самосопряженных операторов, заметим, что самосопряженный оператор или, более общо, *нормальный оператор в* $\mathfrak{A}^p$ *является спектральным оператором*. Действительно, если A — нормальный оператор из $\mathfrak{A}^p$, то из теоремы 9.3 вытекает, что для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$ $(p \times p)$-матрица $\hat{A}(s)$ нормальна. Так как для борелевского множества σ проектор $E = E(\sigma; A(s))$ является многочленом от $A(s)$, то E нормален для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$. Поэтому

$$|E|^2 = |E^2|^2 = |(E^2)^* E^2| = |(E^*E)^* E^* E| = |E^* E|^2 = |E|^4,$$

а это показывает, что $|E|$ равно 0 или 1. Тогда для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$ выполнено неравенство $|E(\sigma; \hat{A}(s))| \leqslant 1$, и потому выполняется условие теоремы.

7. Следствие. *Пусть A — оператор из $\mathfrak{A}^p$ и для некоторой постоянной K и почти всех s из $\mathfrak{S}$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{|\lambda-\mu|} \leqslant K$$

для любой пары различных собственных значений $A(s)$. Тогда A — спектральный оператор типа $p-1$.

Доказательство. Из соотношений (iv) и (v) леммы 3 вытекает, что функция $E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \hat{A}(s))$ является e-существенно ограниченной на $\mathfrak{S}$. Поэтому лемма 4 показывает, что выполнено условие (i) теоремы, ч. т. д.

8. Следствие. *Любой оператор A из $\mathfrak{A}^p$ является сильным пределом последовательности спектральных операторов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}^k$ и E_k те же, что и в доказательстве теоремы; положим

$$\hat{A}_k(s) = \begin{cases} \hat{A}(s), & s \in \mathfrak{S}^k, \\ 0, & s \notin \mathfrak{S}^k, \end{cases}$$

так что $\hat{A}_k$ лежит в $\hat{\mathfrak{A}}^p$. Соответствующий этой функции оператор $A_k = \int\limits_{\mathfrak{S}} \hat{A}_k(s)\, e(ds)$ имеет в качестве сужений $A_k \mid E_k \mathfrak{H}^p = A \mid E_k \mathfrak{H}^p$ и $A_k \mid (I - E_k)\, \mathfrak{H}^p$ спектральные операторы. Поэтому теорема 3.10 показывает, что A_k — спектральный оператор. Так как $\mathfrak{S}^k \to \mathfrak{S}$, отсюда вытекает, что $e(\mathfrak{S}^k)\, x \to x$ для любого вектора x из $\mathfrak{H}$, и потому $E_k x \to x$ для всякого x из $\mathfrak{H}^p$. Это показывает, что $A_k x = A E_k x \to Ax$ для всех x из $\mathfrak{H}^p$, ч. т. д.

9. Следствие. *Пусть A — спектральный оператор в $\mathfrak{A}^p$. Тогда его скалярная и радикальная части S и N также лежат в $\mathfrak{A}^p$. Если $\hat{A}$, $\hat{S}$ и $\hat{N}$ — элементы из $\hat{\mathfrak{A}}^p$, соответствующие A, S и N при изоморфизме* (1), *то для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$ матрицы $\hat{S}(s)$ и $\hat{N}(s)$ являются скалярной и радикальной частями $\hat{A}(s)$. Если φ — ограниченная борелевская числовая функция на $\sigma(A)$, то $\varphi(S)$*

лежит в $\mathfrak{A}^p$ *и*

$$\widehat{\varphi(S)}(s) = \varphi(\hat{S}(s))$$

для е-почти всех s *из* $\mathfrak{S}$.

Доказательство. При доказательстве теоремы было показано, что скалярная и радикальная части оператора A получаются интегрированием скалярной и радикальной частей $\hat{A}(s)$ по $\mathfrak{S}$ относительно спектральной меры $e(\cdot)$. Отсюда следует, что операторы S и N лежат в $\mathfrak{A}^p$, а так как соотношение (1) устанавливает изоморфизм между $\mathfrak{A}^p$ и $\hat{\mathfrak{A}}^p$, то этим также показано, что скалярная и радикальная части $\hat{A}(s)$ являются функциями из классов эквивалентности в $\hat{\mathfrak{A}}^p$, соответствующих операторам S и N. В силу соотношения (iv) теоремы 5

$$\int_{\mathfrak{S}} \varphi(\hat{S}(s))\, e(ds) = \int_{\sigma(A)} \varphi(\lambda)\, E(d\lambda;\ A),$$

и потому

$$\int_{\mathfrak{S}} \varphi(\hat{S}(s))\, e(ds) = \varphi(S) = \int_{\mathfrak{S}} \widehat{\varphi(S)}(s)\, e(ds),$$

откуда вытекает, что $\varphi(\hat{S}(s)) = \widehat{\varphi(S)}(s)$ для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$, ч. т. д.

Иногда будет удобно рассматривать $\mathfrak{A}$ как подалгебру в $\mathfrak{A}^p$. Это отображение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}^p$ задается следующим образом:

10. Определение. Для всякого оператора b в $\mathfrak{H}$ и вектора $x = [x_1, \ldots, x_p]$ из $\mathfrak{H}^p$ положим

$$bx = [bx_1, \ldots, bx_p].$$

При этом отображении алгебра $\mathfrak{A}$, очевидно, *-изоморфна B^*-подалгебре в $\mathfrak{A}^p$, состоящей из всех операторов, имеющих диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} a & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & a \end{pmatrix}$$

с одним и тем же элементом из $\mathfrak{A}$ на главной диагонали. Ясно также (не обязательно при этом ссылаться на лемму 9.1), что это отображение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}^p$ является изометрией. Если это не приводит к недоразумению, мы будем одной и той же буквой a обозначать как элемент в $\mathfrak{A}$, так и соответствующий ему элемент в $\mathfrak{A}^p$. В этом же смысле мы будем понимать такие выражения, как aA или Aa, где $a \in \mathfrak{A}$, а $A \in B(\mathfrak{A}^p)$. Если $A=(a_{ij})$ и $a \in \mathfrak{A}$, то $aA = (aa_{ij})$, $aA = Aa$ и $\widehat{Aa} = \hat{A}\hat{a}$, т. е.

$$\left(\int\limits_{\mathfrak{S}} \hat{a}(s)\, e(ds)\right)\left(\int\limits_{\mathfrak{S}} \hat{A}(s)\, e(ds)\right) = \int\limits_{\mathfrak{S}} \hat{a}(s)\, \hat{A}(s)\, e(ds).$$

11. Следствие. *Пусть S и N — соответственно скалярная и радикальная части спектрального оператора A из $\mathfrak{A}^p$. Для каждого $i=1, \ldots, p$ обозначим через $\mathfrak{S}_i$ множество всех тех s из $\mathfrak{S}$, для которых матрица $\hat{A}(s)$ имеет i различных собственных значений. Для индексов i с непустым $\mathfrak{S}_i$ через $\hat{\lambda}_{i1}(s), \ldots, \hat{\lambda}_{ii}(s)$ обозначим i различных собственных значений матрицы $\hat{A}(s)$, выбранных так, что функции $\hat{\lambda}_{ij}$ Σ-измеримы на $\mathfrak{S}_i$ (см. замечание после леммы 3). Для остальных значений i положим $\hat{\lambda}_{ij}(s)=0$. Пусть операторы λ_{ij} и E_{ij} определены для $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p$ соотношениями*

$$\text{(i)} \qquad \lambda_{ij} = \int\limits_{\mathfrak{S}_i} \hat{\lambda}_{ij}(s)\, e(ds), \qquad E_{ij} = \int\limits_{\mathfrak{S}_i} E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\, \hat{A}(s))\, e(ds).$$

Тогда $\lambda_{ij} \in \mathfrak{A}$, $E_{ij} \in \mathfrak{A}^p$, $E_{ij}^2 = E_{ij}$ и $E_{ij}E_{mn}=0$, кроме того случая, когда $i=m$ и $j=n$. Кроме того, эти операторы λ_{ij} и E_{ij} коммутируют с A, S, N и разложением единицы $E(\sigma; A)$. Для любой ограниченной борелевской функции φ на $\sigma(A)$ мы имеем

$$\text{(ii)} \qquad \varphi(S) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \varphi(\lambda_{ij})\, E_{ij}.$$

Если φ аналитична и однозначна в окрестности спектра, то

$$\text{(iii)} \qquad \varphi(A) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{N^\nu}{\nu!} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \varphi^{(\nu)}(\lambda_{ij})\, E_{ij}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$ выполнены неравенства $|\hat{\lambda}_{ij}(s)| \leqslant |\hat{A}(s)| \leqslant |\hat{A}| = |A|$, так что функции λ_{ij} ограничены e-почти всюду на $\mathfrak{S}_i$. Лемма 3 показывает, что они Σ-измеримы и, таким образом, λ_{ij} лежат в $\mathfrak{A}$. Поскольку A — спектральный оператор, по теореме 6 и лемме 4 функция $E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \hat{A}(s))$ является e-существенно ограниченной, а по лемме 3 она Σ-измерима. Таким образом, оператор E_{ij} лежит в $\mathfrak{A}^p$. Тогда в силу теоремы 6 (ii) и леммы 3 (iii)

$$E(\sigma; A) = \int_{\mathfrak{S}} E(\sigma; \hat{A}(s))\, e(ds) = \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathfrak{S}_i} E(\sigma; \hat{A}(s))\, e(ds) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int_{\mathfrak{S}_i} \sum_{j=1}^{i} \chi_\sigma(\hat{\lambda}_{ij}(s))\, E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \hat{A}(s))\, e(ds) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \left[\int_{\mathfrak{S}_i} \chi_\sigma(\hat{\lambda}_{ij}(s))\, e(ds)\right]\left[\int_{\mathfrak{S}_i} E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \hat{A}(s))\, e(ds)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} e(\hat{\lambda}_{ij}^{-1}(\sigma)) \int_{\mathfrak{S}_i} E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \hat{A}(s))\, e(ds) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} E(\sigma; \lambda_{ij})\, E_{ij};$$

при переходе к последнему равенству мы воспользовались следствием X.2.10. Таким образом, мы имеем

$$\varphi(S) = \int_{\sigma(A)} \varphi(\xi)\, E(d\xi; A) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \int_{\sigma(A)} \varphi(\xi)\, E(d\xi; \lambda_{ij})\, E_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \varphi(\lambda_{ij})\, E_{ij}.$$

В силу следствия 9 матрицы $\hat{S}(s)$ и $\hat{N}(s)$ являются для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$ скалярной и радикальной частями оператора $\hat{A}(s)$, так что $E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \hat{A}(s))$ коммутирует с $\hat{A}(s)$, $\hat{S}(s)$, $\hat{N}(s)$ и $E(\sigma; \hat{A}(s))$. Таким образом, E_{ij} коммутирует с A, S, N и $E(\sigma; A)$. Элемент λ_{ij} также коммутирует с этими операторами, поскольку он лежит в $\mathfrak{A}$. Используя гомоморфность отображения $A \leftrightarrow \hat{A}$, легко видеть, что

$$E_{ij}E_{mk} = \int_{\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{S}_m} E(\hat{\lambda}_{ij}(s); \hat{A}(s))\, E(\hat{\lambda}_{mk}(s); \hat{A}(s))\, e(ds);$$

тем самым показано, что $E_{ij}E_{mk} = 0$, если $i \neq m$, $E_{ij}E_{ik} = 0$, если $j \neq k$, и что $E_{ij}^2 = E_{ij}$.

В силу теоремы 6 $N^p = 0$, и, таким образом, заключительное утверждение вытекает из теоремы 5.1 и соотношения (ii) настоящего следствия, ч. т. д.

12. Следствие. *Всякий спектральный оператор A из $\mathfrak{A}^p$ порождает разложение пространства $\mathfrak{H}^p$ на конечное число подпро-*

странств, каждое из которых инвариантно относительно A, причем сужение A на каждое из этих подпространств состоит из умножения на элемент из $\mathfrak{A}$ и нильпотентного оператора порядка не выше p.

Доказательство. Используя обозначения и результаты предыдущего следствия, мы видим, полагая $\varphi(\lambda) = 1$ в соотношении (ii), что $\mathfrak{H}^p$ является прямой суммой своих подпространств $E_{ij}\,\mathfrak{H}^p$ и что каждое из этих подпространств инвариантно относительно A. Если положить $\varphi(\lambda) = \lambda$ в (ii), то мы видим, что на подпространстве $E_{ij}\,\mathfrak{H}^p$ выполнено соотношение

$$Ax = \lambda_{ij}x + Nx, \qquad x \in E_{ij}\mathfrak{H}^p,$$

где, согласно теореме 6, $N^p = 0$, ч. т. д.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{S}$ — компактное пространство, и (в обозначениях следствия 11) множества $\mathfrak{S}_i$ замкнуты, а корни $\hat{\lambda}_{ij}(s)$, $j = 1, \ldots, i$, непрерывны на $\mathfrak{S}_i$. Тогда A — спектральный оператор типа $p-1$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{S}_i$ непусто, то $|\hat{\lambda}_{ij}(s) - \hat{\lambda}_{ik}(s)|^{-1}$ при $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant i$ определена и непрерывна на $\mathfrak{S}_i$. Так как $\mathfrak{S}_i$ замкнуто, то оно компактно, и рассматриваемая функция ограничена на $\mathfrak{S}_i$ некоторой постоянной K; эту постоянную можно выбрать не зависящей от $i = 1, \ldots, p$. Поскольку каждая точка s принадлежит одному из множеств $\mathfrak{S}_i$, то $|\lambda - \mu|^{-1} \leqslant K$ для всякой пары λ и μ различных собственных значений матрицы $\hat{A}(s)$, и в силу следствия 7 оператор A является спектральным типа $p - 1$, ч. т. д.

14. Следствие. *Пусть A — оператор из $\mathfrak{A}^p$, а $\mathfrak{S}$ — компактное пространство. Предположим, что для каждого s из $\mathfrak{S}$ существует p различных собственных значений $\hat{\lambda}_1(s), \ldots, \hat{\lambda}_p(s)$ матрицы $\hat{A}(s)$ и что эти функции $\hat{\lambda}_i(s)$ непрерывны. Тогда A — спектральный оператор скалярного типа.*

Доказательство. Рассуждения предыдущего следствия по казывают, что A — спектральный оператор. Так как $\hat{A}(s)$ имеет различные собственные значения, то это скалярный оператор, т. е. его радикальная часть равна нулю. Таким образом, следствие 9 показывает, что A также является оператором скалярного типа, ч. т. д.

11. Несколько примеров ограниченных спектральных операторов

В этом параграфе некоторые из полученных результатов будут проиллюстрированы на примере алгебры $\mathfrak{A}$ всех операторов свертки в $\mathfrak{H} = L_2(R^N)$, гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций на вещественном евклидовом пространстве R^N размерности N. Мы покажем, что эта алгебра *всех* сверток, действующих в $\mathfrak{H}$ (независимо от того, определяем ли мы их как ограниченные аддитивные функции множества, как счетно аддитивные функции множества, как обычный интеграл Лебега, как главное значение интеграла или как любой другой несобственный интеграл), является B^*-алгеброй, которая $*$-эквивалентна B^*-алгебре $\hat{\mathfrak{A}} = L_\infty(R^N, \Sigma, ds)$, где Σ есть σ-поле измеримых по Лебегу множеств, а ds — мера Лебега. Операторами из некоммутативной B^*-алгебры $\mathfrak{A}^p$ являются тогда операторы A в $\mathfrak{H}^p = L_2(R^N) + \ldots + L_2(R^N)$, матричное представление $A = (a_{jk})$ которых состоит из операторов свертки a_{jk} в $\mathfrak{H}$. Иногда оказывается удобным рассматривать основное пространство $\mathfrak{S}$ предыдущего параграфа как одноточечную компактификацию R^N, получающуюся добавлением одной точки ∞. Мера Лебега распространяется на $\mathfrak{S}$ следующим образом: множество $\{\infty\}$ считается имеющим меру нуль, так что пространства с мерами (R^N, Σ, ds) и $(\mathfrak{S}, \Sigma, ds)$ совпадают. Алгебра $\hat{\mathfrak{C}}$ состоит из всех $\hat{a}$, непрерывных на $\mathfrak{S}$, т. е. всех непрерывных комплексных функций на R^N, для которых существует предел $\hat{a}(\infty) = \lim\limits_{|s|\to\infty} \hat{a}(s)$. Множество $\hat{\mathfrak{C}}_0$ — подалгебра (без единицы) алгебры $\hat{\mathfrak{C}}$ функций, для которых $\hat{a}(\infty) = 0$.

В этом и в следующем параграфах будут рассмотрены примеры двух типов: ограниченные спектральные операторы в $\hat{\mathfrak{A}}^p$ и близкий к ним тип неограниченных спектральных операторов, связанных с некоторыми линейными системами уравнений в частных производных. В анализе задач обоих типов будет существен ряд свойств преобразования Фурье, и мы начнем рассмотрение с этих свойств. Изложение при этом будет независимым от теории преобразования Фурье на локально компактных группах, развитой в § XI.3; в случае N-мерного евклидова пространства возможен более простой и лучше приспособленный для наших теперешних нужд подход.

Пусть $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_N]$ — упорядоченное множество N неотрицательных целых чисел, $s = [s_1, \ldots, s_N]$ и $t = [t_1, \ldots, t_N]$ — точки в R^N, $P(s_1, \ldots, s_N)$ — многочлен от N переменных и φ — функция из $C^\infty = C^\infty(R^N)$. Мы используем при этом следующие обозначения:

$$|\alpha_1| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N, \qquad |s| = (|s_1|^2 + \ldots + |s_N|^2)^{1/2},$$

$$s^\alpha = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_N^{\alpha_N}, \qquad P(s) = P(s_1, \ldots, s_N),$$

$$st = (s, t) = s_1 t_1 + \ldots + s_N t_N,$$

$$\varphi^{(\alpha)} = \partial_s^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial s_N}\right)^{\alpha_N} \varphi, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial s_j}\right)^0 \varphi = \varphi,$$

$$P(\partial) = P(\partial_s) = P\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_N}\right).$$

Символ Φ будет использоваться для обозначения тех функций из C^∞, которые вместе со всеми своими производными всех порядков стремятся к нулю при $|s| \to \infty$ быстрее любой степени $1/|s|$. Функции из Φ называются *быстро убывающими* функциями на R^N. Ясно, что Φ — линейное подмножество всех лебеговых пространств $L_p = L_p(R^N)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; для функции φ из Φ через $|\varphi|_p$ обозначается норма φ как элемента L_p. Помимо того что Φ снабжено топологиями как подмножество различных B-пространств, множество Φ наделяется своей собственной топологией, в которой фундаментальная система окрестностей нуля описывается следующим образом: для всякой пары p, q положительных целых чисел и любого $\varepsilon > 0$ примем за $U(p, q, \varepsilon)$ множество всех функций φ из Φ, таких, что

$$(1) \qquad (1+|s|^2)^p\,|\varphi^{(\alpha)}(s)| < \varepsilon, \qquad s \in R^N,$$

для любого мультииндекса α с 1-нормой $|\alpha|_1 \leqslant q$. Элементарные соображения показывают, что Φ локально выпукло и полно в том смысле, что всякая последовательность $\{\varphi_m\}$, для которой $\varphi_p - \varphi_q \to 0$ при $p \to \infty$, $q \to \infty$, имеет предел в Φ. Будучи линейным пространством, Φ, очевидно, обладает и следующим свойством: оно содержит все производные своих элементов. Кроме того, если f — комплексная C^∞-функция на R^N, *медленно растущая* в том смысле, что для всякого мультииндекса $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_N]$ найдутся натуральное $m > 0$ и постоянная C, такие, что

$$(2) \qquad |f^{(\alpha)}(s)| \leqslant C(1+|s|^2)^m, \qquad s \in R^N,$$

то вместе со всякой функцией φ из Φ в Φ также лежит и $f\varphi$. Таким образом, Φ содержит, в частности, вместе с функцией φ и любое произведение $P\varphi$, где P — многочлен от переменных $s_1, \ldots, s_N$. Очевидно, что сходимость $\varphi_m \to \varphi$ в Φ эквивалентна утверждению о том, что для любой пары P и Q многочленов от N переменных равномерно по s из R мы имеем

$$(3) \qquad P(s)\,Q\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\varphi_m(s) \to P(s)\,Q\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\varphi(s).$$

Преобразование Фурье $F\varphi$ функции φ из Φ определяется интегралом

$$(4) \qquad (F)(s) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{R^N} e^{-ist}\varphi(t)\,dt, \qquad s \in R^N.$$

Основная *формула обращения*, принадлежащая Фурье, содержится в следующей теореме:

→ 1. Теорема. *Преобразование Фурье является гомеоморфным изоморфизмом пространства Φ на себя, а обратное к нему задается* *формулой*

$$\varphi(s)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{R^N} e^{ist}(F\varphi)(t)\,dt,\qquad s\in R^N. \tag{5}$$

Доказательство. Так как φ — быстро убывающая функция, то интеграл (4) можно дифференцировать под знаком интеграла; тогда

$$(F\varphi)^{(\alpha)}(s)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{R^N} e^{-ist}(-it)^{\alpha}\varphi(t)\,dt,$$

и потому функция $F\varphi$ лежит в C^{∞}. Таким образом, для любого многочлена P от N переменных

$$(P(\partial)F\varphi)(s)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{R^N} e^{-ist}P(-it)\varphi(t)\,dt. \tag{6}$$

Если воспользоваться тем фактом, что $\varphi^{(\alpha)}(s)\to 0$ при $|s|\to\infty$, то интегрирование по частям преобразования Фурье функции $\varphi^{(\alpha)}$ дает

$$F(\varphi^{(\alpha)})(s)=(is)^{\alpha}(F\varphi)(s),$$

и, таким образом, для общего многочлена Q

$$F(Q(\partial)\varphi)(s) = Q(is)F(\varphi)(s). \tag{7}$$

Если P и Q — два многочлена, то соотношения (6) и (7) вместе можно переписать в виде

$$Q(is)P\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)(F\varphi)(s)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{R^N} e^{-ist}Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\{P(-it)\varphi(t)\}\,dt. \tag{8}$$

Так как функция $Q(\partial/\partial t)\{P(-it)\varphi(t)\}$ интегрируема по Лебегу на R^N, то (8) показывает, что $F\varphi$ — быстро убывающая функция, и, таким образом, F отображает Φ в Φ. Соотношение (8) показывает также, что F — непрерывное отображение Φ в Φ; действительно, если $\varphi_n\to 0$ в Φ, то последовательность $Q(\partial/\partial t)\{P(-it)\varphi_n(t)\}$ также стремится к нулю в Φ и для любого $\varepsilon>0$

$$\left|Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)P[(-it)\varphi_n(t)]\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{(1+|t|^2)^N},\qquad t\in R^N,$$

при достаточно больших натуральных n. Таким образом, из (8) вытекает, что $Q(is)P(\partial/\partial s)F(\varphi_n)(s)$ стремится к нулю равномерно на R^N, но это означает, что $F(\varphi_n)\to 0$ в Φ. Следовательно, F — непрерывное отображение Φ в Φ.

Установим теперь формулу обращения (5). Если она будет доказана, то мы получим, что F — взаимно однозначное отображение в Φ и что $\varphi(s) = (F^2\varphi)(-s)$, но тогда $F\Phi = \Phi$, и, таким образом, обратное отображение $(F^{-1}\varphi)(s) = (F^2\varphi)(-s)$ определено всюду и непрерывно на Φ. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно установить формулу обращения (5).

Легко видеть, рассматривая интеграл как повторный, что достаточно проверить (5) лишь в случае $N = 1$. В этом случае правая часть в (5) равна

$$
\begin{aligned}
(F^2\varphi)(-s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu}\varphi(u)\,du\right\}dt = \\
&= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\left\{\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-itu}\varphi(u)\,du\right\}dt = \\
&= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha(s-u)}{s-u}\varphi(u)\,du = \\
&= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s-t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt,
\end{aligned}
$$

так что соотношение (5) будет установлено, если мы докажем следующую лемму:

2. Лемма. *Пусть φ — комплекснозначная функция из $L_1(-\infty, \infty)$, непрерывная в точке s и имеющая ограниченную вариацию в некоторой окрестности точки s. Тогда*

$$
\varphi(s) = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s-t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt. \tag{9}
$$

Доказательство. Заметим сначала, что для любого $\delta > 0$ функция $\varphi(s-t)/t$ интегрируема на бесконечных интервалах $[-\infty, -\delta]$, $[\delta, \infty]$, так что

$$
\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{-\delta}\varphi(s-t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = 0 = \lim_{\alpha\to\infty}\int_{\delta}^{\infty}\varphi(s-t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt.
$$

Следовательно, достаточно показать, что при некотором $\delta > 0$

$$
\varphi(s) = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(s-t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt; \tag{10}
$$

рассматривая отдельно вещественную и мнимую части φ, можно считать, что функция φ вещественна. По предположению, функция $\varphi(u)$ непрерывна в точке s и имеет ограниченную вариацию по u в некотором замкнутом интервале $s-\delta \leqslant u \leqslant s+\delta$ около s;

мы можем выбрать $\delta > 0$ настолько малым, что

$$|\varphi(s-t)-\varphi(s)| < \varepsilon, \qquad |t| \leqslant \delta, \tag{11}$$

где ε—произвольное положительное число. Так как φ имеет ограниченную вариацию и является разностью двух неубывающих функций, достаточно доказать (10) при более жестком предположении о неубывании функции φ. В силу второй теоремы о среднем значении интегралов Римана на отрезке $[-\delta, \delta]$ найдется точка β, такая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(s-t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt &= \\ &= \varphi(s)\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\{\varphi(s)-\varphi(s-t)\}\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \\ &= \varphi(s)\frac{1}{\pi}\int_{-\delta\alpha}^{\delta\alpha}\frac{\sin u}{u}\,du-\{\varphi(s)-\varphi(s-\delta)\}\frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{\delta}\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \\ &= \varphi(s)\frac{1}{\pi}\int_{-\delta\alpha}^{\delta\alpha}\frac{\sin u}{u}\,du-\{\varphi(s)-\varphi(s-\delta)\}\frac{1}{\pi}\int_{\alpha\beta}^{\alpha\delta}\frac{\sin u}{u}\,du. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\delta\alpha}^{\delta\alpha}\frac{\sin u}{u}\,du = 1 \tag{13}$$

и

$$\left|\int_{\alpha\beta}^{\alpha\delta}\frac{\sin u}{u}\,du\right| \leqslant C, \tag{14}$$

где постоянная C не зависит от α и β. Таким образом, соотношения (11) — (14) показывают, что

$$\varlimsup_{\alpha\to\infty}\left|\varphi(s)-\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(s-t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt\right| \leqslant \varepsilon C,$$

но это, поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, доказывает соотношение (10) и завершает доказательство леммы 2, а вместе с ней и теоремы 1, ч. т. д.

→ 3. Следствие (*Парсеваль — Планшерель*). *Множество Φ быстро убывающих функций плотно в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = L_2(R^N)$, а преобразование Фурье, определенное на Φ соотношением* (4), *имеет единственное расширение до унитарного опера-*

тора F *в* $\mathfrak{H}$, *обладающего следующими свойствами*:

(i) $$(F\varphi, \psi) = (\varphi, F^{-1}\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{H};$$

(ii) $$|F\varphi| = |\varphi|, \quad \varphi \in \mathfrak{H};$$

(iii) $$(F\varphi)(s) = \underset{r\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{|t|\leqslant r} e^{-ist}\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathfrak{H};$$

(iv) $$(F^{-1}\varphi)(s) = \underset{r\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{|t|\leqslant r} e^{ist}\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathfrak{H};$$

здесь l.i.m. *обозначает предел в среднем порядка* 2, *т. е. предел по норме* $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Плотность Φ в $\mathfrak{H}$ является следствием леммы XIV.2.3. Из теоремы 1 и теоремы Фубини вытекает, что для функций φ и ψ из Φ имеет место равенство

$$\begin{aligned}(F\varphi, \psi) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} \Big(\int\limits_{R^N} e^{-ist}\varphi(t)\,dt \Big) \overline{\psi(s)}\,ds = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} \varphi(t) \overline{\Big(\int\limits_{R^N} e^{ist}\psi(s)\,ds \Big)}\,dt = \\ &= (\varphi, F^{-1}\psi),\end{aligned}$$

а если положить $\psi = F\varphi$, то $|F\varphi| = |\varphi|$, и это доказывает непрерывность F в $\mathfrak{H}$-топологии Φ. Так как Φ плотно в $\mathfrak{H}$, то F имеет непрерывное расширение на $\mathfrak{H}$, которое, очевидно, удовлетворяет условиям (i) и (ii) и является, таким образом, унитарным оператором. Для доказательства соотношения (iii) положим $\varphi_r(t) = \varphi(t)$, если $|t| \leqslant r$, и $\varphi_r(t) = 0$, если $|t| > r$. Поскольку Φ плотно в $\mathfrak{H}$, а сходимость в среднем порядка 2 на множестве t, таких, что $|t| \leqslant r$, влечет за собой сходимость в L_1 на этом множестве, мы видим, что функция $F\varphi_r$ определяется соотношением (4), т. е.

$$(F\varphi_r)(s) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{|t|\leqslant r} e^{-ist}\varphi(t)\,dt.$$

Так как $\varphi_r \to \varphi$ при $r \to \infty$, из непрерывности F вытекает соотношение (iii); аналогично доказывается и (iv), ч. т. д.

$\to$ Замечание. Как показывает доказательство, справедливо также соотношение

$$F\varphi = \mathrm{l.i.m.} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{K_n} e^{-ist}\varphi(t)\,dt,$$

где $\{K_n\}$ — любая возрастающая последовательность множеств конечной меры, объединение которых отличается от $\mathfrak{S}$ лишь на множество меры нуль.

Основная спектральная мера e на Σ, которая используется для определения алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^p$, задается при помощи преобразования Фурье F на $\mathfrak{H}$ соотношением

$$(15) \qquad e(\sigma) = F^{-1}\mu(\sigma) F, \qquad \sigma \in \Sigma,$$

где $\mu(\sigma)$ — проектор-мультипликатор, такой, что

$$(16) \qquad (\mu(\sigma)\varphi)(s) = \begin{cases} \varphi(s), & s \in \sigma, \\ 0, & s \notin \sigma. \end{cases}$$

Ясно, что μ — счетно аддитивная спектральная самосопряженная мера в $\mathfrak{H}$, и потому, поскольку F унитарно, мера $e(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, является спектральной мерой с теми же свойствами. Мы также имеем $e(\sigma) = 0$ тогда и только тогда, когда σ имеет лебегову меру нуль, так что понятия e-почти всюду, e-существенной ограниченности и т. д.— те же, что и соответствующие понятия, связанные с мерой Лебега. Поэтому в таких выражениях мы обычно будем опускать e. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из всех операторов a из $B(\mathfrak{H})$, которые имеют вид

$$(17) \qquad a = \int_{\mathfrak{S}} \hat{a}(s)\, e(ds)$$

для некоторой Σ-измеримой и существенно ограниченной комплекснозначной функции $\hat{a}$ на R^N.

Прежде чем проиллюстрировать результаты предыдущего параграфа, мы исследуем структуру этих операторов из $\mathfrak{A}$ и, в частности, покажем, что многие операторы свертки и сингулярные операторы свертки, часто встречающиеся в анализе, принадлежат алгебре $\mathfrak{A}$. В последние годы интерес к операторам свертки снова возрос в основном благодаря тому, что теория распределений Л. Шварца [5] продемонстрировала их значение и большую пользу в теории уравнений с частными производными. Мы рассмотрим сначала некоторые специальные примеры операторов свертки, которые отображают $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, принадлежат алгебре $\mathfrak{A}$ и имеют интегральное представление одного из двух видов

$$(18) \qquad (f * \varphi)(s) = \int_{R^N} \varphi(s-t) f(t)\, dt, \qquad \varphi \in \mathfrak{H},$$

или

$$(19) \qquad (\lambda * \varphi)(s) = \int_{R^N} \varphi(s-t)\, \lambda(dt), \qquad \varphi \in \mathfrak{H},$$

определяемых комплекснозначной функцией f на R^N или комплекснозначной функцией множества λ, заданной на семействе $\Sigma(\lambda)$ множеств в R^N. Задание оператора свертки формулой (18) или (19) зависит и от интерпретации интеграла, т. е. от того, является ли интеграл обычным интегралом Лебега, определенным для почти всех s, или главным значением интеграла в смысле Коши, определяемым как некоторый предел интегралов Лебега, или интегралом векторнозначной функции, или главным значением интеграла векторнозначной функции. Для фиксированного элемента φ из $\mathfrak{H}$ и точки t из R^N определяется сдвиг φ_t как элемент $\mathfrak{H}$ соотношением $\varphi_t(s) = \varphi(s - t)$; его можно рассматривать как отображение $t \to \varphi_t$ из R^N в $\mathfrak{H}$, непрерывное во всех точках (XI.3.1(f)) и, поскольку $|\varphi_t| = |\varphi|$, ограниченное на $\overline{R}^N$. Это простое замечание дает основания полагать, что, по-видимому, легче операторы свертки задавать при помощи интегральных представлений, если использовать интегралы векторнозначных функций; так мы и сделаем.

Начнем с определения интеграла свертки (19), задаваемого комплекснозначной конечно аддитивной и ограниченной функцией множества λ, определенной на поле $\Sigma(\lambda)$, которое содержит открытые множества в R^N. Так как такая функция λ имеет ограниченную вариацию, то интеграл

$$\int_{R^N} f(t)\,\lambda(dt) \tag{20}$$

существует для любой векторнозначной функции f на R^N, ограниченной и λ-измеримой. В частности, если f непрерывна и принимает значения в компактном множестве, то она λ-измерима и, таким образом, интегрируема. Действительно, в этом случае область значений f можно покрыть конечным числом открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$, каждое из которых имеет диаметр, меньший фиксированного положительного числа ε; если положить

$$A_1 = G_1, \qquad A_j = G_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} G_k, \qquad j = 2, \ldots, n,$$

то множества $B_j = f^{-1}(A_j)$ лежат в $\Sigma(\lambda)$. Таким образом, конечнозначная функция

$$f_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{B_j},$$

где x_j — любая точка множества A_j, если оно непусто, и $x_j = 0$ в противном случае, λ-измерима и

$$|f_\varepsilon(s) - f(s)| < \varepsilon, \qquad s \in R^N;$$

тем самым доказано даже больше, чем только λ-измеримость функции f. В частности, всякая ограниченная непрерывная комплекснозначная функция на R^N λ-интегрируема. Это замечание позволяет нам определить интеграл

$$\tilde{\lambda}(s) = \int_{R^N} e^{-ist}\lambda(dt), \qquad s \in R^N, \tag{21}$$

который будет далее использоваться. Сдвиги φ_t, однако, не образуют компактного множества, и мы поступим следующим образом. Если f есть $\mathfrak{H}$-значная функция, ограниченная и непрерывная на R^N, а x^* — функционал из $\mathfrak{H}^*$, то предыдущие замечания показывают, что функция x^*f является λ-интегрируемой, и так как

$$\left| \int_{R^N} x^*f(t)\lambda(dt) \right| \leqslant |x^*| \sup_t |f(t)| v(\lambda; R^N),$$

то интеграл $\int x^*f(t)\lambda(dt)$ непрерывен по x^*. Поскольку $\mathfrak{H}$ рефлексивно, то в $\mathfrak{H}$ существует единственная точка $\Big($ее мы обозначаем символом $\int_{R^N} f(t)\lambda(dt)\Big)$, такая, что

$$x^* \int_{R^N} f(t)\lambda(dt) = \int_{R^N} x^*f(t)\lambda(dt). \tag{22}$$

Интеграл (20) определен, таким образом, для ограниченных непрерывных $\mathfrak{H}$-значных функций на R^N, и, в частности, если $f(t) = \varphi_t$, для некоторого элемента φ из $\mathfrak{H}$. Интеграл (19) определяется при помощи интеграла (20). Ясно, что если для почти всех s функция $\varphi(s-t)$ является λ-интегрируемой по t, то значения интеграла в (19) в двух смыслах совпадают почти всюду и определяют, таким образом, одну и ту же точку в $\mathfrak{H}$. Поэтому всякая ограниченная конечно аддитивная комплекснозначная функция множества λ, заданная на поле, содержащем открытые множества в $\mathfrak{H}$, определяет оператор свертки в $\mathfrak{H}$ при помощи соотношения (19).

Пусть T — непрерывное линейное отображение в $\mathfrak{H}$, f — ограниченная непрерывная $\mathfrak{H}$-значная функция на R^N и x^* — элемент в $\mathfrak{H}^*$. Тогда в силу соотношения (22)

$$x^*T \int_{R^N} f(t)\lambda(dt) = \int_{R^N} x^*Tf(t)\lambda(dt) = x^* \int_{R^N} Tf(t)\lambda(dt)$$

и, таким образом,

$$T \int_{R^N} f(T)\lambda(dt) = \int_{R^N} Tf(t)\lambda(dt). \tag{23}$$

Положим $\tau=(2\pi)^{N/2}F$, где F — преобразование Фурье в $\mathfrak{H}$, и пусть $\tau\varphi=\tilde{\varphi}$; тогда соотношение (23) дает

$$\tau(\lambda*\varphi)=\int_{R^N}\tau\varphi_t\lambda(dt),$$

и для почти всех s из R^N эта функция принимает значение

$$\tau(\lambda*\varphi)(s)=\int_{R^N}\left\{\underset{r\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{|u|\le r}e^{-isu}\varphi(u-t)\,du\right\}\lambda(dt)= \tag{24}$$

$$=\int_{R^N}\left\{\underset{r\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{|u|\le r}e^{-is(u-t)}\varphi(u-t)\,du\right\}e^{-ist}\lambda(dt)=$$

$$=\tilde{\lambda}(s)\,\tilde{\varphi}(s);$$

здесь на последнем шаге мы воспользовались замечанием, сделанным после доказательства следствия 3. Так как обе функции $\tau(\lambda*\varphi)$ и $\tilde{\varphi}$ измеримы по Лебегу, а $\tilde{\varphi}$ — произвольная функция из $\mathfrak{H}$, то соотношение (24) показывает, что функция $\tilde{\lambda}$ также измерима по Лебегу. Если обозначить через $\tilde{\lambda}$ операцию умножения на функцию $\tilde{\lambda}$ в $\mathfrak{H}$, т. е. положить $(\tilde{\lambda}\varphi)(s)=\tilde{\lambda}(s)\,\varphi(s)$, то соотношение (24) можно переписать в виде

$$\lambda*\varphi=\tau^{-1}\tilde{\lambda}\tau\varphi,\qquad \varphi\in\mathfrak{H}. \tag{25}$$

Иногда мы будем записывать эту операцию свертки совсем в другом виде. Заметим, что операцию $\varphi\to\hat{a}\varphi$ умножения на функцию $\hat{a}$ из $\hat{\mathfrak{A}}$ можно записать при помощи меры μ из соотношения (16) в виде

$$\hat{a}\varphi=\int_{\mathfrak{S}}\hat{a}(s)\,\mu(ds)\,\varphi,\qquad \varphi\in\mathfrak{H}. \tag{26}$$

Это соотношение очевидно, если $\hat{a}$ — характеристическая функция множества из Σ, а поскольку линейные комбинации таких функций плотны в $\hat{\mathfrak{A}}$, то оно выполняется для всех функций $\hat{a}$ из $\hat{\mathfrak{A}}$. Таким образом, в силу (26) соотношение (24) можно переписать в виде

$$\tau(\lambda*\varphi)=\int_{\mathfrak{S}}\tilde{\lambda}(s)\,\mu(ds)\,\tau\varphi.$$

По теореме Планшереля (следствие 3) оператор τ^{-1} существует и непрерывен на $\mathfrak{H}$, а так как $e(\sigma)=F^{-1}\mu(\sigma)F=\tau^{-1}\mu(\sigma)\tau$, то предыдущее соотношение дает

$$\lambda*\varphi=\int_{\mathfrak{S}}\tilde{\lambda}(s)\,e(ds)\,\varphi,\qquad \varphi\in\mathfrak{H}. \tag{27}$$

Это равенство показывает, что интеграл $\int \varphi_t \lambda(dt)$ векторнозначной функции φ_t относительно *конечно аддитивной* функции множества λ является тем же самым, что и интеграл числовой функции $\tilde{\lambda}$ относительно *счетно аддитивной* векторнозначной меры $e(\sigma)\varphi$. Суммируя сказанное, мы получаем следующее утверждение:

4. Теорема. *Всякая ограниченная аддитивная комплекснозначная функция множества λ, заданная на поле, содержащем открытые множества из R^N, определяет интеграл свертки*

$$\lambda * \varphi = \int_{R^N} \varphi_t \lambda(dt), \qquad \varphi \in \mathfrak{H},$$

где $\varphi_t(s) = \varphi(s-t)$; отображение λ: $\varphi \to \lambda * \varphi$ действует из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, принадлежит $\mathfrak{A}$ и

$$\lambda = \int_{\mathfrak{S}} \tilde{\lambda}(s)\, e(ds), \qquad |\lambda| = \operatorname*{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} |\tilde{\lambda}(s)|,$$

где функция $\tilde{\lambda}$ определяется соотношением (21). *Другими словами, $\lambda = F^{-1}\tilde{\lambda}F$, где $\tilde{\lambda}$ — оператор умножения на $\tilde{\lambda}$, а F — преобразование Фурье в $\mathfrak{H}$.*

Многие операторы свертки получаются как предел

$$\lambda\varphi = \lim_n \lambda_n * \varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{H}, \tag{28}$$

последовательности сверток, определяемых ограниченными конечно аддитивными функциями множества. Главные значения интеграла в смысле Коши, используемые в определении преобразования Гильберта и сингулярных сверток типа Кальдерона — Зигмунда, имеют именно такой вид. Следующая теорема дает полезный критерий существования предела (28):

→ 5. Теорема. *Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность ограниченных конечно аддитивных комплекснозначных функций множества, заданных на поле, порожденном открытыми множествами в R^N. Оператор свертки λ, задаваемый соотношением* (28), *определен всюду на $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_n |\tilde{\lambda}_n|_\infty < \infty, \tag{29}$$

и предел

$$\tilde{\lambda}(s) = \lim_n \tilde{\lambda}_n(s) \tag{30}$$

существует по мере на любом ограниченном измеримом множестве из R^N. Если этот предел существует, то λ лежит в $\mathfrak{A}$ и

$$\lambda = \int_{\mathfrak{S}} \tilde{\lambda}(s)\, e(ds), \qquad |\lambda| = \operatorname*{ess\,sup}_{s} |\tilde{\lambda}(s)|. \tag{31}$$

Другими словами, $\lambda = F^{-1}\tilde{\lambda}F$, где F — преобразование Фурье в $\mathfrak{H}$, а $\tilde{\lambda}$ — оператор умножения на функцию $\tilde{\lambda}$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda_n\varphi$ сходится для любого элемента φ из $\mathfrak{H}$. По теореме 4 $|\lambda_n| = |\tilde{\lambda}_n|_\infty$, и теорема II.3.6 доказывает соотношение (29). Положим $\varphi = F^{-1}\chi$, где χ — характеристическая функция ограниченного измеримого множества σ. Тогда по теореме 4 $\lambda_n\varphi = F^{-1}\tilde{\lambda}_n\chi$, и так как $\lambda_n\varphi$ сходится, то из непрерывности F следует, что

$$\lim_{m,\, n\to\infty} \int_\sigma |\tilde{\lambda}_n(s) - \tilde{\lambda}_m(s)|^2\, ds = 0,$$

откуда вытекает (III.3.6), что $\tilde{\lambda}_n$ сходится по мере на σ. Обратно, если соотношения (29) и (30) выполнены, то, поскольку нормы $|\lambda_n| = |\tilde{\lambda}_n|_\infty$ ограничены, для доказательства сходимости $\lambda_n\varphi$ на любом элементе φ из $\mathfrak{H}$ достаточно доказать сходимость для всякого элемента φ из некоторого фундаментального множества. Так как F — гомеоморфизм в $\mathfrak{H}$, в качестве этого фундаментального множества можно взять множество всех $\varphi = F^{-1}\psi$, где ψ обращается в нуль вне некоторого ограниченного измеримого множества σ. Для таких φ из теоремы 4 вытекает, что $\lambda_n\varphi = F^{-1}\tilde{\lambda}_n\psi$, и, следовательно, $\lambda_n\varphi$ сходится в $\mathfrak{H}$, если

$$\lim_{m,\, n\to\infty} \int_\sigma |\tilde{\lambda}_n(s) - \tilde{\lambda}_m(s)|^2\, |\psi(s)|^2\, ds = 0.$$

Это равенство является следствием соотношений (29), (30) и теоремы III.3.6; оно доказывает существование предела (28) при любой функции φ из $\mathfrak{H}$.

Предположим теперь, что выполнены соотношения (29) и (30); пусть ψ — произвольный вектор из $\mathfrak{H}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует ограниченное измеримое множество σ, такое, что

$$2 \sup_n |\tilde{\lambda}_n|_\infty \int_{\sigma'} |\psi(s))|^2\, ds < \varepsilon;$$

поэтому

$$\int_{R^N} |\tilde{\lambda}_n(s) - \tilde{\lambda}(s)|^2\, |\psi(s)|^2\, ds \leqslant \int_\sigma |\tilde{\lambda}_n(s) - \tilde{\lambda}(s)|^2\, |\psi(s)|^2\, ds + \varepsilon,$$

и из (30) вытекает, что $\widetilde{\lambda}_n\psi \to \widetilde{\lambda}\psi$ в $\mathfrak{H}$. Таким образом, для всякой функции φ из $\mathfrak{H}$

$$\lambda\varphi = \lim_n \lambda_n\varphi = \lim_n F^{-1}\widetilde{\lambda}_n F\varphi = F^{-1}\widetilde{\lambda}F\varphi,$$

откуда вытекают соотношения (31). Таким образом, если оператор λ всюду определен, то он принадлежит $\mathfrak{A}$, ч. т. д.

Легко видеть, что рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 5, можно подобным же образом использовать для доказательства следующего утверждения:

6. Теорема. *Алгебра $\mathfrak{A}$ полна в сильно операторной топологии в том смысле, что если a_n лежат в $\mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $a_n\varphi \to a\varphi$ для любого φ из $\mathfrak{H}$, то a лежит в $\mathfrak{A}$.*

Далее мы установим, что всякий оператор a из $\mathfrak{A}$ является оператором свертки типа, описанного в теореме 5, и что в качестве аппроксимирующих функций множества можно выбрать функции, счетно аддитивные и абсолютно непрерывные относительно меры Лебега. Для этого нам понадобится следующая лемма:

7. Лемма. *Для всякой функции ψ из L_∞ существует последовательность $\{\varphi_n\}$, состоящая из C^∞-функций, таких, что $\varphi_n(s) = 0$ при $|s| > n$, $|\varphi_n|_\infty \leqslant \sqrt{2}\,|\psi|$, и $\varphi_n \to \psi$ по мере на любом ограниченном измеримом множестве в R^N.*

Доказательство. Предположим сначала, что функция ψ — вещественная, измеримая и ограниченная на R^N. Пусть $0 < \varepsilon_n \to 0$ и $\mathfrak{S}_n = \{s \in R^N \mid |s| \leqslant n\}$. Так как ψ измерима, то существует такое замкнутое множество $\delta_n \subset \mathfrak{S}_n$, что сужение ψ на δ_n непрерывно на δ_n и

$$\text{(i)} \qquad \operatorname{mes}\delta_n > \operatorname{mes}\mathfrak{S}_n - \varepsilon_n.$$

Положим $\psi_n(s) = \psi(s)$ на δ_n и $\psi_n(s) = 0$ на дополнении $\mathfrak{S}_n$. Тогда в силу теоремы о продолжении (I.5.3) существует функция Ψ_n, непрерывная на R^N, такая, что $\Psi_n(s) = \psi_n(s) = \psi(s)$ для s из δ_n, $\Psi_n(s) = \psi_n(s) = 0$ при $|s| \geqslant n$ и

$$\text{(ii)} \qquad |\Psi_n|_\infty = \sup_{s\in\delta_n} |\psi_n(s)| = \sup_{s\in\delta_n} |\psi(s)| \leqslant |\psi|_\infty.$$

Так как Ψ_n равномерно непрерывна, то существует $\eta_n > 0$, такое, что $|\Psi_n(s) - \Psi_n(s')| < \varepsilon_n$, если $|s - s'| < \eta_n$. Выберем теперь непересекающиеся замкнутые подмножества δ_n^k, $k = 1, \ldots, m = m(n)$, в δ_n так, чтобы каждое из них имело диаметр, меньший η_n, и

$$\text{(iii)} \qquad \operatorname{mes}\Big(\bigcup_{k=1}^{m} \delta_n^k\Big) > \operatorname{mes}\delta_n - \varepsilon_n,$$

и открытые непересекающиеся подмножества ω_n^k в $\mathfrak{S}_n$, такие, что $\omega_n^k \supset \delta_n^k$ и $\operatorname{diam} \omega_n^k < \eta_n$. Из леммы XIV.2.1 вытекает существование функций φ_n^k на R^N со свойствами

(iv) $\varphi_n^k \in C_0^\infty$; $0 \leqslant \varphi_n^k(s) \leqslant 1$; $\varphi_n^k(s) = 1$, $s \in \delta_n^k$; $\varphi_n^k(s) = 0$, $s \notin \omega_n^k$.

Положим $\alpha_n^k = \Psi_n(s_n^k)$, где s_n^k — некоторая точка из δ_n^k, и

$$\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_n^k \varphi_n^k(s).$$

Если s принадлежит одному из множеств ω_n^k, то

$$|\zeta_n(s)| = |\alpha_n^k \varphi_n^k(s)| \leqslant |\alpha_n^k| \leqslant \sup_{s \in \omega_n^k} |\Psi_n(s)| \leqslant |\Psi_n|_\infty,$$

и, таким образом, соотношение (iii) показывает, что

$$\sup_{s \in \bigcup_{k=1}^{m} \omega_n^k} |\zeta_n(s)| \leqslant |\psi|_\infty.$$

Если же s не лежит в $\bigcup_{k=1}^{m} \omega_n^k$, то $\zeta_n(s) = 0$, и это в сочетании с предыдущим неравенством доказывает соотношение

(v) $$|\zeta_n|_\infty \leqslant |\psi|_\infty.$$

Условия (iv) показывают, что ζ_n лежит в C^∞ и обращается в нуль вне $\mathfrak{S}_n$. Таким образом, в силу (v) нам осталось лишь доказать, что $\zeta_n \to \psi$ по мере на любом ограниченном множестве. Если s — точка из δ_n^k, то $\zeta_n(s) = \alpha_n^k$, а поскольку δ_n^k имеет диаметр, меньший η_n, то $|\zeta_n(s) - \psi(s)| = |\zeta_n(s) - \Psi_n(s)| < \varepsilon_n$, откуда

(vi) $$|\zeta_n(s) - \psi(s)| < \varepsilon_n, \qquad s \in \bigcup_{k=1}^{m} \delta_n^k.$$

Пусть теперь B — произвольное ограниченное измеримое множество и $\varepsilon > 0$. Выберем n настолько большим, чтобы $B \subset \mathfrak{S}_n$ и $\varepsilon_n < \varepsilon$. Тогда в силу соотношений (i), (iii) и (vi)

$$\operatorname{mes}\{s \in B \mid |\zeta_n(s) - \psi(s)| > \varepsilon\} \leqslant \operatorname{mes}\{s \in \mathfrak{S}_n \mid |\zeta_n(s) - \psi(s)| > \varepsilon_n\} \leqslant \leqslant 2\varepsilon_n \to 0;$$

этим доказано, что $\zeta_n \to \psi$ по мере на B. Для комплекснозначной функции ψ из $L_\infty(R^N)$ сформулированное утверждение можно получить, применяя только что доказанные результаты к ее вещественной и мнимой частям, ч. т. д.

8. Теорема. *Каждый оператор a из $\mathfrak{A}$ является сверткой*

$$a\varphi = \lim_n \lambda_n * \varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{H},$$

где функции множества λ_n определены и абсолютно непрерывны на поле измеримых по Лебегу множеств в R^N.

Доказательство. По лемме 7 существует последовательность $\{\varphi_n\}$ из Φ, такая, что $|\varphi_n| \leqslant \sqrt{2}\ |\hat{a}|$ и $\varphi_n \to \hat{a}$ по мере на любом ограниченном измеримом множестве в R^N. В силу теоремы 1 функции $\psi_n = \tau^{-1}\varphi_n$ также лежат в Φ, а потому и в L_1. Если положить

$$\lambda_n(\sigma) = \int_\sigma \psi_n(s)\, ds, \qquad \sigma \in \Sigma,$$

то λ_n — абсолютно непрерывная мера, заданная на Σ, и

$$\widetilde{\lambda}_n(s) = \int_{R^N} e^{-ist}\lambda_n(dt) = \int_{R^N} e^{-ist}\psi_n(t)\, dt = \widetilde{\psi}_n(s) = \varphi_n(s).$$

Таким образом, по теореме 5 для всякой функции φ из $\mathfrak{H}$

$$\lim_n \lambda_n * \varphi = \lim_n \int_{R^N} \varphi_n(s)\, e(ds)\, \varphi =$$

$$= \int_{\mathfrak{S}} \hat{a}(s)\, e(ds)\, \varphi = a\varphi, \quad \text{ч. т. д.}$$

9. Следствие. *Оператор a в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ лежит в алгебре $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$(a\varphi)(s) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{R^N} f_n(s-t)\, \varphi(t)\, dt,$$

где f_n — функции из $L_1(R^N)$. Для любого элемента φ из $\mathfrak{H}$ интеграл существует в смысле Лебега для почти всех s из R^N.

Доказательство. Так как

$$\int_{R^N} \varphi_t \lambda_n(dt) = \int_{R^N} \varphi_t f_n(t)\, dt,$$

то из III.11.17 вытекает, что

$$(\lambda_n * \varphi)(s) = \int_{R^N} \varphi(s-t) f_n(t)\, dt = \int_{R^N} f_n(s-t)\, \varphi(t)\, dt$$

и что интеграл по Лебегу существует для почти всех s из R^N. Таким образом, следствие вытекает из теорем 5 и 8, ч. т. д.

10. Следствие. *Операторы свертки, всюду определенные на* $\mathfrak{H}$ *соотношением* (28), *образуют коммутативную* B^**-алгебру операторов в* $\mathfrak{H}$, $*$*-эквивалентную* B^**-алгебре* $L_\infty(R^N)$.

Следующие примеры — это наиболее простые свертки в $\mathfrak{A}$.

11. Пример (*сдвиг*). Пусть $\lambda_t(\sigma)=1$, если t лежит в σ, и $\lambda_t(\sigma)=0$ в противном случае. Тогда $(\lambda_t * \varphi)(s)=\varphi(t-s)$.

12. Пример (*свертка с функцией из* L_1). Пусть f — функция из L_1 и

$$\lambda(\sigma)=\int_\sigma f(t)\,dt, \qquad \sigma \in \Sigma.$$

Тогда

$$(\lambda * \varphi)(s)=\int_{R^N} \varphi(s-t) f(t)\,dt=\int_{R^N} f(s-t)\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi \in \mathfrak{H},$$

и интеграл существует как интеграл Лебега для почти всех s из R^N. Эту свертку также будем обозначать через $f*\varphi$. Иногда символ $\mathfrak{f}$ будет использоваться для обозначения оператора в $\mathfrak{H}$, который переводит φ в $f*\varphi$. Таким образом, для функции f из L_1 мы имеем

$$\mathfrak{f}=\int_{\mathfrak{S}} \tilde{f}(s)\,e(ds), \qquad |\mathfrak{f}|=|\tilde{f}|_\infty.$$

13. Пример (*свертка с функцией из* L_2). L_2-функция f, преобразование Фурье $\tilde{f}$ который лежит в L_∞, порождает оператор свертки $\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{A}$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для любой пары функций f, φ из L_2 свертка

$$(f*\varphi)(s)=\int_{R^N} f(s-t)\varphi(t)\,dt \tag{32}$$

существует как интеграл Лебега для всех s из R^N. Рассмотрим сначала случай, когда φ лежит в $L_1 \cap L_2$. Предыдущий пример показывает, что функция

$$f*\varphi=\varphi*f=\int_{\mathfrak{S}} \tilde{\varphi}(s)\,e(ds)\,f$$

лежит в L_2 и, таким образом,

$$\tau(f*\varphi)=\int_{\mathfrak{S}} \tilde{\varphi}(s)\,\tau e(ds) f=\int_{\mathfrak{S}} \tilde{\varphi}(s)\,\mu(ds)\tilde{f}=$$

$$=\tilde{f}\tilde{\varphi}=\int_{\mathfrak{S}} \tilde{f}(s)\,\mu(ds)\,\tilde{\varphi};$$

тем самым показано, что

$$f*\varphi=\int_{\mathfrak{S}}\tilde{f}(s)\,e(ds)\,\varphi.$$

Для произвольного элемента φ из L_2 выберем последовательность $\{\varphi_n\}$ в $L_1\cap L_2$, сходящуюся к φ; последнее равенство вместе с соотношением (32) показывают, что принадлежащий $\mathfrak{A}$ оператор

$$\mathbf{f}=\int_{\mathfrak{S}}\tilde{f}(s)\,e(ds)$$

переводит φ в $f*\varphi$.

14. Пример (*свертки типа главного значения*). Точка s_0 из $\mathfrak{S}$ называется *сингулярной точкой* измеримой функции f, заданной почти всюду на $\mathfrak{S}$, если f не интегрируема в смысле Лебега ни в какой окрестности точки s_0. Сингулярные точки, очевидно, образуют замкнутое множество в $\mathfrak{S}$; мы считаем, что оно имеет меру нуль. Будем считать, что ε-окрестность бесконечно удаленной точки ∞ есть множество всех s, для которых $|s|>1/\varepsilon$, а ε-окрестность точки s_0 из R^N состоит из тех s, для которых $|s-s_0|<\varepsilon$. Положим $f_\varepsilon(s)=f(s)$, если s не лежит в ε-окрестности какой-либо сингулярной точки, и $f_\varepsilon(s)=0$ в противном случае. Поэтому для каждого $\varepsilon>0$ функция f_ε лежит в L_1, и по теореме 5 свертка

$$f*\varphi=\lim_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon*\varphi,\qquad \varphi\in\mathfrak{H}, \tag{33}$$

существует для всех φ из $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда величина $|\tau f_\varepsilon|_\infty$ ограничена на интервале $0<\varepsilon<1$ и предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon$ существует по мере на всяком ограниченном измеримом множестве. Если f не лежит в L_1, то свертка (33) часто называется *сингулярной сверткой*. Проиллюстрируем это понятие на двух примерах.

15. Пример (*преобразование Гильберта*). Здесь $N=1$ и $f(s)=1/s$, так что $s=0$ и $s=\infty$ — единственные сингулярные точки функции f. Пусть $r=1/\varepsilon$, так что

$$\tilde{f}_\varepsilon(s)=\left[\int_{-r}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{r}\right]\frac{e^{-ist}}{t}\,dt=-2i\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\sin st}{t}\,dt=2i\operatorname{sgn}s\int_{|s|\varepsilon}^{|s|r}\frac{\sin t}{t}\,dt;$$

это показывает, что величина $|\tilde{f}_\varepsilon|_\infty$ ограничена и что $\tilde{f}_\varepsilon(s)\to-\pi i\operatorname{sgn}s$ для всех $s\neq 0$. Таким образом, преобразование Гильберта

$$(\mathbf{h}\varphi)(s)=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{|s-t|>\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{s-t}\,dt,\qquad \varphi\in\mathfrak{H}, \tag{34}$$

является оператором из $\mathfrak{A}$ и имеет вид

$$\mathfrak{h} = -\pi i \int_{\mathfrak{S}} \operatorname{sgn} s\, e(ds), \qquad |\mathfrak{h}| = \pi. \tag{35}$$

16. Пример (*Кальдерон и Зигмунд*). Аналогом преобразования Гильберта в случае размерности N, большей 1, служит *нечетное ядро типа Кальдерона — Зигмунда*. Пусть f — измеримая функция на R^N, нечетная и однородная степени $-N$, т. е.

$$f(-s) = -f(s), \qquad f(rs) = r^{-N} f(s), \qquad r > 0, \qquad 0 \neq s \in R^N, \tag{36}$$

и такая, что

$$\int_{\mathfrak{M}} |f(\omega)|\, m(d\omega) < \infty, \tag{37}$$

где m — мера на гиперповерхности $\mathfrak{M}$ единичной сферы в R^N. Тогда, переходя к полярным координатам (r, ω), где $s = r\omega$, $r \geqslant 0$, $|\omega| = 1$, мы имеем для $0 < \varepsilon < r$

$$\int_{\varepsilon \leqslant |s| \leqslant r} |f(s)|\, ds = \int_{\varepsilon}^{r} \left\{ \int_{\mathfrak{M}} |f(\rho\omega)|\, \rho^{N-1} \right\} m(d\omega)\, d\rho =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{r} \frac{d\rho}{\rho} \left\{ \int_{\mathfrak{M}} |f(\omega)|\, m(d\omega) \right\} < \infty;$$

этим показано, что функция f не имеет сингулярных точек, кроме, быть может, 0 и ∞. Так как $m(\sigma) = m(-\sigma)$, то, полагая $r = 1/\varepsilon$, мы имеем

$$\widetilde{f}_{\varepsilon}(s) = \int_{R^N} e^{-ist} f_{\varepsilon}(t)\, dt = \int_{\mathfrak{M}} f(\omega) \left\{ \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{-is\omega\rho}}{\rho}\, d\rho \right\} m(d\omega) =$$

$$= \int_{\mathfrak{M}} f(\omega) \left\{ -i \int_{\varepsilon}^{r} \frac{\sin s\omega\rho}{\rho}\, d\rho \right\} m(d\omega) =$$

$$= \int_{\mathfrak{M}} f(\omega) \left\{ -\operatorname{sgn} s\omega \int_{|s\omega|\varepsilon}^{|s\omega| r} \frac{\sin\rho}{\rho} \right\} m(d\omega),$$

а поскольку функция, заключенная в фигурные скобки, ограничена по всем переменным, то условие (37) показывает, что величина $|\widetilde{f}_{\varepsilon}|_{\infty}$ ограничена по ε. Кроме того, если $s \neq 0$, то множество тех ω на $\mathfrak{M}$, для которых $s\omega = 0$, имеет на гиперповерхности сферы меру нуль, а предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \tilde{f}_\varepsilon(s)$ существует, если $s \neq 0$, и равен

$$\tilde{f}(s) = \frac{-\pi i}{2} \int\limits_{\mathfrak{M}} f(\omega) \operatorname{sgn} s\omega m(d\omega). \tag{38}$$

Таким образом, сингулярный оператор свертки

$$\mathfrak{f}\varphi = f * \varphi = \underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_{|s-t|>\varepsilon} f(s-t)\varphi(t)\,dt, \qquad \varphi \in \mathfrak{H}, \tag{39}$$

лежит в $\mathfrak{A}$ и имеет представление

$$\mathfrak{f} = \frac{-\pi i}{2} \int\limits_{\mathfrak{S}} \left\{ \int\limits_{\mathfrak{M}} f(\omega) \operatorname{sgn} s\omega m(d\omega) \right\} e(ds), \tag{40}$$

а его норма равна

$$|\mathfrak{f}| = \frac{\pi}{2} \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} \left| \int\limits_{\mathfrak{M}} f(\omega) \operatorname{sgn} s\omega m(d\omega) \right|. \tag{41}$$

Ознакомившись с некоторыми примерами операторов из $\mathfrak{A}$, мы теперь приведем несколько примеров спектральных операторов из $\mathfrak{A}^p$. В силу леммы 10.4 и теоремы 10.6 основной результат, позволяющий строить такие операторы, состоит в следующем:

17. Теорема. *Оператор A из $\mathfrak{A}^p$ является спектральным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}_i} |E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\ \hat{A}(s))| < \infty, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p. \tag{42}$$

В применениях этого критерия необязательно вычислять нормы проекторов $E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\ \hat{A}(s))$, поскольку это конечные матрицы и их нормы существенно ограничены тогда и только тогда, когда существенно ограничены их элементы. Однако необходимо знать собственные значения $\hat{\lambda}_{ij}(s)$ матрицы $\hat{A}(s)$, что затрудняет формулировку какого-либо общего правила, отличного от (42), для проверки спектральности операторов из $\mathfrak{A}^p$. В случае $p=2$ условие (42) все же можно переформулировать в более удобной для применений форме. Для точек s из $\mathfrak{S}_1$ спектр $\sigma(\hat{A}(s))$ имеет единственную точку, так что $E(\hat{\lambda}_{11}(s);\ \hat{A}(s)) = I$; следовательно, нам нужно рассмотреть лишь случай, когда s принадлежит $\mathfrak{S}_2$. Для простоты положим $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ij}(s)$ и $\hat{\lambda}_j = \hat{\lambda}_{2j}(s)$, так что $\det(\lambda I - \hat{A}(s)) = (\lambda - \hat{\lambda}_1)(\lambda - \hat{\lambda}_2)$, где

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \frac{1}{2}(\hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} + \hat{\delta}), \\ \hat{\lambda}_2 &= \frac{1}{2}(\hat{a}_{11} + \hat{a}_{22} - \hat{\delta}), \end{aligned} \tag{43}$$

причем в качестве $\hat{\delta}$ выбран любой Σ-измеримый квадратный корень из величины

$$\hat{\delta}^2 = (\hat{a}_{11} - \hat{a}_{22})^2 + 4\hat{a}_{12}\hat{a}_{21}. \tag{44}$$

Множества $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ можно представить при помощи функции $\hat{\delta}$ в виде

$$\mathfrak{S}_1 = \{s \mid \hat{\delta}(s) = 0\}, \qquad \mathfrak{S}_2 = \{s \mid \hat{\delta}(s) \neq 0\}. \tag{45}$$

Так как для многочлена $P(\lambda) = (\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)^{-1}(\lambda - \hat{\lambda}_2)$ выполнены соотношения $P(\hat{\lambda}_1) = 1$ и $P(\hat{\lambda}_2) = 0$, то

$$E(\hat{\lambda}_{21}(s);\ \hat{A}(s)) = \frac{1}{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2}(\hat{A}(s) - \hat{\lambda}_2 I) = \tag{46}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\hat{a}_{11} - \hat{a}_{22}}{\hat{\delta}} & \dfrac{2\,\hat{a}_{12}}{\hat{\delta}} \\ \dfrac{2\,\hat{a}_{21}}{\hat{\delta}} & 1 - \dfrac{\hat{a}_{11} - \hat{a}_{22}}{\hat{\delta}} \end{pmatrix},$$

и эта матрица существенно ограничена на $\mathfrak{S}_2$ тогда и только тогда, когда каждая из трех функций

$$\frac{\hat{a}_{11} - \hat{a}_{22}}{\hat{\delta}}, \quad \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{\delta}}, \quad \frac{\hat{a}_{21}}{\hat{\delta}}$$

существенно ограничена на $\mathfrak{S}_2$. Таким образом, проекторы $E(\hat{\lambda}_{21}(s);\ \hat{A}(s))$ и $E(\hat{\lambda}_{22}(s);\ \hat{A}(s)) = I - E(\hat{\lambda}_{21}(s);\ \hat{A}(s))$ существенно ограничены на $\mathfrak{S}_2$, т. е. условие (42) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}_2} \frac{|\hat{a}_{11} - \hat{a}_{22}|^2 + |\hat{a}_{12}|^2 + |\hat{a}_{21}|^2}{|\hat{\delta}^2|} < \infty, \tag{47}$$

и мы доказали следующее следствие из теоремы 17:

→ 18. Теорема. *Оператор* $P = (a_{ij})$ *из* $\mathfrak{A}^2$ *имеет разложение единицы тогда и только тогда, когда выполняется неравенство* (47).

19. Следствие. *Оператор* $A = (a_{ij})$ *из* $\mathfrak{A}^2$ *является спектральным, если* $\mathfrak{S}_2$ *имеет меру нуль.*

20. Следствие. *Оператор* A *из* $\mathfrak{C}^2$ *является спектральным, если* $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$.

Операционное исчисление, построенное в следствии 10.11 для спектрального оператора A из $\mathfrak{A}^2$, требует вычисления проекторов E_{ij}, и мы сейчас проделаем это. Для удобства введем оператор

δ^{-1}, вообще говоря неограниченный, который мы определим следующими соотношениями:

$$\mathfrak{D}(\delta^{-1}) = \left\{\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{H},\ \int\limits_{\mathfrak{S}_2} \left|\frac{\tilde{\varphi}(s)}{\hat{\delta}(s)}\right|^2 ds < \infty\right\} \tag{48}$$

и

$$\delta^{-1}\varphi = \tau^{-1}\left(\frac{\chi_{\mathfrak{S}_2}}{\hat{\delta}}\right)\tau\varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\delta^{-1}). \tag{49}$$

Пусть φ — произвольный элемент $\mathfrak{H}$; положим

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_1 \cup \left\{s \mid s \in \mathfrak{S}_2, \qquad \frac{1}{|\hat{\delta}(s)|} \leqslant n\right\}.$$

При этом функции $\tau^{-1}\chi_{\mathfrak{S}_n}\tilde{\varphi}$ лежат в $\mathfrak{D}(\delta^{-1})$, и так как $\tau^{-1}\chi_{\mathfrak{S}_n}\tilde{\varphi} \to \varphi$, то $\mathfrak{D}(\delta^{-1})$ всюду плотно, а потому оператор δ^{-1} определен на всюду плотном множестве. Он также замкнут; действительно, предположим, что $\varphi_n \in \mathfrak{D}(\delta^{-1})$, $\varphi_n \to \varphi$ и $\delta^{-1}\varphi_n \to \psi$. Переходя к подпоследовательностям, мы можем считать, что $\tau\varphi_n \to \tau\varphi$ и $\tau\delta^{-1}\varphi_n \to \tau\psi$ как в топологии $\mathfrak{H}$, так и почти всюду. Поэтому для почти всех s

$$(\tau\psi)(s) = \lim_n (\tau\delta^{-1}\varphi_n)(s) = \lim_n \left(\frac{\chi_{\mathfrak{S}_2}(s)}{\hat{\delta}(s)}\right)(\tau\varphi_n)(s) = \left(\frac{\chi_{\mathfrak{S}_2}(s)}{\hat{\delta}(s)}\right)\tilde{\varphi}(s); \tag{50}$$

тем самым доказано, что φ лежит в $\mathfrak{D}(\delta^{-1})$ и $\psi = \delta^{-1}\varphi$. Таким образом, δ^{-1} — замкнутый оператор, определенный на всюду плотном множестве. Если a — элемент из $\mathfrak{A}$ и функция $|\hat{a}(s)\,\hat{\delta}^{-1}(s)|$ ограничена на $\mathfrak{S}_2$, то очевидно, что образ оператора a лежит в области определения оператора δ^{-1} и, таким образом, $\delta^{-1}a$ является ограниченным оператором и лежит в $\mathfrak{A}$. Следовательно, по теореме 18 для спектрального оператора A из $\mathfrak{A}^2$ все операторы $\delta^{-1}(a_{11} - a_{22})$, $\delta^{-1}a_{12}$, $\delta^{-1}a_{21}$ и $\delta^{-1}\delta = e(\mathfrak{S}_2)$ являются операторами из алгебры $\mathfrak{A}$. Из соотношения (46) вытекает, что проекторы E_{21} и E_{22} имеют матричное представление

$$E_{21} = \frac{\delta^{-1}}{2}\begin{pmatrix} \delta + (a_{11} - a_{22}) & 2a_{12} \\ 2a_{21} & \delta - (a_{11} - a_{22}) \end{pmatrix} e(\mathfrak{S}_2),$$

$$E_{22} = \frac{\delta^{-1}}{2}\begin{pmatrix} \delta - (a_{11} - a_{22}) & -2a_{12} \\ -2a_{21} & \delta + (a_{11} - a_{22}) \end{pmatrix} e(\mathfrak{S}_2) \tag{51}$$

и что правые части в этих равенствах дают представление ограниченных всюду определенных операторов на $\mathfrak{H}^2$, которые в действительности являются операторами из $\mathfrak{A}^2$. Как отмечалось ранее,

$E(\hat{\lambda}_{11}(s);\ \hat{A}(s)) = I$ на $\mathfrak{S}_1$, так что соотношения (50), (51) и

$$E_{11} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} e(\mathfrak{S}_1) \tag{52}$$

дают проекторы, необходимые для операционного исчисления. Например, ограниченная борелевская функция φ скалярной части S оператора A равна

$$\varphi(S) = \varphi(\lambda_{11}) E_{11} + \varphi(\lambda_{21}) E_{21} + \varphi(\lambda_{22}) E_{22}, \tag{53}$$

а разложение единицы $E(\sigma; A) = E(\sigma; S)$ можно получить, полагая в (53) $\varphi = \chi_\sigma$, характеристической функции множества σ. Так как $\chi_\sigma(\lambda_{ij}) = E(\sigma; \lambda_{ij}) = e(\hat{\lambda}_{ij}^{-1}(\sigma))$, то

$$E(\sigma; A) = e(\hat{\lambda}_{11}^{-1}(\sigma)) E_{11} + e(\hat{\lambda}_{21}^{-1}(\sigma)) E_{21} + e(\tilde{\lambda}_{22}^{-1}(\sigma)) E_{22}. \tag{54}$$

Следует упомянуть, что выполненное нами построение операционного исчисления для спектрального оператора A из $\mathfrak{A}^2$ можно совершенно аналогично повторить и для оператора A из $\mathfrak{A}^p$, $p > 2$. Из соотношения (iv) леммы 10.3 видно, что общий матричный элемент ограниченного проектора E_{ij} можно записать в виде произведения $\delta_{ij}^{-1} R_{ij}$, где R_{ij} — многочлен от корней и матричных элементов a_{ij}, а δ_{ij}^{-1} — замкнутый оператор, определенный на всюду плотном множестве.

21. Пример. Пусть $N = 1$. Оператор

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{h} \\ \mathbf{h} & b \end{pmatrix}, \tag{55}$$

где $\mathbf{h}$ —сингулярный интеграл Гильберта (34), принадлежит $\mathfrak{A}^2$ и не является самосопряженным или нормальным, кроме того случая, когда $i(a - b)$ — самосопряженный оператор, но при многих способах выбора операторов a и b он оказывается спектральным. Действительно, соотношение (35) показывает, что условие (47) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}_2} |(\hat{a}(s) - \hat{b}(s))^2 - 4\pi^2|^{-1} < \infty, \tag{56}$$

что заведомо верно, если, например, оба оператора a и b имеют нормы, меньшие π.

Другими примерами спектральных операторов, очевидно, являются операторы с матричным представлением вида

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h} + a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} e + a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, \tag{57}$$

в то время как оператор

(58) $$\begin{pmatrix} e-a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

не имеет разложения единицы, если только не выполнено условие

(59) $$|\hat{b}(s)| \leqslant M\,|1-2\hat{a}(s)|$$

с некоторой постоянной M и почти при всех s из множества $\mathfrak{S}_2$, совпадающего в этом случае с множеством тех s, где $\hat{a}(s) \neq 1/2$.

Как показывает следующая теорема, нильпотентная часть спектрального оператора из $\mathfrak{A}^2$ равна

$$N = e(\mathfrak{S}_1)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11}-a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & \frac{1}{2}(a_{22}-a_{11}) \end{pmatrix},$$

откуда вытекает, что спектральный оператор A из $\mathfrak{A}^2$, не имеющий вида $A = \lambda I$, где $\lambda \in \mathfrak{A}$, имеет ненулевую радикальную часть, если $e(\mathfrak{S}_1) \neq 0$. По теореме 6.4 спектральные операторы с ненулевой радикальной частью, и только они, являются операторами, которые не подобны нормальным операторам. Таким образом, оба оператора в (57) являются операторами скалярного типа, и при любых a и b из $\mathfrak{A}$ они подобны нормальным операторам. В случае операторов (55) и (58) ситуация несколько меняется. Если в (55) обе нормы $|a|$ и $|b|$ меньше π, то $\mathfrak{S}_1$ пусто и, таким образом, $N = 0$, но поскольку $\hat{a}$ и $\hat{b}$ — произвольные функции из L_∞, то оба множества $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ могут иметь положительную меру, а тогда оператор (55) не подобен нормальному. Если обе функции $\hat{a}$ и $\hat{b}$ непрерывны — а так будет, если a и b — свертки с L_1-функциями,— то неравенство (56) не может выполняться, если только или $\mathfrak{S}_1$, или $\mathfrak{S}_2$ непусто, но в этих двух случаях оператор (55) является оператором скалярного типа. Иное положение в случае оператора (58); здесь оба множества $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ могут иметь положительную меру, а тогда оператор не подобен нормальному, даже если a и b — свертки с L_1-функциями.

Любой оператор A из $\mathfrak{A}^2$ имеет представление, аналогичное каноническому представлению спектрального оператора. Это полученное в следующей теореме разложение дает нам возможность построить операционное исчисление для оператора A даже в том случае, когда он может не иметь разложения единицы.

22. Теорема. *Любой оператор A из $\mathfrak{A}^2$ однозначно порождает два оператора S и N из $\mathfrak{A}^2$ со следующими свойствами:*

(i) $$A = S + N, \quad SN = NS;$$

(ii) $$N^2 = 0;$$

(iii) *для почти всех* s *из* $\mathfrak{S}$ *минимальный многочлен матрицы* $\hat{S}(s)$ *комплексных чисел имеет только простые корни.*

Доказательство. Положим

$$(60)\ S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})\,e(\mathfrak{S}_1)+a_{11}e(\mathfrak{S}_2) & a_{12}e(\mathfrak{S}_2) \\ a_{21}e(\mathfrak{S}_2) & \frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})\,e(\mathfrak{S}_1)+a_{22}e(\mathfrak{S}_2) \end{pmatrix}$$

и

$$(61)\qquad N = e(\mathfrak{S}_1)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11}-a_{22}) & a_{12} \\ a_{21} & \frac{1}{2}(a_{22}-a_{11}) \end{pmatrix},$$

где множества $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ определены в (45). Равенства (i) получаются в результате простых вычислений, а если положить

$$(62)\qquad \delta = \int_{\mathfrak{S}} \hat{\delta}(s)\,e(ds),$$

то соотношение (45) показывает, что $e(\mathfrak{S}_1)\,\delta = 0$, и непосредственное умножение дает $N^2 = 0$; (ii) доказано. Из равенства (60) вытекает, что $\hat{S}(s) = \hat{\lambda}_{11}(s)\,I$ для всех s из $\mathfrak{S}_1$, и, следовательно, минимальный многочлен матрицы $\hat{S}(s)$ равен $\lambda - \hat{\lambda}_{11}(s)$, в то время как, для s из $\mathfrak{S}_2$, $\hat{S}(s) = \hat{A}(s)$ и $\hat{S}(s)$ для таких s имеет два различных корня. Поэтому для всех s из $\mathfrak{S}$ минимальный многочлен матрицы $\hat{S}(s)$ имеет лишь простые корни. Остается показать, что это разложение единственно. Это станет очевидным, если заметить, что $(p \times p)$-матрица комплексных чисел с минимальным многочленом без кратных корней является спектральным оператором скалярного типа в p-мерном унитарном пространстве, и обратно. Таким образом, если S_1, N_1 — другая пара операторов из $\mathfrak{A}^2$, удовлетворяющая условиям (i), (ii), (iii), то для почти всех s из $\mathfrak{S}$ мы имеем $\hat{N}_1^2(s) = 0$, и, следовательно, $\hat{A}(s) = \hat{S}_1(s) + \hat{N}_1(s)$ является каноническим представлением спектрального оператора $\hat{A}(s)$ в $B(E^2)$. Поскольку такое представление единственно, то $\hat{S}_1(s) = \hat{S}(s)$ и $\hat{N}_1(s) = \hat{N}(s)$, так что $S_1 = S$ и $N_1 = N$, ч. т. д.

Следующее утверждение вытекает из следствия 9.9 и равенства (61):

23. Следствие. *Операторы* A *и* S *имеют один и тот же спектр, а оператор* $N = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\hat{A}(s) = \hat{\lambda}(s)I$ *для почти всех* s *из* $\mathfrak{S}_1$ *при некоторой функции* $\hat{\lambda}$ *из* $\hat{\mathfrak{A}}$.

Очевидно, что если A — спектральный оператор, то разложение теоремы 22 является его каноническим разложением. Но сейчас для нас особенно важен тот факт, что это разложение существует для любого оператора A из $\mathfrak{A}^2$, даже для тех A, которые не имеют, как и S, разложения единицы. В дальнейшем изложении S и N будут операторами теоремы 22, порожденными оператором A из $\mathfrak{A}^2$.

Пусть A — произвольный элемент из $\mathfrak{A}^2$, а φ—комплекснозначная функция, аналитическая и однозначная на спектре $\sigma(A)$, так что оператор $\varphi(A)$ определяется соотношением

(63) $$\varphi(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}\,d\lambda,$$

где C состоит из конечного числа положительно ориентированных спрямляемых жордановых кривых, образующих границу открытого множества, которое содержит $\sigma(A)$ и на замыкании которого функция φ аналитична и однозначна. В силу следствия 9.6(ii) резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ лежит в $\mathfrak{A}^2$, а из (63) следует, что $\varphi(A)$ также лежит в $\mathfrak{A}^2$. Покажем теперь, что $\widehat{\varphi(A)}(s) = \varphi(\hat{A}(s))$. В силу следствия 9.9 функция φ аналитична на $\hat{\sigma}(\hat{A}(s)$ для почти всех s, и так как по теореме 9.3

$$(\lambda I-A)^{-1}=\int_{\mathfrak{S}} (\lambda I-\hat{A}(s))^{-1}\,e(ds),$$

то

$$\varphi(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\lambda)\left\{\int_{\mathfrak{S}}(\lambda I-\hat{A}(s))^{-1}\,e(ds)\right\}d\lambda=$$
$$=\int_{\mathfrak{S}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\lambda)(\lambda I-\hat{A}(s))^{-1}\,d\lambda\right\}e(ds),$$

где допустимо изменение порядка интегрирования, поскольку это так, если меру $e(\sigma)$ заменить мерой $(e(\sigma)x, y)$ для произвольных элементов x и y из $\mathfrak{H}$. Этим доказана формула

(64) $$\varphi(A)=\int_{\mathfrak{S}}\varphi(\hat{A}(s))\,e(ds),$$

имеющая некоторые преимущества по сравнению с формулой (63), но и ее можно улучшить. При выводе формулы (64) не использовалось условие $p=2$, и потому это равенство имеет место для оператора A из $\mathfrak{A}^p$ при любом $p \geqslant 1$ — факт, которым мы позже воспользуемся. Так как $\sigma(A) = \sigma(S)$, то из VII.3.10 вытекает, что

$$\varphi(A)=\sum_{k=0}^{\infty} N^k\,\frac{\varphi^{(k)}(S)}{k!},$$

а поскольку $N^2=0$, то

(65) $$\varphi(A)=\varphi(S)+N\varphi'(S),$$

где $\varphi'(S)$ — оператор, вычисленный по формуле (63) или (64), в которой A заменено на S, а $\varphi(\lambda)$ на $\varphi'(\lambda)$. Из (60) вытекает, что $\hat{S}(s)=\hat{\lambda}_{11}(s)I$ для всех s из $\mathfrak{S}_1$, так что

(66) $$\varphi(S)e(\mathfrak{S}_1)=\left\{\int\limits_{\mathfrak{S}_1}\varphi(\hat{\lambda}_{11}(s))\,e(ds)\right\}I=\varphi(\lambda_{11})I,$$
$$\varphi'(S)e(\mathfrak{S}_1)=\left\{\int\limits_{\mathfrak{S}_1}\varphi'(\hat{\lambda}_{11}(s))\,e(ds)\right\}I=\varphi'(\lambda_{11})I.$$

С другой стороны, в силу (46) для всех s из $\mathfrak{S}_2$ имеем

(67) $$\varphi(\hat{A}(s))=\varphi(\hat{\lambda}_{21}(s))\frac{\hat{A}(s)-\hat{\lambda}_{22}(s)I}{\hat{\lambda}_{21}(s)-\hat{\lambda}_{22}(s)}+\varphi(\hat{\lambda}_{22}(s))\frac{\hat{A}(s)-\hat{\lambda}_{21}(s)I}{\hat{\lambda}_{22}(s)-\hat{\lambda}_{21}(s)}=$$
$$=\frac{\varphi(\hat{\lambda}_{21}(s))-\varphi(\hat{\lambda}_{22}(s))}{\hat{\lambda}_{21}(s)-\hat{\lambda}_{22}(s)}(\hat{A}(s)-\hat{\lambda}_{21}(s))I+\varphi(\hat{\lambda}_{21}(s))I.$$

Тогда в силу (64) и (65) мы имеем

$$\varphi(A)=\varphi(A)e(\mathfrak{S}_1)+\varphi(A)\,e(\mathfrak{S}_2)=$$
$$=\varphi(S)e(\mathfrak{S}_1)+N\varphi'(S)e(\mathfrak{S}_1)+\int\limits_{\mathfrak{S}_2}\varphi(\hat{A}(s))\,e(ds),$$

и соотношения (66) и (67) дают

(68) $$\varphi(A)=\varphi(\lambda_{11})I+\varphi'(\lambda_{11})N+\varphi(\lambda_{21})I+(\Delta\varphi)(A-\lambda_{21}I),$$

где $\Delta\varphi$ — оператор из $\mathfrak{A}$, определяемый по формуле

(69) $$\Delta\varphi=\int\limits_{\mathfrak{S}_2}\frac{\varphi(\hat{\lambda}_{21}(s))-\varphi(\hat{\lambda}_{22}(s))}{\hat{\lambda}_{21}(s)-\hat{\lambda}_{22}(s)}\,e(ds).$$

С вычислительной точки зрения равенство (68) имеет ряд преимуществ по сравнению с формулой (64), поскольку оно выражает $\varphi(A)$ как линейную функцию A и N с коэффициентами из $\mathfrak{A}$. Суммируем сказанное в виде следующей теоремы:

24. Теорема. е*Для любого оператора A из $\mathfrak{A}^2$ и любой комплекснозначной функции φ, аналитической и однозначной на его спектре, операторы $\varphi(A)$, вычисленные по формулам* (63) *и* (68), *совпадают.*

Равенство (67) дает основания полагать, что для операторов A из $\mathfrak{A}^2$, таких, что $e(\mathfrak{S}_1)=0$, возможно операционное исчисление в алгебре, более широкой, чем алгебра аналитических функций.

Проверим, что это действительно так; пусть A лежит в $\mathfrak{A}^2$, $e(\mathfrak{S}_1) = 0$, и пусть $\mathfrak{L}(A)$ — алгебра всех комплексных функций φ на $\sigma(A)$, удовлетворяющих условию Липшица

$$|\varphi|_\Delta = \sup_{\lambda \neq \mu} \frac{|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)|}{|\lambda - \mu|} < \infty. \tag{70}$$

Уже было доказано, что при естественных операциях сложения, умножения, умножения на числа и норме

$$|\varphi| = |\varphi|_\Delta + |\varphi|_\infty, \quad \varphi \in \mathfrak{L}(A), \tag{71}$$

множество $\mathfrak{L}(A)$ является B-алгеброй, где единица — постоянная функция 1. В силу следствия 9.9 значения функций $\hat{\lambda}_{21}(s)$ и $\hat{\lambda}_{22}(s)$ лежат в $\sigma(A)$ при почти всех s. Таким образом, равенство (67) показывает, что $\varphi(\hat{A}(s))$ существенно ограничена на $\mathfrak{S}$, и, следовательно, для функций φ из $\mathfrak{L}(A)$ оператор

$$\varphi(A) = \int_{\mathfrak{S}} \varphi(\hat{A}(s))\, e(ds), \quad \varphi \in \mathfrak{L}(A), \tag{72}$$

существует как элемент из $\mathfrak{A}^2$. Справедлива

25. Теорема. *Если A — оператор из $\mathfrak{A}^2$, такой, что $e(\mathfrak{S}_1) = 0$, то отображение $\varphi \to \varphi(A)$ соотношения* (72) *задает непрерывное операционное исчисление для оператора A, отображающее $\mathfrak{L}(A)$ в $\mathfrak{A}^2$.*

Доказательство. Утверждение теоремы означает, что

$$\varphi(A) \in \mathfrak{A}^2, \quad \varphi \in \mathfrak{L}(A), \tag{73}$$

что отображение $\varphi \to \varphi(A)$ является алгебраическим гомоморфизмом, т. е.

$$\begin{gathered}(\alpha\varphi + \beta\psi)(A) = \alpha\varphi(A) + \beta\psi(A), \\ (\varphi\psi)(A) = \varphi(A)\psi(A), \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{L}(A),\end{gathered} \tag{74}$$

и изоморфизмом, т. е.

$$\text{из } \varphi(A) = 0 \text{ вытекает } \varphi = 0, \tag{75}$$

что это отображение непрерывно, т. е.

$$|\varphi(A)| \leqslant K|\varphi|, \quad \varphi \in \mathfrak{L}(A), \tag{76}$$

при некоторой постоянной K, не зависящей от φ, и, наконец, что отображение $\varphi \to \varphi(A)$ совпадает со значением $\varphi(A)$ в случае аналитической функции φ, т. е. операторы (63) и (72) одни и те же, если φ аналитична и однозначна на спектре $\sigma(A)$.

Последнее утверждение уже установлено в (64). К тому же мы уже отмечали что $\varphi(A)$ лежит в $\mathfrak{A}^2$, если φ принадлежит $\mathfrak{L}(A)$.

Соотношения (74) вытекают сразу же из соответствующих тождеств для конечных матриц $\varphi(A(s))$ и $\psi(A(s))$.

Для доказательства (75) предположим, что φ лежит в $\mathfrak{L}(A)$ и $\varphi(A) = 0$. Из теоремы 9.3 вытекает, что $\varphi((\hat{A}(s)) = 0$ почти всюду на $\mathfrak{S}$. Таким образом, для почти всех s функция φ обращается в нуль на спектре $\sigma(\hat{A}(s))$. Поэтому для некоторого множества σ_0 из Σ, такого, что $e(\sigma_0) = e$, функция φ обращается в нуль на $\bigcup_{s\in\sigma_0} \sigma(\hat{A}(s))$, а так как φ непрерывна, то она также обращается в нуль и на замыкании этого множества. Таким образом, следствие 9.9 показывает, что φ обращается в нуль на $\sigma(A)$, но это означает, что $\varphi = 0$.

Для доказательства неравенства (76) заметим, что в силу теоремы 9.3 и равенства (67)

$$|\varphi(A)| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} |\varphi(\hat{A}(s))| \leqslant 2|\varphi|_\Delta |A| + |\varphi|_\infty \leqslant K|\varphi|,$$

где K — постоянная, большая $2|A|$ и 1, ч. т. д.

12. Некоторые примеры неограниченных спектральных операторов

Вопрос о неограниченных спектральных операторах будет подробно рассмотрен в гл. XVIII, а многие применения таких операторов даны в гл. XIX и XX. Настоящая глава является кратким введением в эту тему; наша цель — показать, что ряд критериев спектральности операторов из алгебры $\mathfrak{A}^p$ может быть перенесен на определенный класс неограниченных операторов, возникающих при изучении линейных систем уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

Обозначения будут те же, что и в предыдущем параграфе, но теперь мы будем иметь дело с $(p\times p)$-матрицами $\hat{A}(s) = (\hat{a}_{jk}(s))$, элементами которых являются измеримые комплекснозначные функции, определенные почти всюду на $\mathfrak{S}$ и не обязательно ограниченные. Для любого множества σ из Σ и любой такой матрицы $\hat{A}(s)$ определим матрицу

$$\hat{A}_\sigma(s) = \begin{cases} \hat{A}(s), & s\in\sigma, \\ 0, & s\notin\sigma, \end{cases} \tag{1}$$

и оператор $\hat{A}_\sigma$ в $\mathfrak{H}^p$ при помощи соотношений

$$\mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma) = \left\{ \psi \mid \psi\in\mathfrak{H}^p, \quad \int_\sigma |\hat{A}(s)\psi(s)|^2 ds < \infty \right\},$$

(2)

$$(\hat{A}_\sigma\psi)(s) = \hat{A}_\sigma(s)\psi(s), \qquad \psi\in\mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma).$$

В процессе настоящих рассмотрений матрица $\hat{A}(s)$ будет фиксированной, и поэтому в обозначениях различных понятий, зависящих от $\hat{A}(s)$, эту зависимость можно не указывать. Например, символ Σ_0 будет обозначать семейство всех множеств σ в Σ, на которых функция $\hat{A}(s)$ существенно ограничена. Очевидно, что для таких множеств σ оператор $\hat{A}_\sigma$ является ограниченным и всюду определенным. В общем случае, однако, оператор $\hat{A}_\sigma$ не обязательно ограничен, но он всегда замкнут и определен на всюду плотном множестве. Действительно, предположим, что $\psi_m \in \mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma)$, $\psi_m \to \psi$ и $\hat{A}_\sigma\psi_m \to \varphi$. Можно считать, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, что обе последовательности $\hat{A}_\sigma\psi_m$ и ψ_m сходятся как почти всюду, так и в топологии $\mathfrak{H}^p$. Но тогда $\hat{A}_\sigma(s)\psi(s) = \varphi(s)$ почти всюду, так что функция ψ лежит в $\mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma)$, $\hat{A}_\sigma\psi = \varphi$, и, значит, оператор $\hat{A}_\sigma$ замкнут. Для проверки того, что он определен на всюду плотном множестве, выберем последовательность $\{\sigma_m\}$ так, что

$$\sigma_m \in \Sigma_0, \qquad \sigma_m \subseteq \sigma_{m+1}, \qquad \operatorname{mes}\{(\bigcup_m \sigma_m)'\} = 0, \tag{3}$$

и для произвольного вектора ψ из $\mathfrak{H}^p$ положим $\psi_m(s) = \psi(s)$, если $s \in \sigma_m$, и $\psi_m(s) = 0$ в остальных точках. Но так как σ_m — множество из Σ_0, то ψ_m лежит в $\mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma)$, и в силу (3) $\psi_m \to \psi$ в $\mathfrak{H}^p$, а потому оператор $\hat{A}_\sigma$ определен на всюду плотном множестве.

Преобразование Фурье F в $\mathfrak{H}^p$ определяется соотношением $F[\psi_1, \ldots, \psi_p] = [F\psi_1, \ldots, F\psi_p]$. Матрица $\hat{A}(s)$ и произвольное множество σ из Σ порождают оператор A_σ в $\mathfrak{H}^p$, который определяется соотношением

$$\mathfrak{D}(A_\sigma) = F^{-1}\mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma), \qquad A_\sigma\varphi = F^{-1}\hat{A}_\sigma F\varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(A_\sigma). \tag{4}$$

Так как F — гомеоморфизм в $\mathfrak{H}^p$ и $\hat{A}_\sigma$ замкнут и определен на всюду плотном множестве, то оператор A_σ также замкнут и определен на всюду плотном множестве. Очевидно также, что оператор A_σ ограничен и всюду определен для любого σ из Σ_0. Для произвольного множества σ из Σ оператор A_σ соотношения (4) определяется при помощи ограниченных операторов A_σ, где $\sigma \in \Sigma_0$, как это видно из следующей леммы.

1. Лемма. *Пусть* A_σ — *оператор* (4), *а* $\{\sigma_m\}$ — *последовательность множеств, удовлетворяющая условиям* (3). *Тогда*

(i) $$\mathfrak{D}(A_\sigma) = \{\varphi \mid \lim_{m\to\infty} A_{\sigma\sigma_m}\varphi \text{ *существует*}\};$$

(ii) $$A_\sigma\varphi = \lim_{m\to\infty} A_{\sigma\sigma_m}\varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(A_\sigma).$$

Доказательство. Положим $\varphi = F^{-1}\psi \in \mathfrak{D}(A_\sigma)$, так что ψ лежит в $\mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma)$, и, следовательно,

$$FA_{\sigma\sigma_m}\varphi = \hat{A}_{\sigma\sigma_m}\psi \to \hat{A}_\sigma\psi.$$

Этим показано, что

$$A_{\sigma\sigma_m}\varphi \to F^{-1}\hat{A}_\sigma F\varphi = A_\sigma\varphi.$$

Обратно, пусть φ — произвольный вектор в $\mathfrak{H}^p$, для которого последовательность $A_{\sigma\sigma_m}\varphi$ сходится в $\mathfrak{H}^p$ к некоторому вектору ξ. Положим $\psi = F\varphi$ и $\psi_m(s) = \chi_{\sigma_m}(s)\psi(s)$; тогда по норме $\mathfrak{H}^p$ мы имеем

$$\hat{A}_\sigma\psi_m = \hat{A}_{\sigma\sigma_m}\psi = FA_{\sigma\sigma_m}\varphi \to F\xi,$$

а также $\psi_m \to \psi$. Так как оператор $\hat{A}_\sigma$ замкнут, а ψ_m лежат в $\mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma)$, то вектор ψ принадлежит $\mathfrak{D}(\hat{A}_\sigma)$ и $\hat{A}_\sigma\psi = F\xi$. Таким образом, $F^{-1}\psi = \varphi$ — элемент из $\mathfrak{D}(A_\sigma)$ и

$$\lim_m A_{\sigma\sigma_m}\varphi = \xi = F^{-1}\hat{A}_\sigma F\varphi = A_\sigma\varphi,$$

что завершает доказательство леммы, ч. т. д.

Ясно, что для любой пары множеств σ_1 и σ_2 из Σ мы имеем $\mu(\sigma_1)\,\mathfrak{D}(\hat{A}_{\sigma_2}) \subseteq \mathfrak{D}(\hat{A}_{\sigma_2})$, откуда

$$e(\sigma_1)\,\mathfrak{D}(A_{\sigma_2}) \subseteq \mathfrak{D}(A_{\sigma_2}), \qquad \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma. \tag{5}$$

Если множество σ отличается от $\mathfrak{S}$ на множество меры нуль, то мы обычно будем писать A и $\hat{A}$ вместо A_σ и $\hat{A}_\sigma$ соответственно, так что в силу (5)

$$e(\sigma)\,\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A), \qquad \sigma \in \Sigma. \tag{6}$$

Таким образом, мы можем говорить о сужениях операторов A и $\hat{A}$ на подпространства $e(\sigma)\,\mathfrak{D}(A)$ и $\mu(\sigma)\,\mathfrak{D}(\hat{A})$ соответственно. Из сказанного выше вытекает, что сужение оператора A_σ на $e(\sigma)\,\mathfrak{D}(A)$ совпадает с сужением оператора A_σ на $e(\sigma)\,\mathfrak{D}(A)$, т. е.

$$A_\sigma e(\sigma)\varphi = Ae(\sigma)\varphi, \qquad \sigma \in \Sigma, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(A). \tag{7}$$

Если σ лежит в Σ_0, то $\hat{A}_\sigma$ — элемент из $\hat{\mathfrak{A}}$ и тем самым A_σ — элемент $\mathfrak{A}$ и, как в предыдущем параграфе,

$$A_\sigma = \int_\sigma \hat{A}(s)\,e(ds), \qquad \sigma \in \Sigma_0. \tag{8}$$

Если $\{\sigma_m\}$ — последовательность множеств из Σ, удовлетворяющая условиям (3), то в силу леммы 1

$$A\varphi = \lim_m \int_{\sigma_m} \hat{A}(s)\,e(ds)\,\varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(A), \tag{9}$$

так что A — оператор типа неограниченной свертки. Сказанное выше можно резюмировать следующим образом:

2. Теорема. *Для всякой измеримой* $(p \times p)$*-матрицы* $\hat{A}(s)$ *комплексных функций, заданных почти всюду на* $\mathfrak{S}$, *и всякого измеримого множества* σ *из* $\mathfrak{S}$ *операторы* $\hat{A}_\sigma$ *и* A_σ, *определяемые соотношениями* (2) *и* (4), *замкнуты и определены на всюду плотных множествах в* $\mathfrak{H}^p$. *Для любого множества* σ *из* Σ *выполнены соотношения* (6) *и* (7), *и если* σ *лежит в* Σ_0, *то оператор* A_σ *принадлежит* $\mathfrak{A}$ *и выполнено соотношение* (8). *Если последовательность множеств* $\{\sigma_m\}$ *удовлетворяет условиям* (3), *то оператор* A *может быть задан соотношением* (9) *и его область определения состоит из тех и только тех функций* φ, *для которых существует предел* (9).

Далее мы рассмотрим вопрос о существовании разложения единицы для A. Это приводит нас к необходимости дать определение неограниченного спектрального оператора в терминах ранее введенного понятия ограниченного спектрального оператора.

→ 3. Определение. Оператор A, заданный соотношением (4), называется *спектральным оператором*, если для всякого множества σ из Σ_0 ограниченный оператор A_σ является спектральным и, кроме того, разложения единицы $E(\delta; A_\sigma)$ равномерно ограничены, т. е.

$$\sup_{\sigma \in \Sigma_0} \sup_{\delta \in \mathscr{B}} |E(\delta; A_\sigma)| < \infty. \tag{10}$$

Оператор A называется оператором *скалярного типа*, если он является спектральным оператором, для которого каждый из операторов A_σ, $\sigma \in \Sigma_0$, скалярного типа.

Вопрос о существовании разложения единицы для таких неограниченных спектральных операторов решается в следующей теореме:

→ 4. Теорема. *Замкнутый оператор* A, *заданный соотношением* (4), *является спектральным тогда и только тогда, когда*

$$\text{(i)} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}_j} |E(\hat{\lambda}_{jk}(s); \hat{A}(s))| < \infty, \qquad 1 \leqslant k \leqslant j \leqslant p.$$

Если это условие выполнено, то функция множества

$$\text{(ii)} \qquad E(\delta; A) = \int_{\mathfrak{S}} E(\delta; \hat{A}(s))\, e(ds), \qquad \delta \in \mathscr{B},$$

есть ограниченная счетно аддитивная спектральная мера, заданная на борелевских множествах в комплексной плоскости, значениями которой являются проекционные операторы в $\mathfrak{H}^p$. *Кроме того, для всякого множества* σ *из* Σ_0 *мы имеем*

$$\text{(iii)} \qquad E(\delta; A)\, A_\sigma = A_\sigma E(\delta; A), \qquad \delta \in \mathscr{B},$$

и

(iv) $E(\delta; A)\, e(\sigma) = E(\delta; A_\sigma)\, e(\sigma), \quad \delta \in \mathscr{B}.$

Последнее соотношение однозначно определяет спектральную меру $E(\delta; A)$.

Доказательство. Первое утверждение является следствием леммы 10.4 и теоремы 10.6, а второе вытекает из теоремы 10.5, если заметить, что при ее доказательстве не была использована ограниченность $\hat{A}(s)$. Так как $E(\delta; \hat{A}(s))$ и $\hat{A}(s)$ коммутируют при всех s из $\mathfrak{S}$, то утверждение (iii) следует из теоремы 9.3. Для доказательства (iv) заметим, что в силу (1)

$$\begin{aligned} E(\delta; A)\, e(\sigma) &= \int_\sigma E(\delta; \hat{A}(s))\, e(ds) = \\ &= \int_\sigma E(\delta; \hat{A}_\sigma(s))\, e(ds) = \\ &= \left\{ \int_{\mathfrak{S}} E(\delta; \hat{A}_\sigma(s))\, e(ds) \right\} e(\sigma) = \\ &= E(\delta; A_\sigma)\, e(\sigma). \end{aligned}$$

Последнее утверждение теоремы очевидно, поскольку проектор $E(\delta; A_\sigma)$ однозначно определяется оператором A и множествами $\sigma \in \Sigma_0$, $\delta \in \mathscr{B}$, ч. т. д.

Оператор скалярного типа можно выразить в терминах его разложения единицы, как это показано в следующей весьма общего типа теореме о спектральном разложении:

5. Теорема. *Если A — оператор скалярного типа, то*

$$A\varphi = \lim_{r \to \infty} \int_{|\lambda| \leq r} \lambda E(d\lambda; A)\, \varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(A).$$

Доказательство. Пусть $\{\sigma_m\}$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (3), а δ_r — множество комплексных чисел λ, таких, что $|\lambda| \leq r$. Тогда для любого элемента φ из $\mathfrak{D}(A)$ в силу (6) элементы $e(\sigma_m)\varphi$ принадлежат $\mathfrak{D}(A)$. Из соотношений (7) и (iv) теоремы 4 вытекает также, что

$$\begin{aligned} E(\delta_r; A)\, A e(\sigma_m)\, \varphi &= E(\delta_r; A)\, A_{\sigma_m} e(\sigma_m)\, \varphi = \\ &= E(\delta_r; A_{\sigma_m})\, A_{\sigma_m} e(\sigma_m)\, \varphi = \\ &= \int_{|\lambda| \leq r} \lambda E(d\lambda; A_{\sigma_m})\, e(\sigma_m)\, \varphi = \\ &= \int_{|\lambda| \leq r} \lambda E(d\lambda; A)\, e(\sigma_m)\, \varphi. \end{aligned}$$

Но в силу (9) $Ae(\sigma_m)\varphi \to A\varphi$, так что

$$E(\delta_r;\ A)A\varphi = \int\limits_{|\lambda|\leq r} \lambda E(d\lambda;\ A)\varphi,$$

и требуемое заключение вытекает из счетной аддитивности E при $r \to \infty$, ч. т. д.

В силу теоремы 11.18, следствия 11.23 и теоремы 4 в случае $p = 2$ критерий спектральности можно сформулировать следующим образом.

6. Теорема. *Пусть* $p = 2$, $\hat{\delta}^2 = (\hat{a}_{11} - \hat{a}_{22})^2 + 4\hat{a}_{12}\hat{a}_{21}$.*Определим множества* $\mathfrak{S}_1 = \{s \mid \hat{\delta}(s) = 0\}$, $\mathfrak{S}_2 = \{s \mid \hat{\delta}(s) \neq 0\}$. *При этом оператор соотношения* (4) *является спектральным тогда и только тогда, когда*

$$\text{(i)} \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}_2} \frac{|\hat{a}_{11}(s) - \hat{a}_{22}(s)|^2 + |\hat{a}_{21}(s)|^2 + |\hat{a}_{12}(s)|^2}{|\hat{\delta}^2(s)|} < \infty.$$

Этот спектральный оператор является оператором скалярного типа тогда и только тогда, когда кроме условия (i) *для почти всех* s *из* $\mathfrak{S}_1$ *выполнено соотношение*

$$\text{(ii)} \qquad \hat{A}(s) = \hat{\lambda}(s) I,$$

где $\hat{\lambda}$ — *некоторая измеримая функция на* R^N.

Полученные результаты уже можно применить к формальному дифференциальному оператору $A = (a_{jk})$, где a_{jk} — многочлены $a_{jk}(\partial/\partial s_1, \ldots, \partial/\partial s_N)$ с постоянными коэффициентами от частных производных $\partial/\partial s_1, \ldots, \partial/\partial s_N$. Рассмотрим в $\mathfrak{H}^p$ всюду плотное линейное подпространство $\Phi^p = \Phi \oplus \ldots \oplus \Phi$, порожденное множеством Φ быстро убывающих функций на R^N. Если $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\}$ лежит в Φ^p, то за $A\varphi$ примем вектор в $\mathfrak{H}^p$, j-я компонента которого равна

$$(11) \qquad A(\varphi)_j = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}(\partial)\varphi_k, \qquad \varphi \in \Phi^p.$$

Используя формулу обращения

$$\varphi_k(s) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} e^{ist}(F\varphi_k)(t)\,dt,$$

мы получаем

$$a_{jk}(\partial_s)\varphi_k(s) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{R^N} e^{ist} a_{jk}(it)(F\varphi_k)(t)\,dt =$$
$$= (F^{-1}a_{jk}(i\cdot)F\varphi_k(s).$$

Здесь символ $a_{jk}(i\cdot)$ используется для обозначения оператора умножения на функцию $a_{jk}(it)$. Таким образом, если $\hat{A}=(\hat{a}_{jk}(s))$, где $\hat{a}_{jk}(s)=a_{jk}(is)$, то соотношение (11) имеет вид

$$A\varphi=F^{-1}\hat{A}F(\varphi), \qquad \varphi\in\Phi^p. \tag{12}$$

Это равенство вместе с теоремой 2 показывает, что дифференциальный оператор (11) имеет замкнутое расширение, задаваемое соотношением (4), где $\sigma=\mathfrak{S}$. Этот замкнутый определенный на всюду плотном множестве оператор $A_{\mathfrak{S}}$ мы будем называть *естественным замкнутым расширением оператора A*.

Наличие постоянной $i=\sqrt{-1}$ в формальном дифференциальном операторе

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial s_1^2} & i\dfrac{\partial^2}{\partial s_1\,\partial s_2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial s_1\,\partial s_2} & \dfrac{\partial^2}{\partial s_2^2} \end{pmatrix} \tag{13}$$

мешает тому, чтобы его естественное замкнутое расширение на $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ было самосопряженным, но тем не менее оно имеет разложение единицы; действительно,

$$\hat{A}(s)=\begin{pmatrix} -s_1^2 & -is_1s_2 \\ -s_1s_2 & -s_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\delta^2(s)=(s_1^2-s_2^2)^2+4is_1^2s_2^2,$$

а дробь неравенства (i) теоремы 6 равна

$$\frac{|s_1^2-s_2^2|^2+2|s_1s_2|^2}{\{(s_1^2-s_2^2)^4+16s_1^4s_2^4\}^{1/2}}$$

и ограничена на R^n. Таким образом, оператор $A_{\mathfrak{S}}$ имеет разложение единицы. Более того, множество $\mathfrak{S}_1$ является множеством $\{s\mid s_1=s_2=0\}$ нулевой меры, так что $A_{\mathfrak{S}}$ — оператор скалярного типа и к нему применима теорема 5.

В качестве другого примера рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial s_1^2} & -\alpha i \\ \beta i & \dfrac{\partial^2}{\partial s_2^2} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где α, β — положительные вещественные числа. Если $\alpha\neq\beta$, то соответствующий замкнутый оператор $A_{\mathfrak{S}}$ не может быть самосопряженным, но он всегда имеет разложение единицы, поскольку

$$\hat{A}(s)=\begin{pmatrix} -s_1^2 & -\alpha i \\ \beta i & -s_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\delta}^2(s)=(s_1^2-s_2^2)^2+4\alpha\beta$$

и выполнено неравенство (i) теоремы 6. В этом случае множество $\mathfrak{S}_1$ пусто, так что $A_{\mathfrak{S}}$ — спектральный оператор скалярного типа и к нему применима теорема 5.

Примером другого типа дифференциального оператора, расширением которого является спектральный оператор, но не скалярного типа, может служить формальный дифференциальный оператор

$$\begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial^2}{\partial s_1\,\partial s_2} & i\dfrac{\partial^2}{\partial s_2^2} \\ i\dfrac{\partial^2}{\partial s_1^2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В этом случае $\mathfrak{S}_1 = R^N$, а $\mathfrak{S}_2$ пусто, так что неравенство (i) теоремы 6 выполнено, а соотношение (ii) нет. Таким образом, естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ формального оператора (15) есть спектральный оператор, который не является ни оператором скалярного типа, ни нильпотентным оператором.

Иногда в дальнейшем вместо оператора $\hat{A}_{\mathfrak{S}}$ мы будем писать просто $\hat{A}$, так как едва ли это может привести к недоразумению. Такого упрощения мы не будем делать в обозначении естественного замкнутого расширения $A_{\mathfrak{S}}$, поскольку в этом случае символ A используется для обозначения сужения $A_{\mathfrak{S}}$ на Φ, т. е. того формального дифференциального оператора, который порождает $A_{\mathfrak{S}}$.

Спектры неограниченных операторов, рассмотренных в этом параграфе, не всегда вычисляются столь просто, как это было в случае ограниченных операторов из $\mathfrak{A}^p$. Данное в следствии 9.9 представление спектра оператора A из $\mathfrak{A}^p$ не обязательно корректно, если элементы $\hat{A}$ — неограниченные функции от s. Для замкнутого оператора $A_{\mathfrak{S}}$ резольвентное множество $\rho(A_{\mathfrak{S}})$ было определено (см. § VII.9) как множество всех комплексных чисел λ, для которых $(\lambda I - A_{\mathfrak{S}})^{-1}$ существует как ограниченный всюду определенный оператор. Спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ оператора $A_{\mathfrak{S}}$ определяется как дополнение $\rho(A_{\mathfrak{S}})$. Очевидно, в силу (4), что $\rho(A_{\mathfrak{S}}) = \rho(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$, и потому $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$. Значит, $\rho(A_{\mathfrak{S}})$ состоит из тех λ, для которых $(\lambda I - \hat{A}(s))^{-1}$ существует для почти всех s из $\mathfrak{S}$ и существенно ограничена на $\mathfrak{S}$. В последней части доказательства следствия 9.9 не использовалась ограниченность элементов матрицы $\hat{A}(s)$; поэтому даже для неограниченных операторов $A_{\mathfrak{S}}$, рассматриваемых в этом параграфе, спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ содержит множество $\sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$, определяемое соотношением

$$(16)\qquad \sigma_0(A_{\mathfrak{S}}) = \bigcap_{e(\delta)=e} \overline{\bigcup_{s\in\delta} \sigma(\hat{A}(s))}.$$

Все, что можно сказать в общем случае, содержится в следующей теореме.

→ 7. Теорема. *Пусть $\hat{A}_{\mathfrak{S}}$, $A_{\mathfrak{S}}$ — замкнутые операторы с всюду плотными областями определения, заданные соотношениями* (2) *и* (4) *соответственно. Тогда $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$, $\rho(A_{\mathfrak{S}}) = \rho(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$ и $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) \supseteq \sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$. Если $A_{\mathfrak{S}}$ — спектральный оператор скалярного типа, то $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$. Для любого, не обязательно спектрального, оператора $A_{\mathfrak{S}}$ спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ состоит из множества $\sigma_0(A)$ и всех комплексных чисел λ его дополнения, для которых*

$$\text{(i)}\qquad \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} |(\lambda I - \hat{A}(s))^{-1}| = \infty.$$

Резольвентное множество состоит из всех комплексных чисел $\lambda \notin \sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$, для которых

$$\text{(ii)}\qquad \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} |(\lambda I - \hat{A}(s))^{-1}| < \infty.$$

Доказательство. Из определения множества $\sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$ вытекает, что $(\lambda I - \hat{A}(s))^{-1}$ существует для почти всех s из $\mathfrak{S}$, если λ не лежит в $\sigma_0(A)$, так что выражения, входящие в соотношения (i) и (ii), имеют смысл. В силу замечаний, сделанных перед формулировкой теоремы, два последних утверждения теоремы очевидны, и нужно лишь показать, что $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$ в случае спектральных операторов $A_{\mathfrak{S}}$ скалярного типа. Если $A_{\mathfrak{S}}$ — такой оператор, то в силу определения 3 и следствия 10.9 оператор $\hat{A}_{\mathfrak{S}}$ является спектральным оператором скалярного типа, и по теореме VII.1.8 для $\lambda \notin \sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$

$$(\lambda I - \hat{A}_{\mathfrak{S}}(s))^{-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{E(\hat{\lambda}_{kj}(s);\ \hat{A}(s))}{\lambda - \hat{\lambda}_{kj}(s)}, \qquad s \in \mathfrak{S}_k, \qquad k = 1, \ldots, p.$$

Так как $\lambda \notin \sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$, то функции $(\lambda - \hat{\lambda}_{kj}(s))^{-1}$ существенно ограничены на $\mathfrak{S}_k$, а так как $A_{\mathfrak{S}}$ — спектральный оператор, то из теоремы 4 вытекает, что функции $|E(\hat{\lambda}_{kj}(s);\ \hat{A}(s))|$ также существенно ограничены на $\mathfrak{S}_k$, $k = 1, \ldots, p$. Таким образом, соотношение (ii) выполнено, и потому λ лежит в резольвентном множестве $\rho(\hat{A}_{\mathfrak{S}}) = \rho(A_{\mathfrak{S}})$. Этим доказано, что $\sigma_0(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma(A_{\mathfrak{S}})$ в случае спектрального оператора $A_{\mathfrak{S}}$ скалярного типа, ч. т. д.

Равенство $\sigma_0(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma(A_{\mathfrak{S}})$ иногда верно и для спектральных операторов, не являющихся операторами скалярного типа. Спектр некоторых нильпотентных операторов может заполнять всю комплексную плоскость. Разберем несколько поясняющих примеров. Пусть $p = 2$; рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial s_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Тогда $\sigma_0(\hat{A}) = \{0\}$, $\hat{A}(s)^2 = 0$ и для всякого $\lambda \notin \sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$, т. е. для любого $\lambda \neq 0$, мы имеем

$$(\lambda - \hat{A}(s))^{-1} = \frac{I}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} 0 & is_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и эта матрица не ограничена в существенном. Следовательно, спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ совпадает со всей плоскостью. В самом деле, если p и N — произвольные положительные целые числа, а формальный дифференциальный оператор

$$A = (a_{jk}), \qquad a_{jk} = a_{jk}(\partial/\partial s_1, \ldots, \partial/\partial s_N), \tag{18}$$

где a_{jk} — многочлены от $s_1, \ldots, s_N$ с постоянными коэффициентами, нильпотентен в Φ^p, т. е. $A^n\Phi^p = 0$ для некоторого натурального n, то спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ совпадает со всей комплексной плоскостью, за исключением того случая, когда все многочлены a_{jk}, $1 \leqslant j, k \leqslant p$, постоянны (т. е. не зависят от $s_1, \ldots, s_N$), и тогда $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = \{0\}$. Действительно, так как $\hat{N}^n(s) = 0$ почти всюду, то $\sigma_0(A_{\mathfrak{S}}) = \{0\}$ и для любого $\lambda \neq 0$

$$(\lambda I - \hat{A}(s))^{-1} = \frac{I}{\lambda} + \frac{\hat{A}(s)}{\lambda^2} + \ldots + \frac{\hat{A}^{n-1}(s)}{\lambda^n},$$

откуда следует, что все элементы матрицы $(\lambda I - \hat{A}(s))^{-1}$ являются многочленами переменных $s_1, \ldots, s_N$, а потому $|(\lambda I - \hat{A}(s))^{-1}|$ не может быть существенно ограничена, кроме того случая, когда все эти многочлены постоянны. Но тогда $\lambda I - \hat{A}(s) = \{(\lambda I - \hat{A}(s))^{-1}\}^{-1}$ состоит из постоянных элементов, а значит, такой же будет и матрица $\hat{A}(s)$. Поэтому из теоремы 7 вытекает, что естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ формального дифференциального оператора (18), такого, что $A^n\Phi^p = 0$, имеет спектром $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ всю комплексную плоскость, кроме того случая, когда A нулевого порядка, т. е. ни один из элементов a_{jk} не содержит какой-либо производной, и тогда $\sigma(A_{\mathfrak{S}})=\{0\}$.

Другим иллюстративным примером в случае $p=2$ может служить возмущенный оператор Лапласа

$$(19)\qquad A=\begin{pmatrix}\nabla^2 & a\\ 0 & \nabla^2\end{pmatrix},\quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial s_N^2}$$

и $a=a(\partial/\partial s_1, \ldots, \partial/\partial s_N)$, где a — многочлен степени не выше 4. Здесь

$$(20)\qquad \hat{A}(s)=\begin{pmatrix}-|s|^2 & \hat{a}(s)\\ 0 & -|s|^2\end{pmatrix},$$

так что $\sigma_0(A_{\mathfrak{S}})=(-\infty, 0]$. Если $\hat{a}(s)\equiv 0$, то по теореме 6 оператор $\hat{A}$ скалярного типа, а последняя теорема показывает, что $\sigma(A_{\mathfrak{S}})=(-\infty, 0]$. Поэтому мы будем предполагать, что $\hat{a}(s)$ не является тождественным нулем. Если $\lambda\notin(-\infty, 0]$, то

$$(\lambda I-\hat{A}(s))^{-1}=\frac{I}{\lambda+|s|^2}+\frac{1}{(\lambda+|s|^2)^2}\begin{pmatrix}0 & \hat{a}(s)\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

и так как функции $|\lambda+|s|^2|^{-1}$ и $|\hat{a}(s)|\,|\lambda+|s|^2|^{-2}$ ограничены на R^N, то λ лежит в $\rho(A_{\mathfrak{S}})$. Итак, $\sigma(A_{\mathfrak{S}})=(-\infty, 0]=\sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$, хотя $A_{\mathfrak{S}}$ и не является спектральным оператором скалярного типа.

Другие примеры доставляют формальные дифференциальные операторы (13), (14) и (15); спектры их естественных замкнутых расширений были уже подсчитаны.

Замечательным примером, в котором появляются свойства, не встречавшиеся нам ранее, может служить формальный дифференциальный оператор

$$(21)\qquad A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial s_1} & -\dfrac{\partial}{\partial s_2}\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial s_2} & \dfrac{\partial}{\partial s_1}\end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$(22)\qquad \hat{A}(s)=+i\begin{pmatrix}s_1 & -s_2\\ s_2 & s_1\end{pmatrix},\quad s=(s_1, s_2)\in R^2.$$

При любом s из R^2 эта матрица нормальна и

$$(23)\qquad \hat{A}(s)\hat{A}^*(s)=|s|^2 I=\hat{A}^*(s)\hat{A}(s),\quad s\in R^2,$$

так что

$$(24)\qquad \frac{\hat{A}(s)}{|s|}\left(\frac{\hat{A}(s)}{|s|}\right)^*=I,\quad 0\neq s\in R^2.$$

Равенство (24) показывает, что матрица $|s|^{-1}\hat{A}(s)$ унитарна, если $s\neq 0$. Таким образом,

$$(25)\qquad \hat{A}^{-1}(s)=\frac{-i}{|s|^2}\begin{pmatrix} s_1 & s_2\\ -s_2 & s_1\end{pmatrix},\qquad 0\neq s\in R^2,$$

и

$$(26)\qquad |\hat{A}(s)\psi(s)|=|s||\psi(s)|,\qquad s\in\mathfrak{S},\qquad \psi\in\mathfrak{H}^2.$$

Уравнение $A\varphi=0$, эквивалентное уравнению Коши — Римана для вещественной и мнимой частей голоморфной функции, не имеет ненулевого решения φ в Φ^2. Действительно, согласно классической теории функций, любое решение $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$ из Φ^2 уравнения $A\varphi=0$ давало бы всюду определенную аналитическую функцию $f(z)=\varphi_1(s)+i\varphi_2(s)$ переменного $z=s_1+is_2$, а так как f обращается в нуль в бесконечности, то она должна быть тождественным нулем.

В соотношении (26) утверждается даже несколько больше. Действительно, оно показывает, что единственным элементом ψ в $\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$, для которого $\hat{A}_{\mathfrak{S}}\psi=0$, является $\psi=0$, и потому единственным элементом φ в $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$, для которого $A_{\mathfrak{S}}\varphi=0$, является $\varphi=0$.

Множество $\mathfrak{S}_1$ для оператора (21) имеет меру нуль и

$$(27)\qquad \hat{\lambda}_{21}(s)=s_2+is_1,\qquad \hat{\lambda}_{22}(s)=-s_2+is_1,$$

а соответствующие проекторы $\hat{E}_{2j}(s)=E(\hat{\lambda}_{2j}(s);\hat{A}(s))$, $j=1, 2$, которые можно вычислить по формулам (46) из § 11, равны

$$(28)\qquad \hat{E}_{21}(s)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix},\qquad \hat{E}_{22}(s)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix},$$

откуда видно, что они не зависят от s. В силу теоремы 7 и соотношений (27) очевидно, что спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ заполняет всю комплексную плоскость; элементарные рассуждения показывают, что каждая точка спектра лежит в непрерывном спектре. То обстоятельство, что проекторы $\hat{E}_{jk}$ не зависят от s, упрощает операционное исчисление для оператора $A_{\mathfrak{S}}$. Чтобы понять смысл последнего утверждения, читатель не обязательно должен быть знаком с результатами § VII.9, где изложено операционное исчисление для неограниченных замкнутых операторов, и не обязательно должен знать содержание гл. XVIII, в которой излагается операционное исчисление для неограниченных спектральных операторов. Действительно, сейчас мы имеем дело с оператором $A_{\mathfrak{S}}$ такого типа, что его специальные свойства сразу же приводят к определению функций $f(A_{\mathfrak{S}})$ оператора $A_{\mathfrak{S}}$. Как это сделать, мы сейчас покажем.

Предположим, что формальный дифференциальный оператор A в Φ^p обладает следующим свойством: для почти всех s из R^N все собственные значения матриц $\hat{A}(s)$ являются простыми корнями минимального многочлена для $\hat{A}(s)$. Это так, если $A_{\mathfrak{S}}$ — оператор скалярного типа. Пусть f — какая-либо измеримая функция, заданная на спектре $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma(\hat{A})$. С помощью соотношения $f(\hat{A})(s) = f(\hat{A}(s))$ мы определим $(p \times p)$-матрицу $f(\hat{A})(s)$, элементами которой являются измеримые функции на R^N. (Если не все корни минимального многочлена $\hat{A}(s)$ простые, то f будет иметь в некоторых точках спектра производные, и, вообще говоря, если у нас нет дополнительной информации относительно A, то это соотношение все еще определяет матрицу $f(\hat{A})(s)$, если f имеет $p-1$ производных на спектре $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$.) Таким образом, оператор $f(\hat{A})$ определяется соотношением (2), а оператор $f(A_{\mathfrak{S}})$ — соотношением (4). Эти операторы, как мы уже отмечали, ограничены, если функция f существенно ограничена на спектре. Так, например, если $f(\lambda) = \exp t\lambda$ и спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ лежит в левой полуплоскости, то $\exp tA_{\mathfrak{S}}$ — ограниченный оператор при $t \geqslant 0$. Именно эту функцию нужно построить для решения задачи Коши $\varphi'(t) = A_{\mathfrak{S}}\varphi(t)$, $\varphi(0) = \varphi_0$; бегло мы поясним это далее в теоремах 19 и 21. А сейчас мы вернемся к разъяснению высказанного ранее утверждения: тот факт, что проекторы $\hat{E}_{jk}$ в (28) не зависят от s, упрощает операционное исчисление для естественного замкнутого расширения $A_{\mathfrak{S}}$ оператора (21). Предположим, что f — ограниченная измеримая функция на комплексной плоскости (которая является спектром оператора $A_{\mathfrak{S}}$) и что f лежит в $L_1(R^2)$. Тогда, используя (27) и полагая

$$f_{21}(s) = f(s_2 + is_1), \qquad f_{22}(s) = f(-s_2 + is_1),$$

мы имеем

$$f(\hat{A}(s)) = \hat{E}_{21} f_{21}(s) + \hat{E}_{22} f_{22}(s),$$

и поскольку $\hat{E}_{ij}$ не зависят от s, то определяющее $f(A_{\mathfrak{S}})$ соотношение (4) дает

$$f(A_{\mathfrak{S}}) = \hat{E}_{21} F^{-1} \mathfrak{f}_{21} F + \hat{E}_{22} F^{-1} \mathfrak{f}_{22} F,$$

где $\mathfrak{f}_{ij}$ — оператор умножения на f_{ij}. Таким образом,

$$f(A_{\mathfrak{S}})\varphi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} (\tau^{-1} f_{21}) * \varphi + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} (\tau^{-1} f_{22}) * \varphi, \qquad \varphi \in \mathfrak{H}^2.$$

То, что свертка $(\tau^{-1} f_{jk}) * \varphi$ существует для любой функции φ из $\mathfrak{H}^2$, видно уже из теоремы 11.5, если воспользоваться последовательностью

$$\lambda_n(\sigma) = \int\limits_{|s| \leqslant n} f_{jk}(s)\, \chi_\sigma(s)\, ds.$$

Можно привести два еще более наглядных примера, которые мы и хотим сейчас рассмотреть. В обоих случаях это возмущенные операторы Лапласа; первый из них (здесь снова $p = N = 2$)

$$A = \begin{pmatrix} \nabla^2 & a \\ b & \nabla^2 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_2^2},$$

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial s_2}, \qquad b = \beta_0 + \beta_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial s_2}. \tag{30}$$

Мы имеем

$$\hat{A}(s) = \begin{pmatrix} -|s|^2 & \hat{a}(s) \\ \hat{b}(s) & -|s|^2 \end{pmatrix} \tag{31}$$

и $\hat{\delta}^2(s) = 4\hat{a}(s)\,\hat{b}(s)$. Таким образом, по теореме 6, если или a, или b равно нулю, то естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ оператора A является спектральным оператором (так как в этом случае $\mathfrak{S}_1 = R^2$), который будет оператором скалярного типа тогда и только тогда, когда обе функции a и b равны нулю. Если же $\hat{a}(s)\,\hat{b}(s)$ не равно тождественно нулю, то множество $\mathfrak{S}_1$ состоит из двух прямых, определяемых уравнением $\hat{a}(s)\,\hat{b}(s) = 0$, и потому имеет меру нуль. В этом случае отношение, появляющееся в неравенстве (i) теоремы 6, равно

$$\frac{|\hat{a}(s)|^2 + |\hat{b}(s)|^2}{4\,|\hat{a}(s)\,\hat{b}(s)|}, \qquad s \in \mathfrak{S}_2; \tag{32}$$

ясно, что оно существенно ограничено на $\mathfrak{S}_2$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной $\alpha \neq 0$ мы имеем $\hat{b} = \alpha\hat{a}$, и, следовательно, выражение (32) равно постоянной $(1 + |\alpha|^2)/4\,|\alpha|$. Поэтому из теоремы 6 можно заключить, что если $\hat{a}\hat{b} \neq 0$, то оператор $A_{\mathfrak{S}}$ является спектральным тогда и только тогда, когда $\hat{a}$ и $\hat{b}$ пропорциональны, а в этом случае $A_{\mathfrak{S}}$ является спектральным оператором скалярного типа.

Итак, естественное замкнутое расширение формального дифференциального оператора (29) является спектральным оператором тогда и только тогда, когда он имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \nabla^2 & \beta^2 a \\ \alpha^2 a & \nabla^2 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где α и β — любые комплексные постоянные. Естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ оператора (33) имеет скалярный тип тогда и только тогда, когда либо $\alpha\beta a \neq 0$, либо $a=0$. Рассмотрим случай, когда $\alpha\beta a \neq 0$. Тогда $\mathfrak{S}_1$ — множество меры нуль и можно положить

$$(34) \qquad \hat{\lambda}_{21}(s) = -|s|^2 + \alpha\beta\hat{a}(s), \quad \hat{\lambda}_{22}(s) = -|s|^2 - \alpha\beta\hat{a}(s), \qquad s \in \mathfrak{S}_2.$$

Так как $\hat{a}(s)$ линейна по s_1, s_2, то по теореме 7 спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) \leqslant \omega$. Это наводит на мысль, что, возможно, оператор $A_{\mathfrak{S}}$ является инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы $T(t)$, $t \geqslant 0$, ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^2$ и что можно решать абстрактную задачу Коши $\varphi' = A_{\mathfrak{S}}\varphi$, $\varphi(0) = \varphi_0$; теперь мы точно это сформулируем. Как показывает следующее утверждение, к этому оператору можно применить теорему Хилле — Иосиды — Филлипса (VIII.1.13).

8. Теорема. *Если естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ формального дифференциального оператора $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = a_{ij}(\partial/\partial s_1, \ldots, \partial/\partial s_N)$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$, суть многочлены с постоянными коэффициентами, является спектральным оператором скалярного типа, то оператор $A_{\mathfrak{S}}$ служит инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы (определенной на $[0, \infty)$) ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$ тогда и только тогда, когда его спектр лежит в некоторой левой полуплоскости.*

Доказательство. Предположим, что $A_{\mathfrak{S}}$ — оператор скалярного типа и точки его спектра удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}(\lambda) \leqslant \omega$. Тогда в силу следствия 10.9 для почти всех s из R^N оператор $\hat{A}(s)$ является оператором скалярного типа в E^p. Таким образом, существует множество R_1^N в R^N с дополнением нулевой меры, такое, что для всех s из R_1^N и для любого собственного значения $\hat{\lambda}(s)$ матрицы $\hat{A}(s)$ мы имеем $\nu(\hat{\lambda}(s)) = 1$, где, как обычно, $\nu(\hat{\lambda}(s))$ — кратность $\hat{\lambda}(s)$ как корня минимального многочлена для $\hat{A}(s)$. Поэтому для любого вещественного $\lambda > \omega$ и любого натурального n из теоремы VII.1.8 вытекает, что

$$(35) \qquad R(\lambda; \hat{A}(s))^n = \sum_{j=1}^{k} \frac{\hat{E}_{kj}(s)}{(\lambda - \hat{\lambda}_{kj}(s))^n}, \qquad s \in \mathfrak{S}_k \cap R_1^N,$$

где $\hat{E}_{kj}(s) = E(\hat{\lambda}_{kj}(s); \hat{A}(s))$. Поскольку $\lambda - \omega < |\lambda - \hat{\lambda}_{kj}(s)|$, то в силу теоремы 4 и равенства (35)

$$(36) \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{s \in \mathfrak{S}} |R(\lambda; \hat{A}(s))^n| \leqslant \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Из следствий 9.5 и 10.9 вытекает, что

$$(37)\qquad |R(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}})^n| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} |R(\lambda;\, \hat{A}_{\mathfrak{S}})^n(s)| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} |R(\lambda;\, \hat{A}(s))^n|,$$

и поэтому

$$(38)\qquad |R(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}})^n| \leqslant \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \qquad \lambda > \omega, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда по теореме Хилле — Иосиды — Филлипса (VIII.1.13) оператор $A_{\mathfrak{S}}$ является инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы (определенной на $[0, \infty)$) ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$. Эта теорема показывает также, что если, обратно, оператор $A_{\mathfrak{S}}$ является такой инфинитезимальной образующей, то неравенства (38) выполнены с некоторыми вещественными постоянными M и ω. Итак, для завершения доказательства достаточно показать, что из соотношений (38) вытекает справедливость неравенства $\operatorname{Re}(\lambda) \leqslant \omega$ для любой спектральной точки λ оператора $A_{\mathfrak{S}}$. Из соотношений (37) и (38) вытекает существование множества $\mathfrak{S}_0$, дополнение которого в $\mathfrak{S}$ имеет нулевую меру и такого, что

$$(39)\qquad |R(\lambda;\, \hat{A}(s))^n| \leqslant \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \qquad \lambda > \omega, \qquad s \in \mathfrak{S}_0.$$

В силу теоремы 7 достаточно доказать, что для всякого s из $\mathfrak{S}_0$ вещественные части всех собственных значений $\hat{A}(s)$ самое большее равны ω. Если это неверно, то существуют индексы j, k, такие, что $\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_{kj}(s)) > \omega$ при некотором s из $\mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_0$. Так как $\hat{E}_{kj}(s) \neq 0$, то в E^p существует вектор $\psi(s)$, такой, что $|\psi(s)| = 1$ и $\psi(s) = \hat{E}_{kj}(s)\psi(s)$. Поскольку $\hat{E}_{kj}(s)$ и $\hat{E}_{kq}(s)$ — дизъюнктные проекторы, если $q \neq j$, то в силу (35) $R(\lambda;\, \hat{A}(s))^n \psi(s) = \psi(s)(\lambda - \hat{\lambda}_{kj}(s))^{-n}$, и соотношение (39) дает

$$(40)\qquad 1 = |\psi(s)| \leqslant M \frac{|\lambda - \hat{\lambda}_{kj}(s)|^n}{(\lambda-\omega)^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как $\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_{kj}(s)) > \omega$, то можно зафиксировать настолько большое λ, что $|\lambda - \hat{\lambda}_{kj}(s)| < \lambda - \omega$, и, таким образом, дробь в правой части соотношения (40) стремится к нулю при $n \to \infty$, ч. т. д.

Было бы ошибочно думать, что лишь спектральные операторы, являющиеся инфинитезимальными образующими сильно непрерывных полугрупп (на $[0, \infty)$), являются операторами скалярного типа.

Поэтому рассмотрим для произвольных натуральных p и N другой возмущенный оператор Лапласа. Невозмущенный оператор порождает систему $\varphi_j'(t) = \alpha^2\nabla^2\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, p$, уравнений диффузии, возникающих в теории теплопроводности и в других задачах такого рода, таких, как распространение света или диффузия нейтронов. На самом деле эти уравнения диффузии являются в случае распространения света или диффузии нейтронов лишь приближением истинных уравнений, описывающих эти процессы. В этих случаях истинные уравнения соответствуют некоторому возмущенному оператору Лапласа. Теперь мы постараемся понять, в какой мере развитая нами теория позволяет возмущать оператор $\alpha^2\nabla^2 I$, сохраняя все же возможность решения задачи Коши для возмущенных уравнений диффузии. Возмущение мы осуществим в два шага. Сначала воспользуемся нильпотентным возмущением, содержащим дифференциальные операторы порядка не выше 2. После этого возмутим оператор снова, разрешая добавлять к нему любой ограниченный оператор в $\mathfrak{H}^p$. Аналогичные примеры в случае операторов более высоких порядков можно найти в упр. 65—69 из § 14.

Сейчас мы начнем с анализа оператора

$$A = \alpha^2\nabla^2 I + (a_{jk}) = \begin{pmatrix} \alpha^2\nabla^2 & a_{12} \ldots a_{1p} \\ 0 & \alpha^2\nabla^2 \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad a_{(p-1)p} \\ 0 & 0 \ldots \alpha^2\nabla^2 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где $\alpha \neq 0$ — постоянная, вещественная или чисто мнимая,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial s_N^2}, \qquad a_{jk} = a_{jk}(\partial/\partial s_1, \ldots, \partial/\partial s_N), \tag{42}$$

а a_{jk} — многочлены от $s_1, \ldots, s_N$ с постоянными коэффициентами степени не выше 2, такие, что $a_{jk} = 0$, если $j \geqslant k$. В этом примере $\mathfrak{S}_1 = R^N$, $\hat{\lambda}_{11}(s) = -\alpha^2|s|^2 = -\alpha^2(s_1^2 + \ldots + s_N^2)$, $\sigma_0(A_{\mathfrak{S}}) = (-\infty, 0]$, если α вещественно, и $\sigma_0(A_{\mathfrak{S}}) = [0, \infty)$, если α чисто мнимо, и матрица $\hat{N}(s) = \hat{A}(s) - \hat{\lambda}_{11}(s) I$ нильпотентна: $\hat{N}^p(s) = 0$ для всех s из R^N. Далее мы будем считать, что $\alpha^2 > 0$. Случай $\alpha^2 < 0$ совершенно аналогичен, и читатель без труда сделает необходимые изменения. Другая возможность рассмотрения случая $\alpha^2 < 0$ состоит в применении результатов, полученных при анализе случая $\alpha^2 > 0$, к оператору $-A$.

Фиксируем $\omega > 0$; тогда постоянная

$$K = \sup_{s \in R^N} \frac{|\hat{N}(s)|}{\omega + \alpha^2 |s|^2} \tag{43}$$

конечна, так как элементами $\hat{N}(s)$ являются многочлены от $s_1, \ldots, s_N$ степени не выше 2. Для натуральных $n = 1, 2, \ldots$ и любого вещественного $\lambda > \omega$ из теоремы VII.1.8 вытекает, что

$$(44) \qquad (\lambda-\omega)^n R(\lambda;\ \hat{A}(s))^n = \\ = \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{n(n+1)\ldots(n+\nu-1)}{\nu!} \frac{(\lambda-\omega)^n}{(\lambda+\alpha^2|s|^2)^{n+\nu}} \hat{N}^\nu(s),$$

где слагаемое, соответствующее в этой сумме индексу $\nu=0$, равно $(\lambda-\omega)^n(\lambda+\alpha^2|s|^2)^{-n}I$ и потому имеет норму, не превосходящую 1, при всех $\lambda>\omega$, $s\in R^N$ и $n=1, 2, \ldots$. Если $\nu>0$, то функция от λ, заданная выражением $(\lambda-\omega)^n(\lambda+\alpha^2|s|^2)^{-n-\nu}$ на интервале $\omega\leqslant\lambda<\infty$, имеет максимальное значение в точке $\lambda=\omega+ +n(\omega+a^2|s|^2)\nu^{-1}$, так что

$$\sup_{\omega\leqslant\lambda<\infty} \frac{(\lambda-\omega)^n}{(\lambda+\alpha^2|s|^2)^{n+\nu}} = \nu^\nu \frac{n^n}{(n+\nu)^{n+\nu}}\cdot\frac{1}{(\omega+\alpha^2|s|^2)^\nu},$$

и в силу (43)

$$\left|\frac{n(n+1)\ldots(n+\nu-1)}{\nu!} \frac{(\lambda-\omega)^n}{(\lambda+\alpha^2|s|^2)^{n+\nu}} \hat{N}^\nu(s)\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{\nu^\nu}{\nu!} \frac{n(n+1)\ldots(n+\nu-1)}{n^\nu} \left(\frac{n}{n+\nu}\right)^{n+\nu} K^\nu;$$

эта величина ограничена по n, поскольку при $n\to\infty$ правая часть последнего неравенства сходится к $e^{-\nu}\nu^\nu K^\nu/\nu!$. Таким образом, из соотношений (44) и (37) вытекают неравенства (38), и по теореме Хилле — Иосиды — Филлипса (VIII.1.13) естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ формального дифференциального оператора в частных производных (41) является инфинитезимальной образующей полугруппы (на $[0, \infty)$) ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$.

Покажем теперь, что спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})=(-\infty, 0]$. Для этого воспользуемся теоремой 7; зафиксируем любое $\lambda\notin\sigma_0(A_{\mathfrak{S}})= =(-\infty, 0]$. Матрица $(\lambda I-\hat{A}(s))^{-1}$ вычисляется по формуле (44) при $n=1$, так что

$$(45) \qquad (\lambda I-\hat{A}(s))^{-1} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{\hat{N}^\nu(s)}{(\lambda+\alpha^2|s|^2)^{\nu+1}}.$$

Поскольку $\lambda\notin(-\infty, 0]$, а элементами матрицы $\hat{N}(s)$ являются многочлены по $s_1, \ldots, s_N$ степени не выше 2, то обе величины $|\lambda+\alpha^2|s|^2|^{-1}$ и $|\hat{N}(s)(\lambda+\alpha^2|s|^2)^{-1}$ ограничены на R^N, и в силу равенства (45) выполнено условие (ii) теоремы 7; этим доказано, что λ лежит в $\rho(A_{\mathfrak{S}})$, и, значит, $\sigma(A_{\mathfrak{S}})=(-\infty, 0]$.

Так как $\mathfrak{S}_1=R^N$, то $E(\hat{\lambda}_{11}(s);\ \hat{A}(s))=I$ для всех s из R^N, и в силу теоремы 4 ясно, что $A_{\mathfrak{S}}$ — спектральный оператор.

Тот факт, что $A_{\mathfrak{S}}$ является спектральным оператором, как видно из проведенных рассуждений, не зависит от условий, наложенных на порядок операторов a_{jk}.

Дадим теперь описание областей определения $\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$ и $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$, более удобное, чем использованное в формулах (2) и (4) для их определения. В силу (2) мы имеем

$$\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}}) = \left\{ \psi \in \mathfrak{H}^p \,\Big|\, \int_{\mathfrak{S}} |\hat{A}(s)\psi(s)|^2\, ds < \infty \right\}.$$

Если ψ лежит в $\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$ и $\zeta = \hat{A}\psi$, то

$$\zeta_j(s) = -\alpha^2 |s|^2 \psi_j(s) + \sum_{k=j+1}^{p} \hat{a}_{jk}(s)\psi_k(s), \qquad j = 1, \ldots, p. \tag{46}$$

Требование, чтобы функции ψ из $\mathfrak{H}^p$ были элементами $\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$, эквивалентно тому, чтобы функции $|\zeta(s)|^2$ были интегрируемыми на $\mathfrak{S}$, а последнее требование в свою очередь эквивалентно интегрируемости каждой функции $|\zeta_j(s)|^2$, $j = 1, \ldots, p$, на $\mathfrak{S}$. Предположим, что ζ — такой вектор. Если $j = p$, то соотношение (46) принимает вид $\zeta_p(s) = -\alpha^2 |s|^2 \psi_p(s)$, так что функция $|\zeta_p(s)|^2$ интегрируема на $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда $|s|^4 |\psi_p(s)|^2$ интегрируема на $\mathfrak{S}$. Если $j = p-1$, то соотношение (46) принимает вид

$$\zeta_{p-1}(s) = -\alpha^2 |s|^2 \psi_{p-1}(s) + \hat{a}_{(p-1)p}(s)\psi_p(s),$$

а поскольку $\hat{a}_{(p-1)p}(s)$ — многочлен от $s_1, \ldots, s_N$ степени не выше 2, то $|\hat{a}_{(p-1)p}(s)| = O(|s|^2)$ при $|s| \to \infty$, так что из интегрируемости функции $|\zeta_{p-1}(s)|^2$ на $\mathfrak{S}$ вытекает, что $|s|^4 |\psi_{p-1}(s)|^2$ интегрируема на $\mathfrak{S}$. Таким образом, с помощью индукции в обратном направлении из (46) получаем, что если функция ψ принадлежит $\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$, то $\int_{R^N} |s|^4 |\psi(s)|^2\, ds < \infty$. Обратно, если вектор ψ из $\mathfrak{H}^p$ удовлетворяет этому условию, то ясно, что он принадлежит $\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$. Таким образом, если многочлен $\hat{a}_{jk}(s)$ в операторе (41) степени не выше 2, то

$$\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}}) = \left\{ \psi \in \mathfrak{H}^p \,\Big|\, \int_{R^N} |s|^4 |\psi(s)|^2\, ds < \infty \right\}. \tag{47}$$

Чтобы описать область определения $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ в форме, более удобной, чем ее непосредственное определение $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}) = F^{-1}\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}})$, данное соотношением (4), полезно воспользоваться понятием медленно растущего распределения.

9. Определение. Линейный функционал на пространстве Φ быстро убывающих функций на R^N, непрерывный в топологии Φ, которая порождается окрестностями нуля, определенными соотношением (1) из § 11, называется *медленно растущим распределением* на R^N. Множество всех медленно растущих распределений в R^N мы будем обозначать через $T(R^N)$. Очевидно, что если T, U — элементы $T(R^N)$, а α, β — постоянные, то функция $\alpha T+\beta U$, определенная на Φ соотношением

$$\text{(i)} \qquad (\alpha T+\beta U)(\varphi)=\alpha T(\varphi)+\beta U(\varphi), \qquad \varphi\in\Phi,$$

принадлежит $T(R^N)$, и потому $T(R^N)$ — линейное пространство. *Комплексно сопряженное распределение* $\bar{T}$, *преобразование Фурье* FT *и обратное преобразование Фурье* $F^{-1}T$ медленно растущего распределения T определяются соотношениями

$$\text{(ii)} \qquad \bar{T}(\varphi)=\overline{T(\bar{\varphi})}, \qquad \varphi\in\Phi,$$

и

$$\text{(iii)} \qquad (FT)(\varphi)=T(F\varphi), \qquad (F^{-1}T)(\varphi)=T(F^{-1}\varphi), \qquad \varphi\in\Phi.$$

Теорема 11.1 показывает, что FT и $F^{-1}T$ — медленно растущие распределения. Если T, T_n принадлежат $T(R^N)$ и (n) — направленное множество, то соотношение $T=\lim\limits_n T_n$ означает, что

$$\text{(iv)} \qquad T\varphi=\lim_n T_n\varphi, \qquad \varphi\in\Phi.$$

В качестве примера медленно растущего распределения можно рассмотреть функцию T_ν, определяемую равенством

$$\text{(48)} \qquad T_\nu(\varphi)=\int\limits_{R^N}\varphi(s)\,\nu(ds), \qquad \varphi\in\Phi,$$

по некоторой ограниченной конечно аддитивной функции множества ν (заданной на некотором поле множеств в R^N, содержащем открытые множества). Аналогично, по функциям на R^N можно построить медленно растущие распределения так же, как иногда по функциям строятся распределения. Так, например, поскольку сходимость $\varphi_n\to\varphi$ в Φ эквивалентна утверждению, что для любых двух многочленов P и Q от N переменных равномерно по s в R^N выполнено предельное соотношение $P(s)\,Q(\partial/\partial s)\,\varphi_n(s)\to$ $\to P(s)\,Q(\partial/\partial s)\,\varphi(s)$, то ясно, что функция ψ из любого пространства Лебега $L_p(R^N)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, определяет при помощи равенства

$$T(\varphi)=\int\limits_{R^N}\varphi(s)\,\psi(s)\,ds, \qquad \varphi\in\Phi,$$

медленно растущее распределение. Эту взаимосвязь мы точно сформулируем в следующем определении:

10. Определение. Говорят, что числовая функция ψ на R^N *порождает медленно растущее распределение* T_ψ *в* R^N, если для любого элемента φ в Φ функция $\varphi(s)\psi(s)$ интегрируема по Лебегу на R^N и функционал T_ψ, определяемый равенством

$$T_\psi(\varphi) = \int\limits_{R^N} \varphi(s)\,\psi(s)\,ds, \qquad \varphi \in \Phi, \tag{49}$$

принадлежит $T(R^N)$. Множество числовых функций ψ, порождающих медленно растущие распределения T_ψ, мы будем обозначать через $S(R^N)$.

Так как $C_0^\infty(R^N) \subset \Phi$ и сходимость $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ в $C_0^\infty(R^N)$ (XIV.3.1) влечет за собой $\varphi_n \to \varphi$, то очевидно, что сужение медленно растущего распределения на $C_0^\infty(R^N)$ является распределением в R^N. Это замечание позволяет нам получить следующее утверждение:

11. Лемма. *Если в смысле предыдущего определения медленно растущее распределение соответствует двум функциям, то эти функции совпадают почти всюду на* R^N.

Доказательство. Для любого компактного множества K существует функция φ в Φ, для которой $\varphi(s) = 1$ на K (XIV.2.1). Поэтому любая функция, порождающая медленно растущее распределение, интегрируема по Лебегу на любом компактном множестве. Таким образом, можно применить лемму XIV.3.3 и убедиться, что две функции, порождающие одно и то же медленно растущее распределение, отличаются друг от друга лишь на множестве меры нуль, ч. т. д.

Эта лемма устанавливает линейное взаимно однозначное соответствие между $S(R^N)$ и линейным подмножеством в $T(R^N)$ и позволяет дать следующее определение:

12. Определение. Будем говорить, что медленно растущее распределение T, соответствующее в смысле определения 10 функций ψ, *является функцией*. Если ψ непрерывна, или дифференцируема, или принадлежит $L_p(R^N)$ или $C^\infty(R^N)$ и т. д., то мы будем говорить, что T является функцией, непрерывной, или дифференцируемой, или принадлежащей $L_p(R^N)$ или $C^\infty(R^N)$, и т. д. Другими словами, *мы будем просто отождествлять медленно растущее распределение, являющееся функцией, с той функцией, которой оно соответствует*. Если $\psi \in S(R)$ и $T = T_\psi$, то иногда мы можем писать $T(s)$ вместо $\psi(s)$.

Подытожим в следующей лемме некоторые элементарные свойства отображения $\psi \to T_\psi$.

13. Лемма. *Отображение* $\psi \to T_\psi$ *линейного многообразия* $S(R^N)$ *в* $T(R^N)$ *является линейным отображением с некоторыми дополнительными свойствами*:

(i) $\bar{T}_\psi = T_{\bar{\psi}}$;

(ii) *если* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ *и* $\psi \in L_p(R^N)$, *то*

$$|T_\psi \varphi| \leqslant |\varphi|_q |\psi|_p, \qquad \varphi \in \Phi;$$

(iii) *если* $1 < p < \infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$ *и* $\psi \in L_p(R^N)$, *то*

$$\sup_{\varphi \in \Phi,\ |\varphi|_q = 1} |T_\psi \varphi| = |\psi|_p;$$

(iv) *для функций* ψ *из* $L_2(R^N)$

$$FT_\psi = T_{F\psi}, \qquad F^{-1}T_\psi = T_{F^{-1}\psi}.$$

Доказательство. Линейность отображения $\psi \to T_\psi$ и свойство (i) уже проверены. Утверждение (ii) вытекает из неравенства Гёльдера (III.3.2). Так как $C_0^\infty(R^N) \subset \Phi \subset L_p(R^N)$, то в силу леммы XIV.2.2, если $p < \infty$, подмножество Φ в $L_p(R^N)$ плотно в $L_p(R^N)$, и (iii) вытекает из теоремы IV.8.1. Для доказательства свойства (iv) предположим сначала, что ψ лежит в Φ; в этом случае допустимо изменение порядка интегрирования, и мы получаем

$$(FT_\psi)(\varphi) = \int_{R^N} (F\varphi)(s)\,\psi(s)\,ds = \int_{R^N} \varphi(s)\,(F\psi)(s)\,ds = T_{F\psi}(\varphi), \qquad \varphi \in \Phi.$$

Но Φ плотно в $\mathfrak{H} = L_2(R^N)$, и потому для любого элемента ψ из $\mathfrak{H}$ существует последовательность $\{\psi_n\} \subset \Phi$, такая, что $\psi_n \to \psi$ в $\mathfrak{H}$. Так как $F\Phi = \Phi$ (§ XI.1) и F непрерывно в $\mathfrak{H}$, то неравенство (ii) показывает, что $FT_{\psi_n} \to FT_\psi$. С другой стороны, последнее равенство означает, что $FT_{\psi_n} = T_{F\psi_n}$, и эта последовательность ввиду соотношения (ii) сходится к $T_{F\psi}$. Этим доказана первая часть утверждения (iv); вторая доказывается аналогично, ч. т. д.

Определим теперь производные медленно растущих распределений так же, как это было сделано в случае распределений. Поводом для такого определения может быть следующее соображение: если медленно растущее распределение T_{φ_0} является достаточно гладкой дифференцируемой функцией φ_0, то нам хотелось бы, чтобы $\partial^\alpha T_{\varphi_0}$ было медленно растущим распределением, соответствующим функции $\partial^\alpha \varphi_0$, если, конечно, производная $\partial^\alpha \varphi_0$ порождает медленно растущее распределение. Предположим, например, что φ_0 и φ —

функции из Φ. Тогда интегрирование по частям по переменной s_j дает

$$\int_{R^N} \varphi(s) \frac{\partial}{\partial s_j} \varphi_0(s)\, ds = -\int_{R^N} \frac{\partial \varphi(s)}{\partial s_j} \varphi_0(s)\, ds,$$

что приводит нас к определению производной $(\partial/\partial s_j)\, T$ произвольного медленно растущего распределения при помощи равенства

$$\frac{\partial}{\partial s_j} T(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_j}\right), \quad \varphi \in \Phi \tag{50}$$

Очевидно, что $\partial T/\partial s_j$ — медленно растущее распределение, и для любого множества $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ из N неотрицательных целых чисел повторное дифференцирование показывает, что $\partial^\alpha T$, или $(\partial/\partial s)^\alpha T$, задается соотношением

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|_1} T(\partial^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \Phi \tag{51}$$

Для формального дифференциального оператора

$$a = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha \tag{52}$$

с постоянными коэффициентами a_α медленно растущее распределение aT определяется, таким образом, по формуле

$$(aT)(\varphi) = T(a^+\varphi), \quad \varphi \in \Phi, \tag{53}$$

где

$$a^+ = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} (-1)^{|\alpha|_1} a_\alpha \partial^\alpha. \tag{54}$$

По поводу производных медленно растущих распределений нам потребуется в дальнейшем следующая лемма:

14. Лемма. *Если для некоторого T из $T(R^N)$ оба распределения T и $\partial^\alpha T$ являются функциями, то комплексно сопряженные распределения $\overline{T}$ и $\partial^\alpha \overline{T}$ также являются функциями и*

$$\overline{T}(s) = \overline{T(s)}, \quad (\partial^\alpha \overline{T})(s) = \overline{(\partial^\alpha T)(s)}.$$

Доказательство. Утверждение относительно $\overline{T}$ уже содержится в части (i) леммы 13. Так как

$$\overline{T}(\varphi) = \int_{R^N} \varphi(s) \overline{T(s)}\, ds, \quad \varphi \in \Phi,$$

то по определению

$$(\partial^\alpha \overline{T})(\varphi) = \overline{\int_{R^N} (-1)^{|\alpha|_1} \partial^\alpha \overline{\varphi(s)}\, T(s)\, ds} =$$

$$= \overline{(\partial^\alpha T)(\overline{\varphi})} =$$

$$= \overline{\int_{R^N} \overline{\varphi}(s)\, (\partial^\alpha T)(s)\, ds} = \int_{R^N} \varphi(s)\, \overline{(\partial^\alpha T)(s)}\, ds,$$

и тем самым показано, что $\partial^\alpha \overline{T}$ является функцией и $(\partial^\alpha \overline{T})(s) = \overline{(\partial^\alpha T)(s)}$, ч. т. д.

При описании областей определения некоторых естественных замкнутых расширений формальных дифференциальных операторов будут полезны следующие определение и лемма. Заметим сразу же, что если медленно растущее распределение T принадлежит пространству $T^{(k)}(R^N)$ из следующего далее определения, то предыдущая лемма показывает, что комплексно сопряженное медленно растущее распределение $\overline{T}$ также лежит в $T^{(k)}(R^N)$.

15. Определение. Для $k = 1, 2, \ldots$ обозначим через $T^{(k)}(R^N)$ множество всех медленно растущих распределений T в R^N, таких, что $\partial^\alpha T$ принадлежит $\mathfrak{H} = L_2(R^N)$ при любом α, $|\alpha|_1 \leqslant k$. Для любой пары T и U элементов из $T^{(k)}(R^N)$ положим

$$\text{(i)} \qquad (T, U)_{(k)} = \sum_{0 \leqslant |\alpha|_1 \leqslant k} \int_{R^N} (\partial^\alpha T)(s)\, (\partial^\alpha \overline{U})(s)\, ds;$$

$$\text{(ii)} \qquad |T|_{(k)} = \{(T, T)_{(k)}\}^{1/2}.$$

Лемма 14 показывает, что скалярное произведение $(T, U)_{(k)}$ удовлетворяет всем условиям определения гильбертова пространства (IV.2.26), кроме полноты. Докажем теперь это свойство.

16. Лемма. *Пространство $T^{(k)}(R^N)$ предыдущего определения является полным гильбертовым пространством.*

Доказательство. Как мы уже заметили, проверить надо только полноту. Пусть $\{T_m\}$ — последовательность Коши в $T^{(k)}(R^N)$. Так как $|T|_{(k)} \geqslant |T|$, т. е. нормы T как функции из $\mathfrak{H} = L_2(R^N)$, то T_n сходится в $\mathfrak{H}$ к некоторому T. Аналогично, $|T_n - T_m|_{(k)} \geqslant |\partial^\alpha T_n - \partial^\alpha T_m|$ при $0 \leqslant |\alpha|_1 \leqslant k$, и, таким образом, последовательности $\{\partial^\alpha T_n\}$ сходятся в $\mathfrak{H}$ к некоторым функциям T_α из $\mathfrak{H}$.

Пусть φ — элемент Φ. Тогда

$$\int_{R^N} \varphi(s) T_\alpha(s)\, ds = \lim_{m\to\infty} (\partial^\alpha T_m)(\varphi) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} (-1)^{|\alpha|_1} T_m(\partial^\alpha \varphi) =$$
$$= (-1)^{|\alpha|_1} T(\partial^\alpha \varphi) =$$
$$= (\partial^\alpha T)(\varphi);$$

тем самым показано, что $\partial^\alpha T = T_\alpha$ и, следовательно, принадлежит $\mathfrak{H}$, ч. т.д.

При описании областей определения $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ естественных замкнутых расширений некоторых формальных дифференциальных операторов A в Φ^p оказывается полезным, как мы увидим, следующее пространство:

17. Определение. Для любого натурального $p \geqslant 1$ пространство $(p)T^{(k)}(R^N)$ определяется как прямая сумма

$$(p)\, T^{(k)}(R^N) = T^{(k)}(R^N) \oplus \ldots \oplus T^{(k)}(R^N),$$

составленная из p слагаемых. Если $T = [T_1, \ldots, T_p]$ и $U = [U_1, \ldots, U_p]$ — элементы из $(p)\, T^{(k)}(R^N)$, то скалярное произведение и норма в $(p)\, T^{(k)}(R^N)$ определяются, как обычно, соотношениями

$$(T, U)_{(p,k)} = \sum_{j=1}^{p} (T_j, U_j)_{(k)},$$
$$|T|_{(p,k)} = \{(T, T)_{(p,k)}\}^{1/2}.$$

Поскольку прямая сумма произвольного числа гильбертовых пространств всегда является полным гильбертовым пространством (IV.4.19), пространство $(p)\, T^{(k)}(R^N)$ гильбертово.

Теперь мы можем вернуться к анализу иллюстративных примеров возмущенных операторов Лапласа, заданных соотношением (41), и описать область определения $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ в том случае, когда возмущающий оператор имеет порядок не выше 2. Это описание $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ содержится в следующей теореме, которая объединяет доказанные нами результаты об операторе $A_{\mathfrak{S}}$:

18. Теорема. *Пусть $P = (a_{jk})$ — формальный дифференциальный оператор, такой, что $a_{jk} = a_{jk}(\partial/\partial s_1, \ldots, \partial/\partial s_N)$, $j, k = 1, \ldots, p$, — многочлены с постоянными коэффициентами степени не выше 2, и $a_{jk} = 0$, если $j \geqslant k$. Пусть формальный оператор A*

определен в Φ^p *матрицей*

$$A = \alpha^2\nabla^2 I + P = \begin{pmatrix} \alpha^2\nabla^2 & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & \alpha^2\nabla^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{(p-1)p} \\ 0 & 0 & \dots & \alpha^2\nabla^2 \end{pmatrix},$$

где $\alpha \neq 0$ — *вещественная или чисто мнимая постоянная, а*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial s_N^2}.$$

Тогда естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ *оператора* A *является спектральным оператором со спектром* $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = (\infty, 0]$, *если* $\alpha^2 > 0$, *и* $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = [0, \infty)$, *если* $\alpha^2 < 0$. *В обоих случаях область определения* $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ *равна*

$$\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}) = (p)\, T^{(2)}(R^N).$$

Оператор $A_{\mathfrak{S}}$ *является также инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы (на* $[0, \infty)$, *если* $\alpha^2 > 0$, *и на* $(-\infty, 0]$, *если* $\alpha^2 < 0$) *ограниченных линейных операторов в* $\mathfrak{H}^p$.

Замечание. Как нетрудно заметить, теоремы 18, 19 и 21 можно сформулировать так, чтобы α принимало любые комплексные значения.

Доказательство. Все утверждения, кроме формулы для $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$, уже установлены. Так как эта формула является частным случаем утверждения (vii) следующей далее теоремы 19, ее доказательство мы опускаем.

19. Теорема. *Пусть* A — *оператор теоремы* 18 *и* $\alpha^2 > 0$. *Тогда для любого элемента* $\varphi^{(0)}$ *из* $\mathfrak{H}^p$ *существует одно и только одно непрерывное отображение* $t \to \varphi(t)$ *полупрямой* $[0, \infty)$ *в* $\mathfrak{H}^p$, *которое дифференцируемо при* $t > 0$ *и обладает следующими свойствами*:

(i) $\qquad \varphi(t) \in \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}), \qquad 0 < t < \infty;$

(ii) $\qquad \varphi'(t) = A_{\mathfrak{S}}\varphi(t), \qquad 0 < t < \infty;$

(iii) $\qquad \varphi(0) = \varphi^{(0)}.$

Эта единственная функция φ *определяется соотношением* $\varphi(t) = T(t)\varphi^{(0)}$, *где* $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, — *сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальной образующей* $A_{\mathfrak{S}}$. *Полугруппа* $T(t)$ *и функция* φ *обладают, кроме того, следующими свойствами*:

(iv) *Производная* $\varphi'(0)$ *существует тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(0)} \in \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$; *при этом* $\varphi'(0) = A_{\mathfrak{S}}\varphi(0)$.

(v) *Полугруппа* $T(t)$ *имеет сильно аналитическое продолжение до полугруппы* $T_1(\lambda)$, *определенной для* λ *из полуплоскости* $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, *и, таким образом, единственное решение* φ *задачи Коши* (i) — (iii) *аналитично и имеет аналитическое продолжение* $\varphi_1(\lambda) = T_1(\lambda)\varphi^{(0)}$ *в полуплоскость* $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

(vi) *Оператор* $A^k_{\mathfrak{S}}$ *является естественным замкнутым расширением формального дифференциального оператора* A^k *в* Φ^p; *для* $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$

$$\varphi_1(\lambda) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^k_{\mathfrak{S}}), \qquad \varphi_1^{(k)}(\lambda) = A^k_{\mathfrak{S}}\varphi_1(\lambda), \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\text{(vii)} \qquad \mathfrak{D}(A^k_{\mathfrak{S}}) = (p)\, T^{(2k)}(R^N), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

(viii) *При* $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ *функция* $\varphi_1(\lambda) = \varphi_1(s_1, \ldots, s_N; \lambda)$ *имеет непрерывные производные всех порядков относительно* $s = [s_1, \ldots, s_N]$, *и* $\partial_s^\beta \varphi_1$ *принадлежат* $\mathfrak{H}^p$ *при всех* $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_N]$.

Если $\alpha^2 < 0$, *то справедливы также аналогичные утверждения, получающиеся при отражении комплексной плоскости относительно мнимой оси.*

Доказательство. Положим $\hat{N}(s) = \hat{A}(s) + \alpha^2 |s|^2 I$. По теореме VII.1.8 матрица $\hat{T}(s; T) = \exp(t\hat{A}(s))$ вычисляется по формуле

$$\text{(55)} \qquad \hat{T}(s; T) = e^{-t\alpha^2|s|^2} e^{tN(s)} = e^{-t\alpha^2|s|^2} \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{t^\nu}{\nu!} \hat{N}^\nu(s)$$

и обладает свойствами

$$\text{(56)} \qquad \hat{T}(s; t+u) = \hat{T}(s; t)\hat{T}(s; u), \qquad \hat{T}(0) = I, \qquad s \in R^N.$$

Соотношение (55) показывает, что матрица $T(s; t)$ ограничена по s, если $t \geqslant 0$, и, таким образом, оператор $T(t)$ в $\mathfrak{H}^p$, определенный равенством

$$\text{(57)} \qquad (\hat{T}(t)\psi)(s) \equiv \hat{T}(s; t)\psi(s), \qquad \psi \in \mathfrak{H}^p, \qquad 0 \leqslant t < \infty,$$

является ограниченным линейным оператором в $\mathfrak{H}^p$, и из (56) вытекает, что $\hat{T}(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, — полугруппа, т. е.

$$\text{(58)} \qquad \hat{T}(t+u) = \hat{T}(t)\hat{T}(u), \qquad \hat{T}(0) = I, \qquad 0 \leqslant t, u < \infty.$$

В силу (55) ясно, что для любого $\psi \in \mathfrak{H}^p$ вектор-функция $T(t)\psi$ непрерывна в открытом интервале $(0, \infty)$. Покажем теперь, что она непрерывна и в точке $t=0$. Чтобы убедиться в этом, докажем, что $|\hat{T}(t)|$ ограничена на $0<t<\infty$. Поскольку $\hat{N}(s)$ не содержит элементов степени выше 2 по переменным $s_1, \ldots, s_N$, то $|\hat{N}(s)|\leqslant K|s|^2$, и потому для проверки ограниченности $|\hat{T}(t)|$ достаточно в силу (55) показать, что для каждого $j=0, \ldots, p$ величина

(59) $$K(t)=\sup_{s\in R^N} t^j e^{-t\alpha^2|s|^2}|s|^{2j}$$

конечна и ограничена по t. Элементарные вычисления показывают, что

(60) $$K(t)=\left(\frac{j}{\alpha^2 e}\right)^j, \quad 0<t<\infty,$$

и, следовательно, не зависит от t, так что

(61) $$|\hat{T}(t)|\leqslant M, \quad 0\leqslant t<\infty.$$

Таким образом, для элемента ψ из $\mathfrak{H}^p$ соотношение (55) дает

$$\lim_{t\to 0}\hat{T}(s;\,t)\,\psi(s)=\psi(s), \quad s\in R^N,$$

а из (61) вытекает, что

$$|\hat{T}(s;\,t)\,\psi(s)|\leqslant M|\psi(s)|, \quad s\in R^N;$$

тогда по теореме об ограниченной сходимости (III.6.16) $\lim\limits_{t\to 0}\hat{T}(t)\,\psi=\psi$ в $\mathfrak{H}^p$. Этим доказано, что $\hat{T}(t)$ — сильно непрерывная полугруппа на $[0, \infty)$ ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$. Пусть $\hat{B}$ — инфинитезимальная образующая полугруппы $\hat{T}(t)$, $0\leqslant t<\infty$. Покажем, что $\hat{B}=\hat{A}$. Если $\psi\in\mathfrak{D}(\hat{B})$, то по определению

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\hat{T}(h)-\hat{I}}{h}\psi=\hat{B}\psi.$$

С другой стороны, из (55) вытекает, что при всех s в R^N

$$\lim_{h\to 0+}\left(\frac{\hat{T}(h)-\hat{I}}{h}\psi\right)(s)=\hat{A}(s)\,\psi(s),$$

так что функция $\hat{A}(s)\,\psi(s)$ квадратично интегрируема на R^N и $\hat{B}\psi=\hat{A}\psi$. Таким образом, $\hat{A}\supseteq\hat{B}$. Любое положительное λ лежит в $\rho(\hat{A})$, так что в силу теоремы Хилле — Иосиды — Филлипса (VIII.1.13) все достаточно большие вещественные λ лежат в пересечении $\rho(\hat{A})\cap\rho(\hat{B})$. Для таких λ мы имеем $(\lambda\hat{I}-\hat{A})\,\mathfrak{D}(\hat{B})=$ $=(\lambda\hat{I}-\hat{B})\,\mathfrak{D}(\hat{B})=\mathfrak{H}^p$, поскольку $\hat{A}\supseteq\hat{B}$. Однако справедливо также соотношение $(\lambda\hat{I}-\hat{A})\,\mathfrak{D}(\hat{A})=\mathfrak{H}^p$, которое означает, что $\mathfrak{D}(\hat{A})=$

$=\mathfrak{D}(\hat{B})$ и, следовательно, что $\hat{A}=\hat{B}$. Положим теперь

$$T(t)=F^{-1}\hat{T}(t)F, \qquad 0\leqslant t<\infty, \tag{62}$$

так что $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа на $[0, \infty)$ ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$. Ее инфинитезимальной образующей, по определению, является оператор B с областью определения, состоящей из всех элементов φ из $\mathfrak{H}^p$, для которых существует предел

$$B\varphi=\lim_{h\to 0+}\frac{T(h)-I}{h}\varphi=\lim_{h\to 0+}F^{-1}\frac{\hat{T}(h)-\hat{I}}{h}F\varphi.$$

Таким образом, φ принадлежит $\mathfrak{D}(B)$ тогда и только тогда, когда $F\varphi$ принадлежит $\mathfrak{D}(\hat{A})$, т. е. φ лежит в $F^{-1}\mathfrak{D}(\hat{A})=\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$. Предыдущее равенство показывает, что $B\varphi=F^{-1}\hat{A}F\varphi$, $\varphi\in\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$; поэтому $B=A_{\mathfrak{S}}$ и $A_{\mathfrak{S}}$ является инфинитезимальной образующей полугруппы (62). Положим $\varphi(t)=T(t)\varphi^{(0)}$. В силу (55) очевидно, что при $\psi^{(0)}=F\varphi^{(0)}$ функция $\psi(t)=\hat{T}(t)\psi^{(0)}$, $t>0$, принадлежит $\mathfrak{D}(\hat{A})$ и что $\psi'(t)=\hat{A}\psi(t)$, $t>0$. Поскольку F и F^{-1} — изометрии в $\mathfrak{H}^p$, отсюда вытекают соотношения (i) и (ii). Равенство (iii) является непосредственным следствием определения функции $\varphi(t)$.

Докажем теперь, что отображение $t\to\varphi(t)$ полупрямой $[0, \infty)$ в $\mathfrak{H}^p$, обладающее свойствами (i), (ii) и (iii), единственно. Пусть φ_t — другая функция на $[0, \infty)$ со значениями в $\mathfrak{H}^p$, обладающая свойствами (i), (ii) и (iii). Тогда при $u>t>0$

$$\frac{\partial}{\partial t}T(u-t)\varphi_t=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[T(u-t-h)\varphi_{t+h}-T(u-t)\varphi_t]=$$
$$=\lim_{h\to 0}T(u-t-h)\frac{\varphi_{t+h}-\varphi_t}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{T(u-t-h)-T(u-t)}{h}\varphi_t.$$

Так как $|T(t)|$ ограничена, а φ_t удовлетворяет условию (ii), то

$$\lim_{h\to 0}T(u-t-h)\frac{\varphi_{t+h}-\varphi_t}{h}=T(u-t)A_{\mathfrak{S}}\varphi_t.$$

Поскольку $d(T(t)\varphi^{(0)})/dt=A_{\mathfrak{S}}T(t)\varphi^{(0)}$ для любого $\varphi^{(0)}$ из $\mathfrak{H}^p$ и любого $t>0$, то, заменяя $\varphi^{(0)}$ на φ_t, а t на $u-t$, мы получаем

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(u-t-h)-T(u-t)}{h}\varphi_t=-T(u-t)A_{\mathfrak{S}}\varphi_t.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t}T(u-t)\varphi_t=0, \qquad 0<t<u<\infty,$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} T(u-t)[\varphi_t - T(t)\varphi^{(0)}] = \frac{\partial}{\partial t}[T(u-t)\varphi_t - T(u)\varphi^{(0)}] = 0,$$

откуда следует, что вектор

$$\zeta = T(u-t)[\varphi_t - T(t)\varphi^{(0)}]$$

не зависит от t и потому не зависит также от u. Полагая $u \to t+$, мы получаем

$$\zeta = \varphi_t - T(t)\varphi^{(0)}, \qquad 0 < t < \infty,$$

и, полагая $t \to 0+$, убеждаемся в том, что $\zeta = \varphi^0 - \varphi^{(0)} = 0$. Это показывает, что $\varphi_t = T(t)\varphi^{(0)} = \varphi(t)$ и доказывает единственность $\varphi(t)$.

Поскольку $A_{\mathfrak{S}}$ — инфинитезимальная образующая полугруппы $T(t)$, утверждение (iv) следует из определения VIII.1.6 и леммы VIII.1.7(b).

Для каждого комплексного числа λ с $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ положим $T_1(\lambda) = F^{-1}\hat{T}_1(\lambda)F$, $\varphi_1(\lambda) = T_1(\lambda)\varphi^{(0)}$, где

$$\hat{T}_1(s;\lambda) = e^{-\lambda\alpha^2|s|^2}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}\hat{N}^\nu(s) \tag{63}$$

и где, как и раньше, оператор $\hat{T}_1(\lambda)$ определен на $\mathfrak{H}^p$ соотношением

$$(\hat{T}_1(\lambda)\psi)(s) = \hat{T}_1(s;\lambda)\psi(s), \qquad \psi \in \mathfrak{H}^p. \tag{64}$$

Поскольку $|\hat{N}(s)| = O(|s|^2)$ при $|s| \to \infty$, из (63) следует, что $\hat{T}_1(\lambda)$ сильно аналитична на полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, а поскольку F и F^{-1} — изометрии в $\mathfrak{H}^p$, отсюда вытекает, что $T_1(\lambda)$ также сильно аналитична, когда $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, что доказывает (v).

Для доказательства утверждения (vi) заметим прежде всего, что, поскольку степени $\hat{A}^k$ неограниченного оператора $\hat{A}$ определяются по индукции соотношениями $\mathfrak{D}(\hat{A}^k) = \{\psi \in \mathfrak{H}^p \mid \hat{A}^{k-1}\psi \in \mathfrak{D}(\hat{A})\}$ и $\hat{A}^k\psi = \hat{A}(\hat{A}^{k-1}\psi)$, в силу специальной структуры оператора $\hat{A}$ его степени $\hat{A}^k$ задаются соотношениями

$$\mathfrak{D}(\hat{A}^k) = \left\{\psi \in \mathfrak{H}^p \,\middle|\, \int_{R^N} |s|^{4k}|\psi(s)|^2 ds < \infty\right\} \tag{65}$$

и

$$(\hat{A}^k\psi)(s) = (\hat{A}(s))^k\psi(s), \qquad \psi \in \mathfrak{D}(\hat{A}^k). \tag{66}$$

Формула (65) может быть получена с помощью тех же рассуждений, что и соотношение (47), если заметить, что матрица $(\hat{A}(s))^k$ имеет на главной диагонали элементы $(-1)^k\alpha^{2k}|s|^{2k}$, нули — ниже главной диагонали и многочлены степени не выше $2k$ выше нее. Так как отображение $A \to A(s)$ алгебры формальных дифференциальных операторов $A = (a_{jk})$ на Φ^p является гомоморфизмом, то из формулы (66) вытекает, что $A^k_{\mathfrak{S}}$ является естественным замкнутым расширением оператора A^k.

Для вектора $\psi_1(\lambda) = \hat{T}(\lambda)\psi^{(0)}$ в силу (63) выполнено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\psi_1(\lambda)(s) = \hat{A}(s)\psi_1(\lambda)(s), \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \quad s \in R^N, \tag{67}$$

а так как $|\hat{N}(s)| = O(|s|^2)$ при $|s| \to \infty$, из (63) и (65) следует, что

$$\psi_1(\lambda) \in \mathfrak{D}(\hat{A}^k), \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{68}$$

В силу (67) и того факта, что производная $\psi_1'(\lambda)$ существует по норме $\mathfrak{H}^p$, мы имеем

$$\psi_1'(\lambda) = \hat{A}\psi_1(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0. \tag{69}$$

Воспользовавшись преобразованием Фурье, перепишем (68) и (69) в виде

$$\varphi_1(\lambda) \in \mathfrak{D}(A^k_{\mathfrak{S}}), \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{70}$$

и

$$\varphi_1'(\lambda) = A_{\mathfrak{S}}\varphi_1(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0. \tag{71}$$

Предположим, что мы доказали равенство

$$\varphi_1^{(k)}(\lambda) = A^k_{\mathfrak{S}}\varphi_1(\lambda), \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0. \tag{72}$$

Так как φ_1 аналитична, производная $\varphi_1^{(k+1)}$ существует, и соотношение (72) показывает, что

$$\varphi_1^{(k+1)}(\lambda) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_1^{(k)}(\lambda+h) - \varphi_1^{(k)}(\lambda)}{h} = \lim_{h\to 0} A^k_{\mathfrak{S}}\frac{\varphi_1(\lambda+h) - \varphi_1(\lambda)}{h}.$$

Поскольку оператор $A^k_{\mathfrak{S}}$ замкнут, соотношения (71) и (73) означают, что $\varphi_1^{(k+1)}(\lambda) = A^{k+1}_{\mathfrak{S}}\varphi_1(\lambda)$, и это завершает доказательство утверждения (vi).

Для доказательства утверждения (vii) вспомним, что по определению (поскольку $A^k_{\mathfrak{S}}$ является естественным замкнутым расширением оператора A^k) $\mathfrak{D}(A^k_{\mathfrak{S}}) = F^{-1}\mathfrak{D}(\hat{A}^k)$, так что соотношение

$$(p)\,T^{(2k)}(R^N) \subseteq \mathfrak{D}(A^k_{\mathfrak{S}}) \tag{73}$$

эквивалентно соотношению

(74) $$FT=[FT_1, \ldots, FT_p]\in \mathfrak{D}(\hat{A}^k), \qquad T\in (p)\,T^{(2k)}(R^N).$$

В силу (65) вектор $\psi=[\psi_1, \ldots, \psi_p]$ принадлежит $\mathfrak{D}(\hat{A}^k)$ тогда и только тогда, когда $\int\limits_{R^N} |s|^{4k}\,|\psi_j(s)|^2\,ds<\infty$ для каждой его компоненты ψ_j. Поэтому (73) эквивалентно соотношению

(75) $$\int\limits_{R^N} |s|^{4k}\,|(FT)(s)|^2\,ds<\infty, \qquad T\in T^{(2k)}(R^N).$$

Другими словами, это приводит нас к выводу о том, что включение (73) справедливо для любого натурального p, если оно справедливо при $p=1$. Следовательно, мы можем взять в качестве T произвольный элемент из $T^{(2k)}(R^N)$. Тогда по лемме 14 $\overline{T}\in$ $\in T^{(2k)}(R^N)$, и потому

$$\nabla^{2k}\overline{T}=\left(\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial s_N^2}\right)^k\overline{T}\in\mathfrak{H}$$

и

(76) $$(\nabla^{2k}\overline{T})(\varphi)=\int\limits_{R^N}\varphi(s)\,(\nabla^{2k}\overline{T})(s)\,ds, \qquad \varphi\in\Phi.$$

К тому же если $\psi=F\varphi$, то

(77) $$(\nabla^{2k}\overline{T})(\varphi)=(\nabla^{2k}\overline{T})(F^{-1}\psi)=$$
$$=\int\limits_{R^N}(\nabla^{2k}F^{-1}\psi)(s)\,\overline{T}(s)\,ds.$$

Так как ψ принадлежит Φ (теорема 11.1), то допустимо дифференцирование под знаком интеграла, а тогда

$$(\nabla^{2k}F^{-1}\psi)(s)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{R^N}e^{isu}\,(-1)^k\,|u|^{2k}\,\psi(u)\,du=$$
$$=F^{-1}\left((-1)^k\,|\cdot|^{2k}\,\psi(\cdot)\right)(s);$$

теперь из соотношения (77) мы получаем

(78) $$(\nabla^{2k}\overline{T})(\varphi)=\int\limits_{R^N}F^{-1}\left((-1)^k\,|\cdot|^{2k}\,\psi(\cdot)\right)(s)\,\overline{T}(s)\,ds=$$
$$=\int\limits_{R^N}\psi(s)\,(-1)^k\,|s|^{2k}\,(F^{-1}\overline{T})(s)\,ds=$$
$$=\int\limits_{R^N}\psi(s)\,(-1)^k\,|s|^{2k}\,\overline{(FT)(s)}\,ds,$$

Поскольку F — изометрия в $\mathfrak{H}$, то $|\psi|_2=|\varphi|_2$, а так как $F\Phi=\Phi$ плотно в $\mathfrak{H}$, то в силу (76) и (78)

$$|\nabla^{2k}\overline{T}|_2=\sup_{|\varphi|_2=1}|(\nabla^{2k}\overline{T})(\varphi)|=$$

$$=\sup_{|\psi|_2=1}\left|\int_{R^N}\psi(s)(-1)^k|s|^{2k}\overline{(FT)(s)}\,ds\right|=$$

$$=\left\{\int_{R^N}|s|^{4k}|(FT)(s)|^2\,ds\right\}^{1/2};$$

тем самым установлено неравенство (75) и доказано включение (73).

Обратно, пусть $\varphi^{(0)}\in\mathfrak{D}(A^k_{\mathfrak{S}})$, так что вектор $\psi^{(0)}=F\varphi^{(0)}$ принадлежит $\mathfrak{D}(\hat{A}^k)$; это эквивалентно тому, что каждая компонента $\psi^{(0)}_j$ вектора $\psi^{(0)}$ лежит в $\mathfrak{H}$ и удовлетворяет неравенству

(79) $$\int_{R^N}|s|^{4k}|\psi^{(0)}_j(s)|^2\,ds<\infty.$$

Покажем, что медленно растущее распределение $T_{\varphi^{(0)}_j}$, соответствующее функции $\varphi^{(0)}_j$, принадлежит $T^{(2k)}(R^N)$. В силу леммы 14 достаточно показать, что $\overline{T}_{\varphi^{(0)}_j}$ является элементом $T^{(2k)}(R^N)$. Пусть $|\alpha|_1\leqslant 2k$, $\varphi\in\Phi$, $\psi=F\varphi$. Так как $\psi\in\Phi$ (теорема 11.1), то, производя, как и раньше, дифференцирование под знаком интеграла, получаем

$$(\partial^\alpha\overline{T}_{\varphi^{(0)}_j})(\varphi)=\int_{R^N}(-1)^{|\alpha|_1}\partial^\alpha(F^{-1}\psi)(s)\overline{\varphi^{(0)}_j(s)}\,ds=$$

$$=\int_{R^N}(-1)^{|\alpha|_1}F^{-1}((i\cdot)^\alpha\psi(\cdot))(s)\overline{\varphi^{(0)}_j(s)}\,ds=$$

$$=\int_{R^N}\psi(s)(-1)^{|\alpha|_1}(is)^\alpha(F^{-1}\overline{\varphi^{(0)}_j})(s)\,ds=$$

$$=\int_{R^N}\psi(s)(-1)^{|\alpha|_1}(is)^\alpha\overline{(F\varphi^{(0)}_j)(s)}\,ds=$$

$$=\int_{R^N}\psi(s)(-1)^{|\alpha|_1}(is)^\alpha\overline{\psi^{(0)}_j(s)}\,ds.$$

Так как для функции $\psi^{(0)}_j$ выполнено неравенство (79), коэффициент при $\psi(s)$ в подинтегральной функции квадратично интегрируем на R^N, и то же верно для его преобразования Фурье $F((-1)^{|\alpha|_1}(i\cdot)^\alpha\overline{\psi^{(0)}_j(\cdot)})$. Предыдущее равенство, таким образом, дает

$$(\partial^{\alpha}\overline{T}_{\varphi_j^{(0)}})(\varphi) = \int\limits_{R^N} \varphi(s) F((-1)^{|\alpha|_1}(i\cdot)^{\alpha}\overline{\psi_j^{(0)}}(\cdot))(s)\,ds, \qquad \varphi \in \Phi;$$

этим доказано, что $\overline{T}_{\varphi_j^{(0)}}$ принадлежит $T^{(2k)}(R^N)$ и что

$$[T_{\varphi_j^{(0)}}, \ldots, T_{\varphi_j^{(0)}}] \in (p)\, T^{(2k)}(R^N).$$

Таким образом,

(80) $$\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}^k) \subseteq (p)\, T^{(2k)}(R^N);$$

в сочетании с соотношением (73) это доказывает утверждение (vii).

В силу (vi) и (vii) для любого λ, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, $\varphi_1(\lambda)$ является таким вектором $T = [T_1, \ldots, T_p]$, что T_j, $j = 1, \ldots, p$, — медленно растущие распределения в R^N, производные которых всех порядков оказываются функциями из $\mathfrak{H} = L_2(R^N)$. Сужение $F_j = T_j \mid C_0^{\infty}(R^N)$ медленно растущего распределения T_j на $C_0^{\infty}(R^N)$ является распределением в R^N, сужение которого $F_j \mid \mathfrak{S}_r$ на открытый шар $\mathfrak{S}_r = \{s \in R^N \mid |s| \leqslant r\}$ имеет в качестве производных функции, совпадающие с сужениями соответствующих производных от T_j. Таким образом, можно воспользоваться утверждением (ii) теоремы XIV.4.5 при $n = N$, $p = 2$ и произвольно большом k и убедиться, что все производные от T_j непрерывны в замыкании $\mathfrak{S}_r$. Поскольку $r > 0$ произвольно, для любого β производная $\partial_s^{\beta}\varphi_1(s_1, \ldots, s_N;\ \lambda)$ существует как непрерывная векторная функция от s на R^N и

$$\int\limits_{\mathfrak{S}_r} |\partial_s^{\beta}\varphi_1(s;\ \lambda)|^2\, ds = \int\limits_{\mathfrak{S}_r} |(\partial_s^{\beta}T)(s)|^2\, ds \leqslant \int\limits_{R^N} |(\partial_s^{\beta}T)(s)|^2\, ds < \infty,$$

так что все производные $\partial_s^{\beta}\varphi_1$ принадлежат $\mathfrak{H}^p$, ч. т. д.

20. Следствие. *Пусть k — натуральное число и функция $\varphi(s) = [\varphi_1(s), \ldots, \varphi_p(s)]$ задана на R^N. Если для любых наборов $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_p]$ из N неотрицательных целых чисел производные $(\partial_s^{\beta}\varphi)(s)$ существуют, непрерывны на R^N и квадратично интегрируемы на R^N, то φ принадлежит $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}^k)$.*

21. Теорема. *В обозначениях теоремы* 19 *для любого ограниченного линейного оператора B в $\mathfrak{H}^p$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *Оператор $A_{\mathfrak{S}} + B$ с областью определения $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ является инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $0 \leqslant t < \infty$.*

Для любого вектора $\varphi^{(0)}$ *из* $\mathfrak{H}^p$ *существует одно и только одно непрерывное отображение* $t \to \varphi(t)$ *полупрямой* $[0, \infty)$ *в* $\mathfrak{H}^p$, *дифференцируемое при* $t > 0$ *и такое, что*

(ii) $\qquad \varphi(t) \in \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}), \qquad 0 < t < \infty;$

(iii) $\qquad \varphi'(t) = (A_{\mathfrak{S}} + B)\varphi(t), \qquad 0 < t < \infty;$

(iv) $\qquad \varphi(0) = \varphi^{(0)}.$

(v) *Эта единственная функция* φ *задается соотношением* $\varphi(t) = S(t)\varphi^{(0)}$. *Полугруппа* $S(t)$ *имеет сильно аналитическое продолжение до полугруппы* $S(\zeta)$, *определенной для* ζ *в полуплоскости* $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$. *Единственное решение задачи Коши* (ii)—(iv) *аналитично по* t *и имеет аналитическое продолжение* $\varphi_1(\zeta) = S(\zeta)\varphi^{(0)}$ *в полуплоскость* $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$, *удовлетворяющее условиям* (ii) *и* (iii) *для комплексных значений* t *при* $\operatorname{Re}(t) > 0$.

(vi) $\qquad \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}} + B) = (p)\,T^{(2)}(R^N).$

(vii) *Производная* $\varphi'(0)$ *существует тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(0)}$ *лежит в* $p(T)^{(2k)}(R^N)$; *при этом* $\varphi'(0) = (A_{\mathfrak{S}} + B)\varphi(0)$.

Если $\alpha^2 < 0$, *то справедливы аналогичные утверждения, получающиеся при отражении комплексной плоскости относительно мнимой оси.*

Доказательство. Дадим сначала оценку нормы аналитического продолжения $T_1(\zeta)$ полугруппы $T(t)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$. Пусть $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$, так что $\zeta = |\zeta| e^{i\theta}$ и $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Так как

$$\sup_{s \in R^N} e^{-\operatorname{Re}(\zeta)\alpha^2 |s|^2} |s|^{2\nu} = \frac{1}{\operatorname{Re}(\zeta)^\nu} \left(\frac{\nu}{e\alpha^2}\right)^\nu,$$

то в силу (63) и того, что $|\hat{N}(s)| = O(|s|^2)$ при $|s| \to \infty$, имеем $|\hat{T}_1(\zeta)| \leqslant K(\sec\theta)^{p-1}$, а так как F — изометрия в $\mathfrak{H}^p$, то

$$|T_1(\zeta)| \leqslant K(\sec\theta)^{p-1}, \qquad \zeta = |\zeta| e^{i\theta}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}. \tag{81}$$

На вещественной оси $\theta = 0$, а поскольку $T(t)$ сильно непрерывна в точке $t = 0$, то

$$|T(t)| \leqslant K, \qquad 0 \leqslant t < \infty; \tag{82}$$

этот факт вытекает также и из соотношения (61). Неравенство (81) показывает, что $T_1(\zeta)$ сильно непрерывна в точке $\zeta = 0$, если ζ остается в секторе $-\varphi \leqslant \theta \leqslant \varphi$, где $0 \leqslant \varphi < \pi/2$. Определим по индукции при $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$ операторы $S_n(\zeta)$, $n = 0, 1, \ldots$, полагая

$$S_0(\zeta) = T_1(\zeta), \qquad S_n(\zeta)\varphi = \int_0^\zeta T_1(\zeta - u) B S_{n-1}(u)\varphi\, du, \qquad \varphi \in \mathfrak{H}^p, \tag{83}$$

где путем интегрирования служит прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и ζ. Так как $T_1(\zeta)$ сильно аналитична при $\operatorname{Re}(\zeta)>0$, то в силу (83) ясно, что такой же будет и функция $S_n(\zeta)$. Используя (81) и (83), по индукции получаем оценки

$$|S_n(\zeta)|\leqslant[K(\sec\theta)^{p-1}]^{n+1}|B|^n\frac{|\zeta|^n}{n!}. \tag{84}$$

Таким образом, ряд

$$S(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(\zeta),\qquad \operatorname{Re}(\zeta)>0, \tag{85}$$

сходится абсолютно, откуда видно, что $S(\zeta)$ сильно аналитична при $\operatorname{Re}(\zeta)>0$ и что

$$|S(\zeta)|\leqslant K(\sec\theta)^{p-1}\exp\{K(\sec\theta)^{p-1}|B||\zeta|\}, \tag{86}$$

а на положительной вещественной полуоси

$$|S(t)|\leqslant Ke^{K|B|t},\qquad 0<t<\infty. \tag{87}$$

Таким образом, для любого вещественного $\omega>K|B|$ имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\varphi\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_n(t)\varphi\,dt,\qquad \operatorname{Re}(\lambda)>\omega,\quad \varphi\in\mathfrak{H}^p. \tag{88}$$

Используя следствие VIII.1.16, получаем при $\operatorname{Re}(\lambda)>\omega$ формулу

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_n(t)\varphi\,dt&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left\{\int_0^\infty T(t-u)BS_{n-1}(u)\varphi\,du\right\}dt=\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda u}\left\{\int_u^\infty e^{-\lambda(t-u)}T(t-u)BS_{n-1}(u)\varphi\,dt\right\}du=\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda u}\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)BS_{n-1}(u)\varphi\,dt\right\}du=\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda u}BS_{n-1}(u)\varphi\,du\right\}dt=\\&=R(\lambda;\,A_{\mathfrak{S}})B\int_0^\infty e^{-\lambda u}S_{n-1}(u)\varphi\,du,\end{aligned}$$

повторное применение которой, поскольку $S_0(t)=T(t)$, дает

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}S_n(\lambda)\varphi\,dt&=[R(\lambda;\,A_{\mathfrak{S}})B]^n\int_0^\infty e^{-\lambda u}T(u)\,du=\\&=[R(\lambda;\,A_{\mathfrak{S}})B]^nR(\lambda;\,A_{\mathfrak{S}})=\\&=R(\lambda;\,A_{\mathfrak{S}})[BR(\lambda;\,A_{\mathfrak{S}})]^n;\end{aligned}$$

в сочетании с (88) эти равенства показывают, что для любого вектора φ из $\mathfrak{H}^p$

$$(89)\quad \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\varphi\, dt = R(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}}) \sum_{n=0}^\infty [BR(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}})]^n \varphi, \qquad \mathrm{Re}(\lambda) > \omega.$$

Пусть теперь $\varphi \in \mathfrak{H}^p$, $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, $\gamma = K|B|\omega^{-1}$, так что в силу (82)

$$|BR(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}})\varphi| = \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} BT(t)\varphi\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant K|B||\varphi|\,\mathrm{Re}(\lambda)^{-1} < \frac{K|B|}{\omega}|\varphi| = \gamma|\varphi|$$

и, таким образом, $|BR(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}})| \leqslant \gamma < 1$ при $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$; поэтому ряд (88) сходится абсолютно. Покажем, что ряд (89) является резольвентой $R(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}} + B)$. Для краткости положим $R = R(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}})$,

$B_0 = \sum_{n=0}^\infty [BR(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}})]^n$, $B_1 = B_0 - I = \sum_{n=1}^\infty [BR(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}})]^n$. Тогда

$$(\lambda I - A_{\mathfrak{S}} - B) RB_0 = (I - BR) B_0 = B_0 - BRB_0 = B_0 - B_1 = I,$$

и для вектора $\varphi \in \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ имеем

$$RB_0(\lambda I - A_{\mathfrak{S}} - B)\varphi = RB_0(\lambda I - A_{\mathfrak{S}})\varphi - RB_0B\varphi =$$
$$= R(I + B_1)(\lambda I - A_{\mathfrak{S}})\varphi - RB_0B\varphi =$$
$$= \varphi + RB_1(\lambda I - A_{\mathfrak{S}})\varphi - RB_0B\varphi,$$

а так как $(\lambda I - A_{\mathfrak{S}})\varphi = R^{-1}\varphi = (BR)^{-1}B\varphi$, то это равенство принимает вид

$$RB_0(\lambda I - A_{\mathfrak{S}} - B)\varphi = \varphi + R\{B_1(BR)^{-1}B\varphi - B_0B\varphi\} =$$
$$= \varphi + R\{B_0B\varphi - B_0B\varphi\} = \varphi.$$

Тем самым доказано, что $RB_0 = R(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}} + B)$; вместе с соотношением (89) это дает

$$(90)\quad R(\lambda;\, A_{\mathfrak{S}} + B)\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\varphi\, dt, \qquad \mathrm{Re}(\lambda) > \omega,\ \varphi \in \mathfrak{H}^p.$$

Поэтому в силу следствия VIII.1.16 $S(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, — сильно непрерывная полугруппа, а оператор $A_{\mathfrak{S}} + B$ с областью определения $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ — ее инфинитезимальная образующая. Мы проверили, что $S(\zeta)$ сильно аналитична при $\mathrm{Re}(\zeta) > 0$. Покажем теперь, что это — полугруппа, т. е. $S(\zeta_1 + \zeta_2) = S(\zeta_1) S(\zeta_2)$, если $\mathrm{Re}(\zeta_1) > 0$

и $\operatorname{Re}(\zeta_2) > 0$. Для любых вектора φ из $\mathfrak{H}^p$ и $t > 0$ функция

$$f_1(\zeta_1) = [S(\zeta_1 + t) - S(\zeta_1) S(t)]\, \varphi$$

аналитична и обращается в нуль, когда ζ_1 лежит на положительной вещественной полуоси. Таким образом, $f_1(\zeta_1) = 0$ при $\operatorname{Re}(\zeta_1) > 0$. Поэтому для $\operatorname{Re}(\zeta_1) > 0$ функция

$$f_2(\zeta_2) = [S(\zeta_1 + \zeta_2) - S(\zeta_1) S(\zeta_2)]\, \varphi$$

обращается в нуль, когда ζ_2 лежит на положительной вещественной полуоси, и, следовательно, $f_2(\zeta_2) = 0$, если $\operatorname{Re}(\zeta_2) > 0$; этим доказано, что $S(\zeta)$ — сильно аналитическая полугруппа в полуплоскости $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$.

Докажем теперь, что $S(\zeta)\varphi \in \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$, если $\varphi \in \mathfrak{H}^2$ и $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$. В ходе доказательства в качестве подинтегральной функции мы имели выражение $A_{\mathfrak{S}} T(\zeta - u) B S_{n-1}(u)$, имеющее особенность типа $(\zeta - u)^{-2}$ при $u = \zeta$. Чтобы избежать возникающие при этом трудности, воспользуемся более простым способом суммирования, вводя при помощи соотношения

$$S_{n,r}(\zeta)\varphi = \int_0^{r\zeta} T(\zeta - u) B S_{n-1}(u)\, \varphi\, du, \qquad \varphi \in \mathfrak{H}^p \tag{91}$$

(где, как и раньше, путем интегрирования является прямолинейный отрезок, соединяющий точки 0 и $r\zeta$) операторы, определенные в $\mathfrak{H}^p$ при всех $n \geqslant 1$, если $0 < r < 1$ и $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$.

По теореме 19(vi)

$$S_0(\zeta)\varphi \in \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}), \qquad S_0'(\zeta)\varphi = A_{\mathfrak{S}} S_0(\zeta)\varphi, \qquad \operatorname{Re}(\zeta) > 0. \tag{92}$$

Вычислим производную $S_n'(\zeta)\varphi$ для $n \geqslant 1$. Мы имеем

$$\frac{S_{n,r}(\zeta + h) - S_{n,r}(\zeta)}{h}\varphi =$$

$$= T_1(h)\frac{1}{h}\int_{r\zeta}^{r\zeta + rh} T_1(\zeta - u) B S_{n-1}(u)\, \varphi\, du +$$

$$+ \int_0^{r\zeta} \frac{T_1(\zeta + h - u) - T_1(\zeta - u)}{h} B S_{n-1}(u)\, \varphi\, du;$$

поэтому

$$\frac{d}{d\zeta} S_{n,r}(\zeta)\varphi = r T_1(\zeta - r\zeta) B S_{n-1}(r\zeta)\varphi - \int_0^{r\zeta} A_{\mathfrak{S}} T_1(\zeta - u) B S_{n-1}(u)\, \varphi\, du. \tag{93}$$

Последний интеграл существует, так как для всякого u из отрезка интегрирования $T_1(\zeta-u)BS_{n-1}(u)\varphi$ лежит в $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ (теорема 19(vi)), а интегрируемость относительно u функции $A_{\mathfrak{S}}T_1(\zeta-u)BS_{n-1}(u)\varphi$ вытекает непосредственно из представления (63) функции $\hat{T}_1(s;\lambda)$, поскольку аргумент $\zeta-u$ при изменении u от 0 до $r\zeta$, $r<1$, остается отделенным от нуля. В силу теоремы III.6.20 соотношение (93) можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\zeta}S_{n,r}(\zeta)\varphi = rT_1(\zeta-r\zeta)BS_{n-1}(r\zeta)\varphi + \\ + A_{\mathfrak{S}}\int_0^{r\zeta} T_1(\zeta-u)BS_{n-1}(u)\varphi\,du. \tag{94}$$

Из формулы (91) (или аналитичности $S_{n,r}(\zeta)$) вытекает, что

$$\lim_{r\to 1}\frac{d}{d\zeta}S_{n,r}(\zeta)\varphi = \frac{d}{d\zeta}S_n(\zeta)\varphi,$$

а так как

$$\lim_{r\to 1} rT_1(\zeta-r\zeta)BS_{n-1}(r\zeta)\varphi = BS_{n-1}(\zeta)\varphi,$$

то последнее слагаемое в равенстве (94) имеет предел при $r\to 1$. Поскольку $A_{\mathfrak{S}}$ — замкнутый оператор и

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{r\zeta} T_1(\zeta-u)BS_{n-1}(u)\varphi\,du = S_n(\zeta)\varphi,$$

то $S_n(\zeta)\varphi$ принадлежит $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$ и

$$S_n'(\zeta)\varphi = BS_{n-1}(\zeta)\varphi + A_{\mathfrak{S}}S_n(\zeta)\varphi = \\ = (A_{\mathfrak{S}}+B)S_n(\zeta)\varphi + B(S_{n-1}(\zeta)-S_n(\zeta))\varphi. \tag{95}$$

Так как функции $S(\zeta)$ и $S_n(\zeta)$, $n\geqslant 0$, аналитичны в полуплоскости $\mathrm{Re}(\zeta)>0$, то из (85) вытекает, что

$$S'(\zeta)\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} S_n'(\zeta)\varphi, \qquad \mathrm{Re}(\zeta)>0,\ \varphi\in\mathfrak{H}^p, \tag{96}$$

а из соотношений (92), (95) и (84) следует, что

$$S'(\zeta)\varphi = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} S_n'(\varphi) = \\ = \lim_{m\to\infty}(A_{\mathfrak{S}}+B)\sum_{n=0}^{m} S_n(\zeta)\varphi - \lim_{m\to\infty} BS_m(\zeta)\varphi = \\ = \lim_{m\to\infty}(A_{\mathfrak{S}}+B)\sum_{n=0}^{m} S_n(\zeta)\varphi. \tag{97}$$

Поскольку $A_{\mathfrak{S}}+B$ — замкнутый оператор, из соотношений (85) и (97) вытекает, что

$$(98)\qquad S(\zeta)\varphi\in\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}+B),\qquad S'(\zeta)\varphi=(A_{\mathfrak{S}}+B)S(\zeta)\varphi,$$
$$\operatorname{Re}(\zeta)>0,\quad \varphi\in\mathfrak{H}^p.$$

Таким образом, если мы положим $\varphi(t)=S(t)\varphi^{(0)}$, $0\leqslant t<\infty$, то функция φ будет удовлетворять условия (i), (ii) и (iii), а ее единственность может быть установлена так же, как и в теореме 19. Мы уже показали, что $S(t)$ имеет сильно аналитическое продолжение до полугруппы $S(\zeta)$, определенной при $\operatorname{Re}(\zeta)>0$, а в силу (98) условия (ii) и (iii) выполняются и для комплексных значений t, если $\operatorname{Re}(t)>0$. Этим завершается доказательство утверждений (i) — (v). Утверждение (vi) вытекает из теоремы 19(vii). Так как оператор $A_{\mathfrak{S}}+B$ является инфинитезимальной образующей полугруппы $S(t)$, $0\leqslant t<\infty$, то утверждение (vii) вытекает из (vi), определения VIII.1.6 и леммы VIII.1.7(b), ч. т. д.

Сделаем несколько замечаний о методе решения некоторых задач Коши, с которыми мы сталкивались. Оказывается, что в ряде рассмотренных примеров и, как читатель без труда может убедиться, во многих еще не рассмотренных нами примерах для явного представления решения задачи с начальными условиями необходимы лишь элементарные функции. Мы покажем, что это так, проведя со всеми подробностями элементарные вычисления в нескольких случаях. В силу следствия 11.10 операторная алгебра всех сверток (собственных и несобственных), заданных на $\mathfrak{H}_p$, $*$-эквивалентна B^*-алгебре $L_\infty(R^N)$. Поэтому алгебра $\mathfrak{A}^p$ операторов A в $\mathfrak{H}^p$, задаваемых соотношением

$$(99)\qquad A=\int_{R^N}\hat{A}(s)\,e(ds),$$

где элементы матрицы $\hat{A}(s)=(a_{jk}(s))$ — ограниченные измеримые функции на R^N, является алгеброй сверток и

$$(100)\qquad A\varphi=(\tau^{-1}\hat{A})*\varphi,\qquad \varphi\in\mathfrak{H}^p,$$

где

$$(101)\qquad \tau=(2\pi)^{N/2}F,\qquad \tau^{-1}=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}}F^{-1},$$

а F — преобразование Фурье в $\mathfrak{H}^p$. Естественные замкнутые расширения $A_{\mathfrak{S}}$ формальных дифференциальных операторов A, которые мы рассматривали в связи с задачей Коши, во всех случаях, кроме теоремы 21, были инфинитезимальными образующими полугрупп в алгебре $\mathfrak{A}^p$. Для такой инфинитезимальной образующей $A_{\mathfrak{S}}$ сильно непрерывная полугруппа $T(t)$, $t\geqslant 0$ (или $t\leqslant 0$), операторов в $\mathfrak{H}^p$, которую она порождает, задается формулой

$$T(t) = e^{tA_{\mathfrak{S}}} = \int_{R^N} (e^{t\hat{A}})(s)\, e(ds). \tag{102}$$

Мы можем, следовательно, в соответствии с формулой (100) представить решение $\varphi(t) = T(t)\varphi^{(0)}$ задачи Коши

$$\varphi'(t) = A_{\mathfrak{S}}\varphi(t), \qquad \varphi(0) = \varphi^{(0)}, \tag{103}$$

в виде интеграла свертки

$$\varphi(t) = (\tau^{-1}\exp t\hat{A}) * \varphi^{(0)}. \tag{104}$$

Формула (104) содержит выражение, получающееся при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, и в этом смысле она сводит задачу Коши (103) к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Покажем сначала, как полезна формула (104) при решении уравнения диффузии, когда $p = 1$, N произвольно, а начальным значением служит фиксированная функция $\varphi^{(0)}$ из $L_2(R^N)$, т. е. при нахождении решения следующих уравнений для функции $\varphi(s, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(s;\ t) = \alpha^2\nabla^2\varphi(s;\ t), \qquad \varphi(s,\ 0) = \varphi^{(0)}(s), \tag{105}$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial s_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial s_N^2$. Так как $\sin u$ — нечетная функция, повторное интегрирование дает

$$\begin{aligned}(\tau^{-1}e^{t\hat{A}})(s) &= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{R^N} e^{-\alpha^2 t|u|^2}\cos su\, du = \\ &= \prod_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 tr^2}\cos s_j r\, dr = \\ &= \frac{1}{2}(\pi\alpha^2 t)^{-N/2} e^{-|s|^2/4\alpha^2 t},\end{aligned} \tag{106}$$

причем на последнем шаге мы воспользовались хорошо известным (см. Бартл [8; стр. 369]) определенным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cr^2}\cos(tr)\, dr = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-t^2/4c}, \qquad c > 0. \tag{107}$$

Таким образом, формула (104) показывает, что решением задачи (105) является функция

$$\varphi(s;\ t) = \frac{1}{2}(\pi\alpha^2 t)^{-N/2}\int_{R^N} e^{-|s-u|^2/4\alpha^2 t}\varphi^{(0)}(u)\, du. \tag{108}$$

Ядро в этой формуле определяет N-мерное преобразование Гаусса — Вейерштрасса. Если $\alpha^2 > 0$ и $N = 3$, то соотношение (108) дает лапласовское решение уравнения теплопроводности в неограниченном теле. При этом $\varphi^{(0)}$ — начальная температура в точке $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\varphi(s, t)$ — температура в точке $s = (s_1, s_2, s_3)$ в момент времени t, а $\alpha^2 = K/C$, где K — коэффициент теплопроводности вещества и C — его теплоемкость. С уравнением (105) мы сталкиваемся также при изучении диффузии в растворах; в этом случае $\varphi(s, t)$ — плотность растворенного вещества в точке s в момент времени t. Как растворитель, так и растворенное вещество могут быть жидкостями, так что уравнение (105) появляется и в связи с диффузией одной жидкости в другой, а также при изучении диффузии нейтронов в веществе. Именно по этим причинам уравнение (105) известно как *уравнение диффузии*. Тот факт, что диффузия является процессом необратимым, при математическом решении таких задач, как предыдущая, выражается в том, что мы имеем дело с полугруппами, а не с полными группами. Таким образом, доказательство существования и единственности решения задачи Коши, соответствующей уравнению диффузии, является другой формой утверждения о том, что настоящее определяет будущее (но не прошлое, как в случае некоторых консервативных систем, возникающих в небесной механике и в задачах распространения волн, когда нет потери энергии или возрастания энтропии).

Рассмотрим теперь задачу отыскания явной формы решения задачи Коши, существование которого установлено в теореме 19. Как и раньше, мы предполагаем, что $\alpha^2 t > 0$. Формула (55), дающая аналитическое представление для $(\exp t\hat{A})(s)$, показывает, что при вычислении оператора $\tau^{-1}\exp t\hat{A}$ возникают интегралы вида

$$\int\limits_{R^N} e^{isu} e^{-\alpha^2 t|u|^2} u_1^{j_1} \ldots u_N^{j_N}\, du = \prod_{k=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t u_k^2} (\cos s_k u_k + i \sin s_k u_k)\, u_k^{j_k}\, du_k.$$

Таким образом, вычисление $\tau^{-1}\exp t\hat{A}$ сводится к подсчету *лишь конечного числа* функций, заданных на вещественной оси соотношениями

$$F_j(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t x^2} (\cos xy)\, x^j\, dx,$$

(109)

$$G_j(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t x^2} (\sin xy)\, x^j\, dx.$$

Очевидно, что $F_j(y)=0=G_{j+1}(y)$, если j нечетно. Равенство (107) показывает, что

(110) $$F_0(y)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2 t}}\,e^{-y^2/4\alpha^2 t},$$

а остальные функции $F_{2n}(y)$ и $G_{2n+1}(y)$ можно вычислить по индукции, исходя из (110) и соотношений

(111) $$G_{j+1}(y)=-F_j'(y), \qquad F_{j+1}(y)=G_j'(y).$$

Рассмотрим теперь другой тип возмущенного оператора Лапласа при $p=2$ и произвольном N, порожденного формальным дифференциальным оператором в Φ^2 с матрицей

(112) $$A=\begin{pmatrix}\alpha^2\nabla^2 & a\\ \beta^2 a & \alpha^2\nabla^2\end{pmatrix},$$

где $\beta\neq 0$ — комплексная постоянная,

$$a=\alpha_0+\alpha_1\frac{\partial}{\partial s_1}+\ldots+\alpha_N\frac{\partial}{\partial s_N}$$

и не все комплексные постоянные $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ равны нулю. Как и раньше, α^2 — положительное или отрицательное вещественное число, а $\nabla^2=\partial^2/\partial s_1^2+\ldots+\partial^2/\partial s_N^2$. Мы предполагаем, что $\beta\neq 0$ и что не все постоянные $\alpha_0, \ldots, \alpha_N$ равны нулю, ибо в противном случае оператор (112) сводится к оператору, уже рассмотренному в предыдущем примере, в то время как при наших предположениях возникают интегралы совсем другого типа. Мы уже видели при рассмотрении оператора (33) (который отличается от (112) постоянным множителем), что естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ оператора (112) является спектральным оператором скалярного типа. Мы имеем

(113) $$\hat{A}(s)=\begin{pmatrix}-\alpha^2|s|^2 & \hat{a}(s)\\ \beta^2\hat{a}(s) & -\alpha^2|s|^2\end{pmatrix};$$

характеристические корни этой матрицы равны

(114) $$\hat{\lambda}_{21}(s)=-\alpha^2|s|^2+\beta\hat{a}(s), \qquad \hat{\lambda}_{22}(s)=-\alpha^2|s|^2-\beta\hat{a}(s),$$

а связанные с ней проекторы $\hat{E}_j(s)=\hat{E}(\hat{\lambda}_{2j}(s);\hat{A}(s))$, $j=1, 2$, в соответствии с формулой (11.41) задаются следующим образом:

(115) $$\hat{E}_1(s)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \beta^{-1}\\ \beta & 1\end{pmatrix}, \qquad \hat{E}_2(s)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\beta^{-1}\\ -\beta & 1\end{pmatrix}.$$

Итак (VII.1.8),

(116) $$(e^{t\hat{A}})(s)=e^{t\hat{\lambda}_{21}(s)}\hat{E}_1+e^{t\hat{\lambda}_{22}(s)}\hat{E}_2,$$

где в символах $\hat{E}_j(s)$ опущена переменная s, чтобы подчеркнуть их независимость в силу (115) от s. Так как $A_{\mathfrak{S}}$ — спектральный оператор скалярного типа, то, согласно теореме 7, $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma_0(A_{\mathfrak{S}})$, а так как $\hat{a}(s)$ — линейная форма, то в силу (114) спектр $\sigma(A_{\mathfrak{S}})$ лежит в некоторой полуплоскости. Согласно теореме 8, $A_{\mathfrak{S}}$ — инфинитезимальная образующая сильно непрерывной полугруппы $T(t) = F^{-1}\exp(t\hat{A})F$. Если $u = (u_1, \ldots, u_N) \in R^N$, то $\beta\hat{a}(u) = \beta\alpha_0 + \delta u + i\varepsilon u$, где линейные формы δu и εu вещественные и однородные, т. е. δ_j и ε_j, $j = 1, \ldots, N$, — вещественные постоянные. Таким образом, в силу (114), (115) и (116) ясно, что при вычислении оператора $\tau^{-1}\exp(t\hat{A})$ необходимо лишь вычислить интегралы

$$\int\limits_{R^N} e^{isu} e^{-\alpha^2 t|u|^2 \pm t\beta\alpha_0 \pm t\delta u \pm it\varepsilon u}\, du =$$

$$= e^{\pm t\beta\alpha_0} \prod_{j=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t u_j^2 \pm t\delta_j u_j} \{\cos(s_j \pm t\varepsilon_j) u_j + i \sin(s_j \pm t\varepsilon_j) u_j\}\, du_j.$$

Здесь при $c = \alpha^2 t > 0$, вещественном b и $y = s_i + t\varepsilon_j$ встречаются интегралы двух типов:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-c(u-b)^2} \cos(uy)\, du =$$

$$= \cos(by) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-cr^2} \cos(ry)\, dr = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\,(e^{-y^2/4c}) \cos(by),$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-c(u-b)^2} \sin(uy)\, du =$$

$$= \sin(by) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-cr^2} \cos(ry)\, dr = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\,(e^{-y^2/4c}) \sin(by),$$

причем мы снова использовали формулу (107). Этим показано, что можно дать явный вид матрицы в интегральном операторе свертки $\tau^{-1}\exp(t\hat{A})$ в $\mathfrak{H}^2$, используя конечное число элементарных функций.

Читатель может обратить внимание на то, что в общей теории сильно непрерывных полугрупп дифференцируемость функции $T(t)\varphi$ обеспечивалась лишь в том случае, когда φ принадлежала области определения инфинитезимальной образующей, в то время как в примерах теорем 19 и 21 функция $\varphi(t) = T(t)\varphi^{(0)}$ дифференцируема (и даже аналитична) при всех $t > 0$ и любом векторе $\varphi^{(0)}$ из $\mathfrak{H}^p$; таким образом, в качестве начального значения $\varphi^{(0)}$ в соответствующей задаче Коши допускается произвольный вектор из $\mathfrak{H}^p$. С точки зрения абстрактной теории полугрупп это явление можно объяснить тем фактом, что в разобранных примерах $T(t)\mathfrak{H}^p \subseteq \subseteq \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}})$, если $t > 0$ (Хилле и Филлипс [1, теорема 10.3.5, стр. 324]). В примерах теорем 19 и 21 мы не обращаемся к общей теории, так как из представления $\exp t\hat{A}$ ясно, что $T(t)\varphi$ дифференцируема при $t > 0$ и произвольном векторе φ из $\mathfrak{H}^p$. Очевидно также, что производная n-го порядка $T^{(n)}(t)$ существует в равномерной операторной топологии при $t > 0$ и любом положительном целом n.

Эти же замечания справедливы и для естественного замкнутого расширения формального дифференциального оператора (112). Это видно из формул (114), (115), (116) и того факта, что $\hat{a}(s)$ — линейная форма. В силу (113) очевидно также, что

$$\mathfrak{D}(\hat{A}) = \left\{ \psi \in \mathfrak{H}^2 \,\Big|\, \int\limits_{R^N} |s|^4 |\psi(s)|^2 ds < \infty \right\}, \tag{117}$$

и, таким образом, как показывает доказательство теоремы 19,

$$\mathfrak{D}(\hat{A}_{\mathfrak{S}}) = (2)\,T^{(2)}(R^N).$$

Объединим некоторые свойства возмущенного оператора Лапласа 112) в следующей теореме:

22. Теорема. *Естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ формального дифференциального оператора* (112) *является спектральным оператором скалярного типа; этот оператор — инфинитезимальная образующая сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ линейных операторов в $\mathfrak{H}^2$. Его область определения равна*

$$\text{(i)} \qquad \mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}) = (2)\,T^{(2)}(R^N)$$

и

$$\text{(ii)} \qquad T(t)\,\mathfrak{H}^2 \subseteq (2)\,T^{(2)}(R^N), \qquad t > 0.$$

Для каждого вектора $\varphi^{(0)}$ из $\mathfrak{H}^2$ существует однозначно определенное отображение $t \to \varphi(t)$ полупрямой $[0, \infty)$ в $\mathfrak{H}^2$ (или $(-\infty, 0]$ в $\mathfrak{H}^2$, если $\alpha^2 > 0$), дифференцируемое при $t > 0$ и обладающее следующими свойствами:

$$\text{(iii)} \qquad \varphi(t) \in (2)\,T^{(2)}(R^N), \qquad t > 0;$$

$$\text{(iv)} \qquad \varphi'(t) = A_{\mathfrak{S}}\varphi(t), \qquad t > 0;$$

$$\text{(v)} \qquad \varphi(0) = \varphi^{(0)}.$$

(vi) *Эта однозначно определенная функция $\varphi(t)$ задается уравнением*

$$\varphi(t) = T(t)\,\varphi^{(0)} = (\tau^{-1}\exp(t\hat{A})) * \varphi^{(0)};$$

элементы матрицы, представляющей оператор свертки $\tau^{-1}\exp(t\hat{A})$, *выражаются в терминах конечного числа элементарных функций.*

(vii) *Все производные* $T^{(n)}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, *при* $t > 0$ *существуют в равномерной операторной топологии.*

Доказательство. Утверждение (ii) вытекает из соотношений (i) и (114) — (117); (vi) показывает, что $(\tau\varphi)(t) = (\exp t\hat{A})\tau\varphi^{(0)}$; тем самым доказано (vii) и существование производной $\varphi'(t)$, $t > 0$. Единственность $\varphi(t)$ можно доказать так же, как это было сделано в теореме 19. Остальные утверждения уже были доказаны.

13. Теоремы Винера — Леви — Хопфа[1])

Как в § 11 и 12, $\mathfrak{H}$ будет обозначать гильбертово пространство $L_2(R^N)$, $\hat{\mathfrak{A}}$ — B^*-алгебру $L_\infty(R^N)$, а $\mathfrak{A}$ — B^*-подалгебру в $B(\mathfrak{H})$, состоящую из всех операторов вида

(1) $$a = \int_{\mathfrak{S}} \hat{a}(s)\, e(ds), \quad \hat{a} \in \hat{\mathfrak{A}},$$

где $\mathfrak{S}$ — одноточечная компактификация N-мерного евклидова пространства R^N, а e — самосопряженная спектральная мера, определенная соотношением (11.15). Из леммы 9.2 мы знаем, что если элементы a и A в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^p$ соответственно имеют ограниченные обратные a^{-1} и A^{-1} (как операторы в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}^p$ соответственно), то эти обратные лежат в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^p$. В доказательстве, данном в лемме 9.2, весьма существенно использовался тот факт, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^p$ являются B^*-алгебрами. Это важное свойство операторной алгебры, состоящее в том, что она содержит все обратные элементы, если они существуют как ограниченные всюду определенные операторы, присуще, конечно, не только B^*-алгебрам. Мы рассмотрим здесь некоторые *неполные* подалгебры $\mathfrak{A}$ и соответствующие подалгебры $\mathfrak{A}^p$, также обладающие этим свойством.

Рассмотрим сначала подалгебру $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}$, состоящую из всех операторов вида

(2) $$a = \alpha e + \mathfrak{f}, \quad f \in L_1,$$

где $\mathfrak{f}$ — оператор свертки $\mathfrak{f}g = f * g$, $g \in \mathfrak{H}$. Элемент a из $\mathfrak{A}_1$ однозначно определяет комплексное число α и функцию f из L_1. Чтобы проверить это, заметим сначала, что элемент $\hat{a}$ из $\hat{\mathfrak{A}}$, соответствующий оператору (2), в силу теоремы 11.4 равен

(3) $$\hat{a}(s) = \alpha + \tilde{f}(s), \quad s \in \mathfrak{S}, \quad a \in \mathfrak{A}_1,$$

---

[1]) При переводе был опущен § 13, содержащий общие рассуждения по поводу принципа детерминизма, не относящегося к предмету книги.—*Прим. ред.*

где $\tilde{f} = \tau f$ и $\tau = (2\pi)^{N/2} F$. Так как $a = 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{a} = 0$, то для доказательства того, что a однозначно определяет α и f, достаточно показать, что $\alpha = 0$ и $f = 0$, если $\hat{a} = 0$. Для этого воспользуемся тем, что $\tilde{f}$ лежит в C_0 и что $\tilde{f}$ однозначно определяет f; это хорошо известная *теорема о единственности преобразования Фурье*. Оба эти утверждения содержатся в следующей теореме:

1. Теорема. *Если f принадлежит L_1, то функция $\tilde{f}$ непрерывна на $\mathfrak{S}$ и $\tilde{f}(\infty) = 0$. Кроме того, $f = 0$, если только $\tilde{f}(s) = 0$ при всех s из $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Теорема 11.1 показывает, что, если f лежит в пространстве Φ быстро убывающих функций, то функция $\tilde{f}$ непрерывна на $\mathfrak{S}$ и $\tilde{f}(\infty) = 0$. По лемме XIV.2.3 многообразие Φ плотно в L_1. Таким образом, если f лежит в L_1, в Φ найдется последовательность $\{f_n\}$, такая, что $|f_n - f|_1 \to 0$, а потому $|\tilde{f}_n - \tilde{f}|_\infty \leqslant |f_n - f|_1 \to 0$. Тем самым доказана непрерывность функции $\tilde{f}$ и то, что $\tilde{f}(\infty) = 0$. Пусть теперь $\tilde{f} = 0$. Так как $|\mathfrak{f}| = |\tilde{f}|_\infty$, мы имеем $f * g = 0$ для всякой функции g из L_2. Пусть g — характеристическая функция компактного множества σ, так что $f * g = \int_\sigma f_t\, dt = 0$. Поскольку векторная функция f_t непрерывна по t (со значениями в L_1), она обращается в нуль тождественно и $0 = f_0 = f$, ч. т. д.

Эта теорема показывает, что если функция (3) обращается в нуль на $\mathfrak{S}$, то $\alpha = \hat{a}(\infty) = 0$, $\tilde{f}(s) = 0$ и $f = 0$. Следовательно, оператор a из $\mathfrak{A}_1$, заданный соотношением (2), однозначно определяет α и f.

Легко видеть, что $\mathfrak{A}_1$ — подалгебра в $\mathfrak{A}$, содержащая вместе с каждым элементом сопряженный к нему, и что сопряженный к оператору (2) имеет вид

$$a^* = \bar{\alpha} e + \mathfrak{f}^*, \qquad f^*(t) = \overline{f(-t)}. \tag{4}$$

Из теоремы 11.4 вытекает, что

$$|a| \leqslant |\alpha| + |f|_1, \tag{5}$$

где $|f|_1$ есть L_1-норма функции f. Алгебра $\mathfrak{A}_1$ не полна как подалгебра $\mathfrak{A}$, но если ее перенормировать, положив

$$|a|_1 = |\alpha| + |f|_1, \tag{6}$$

то полнота L_1 обеспечивает полноту $\mathfrak{A}_1$ относительно нормы (6), а неравенство (5) дает

$$|a| \leqslant |a|_1; \tag{7}$$

это показывает, что из сходимости в $\mathfrak{A}_1$ вытекает сходимость в $\mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{A}_1$ с нормой (6) не является B^*-алгеброй, поскольку соотношение $|aa^*| = |a|^2$ неверно, но $\mathfrak{A}_1$ с нормой (6) удовлетворяет всем аксиомам коммутативной B-алгебры с инволюцией и единицей. Эти элементарные свойства легко проверяются, что и было сделано в § XI.3. Из теоремы 1 вытекает, что $\mathfrak{A}_1$ изометрически изоморфна алгебре, получающейся из групповой алгебры L_1 присоединением единицы e,— факт, уже отмеченный ранее в более общей ситуации (XI.3.3).

Так как для любого a из $\mathfrak{A}_1$ функция $\hat{a}$ непрерывна на компактном пространстве $\mathfrak{S}$, то оператор a из $\mathfrak{A}_1$ обратим в $\mathfrak{A}$, если $\hat{a}(s)$ не обращается в нуль на $\mathfrak{S}$. Знаменитая теорема Н. Винера утверждает больше, а именно, что обратный элемент a^{-1} принадлежит $\mathfrak{A}_1$.

Основные понятия, на которых основано доказательство теоремы Винера в нашем изложении, связаны с гельфандовской теорией коммутативных нормированных колец, или B-алгебр, как мы их называем. Стоит напомнить (IX.2.1), что элемент a и максимальный идеал $\mathfrak{M}$ в коммутативной B-алгебре $\mathfrak{A}_1$ однозначно определяют комплексное число $a(\mathfrak{M})$, для которого $a+\mathfrak{M} = a(\mathfrak{M})\,e+\mathfrak{M}$. В множестве максимальных идеалов можно ввести топологию (IX.2.7) так, чтобы получающееся в результате пространство $\sigma(\mathfrak{A}_1)$, которое называется *структурным пространством*, или *спектром*, алгебры $\mathfrak{A}_1$, было компактным и хаусдорфовым (IX.2.8), а комплексные функции $a(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}\in\sigma(\mathfrak{A}_1)$,— непрерывными на $\sigma(\mathfrak{A}_1)$, причем $|a(\mathfrak{M})| \leqslant |a|$ (IX.2.9). Элемент a из $\mathfrak{A}_1$ имеет обратный в $\mathfrak{A}_1$ тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному максимальному идеалу (IX.1.12 (e)); другими словами, a обратим в $\mathfrak{A}_1$ тогда и только тогда, когда функция $a(\mathfrak{M})$ не имеет нулей на $\sigma(\mathfrak{A}_1)$. Таким образом, гельфандовская теория дает общую процедуру определения того, имеет элемент обратный или нет, и, следовательно, включает теорему Винера в более общую теорию, объединяющую многие аналогичные явления. Чтобы применить эту процедуру к данной алгебре, достаточно дать удовлетворительное представление ее спектра и функций $a(\mathfrak{M})$ на нем. Для алгебры $\mathfrak{A}_1$ эта задача полностью решается в следующей теореме:

2. Теорема (*Гельфанд — Райков*). *Спектр алгебры $\mathfrak{A}_1$ гомеоморфен пространству $\mathfrak{S}$, а для соответствующих друг другу элементов s и $\mathfrak{M}_s$ мы имеем*

$$a(\mathfrak{M}_s) = \hat{a}(s), \qquad a\in\mathfrak{A}_1, \qquad s\in\mathfrak{S}.$$

Доказательство. Сначала установим взаимно однозначное соответствие между $\sigma(\mathfrak{A}_1)$ и $\mathfrak{S}$. Для этого в силу леммы IX.2.2 достаточно показать, что множество ненулевых комплекснозначных гомоморфизмов h алгебры $\mathfrak{A}_1$ находится во взаимно однозначном соответствии с точками s из $\mathfrak{S}$, причем для соответствующих друг другу элементов h и s мы имеем $h(a) = \hat{a}(s)$ для любого элемента a из $\mathfrak{A}_1$. Так как при фиксированном s из $\mathfrak{S}$ отображение $a \to \hat{a}(s)$, очевидно, является ненулевым гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_1$, достаточно показать, что всякий такой гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}_1$ однозначно порождает некоторую точку s в $\mathfrak{S}$ и при этом $h(a) = \hat{a}(s)$ для всех a из $\mathfrak{A}_1$. Если $h(\mathfrak{f}) = 0$ для каждой функции f из L_1, то $h(a) = \hat{a}(\infty)$ для любого a из $\mathfrak{A}_1$, и потому точка ∞ из $\mathfrak{S}$ соответствует этому конкретному гомоморфизму h. При другом h выберем функцию f в L_1 так, что $h(\mathfrak{f}) \neq 0$, и при помощи сдвига $f_t(s) = f(s-t)$ построим комплекснозначную функцию

$$c(t) = \frac{h(\mathfrak{f}_t)}{h(\mathfrak{f})}, \qquad t \in R^N. \tag{8}$$

Так как $f_t * g = g_t * f$ для любой пары функций f и g из L_1, очевидно, что $c(t)$ зависит лишь от t и не зависит от конкретного выбора функции f, использованной в (8). Поскольку $t \to f_t$ — непрерывное отображение R^N в L_1 (XI.3.1(f)) и гомоморфизм h непрерывен (IX.2.3), неравенство (7) показывает, что функция $c(t)$ непрерывна по t. Поскольку $f_s * f_t = f_{s+t} * f$, мы имеем $h(\mathfrak{f}_s)\, h(\mathfrak{f}_t) = h(\mathfrak{f}_{s+t})\, h(\mathfrak{f})$, и потому $c(s+t) = c(s)\, c(t)$, т. е. c — гомоморфизм аддитивной группы R^N в мультипликативную группу комплексных чисел, так что c — непрерывный характер R^N. Так как $|\mathfrak{f}_t| \leqslant |f_t|_1 = |f|_1$, то в силу (8) функция c ограничена на R^N, а значит, $c(mt) = c(t)^m$ и $c(-mt) = c(t)^{-m}$ ограничены по t и m. Этим доказано, что $|c(t)| = 1$ при всех t из R^N. Таким образом, c — непрерывный гомоморфизм аддитивной группы R^N в мультипликативную группу единичной окружности в комплексной плоскости. Тогда в силу хорошо известного элементарного результата существует однозначно определенная точка $s = s(h)$ в R^N, такая, что

$$c(t) = e^{-ist}, \qquad t \in R^N. \tag{9}$$

Пусть теперь x^* — непрерывный линейный функционал на L_1, определенный соотношением $h(\mathfrak{g}) = x^* g$ для любого g из L_1. Так как векторнозначная функция f_t непрерывна и ограничена как отображение из R^N в L_1, векторнозначная функция $f_t g(t)$ интегрируема по t и

$$\begin{aligned} h(\mathfrak{f})\, h(\mathfrak{g}) = h(\mathfrak{fg}) = x^*(f * g) = x^* \int_{R^N} f_t g(t)\, dt = \\ = \int_{R^N} x^* f_t g(t)\, dt = \int_{R^N} h(\mathfrak{f}_t)\, g(t)\, dt = \\ = h(\mathfrak{f}) \int_{R^N} c(t)\, g(t)\, dt = h(\mathfrak{f}) \int_{R^N} e^{-ist} g(t)\, dt. \end{aligned}$$

Поскольку $h(\mathfrak{f}) \neq 0$, этим доказано, что гомоморфизм h однозначно определяет точку s в $\mathfrak{S}$, такую, что $h(\mathfrak{g}) = (\tau g)(s)$ для любой g из L_1, и, следовательно, $h(a) = \hat{a}(s)$ для любого элемента $a \in \mathfrak{A}_1$. Согласно лемме IX.2.2, равенство $h(a) = \hat{a}(s)$, $a \in \mathfrak{A}_1$, можно переписать в виде $a(\mathfrak{M}_s) = \hat{a}(s)$, $a \in \mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{M}_s$ — максимальный идеал

$$\mathfrak{M}_s = \{a \mid a \in \mathfrak{A}_1,\ \hat{a}(s) = 0\}.$$

Таким образом, мы доказали, что это равенство устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{S}$ и спектром $\sigma(\mathfrak{A}_1)$. Так как $\mathfrak{S}$ и спектр алгебры $\mathfrak{A}_1$ являются компактными хаусдорфовыми пространствами, для проверки гомеоморфности отображения $s \to \mathfrak{M}_s$ достаточно заметить, что оно непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$ и $a_1, \ldots, a_m$ — элементы из $\mathfrak{A}_1$. Построим (IX.2.3) базисную окрестность N точки $\mathfrak{M}_{s_0}$ в спектре $\overline{\mathfrak{A}}_1$ по формуле

$$N = \left\{ \mathfrak{M}_s \,\middle|\, |a_i(\mathfrak{M}_s) - a_i(\mathfrak{M}_{s_0})| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Так как $a(\mathfrak{M}_s) = \hat{a}(s)$, то множество всех точек s из $\mathfrak{S}$, которые переходят в N при отображении $s \to \mathfrak{M}_s$, совпадает с множеством

$$\{s \mid s \in \mathfrak{S},\ |\hat{a}_i(s) - \hat{a}_i(s_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, m\};$$

это множество открыто в $\mathfrak{S}$, так как функция $\hat{a}(s) = \alpha + (\tau f)(s)$ непрерывна при любой функции f из L_1. Этим показано, что отображение $s \to \mathfrak{M}_s$ непрерывно, и, следовательно, оно является также гомоморфизмом, ч. т. д.

Как мы отмечали раньше, фундаментальный результат Н. Винера является следствием теоремы Гельфанда — Райкова; его можно сформулировать следующим образом:

3. Следствие (*Н. Винер*). *Если для элемента a из алгебры $\mathfrak{A}_1$ при любом s из $\mathfrak{S}$ мы имеем $\hat{a}(s) \neq 0$, то существует в $\mathfrak{A}_1$ такой элемент b, что $\hat{b}(s) = \hat{a}(s)^{-1}$ для всех s из $\mathfrak{S}$.*

Мы считаем удобным сформулировать теорему Винера и другие аналогичные результаты, используя следующее понятие:

4. Определение. Будем говорить, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ операторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$ *содержит все обратные*, если $\mathfrak{A}_0$ содержит тождественный в $\mathfrak{X}$ оператор и обратный к любому из своих элементов, обладающих обратными в алгебре $B(\mathfrak{X})$ ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$.

Понятие «содержать все обратные» зависит, конечно, от основного B-пространства, в котором действуют операторы a из $\mathfrak{A}_0$. Это едва ли приведет к недоразумениям, поскольку мы чаще имеем дело с *операторными* алгебрами, чем с абстрактными.

Для оператора a из $\mathfrak{A}_1$ функция $\hat{a}$ непрерывна на компактном пространстве $\mathfrak{S}$, так что ее необращение в нуль эквивалентно существованию обратного a^{-1} в $\mathfrak{A}$, а в силу леммы 9.2 это эквивалентно существованию обратного в $B(\mathfrak{H})$. Поэтому результат Винера можно сформулировать следующим образом:

5. Следствие (*Н. Винер*). *Операторная алгебра $\mathfrak{A}_1$ содержит все свои обратные элементы.*

Многие непосредственные следствия этой теоремы Винера станут очевидными, если мы докажем следующую лемму:

6. Лемма. *Пусть $\mathfrak{J}$ — идеал в подалгебре $\mathfrak{A}_0$ из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}(\mathfrak{J})$ — алгебра всех операторов вида*

$$a = \alpha e + b, \quad b \in \mathfrak{J}. \tag{10}$$

Если $\mathfrak{A}_0$ содержит все свои обратные элементы, то этим же свойством обладает и $\mathfrak{A}(\mathfrak{J})$.

Доказательство. Пусть оператор (10) имеет обратный a^{-1} в $B(\mathfrak{H})$. Тогда a^{-1} лежит в $\mathfrak{A}_0$, и так как $\mathfrak{J}\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{J}$, то элементарное тождество $a^{-1} = \alpha^{-1}(e - ba^{-1})$ показывает, что a^{-1} лежит в $\mathfrak{A}(\mathfrak{J})$, ч. т. д.

Пусть L_0 — линейное подмногообразие в L_1, такое, что

$$f * g \in L_0, \quad f \in L_1, \ g \in L_0. \tag{11}$$

Тогда множество всех операторов свертки $\mathfrak{f}$ с f из L_0 образует идеал в $\mathfrak{A}_1$, и в силу леммы 6 теорема Винера показывает, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ операторов вида

$$a = \alpha e + \mathfrak{f}, \quad f \in L_0, \tag{12}$$

содержит все свои обратные. Дадим несколько примеров таких алгебр $\mathfrak{A}_0$, выбирая конкретные линейные многообразия L_0. Ясно, что линейное пространство $L_0 = L_1 \cap L_\infty$ удовлетворяет условию (11). Пространство $L_0 = L_1 \cap C$ всех интегрируемых функций, совпадающих почти всюду с некоторой непрерывной функцией, также, очевидно, удовлетворяет условию (11). Пример 11.12 показывает, что пространство $L_0 = L_1 \cap L_1$ удовлетворяет условию (11). Более общо, для любого p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространство $L_0 = L_1 \cap L_p$ удовлетворяет условию (11). Для проверки этого предположим, что f принадлежит L_1, а g принадлежит $L_1 \cap L_p$. Если p равно 1 или ∞, то ясно, что $|f * g|_p \leqslant |f|_1 \cdot |g|_p$, а неравенство для произвольного p тогда вытекает из теоремы Рисса о выпуклости (VI.10.11). Этим доказано, что пространство $L_0 = L_1 \cap L_p$ удовлетворяет условию (11). Пространства $L_0 = L_1 \cap C^{(k)}$ и $L_0 = L_1 \cap C^\infty$ доставляют новые примеры линейных подмножеств в L_1, удовлетворяющих условию (11). Если $k < \infty$, то символ $C^{(k)}$ используется для обозначения множества всех комплексных функций на R^N, имеющих производные до порядка k включительно и определенных всюду на R^N как ограниченные непрерывные функции.

Эти результаты сформулированы ниже в определении и следствии.

7. Определение. Пусть L_0 — множество функций на R^N с существенно ограниченными преобразованиями Фурье. Тогда для функции f из L_0 оператор свертки $\mathfrak{f}g = f * g = \int \tilde{f}(s)\, e(ds)\, g$ определяется как ограниченное линейное отображение $g \to f * g$ пространства $\mathfrak{H}$ в себя. Мы будем говорить, что оператор a из $\mathfrak{A}$ является *оператором типа* L_0, если он имеет вид $a = \alpha f + \mathfrak{f}$, где $f \in L_0$. Оператор $A = (a_{ij})$ из $\mathfrak{A}^p$ называется *оператором типа* L_0, если каждый из операторов a_{ij} типа L_0.

8. Следствие. *Пусть оператор a из $\mathfrak{A}$ имеет обратный в $B(\mathfrak{H})$. Если a — оператор типа $L_1 \cap L_q$ при некотором q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, или типа $L_1 \cap C^{(k)}$ при некотором k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, то обратный оператор a^{-1} имеет тот же тип.*

Если $\mathfrak{A}_0$ — подалгебра в $\mathfrak{A}$, то символом $\mathfrak{A}_0^p$ будет обозначаться подалгебра в $\mathfrak{A}^p$, состоящая из операторов $A = (a_{ij})$, таких, что $a_{ij} \in \mathfrak{A}_0$.

9. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}_0$ — подалгебра $\mathfrak{A}$, содержащая все свои обратные элементы. Тогда $\mathfrak{A}_0^p$ также обладает этим свойством.*

Доказательство. Если оператор A из $\mathfrak{A}_0^p$ имеет обратный в $B(\mathfrak{H}^p)$, то в силу следствия 9.6 A^{-1} принадлежит $\mathfrak{A}^p$ и определитель $\delta = \det(a_{ij})$ имеет обратный в $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}_0$ содержит все свои обратные элементы, δ^{-1} лежит в $\mathfrak{A}_0$. Согласно построению определителя матрицы операторов, $\hat{\delta}(s) = \det(\hat{a}_{ij}(s))$ — факт, уже доказанный в (9.19), и поэтому если A_{ij} — алгебраическое дополнение a_{ij}, то $\hat{A}_{ij}(s)$ — алгебраическое дополнение $\hat{a}_{ij}(s)$ как элемента $\hat{A}(s) = (\hat{a}_{ij}(s))$. Эти элементарные замечания показывают, что к матрицам из $\mathfrak{A}^p$ применимо правило Крамера, т. е. $A^{-1} = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \delta^{-1} A_{ij}$. Тем самым доказано, что A^{-1} лежит в $\mathfrak{A}_0^p$, ч. т. д.

10. Следствие. *Пусть оператор A из $\mathfrak{A}^p$ имеет обратный в $B(\mathfrak{H}^p)$. Если A — оператор типа $L_1 \cap L_q$ при некотором q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, или типа $L_1 \cap C^{(k)}$ при некотором k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, то обратный оператор A^{-1} имеет тот же тип.*

П. Леви обобщил результат Винера, показав, что для любого оператора a из $\mathfrak{A}_1$ и функции φ, аналитической на спектре $\sigma(a)$, оператор $\varphi(a)$ также принадлежит $\mathfrak{A}_1$ и $\widehat{\varphi(a)}(s)=\varphi(\hat{a}(s))$ для любого s из $\mathfrak{S}$. Теорема Винера соответствует случаю $\varphi(\xi)=\xi^{-1}$. Следующий результат обобщает теорему Леви на различные подалгебры $\mathfrak{A}_0^p$ в $\mathfrak{A}_1^p$.

11. Следствие. *Пусть φ — комплексная функция, аналитическая на спектре оператора A из $\mathfrak{A}^p$. Тогда*

$$\widehat{\varphi(A)}(s)=\varphi(\hat{A}(s)) \tag{13}$$

для почти всех s из $\mathfrak{S}$. Если A — оператор типа $L_1 \cap L_q$ при некотором q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, или типа $L_1 \cap C^{(k)}$ при некотором неотрицательном целом k или $k=\infty$, то $\varphi(A)$ имеет тот же тип и соотношение (13) *выполняется для всех s из $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Первое утверждение уже было доказано в соотношении (11.64). Пусть $\mathfrak{X}$ есть B-пространство функций на R^N (или классов эквивалентности таких функций) и $L_0=L_1 \cap \mathfrak{X}$. Предположим, что

(14) если последовательность $\{f_n\}$ из L_0 сходится в L_1 к элементу f, а в $\mathfrak{X}$ — к элементу g, то $f=g$;

предположим также, что

$$L_0 * L_0 \subseteq L_0. \tag{15}$$

В силу (14) линейное множество L_0 является B-пространством с нормой

$$|f|_0=|f|_1+\|f\|, \quad f \in L_0, \tag{16}$$

где $\|f\|$ — норма в $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{A}_0$ состоит из всех операторов в $\mathfrak{H}$ вида

$$a=\alpha e+\mathfrak{f}, \quad f \in L_0. \tag{17}$$

По теореме 1 оператор a однозначно определяет α и f, так что можно задать норму в $\mathfrak{A}_0$ соотношением

$$|a|_0=|\alpha|+|f|_0, \quad a \in \mathfrak{A}_0. \tag{18}$$

Очевидно, что $\mathfrak{A}_0$ с этой нормой является B-пространством. Это также алгебра, поскольку произведение двух операторов $a=\alpha e+\mathfrak{f}$ и $b=\beta e+\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{A}_0$ равно

$$ab=\alpha\beta e+\alpha\mathfrak{g}+\beta\mathfrak{f}+\mathfrak{h}, \tag{19}$$

где $h=f*g$ — элемент L_0 в силу (15). Заметим, что при фиксированном a из $\mathfrak{A}_0$ произведение ab является непрерывной функцией от b из $\mathfrak{A}_0$. Для проверки этого достаточно в силу (19) показать, что отображение $g \to f*g$ является непрерывным отображением L_0

в себя. Этот факт непосредственно вытекает из теоремы о замкнутом графике (II.2.4); в самом деле, если $g_n \to g$ и $f * g_n \to k$ в L_0, то $f * g_n \to f * g$ в L_1 и потому $k = f * g$. Таким образом, умножение в $\mathfrak{A}_0$ непрерывно по каждому из сомножителей и единица e имеет норму $| e |_0 = 1$. Элементарная процедура, рассмотренная в § IX.1, показывает, что $\mathfrak{A}_0$ можно перенормировать с помощью нормы $\| a \|_0$ так, что $\mathfrak{A}_0$ станет B-алгеброй с $\| a \|_0 \leqslant M \, | a |_0 \leqslant K \, \| a \|_0$ при некоторых положительных M и K. Этим показано, что $\mathfrak{A}_0$ метрически и алгебраически эквивалентна B-алгебре.

Пусть $\mathfrak{X}$ — одно из B-пространств L_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, или $C^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Тогда очевидно, что условия (14) и (15) выполнены. Если A — оператор типа L_0, то, в силу следствия 10, $R(\lambda; A)$ при любом λ из резольвентного множества оператора A также является оператором типа L_0 и принадлежит $\mathfrak{A}_0^p$. В силу замечаний, сделанных в § IX.1, ясно, что $\mathfrak{A}_0^p$ является B-алгеброй с такой нормой, что сходимость последовательности $A^{(n)} = (a_{ij}^{(n)})$ эквивалентна сходимости в L_0 элементов $a_{ij}^{(n)}$ при всех $i, j = 1, \ldots, p$. Таким образом, лемма IX.1.5 показывает, что $R(\lambda; A)$ является непрерывной (даже аналитической) функцией от λ со значениями в нормированной B-алгебре $\mathfrak{A}_0^p$. Следовательно, римановский интеграл (11.63), определяющий оператор $\varphi(A)$ через $\varphi(\lambda)$ и $R(\lambda; A)$, также принадлежит $\mathfrak{A}_0^p$. Из теоремы 1 вытекает, что функции $\widehat{\varphi(A)}(s)$ и $\hat{A}(s)$ непрерывны по s, и потому (13) выполнено при всех s из $\mathfrak{S}$. Наконец, если A — оператор типа $L_1 \cap C^{(\infty)}$, то поскольку уже доказано, что $\varphi(A)$ — оператор типа $L_1 \cap C^{(k)}$ при любом натуральном $k < \infty$, $\varphi(A)$ также является оператором типа $L_1 \cap C^{(\infty)}$, ч. т. д.

Мы закончим этот параграф, описав очень бегло интересное применение результата Винера — Леви, данное М. Г. Крейном, к решению неоднородного интегрального уравнения типа Винера — Хопфа. Крейн провел полное и общее исследование этого уравнения, которое является весьма важным в физике и астрофизике в связи с задачами переноса энергии излучения. Совместно И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн провели аналогичное исследование систем таких уравнений. Уравнением Винера — Хопфа называется уравнение

$$x(s) + \int_0^\infty f(s-t)\, x(t)\, dt = y(s), \qquad 0 \leqslant s < \infty, \tag{20}$$

где s и t — вещественные переменные. Здесь f и y — заданные функции, а x надо найти.

Рассмотрим случай, когда $s = [s_1, \ldots, s_N]$ и $t = [t_1, \ldots, t_N]$ — точки N-мерного евклидова пространства R^N. Для решения этого уравнения сделаем, следуя Крейну, несколько упрощений по сравнению с оригинальной работой Винера и Хопфа при особых предположениях. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ — вещественные числа, и пусть

(21)
$$\mathfrak{S}_+ = \{s \mid s \in R^N,\ \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_N s_N \geqslant 0\},$$
$$\mathfrak{S}_- = \{s \mid s \in R^N,\ \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_N s_N < 0\};$$

рассмотрим уравнение

(22)
$$\alpha x(s) = \int_{\mathfrak{S}_+} f(s-t)\, x(t) = y(s), \qquad s \in \mathfrak{S}_+,$$

где α — фиксированное комплексное число. Предположим, что f принадлежит L_1 и что оператор a из $\mathfrak{A}_1$, определяемый соотношением

(23)
$$a = \alpha e + \mathfrak{f},$$

обладает следующим свойством:

(24) точки 0 и ∞ комплексной плоскости принадлежат одной и той же связной компоненте резольвентного множества оператора a.

В этом предположении покажем, что для любой функции y из $L_2(\mathfrak{S}_+)$ существует одна и только одна функция x из $L_2(\mathfrak{S}_+)$, удовлетворяющая уравнению (22) для почти всех s из $\mathfrak{S}_+$. Если $f \in L_1 \cup \cup L_2$, то положим $f_\pm = P_\pm f$, где $P_\pm$ — проекторы, определяемые соотношениями

(25)
$$(P_+ f)(s) = \begin{cases} f(s), & s \in \mathfrak{S}_+, \\ 0, & s \in \mathfrak{S}_-, \end{cases}$$

и $P_- f = f - f_+$. Положим $L_\pm = P_\pm L_1$ и $\mathfrak{H}_\pm = P_\pm \mathfrak{H}$, так что $L_2(\mathfrak{S}_+)$ можно отождествить с $\mathfrak{H}_+$. Легко видеть, что

(26)
$$L_\pm * L_\pm \subseteq L_\pm, \qquad L_\pm * \mathfrak{H}_\pm \subseteq \mathfrak{H}_\pm;$$

действительно, если f и g лежат в L_+, то для всех s из $\mathfrak{S}_-$

$$(f * g)(s) = \int_{\mathfrak{S}_+} f(s-t)\, g(t)\, dt = 0,$$

поскольку $s - t$ принадлежит $\mathfrak{S}_-$ при любом t из $\mathfrak{S}_+$. Это показывает, что $L_+ * L_+ \subseteq L_+$; из соображений непрерывности вытекает, что $L_+ * \mathfrak{H}_+ \subseteq \mathfrak{H}_+$. Остальные включения в (26) доказываются аналогично.

Чтобы избежать путаницы в обозначениях, мы в ближайших рассмотрениях будем иногда обозначать через $\zeta(f)$ оператор свертки $\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{A}_1$, соответствующий функции f из L_1. Имеется весьма важное простое разложение операторов из $\zeta(L_1)$; оно строится следующим образом. Оператор $\zeta(f)$ из $\zeta(L_1)$ по теореме 1 однозначно определяет функцию f из L_1, а потому операторы $\zeta(f_+)$ и $\zeta(f_-)$ однозначно определяются оператором $\zeta(f)$; они обладают следующими свойствами:

$$\zeta(f)=\zeta(f_+)+\zeta(f_-), \quad \zeta(f_+)\zeta(f_-)=\zeta(f_-)\zeta(f_+) \tag{27}$$

и

$$\zeta(f_\pm)\mathfrak{H}_\pm \subseteq \mathfrak{H}_\pm. \tag{28}$$

Первое равенство в (27) вытекает из определений операторов $\zeta(f_\pm)$, а второе — из того, что они принадлежат коммутативной алгебре $\mathfrak{A}_1$; включение (28) следует из соотношений (26).

С каждым оператором a из $\mathfrak{A}_1$ при помощи соотношения

$$a_+x = P_+ax, \quad x \in \mathfrak{H}_+, \tag{29}$$

мы связываем оператор a_+ в алгебре $B(\mathfrak{H}_+)$ ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}_+$. Покажем, что оператор a_+ имеет ограниченный всюду определенный обратный оператор в $\mathfrak{H}_+$, т. е. a_+^{-1} существует как элемент из $B(\mathfrak{H}_+)$. В предположении (24) ветвь натурального логарифма $\ln\lambda$, такая, что $\ln 1 = 0$, является однозначной и аналитической функцией в окрестности спектра a. Таким образом, в силу следствия 11 оператор $b = -\ln a = \ln a^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{A}_1$ и, следовательно, имеет вид $b = \beta e + \zeta(g)$ при некотором g из L_1. Применяя разложение (27) к оператору $\zeta(g)$, мы получаем факторизацию a^{-1}:

$$a^{-1}=e^b=e^{\beta}e^{\zeta(g_+)}e^{\zeta(g_-)}, \tag{30}$$

и из соотношений (28) вытекает, что

$$e^{\zeta(g_\pm)}\mathfrak{H}_\pm \subseteq \mathfrak{H}_\pm, \quad e^{-\zeta(g_\pm)} \subseteq \mathfrak{H}_\pm. \tag{31}$$

Предположим теперь, что векторы x и y из $\mathfrak{H}_+$ удовлетворяют уравнению (32), т. е.

$$y=a_+x, \tag{32}$$

и перепишем это уравнение в виде

$$y=ax-P_-ax. \tag{33}$$

Соотношения (30) и (33) дают

$$e^{\zeta(g_-)}y=e^{-\beta}e^{-\zeta(g_+)}x-e^{\zeta(g_-)}P_-ax. \tag{34}$$

Так как x лежит в $\mathfrak{H}_+$, а P_-ax принадлежит $\mathfrak{H}_-$, то в силу (31) и (34) мы имеем

$$P_+e^{\zeta(g_-)}y=e^{-\beta}e^{-\zeta(g_+)}x, \tag{35}$$

$$x=e^{\beta}e^{\zeta(g_+)}P_+e^{\zeta(g_-)}y. \tag{36}$$

Этим показано, что вектор x из $\mathfrak{H}_+$ однозначно определяется вектором y. Другими словами, оператор a_+ взаимно однозначен в $\mathfrak{H}_+$. Пусть теперь y — произвольный вектор из $\mathfrak{H}_+$; определим вектор x соотношением (36). Тогда в силу (31) вектор x принадлежит $\mathfrak{H}_+$ и выполнено равенство (35). Это означает, что для некоторого вектора z из $\mathfrak{H}_-$ мы имеем

$$e^{\zeta(g_-)}y = e^{-\beta}e^{-\zeta(g_+)}x + z$$

и, используя (30), получаем

$$y = ax + e^{-\zeta(g_-)}z.$$

Второе включение в (31) показывает, что последнее слагаемое в этом равенстве принадлежит $\mathfrak{H}_-$. Таким образом, $P_+y = P_+ax = a_+x$, и так как y лежит в $\mathfrak{H}_+$, то $y = P_+y = a_+x$. Этим доказано, что a_+^{-1} существует как всюду определенный оператор в $\mathfrak{H}_+$, а соотношение (36) приводит к формуле

$$(a_+)^{-1} = e^{\beta}e^{\zeta(g_+)}P_+e^{\zeta(g_-)}, \tag{37}$$

где β и g определяются равенством $\beta e + \zeta(g) = -\ln a$.

Суммируя все сказанное, можно сформулировать следующую теорему:

12. Теорема. *Пусть оператор* $a = \alpha e + \mathfrak{f}$ *из* $\mathfrak{A}_1$ *обладает свойством* (24). *Тогда для любого* y *из* $L_2(\mathfrak{S}_+)$ *существует одна и только одна функция* x *из* $L_2(\mathfrak{S}_+)$, *удовлетворяющая уравнению* (22) *для почти всех* s *из* $\mathfrak{S}_+$. *Это единственное решение* x *задается равенством* (36).

14. Упражнения

1. Привести пример спектрального оператора T, такого, что он не является слабо компактным, но его скалярная часть S — компактный оператор.

2. Привести пример такого спектрального оператора T, что $\sigma_p(S) = \sigma_r(T) = \sigma(T)$.

3. Привести пример такого спектрального оператора T, что $\sigma_p(S) = \sigma_c(T) = \sigma(T)$.

4. Привести пример такого спектрального оператора T, что S и T имеют замкнутые области значений, а N — нет.

5. Привести пример такого спектрального оператора T, что S имеет замкнутую область значений, а T — нет.

6. Показать, что оператор $g = Tf$ в $C[0, 1]$, определяемый соотношением

$$g(s) = f(s) + \int_0^s K(s, t) f(t)\, dt,$$

где K — ограниченная измеримая функция на квадрате $[0, 1] \times \times [0, 1]$, является спектральным оператором.

7. Любой скалярный оператор S можно представить в виде суммы $S = S_1 + iS_2$, где S_1 и S_2 — коммутирующие скалярные операторы с вещественными спектрами. Более того, булева алгебра проекторов, порожденная разложениями единицы операторов S_1 и S_2, ограничена.

8. Пусть T — спектральный оператор. Существуют два оператора R и J, такие, что

(i) $T = R + iJ, \quad RJ = JR$.

(ii) Множества $\sigma(R)$ и $\sigma(J)$ вещественны.

(iii) Оператор R скалярный, а J спектральный.

(iv) Булева алгебра проекторов, порожденная разложениями единицы для операторов R и J, ограничена.

9. Если T — спектральный оператор, а R_1 и J_1 — операторы, удовлетворяющие условиям (i) и (ii) предыдущего упражнения, то $R_1 = R + M$ и $J_1 = J + iM$, где M — обобщенный нильпотентный оператор. Доказать, таким образом, что условия (i), (ii) и (iii) упражнения 8 обеспечивают единственность операторов R и J.

10. Всякий скалярный оператор S является произведением двух коммутирующих скалярных операторов S_1 и S_2, таких, что S_1 имеет неотрицательный спектр, а $\sigma(S_2)$ — подмножество единичной окружности. Более того, булева алгебра проекторов, порожденная разложениями единицы для S_1 и S_2, ограничена.

11. Для каждого спектрального оператора T существуют два оператора P и U, такие, что

(i) $T = PU = UP$.

(ii) Спектр $\sigma(P)$ есть множество неотрицательных чисел, а $\sigma(U)$ — подмножество единичной окружности.

(iii) Оператор U скалярный, а P спектральный.

(iv) Булева алгебра проекторов, порожденная разложениями единицы для P и U, ограничена.

12. Пусть операторы P_1 и U_1 удовлетворяют условиям (i) и (ii) предыдущего упражнения. Тогда существуют обобщенные нильпотентные операторы N_1 и N_2, коммутирующие с T и такие, что

$$U_1 = U + N_1, \qquad P_1 = P + N_2,$$

$$N_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-N_1 U^{-1})^{n+1} P.$$

13. Если для некоторой точки λ из спектра спектрального оператора T в $\mathfrak{X}$ многообразие $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ замкнуто, то λ принадлежит точечному спектру оператора T.

14. Пусть T — оператор (не обязательно спектральный) в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$ и T^* — его сопряженный. Пусть $\sigma(x^*)$ — спектр элемента x^* в $\mathfrak{X}^*$ относительно оператора T^*. Если для элементов x из $\mathfrak{X}$ и x^* из $\mathfrak{X}^*$ их спектры $\sigma(x)$ и $\sigma(x^*)$ не пересекаются, то $x^*Sx = 0$ для любого ограниченного линейного оператора S в $\mathfrak{X}$, коммутирующего с T.

15. Пусть T — спектральный оператор со спектральным разложением E. Пусть δ — непустое подмножество спектра $\sigma(T)$ оператора T, открытое в относительной топологии $\sigma(T)$. Тогда $E(\delta) \neq 0$.

16. Пусть f — ограниченная борелевская функция, заданная на спектре скалярного оператора S. Оператор $f(S) = \int\limits_{\sigma(s)} f(\lambda)\, E(d\lambda)$ имеет ограниченный всюду определенный обратный тогда и только тогда, когда для некоторого борелевского множества δ, такого, что $E(\delta) = I$, выполнено условие

$$\sup_{\lambda\in\delta} \frac{1}{|f(\lambda)|} < \infty.$$

17. Для компактного спектрального оператора вывести свойства, описанные в теореме VII.4.5, непосредственно из теории § XV.7, не прибегая к теории § VII.4.

18. (Макгарвей.) Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, Σ — поле множеств и $E(\cdot)$ — функция на Σ, принимающая значения в множестве всех проекторов, заданных на всем $\mathfrak{X}$. Предположим, что для любых σ и δ из Σ проекторы $E(\sigma)$ и $E(\delta)$ коммутируют, и если σ и δ не пересекаются, то $E(\delta \cup \sigma) = E(\delta) + E(\sigma)$. Тогда для любых δ и σ из Σ

$$F(\delta \cap \sigma) = E(\delta)\, E(\sigma), \qquad E(\delta \cup \sigma) = E(\delta) \cup E(\sigma).$$

19. Пусть A — оператор из $\mathfrak{A}^p$, а s — точка из $\mathfrak{S}$. Показать, что скалярная часть матрицы $\hat{A}(s)$ равна

$$\hat{S}(s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} \hat{\lambda}_{ij}(s)\, E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\ \hat{A}(s)).$$

[Указание: воспользоваться теоремами VII.1.7 и VII.1.8.] Исходя из этого результата, не обращаясь к теореме 10.6, доказать, что A является спектральным оператором тогда и только тогда, когда

$$e\text{-ess}\sup_{s\in\mathfrak{S}_i} |E(\hat{\lambda}_{ij}(s);\ \hat{A}(s))| < \infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant p.$$

20. Пусть $\{A^{(m)}\}$ — последовательность операторов из $\mathfrak{A}^p$, для которой предел

$$\text{(i)} \qquad a_{ij}(s) = \lim_{m} a_{ij}^{(m)}(s)$$

существует для e-почти всех s из $\mathfrak{S}$. При этом $A^{(m)}$ сходится сильно к оператору $A=(a_{ij})$ тогда и только тогда, когда при некотором K выполнено условие

$$\text{(ii)} \qquad e\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{s\in\mathfrak{S}} |a_{ij}^{(m)}(s)| \leqslant K, \quad 1\leqslant j\leqslant i\leqslant p, \quad 1\leqslant m<\infty.$$

21. Пусть p — многочлен с комплексными коэффициентами, не равный тождественно нулю. Показать, что определенное соотношением (12.4) замкнутое расширение A формального дифференциального оператора

$$\begin{pmatrix} 2p\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) & ip\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) \\ ip\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

является спектральным оператором, но не оператором скалярного типа. Показать, что $\sigma(A) = p(iR^N)$.

22. Пусть α и β — положительные числа и A — определенное соотношением (12.4) замкнутое расширение формального дифференциального оператора (12.4) в гильбертовом пространстве $L_2(R^N) \oplus \oplus L_2(R^N)$. Показать, что спектр оператора A описывается соотношением (12.7).

Несколько дальнейших результатов принадлежат Ф. Вульфу; в них используются обозначения, введенные в следующем определении:

23. Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, F — ограниченная счетно аддитивная функция множества, принимающая значения в $B(\mathfrak{X})$, и $\mathfrak{A}_1^k$ — множество всех операторов в $\mathfrak{X}$, спектр которых лежит на единичной окружности, причем для любой функции f, аналитической в окрестности единичной окружности, оператор $f(A)$ имеет вид

$$\text{(i)} \qquad f(A)=\sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(1)A^j+\int_0^{2\pi} \frac{d^k}{d\theta^k} f(e^{i\theta})F(d\theta).$$

Пусть $\mathfrak{A}_2^k$ состоит из всех операторов A из $B(\mathfrak{X})$, спектр которых лежит на единичной окружности и таких, что

$$\text{(ii)} \qquad |f(A)|\leqslant M\sum_{j=0}^{k} \sup_{\theta} |f^{(j)}(e^{i\theta})|$$

для любой функции f, аналитической в окрестности единичной окружности. Пусть $\mathfrak{A}_3^k$ — множество операторов A из $B(\mathfrak{X})$, удовлетворяющих неравенствам

$$\text{(iii)} \qquad |A^n|\leqslant M|n|^k, \quad n=\pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а $\mathfrak{A}_4^k$ — множество операторов A из $B(\mathfrak{X})$, для которых

$$|R(\lambda;\ A)| \leqslant \frac{M}{|1-|\lambda|^k|}, \qquad |\lambda| \neq 1.$$

24. Показать, что $\mathfrak{A}_1^k \subseteq \mathfrak{A}_2^k$.
25. Если $\mathfrak{X}$ слабо полно, то $\mathfrak{A}_2^k \subseteq \mathfrak{A}_1^k$.
26. Доказать, что $\mathfrak{A}_2^k \subseteq \mathfrak{A}_3^k$ и что $\mathfrak{A}_2^k \subseteq \mathfrak{A}_4^k$.
27. Доказать, что $\mathfrak{A}_3^k \subseteq \mathfrak{A}_4^{k+1}$.
28. Показать, что $\mathfrak{A}_4^k \subseteq \mathfrak{A}_3^k$.

29. Пусть функция $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ аналитична в окрестности единичной окружности. Тогда

$$\int_0^{2\pi} |f^{(k+1)}(e^{i\theta})|^2\, d\theta = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n n(n-1)\ \ldots\ (n-k)|^2$$

и

$$\left\{\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)|\right\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n n(n-1)\ \ldots\ (n-k)|^2\right)\left(\sum_{n\neq k} \frac{1}{|n-k|^2}\right).$$

Следовательно, доказать, что

$$\sup_{|z|=1} |f^{(k+1)}(z)| \geqslant M \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1)|.$$

30. Если A принадлежит $\mathfrak{A}_3^k$, то

$$\sup_{|z|=1} |f^{(k+1)}(z)| \geqslant M\, |f(A)|,$$

а потому $\mathfrak{A}_3^k \subseteq \mathfrak{A}_2^{k+1}$.

31. Если пространство $\mathfrak{X}$ слабо полно, то

$$\mathfrak{A}_1^k = \mathfrak{A}_2^k \subseteq \mathfrak{A}_4^k \subseteq \mathfrak{A}_3^k \begin{cases} \subseteq \mathfrak{A}_4^{k+1}, \\ \subseteq \mathfrak{A}_2^{k+1} = \mathfrak{A}_1^{k+1}. \end{cases}$$

32. Пусть $\mathfrak{X} = L_1(-\infty,\ \infty)$ и A — отображение в $\mathfrak{X}$, переводящее $f(t)$ в $f(t+s)$, где $s \neq 0$ — фиксированная постоянная. Доказать, что 1 лежит в остаточном спектре A и что A не является спектральным оператором.

33. Пусть оператор A задан в B-пространстве $C[0,\ 1]$ соотношением

$$A:\ f(t) \to tf(t).$$

Тогда алгебра, порожденная оператором A и тождественным оператором, эквивалентна алгебре непрерывных функций на $[0, 1]$, но A не является скалярным оператором. Следовательно, теорема XVII.2.5 неверна, если пространство $\mathfrak{X}$ не предполагается слабо полным.

34. Пусть Ω обозначает единичный круг в комплексной плоскости, а μ — меру Лебега на Ω, нормированную так, что $\mu(\Omega) = 1$. Если $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и S — оператор в $L_p(\Omega)$, заданный соотношением

$$(Sf)(t) = tf(t), \quad t \in \Omega,$$

то S — спектральный оператор скалярного типа с $E(\sigma) f = \chi_\sigma f$, $\sigma(S) = \Omega$ и

$$R(\lambda; S) f(t) = \frac{1}{\lambda - t} f(t).$$

35. Пусть $T \in B(\mathfrak{X})$ и E — спектральная мера на борелевских множествах комплексной плоскости, коммутирующая с T. Показать следующее: для доказательства того, что E является разложением единицы для T, достаточно доказать включение $\sigma(T_c) \subseteq c$ для любого замкнутого множества c.

36. Пусть $\mathfrak{X}$ — одно из B-пространств c_0, l_1 или l_∞ и оператор T определяется соотношением

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = \left(\frac{1}{1}\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \ldots\right).$$

Показать, что в каждом из этих пространств оператор T компактен. Вычислить спектр $\sigma(T)$ и резольвенту $R(\lambda; T)$. Показать, что T является спектральным оператором в c_0 и в l_1, и построить разложение единицы для T. Показать, что T не является спектральным оператором в l_∞. [Следовательно, сопряженный к компактному спектральному оператору не обязательно является спектральным оператором.]

37. Пусть S — оператор правого сдвига в l_1, т. е.

$$S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Показать, что $\sigma(S) = \sigma_r(S) = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. Доказать, что если $x \neq 0$, то $\sigma(x) = \sigma(S)$.

38. Пусть l_1 есть B-пространство всех абсолютно сходящихся комплексных последовательностей $x = (\xi_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и L — оператор левого сдвига

$$L(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

Показать, что $\sigma(L) = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ и даже $\sigma_p(L) = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$, $\sigma_c(L) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$. Вычислить максимальное распространение $R(\lambda; L) x_m$, когда $x_m = (\delta_{mn})$.

39. Пусть $\mathfrak{X}$ есть B-пространство всех ограниченных комплексных последовательностей $x = \{\xi_n \mid -\infty < n < +\infty\}$ и S — оператор правого сдвига, т. е. n-я координата вектора Sx равна $(n-1)$-й координате вектора x. Показать, что $\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$. Пусть x_1 — последовательность с координатами $\xi_1 = 1$ и $\xi_n = 0$, если $n \neq 1$; построить $R(\lambda; S)\, x_1$ и показать, что $\sigma(x_1) = \sigma(S)$.

40. (Сафферн.) Пусть оператор $A \in B(\mathfrak{X})$ обладает свойством однозначного распространения и $B = SAS^{-1}$, где S — регулярный оператор. Показать, что B обладает свойством однозначного распространения и что для вектора $x \in \mathfrak{X}$

$$\sigma_A(x) = \sigma_B(Sx), \qquad S\,[x_A(\lambda)] = (Sx)_B(\lambda).$$

41. Пусть $\mathscr{B}$ — ограниченная булева алгебра проекторов в $B(\mathfrak{X})$ и $\|x\|$ обозначает величину $\|x\| = \sup\{|Ex| \mid E \in \mathscr{B}\}$. Показать, что $\|x\|$ — норма в $\mathfrak{X}$, эквивалентная исходной норме, т. е. $|x| \leqslant \|x\| \leqslant K\,|x|$. Если $E \in \mathscr{B}$ и $E \neq 0$, то $\|E\| = 1$, и если $x \in E\mathfrak{X}$ и $y \in F\mathfrak{X}$, причем $EF = 0$, то x и y взаимно ортогональны в том смысле, что

$$\|x\| \leqslant \|x + ty\|, \qquad \|y\| \leqslant \|y + tx\|$$

для всех чисел t.

42. Пусть E — ограниченная булева алгебра проекторов в $B(\mathfrak{X})$ и

$$v(E, x, x^*) = \sup \sum |x^* E_j x|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным множествам $\{E_j\}$, взаимно не пересекающимся в том смысле, что $E_j E_k = 0$, $j \neq k$. Показать, что существует постоянная K, такая, что

$$v(E, x, x^*) \leqslant K\,|x|\,|x^*|.$$

[Указание: просмотреть доказательство леммы III.1.5.]

43. (Берксон.) Пусть E — ограниченная булева алгебра проекторов в $B(\mathfrak{X})$, и величина $\|x\|_E$ определяется соотношением

$$\|x\|_E = \sup\{v(E, x, x^*) \mid |x^*| = 1, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*\}.$$

Показать, что $\|x\|_E$ — норма в $\mathfrak{X}$ и $|x| \leqslant \|x\|_E \leqslant K|x|$.

44. (Берксон.) С нормой, введенной в предыдущем упражнении, каждый проектор E_j удовлетворяет соотношению

$$\|I + itE_j\|_E = |1 + it| = \sqrt{1 + t^2}$$

при всех вещественных t. [Указание: если $\{F_k\}$ — взаимно не пересекающиеся множества элементов из E, то множества $\{F_k E_j, F_k(I - E_j)\}$ не пересекаются.]

45. Используя результат предыдущего упражнения, доказать, что $\| E_j \|_E = 1$ и что если $E_j E_k = 0$ и $x = E_j x$, $y = E_k y$, то x и y взаимно ортогональны в следующем смысле:

$$\| x \|_E \leqslant \| x + ty \|_E, \qquad \| y \|_E \leqslant \| x + t y \|_E$$

для всех вещественных t.

46. (Фиксман.) Пусть T — спектральный оператор в $\mathfrak{X}$ с разложением единицы E. Предположим, что $\mathfrak{H}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{X}$, инвариантное относительно $E(\sigma)$ для любого борелевского множества σ. При этом $\mathfrak{H}$ инвариантно относительно T тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно $R(\lambda; T)$ при любом $\lambda \in \rho(T)$.

47. Пусть U — оператор правого сдвига в $\mathfrak{X} = l_2(-\infty, \infty)$, так что U — унитарный оператор. Пусть $\mathfrak{H}$ обозначает те элементы (ξ_n) из $\mathfrak{X}$, для которых $\xi_n = 0$, если $n \leqslant 0$. Показать, что $\mathfrak{H}$ инвариантно относительно U, но не инвариантно относительно $R(\lambda; U)$, $|\lambda| < 1$, и, следовательно, $\mathfrak{H}$ не инвариантно относительно $E(\sigma)$ для любого борелевского множества σ.

48. Пусть Ω — компактное хаусдорфово пространство и S — спектральный скалярный оператор в $C(\Omega)$. Показать, что S слабо компактен тогда и только тогда, когда он компактен. [Тот же результат верен и для оператора S в L_1 над пространством с положительной мерой.]

49. (Маккарти.) Пусть E — спектральная мера и μ — положительная мера, заданная на борелевском поле Σ множества S комплексных чисел. Предположим, что существует постоянная M, такая, что $|E(\sigma)| \leqslant M\mu(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Пусть $x_0 \in \mathfrak{X}$, $x_0^* \in \mathfrak{X}^*$, а ψ — ограниченная измеримая функция. Определим отображения Φ: $L_1(S, \Sigma, \mu) \to \mathfrak{X}^*$ и Ψ: $L_\infty(S, \Sigma, \mu) \to \mathfrak{X}$, полагая

$$\Phi(f) = \int_S f(s) E^*(ds) x_0^*, \quad f \in L_1,$$

$$\Psi(h) = \int_S h(s) \psi(s) E(ds) x_0, \quad h \in L_\infty.$$

Показать, что Φ и Ψ являются ограниченными линейными операторами и

$$\Phi(f) \Psi(h) = \int_S f(s) h(s) \psi(s) x_0^* E(ds) x_0.$$

50. (Маккарти.) В условиях предыдущего упражнения пусть x_0, x_0^* и σ_0 выбраны так, что $x_0^* E(\sigma_0) x_0 \neq 0$, и пусть g — производная Радона — Никодима функции множества $x_0^* E(\cdot) x_0$ относительно μ. Существует подмножество σ_1 в σ_0, на котором g отделена от нуля; положим $\varphi = 1/g$ на σ_1. Пусть Φ и Ψ — операторы, определенные в пространствах $L_1(\sigma_1, \mu)$ и $L_\infty(\sigma_1, \mu)$ так же, как в предыдущем

упражнении; показать, что Ψ осуществляет взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны отображение несепарабельного пространства $L_\infty(\sigma_1, \mu)$ на замкнутое сепарабельное подпространство $\overline{\mathrm{sp}}\{E(\sigma)x_0 \mid \sigma \in \Sigma\}$ в $\mathfrak{X}$. Это противоречие показывает, что спектральная мера не может удовлетворять условию Липшица.

51. (Маккарти.) Пусть Ω и μ — те же, что и в предыдущем упражнении, а $\mathfrak{X}$ — прямая сумма

$$\mathfrak{X} = L_\infty(\Omega) \oplus L_2(\Omega) \oplus L_1(\Omega).$$

Пусть операторы S и N определены в $\mathfrak{X}$ соотношениями

$$S(f(t), g(t), h(t)) = (tf(t), tg(t), th(t)), \quad t \in \Omega,$$
$$N(f, g, h) = (0, f, g).$$

Показать, что S — спектральный оператор скалярного типа и что $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$. Показать, что спектральный оператор $T = S + N$ удовлетворяет условию роста первого порядка

$$|R(\lambda; T_\sigma)E(\sigma)| \leqslant K/\delta,$$

где $\delta = \operatorname{dist}(\lambda, \bar{\sigma})$. [Указание: показать, что если $p \geqslant 1$, то

$$\int_\sigma |\lambda - \xi|^{-(p+2)} \mu(d\xi) \leqslant \int_{|\lambda - \xi| \geqslant \delta} |\lambda - \xi|^{-(p+2)} \mu(d\xi) \leqslant \left(\frac{2}{p}\right) \delta^{-p}.]$$

52. (Маккарти.) Взяв m экземпляров пространства $L_2(\Omega)$ в предыдущем упражнении, построить спектральный оператор T, удовлетворяющий условию роста m-го порядка и такой, что его радикальная часть N обладает свойством $N^{m+1} \neq 0$.

53. Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность различных ненулевых комплексных чисел, а $\{P_n\}$ — последовательность взаимно ортогональных ненулевых проекторов в $B(\mathfrak{X})$; предположим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n P_n|$$

сходится. Доказать, что $\lambda_n \to 0$, а ряд

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

сходится в равномерной топологии $B(\mathfrak{X})$. Показать, что $\sigma(B) = \{0, \lambda_1, \ldots,\}$ и

$$R(\lambda; B) = \frac{I}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda(\lambda - \lambda_n)} P_n,$$

причем ряд в правой части этого равенства сходится равномерно по λ на любом компактном подмножестве из $\rho(B)$. Кроме того, каждая из точек λ_n является простым полюсом резольвенты $R(\lambda; B)$, а вычет $R(\lambda; B)$ в точке λ_n равен P_n.

54. (Тейлор.) Пусть спектр оператора $A \in B(\mathfrak{X})$ состоит из точек последовательности $\{\lambda_n\}$, сходящейся к нулю, и резольвента $R(\lambda; A)$ имеет простые полюсы в точках λ_n с вычетом P_n; предположим, что ряд $\sum |\lambda_n P_n|$ сходится. Определим операторы

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n, \qquad C = A - B.$$

Поскольку $AP_n = \lambda_n P_n$, показать, что операторы A, B и C коммутируют и что $AB = B^2$, $BC = 0$. Доказать, что при достаточно больших λ

$$R(\lambda;\ A) = R(\lambda;\ B) \sum_{n=0}^{\infty} (CR(\lambda;\ B))^n = R(\lambda;\ B) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{\lambda^n}.$$

Используя тот факт, что разность $R(\lambda; A) - R(\lambda; B)$ аналитична при $\lambda \neq 0$, доказать, что C — квазинильпотентный оператор и что

$$R(\lambda;\ A) = R(\lambda;\ B) + R(\lambda;\ C) - \frac{I}{\lambda}.$$

55. (Маккарти.) Пусть T — спектральный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию роста $(*)$ из теоремы XV.6.7, а именно

$$(*) \qquad |R(\xi;\ T_\sigma)\, E(\sigma)| \leqslant \frac{K}{\operatorname{dist}(\xi, \bar{\sigma})^m},$$

если $\xi \notin \bar{\sigma}$, $|\xi| \leqslant |T| + 1$. Если k — натуральное число, то существует такая постоянная M_k, что для любых ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, и борелевского множества σ диаметра не более ε выполнено неравенство $|N^k E(\sigma)| \leqslant M_k \varepsilon^{k+1-m}$ (где N — радикальная часть оператора T).

56. (Маккарти.) Пусть T — спектральный оператор в комплексном B-пространстве, удовлетворяющий условию $(*)$ предыдущего упражнения. Пусть σ — борелевское подмножество, причем для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое его покрытие $\{\sigma_j\}$ непересекающимися множествами σ_j диаметра ε_j, что $\sum \varepsilon_j^p \leqslant \varepsilon$, где p — некоторое положительное число. Показать, что $N^k E(\sigma) = 0$, если $k \geqslant p + m - 1$. [Это условие выполнено, если множество σ имеет нулевую хаусдорфову p-меру.]

57. (Маккарти.) Пусть T — спектральный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию $(*)$ порядка m. Если N — радикальная часть T, то $N^{m+2} = 0$.

58. (Маккарти.) Пусть T — спектральный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условию $(*)$ порядка m; предположим, что спектр $\sigma(T)$ имеет плоскую меру нуль. Если N — радикальная часть T, то $N^{m+1} = 0$.

59. (Фогель, Фиксман.) Если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство, то элемент $U \in B(\mathfrak{X})$, изометрично отображающий $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{X}$, называется *унитарным оператором*. Доказать, что $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ и что

$$|R(\lambda;\ U)| \leqslant \frac{1}{|1|-|\lambda|}, \qquad |\lambda| \neq 1.$$

Если U — спектральный оператор, то он имеет скалярный тип.

60. (Бишоп.) Пусть $\mathscr{B}$— борелевские подмножества комплексной плоскости C и $T \in B(\mathfrak{X})$. Векторнозначная мера (см. § IV.10) m на $\mathscr{B}$ со значениями в $\mathfrak{X}$ называется *T-мерой*, если

$$Tm(e) = \int_e \lambda m(d\lambda), \qquad e \in \mathscr{B}.$$

Если $x = m(C)$, то мы говорим, что вектор x *имеет T-меру m*.

(a) Всякий собственный вектор оператора T имеет T-меру m.

(b) Если T — спектральный оператор скалярного типа, то каждый вектор из $\mathfrak{X}$ имеет T-меру.

(c) Если m есть T-мера и $y = m(e)$, то $R(\lambda;\ T)\,y$ имеет аналитическое распространение на все $\lambda \notin \bar{e}$.

(d) Если m есть T-мера, то $m(\sigma(T)) = m(C)$.

(e) Если m есть T-мера и $\lambda_0 \in e$, то

$$|(T - \lambda_0 I)\, m(e)| \leqslant \operatorname{diam}(e)\, \|m\|(e),$$

где символ $\|m\|(e)$ обозначает вариацию m на множестве e.

61. Пусть $T \in B(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{Y}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{X}$, инвариантное относительно T. Пусть σ — замкнутое подмножество в комплексной плоскости, имеющее связное дополнение; предположим, что $\mathfrak{Y} \subseteq \{x \in \mathfrak{X} \mid \sigma(x) \subseteq \sigma\}$. Доказать, что $\sigma(T \mid \mathfrak{Y}) \subseteq \sigma$. Показать, что это утверждение может быть неверным, если дополнение несвязно.

62. Для оператора A, определенного по формуле (21) из § 12, проверить соотношения (27), (28), $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = \sigma_c(A_{\mathfrak{S}})$ и

$$\hat{E}_{21}\mathfrak{H}^2 = \{(\zeta,\ -i\zeta),\ \zeta \in \mathfrak{H}\}, \quad \hat{E}_{22}\mathfrak{H}^2 = \{(\eta,\ i\eta),\ \eta \in \mathfrak{H}\}.$$

63. Пусть C — замкнутый определенный на всюду плотном множестве оператор в $\mathfrak{H}^p$; введем в $\mathfrak{D}(C)$ скалярное произведение и норму при помощи соотношений

$$(\varphi,\ \zeta)_1 = (\varphi,\ \zeta) + (C\varphi,\ C\zeta), \qquad \varphi,\ \zeta \in \mathfrak{D}(C),$$
$$|\varphi|_1 = \{(\varphi,\ \varphi)_1\}^{1/2}, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(C).$$

Показать, что $\mathfrak{D}(C)$ становится при этом полным гильбертовым пространством, а C является непрерывным отображением $\mathfrak{D}(C)$ в $\mathfrak{H}^p$.

64. Пусть μ — конечно аддитивная вещественная или комплекснозначная функция множества, заданная на поле множеств, содер-

жащем открытые множества в R^N. Предположим, что

$$\int_{R^N} \frac{v(\mu;\ ds)}{(1+|s|^2)^k} < \infty$$

при некотором положительном целом k. Доказать, что функция T, определенная соотношением

$$T(\varphi) = \int_{R^N} \varphi(s)\,\mu(ds), \qquad \varphi \in \Phi,$$

является медленно растущим распределением.

65. Пусть $A = (a_{jk})$ — формальный дифференциальный оператор (12.11) и его элементы имеют порядок не выше $2q$; предположим, что его естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ является спектральным оператором. Если

$$\operatorname*{ess\,sup}_{s\in R^N} \sup_{\hat\lambda(s)\in\sigma(\hat A(s))} |s|^{pq} e^{t\,\mathrm{Re}\,(\hat\lambda(s))} < \infty$$

при некотором вещественном t, то $A_{\mathfrak{S}} \exp(tA_{\mathfrak{S}})$ — ограниченный оператор.

66. Пусть q — положительное целое число, $(\nabla^2)^q = (\partial^2/\partial s_1^2 + \ldots \ldots + \partial^2/\partial s_N^2)^q$, $a_{jk} = a_{jk}(\partial/\partial s_1, \ldots, \partial/\partial s_N)$ — многочлены с постоянными коэффициентами, имеющие степень $\leqslant 2q$, если $j < k$, и $a_{jk} = 0$, если $j \geqslant k$. Пусть $A_{\mathfrak{S}}$ — естественное замкнутое расширение формального дифференциального оператора

$$A = \alpha^2 (\nabla^2)^q I + (a_{jk})$$

на Φ^p, где α^2 — положительное или отрицательное вещественное число. Доказать, что

(i) Естественное замкнутое расширение $A_{\mathfrak{S}}$ оператора A является спектральным оператором со спектром $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = (-\infty, 0]$, если $(-1)^q \alpha^2 < 0$, и $\sigma(A_{\mathfrak{S}}) = [0, \infty)$, если $(-1)^q \alpha^2 > 0$.

(ii) Оператор $A_{\mathfrak{S}}$ является инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы $T(t)$ (ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p = L_2(R^N) + \ldots + L_2(R^N)$) на $[0, \infty)$, если $(-1)^q \alpha^2 < 0$, и на $(-\infty, 0]$, если $(-1)^q \alpha^2 > 0$.

(iii) Полугруппа $T(t)$ имеет сильно аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, если $(-1)^q \alpha^2 < 0$, и в полуплоскость $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, если $(-1)^q \alpha^2 > 0$.

(iv) $\mathfrak{D}(A_{\mathfrak{S}}) = (p)\,T^{(2q)}(R^N)$.

67. Пусть $A_{\mathfrak{S}}$ и $T(t)$ — те же операторы, что и в предыдущем упражнении, и $(-1)^q \alpha^2 < 0$. Тогда для любого вектора $\varphi^{(0)}$ из $\mathfrak{H}^p$ существует одно и только одно непрерывное отображение $t \to \varphi(t)$ полупрямой $[0, \infty)$ в $\mathfrak{H}^p$, дифференцируемое при $t > 0$

и обладающее следующими свойствами:

(i) $\varphi(t) \in (p)\, T^{(2q)}(R^N), \qquad 0 < t < \infty;$

(ii) $\varphi'(t) = A_{\mathfrak{S}}\varphi(t), \qquad 0 < t < \infty;$

(iii) $\varphi(0) = \varphi^{(0)}.$

Эта единственная функция определяется равенством $\varphi(t) = T(t)\,\varphi^{(0)}$ и имеет аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

(iv) Производная $\varphi'(0)$ существует и $\varphi'(0) = A_{\mathfrak{S}}\varphi(0)$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{(0)} \in (p)\, T^{(2q)}(R^N)$.

(v) Пусть $\varphi_1(\lambda) = \varphi_1(s_1, \ldots, s_N;\ \lambda)$ — аналитическое продолжение функции $\varphi(t)$ при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$; тогда при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ каждая из p компонент $\varphi(t)$ как функция переменных $s = (s_1, \ldots, s_N)$ принадлежит $C^\infty(R^N)$ и все частные производные $\partial_s^\beta \varphi_1$ принадлежат пространству $\mathfrak{H}^p$.

Аналогичные утверждения имеют место и в случае, когда $(-1)^q \alpha^2 > 0$.

68. Пусть $A_{\mathfrak{S}}$ — оператор из предыдущего упражнения, а B — произвольный ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{H}^p$. Тогда

(i) Оператор $A_{\mathfrak{S}} + B$ с областью определения $(p)\, T^{(2q)}(R^N)$ является инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \geqslant 0$, ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$, и $S(t)$ имеет сильно аналитическое продолжение до полугруппы $S(\zeta)$, определенной для ζ из полуплоскости $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$.

Для всякого вектора $\varphi^{(0)}$ из $\mathfrak{H}^p$ существует одно и только одно непрерывное отображение $t \to \varphi(t)$ полупрямой $[0, \infty)$ в $\mathfrak{H}^p$, дифференцируемое при $t > 0$ и обладающее следующими свойствами:

(ii) $\varphi(t) \in (p)\, T^{(2q)}(R^N), \qquad 0 < t < \infty;$

(iii) $\varphi'(t) = (A_{\mathfrak{S}} + B)\,\varphi(t), \qquad 0 < t < \infty;$

(iv) $\varphi(0) = \varphi^{(0)}.$

(v) Эта единственная функция $\varphi(t)$ определяется равенством $\varphi(t) = S(t)\,\varphi^{(0)}$ и имеет, таким образом, аналитическое продолжение $\varphi_1(\zeta) = S(\zeta)\,\varphi^{(0)}$ в полуплоскость $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$. Это продолжение φ_1 удовлетворяет условиям (ii) и (iii) при комплексных значениях t, если $\operatorname{Re}(t) > 0$.

(vi) Производная $\varphi'(0)$ существует тогда и только тогда, когда $\varphi^{(0)} \in (p)\, T^{(2q)}(R^N)$; в этом случае $\varphi'(0) = (A_{\mathfrak{S}} + B)\,\varphi(0)$.

Аналогичные утверждения имеют место и в случае $(-1)^q \alpha^2 > 0$.

69. Пусть $A_{\mathfrak{S}}$ и B — те же, что и в предыдущем упражнении, а $D = (d_{jk})$ — формальный дифференциальный оператор в Φ^p, эле-

ментами которого служат многочлены с постоянными коэффициентами степени не выше $2q-2$. Тогда

(i) Область определения $\mathfrak{D}(D_{\mathfrak{S}})$ естественного замкнутого расширения оператора D содержит $(p)\,T^{(2q)}(R^N)$, и оператор $A_{\mathfrak{S}}+D_{\mathfrak{S}}+B$ с областью определения $(p)\,T^{(2q)}(R^N)$ замкнут.

(ii) Замкнутый оператор $A_{\mathfrak{S}}+D_{\mathfrak{S}}+B$ на $(p)\,T^{(2q)}(R^N)$ является инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы $Q(t)$, $t\geqslant 0$, ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}^p$, и $Q(t)$ имеет сильно аналитическое продолжение до полугруппы $Q_1(\zeta)$, определенной для ζ из полуплоскости $\operatorname{Re}(\zeta)>0$.

Для любого вектора $\varphi^{(0)}$ из $\mathfrak{H}^p$ существует одно и только одно непрерывное отображение $t\to\varphi(t)$ полупрямой $[0,\infty)$ в $\mathfrak{H}^p$, дифференцируемое при $t>0$ и обладающее следующими свойствами:

(iii) $\qquad \varphi(t)\in(p)\,T^{(2q)}(R^N), \qquad 0<t<\infty;$

(iv) $\qquad \varphi'(t)=(A_{\mathfrak{S}}+D_{\mathfrak{S}}+B)\,\varphi(t), \qquad 0<t<\infty;$

(v) $\qquad \varphi(0)=\varphi^{(0)}.$

(vi) Эта единственная функция $\varphi(t)$ определяется равенством $\varphi(t)=Q(t)\,\varphi^{(0)}$ и имеет, таким образом, аналитическое продолжение $\varphi_1(\zeta)=Q_1(\zeta)\varphi^{(0)}$ в полуплоскость $\operatorname{Re}(\zeta)>0$. Это продолжение φ_1 удовлетворяет условиям (iii) и (iv) для комплексных значений t, если $\operatorname{Re}(t)>0$.

(vii) Производная $\varphi'(0)$ существует тогда и только тогда, когда $\varphi^{(0)}\in(p)T^{(2q)}(R^N)$; в этом случае $\varphi'(0)=(A\mathfrak{S}+D\mathfrak{S}+B)\,\varphi(0)$.

Аналогичные результаты верны и в случае $(-1)^q\alpha^2<0$.

70. Пусть $\hat{A}=(\hat{a}_{jk}(s))$ есть $(p\times p)$-матрица вещественных или комплексных измеримых функций на R^N и $A_{\mathfrak{S}}$ — определенный на всюду плотном множестве оператор, заданный соотношениями (12.4). Показать, что если $A_{\mathfrak{S}}$ — спектральный оператор скалярного типа со спектром, лежащим в левой полуплоскости, то он является инфинитезимальной образующей сильно непрерывной полугруппы $T(t)$, $t\geqslant 0$, определяемой соотношением

$$T(t)\,\varphi=\int\limits_{\sigma(A_{\mathfrak{S}})} e^{t\lambda}E(d\lambda)\,\varphi, \qquad \varphi\in\mathfrak{H}^p,$$

где $E(\cdot)$ — разложение единицы для $A_{\mathfrak{S}}$. Функция $T(t)\,\varphi$ может быть также задана в виде свертки

$$T(t)\,\varphi=(\tau^{-1}e^{t\hat{A}})*\varphi, \qquad \varphi\in\mathfrak{H}^p.$$

71. Пусть $\varphi_j^{(0)}\in L_1(R^3)$, $j=1,2,3$, $s=(s_1,s_2,s_3)\in R^3$, $t>0$ и $\nabla^2=\partial^2/\partial s_1^2+\partial^2/\partial s_2^2+\partial^2/\partial s_3^2$. Дать явное представление решения

задачи с начальными условиями

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(s;\,t)=\frac{1}{4}\nabla^2\varphi_1(s;\,t)+\left(\frac{\partial}{\partial s_2}+\frac{\partial}{\partial s_3}\right)\varphi_2(s;\,t)+\frac{\partial^2}{\partial s_3^2}\varphi_3(s;\,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2(s;\,t)=\frac{1}{4}\nabla^2\varphi_2(s;\,t)+\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\varphi_3(s;\,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_3(s;\,t)=\frac{1}{4}\nabla^2\varphi_3(s;\,t),$$

$$\lim_{t\to 0+}\varphi_j(\cdot;\,t)=\varphi_j^{(0)}\ \text{в}\ L_2(R^3),\qquad j=1,\,2,\,3.$$

72. Пусть $\varphi_j^{(0)}\in L_2(R^2)$, $j=1,\,2$, $s=(s_1,\,s_2)\in R^2$, $t>0$ и $\nabla^2=\partial^2/\partial s_1^2+\partial^2/\partial s_2^2$. Дать явное представление матричного ядра $K(s;\,t)$ оператора свертки, такого, что вектор $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t))$, определяемый формулой

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(s-u;\,t)\,\varphi^{(0)}(u)\,du,$$

удовлетворяет уравнениям

$$\varphi'(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\nabla^2 & 2\left(\frac{\partial}{\partial s_1}+\frac{\partial}{\partial s_2}\right)\\ \frac{\partial}{\partial s_1}+\frac{\partial}{\partial s_2} & \frac{1}{4}\nabla^2\end{pmatrix}\varphi(t),\qquad t>0,$$

$$\lim_{t\to 0+}\varphi_j(t)=\varphi_j^{(0)}\ \text{в}\ L_2(R^2),\qquad j=1,\,2.$$

15. Примечания и дополнения

Теория спектральных операторов стала развиваться совсем недавно. Поэтому связанная с нею библиография сравнительно невелика; однако она непрерывно растет. Мы укажем сейчас первоисточники большей части изложенного нами материала и попытаемся ориентировать читателя на другие работы, результаты которых имеют отношение к спектральным операторам, но не изложены нами.

Кроме теории спектральных операторов, существует ряд других разделов функционального анализа, соприкасающихся с темами, рассмотренными в этой книге. Хотя мы не имеем возможности подробно входить в детали этих теорий, мы постараемся дать набросок их основных идей и представлений и проследить их взаимосвязи с теорией спектральных операторов, а также укажем литературу для дальнейшего чтения. Эти ссылки не претендуют на полноту, но особое внимание в них обращается на общие обзоры и монографии и литературу последних лет.

Для дальнейшей работы по вопросам теории спектральных операторов (как она изложена здесь) и спектральных мер мы отсылаем читателя к следующим статьям:

Апостол [6—10], Бейд [2—5], Берксон [2—5],Берксон и Доусон [1], Коложоара [1—4], Коложоара и Фойаш [4], Дин [1], Доусон [1—6], Данфорд [17—21], Эдвардс и Ионеску [1], Фельдман [1], Фельдзамен [1, 2], Фиксман [1], Фогель [1—4], Фойаш [3, 10, 11, 13, 15, 16], Грей [1], Хейн [1], Ионеску [3], Какутани [15], Канторович [1—9], Келдыш и Лидский [1], Кесельман [1, 2], Клуванек [1, 2], Клуванек и Коважикова [1], Коважикова [1], Краббе [3, 6], Лянце [1, 2], Люмер [2], Маккарти [1, 2], Маккарти и Шварц [1], Маккарти и Стемпфли [1], Маккарти и Цафрири [1], Макгарвей [1], Маеда [1—8], Мойал [1], Нел [1], Нейбауэр [2], Оберей [1—4], Панчапагесан [1], Педерсен [1], Плафкер [1], Сафферн [1], Салехи [1], Шефер [7, 10, 11], Шефер и Уолш [1], Дж. Шварц [2, 6, 7], Симпсон [1—3], Смарт [3], Стемпфли [1, 2, 7, 11], Судзуки [1], Тёрнер [1, 2], Цафрири [1—6], Уолш [1—3], Уэрмер [3].

Перечень ссылок, относящихся к алгебрам операторов и теории кратности, будет дан позже.

Значительная работа в последнее время была проделана в теории «обобщенных спектральных операторов» и «разложимых операторов». Мы опишем в общих чертах эту работу и дадим соответствующие ссылки позже.

Кроме того, появились многочисленные статьи по общей спектральной теории операторов в B-пространствах, не относящиеся специально (или непосредственно) к спектральным операторам. Работы такого характера содержатся в следующем списке:

Аллан [1, 2], Апостол [10, 11], Бартл [6, 7], Берксон [1, 2], Бишоп [1, 2], К. Браун [1], Дил [1, 2], Деприм [1, 2], Дерр и Тейлор [1], Доллингер [1, 2], Дольф [1, 2], Дольф и Пенцлин [1], Данфорд [6, 7, 14, 15, 16, 20, 21], Эдвардс и Ионеску [1], Фогель [12], Фойаш [1, 3, 4, 9, 12, 13], Гиндлер [1], Гиндлер и Тейлор [1], Гохберг и Крейн [2, 7, 8], Харазов [4], Канторович [1—9], Кариотис [1], Кокан [1], Краббе [4—9, 12, 13], Кульце [1], Лиф [1, 2], Лебоу [1], Любич [1—3], Любич и Мацаев [1, 2], Лорх [7], Мацаев [1—3], Маеда [1—8], Нейбауэр [1], Пич [1—6], Плафкер [1], Рингроуз [3], Сафар [1, 2, 6], Шефер [7, 10, 11, 15], Дж. Шварц [4], Себаштьян-и-Сильва [4, 5], Силлс [1], Сайн [1], Смарт [1, 2], Тейлор [15—18], Тильман [2], Тремпас [1], Василеску [1, 4], Вальбрук [1, 2, 3], Вульф [4, 5].

Некоторые из этих работ будут кратко описаны ниже, но едва ли здесь можно сделать больше, чем лишь наметить некоторые направления исследований; за деталями читатель должен обратиться к оригинальным источникам.

Спектральные операторы. Общий обзор теории спектральных операторов до 1958 г. можно найти в статье Данфорда [19], где изложена история вопроса и приведены (без доказательств) многие результаты этой книги. Коложоара [5] дал изложение теории спектральных операторов с другой точки зрения, отправляясь от разложимых операторов, изучая затем обобщенные спектральные операторы и, наконец, спектральные операторы.

Большинство теорем § 1—5 взято из статей Данфорда [17, 18], хотя в нашем изложении был проведен ряд изменений. В 1953—1954 гг. Нейбауэр сообщил нам несколько ценных идей по поводу работы Данфорда [17]. Он предложил ряд улучшений и заметил, что резольвента спектрального оператора обладает свойством однозначного распространения.

Помимо значительного обобщения теории, изложенной в этой книге (далее об этом будет сказано подробнее), существует еще три типа обобщений теории спектральных операторов. Первое направление, инициатором которого является Ионеску [3], состоит в распространении теории на некоторый класс локально выпуклых пространств. Эти обобщения не носят характера автоматического перенесения результатов, а содержат существенно новые моменты. Пусть E — локально выпуклое линейное хаусдорфово пространство, квазиполное и бочечное. Ионеску [3] вводит в рассмотрение семейство $F=\{m_{x,x^*}\}$ ограниченных комплексных мер Радона на комплексной плоскости C; он называет это *семейство спектральным*, если существует гомоморфизм U алгебры всех ограниченных измеримых по Борелю функций в алгебру всех непрерывных линейных отображений в E, такой, что $U(1)=I$ и

$$x^*U(f)x=\int\limits_C f(s)\,m_{x,x^*}(ds)$$

для всех $x\in E$, $x^*\in E^*$ и всех ограниченных борелевских функций f. Понятие спектрального оператора вводится таким образом, что оно охватывает и операторы, не являющиеся всюду определенными; тем самым это понятие объединяет точки зрения на материал гл. XV и XVIII. К сожалению, полное изложение этой работы не было опубликовано; тем не менее дальнейшие исследования в том же направлении были проведены Маедой [1, 2], который обобщил также часть результатов Бишопа о слабых T-мерах и некоторые результаты Дж. Шварца [2]. Другие результаты в этом направлении были получены Обереем [1, 4], Плафкером [1] и Симпсоном [1—3].

Второе направление, в котором обобщалась теория спектральных операторов, представлено исследованиями Шефера [7, 10, 11]. Хотя он изучал спектральные меры и скалярные операторы в локально выпуклых пространствах, отличительным моментом его работы является то, что он использует взаимосвязи между спектральными свойствами и свойствами *порядка*. При этом также развивается теория и для операторов, которые могут быть не определены на всем пространстве. Краткий обзор этих исследований и некоторых тесно примыкающих к ним работ будет дан ниже в пункте «Спектральные меры, локально выпуклые пространства и порядок».

Третье (но не совершенно отличное от предыдущих) направление представлено глубокими исследованиями Коложоары и Фойаша по теории *разложимых* и *обобщенных спектральных операторов*. К счастью, работа этих авторов, так же как и их сотрудников, и ее взаимосвязи с работой Маеды и Канторовича изложены в превосходной книге Коложоары и Фойаша [4]. Однако ввиду особого интереса к этим исследованиям мы бегло изложим далее их основные идеи в двух пунктах: «Разложимые операторы» и «Операционное исчисление и спектральная теория».

Свойство однозначного распространения. Приведенный в § 2 пример оператора, не обладающего свойством однозначного распространения, принадлежит Какутани (см. Данфорд [18]). Кесельман [1] дал необходимые условия того, чтобы оператор обладал этим свойством. Коложоара и Фойаш [4; стр. 5] показали, что если функция f аналитична и не постоянна ни в одной компоненте открытого множества, содержащего спектр $\sigma(T)$, то оператор $f(T)$ обладает свойством однозначного распространения тогда и только тогда, когда этим свойством обладает оператор T. В статьях Коложоары и Фойаша [1; 4, гл. I] введено следующее понятие. Пусть T и U — элементы $B(\mathfrak{X})$; положим

$$(T-U)^{[n]}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}T^kU^{n-k};$$

операторы T и U называются *квазинильпотентно эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty}|(T-U)^{[n]}|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}|(U-T)^{[n]}|^{1/n}=0.$$

(Очевидно, что если $U=T+N$, где $TN=NT$ и N — квазинильпотентный оператор, то $(T-U)^{[n]}=(T-U)^n$ и T и U квазинильпотентно эквивалентны; общее понятие охватывает этот случай.) Отношение квазинильпотентной эквивалентности является на самом деле отношением эквивалентности, и если операторы T и U квазинильпотентно эквивалентны, то (i) $\sigma(T)=\sigma(U)$; (ii) оператор T обладает свойством однозначного распространения тогда и только тогда, когда U обладает этим свойством, и (iii), если T (а следовательно, и U) обладает свойством однозначного распространения и $x\in\mathfrak{X}$, то $\sigma_T(x)=\sigma_U(x)$.

Множество операторов из $B(\mathfrak{X})$ со свойством однозначного распространения не замкнуто. Однако, как показал Василеску [2], если $\{T_k\}$ — последовательность в $B(\mathfrak{X})$ операторов со свойством однозначного распространения и для оператора $T \in B(\mathfrak{X})$ выполнено соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|(T_k - T)^{[n]}|^{1/n}\right) = 0,$$

то T обладает свойством однозначного распространения. В частности, отсюда вытекает, что если $\{T_k\}$ — последовательность коммутирующих операторов со свойством однозначного распространения и $T = \lim T_k$, то T также обладает этим свойством.

Если $T \in B(\mathfrak{X})$ обладает свойством однозначного распространения и $x \in \mathfrak{X}$, то $\sigma(x) \subseteq \sigma(T)$. Обратно, как заметил Сайн [1], если $\lambda \in \rho(x)$ для всех $x \in \mathfrak{X}$, то можно определить оператор S: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, полагая $Sx = x(\lambda)$, и тогда $S = (\lambda I - T)^{-1}$, откуда вытекает, что

$$\sigma(T) = \bigcup\{\sigma(x) \mid x \in \mathfrak{X}\}.$$

Этот результат был использован Греем в его исследовании аналитических распространений резольвенты векторов. Доллингер [1] также изучал спектр $\sigma_T(x)$ как функцию вектора $x \in \mathfrak{X}$ и как функцию оператора $T \in B(\mathfrak{X})$. Коложоара и Фойаш [1] (см. также [4; стр. 1]) показали, что $\sigma(x(\lambda)) = \sigma(x)$ для всех $x \in \mathfrak{X}$, $\lambda \in \rho(x)$.

Если оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ обладает свойством однозначного распространения, а F — замкнутое подмножество комплексной плоскости C, положим

$$\mathfrak{X}_T(F) = \mathfrak{X}(F) = \{x \in \mathfrak{X} \mid \sigma(x) \subseteq F\}.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{X}(F)$ является линейным многообразием в $\mathfrak{X}$, но оно не обязательно является замкнутым, даже если F замкнуто; простой контрпример приведен в книге Коложоары и Фоайша [4; стр. 25]. Если T — спектральный оператор с разложением единицы E, а δ — замкнутое множество, то теорема 3.4 утверждает, что многообразие $\mathfrak{X}(\delta)$ замкнуто; действительно, в этом случае оно совпадает с множеством $E(\delta)\,\mathfrak{X}$. В случае нормального оператора в гильбертовом пространстве следствие 3.7 было высказано в качестве гипотезы фон Нейманом [24] и доказано Фуглидом [1] и Халмошем [3; 6, стр. 68]. Общий случай был рассмотрен Данфордом [18; стр. 329].

Если Γ — тотальное многообразие в $\mathfrak{X}^*$, а оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ имеет ограниченное разложение единицы E, такое, что функция множества $x^*E(\cdot)x$ счетно аддитивна при всех $x^* \in \Gamma$, $x \in \mathfrak{X}$, то мы говорим, что T является *спектральным оператором класса* (Γ); если существует тотальное множество Γ, такое, что T является спектральным оператором класса (Γ), то мы говорим, что T *предспектрален*. Многие, но не все свойства спектральных операторов переносятся на предспектральные операторы. В частности, теоремы 3.2 и 3.4 остаются справедливыми в случае предспектральных операторов, в следствии 3.7 — нет. Действительно, Фиксман [1] построил пример, когда это следствие ошибочно, и показал, что оператор в l_∞ может быть спектральным двух различных классов и иметь два (некоммутирующих) разложения единицы. Можно проверить, что если оператор T является предспектральным класса (Г) с двумя разложениями единицы E_1 и E_2 в этом классе и если E_1 и E_2 коммутируют, то $E_1 = E_2$. Неизвестно, однако, может ли оператор иметь различные (следовательно, некоммутирующие) разложения единицы *одного и того же класса.*

Из некоторых результатов Бейда [4] (см. также XVII.2.1 и XVII.2.12) вытекает, что если $\mathfrak{X}$ — слабо полное B-пространство, то всякий предспектральный оператор в нем автоматически является спектральным и потому имеет единственное разложение единицы. Берксон и Доусон [1] рассмотрели некоторые аспекты теории предспектральных операторов и получили о них ряд результатов. Они показали, что если оператор T спектральный, то T^* имеет единственное разложение единицы класса ($\mathfrak{X}$); более того, если T^* является спектральным класса (Г), где $\Gamma \subseteq \mathfrak{X}^{**}$, то он имеет единственное разложение единицы класса (Г). Если $\mathfrak{X}^*$ слабо полно, а T — спектральный оператор класса (Г), то T имеет единственное разложение единицы класса (Г). Кроме того (Берксон и Доусон [1]), если T — спектральный оператор класса (Г) и спектр T либо вполне несвязен, либо является R-множеством (т. е. рациональные функции, аналитические на $\sigma(T)$, плотны в $C(\sigma(T))$), то T имеет единственное разложение единицы класса (Г).

Сужения и фактороператоры. Теорема 3.10 показывает, что если спектральный оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ приводится замкнутым подпространством $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$ и одним из его дополнений (т. е. если T коммутирует с некоторым проектором $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{Y}$), то сужение $T \mid \mathfrak{Y}$ оператора T на $\mathfrak{Y}$ спектрально. Тот же вопрос в случае инвариантного замкнутого подпространства для T не столь прост. Тем не менее Фиксман [1] доказал, что сужение спектрального оператора T на инвариантное замкнутое подпространство $\mathfrak{Y}$ в $\mathfrak{X}$ является спектральным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{Y}$ инвариантно также и для разложения единицы E оператора T; в этом случае разложение единицы оператора $T \mid \mathfrak{Y}$ равно $E \mid \mathfrak{Y}$. Кроме того, Доусон [1] доказал, что $\sigma(T \mid \mathfrak{Y}) \subseteq \sigma(\mathfrak{Y})$; он показал далее, что если S — оператор скалярного типа, спектр которого нигде не плотен и не разделяет плоскости, то сужение оператора S на *любое* инвариантное замкнутое подпространство спектрально. Аналогично, если S — оператор скалярного типа и его спектр является R-множеством, а $\mathfrak{Y}$ — инвариантное замкнутое подпространство, то оператор $S \mid \mathfrak{Y}$ спектрален тогда и только тогда, когда $\sigma(S \mid \mathfrak{Y}) \subseteq \sigma(S)$. Пример (принадлежащий Рингроузу) показывает, что эти два результата не обобщаются на спектральные операторы нескалярного типа. Однако если T — оператор скалярного типа и его спектр вполне несвязен, то сужение T на любое инвариантное замкнутое подпространство является спектральным оператором. В статье [5] Доусон рассмотрел сужения предспектральных операторов; он показал следующее: только что сформулированные для спектральных операторов результаты не верны в случае предспектральных операторов.

Аналогичная задача об операторах, индуцируемых спектральными операторами в факторпространствах, была изучена Доусоном [3]. Он показал, что если $T \in B(\mathfrak{X})$ является спектральным оператором, а $\mathfrak{Y}$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно T, то оператор $T_{\mathfrak{Y}}$ (определенный в факторпространстве $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}$ соотношением $T_{\mathfrak{Y}}[x] = [Tx]$) является спектральным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{Y}$ инвариантно относительно разложения единицы для T. В этом случае $\sigma(T_{\mathfrak{Y}}) \subseteq \sigma(T)$, и разложение единицы оператора $T_{\mathfrak{Y}}$ получается переходом к фактороператорам относительно $\mathfrak{Y}$ в разложении единицы для T. Таким образом, мы утверждаем, что *если T — спектральный оператор и $\mathfrak{Y}$ — инвариантное замкнутое подпространство, то фактороператор $T_{\mathfrak{Y}}$ является спектральным тогда и только тогда, когда сужение $T \mid \mathfrak{Y}$ — спектральный оператор*. Поэтому аналоги результатов, сформулированных в предыдущем абзаце для сужений спектральных операторов и операторов скалярного типа, верны также и для их фактороператоров.

Хотя сужения операторов со свойством однозначного распространения обладают этим свойством (см. Доусон [1]), соответствующий результат для фактороператоров не верен. Действительно, Доусон [3] заметил, что унитарный оператор сдвига имеет фактороператоры, не обладающие свойством однозначного распространения. С другой стороны, Василеску [8] доказал, что если $T \in B(\mathfrak{X})$ и M — замкнутое подмножество в комплексной плоскости C, такое, что если (i) f — аналитическая функция на открытом множестве $D_f \subseteq M'$ со значениями в $\mathfrak{X}$, такая, что $(\lambda I - T) f(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in D_f$, то $f(\lambda) = 0$ для $\lambda \in D_f$, и (ii) $\mathfrak{X}(M) = \{x \in \mathfrak{X} \mid \sigma(x) \subseteq M\}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{X}$, то фактороператор, индуцированный оператором T в $\mathfrak{X}/\mathfrak{X}(M)$, обладает свойством однозначного распространения.

Другой аспект анализа сужений операторов скалярного типа в гильбертовом пространстве на инвариантные замкнутые подпространства был рассмотрен Сафферном [1]; он называет оператор в гильбертовом пространстве *субскалярным*, если этот оператор является сужением некоторого оператора скалярного типа на инвариантное замкнутое подпространство. (Это обобщает соответствующее понятие субнормального оператора, введённое Халмошем.) Естественно ожидать, что многие свойства субнормальных операторов можно перенести на субскалярные операторы; например, существуют минимальные скалярные расширения субскалярных операторов. Хотя минимальные нормальные расширения субнормальных операторов унитарно эквивалентны, минимальные скалярные расширения субскалярного оператора не обязаны быть даже подобными. Поэтому естественное определение разложения единицы субскалярного оператора (как сужения разложения единицы минимального скалярного расширения) не приводит к однозначному результату. Тем не менее установлены многие взаимосвязи между различными частями спектра субскалярного оператора и его минимального скалярного расширения, и для субскалярного оператора можно построить функциональное исчисление. Доказано, что субскалярный оператор обладает свойством однозначного распространения и что получающееся при этом множество векторнозначных аналитических распространений резольвентного оператора инвариантно относительно подобных преобразований субскалярного оператора.

Понятие субскалярного оператора и скалярного расширения в B-пространствах были изучены Ионеску [4, 5] и Ионеску и Плафкером [1]. Оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ называется *субскалярным*, если существуют B-пространство $\widetilde{\mathfrak{X}} \supseteq \mathfrak{X}$, непрерывный проектор $\widetilde{\mathfrak{X}}$ на $\mathfrak{X}$ и оператор скалярного типа $\widetilde{T} \in B(\widetilde{\mathfrak{X}})$, такие, что $\widetilde{T} \mid \mathfrak{X} = T$. Доказано, что оператор T субскалярный тогда и только тогда, когда существуют компактное множество $Z \subseteq C$ и непрерывное линейное отображение U: $f \to U(f)$ пространства ограниченных измеримых по Борелю функций на Z в $B(\mathfrak{X})$, такое, что (i) $I = U(f_0)$ для функции $f_0(\lambda) \equiv 1$ и $T = U(f_1)$ для функции $f_1(\lambda) \equiv \lambda$; (ii) $U(ff_1) = U(f)\,T$ для всех f; (iii) если $\{f_n\}$ — ограниченная последовательность, сходящаяся поточечно к нулю, то последовательность операторов $\{U(f_n)\}$ сильно сходится к нулю. Другое описание субскалярных операторов основано на теореме, которая утверждает, что при некоторых предположениях непрерывное линейное отображение U банаховой алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей e в $B(\mathfrak{X})$ является проектором непрерывного гомоморфного образа алгебры $\mathfrak{A}$ в $B(\widetilde{\mathfrak{X}})$, $\widetilde{\mathfrak{X}} \supseteq \mathfrak{X}$, и в B-пространстве $\widetilde{\mathfrak{X}}$ существует непрерывный проектор на $\mathfrak{X}$. Второе доказательство этого результата дано Ионеску и и Плафкером [1].

Каноническое представление. Теорему 4.5, которая дает представление спектрального оператора в виде суммы оператора скалярного типа и квазинильпотентного оператора, можно рассматривать как обобщение теоремы Жордана о разложении; она была доказана Данфордом [18; стр. 333], хотя его доказательство основано на результатах теории B-алгебр. Доказательство, аналогичное приведенному здесь, было сообщено авторам Фойашем. Один из вариантов канонического представления для всюду определенных спектральных операторов в локально выпуклом линейном пространстве был дан Ионеску [3] в том случае, когда пространство квазиполно и бочечно. (См. ниже замечания по поводу распространения этого результата на обобщенные спектральные операторы.)

В случае предспектральных операторов теорема 4.5 имеет следующую формулировку, предложенную Берксоном и Доусоном [1]:

Теорема. *Пусть* $T \in B(\mathfrak{X})$ — *спектральный оператор класса* (Γ) *с разложением единицы* E; *определим операторы* S *и* N, *полагая*

$$S = \int_{\sigma(T)} \lambda E(d\lambda), \qquad N = T - S.$$

Тогда S — *спектральный оператор класса* (Γ) *с разложением единицы* E, $\sigma(S) = \sigma(T)$ *и* N — *квазинильпотентный оператор, коммутирующий с* E.

Обратно, пусть S — *спектральный оператор класса* (Γ) *с разложением единицы* E, *такой, что* $S = \int_{\sigma T} \lambda E(d\lambda)$, *а* N — *квазинильпотентный оператор, коммутирующий с* E. *Тогда* $S + N$ — *спектральный оператор класса* (Γ) *с разложением единицы* E *и* $\sigma(S + N) = \sigma(S)$.

Ряд результатов, дающих возможность получить единственное разложение для предспектральных операторов, получен Берксоном и Доусоном [1]. Кроме того, они модифицировали пример Фиксмана [1; стр. 1035] с тем, чтобы построить ограниченные операторы S и A в l_∞, такие, что S — оператор скалярного типа в l_∞ класса (l_1) (и сопряженный к оператору скалярного типа), $\sigma(S)$ состоит из множества $\{1\} \cup \{(n-2)/(n-1) \mid n = 3, 4, \ldots\}$ и $A^2 = 0$, $AS = SA$. Однако оператор A не коммутирует ни с каким разложением единицы для S; более того, оператор $S + A$ не является спектральным *ни в каком* классе.

Операционное исчисление для спектральных операторов, изложенное в § 5, заимствовано у Данфорда [17]. Одно из интересных направлений в развитии спектральной теории последнего времени связано с подходом, «противоположным» нашему; именно, можно *отправляться* от операционного исчисления для соответствующего класса функций, заданных на множестве, содержащем спектр оператора. Мы обсудим некоторые такие вопросы в отдельном пункте этого параграфа.

Одним из классов операторов (имеющих операционное исчисление), для которых справедливо интересное обобщение теоремы 4.5, является набор операторов $T \in B(\mathfrak{X})$, таких, что при некотором $k \geqslant 0$ мы имеем $|e^{itT}| = O(|t|^k)$ для $t \in R$, $|t| \to \infty$. (Такие операторы характеризуются также следующим условием: спектр $\sigma(T)$ веществен и $|R(\lambda; T)| = O(|\operatorname{Im}(\lambda)|^{-\beta})$, если $\operatorname{Im}(\lambda) \to 0$ при некотором $\beta \geqslant 1$.) Ш. Канторович [6, 7] показал, что если это условие выполнено для оператора в рефлексивном пространстве $\mathfrak{X}$ и спектр $\sigma(T)$ имеет нулевую одномерную меру Лебега, то существуют линейное многообразие $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ (которое он называет *жордановым многообразием* для оператора T), линейные преобразования S и N из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}$ и функция множества E, заданная на борелевских множествах в R и принимающая значения в пространстве линейных преобразований в $\mathfrak{D}$ со следующими свойствами: (i) $E(R)x = x$ для всех $x \in \mathfrak{D}$, и (ii) $E(\cdot)x$ является ограниченной регулярной сильно счетно аддитивной векторной мерой при любом $x \in \mathfrak{D}$, такие, что

(a) $T|\mathfrak{D} = S + N$;

(b) $SN = NS$;

(c) $N^{k+1} = 0$;

(d) $p(S)x = \int\limits_{\sigma(T)} p(t)E(dt)x$

для всех $x \in \mathfrak{D}$ и многочлена p. Более того, в определенном смысле многообразие $\mathfrak{D}$ максимально и единственно. Более жесткие предположения обеспечивают мультипликативность функции E. Если $\mathfrak{Y}$ — дополнение к $\mathfrak{D}$ относительно некоторой нормы, то сопряженный к расширению T на $\mathfrak{Y}$ будет спектральным оператором класса $(\mathfrak{Y})$.

Изучая в пространстве $C[0, 1]$ оператор T, заданный соотношением $Tf(x) = xf(x)$, Дил [1] пришел к некоторым условиям, которые являются достаточными и для того, чтобы обеспечить существование гомоморфизма E булевой алгебры конечных объединений подинтервалов из $[0, 1]$ в алгебру проекторов, такого, что оператор имеет представление

$$T = \int\limits_0^1 \lambda E(d\lambda) + N,$$

где N — квазинильпотентный оператор, не обязательно коммутирующий с T. Из тех же условий вытекает, что $\sigma(T) = \sigma_c(T)$. См. также статью Дила [2].

Следующий результат был доказан Сайном [1], который использовал технику, заимствованную из работы Смарта [2]. Пусть $T \in B(\mathfrak{X})$, $\sigma(T) = \sigma_c(T) \subseteq [0, 1]$ и существует ограниченное коммутирующее сильно непрерывное семейство $E(t)$, $t \in [0, 1]$, проекторов, такое, что (i) $E(0) = 0$, $E(1) = I$, (ii) $E(t)T = TE(t)$; (iii) если $s \leqslant t$, то $E(s)E(t) = E(s)$, и (iv) $\sigma(T \mid E(t)\mathfrak{X}) \subseteq [0, t]$.

Тогда $T = S + N$, где

$$S = \int_0^1 t\, dE(t),$$

и S — существенно ограниченный оператор (в смысле данного ниже определения), а N — коммутирующий с ним квазинильпотентный.

Спектральные операторы в гильбертовом пространстве. Тот факт, что конечное число коммутирующих спектральных операторов в гильбертовом пространстве переходом к эквивалентному внутреннему произведению можно одновременно превратить в нормальные операторы, принадлежит Уэрмеру [3]. Он опирался в своих рассуждениях на результаты Лорха [1] и Макки [4] о спектральных мерах. Доказательство, изложенное нами, основано на результате Секефальви-Надя [7] о том, что ограниченная абелева группа операторов в гильбертовом пространстве эквивалентна унитарной группе (ср. 6.1). (См. также Дэй [8] и Диксмье [1].)

Суммы и произведения спектральных операторов. Одно из важнейших применений теоремы Уэрмера состоит в доказательстве того, что сумма и произведение коммутирующих спектральных операторов в гильбертовом пространстве также являются спектральными операторами. К сожалению, этот результат не переносится на произвольные B-пространства; действительно, Какутани [15] дал пример двух спектральных операторов, сумма которых не является спектральным оператором. Пусть S и T обозначают канторово множество в $[0, 1]$; рассмотрим в $C(S \times T)$ линейное многообразие $C(S) \otimes C(T)$, состоящее из всех конечных сумм вида

$$(*) \qquad z(s, t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(s)\, y_i(t),$$

где $x_i \in C(S)$, $y_i \in C(T)$, $i = 1, \ldots, n$. Определим новую норму элемента $z \in C(S) \otimes C(T)$, полагая

$$(**) \qquad \|z\| = \inf \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i|,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям элемента z вида (*). Тогда $|z| \leqslant \|z\|$, где $|z|$ обозначает норму в $C(S \times T)$. Если пополнить $C(S) \otimes C(T)$ относительно нормы (**), то мы получим B-пространство $C(S) \hat{\otimes} C(T)$, являющееся подмножеством в $C(S \times T)$. Какутани показал, что для некоторой непрерывной функции f, заданной на канторовом множестве, операторы A и B, определенные в $C(S) \hat{\otimes} C(T)$ соотношениями

$$Az(s, t) = f(s)\, z(s, t), \qquad Bz(s, t) = f(t)\, z(s, t),$$

являются спектральными операторами, но сумма $A + B$ не является спектральным оператором, так как соответствующая булева алгебра проекционных операторов не ограничена.

Модифицируя конструкцию Какутани, Маккарти [2,I] показал, что сумма двух коммутирующих операторов скалярного типа в сепарабельном рефлексивном B-пространстве не обязательно является спектральным оператором.

Скажем несколько слов о положительных результатах. Фогель [2] заметил, что в любом пространстве сумма (или произведение) двух коммутирующих спектральных операторов спектральна тогда и только тогда, когда сумма (или произведение) их скалярных частей является спектральным оператором. Кроме того, Данфорд [18] и Фогель [1] доказали, что если $\mathfrak{X}$ слабо полно, то сумма и произведение спектральных операторов снова являются спектральными операторами, если булева алгебра, порожденная их спектральными мерами, ограничена. Маккарти [2,I] показал, что если один из операторов имеет конечную кратность, то сумма спектральных операторов является спектральным оператором; более того, для некоторых сепарабельных рефлексивных пространств это условие необходимо. Позже Маккарти [2,II] доказал, что если $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ — коммутирующие ограниченные булевы алгебры проекторов в L_p, $1 < p < \infty$, то булева алгебра, порожденная $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$, ограничена. (См. также статью Литтмана, Маккарти и Ривьера [1], в которой разобран случай $0 < p \leqslant 2$.) Из этого замечательного результата вытекает, что сумма и произведение коммутирующих спектральных операторов в L_p, $1 \leqslant p < \infty$, являются спектральными операторами; никаких условий на кратность операторов или сепарабельность пространства здесь не налагается. Эти результаты были перенесены Обереем [1] на некоторые локально выпуклые пространства, аналогичные L_p.

Из некоторых глубоких результатов Линденштраусса и Пелчинского [1] вытекает, что если $\mathfrak{X}$ — дополняемое подпространство в некотором L_1-пространстве и $\mathcal{E}$ — ограниченная булева алгебра проекторов в $\mathfrak{X}$, то существует постоянная M, такая, что для любого конечного набора $\{E_k\}$ дизъюнктных проекторов из $\mathcal{E}$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |E_k x| \leqslant M \left| \left(\sum_{k=1}^{n} E_k\right) x \right|, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Аналогично, если $\mathfrak{X}^*$ является (или изометрично) дополняемым подпространством L_1-пространства (в частности, если $\mathfrak{X} = C(K)$, где K — хаусдорфов компакт), то при тех же условиях

$$\left| \left(\sum_{k=1}^{n} E_k\right) x \right| \leqslant M \sup_k |E_k x|, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Исходя из этих результатов, Маккарти и Цафрири [1] показали, что если $\mathfrak{X}$ — дополняемое подпространство в L_p-пространстве, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то булева алгебра, порожденная двумя коммутирующими ограниченными булевыми алгебрами проекторов, ограничена. *Таким образом, сумма и произведение коммутирующих спектральных операторов в дополняемом подпространстве $\mathfrak{X}$ L_p-пространства, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, являются также спектральными операторами*; как отмечалось выше, это верно, если $\mathfrak{X} = C(K)$. (Этот результат не противоречит примеру Какутани, так как $C(S) \hat{\otimes} C(T)$ не является дополняемым подпространством ни в каком L_∞-пространстве.) С другой стороны, доказано, что операторы скалярного типа в L_∞-пространстве имеют чрезвычайно специальный вид: их спектральные меры конечны. Так, если S — оператор скалярного типа в таком пространстве, то $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i$. Более того, всякий оператор скалярного типа в $L_\infty(0, 1)$ подобен оператору вида $Tf = gf$, где g — простая функция; это доказано в статье Маккарти и Цафрири [1]. (См. также Дин [1].) В пространстве $C[0, 1]$, однако, существуют полные булевы алгебры проекторов, не являющиеся конечными. Тем не менее любой оператор скалярного типа S в $C(K)$ может быть представлен в виде $Sx = \sum_{\gamma} \lambda_\gamma E(\{\lambda_\gamma\})\, x$, где $\{\lambda_\gamma\}$ — множество собственных значений оператора S (ср. Маккарти и Цафрири [1; стр. 539]).

Как мы увидим ниже, сумма и произведение двух коммутирующих обобщенных спектральных операторов являются обобщенными спектральными операторами. Это было доказано Фойашем [9]; см. также Коложоара и Фойаш [4] и Канторович [5].

Если сумма двух коммутирующих спектральных операторов является спектральным оператором, то следовало бы ожидать, что ее разложение единицы должно задаваться «интегралом-сверткой» вида

$$E(\sigma) = \int E_1(\sigma - \lambda)\, E_2(d\lambda),$$

где E_1 и E_2 — разложения единицы для исходных операторов. Такая формула была установлена Фогелем при следующих предположениях: (i) булева алгебра, порожденная E_1 и E_2, ограничена; (ii) пространство $\mathfrak{X}$ слабо полно и (iii) E-мера границы множества σ равна нулю. Дальнейшие результаты в этом направлении были получены Канторовичем [1, 2, 4], который показал, что выписанная выше формула верна в сильной операторной топологии и без предположения (iii). Тот же результат был получен раньше Педерсеном [1] в случае рефлексивного пространства, и его доказательство было перенесено Обереем [1] на случай некоторых локально выпуклых пространств. Аналогичные результаты верны также для разложения единицы произведения двух коммутирующих спектральных операторов. Клуванек и Коважикова [1] исследовали условия, при которых существует спектральная мера G на борелевских подмножествах в $C \times C$, такая, что $G(\sigma \times \delta) = E_1(\sigma) E_2(\delta)$ для всех борелевских множеств σ, δ. Необходимое и достаточное условие существования такой спектральной меры состоит в том, что для любого $x \in \mathfrak{X}$ множество

$$\{\sum_{j=1}^{n} E_1(\sigma_j) E_2(\delta_j) x\},$$

где $\sigma_j \times \delta_j$, $j = 1, \ldots, n$, пробегает все конечные множества взаимно непересекающихся прямоугольников, является слабо секвенциально компактным. Если $\mathfrak{X}$ слабо полно, то это условие выполнено. Более общо, всегда можно найти функцию G со значениями в $B(\mathfrak{X}^{**})$, такую, что $G(\sigma \times \delta) = E_1(\sigma)^{**} E_2(\delta)^{**}$ для всех борелевских множеств σ, δ.

Скалярная и нильпотентная части спектрального оператора. Теорема 6.7 показывает, что если $T \in B(\mathfrak{X})$ — спектральный оператор в гильбертовом пространстве и резольвентный оператор $\lambda \to R(\lambda; T)$ удовлетворяет условию роста порядка m, то нильпотентная часть N оператора T имеет тип $m-1$, т. е. $N^m = 0$. Это было доказано Данфордом [18]; однако Маккарти [1,I] показал, что это утверждение не справедливо в произвольном B-пространстве. На самом деле все, что можно получить в произвольном B-пространстве,— это равенство $N^{m+2} = 0$; но если спектр $\sigma(T)$ имеет нулевую плоскую меру или $\mathfrak{X}$ слабо полно или сепарабельно, то $N^{m+1} = 0$. Другие результаты, как и примеры, показывающие, что эти индексы нильпотентности нельзя понизить, содержатся в работе Маккарти [1]. Некоторые из этих результатов были перенесены Симпсоном [1, 2] на спектральные операторы в локально выпуклых пространствах специального типа. Нейбауер [2] дал необходимое и достаточное условие того, что нильпотентная часть спектрального оператора имеет порядок нильпотентности m. Это условие состоит в следующем: существует постоянная $M > 0$, такая, что для любых непересекающихся борелевских множеств $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ в спектре $\sigma(T)$ и комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$, таких, что $|\xi_j| \leq |T| + 1$ и $\xi_j \notin \bar{\sigma}_j$, выполнено неравенство

$$|\sum_{j=1}^{n} R(\xi_j; T | E(\sigma_j)\mathfrak{X}) E(\sigma_j)| \leq M/d^m,$$

где $d = \min\{\operatorname{dist}(\xi_j, \bar{\sigma}_j) \mid j = 1, \ldots, n\}$.

Результаты § 7 о свойствах спектрального оператора и его скалярной части принадлежат Фогелю [2], как и большинство результатов § 8 о спектральных свойствах операторов T, S и N. Оберей [2] получил часть этих результатов и в случае некоторых локально выпуклых пространств.

В § 9—11 изложены с незначительными обобщениями и усилениями результаты Данфорда [21]; некоторые из них тесно связаны и навеяны работой Фогеля [3]. Совсем недавно Чоу [1], используя теорему фон Неймана о приведении, обобщил теорему 10.6, доказав, что любой замкнутый спектральный оператор в гильбертовом пространстве можно разложить в прямой интеграл замкнутых неприводимых спектральных операторов. Примеры § 12 не претендуют на полноту — они не иллюстрируют все типы встречающихся ситуаций. Примеры другого типа можно найти в упражнениях § 15, а внимательный читатель, несомненно, построит и много других примеров. Он также заметит, что многие результаты, сформулированные в этом и предыдущих параграфах в случае гильбертова пространства, могут быть соответствующим образом сформулированы и для пространств $L_p(R^N)$, $1 \leqslant p < \infty$. Библиография и исторические сведения о задаче Коши (и даже о рассмотренной нами на примерах линейной задаче с начальными условиями) слишком велики по объему, чтобы приводить их здесь, тем более что мы и не пытаемся излагать теорию этой задачи, а хотим лишь проиллюстрировать ее на нескольких примерах, связанных с теорией спектральных операторов. Мы упомянем лишь несколько наиболее важных монографий. В книге Адамара [2] содержится много ссылок в предисловии и сносках на ранние работы по задаче Коши. Современное изложение теории и хорошая библиография имеются в книге И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [2]. Наконец, интересное исследование вопросов, о которых мы и не упоминали, можно найти в работах Хилле [1, 5, 7] и Хилле и Филлипса [1].

Результаты § 14 практически не связаны с результатами предыдущих параграфов. Теорему 2 можно найти у И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова [1], а ее следствия 3 и 5 у Н. Винера [4] и [5]. Эта теорема Винера и обобщение П. Леви, получающееся при замене $1/\lambda$ любой функцией $f(\lambda)$, аналитической по λ в окрестности спектра элемента a из $\mathfrak{A}_1$, содержат результаты IX.4.10 и IX.4.11. Кажется, что элементарная лемма 6, позволяющая перенести эти результаты Винера — Леви на такие незамкнутые идеалы, как $L_1 \cap L_q$ и $L_1 \cap C^{(k)}$, не отмечалась раньше в связи с результатами типа следствий 8, 10 и 11.

Уравнение (20) впервые было решено (без ограничений (24)) в однородном случае $y = 0$ Винером и Хопфом [1] при некоторых условиях на рост ядра f. В своей хорошо известной монографии по этому вопросу Э. Хопф [4] дал аналитические формулы для решений уравнения Винера — Хопфа как в однородном, так и в неоднородном случаях. М. Г. Крейн [26] провел глубокое и исчерпывающее изучение неоднородных уравнений типа Винера — Хопфа. По-видимому, Крейн первым получил факторизацию (30), используя теорему

Винера — Леви, хотя по существу такая же факторизация появлялась в ранней работе Винера и Хопфа [1]. В статье Крейна имеется превосходная библиография по этой теме и изложена история ее развития.

В последние годы возрос интерес к линейным операторам, удовлетворяющим алгебраическим тождествам, которые получаются с помощью абстрактных методов Винера — Хопфа. По этому поводу мы отсылаем читателя к статьям Андерсена [1, 2], Аткинсона [6], Бакстера [2], Рота [6, 7] и Спитцера [1].

Конечные линейные системы уравнений типа Винера — Хопфа были тщательно изучены И. Ц. Гохбергом и М. Г. Крейном [3]. В этом случае факторизация, соответствующая нашему тождеству (30), намного труднее, но может быть получена путем решения однородной задачи Гильберта для матричных функций. По поводу решения этой задачи мы отсылаем читателя к статье Гохберга и Крейна [3] и великолепной монографии Н. И. Мусхелишвили [1].

Спектральные и эрмитовы операторы. Если T — оператор скалярного типа в $\mathfrak{X}$ с разложением единицы E, заданным на борелевских множествах $\mathscr{B}$ в C, а операторы A и B определены при помощи соотношений

$$A=\int_C \operatorname{Re}(\lambda)\,E(d\lambda), \qquad B=\int_C \operatorname{Im}(\lambda)\,E(d\lambda),$$

то A и B — коммутирующие операторы скалярного типа и их разложения единицы легко найти заменой меры, при этом $T = A + iB$. Другими словами (ср. Канторович [4]), мы можем ввести меры E_R и E_J на борелевских множествах в R, полагая

$$E_R(\sigma)=E(\sigma\times R), \qquad E_J(\sigma)=E(R\times\sigma),$$

и тогда получим, что

$$A=\int_R \lambda E_R(d\lambda), \qquad B=\int_R \lambda E_J(d\lambda).$$

Таким образом, оператор скалярного типа (а следовательно, и спектральный оператор) можно разбить на «вещественную» и «мнимую части». Аналогично, оператор скалярного типа (а следовательно, и спектральный оператор) имеет «полярное разложение», подобное тому, которое было дано в § XII.7 для нормального оператора (см. Фогель [2]). Это полярное разложение было также получено Коважиковой [1], которая занималась представлением спектральной меры данного оператора в виде произведения спектральных мер сомножителей.

В некотором смысле оператор скалярного типа с вещественным спектром можно считать обобщением эрмитова или самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Однако имеется другое удачное понятие, которое является важным и интересным. Люмер [1] показал, что в любом комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$ можно ввести (по крайней мере одно) *полувнутреннее произведение*, совместимое с исходной нормой. (Под полувнутренним произведением мы понимаем отображение $[\cdot, \cdot]$ из $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ в C, такое, что

(i) для любого $y \in \mathfrak{X}$ отображение $x \to [x, y]$ линейно в $\mathfrak{X}$;
(ii) $[x, x] \geqslant 0$ для любого $x \in \mathfrak{X}$;
(iii) $[x, x] = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
(iv) $|[x, y]|^2 \leqslant [x, x]\,[y, y]$ для всех $x, y \in \mathfrak{X}$.

Полувнутреннее произведение порождает норму $\| x \| = [x, x]^{1/2}$; мы говорим, что полувнутреннее произведение *совместимо* с исходной нормой, если нормы $\| x \|$ и $| x |$ эквивалентны.) Если $T \in B(\mathfrak{X})$, то можно определить его *числовую область* относительно полувнутреннего произведения, полагая

$$W(T) = \{[Tx, x] \mid [x, x] = 1, \ x \in \mathfrak{X}\}.$$

Хотя разные полувнутренние произведения приводят к разным числовым областям оператора T, все они имеют одну и ту же выпуклую оболочку. Поэтому если $T \in B(\mathfrak{X})$ имеет вещественную числовую область относительно одного совместимого полувнутреннего произведения, то он имеет вещественную числовую область и относительно всех таких произведений. Люмер назвал такие операторы *эрмитовыми операторами* в $\mathfrak{X}$. Он показал, далее, что это понятие совпадает с понятием, введенным ранее Видавом [2], а именно что

$$| I - itT | = 1 + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad (t \in R).$$

В настоящее время имеется обширная литература о пространствах с полувнутренними произведениями, о числовых областях и эрмитовых операторах (см. Бонсол и Дункан [1]).

Берксон [2] показал, что если E — ограниченная спектральная мера и мы полагаем

$$\| x \| = \sup\{\operatorname{var} x^*E(\cdot)\,x \mid | x^* | = 1\},$$

то $\| \cdot \|$ — норма, эквивалентная $| \cdot |$, и относительно нее все операторы $E(\delta)$ уже эрмитовы. Отсюда и из результатов Берксона [5; стр. 3] вытекает, что если f непрерывна на компактном носителе K меры E, то

$$\left\| \int f(s)\,E(ds) \right\| = \sup_{s \in K} | f(s) |.$$

Далее Берксон [2] показал, что если T — оператор скалярного типа, то существуют однозначно определенные операторы A и B, такие, что (i) $T = A + iB$, (ii) $AB = BA$ и (iii) операторы $A^m B^n$ эрмитовы при всех $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ относительно некоторой эквивалентной нормы. Обратно, если $\mathfrak{X}$ рефлексивно (или даже слабо полно), то эти три условия характеризуют операторы скалярного типа.

Люмер [2] показал, что если T_1 и T_2 — коммутирующие операторы скалярного типа, то существует эквивалентная перенормировка пространства $\mathfrak{X}$, после которой $T_j = A_j + iB_j$, где A_j, B_j — коммутирующие эрмитовы операторы. Следовательно, $T_1 + T_2 = A + iB$, где A и B — коммутирующие эрмитовы операторы. Помимо других результатов, Люмер доказал, что если $\mathscr{E}$ — булева алгебра проекторов в $B(\mathfrak{X})$, то следующие утверждения эквивалентны: (a) $\mathscr{E}$ равномерно ограничена; (b) равномерное замыкание A вещественной линейной оболочки $\mathscr{E}$ состоит из операторов, эрмитовых в некоторой эквивалентной норме; (c) это замыкание A состоит из операторов, имеющих спектральные сопряженные.

Панчапагесан [1] рассмотрел взаимосвязи между полярными разложениями операторов скалярного типа и эрмитовых операторов и доказал ряд результатов, аналогичных упомянутым выше результатам Берксона.

Недавно Стемпфли [11] ввел в рассмотрение интересный класс операторов. Если $x \in \mathfrak{X}$, то по теореме Хана — Банаха существует элемент $x^* \in \mathfrak{X}^*$, такой, что $|x^*| = |x|$ и $x^*x = |x|^2$. Пусть φ: $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}^*$— любое отображение, такое, что $\varphi(x) = x^*$ и $\varphi(\lambda x) = \bar{\lambda}\varphi(x)$. В общем случае φ не является однозначным отображением, линейным или непрерывным, но оно порождает полувнутреннее произведение $[x, y] = (\varphi(y))\, x$ на $\mathfrak{X}$. Если такое отображение φ задано, то мы говорим, что оператор $A \in B(\mathfrak{X})$ является *сопряженно абелевым* при условии, что $A^*\varphi = \varphi A$ (или, что то же самое, если $(Ax)^* = A^*x^*$ для всех $x \in \mathfrak{X}$). Если A сопряженно абелев, то спектр $\sigma(A)$ вещественен, и операторы A^{2n} эрмитовы при всех $n = 1, 2, \ldots$; однако оператор A не обязательно должен быть эрмитовым, а оператор $cI + A$ не обязательно является сопряженно абелевым. Доказано, что если A сопряженно абелев, то (i) $(A^2)^*$ — оператор скалярного типа класса ($\mathfrak{X}$) и (ii) если $\mathfrak{X}$ слабо полно, то A^2 — оператор скалярного типа. Кроме того, если A сопряженно абелев и $\mathfrak{X}$ слабо полно, то A — оператор скалярного типа тогда и только тогда, когда или (a) A обратим и (b) 0 является изолированной точкой спектра $\sigma(A)$, или (c) спектр $\sigma(A)$ неотрицателен (или неположителен). Неизвестно, однако, всякий ли сопряженно абелевый оператор в слабо полном пространстве является скалярным.

Спектральные операторы и безусловная сходимость. Если T — оператор скалярного типа и его собственные векторы образуют фундаментальное множество, то разложения по его собственным векторам сходятся безусловно. Обратно, Смарт [3] показал, что если $T \in B(\mathfrak{X})$ и его собственные векторы $\{x_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ обладают тем свойством, что ни один из векторов x_k не лежит в замкнутом подпространстве, порожденном остальными векторами $\{x_n,\ n \neq k\}$, то существуют функционалы $\{f_k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ в $\mathfrak{X}^*$, такие, что $f_j(x_k) = \delta_{jk}$. Если $\mathfrak{Y}$ — множество всех векторов $x \in \mathfrak{X}$, таких, что ряд $\sum f_k(x) x_k$ безусловно сходится к x, то $\mathfrak{Y}$ является B-пространством с нормой

$$\|x\| = \sup \left\{ \left| \sum_{k \in I} f_k(x) x_k \right| \,\middle|\, I \text{ конечно} \right\}.$$

Более того, $\mathfrak{Y}$ инвариантно относительно T, и сужение $T \mid \mathfrak{Y}$ является ограниченным оператором скалярного типа на $\mathfrak{Y}$ с разложением единицы E, где

$$E(\sigma) x = \sum_{\lambda_k \in \sigma} f_k(x) x_k$$

и $\{\lambda_k\}$ обозначает множество собственных значений оператора T.

Корни, логарифмы и полугруппы спектральных операторов. Если S — обратимый оператор скалярного типа (соответственно спектральный) и T удовлетворяет условию $T^n = S$ при некотором положительном целом n, то, как доказал Стемпфли [1], T является оператором скалярного типа (соответственно спектральным). Многие результаты о существовании (или несуществовании) корней и логарифмов операторов были получены Апостолом [5—11], Коложоарой [4], Декаром и Пирсом [2], Халмошем и Люмером [1], Халмошем, Люмером и Шеффером [1], Хилле [6], Краббе [1], Курепой [1—4, 6], Ланье [1], Люмером [3], Путнамом [19, 21, 22], Шеффером [3] и Стемпфли [1], хотя некоторые из этих авторов рассматривали операторы, более (или менее) общие, чем спектральные операторы в B-пространствах. Отметим один такой результат; Апостол [6] доказал, что если f аналитична в окрестности спектра $\sigma(T)$ и $f'(\lambda) \neq 0$ для $\lambda \in \sigma(T)$ и если $f(T)$ является спектральным (скалярным) оператором, то и T — спектральный (соответственно скалярный) оператор.

Большое число статей было опубликовано относительно групп и полугрупп спектральных операторов. См. Берксон [5], Фойаш [3, 8], Ионеску [2], Ланье [1], Люмер [2, 3], Маккарти и Стемпфли [1] и Панчапагесан [1] по поводу результатов, полученных в этом направлении.

Следующие статьи не столь тесно связаны со спектральными операторами, но содержат близкие проблемы: Адамян и Аров [2], Фойаш и Геер [1], Густафсон [1], Хасегава [1], Хейн [1], Ито [1], Клейнекке [4], Комацу [1], Мелтиз [1, 2], Миядера [2], Мляк [5], Сингбал-Ведак [1], Иосида [13].

Спектральные меры, локально выпуклые пространства и порядок. Спектральные меры изучались в связи с (частично) упорядоченными пространствами Шефером [7, 10, 11], Шефером и Уолшем [1] и Уолшем [1—3]. Мы дадим сжатое описание части этих работ, но ради краткости изложения ограничимся лишь некоторыми их результатами. Многое в построениях этих работ вызвано тем, что одновременно рассматриваются ограниченные и неограниченные операторы; в этом смысле достигается единство изложения гл. XV и XVIII. С другой стороны, некоторые результаты обнаруживают, что спектральные меры и спектральные операторы в различных ненормированных пространствах, представляющих интерес для анализа, имеют более специальный вид, чем следовало бы ожидать.

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, а A — локально выпуклое хаусдорфово пространство, являющееся также алгеброй над C с единицей e, в которой умножение непрерывно по каждому из сомножителей. Предположим также, что A «полуполна» в том смысле, что последовательности Коши сходятся в A (заметим, что A не обязательно метризуема,— в этом смысл приставки «полу»). Под *спектральной мерой* μ на X со значениями в A понимается отображение $\delta \to \mu(\delta)$ бэровского поля $\mathscr{B}_0$ (σ-поля, порожденного компактными G_δ-множествами в X) пространства X в A, слабо счетно аддитивное и удовлетворяющее следующим условиям: $\mu(X) = e$, $\mu(\delta_1 \cap \delta_2) = \mu(\delta_1)\mu(\delta_2)$ для множеств δ_1, δ_2 из $\mathscr{B}_0$. (При определенных условиях можно связывать такие спектральные меры с непрерывными гомоморфизмами $C(X)$ в A; этим намечается другой подход — см. Шефер [11; стр. 470].)

Доказано, что если μ — спектральная мера, то пересечение K всех выпуклых конусов, содержащих множество $\{\mu(\delta) \mid \delta \in \mathscr{B}_0\}$, является «слабо нормальным» конусом и задает (частичный) порядок в A, относительно которого мера μ положительна. *Таким образом, всякая спектральная мера на X со значениями в A положительна относительно некоторого подходящего порядка в A.*

Пусть μ (соответственно ν) — спектральная мера на X (соответственно на Y) со значениями в A. *Тогда для существования заведомо единственной спектральной меры λ на бэровских множествах в $X \times Y$ со значениями в A, такой, что $\lambda(\delta \times \sigma) = \mu(\delta)\nu(\sigma)$ для всех δ, σ, необходимо и достаточно, чтобы значения мер μ и ν содержались в коммутативной подалгебре A и в A существовал частичный порядок, относительно которого обе меры μ и ν положительны.* Этот результат проливает свет на вопрос о том, когда сумма и произведение операторов скалярного типа являются операторами скалярного типа

Мы говорим, что элемент $a \in A$ является *скалярным* (хотя Шефер [10, стр. 143] использует слово «спектральный»), если существуют компактное пространство X, спектральная мера μ на X со значениями в A и ограниченная измеримая по Бэру функция $f: X \to C$, такие, что $a = \int f(x)\,\mu(dx)$. Отсюда вытекает существование спектральной меры ν_a, заданной на компактном подмножестве в C со значениями в A, такой, что $a = \int z\nu_a(dz)$; более того, мера ν_a единственна и ее носитель совпадает со спектром элемента a в A (т. е. дополнением к тому наибольшему открытому множеству в C, на котором отображение $\lambda \to (\lambda e - a)^{-1}$ в A локально голоморфно). Элементы в области значений меры ν_a являются в естественном смысле «функциями элемента a», а отображение $g \to g(a) = \nu_a(g)$ задает операционное исчисление для a.

Мы говорим, что скалярный элемент $a \in A$ *веществен* (соответственно *положителен*), если его спектр $\sigma(a)$ лежит в R (соответственно в $[0, +\infty)$). Можно доказать, что $a \in A$ является вещественным скалярным элементом тогда и только тогда, когда существует упорядочение A, при котором a лежит в вещественной линейной оболочке интервала $[0, e]$ в смысле введенного в A порядка, и что элемент $a \in A$ положителен тогда и только тогда, когда существуют упорядочение в A и неотрицательное число γ, такие, что $0 \leqslant a \leqslant \gamma e$. Алгебры, в которых любой элемент является скалярным, рассматриваются в статьях Шефера [10, 11] и Уолша [1]. Чаще всего они оказываются коммутативными и эквивалентными алгебре типа $C(\Omega)$. Результаты такого характера можно сравнить с результатами § XVII.2.

Эти (и другие) результаты используются при изучении того случая, когда A — алгебра всех непрерывных линейных отображений в локально выпуклом пространстве E с сильной операторной топологией; кроме того, мы предполагаем, что E полуполно и бочечно. При этих условиях можно ввести в рассмотрение скалярные операторы; это позволяет изучать и неограниченные операторы. Сформулируем лишь один результат в этом направлении (см. Шефер [10; стр. 169]). Пусть T — замкнутый линейный оператор в E с плотной областью определения; он является «вещественным скалярным оператором» тогда и только тогда, когда определен оператор $(I + T^2)^{-1}$ и существует такое упорядочение в A, что $0 \leqslant (I + T^2)^{-1} \leqslant I$ и $-I \leqslant T(I + T^2)^{-1} \leqslant I$.

В статье Шефера [11] аналогичные результаты получены в более «алгебраической» ситуации; в ней спектральные меры рассматриваются как непрерывные гомоморфизмы алгебры $C(X)$ в A.

Шефер и Уолш [1] дали ряд примеров операторов, скалярных (в смысле приведенного выше определения) в некоторых ненормируемых локально выпуклых пространствах. Так, например, (а) пусть $f \in D(T^n)$ — распределение на n-мерном торе T^n; тогда отображения свертки $u \to f*u$ в $C_0^\infty(T^n)$ или $D(T^n)$ являются скалярными. Таким образом, дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами являются скалярными в $C_0^\infty(T^n)$ и $D(T^n)$. (b) Пусть p и q — вещественнозначные C_0^∞-функции на одномерном торе T^1. Тогда отображения вида $u \to (d/dt)(p\, du/dt) + qu$

в $C_0^\infty(T^1)$ или $D(T^1)$ являются скалярными. (с) Отображения $u \to -d^2u/dt^2 + t^2u$ в пространствах Φ (соответственно T^1) быстро убывающих C^∞-функций (соответственно медленно растущих распределений) на вещественной прямой скалярны. Таким образом, преобразование Фурье $u(t) \to \int_R e^{-2\pi its}u(s)ds$ в Φ и сопряженный оператор в T^1 являются скалярными. Доказательство скалярности этих операторов вытекает из того факта, что собственные функции определенных краевых задач образуют абсолютные базисы в $C_0^\infty(T^n)$ или Φ, и результатов Шефера [10].

Уолш [2] рассматривает слабо счетно аддитивные спектральные меры μ, заданные на σ-поле Σ подмножеств множества X, значения которых образуют равностепенно непрерывное семейство непрерывных линейных операторов в локально выпуклом пространстве E. Если E полно, то очевидно (Уолш [2; стр. 308]), что всякая такая спектральная мера является проективным пределом обобщенной последовательности спектральных мер со значениями в $B(\mathfrak{X}_\alpha)$, где $\mathfrak{X}_\alpha$ есть B-пространство.

Пусть μ — такая мера и E ограниченно полно; рассмотрим для любого $x \in E$ многообразие $\mathfrak{M}(x)$ (соответственно $\mathfrak{M}_R(x)$) — замкнутую комплексную (соответственно вещественную) линейную оболочку множества $\{\mu(\delta)x \mid \delta \in \Sigma\}$. Эти пространства называются *циклическими* (соответственно *вещественными циклическими*) *подпространствами, порожденными вектором* x. Доказано, что спектральная мера индуцирует на $\mathfrak{M}(x)$ и $\mathfrak{M}_R(x)$ структуру порядка с жесткими свойствами. В частности, если $\mathfrak{M}(x)$ полно, то оно изоморфно как векторное пространство пространству классов эквивалентности интегрируемых функций на X по модулю некоторых «нулевых функций»; аналогично, $\mathfrak{M}_R(x)$ изоморфно и как векторное пространство, и как векторная структура пространству классов эквивалентности вещественнозначных интегрируемых функций. Это позволяет Уолшу перенести некоторые теоремы Бейда [4] на соответствующие метризуемые локально выпуклые пространства. Например, если E — полное метризуемое локально выпуклое пространство, то существует *счетное* множество непрерывных линейных функционалов $\{x_n^*\}$, такое, что если $x_n^*\mu(\delta)x = 0$ для всех n, то $\mu(\delta)x = 0$ (и, следовательно, сужение $\mu(\delta)$ на $\mathfrak{M}(x)$ равно 0). В том случае, когда E есть B-пространство, это счетное множество можно заменить *одним* функционалом, но в общем случае этого сделать нельзя.

Один из самых удивительных результатов Уолша [2] состоит в следующем: если μ — равностепенно непрерывная борелевская спектральная мера со значениями в пространстве непрерывных операторов пространства E, в котором замкнутые ограниченные множества компактны (например, в монтелевском пространстве), то мера μ чисто атомарная. В статье Уолша [3] этот результат был распространен на случай пространств E, в которых слабо компактные подмножества компактны (например, l_1). Таким образом, в таких пространствах скалярные операторы являются пределами в сильной операторной топологии конечномерных операторов. Так как многие интересные ненормируемые локально выпуклые пространства являются монтелевскими, это означает, что скалярные операторы в этих пространствах имеют структуру очень жесткого типа.

Интерполяция спектральных операторов. Вопросы об интерполяции спектральных операторов и их разложениях единицы изучались Краббе [13] и Обереем [3]. Статья Краббе относится к более общей ситуации; Оберей обращается к случаю L_p-пространств, и его результаты описать проще. Пусть (S, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и $L_p = L_p(S, \Sigma, \mu)$. Пусть $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant +\infty$ и T — спектральный оператор в L_r с разложением единицы E. Если L_s инвариантно относительно T и оператор $T_s = T \mid L_s$ спектрален, то его разложением единицы является $E \mid L_s$. Более того, если выполнены эти условия и $r \leqslant p \leqslant s$, то L_p инвариантно относительно T и $T_p = T \mid L_p$ является спектральным оператором с разложением единицы $E_p = E \mid L_p$. Аналогично, если оператор S непрерывен в обоих пространствах L_r и L_s и спектрален в одном из них, то необходимое и достаточное условие его спектральности в другом пространстве состоит в том, что сужение (или расширение) спектральной меры должно быть ограничено во втором пространстве.

T-меры. Понятие спектрального оператора скалярного типа было обобщено Бишопом [1] довольно интересным способом. Хотя он рассматривал замкнутые операторы, мы ограничим наше внимание операторами $T \in B(\mathfrak{X})$ в случае рефлексивного B-пространства $\mathfrak{X}$.

Векторнозначная мера m на борелевских множествах $\mathscr{B}$ комплексной плоскости C со значениями в $\mathfrak{X}$ называется *T-мерой*, если

$$Tm(\delta) = \int_{\delta} \lambda m(d\lambda), \qquad \delta \in \mathscr{B}.$$

Если m является T-мерой и $x = m(C)$, мы говорим, что *вектор x имеет T-меру m*. В некотором смысле T-мера является обобщением собственного вектора оператора T. Легко показать, что если T — спектральный оператор скалярного типа с разложением единицы E, то $E(\cdot)x$ является T-мерой вектора x. Однако не всякий оператор T имеет нетривиальную T-меру; рассмотрите оператор правого сдвига в l_2 или квазинильпотентный оператор с пустым точечным спектром.

Доказано, что если m является T-мерой, то m обращается в нуль вне спектра $\sigma(T)$. Более того, *T является спектральным оператором* *скалярного типа тогда и только тогда, когда каждый вектор имеет единственную T-меру.*

Для операторов, имеющих достаточно много T-мер, строится функциональное исчисление. Оно совершенно аналогично исчислению для случая самосопряженного оператора; однако может случиться, что $f(T)$ будет неограниченным, даже когда f и T ограничены.

Чтобы охватить и квазинильпотентные операторы, Бишоп ввел понятие *слабой T-меры*. Он показал, что *оператор T в рефлексивном B-пространстве $\mathfrak{X}$ является спектральным тогда и только тогда, когда любой вектор $x \in \mathfrak{X}$ имеет слабую T-меру и любой вектор $x^* \in \mathfrak{X}^*$ имеет слабую T^*-меру.*

Основные результаты Бишопа [1] перенесены Маедой [1, 2] на случай локально выпуклых пространств, которые являются бочечными и квазиполными.

«Теории двойственности» Бишопа. В очень глубокой статье Эррета Бишопа [2] установлен ряд интересных результатов о взаимосвязях между некоторыми многообразиями в рефлексивном комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, ассоциированными с оператором T, и аналогичными многообразиями, ассоциированными с сопряженным оператором T^*. Бишоп называет их «теориями двойственности», но совершенно очевидно, что эти результаты относятся к спектральной теории.

Пусть F — замкнутое подмножество комплексной плоскости C. *Сильное спектральное многообразие* $\mathfrak{M}(F, T)$ определяется как замыкание множества всех векторов x из $\mathfrak{X}$, обладающих тем свойством, что существует аналитическая $\mathfrak{X}$-значная функция f на дополнении F', такая, что $(\lambda I - T) f(\lambda) = x$ для всех $\lambda \in F'$. *Слабое спектральное многообразие* $\mathfrak{N}(F, T)$ определяется как множество всех векторов $x \in \mathfrak{X}$, обладающих тем свойством, что при любом $\varepsilon > 0$ существует аналитическая $\mathfrak{X}$-значная функция f на F', такая, что $|(\lambda I - T) f(\lambda) - x| < \varepsilon$ для всех $\lambda \in F'$.

Очевидно, что эти спектральные многообразия замкнуты и $\mathfrak{M}(F, T) \subseteq \mathfrak{N}(F, T)$; даны примеры, показывающие, что это включение может быть собственным.

Бишоп вводит четыре типа теорий двойственности для оператора в рефлексивном пространстве $\mathfrak{X}$. (i) Мы говорим, что оператор T допускает *теорию двойственности типа* 1, если $\mathfrak{M}(F_1, T)^{\perp} \subseteq \mathfrak{M}(F_2, T^*)$, какими бы ни были непересекающиеся компактные множества F_1 и F_2, и если $\mathfrak{M}(\overline{G}_1, T)^{\perp} \subseteq \mathfrak{M}(\overline{G}_2, T^*)$, какими бы ни были открытые множества G_1 и G_2, покрывающие все C. (ii) Оператор T допускает *теорию двойственности типа* 2, если $\mathfrak{M}(\overline{G}_1, T), \ldots, \mathfrak{M}(\overline{G}_n, T)$ порождают $\mathfrak{X}$, какими бы ни были открытые множества $G_1, \ldots, G_n$, покрывающие C. (iii) Оператор T допускает *теорию двойственности типа* 3, если для произвольных открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$, покрывающих комплексную плоскость, существуют замкнутые линейные подпространства $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$, порождающие все $\mathfrak{X}$, инвариантные относительно T и такие, что $\sigma(T \mid \mathfrak{M}_i) \subseteq \overline{G}_i$, $i = 1, \ldots, n$. (iv) Оператор T допускает *теорию двойственности типа* 4, если

$$\mathfrak{M}(F_1, T)^{\perp} \supseteq \mathfrak{N}(F_2, T^*), \qquad \mathfrak{N}(F_1, T)^{\perp} \supseteq \mathfrak{M}(F_2, T^*),$$
$$\mathfrak{M}(\overline{G}_1, T)^{\perp} \subseteq \mathfrak{N}(\overline{G}_2, T^*), \qquad \mathfrak{N}(\overline{G}, T)^{\perp} \subseteq \mathfrak{M}(\overline{G}_2, T^*),$$

какими бы ни были непересекающиеся компактные множества F_1 и F_2 и открытые множества G_1 и G_2, покрывающие всю плоскость C. (Следует отметить, что операторы T и T^* играют симметричную роль в условиях (i) и (iv).)

Дан пример, показывающий, что не всякий оператор допускает теорию двойственности типа 1; однако если для T выполнено условие

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{N}(F_1, T) \subseteq \mathfrak{M}(F_2, T),$$

если F_1 содержится во внутренности F_2, то T допускает такую теорию двойственности.

Безусловно нетривиальным является тот факт, что всякий ограниченный линейный оператор T в рефлексивном B-пространстве $\mathfrak{X}$ допускает теорию двойственности типа 4. Доказательство этой теоремы основано на анализе некоторых B-пространств векторнозначных аналитических функций.

Мы говорим, что T удовлетворяет условию (β), если для любого открытого множества U, любой последовательности $\{f_n\}$ аналитических $\mathfrak{X}$-значных функций на U и такого вектора $x \in \mathfrak{X}$, что $(\lambda I - T) f_n(\lambda) \to x$ равномерно на компактных подмножествах в U, $\{f_n\}$ равномерно ограничена на компактных подмножествах в U.

Доказано, что если T удовлетворяет условию (β), а F замкнуто в C, то (1) $\mathfrak{M}(F, T) = \mathfrak{N}(F, T)$; (2) для вектора $x \in \mathfrak{M}(F, T)$ существует аналитическая функция f: $F' \to \mathfrak{X}$, такая, что $(\lambda I - T) f(\lambda) = x$ для всех $\lambda \in F'$; (3) T удовлетворяет условию (α); (4) T допускает теорию двойственности типа 1.

Доказано, что если T^* удовлетворяет условию (β), то T допускает теорию двойственности типа 2. Более того, если T и T^* удовлетворяют условию (β), то T допускает теорию двойственности типа 3.

В частности, пусть T — оператор в рефлексивном B-пространстве $\mathfrak{X}$, обладающий следующим свойством: для любого открытого множества U и любой последовательности $\{f_n\}$ комплекснозначных аналитических функций на U, такой, что $|f_n(\lambda)| \leqslant |R(\lambda; T)|$ для всех $\lambda \in U \cap \rho(T)$, последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена на компактных подмножествах в U. Отсюда вытекает, что T и T^* удовлетворяют условию (β) и, следовательно, допускают теории двойственности типов 1, 2, 3 и 4.

Применяя теорему Вульфа [3], Бишоп пришел к выводу, что если $\mathfrak{X}$ рефлексивно, спектр $\sigma(T)$ веществен и

$$\int \log^+ \log^+ \sup\{|R(\lambda;\ T)|\,|\operatorname{Im}(\lambda)=y\}\,dy<+\infty,$$

то оператор T допускает теории двойственности типов 1, 2, 3 и 4.

Разложимые операторы. Фойаш [12] ввел в рассмотрение широкий и важный класс операторов, которые он назвал «разложимыми». Этот класс содержит в себе все операторы, для которых развита достаточно богатая спектральная теория; например, будет показано, что разложимые операторы допускают теорию двойственности типа 3 в смысле Бишопа. Мы дадим краткое изложение теории разложимых операторов; за дальнейшими деталями читателю следует обратиться к работам Фойаша [12] и Коложоары и Фойаша [1, 4]. См. также Апостол [4, 5, 11, 15], Коложоара и Фойаш [2, 5], Кариотис [1] и Василеску [3—8] по поводу других результатов о разложимых операторах.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство с ортонормальным базисом $\{x_n\,|\,n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$, T — оператор «правого сдвига» $Tx_n=$ $=x_{n+1}$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ и $\mathfrak{Y}=\overline{\mathrm{sp}}\{x_n\,|\,n\geqslant 0\}$. Тогда $\mathfrak{Y}$ инвариантно относительно T, оператор T унитарен и $\sigma(T)=$ $=\{\lambda\in C\,|\ |\lambda|=1\}$, в то время как $\sigma(T\,|\,\mathfrak{Y})=\{\lambda\in C\,|\,|\lambda|\leqslant 1\}$. Таким образом, сужение оператора T на произвольное инвариантное замкнутое подпространство может иметь спектр, более широкий, чем $\sigma(T)$.

Фойаш [12] называет замкнутое линейное подпространство $\mathfrak{Y}$ в B-пространстве $\mathfrak{X}$ *спектральным максимальным подпространством* оператора $T\in B(\mathfrak{X})$, если (i) $\mathfrak{Y}$ инвариантно относительно T и (ii) для замкнутого линейного подпространства $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{X}$, инвариантного относительно T и такого, что $\sigma(T\,|\,\mathfrak{Z})\subseteq\sigma(T\,|\,\mathfrak{Y})$, имеет место включение $\mathfrak{Z}\subseteq\mathfrak{Y}$. (См. также Любич и Мацаев [2; § 4, IV].)

Можно показать, что если $\mathfrak{Y}$ — спектральное максимальное подпространство оператора T, то $\sigma(T\,|\,\mathfrak{Y})\subseteq\sigma(T)$; кроме того, $\mathfrak{Y}$ инвариантно относительно любого оператора $S\in B(\mathfrak{X})$, коммутирующего с T. Более общо, если $\mathfrak{Y}_1$ и $\mathfrak{Y}_2$ — спектральные максимальные подпространства оператора T, то $\mathfrak{Y}_1\subseteq\mathfrak{Y}_2$ тогда и только тогда, когда $\sigma(T\,|\,\mathfrak{Y}_1)\subseteq\sigma(T\,|\,\mathfrak{Y}_2)$.

Любич и Мацаев [2] привели пример оператора T в гильбертовом пространстве со спектром $\sigma(T)=[0,\ 1]$, такого, что сужение T на любое нетривиальное инвариантное замкнутое линейное подпространство $\mathfrak{Y}$ имеет спектр $\sigma(T\,|\,\mathfrak{Y})=[0,\ 1]$. В противоположность этому Коложоара и Фойаш [1, стр. 526; 4, стр. 23] показали, что если T обладает свойством однозначного распространения и

$$\mathfrak{X}_T(F)=\{x\in\mathfrak{X}\,|\,\sigma_T(x)\subseteq F\}$$

замкнуто, то $\mathfrak{X}_T(F)$ — спектральное максимальное подпространство оператора T и

$$(*) \qquad \sigma(T \mid \mathfrak{X}_T(F)) \subseteq \sigma(T) \cap F.$$

Соотношение (*) было ранее получено Любичем и Мацаевым [2] и Бартлом [6] для операторов с вещественным спектром, резольвента которых удовлетворяет некоторому условию роста, а для «обобщенных скалярных операторов» Фойашем [9].

Нетрудно проверить, что если T — спектральный оператор с разложением единицы E, то для замкнутого подмножества F в спектре $\sigma(T)$ подпространство $E(F)\mathfrak{X}$ является спектральным максимальным подпространством оператора T. Аналогично, если σ — спектральное множество (в смысле VII.3.17) и E_σ — соответствующий проекционный оператор, то $E_\sigma\mathfrak{X}$ является спектральным максимальным подпространством оператора T. Следовательно, как спектральные, так и компактные операторы имеют «много» спектральных максимальных подпространств. Можно проверить, что они являются разложимыми в следующем смысле:

Определение. Оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ называется *разложимым*, если для любого конечного покрытия $G_1, \ldots, G_n$ спектра $\sigma(T)$ открытыми множествами существует семейство $\mathfrak{Y}_1, \ldots, \mathfrak{Y}_n$ спектральных максимальных подпространств оператора T, такое, что

(i) $\sigma(T \mid \mathfrak{Y}_j) \subseteq G_j$, $j = 1, \ldots, n$, и (ii) $\mathfrak{X} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{Y}_j$.

(Подчеркнем, что подпространства $\mathfrak{Y}_j$ не определены однозначно, и мы не предполагаем, что $\mathfrak{Y}_j \cap \mathfrak{Y}_k = \{0\}$ при $j \neq k$; следовательно, сумма в (ii) не обязательно прямая. Но это соотношение означает, что всякий вектор $x \in \mathfrak{X}$ можно представить в виде $x = \sum_{j=1}^{n} y_j$, $y_j \in \mathfrak{Y}_j$.)

Фойаш [12] показал, что всякий разложимый оператор T обладает свойством однозначного распространения; поэтому определение многообразия $\mathfrak{X}_T(F)$ для замкнутого множества F в C имеет смысл. Более того, $\mathfrak{X}_T(F)$ является замкнутым линейным подпространством и даже спектральным максимальным подпространством оператора T, откуда вытекает, что выполнено соотношение (*). Обратно, если $\mathfrak{Y}$ — спектральное максимальное подпространство разложимого оператора T, то $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_T(\sigma(T \mid \mathfrak{Y}))$. Таким образом, замкнутое линейное подпространство в $\mathfrak{X}$ является спектральным максимальным подпространством разложимого оператора T тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\mathfrak{X}_T(F)$ для некоторого замкнутого множества F.

Возмущения разложимых операторов квазинильпотентными операторами и связанные с этим вопросы были рассмотрены Коложоарой и Фойашем [1, 4]. Напомним, что операторы T, $U \in B(\mathfrak{X})$

называются *квазинильпотентно эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty} |(T-U)^{[n]}|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |(U-T)^{[n]}|^{1/n} = 0;$$

здесь использовано обозначение

$$(T-U)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} T^k U^{n-k}.$$

(Если $TU = UT$, то T и U квазинильпотентно эквивалентны тогда и только тогда, когда оператор $T - U$ квазинильпотентен.) Доказано, что если T — разложимый оператор, а T и U квазинильпотентно эквивалентны, то U — разложимый оператор. Более того, если T и U разложимы, то $\mathfrak{X}_T(F) = \mathfrak{X}_U(F)$ для всех замкнутых множеств F тогда и только тогда, когда T и U квазинильпотентно эквивалентны.

Если T — спектральный оператор, а T и U квазинильпотентно эквивалентны, то U — спектральный оператор. Более того, если T и U — спектральные операторы, то они квазинильпотентно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют *одно и то же* разложение единицы, и тогда и только тогда, когда выполнено одно условие: $\lim_n |(T-U)^{[n]}|^{1/n} = 0$.

Если T — разложимый оператор, а f — функция, аналитическая на открытом множестве, содержащем спектр $\sigma(T)$, то $f(T)$ — разложимый оператор (см. Коложоара и Фойаш [2, 4]). Обратно, если f аналитична в окрестности спектра $\sigma(U)$ и взаимно однозначна на $\sigma(U)$, а оператор $f(U)$ разложим, то и U разложим. Аналогично этому Апостол [5, 11] показал, что если f аналитична в окрестности спектра $\sigma(U)$ и нули производной f' не имеют предельной точки в $\sigma(U)$, а оператор $f(U)$ разложимый, то и U разложимый.

В статьях Апостола [4, 11] подробно изучаются сужения разложимого оператора на подпространства и операторы, индуцированные разложимым оператором в факторпространствах.

Апостол [11] ввел понятие «спектральной емкости», которое оказывается тесно связанным с теорией разложимых операторов. *Спектральная емкость* $\mathscr{E}$ — это отображение системы $\mathscr{F}$ всех замкнутых подмножеств из C в множество $\mathscr{S}(\mathfrak{X})$ замкнутых линейных подпространств в $\mathfrak{X}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\mathscr{E}(\varnothing) = \{0\}, \quad \mathscr{E}(C) = \mathfrak{X};$

(ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}(F_n) = \mathscr{E}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right), \quad F_n \in \mathscr{F};$

(iii) если $\{G_1, \ldots, G_n\}$ — покрытие C открытыми множествами, то

$$\mathfrak{X} = \sum_{j=1}^{n} \mathscr{E}(\overline{G}_j).$$

Мы говорим, что оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ имеет спектральную емкость $\mathscr{E}$, если для всякого $F \in \mathscr{F}$ выполнены условия

(iv) $T\mathscr{E}(F) \subseteq \mathscr{E}(F)$;

(v) $\sigma(T \mid \mathscr{E}(F)) \subseteq F$.

Следует отметить, что если E — спектральная мера на борелевских множествах $\mathscr{B}$ в C, то функция $\mathscr{E}$, значение которой на $F \in \mathscr{F}$ определяется соотношением $\mathscr{E}(F) = E(F)\mathfrak{X}$, порождает спектральную емкость.

Апостол [11] доказал, что если $T \in B(\mathfrak{X})$ — разложимый оператор, то отображение $\mathscr{E}$: $\mathscr{F} \to \mathscr{S}(\mathfrak{X})$, задаваемое соотношением

$$(**)\qquad \mathscr{E}(F) = \mathfrak{X}_T(F), \qquad F \in \mathscr{F},$$

является спектральной емкостью для оператора T. Обратно, Фойаш [17] показал, что если оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ имеет спектральную емкость $\mathscr{E}$, то он разложим и выполнено соотношение (**). Более общо, он показал, что если T — оператор, для которого существует функция $\mathscr{E}$, удовлетворяющая условиям (i), (iii), (iv), (v) и

$$(\text{ii}')\qquad \mathscr{E}(F_1) \cap \mathscr{E}(F_2) = \mathscr{E}(F_1 \cap F_2), \qquad F_j \in \mathscr{F},$$

то T — разложимый оператор и

$$\mathfrak{X}_T(F) = \bigcap \{\mathscr{E}(\bar{G}) \mid G \text{ открыто}, \ F \subseteq G\}.$$

Операционные исчисления и спектральная теория. Существование операционного исчисления, изложенного в гл. VII, для аналитических функций произвольного оператора в $B(\mathfrak{X})$ и операционного исчисления, изложенного в гл. X, для непрерывных (или даже борелевских существенно ограниченных) функций самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве было известно уже давно. Аналогично, операционное исчисление для ограниченных борелевских функций спектрального оператора было развито Данфордом [17]; в некотором смысле спектральные операторы были введены как класс операторов в $B(\mathfrak{X})$, для которого имелось богатое операционное исчисление. Таким образом, операционное исчисление рассматривалось как следствие спектральных свойств оператора.

В последнее время было выполнено значительное количество работ, в которых спектральная теория рассматривается как следствие соответствующего операционного исчисления. В известной степени работа Лорха [7] об операторе T в рефлексивном B-пространстве, удовлетворяющем условию $|T^n| \leqslant K$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, была основана на возможности определения оператора $f(T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n T^n$, где $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$ — абсолютно сходящийся ряд Фурье. Аналогично этому спектральный оператор скалярного типа T можно определить как оператор, для которого существует непрерывный гомоморфизм B-алгебры $B(C, \mathscr{B})$ ограниченных борелевских функций на комплексной плоскости в $B(\mathfrak{X})$, переводящий функцию $f_0(\lambda) \equiv 1$ в I и функцию $f_1(\lambda) \equiv \lambda$ в T. Как только такая точка зрения принята, естественно заменить B-алгебру $B(C, \mathscr{B})$ меньшей алгеброй функций. Таким образом, мы можем попытаться классифицировать операторы $T \in B(\mathfrak{X})$ при помощи алгебр $\mathfrak{A}$ функций, заданных на соответствующем подмножестве в C, для которых существует непрерывный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $B(\mathfrak{X})$, переводящий f_0 в I и f_1 в T. Такой подход был довольно явно предложен в статьях Вульфа [4, 5]; например, в [4] была рассмотрена алгебра C^n на единичной окружности или вещественной прямой, а в [5] — более общие алгебры. Подобно этому Смарт [2] изучал абсолютно непрерывные функции «существенно ограниченных» операторов, чтобы получить некоторые спектральные разложения (см. ниже).

Несмотря на эти ссылки, по-видимому, справедливо сказать, что первой работой, в которой систематически использовалось функциональное исчисление как подход для построения спектральной теории оператора, была статья Фойаша [7], появившаяся в 1960 г. Это исследование было продолжено в 1962 г. статьями Коложоары [1, 2] и Маеды [5] и в 1964 г.— Канторовича [3] и Сайна [1]. С тех пор в этом направлении был получен ряд ценных результатов; особенно см. Апостол [3, 4, 5, 9, 11, 15], Коложоара [1—5], Коложоара и Фойаш [1—3], Фойаш [9—11, 13], Ионеску [5], Канторович [3,5—9], Маеда [4—8], Рингроуз [3], Смарт [2], Сайн [1], Силлс [1], Сюкью [1], Тильман [1, 2] и Василеску [1, 4]. К счастью, прекрасная монография Коложоары и Фойаша [4] (см. также Коложоара [5]) посвящена как раз этому аспекту спектральной теории; эта книга очень содержательна и современна. Поэтому мы отсылаем к ней читателя за деталями, а сами ограничимся общим обзором.

Пусть Ω — открытое множество в C. Фойаш [19] определяет *спектральное распределение* как линейное отображение U алгебры $C^\infty(\Omega)$ комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на Ω в алгебру $B(\mathfrak{X})$, такое, что (i) U непрерывно в топологии равномерной сходимости всех производных на компактных подмножествах в Ω; (ii) U имеет компактный носитель в Ω; (iii) $U(\varphi\psi) = U(\varphi)U(\psi)$ для всех φ и ψ из $C^\infty(\Omega)$; (iv) $U(f_0) = I$ для $f_0(\lambda) \equiv 1$, $\lambda \in \Omega$. Оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ называется *обобщенным скалярным*, если существует спектральное распределение U: $C^\infty(\Omega) \to B(\mathfrak{X})$, такое, что $U(f_1) = T$ для $f_1(\lambda) \equiv \lambda$, $\lambda \in \Omega$; в этом случае U называется *спектральным распределением* для оператора T.

К сожалению, спектральное распределение обобщенного скалярного оператора T не единственно; действительно, если U — одно такое распределение, а Q — нильпотентный оператор (скажем,

$Q^{n+1} = 0$), коммутирующий с $U(f)$ при всех $f \in C^\infty$, то

$$V(f) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^k}{k!} U(D^k f), \qquad f \in C^\infty(\Omega),$$

где $Df = \frac{1}{2}[(\partial f/\partial x) + i(\partial f/\partial y)]$, является спектральным распределением для оператора T. (Заметим, что $D^k f_1 = 0$ для всех $k \geqslant 1$; поэтому $V(f_1) = T$.)

Спектральное распределение $U\colon C^\infty(\Omega) \to B(\mathfrak{X})$ называется *регулярным*, если из условий $A \in B(\mathfrak{X})$ и $AU(f_1) = U(f_1)A$ вытекает, что $AU(\varphi) = U(\varphi)A$ для всех $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Обобщенный скалярный оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ называется регулярным, если он имеет регулярное спектральное распределение. Хотя неизвестно, является ли регулярным любой обобщенный скалярный оператор (кроме случаев, когда его спектр достаточно «тонкий»), для любых двух заданных *регулярных* спектральных распределений U и V обобщенного скалярного оператора существует целое число $p > 0$, такое, что $(U(\varphi) - V(\varphi))^p = 0$ для всех $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Более общо, если U и V — произвольные (не обязательно коммутирующие) спектральные распределения обобщенного скалярного оператора, то существует целое число $p > 0$, такое, что $(U(\varphi) - V(\varphi))^{[p]} = 0$ для всех $\varphi \in C^\infty(\Omega)$; таким образом, спектральное распределение единственно, по крайней мере с точностью до квазинильпотентной эквивалентности. Аналогично, если обобщенный спектральный оператор имеет кратность 1 (в том смысле, что единственным квазинильпотентным оператором, коммутирующим с T, является 0), то он является регулярным обобщенным спектральным оператором с единственным спектральным распределением (см. Коложоара и Фойаш [4; стр. 103]).

Класс обобщенных скалярных операторов содержит в себе класс операторов скалярного типа, поскольку мы можем определить

$$U(\varphi) = \int \varphi(\lambda) E(d\lambda), \qquad \varphi \in C^\infty(C),$$

где E — разложение единицы для S. Более общо, если $T = S + N$ — каноническое разложение спектрального оператора *конечного типа* (скажем, $N^n = 0$), то можно, как и выше, определить U и гомоморфизм

$$V(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} U(D^k \varphi)$$

для проверки того, что такой спектральный оператор является обобщенным скалярным. Обратно, если спектральный оператор оказывается обобщенным скалярным оператором, то он имеет конечный тип (см. Фойаш [11] или Коложоара и Фойаш [4]). Для построения примеров обобщенных скалярных операторов, не являющихся спектральными, рассмотрим пространство $\mathfrak{X} = C^r[0, 1]$ ($r = 0, 1, 2, \ldots$) с нормой

$$|f| = \sup_{t \in [0, 1]} \{|f(t)|, \ |f'(t)|, \ldots, |f^{(r)}(t)|\}$$

и оператор T, полагая $(Tf)(t) = tf(t)$, $t \in [0, 1]$; этот оператор — обобщенный скалярный со спектральным распределением $(U(\varphi) f)(t) = \varphi(t) f(t)$ для $\varphi \in C^\infty$.

Доказано (см. Фойаш [9] или Коложоара и Фойаш [4]), что если U — спектральное распределение на $C^\infty(\Omega)$ со значениями в $B(\mathfrak{X})$ и $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, то $U(\varphi)$ — обобщенный скалярный оператор со спектром, содержащимся в множестве значений функции φ на носителе U. В частности, если T — обобщенный скалярный оператор, а U — спектральное распределение для T, то $\sigma(T)$ совпадает с носителем U. Кроме того, всякий обобщенный скалярный оператор T является разложимым (в указанном выше смысле) и, следовательно, обладает свойством однозначного распространения. Более того, спектральное максимальное подпространство $\mathfrak{X}_T(F)$, где F замкнуто, можно охарактеризовать как пересечение

$$\bigcap \{\mathfrak{X}^G \mid G \ \text{ открыто}, \ \ F \subseteq G\},$$

где $\mathfrak{X}^G$ — подпространство, состоящее из векторов $U(\varphi)x$, $x \in \mathfrak{X}$, а носители функций $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ содержатся в G.

Используя результаты о тензорных произведениях коммутирующих спектральных распределений, Фойаш доказал, что сумма (и произведение) двух обобщенных скалярных операторов, имеющих коммутирующие спектральные распределения, является обобщенным скалярным оператором. Следовательно, сумма (и произведение) двух коммутирующих *регулярных* обобщенных скалярных операторов является обобщенным скалярным оператором. В частности, сумма (и произведение) двух коммутирующих спектральных операторов конечного типа является обобщенным скалярным оператором.

Мы уже отмечали, что понятие обобщенного скалярного оператора было обобщено далее в работах Коложоары [1, 2], Маеды [4—6], Канторовича [3] и Сайна [1]. В частности, Маеда [4] заменил алгебру C^∞ топологической алгеброй $\mathfrak{A}$ комплекснозначных локально ограниченных борелевских функций, удовлетворяющих некоторым условиям, и изучил непрерывные гомоморфизмы $\mathfrak{A}$ в $B(\mathfrak{X})$.

В своей монографии [4] Коложоара и Фойаш построили еще более общее операционное исчисление. Пусть Ω — подмножество комплексной плоскости; при этом алгебра $\mathfrak{A}$ комплекснозначных функций на Ω называется *допустимой*, если (i) она содержит функции $f_0(\lambda) \equiv 1$ и $f_1(\lambda) \equiv \lambda$ для всех $\lambda \in \Omega$; (ii) для любого покрытия $\{G_1, \ldots, G_n\}$ множества $\overline{\Omega}$ открытыми множествами существуют неотрицательные функции $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ с носителями φ_i в G_i, такие, что $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 1$ на Ω, и (iii) для всякой функции $f \in \mathfrak{A}$ и точки ξ, не лежащей в носителе f, функция f_ξ, задаваемая соотношениями

$$f_\xi(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda)/(\xi - \lambda), & \lambda \in \Omega - \{\xi\}, \\ 0, & \lambda \in \Omega \cap \{\xi\}, \end{cases}$$

принадлежит $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ — допустимая алгебра, то отображение $f \to U_f$ алгебры $\mathfrak{A}$ в $B(\mathfrak{X})$ называется $\mathfrak{A}$-*спектральной функцией*, если (i) отображение $f \to U_f$ является алгебраическим гомоморфизмом с $U_{f_0} = I$ и (ii) отображение $\xi \to U_{f_\xi}$ множества Ω в $B(\mathfrak{X})$ аналитично в дополнении к носителю f. Оператор $S \in B(\mathfrak{X})$ называется $\mathfrak{A}$-*скалярным*, если существует $\mathfrak{A}$-спектральная функция U: $\mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$, такая, что $S = U_{f_1}$ (где $f_1(\lambda) \equiv \lambda$). Всякий спектральный оператор скалярного типа является $\mathfrak{A}$-*скалярным*, если $\mathfrak{A}$ — алгебра ограниченных борелевских функций. Аналогично, если $\mathfrak{X} = L_p(\Omega)$ $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $\mathfrak{A} = L_\infty(\Omega)$, то оператор умножения $Sg(t) = tg(t)$ для $g \in L_p(\Omega)$, $t \in \Omega$, является $\mathfrak{A}$-скалярным. Кроме того, если S — компактный оператор и $\mathfrak{A}$ — алгебра всех борелевских функций f, определенных в круге $\Omega = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant |S| + 1\}$ и аналитических в некоторой открытой окрестности G_f спектра $\sigma(S)$, то оператор S является $\mathfrak{A}$-скалярным.

Доказано, что если S является $\mathfrak{A}$-скалярным оператором с $\mathfrak{A}$-спектральной функцией U, то S разложим и, следовательно, обладает свойством однозначного распространения; более того, спектр $\sigma(S)$ совпадает с носителем U.

Пусть теперь Ω — замкнутое множество в C, $\mathfrak{A}$ — допустимая алгебра непрерывных функций на Ω, замкнутая относительно перехода к обратным элементам (т. е. если $f \in \mathfrak{A}$ и $1/f \in C(\Omega)$, то $1/f \in \mathfrak{A}$). Если U есть $\mathfrak{A}$-спектральная функция и $\mathfrak{A}_1$ обозначает B-алгебру, порожденную в $B(\mathfrak{X})$ операторами $\{U_f \mid f \in \mathfrak{A}\}$, то пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_1$ можно отождествить со спектром $\mathfrak{A}$-скалярного оператора $S = U_{f_1}$ и после такого отождествления гельфандовское отображение $B \to \hat{B}$ из $\mathfrak{A}_1$ в $C(\sigma(S))$ обладает следующими свойствами:

$$\hat{U}_f = f \mid \sigma(S), \quad \sigma(U_f) = f(\sigma(S))$$

для всех $f \in \mathfrak{A}$. Это — обобщение результата, установленного для спектральных распределений Василеску [1]. Отсюда вытекает, что если $\mathfrak{A}$ — такая же алгебра, как и выше, а U и V — две $\mathfrak{A}$-спектральные функции для одного и того же $\mathfrak{A}$-скалярного оператора, то U_f и V_f квазинильпотентно эквивалентны для всех $f \in \mathfrak{A}$.

Понятие спектрального оператора было обобщено Коложоарой [1] и Маедой [4], и их соображения были перенесены на понятие $\mathfrak{A}$-спектрального оператора Коложоарой и Фойашем [4; стр. 76]. Показано, что для оператора $T \in B(\mathfrak{X})$ тогда и только тогда существует $\mathfrak{A}$-спектральная функция U, такая, что T квазинильпотентно эквивалентен оператору $S = U_{f_1}$, когда

$$T\mathfrak{X}_S(F) \subseteq \mathfrak{X}_S(F) \text{ и } \sigma(T \mid \mathfrak{X}_S(F)) \subseteq F$$

для любого замкнутого множества F в C. Если оператор T удовлетворяет этим условиям и коммутирует с $\mathfrak{A}$-спектральной функцией, то он называется *$\mathfrak{A}$-спектральным оператором*. Доказано, что T является $\mathfrak{A}$-спектральным оператором тогда и только тогда, когда $T = S + N$, где S есть $\mathfrak{A}$-скалярный оператор, а N — квазинильпотентный оператор, коммутирующий с $\mathfrak{A}$-спектральной функцией оператора S. Это, конечно, является обобщением теоремы о каноническом представлении.

Подобным же образом можно ввести *$\mathfrak{A}$-унитарные* и *$\mathfrak{A}$-самосопряженные* операторы как $\mathfrak{A}$-скалярные операторы для некоторой допустимой алгебры функций, заданных на единичной окружности C_1 или на вещественной прямой R соответственно. Если оператор $S \in B(\mathfrak{X})$ удовлетворяет условию $|S^n| = O(|n|^{\alpha})$ при $|n| \to \infty$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$, то S является C^m-унитарным оператором при $m > \alpha + 1$. Точно так же, если резольвента удовлетворяет условию

$$|R(\lambda; S)| = O(|1 - |\lambda||^{-\beta}), \qquad |\lambda| \neq 1,$$

при $|\lambda| \to 1$ для некоторого $\beta \geqslant 1$, то S является C^m-унитарным при $m > \beta + 1$. Более общо, пусть спектр $\sigma(S)$ оператора $S \in B(\mathfrak{X})$ лежит в C_1; положим $\rho_n = |S^n|$ и обозначим через $\mathfrak{A}_S$ алгебру всех функций $f\colon C_1 \to C$, таких, что

$$f(e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| \rho_n < +\infty.$$

Тогда $\mathfrak{A}_S$ есть B-алгебра с поточечными операциями и нормой $|f|_S = \sum |a_n| \rho_n$. Если S удовлетворяет условию Бёрлинга

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\log \rho_n}{1+n^2} < +\infty,$$

то B-алгебра $\mathfrak{A}_S$ регулярна, а оператор S $\mathfrak{A}_S$-унитарен. Действительно, $\mathfrak{A}$-спектральную функцию для S можно определить, полагая

$$U_f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n S^n,$$

где f — выписанная выше функция. Этот результат обобщает некоторые теоремы Уэрмера [1,7]. Аналогично, если $\sigma(S) \subseteq C_1$ и

$$|R(\lambda; S)| \leqslant M \exp(K \,|\, |\lambda| - 1\,|^{-\beta})$$

для некоторого $\beta > 0$, то S является $\mathfrak{A}_S$-унитарным оператором.

Заменой переменной («преобразование Кэли») изучение $\mathfrak{A}$-самосопряженных операторов можно свести к анализу $\mathfrak{A}$-унитарных операторов. Таким образом, можно показать, что если оператор $S \in B(\mathfrak{X})$ имеет спектр $\sigma(S)$, лежащий на вещественной прямой, и

$$|R(\lambda; S)| \leqslant M \exp(K\,|\operatorname{Im}\lambda|^{-\beta}), \qquad \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

для некоторого $\beta > 0$, то S является $\mathfrak{A}$-самосопряженным оператором для соответствующим образом подобранной алгебры $\mathfrak{A}$. В частности, если

$$|R(\lambda; S)| = O(|\operatorname{Im}\lambda|^{-\beta}), \qquad \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

при $\operatorname{Im}\lambda \to 0$ для некоторого $\beta > 0$, то S является C^m-самосопряженным при $m > [\beta] + 1$. Аналогично, если

$$|e^{itS}| = O(|t|^{\gamma})$$

при $|t| \to \infty$, то S является C^m-самосопряженным при $m > [\gamma] + 2$. (См. также Канторович [5] и Тильман [1].)

Субдиагонализация и вольтерровы операторы. Изложенные выше результаты, если их применить к операторам в гильбертовом пространстве, дают весьма интересную информацию. Пусть оператор $T \in B(\mathfrak{H})$ таков, что разность $T - T^*$ принадлежит карлеменовскому классу C_p при некотором p, $1 \leqslant p < \infty$ (XI.9.1). Тогда существует алгебра $\mathfrak{A}$, такая, что оператор T является $\mathfrak{A}$-самосопряженным. (См. Коложоара и Фойаш [4; стр. 166].) Поэтому если спектр $\sigma(T)$ не сводится к единственной точке, то оператор T имеет нетривиальные спектральные максимальные подпространства. Это улучшает результаты Сахновича [5] и Дж. Шварца [6]. Указанные идеи находят применение в теории «субдиагонализации» (или приведения к треугольному виду) операторов T, для которых разность $T - T^* \in C_p$,— теории, рассмотренной в § XI.10. См. другие статьи по этому и связанным с ним вопросам: Бродский [1, 2, 5, 6], Цекановский [1], Дюрен [1], Гохберг и Крейн [4, 7—9], Келдыш и Лидский [1], Крейн [23], Лившиц [6], Рингроуз [4,5], Сахнович [4, 5], Дж. Шварц [6, 7], Секефальви-Надь и Фойаш [18].

Важную роль в теории субдиагонализации играют *вольтерровы операторы* (т. е. компактные квазинильпотентные операторы). Эти операторы рассматривались в следующих статьях: М. Бродский [3—6], Бродский и Кисилевский [1], Дж. Фриман [1, 3], Гохберг и Крейн [1, 5, 7, 8], Гольденгершель [1, 2], Калиш [1—4, 6], Кальмушевский [1], Кисилевский [1, 2], Мацаев [1], Ошер [1], Рингроуз [2], Сахнович [1, 6], Сейрасон [2], Судзуки [2].

Существенно ограниченные операторы. Пусть $\mathfrak{X}$ — рефлексивное (или только слабо полное) B-пространство и оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ таков, что $\sigma(T) \subseteq [0, 1]$; тогда очевидно, что T является спектральным оператором скалярного типа в том и только том случае, когда существует такая постоянная $K > 0$, что

$$|p(T)| \leqslant K \sup_{t \in [0, 1]} |p(t)|$$

для любого многочлена p. Аналогично, Смарт [2] называет оператор T *существенно ограниченным*, если существует постоянная $K > 0$, такая, что $|p(T)| \leqslant K \|p\|$ для любого многочлена p, где $\|p\|$ обозначает норму в пространстве $BV[0, 1]$, т. е.

$$\|p\| = |p(0+)| + v(p, [0, 1]),$$

где $v(p, [0, 1])$ — полная вариация p на отрезке $[0, 1]$.

Смарт доказал, что если $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то для любого вещественного числа t существует единственный проектор $E(t)$ в $B(\mathfrak{X})$, такой, что

(i) $E(t)$ коммутирует с любым ограниченным оператором, коммутирующим с T;

(ii) $|E(t)| \leqslant 2K$;

(iii) $E(t) = 0$, если $t < 0$, и $E(t) = I$, если $t \geqslant 1$;

(iv) $E(s) = E(s) E(t) = E(t) E(s)$, если $s \leqslant t$;

(v) $\lim\limits_{t \downarrow s} E(t) x = E(s) x$ для всех $x \in \mathfrak{X}$;

(vi) $\sigma(T \mid E(t)\mathfrak{X}) \subseteq (-\infty, t] \cap \sigma(T)$ и $\sigma(T \mid (I - E(t))\mathfrak{X}) \subseteq [t, +\infty) \cap \sigma(T)$.

Желая усилить результат Смарта, Рингроуз [3, I] показал, что

$$T = \int_0^1 t\, dE(t),$$

где интеграл существует как римановский со значениями в $B(\mathfrak{X})$. (См. также статью Сайна [1], содержащую близкие результаты.)

Подход, использованный Смартом и Рингроузом, частично основан на том факте, что существенно ограниченный оператор допускает функциональное исчисление для абсолютно непрерывных функций, но по своему характеру в основном является «конструктивным». Позже Силлс [1] предложил иной метод анализа, и мы его сейчас опишем. Пусть AC_0 обозначает B-алгебру всех абсолютно непрерывных функций на $[0, 1]$, обращающихся в нуль в нуле. Силлс вводит в AC_0^{**} «аренсовское умножение» и получает B-алгебру, которая не является ни коммутативной, ни полупростой. Однако он сумел отождествить набор идемпотентов в AC_0^{**} с ненулевыми мультипликативными линейными функционалами в $L_\infty[0, 1] \simeq \simeq AC_0^*$; их можно связать с точками отрезка $[0, 1]$. Если $T \in B(\mathfrak{X})$ существенно ограничен, то он порождает операционное исчисление $f \to f(T)$ алгебры $AC_0 \to B(\mathfrak{X})$, и если $\mathfrak{X}$ рефлексивно, этот гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма алгебры AC_0^{**} в $B(\mathfrak{X})$. Расширенный гомоморфизм отображает идемпотенты алгебры AC_0^{**} в проекционные операторы, при помощи которых можно получить интегральное представление оператора T.

Рингроуз [3, II] изучал существенно ограниченные операторы в нерефлексивном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Оказывается, что свойство оператора $T \in B(\mathfrak{X})$ быть существенно ограниченным эквивалентно существованию семейства проекторов $\{F(t) \mid t \in R\}$ в $B(\mathfrak{X}^*)$ (называемого «разложением единицы для T»), удовлетворяющего некоторым естественным условиям и такого, что равенство

$$T^* = I - \int_0^1 F(t)\,dt$$

выполнено в слабой операторной топологии. (Заметим, что это равенство получается из интеграла $\int_0^1 t\,dF(t)$ «интегрированием по частям».) В этом случае семейство $\{F(t)\}$ не обязательно единственно, но если каждый оператор $F(t)$ сопряжен к некоторому оператору в $\mathfrak{X}$, то единственность имеет место.

Берксон и Доусон [2] рассматривают существенно ограниченные операторы, обладающие семейством $\{E(t)\}$ проекторов в $\mathfrak{X}$, таким, что $F(t) = E(t)^*$ для каждого $t \in [0, 1]$. Предположим также, что (i) E сильно непрерывен справа и (ii) существует сильный предел $\lim\limits_{\lambda \uparrow \mu} E(\lambda)$; обозначим его через $E(\mu -)$. (Эти условия автоматически выполняются, если пространство $\mathfrak{X}$ рефлексивно.) Тогда для функции $f \in AC[0, 1]$ мы имеем

$$f(T) = \int_{0-}^1 f(\lambda)\,dE(\lambda),$$

где римановский интеграл существует в сильной операторной топологии; кроме того, разность $E(\mu) - E(\mu -)$ является проектором в $\mathfrak{X}$ на $\{x \mid Tx = \mu x\}$ и $\sigma_r(T) = \varnothing$. Они далее показывают, что оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ со спектром $\sigma(T) \subseteq R$ имеет сопряженный скалярного типа класса $(\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда оператор T существенно ограниченный и функция $xF(\cdot)x^*$ лежит в $BV[0, 1]$ при любых $x \in \mathfrak{X}$, $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Наконец, существенно ограниченный спектральный оператор является оператором скалярного типа, и для него выполнены указанные выше свойства (i) и (ii).

Неограниченные спектральные меры. В § X.1 мы ввели понятие спектральной меры E, заданной на поле Σ подмножеств некоторого множества и ограниченной в том смысле, что $|E(\sigma)| \leqslant K$ для всех $\sigma \in \Sigma$, где K — некоторая постоянная. В настоящей главе мы имели дело почти исключительно со счетно аддитивными спектральными мерами, заданными на σ-поле Σ, а тогда условие ограниченности выполняется автоматически. Эта ограниченность и счетная аддитивность тесно соприкасаются с вопросом о безусловной сходимости разложений по собственным функциям, и многие факты теории краевых задач для дифференциальных уравнений подсказывают, что могла бы быть полезной несколько более общая теория. Такая теория была развита Лянце [2] в случае гильбертова пространства. Он определяет *обобщенную спектральную меру* (о. с. м.) P в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$ как отображение множества $\mathfrak{D}(P)$ в $B(\mathfrak{H})$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\mathfrak{D}(P)$ — это набор борелевских подмножеств комплексной плоскости C, содержащий каждое борелевское подмножество любого множества в $\mathfrak{D}(P)$ и объединение любых двух множеств из $\mathfrak{D}(P)$.

(ii) Для любых δ_1 и $\delta_2 \in \mathfrak{D}(P)$ мы имеем $P(\delta_1)P(\delta_2) = P(\delta_1 \cap \delta_2)$.

(iii) Если $\{\delta_1, \delta_2, \ldots\}$ — разбиение $\delta \in \mathfrak{D}(P)$ на взаимно непересекающиеся борелевские множества и $x, y \in \mathfrak{H}$, то

$$(P(\delta)x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} (P(\delta_k)x, y).$$

(iv) Множества $\{P(\delta) \mid \delta \in \mathfrak{D}(P)\}$ и $\{P(\delta)^* \mid \delta \in \mathfrak{D}(P)\}$ тотальны в $\mathfrak{H}$.

Доказано, что всякую о. с. м. можно распространить на класс $\mathfrak{D}_0(P)$ борелевских подмножеств C, который максимален в некотором смысле, и что это расширение меры единственно. Действительно, примем за $\mathfrak{D}_0(P)$ множество всех борелевских множеств $\delta \subseteq C$, таких, что $\sup\{|P(\sigma)| \mid \sigma \in \mathfrak{D}(P),\ \sigma \subseteq \delta\} < \infty$. Если теперь $\delta \in \mathfrak{D}_0(P)$, то обобщенная последовательность $\{P(\sigma) \mid \sigma \in \mathfrak{D}(P),\ \sigma \subseteq \delta\}$ сильно сходится в $\mathfrak{H}$ к некоторому оператору. Если определить $P_0(\delta)$ как этот сильный предел, то мы получим о. с. м. P_0 на $\mathfrak{D}_0(P)$, которая является расширением P и максимальна в некотором смысле.

Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}$ обозначает множество таких элементов $x \in \mathfrak{H}$, что $x = P(\delta)x$ при некотором $\delta \in \mathfrak{D}(P)$; Лянце называет $\tilde{\mathfrak{H}}$ *пространством базисных элементов*, соответствующих P. Если рассматривать $\mathfrak{D}(P)$ как направленное множество относительно включения, то $\tilde{\mathfrak{H}}$ можно рассматривать как «индуктивный предел» пространств $P(\delta)\mathfrak{H}$ с соответствующей топологией. Аналогично определяется $\hat{\mathfrak{H}}$, *пространство обобщенных элементов*, соответствующих P: это набор всех обобщенных последовательностей $\hat{x} = \{x_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{D}(P)\}$, $x_\sigma \in P(\sigma)\mathfrak{H}$, таких, что $x_\sigma = P(\sigma)x_\sigma$, если

$\sigma \subseteq \delta$. Пространство $\hat{\mathfrak{H}}$ является векторным пространством с очевидными поточечными операциями, и его можно рассматривать как «проективный предел» пространств $P(\delta)\mathfrak{H}$ с соответствующей топологией. Пространство $\tilde{\mathfrak{H}}$ плотно в $\mathfrak{H}$, и отображение $x \to \{P(\delta)x\}$ осуществляет плотное вложение $\mathfrak{H}$ в $\hat{\mathfrak{H}}$. Каждый оператор $P(\delta)$, $\delta \in \mathfrak{D}(P)$, можно по непрерывности расширить до проектора $\hat{P}(\delta)$ в $\hat{\mathfrak{H}}$; более общо, для любого борелевского множества $\sigma \subseteq C$ можно определить оператор $\hat{P}(\sigma)$, полагая его значение на элементе $\hat{x} = \{x_\sigma\}$ в $\hat{\mathfrak{H}}$ равным

$$\hat{P}(\sigma)\hat{x} = \{\hat{x}_{\sigma \cap \delta} \mid \delta \in \mathfrak{D}(P)\}.$$

Эта функция $\hat{P}$ является счетно аддитивной спектральной мерой в $B(\hat{\mathfrak{H}})$, заданной на борелевских множествах в C и такой, что $\hat{P}(C)$ — тождественный оператор в $\hat{\mathfrak{H}}$.

При определенном условии счетности Лянце дает обобщение теоремы Лорха — Макки о связи обобщенных спектральных мер P с самосопряженными спектральными мерами E. Имеется соотношение вида $P(\delta) = M^{-1}E(\delta)M$, хотя взаимно однозначный оператор M неограничен в $\mathfrak{H}$ и является непрерывным лишь в топологиях пространств $\tilde{\mathfrak{H}}$ и $\hat{\mathfrak{H}}$.

Лянце вводит в рассмотрение набор $\mathfrak{A}(P)$ всех замкнутых линейных операторов из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$, которые «коммутируют» в надлежащем смысле с о. с. м. P. Можно ввести на $\mathfrak{A}(P)$ алгебраическую и топологическую структуры, после чего $\mathfrak{A}(P)$ становится изоморфным и гомеоморфным топологической алгебре $\tilde{\mathfrak{A}}(P)$, которая состоит из непрерывных линейных операторов в $\tilde{\mathfrak{H}}$, коммутирующих с сужением P на $\tilde{\mathfrak{H}}$, и топологической алгебре $\hat{\mathfrak{A}}(P)$, которая состоит из непрерывных линейных операторов в $\hat{\mathfrak{H}}$, коммутирующих с расширением P на $\hat{\mathfrak{H}}$. Можно также построить операционное исчисление. Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех борелевских функций $f\colon C \to C$, ограниченных на каждом множестве $\delta \in \mathfrak{D}(P)$. Если $f \in \mathcal{F}$ и $\delta \in \mathfrak{D}(P)$, то определим

$$f_\delta = \int_\delta f(\lambda)\,P(d\lambda),$$

откуда вытекает, что

$$|f_\delta| \leqslant 4\Big\{\sup_{\substack{\sigma\subseteq\delta\\ \delta\in\mathfrak{D}(P)}} |P(\sigma)|\Big\}\Big\{\sup_{\lambda\in\sigma}|f(\lambda)|\Big\}.$$

Если определить теперь T_f как замыкание в $\mathfrak{H}$ оператора в $\tilde{\mathfrak{H}}$, имеющего вид $x \to f_\delta x$, где $x = P(\delta)x$, то отображение $f \to T_f$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{F}$ в $\mathfrak{A}(P)$ и непрерывно в соответствующей топологии на $\mathcal{F}$.

Можно получить и обобщение канонического представления. Мы говорим, что замкнутый оператор N, коммутирующий с P, *P-квазинильпотентен*, если для любого $\delta \in \mathfrak{D}(P)$ сужение N на $P(\delta)\mathfrak{H}$ является квазинильпотентным оператором. Мы говорим, что $S \in \mathfrak{A}(P)$ является *P-скалярным*, если он получается из описанного выше операционного исчисления как элемент, соответствующий функции $f_1(\lambda) \equiv \lambda$, $\lambda \in C$. При этом элемент $T \in \mathfrak{A}(P)$ допускает представление $T = S + N$, где S является P-скалярным, а N P-квазинильпотентным тогда и только тогда, когда спектр $T \mid P(\delta)\mathfrak{H}$ содержится в $\overline{\delta}$ для любого $\delta \in \mathfrak{D}(P)$.

Наконец, теория спектрального представления развита для обобщенных спектральных мер.

Описанные выше идеи находят применение в теории дифференциальных операторов. Пусть R^+ — полуось $[0, +\infty)$, функция $p\colon R^+ \to C$ интегрируема на R^+ и $\theta \in C$. Обозначим через $\mathfrak{D}(L)$ множество всех $f \in L_2(R^+)$, производные f' которых абсолютно непрерывны на любом конечном интервале в R^+, причем

$$f'(0) - \theta f(0) = 0$$

и

$$l(f) = -f'' + pf \in L_2(R^+).$$

Пусть L будет оператором с областью определения $\mathfrak{D}(L)$, такой, что

$$L(f) = -f'' + pf, \quad f \in \mathfrak{D}(L).$$

Наймарк [12] показал, что существует функция A, аналитическая в некоторой полуплоскости $\operatorname{Im}(s) > -\eta$ $(\eta > 0)$, такая, что спектр L состоит из интервала $[0, +\infty)$ и конечного числа точек $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$, причем $\lambda_k = s_k^2$, где $\operatorname{Im}(s_k) > 0$ и $A(s_k) = 0$. Точки $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n$ являются собственными значениями оператора L конечной кратности, в то время как точки $\lambda \in [0, +\infty)$ лежат в его непрерывном спектре. Если A не имеет ненулевых вещественных корней, то можно написать $L_2(R^+) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{M}$ соответствует непрерывному спектру L, а $\mathfrak{N}$ — точечному спектру L. Если p удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x} |p(x)|\, dx < +\infty$$

при некотором $\varepsilon > 0$, то $\mathfrak{N}$ конечномерно. В этом случае из работ Наймарка [12] и Левина [1] вытекает, что L подобен самосопряженному оператору в $\mathfrak{M}$; следовательно, L — спектральный оператор. (См. гл. XX, где будут доказаны результаты такого характера.)

Если же функция A имеет ненулевые вещественные корни $\sigma_1, \ldots$ $\ldots, \sigma_m$, то числа $\tilde{\lambda}_k = \sigma_k^2$, $k = 1, \ldots, m$, называются *спектральными особенностями* L. Они играют важную роль в анализе оператора L и были изучены Лянце [4]. Он показал, что если L имеет спектральные особенности, то $L_2(R^+)$ *не может* быть представлено в виде $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, где L подобен самосопряженному оператору в $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{N}$ конечномерно. Тем не менее он показал, что можно построить *обобщенную* спектральную меру P на наборе всех борелевских множеств, отстоящих на положительном расстоянии от спектральных особенностей, но такую, что $|P(\delta)| \to +\infty$, когда расстояние между δ и некоторой спектральной особенностью стремится к нулю. Хотя не всякая функция из $L_2(R^+)$ является сильным пределом своего спектрального разложения по собственным функциям оператора L, множество функций, для которых такие разложения существуют, плотно в $L_2(R^+)$. О других свойствах оператора L и его детальном анализе см. статью Лянце [4]. Спектральные особенности такого типа рассматривались также в работах Лянце [8], Павлова [1, 2] и Дж. Шварца [4].

Операторы в гильбертовом пространстве. Недавно появился ряд интересных изложений спектральной теоремы для самосопряженных и нормальных операторов. См., например, Берберян [2, 4], Бернау [1], Бернау и Смитис [1], Бонсол [8], Халмош [12], Гальперин [11] и Уайтли [2]. Отметим только, что Бернау [1], Бернау и Смитис [1] и Уайтли [2] дали «элементарные» доказательства того факта, что если T — нормальный оператор, а p — многочлен от двух переменных, то $|p(T, T^*)| = \sup\{|p(\lambda, \bar{\lambda})| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$. Этот результат служит ключевым моментом, приводящим к быстрому доказательству спектральной теоремы для нормальных операторов.

Существует много других аспектов спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве, которые привлекают к себе большое внимание: это числовые области, операторы Гильберта — Шмидта, спектральные множества фон Неймана и т. д. Многие из этих понятий различными способами были перенесены на случай B-пространств (см. наши замечания по поводу эрмитовых операторов в B-пространствах и числовых областях, определенных при помощи полувнутреннего произведения); мы отсылаем читателя к выходящей в ближайшее время монографии Бонсола и Дункана [1], где изложены результаты этих исследований. Но все же многие результаты имеют смысл лишь в гильбертовом пространстве.

Читатель может обратиться к следующим статьям и книгам: Андо [3], Александрян и Мкртчян [1], Апостол [2], Берберян [1, 3], Берберян и Орланд [1], Бернау [2, 3], Бирюк и Коддингтон [1], Бонсол [6], Бос [1], Бруадо [1], А. Браун и Пирс [1], Картан [2], Коддингтон [5], Дейвис и Райдер [1], Декар и Пирс [1], Дольф [1, 2], Дольф и Пенцлин [1], Доногю [2], Дурст [1], Фойаш [1—5, 7], Джордж [1], Гика [1], Гохберг и Маркус [1], Гоншор [1], Хаделер [1], Халмош [11, 14], Халмош и Маклафлин [1], Хемпель [1], Хестенес [1], Гильдебрандт [1, 2], Инуэ [1—6], Истратеску [1], Якубов [1], Г. И. Кац [1], Кацнельсон и Мацаев [1], Калиш [5], Камович [1], Каниэль [1], Мак-Клюер [1], Маккелви [1, 2], Морен К. [4, 5], Морен Л. и Морен К. [2], Митягин и Пелчинский [1], Неванлинна и Ньеминен [1], Ньеминен [1], Олагунжи и Вест [1], Орланд [1], Путнам [30, 31], Сайто и Иосино [2], Сейрасон [1], Шефер [8], Шрейбер [6, 7], Шет [1], Стемпфли [2, 4, 6—9], Судзуки [1], Секефальви-Надь [17], Секефальви-Надь и Фойаш [1—10, 12], Тильман [1], Вильямс [1], Иосино [1, 2].

Инвариантные подпространства. На стр. 85—86 тома II мы обсуждали вопрос о том, имеет ли оператор из $B(\mathfrak{X})$ нетривиальное инвариантное замкнутое подпространство. Этот вопрос все еще не имеет ответа даже в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{H}$. Однако было выполнено значительное число работ, связанных с этим вопросом и примыкающими к нему теориями. Читателя можно отослать к следующим статьям: Андо [4], Апостол [12], Ароншайн и Смит [1], Арвесон и Фельдман [1], Бернштейн и Робинсон [1], де Бранджес [3], де Бранджес и Ровняк [1, 2], М. Бродский и Шмульян [1], Чиорэнеску [1], Криммине и Розенталь [1], Доногю [1], Дюрен [1], Фань Ку [6], Гинзбург [1], Годич [1], Гольдман и Левич [1], Халмош [11, 16], Хасуми и Сринивасан [1, 2], Хельсон [1], Хельсон и Лоуденслагер [1], Крейн [28], Никольский [1], Рота [1, 4], Сафар [3], Сейрасон [3], Шефер [13], Скрогс [1], Сринивасан [1, 2], Секефальви-Надь и Фойаш [1, 6, 9, 10], Волк [1], Уэрмер [1, 2, 4] [1]).

Сужения и продолжения. На стр. 86—88 тома II мы бегло рассмотрели понятия сужения и продолжения операторов в гильбертовом пространстве. Эта теория, вызванная к жизни несколькими фундаментальными открытиями Секефальви-Надя, усиленно разрабатывалась в последние годы с самых разных точек зрения: теории предсказаний, теории стационарных стохастических процессов, анализа Фурье, теории субдиагонализации, операционного исчисления, теории инвариантных подпространств, теории операторнозначных аналитических функций и т. д. Описание этих исследований выходит за рамки наших возможностей. К счастью, недавно вышедшая книга Секефальви-Надя и Фойаша [10] содержит превосходное изложение полученных результатов.

Другие результаты можно найти в следующих статьях: Адамян и Аров [1, 2], Андо [2, 3], Берберян [5], Бирюк и Коддингтон [1], Брем [1], Бремер [1], де Брёйн [1], Коддингтон [5], Коддингтон и Гилберт [1], Чумакин [1], Дурст [1, 2], Фогель [9—11], Фойаш [4, 5, 14], Фойаш и Геер [1], Фойаш и Мляк [1], Гилберт [1], Гохберг и Крейн [6], Халмош [14, 15], Гальперин [6—10], Ионеску [4], Ионеску и Плафкер [1], Ито [1], Лебоу [1, 2], Мак-

[1]) В последнее время важный результат в этом направлении был получен В. И. Ломоносовым (см. *Функц. анализ*, 7, № 3 (1973), 55—56).— *Прим. перев.*

келви [1], Мляк [1—5], Накано [19], Орланд [2], Пфлюгер [1], Сафферн [1], Сайто и Иосино [1], Сейрасон [1], Шрейбер [2—5], Сюкью [1], Секефальви-Надь [17—22], Секельфальви-Надь и Фойаш [1—10].

Положительные операторы. В последнее время пристальное внимание математиков привлекал к себе один общий и важный класс операторов — это класс *положительных операторов* в упорядоченных векторных пространствах. После пояснения некоторых предварительных понятий мы сделаем в этом пункте несколько замечаний об этих операторах.

Говорят, что векторное пространство $\mathfrak{B}$ *упорядочено* при помощи (рефлексивного, транзитивного и антисимметричного бинарного) отношения $\leqslant$, если (a) из $x \leqslant y$ вытекает, что $x + z \leqslant y + z$ для любых x, y и z в $\mathfrak{B}$, и (b) из $x \leqslant y$ вытекает, что $\lambda x \leqslant \lambda y$ для всех x, y в $\mathfrak{B}$ и $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant 0$. Если $\mathfrak{B}$ — упорядоченное векторное пространство с отношением порядка $\leqslant$, то множество $K = \{x \in \mathfrak{B} \mid 0 \leqslant x\}$ называется *положительным конусом* в $\mathfrak{B}$ (относительно $\leqslant$). Легко видеть, что K удовлетворяет следующим условиям: (i) $K + K \subseteq K$, (ii) $\lambda K \subseteq K$ для всех $\lambda \in R$, $\lambda \geqslant 0$ и (iii) $K \cap (-K) = \{0\}$. Обратно, если K — подмножество в $\mathfrak{B}$, удовлетворяющее условиям (i), (ii) и (iii), и если по определению $x \leqslant y$ означает, что $y - x \in K$, то мы получаем отношение, упорядочивающее $\mathfrak{B}$. Линейное топологическое пространство, которое к тому же и упорядочено, называется *упорядоченным топологическим векторным пространством* в том случае, когда его положительный конус замкнут. По поводу изложения теории упорядоченных топологических векторных пространств мы отсылаем читателя к книгам Дэя [12], Келли и Намиоки [1], Шефера [18] и Перессини [1].

Понятия порядка очень тесно связаны с вещественными коэффициентами, в то время как понятия спектральной теории проще в случае комплексных коэффициентов. Чтобы восполнить этот пробел, мы воспользуемся следующей конструкцией. Если $\mathfrak{X}$ — вещественное B-пространство, упорядоченное при помощи отношения $\leqslant$, то положим $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{X}$ и введем операцию умножения на комплексные числа, норму и отношение порядка, полагая:

$$(\alpha + i\beta)[x, y] = [\alpha x - \beta y, \ \alpha y + \beta x], \quad \alpha, \beta \in R, \quad x, y \in \mathfrak{X};$$

$$|[x, y]| = \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |(\cos\theta)\, x + (\sin\theta)\, y|;$$

$$[x_1, y_1] \leqslant [x_2, y_2], \text{ если только } x_1 \leqslant x_2 \text{ и } y_1 \leqslant y_2;$$

тогда $\mathfrak{X}_1$ является комплексным B-пространством, отображение $x \to [x, 0]$ — изометрическим изоморфизмом $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}_1$, а $\mathfrak{X}_1$ становится упорядоченным B-пространством, называемым *комплексификацией* пространства $\mathfrak{X}$. Наконец, если $T \in B(\mathfrak{X})$, то положим

$T_1[x, y] = [Tx, Ty]$; тогда спектральные свойства оператора T можно выявить и изучить, исследуя соответствующие свойства оператора T_1.

Если $\mathfrak{X}$ — упорядоченное вещественное B-пространство с положительным конусом K и $T \in B(\mathfrak{X})$, то оператор T называется *положительным*, если $T(K) \subseteq K$ (или, что то же самое, $Tx \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$, $x \in \mathfrak{X}$).

Одним из наиболее важных и знаменитых результатов о положительных операторах является следующая теорема.

Теорема (*Крейн — Рутман* [1]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — упорядоченное вещественное B-пространство, такое, что $\overline{\mathrm{sp}}(K) = \mathfrak{X}$. Если $T \in B(\mathfrak{X})$ — компактный положительный оператор с положительным спектральным радиусом $r(T)$, то $r(T)$ является собственным значением и соответствующий собственный вектор положителен.*

Эту теорему можно рассматривать как обобщение классической теоремы о положительных матрицах, принадлежащей Фробениусу и Перрону. В свою очередь теорема Крейна — Рутмана обобщалась разными способами. Например (см. Шефер [18, стр. 264]), если заменить условие компактности оператора K предположением о том, что резольвентный оператор $R(\lambda; T_1)$ имеет полюс на окружности $|\lambda| = r(T)$, то можно сделать вывод о том, что $r(T) \in \sigma(T)$; более того, если $r(T)$ является полюсом резольвенты, то это число оказывается полюсом максимального порядка на этой окружности.

В случае «неприводимого» положительного оператора, такого, что $r(T) = 1$, в вещественном B-пространстве $C(\Omega)$, где Ω — компакт, можно показать (см. Шефер [18; стр. 272]), что собственные значения на единичной окружности расположены циклически и каждое из них имеет кратность один; если точечный спектр на единичной окружности имеет изолированную точку, то эти собственные значения оказываются корнями n-й степени из единицы при некотором n. Если одно из таких собственных значений является полюсом резольвенты, то все они оказываются полюсами порядка 1. Число 1 является единственным собственным значением с положительной собственной функцией. Если Ω связно, то 1 является единственным корнем из единицы, который может лежать в точечном спектре оператора T.

Читателю следует обратиться к статье Крейна и Рутмана [1] по поводу истории изучения положительных операторов. Обзор работ последнего времени см. в выходящем вскоре томе Шефера [20], а также в следующих работах: Андо [1], Бахтин [1, 2], Бахтин, Красносельский и Стеценко [1], Г. Биркгоф [9], Бонсол [2—5, 7], Бонсол, Линденштраусс и Фелпс [1], В. Бродский [1], Эберли [1], А. Эллис [1], Есаян и Стеценко [1], Карлин [3], Красносельский [5], Лоц [1], Лоц и Шефер [1], Марек [1—3], Мьюборн [1], Нииро [1], Нииро и Савасима [1], Пересcини [1], Пересcини и Шёберт [1, 2], Фелпс [1], Путнам [20, 23, 25], Ридл [1], Рота [5], Сассер [1], Савасима [1—3], Шефер [1, 3, 4, 6, 11, 12, 14—19], Дж. Шварц [5] и Томпсон [1].

Обобщения компактных операторов. Поскольку класс компактных операторов в $B(\mathfrak{X})$ обладает столь хорошими спектральными свойствами и часто возникает в задачах анализа, было написано большое число статей, в которых или исследовались специальные типы компактных операторов (такие, как операторы Гильберта — Шмидта), или изучался подход к некоторым компактным операторам, связанный с теорией определителей, или предлагались обобщения и распространения классических результатов Фредгольма и Рисса.

В связи с этим следует назвать следующие статьи: Альтман [6], Андо [4], Балслев и Гамелин [1], Бонсол [9], Бонсол и Томюк [1], Бройер [1], Бройер и Кордес [1], Бурачевский [1, 2], Карадус [1—3], Чжун Кай-лай [1], Кобёрн [1], Кобёрн и Лебоу [1, 2], Кордес [4], Декар и Пирс [1], Деприн [1, 2], де Вилд [1, 2], Доногю [1], Эберли [1], Р. Эллис [1], Фишман и Валицкий [1], Гамелин [1], Гильдерман и Коротков [1], Джиллеспи и Вест [1], Гохберг и Крейн [1, 7, 8], Гохберг и Маркус [1], Гольдберг [2], Гольдберг и Торп [1, 2], Грамш [1, 2], Грейвс [6], Гротендик [6], Хаати [1], Халмош [11], Харазов [6—8], Хойзер [1—3], Фукухара и Сибуя [1, 2], Иохвидов [2], Кашук [1], Кашук и Лей [1], Каниэль и Шехтер [1], Клейнекке [5], Кульце [1], Лежаньский [1], Линденштраусс [1], Линденштраусс и Пелчинский [1], Люксембург и Заанен [1], Мацаев [1], Олагунжи и Вест [1], Пелчинский [1], Петтинео [1, 2], Пич [1—7, 9, 10, 12], Пшеворска-Ролевич [3], Рингроуз [1, 4, 6], Растон [2, 3, 5, 6], Сафар [7, 8], Шефер [2, 5], Шаттен [2], Дж. Шварц [5], Сикорский [1—9], Сильверман и Йен [1], Смитис [1], Стеценко [1], Вайдман [1], Вест [1, 3, 4], Вильямсон [3], Уайтли [1], Забрейко, Красносельский и Стеценко [1].

Теория индекса. В последнее время понятие индекса оператора стало играть весьма существенную роль в различных областях анализа и геометрии. Мы познакомимся с этими понятиями для некоторых операторов из $B(\mathfrak{X})$.

Пусть $T \in B(\mathfrak{X})$; обозначим через $\mathfrak{N}(T) = \{x \in \mathfrak{X} \mid Tx = 0\}$ — нуль-пространство оператора T, через $\alpha(T)$ — размерность $\mathfrak{N}(T)$, если она конечна, и $+\infty$ в противном случае. Если область значений $\mathfrak{R}(T) = \{Tx \mid x \in \mathfrak{X}\}$ замкнута в $\mathfrak{X}$, то обозначим через $\beta(T)$ размерность факторпространства $\mathfrak{X}/\mathfrak{R}(T)$, если оно конечномерно, и $+\infty$ в противном случае. Оператор T называется *фредгольмовым*, если $\mathfrak{R}(T)$ замкнута и оба числа $\alpha(T)$ и $\beta(T)$ конечны; он называется *полуфредгольмовым оператором*, если $\mathfrak{R}(T)$ замкнута и по крайней мере одно из чисел $\alpha(T)$ или $\beta(T)$ конечно. Если T полуфредгольмов, то его индекс по определению равен

$$\varkappa(T) = \alpha(T) - \beta(T)$$

(правда, некоторые авторы иногда берут эту величину с противоположным знаком).

Можно доказать, что если $T \in B(\mathfrak{X})$ — полуфредгольмов оператор, то $\mathfrak{R}(T^*)$ замкнута, $\mathfrak{N}(T^*) = \mathfrak{R}(T)^\perp$ и $\mathfrak{R}(T^*) = \mathfrak{N}(T)^\perp$, откуда вытекает, что $\alpha(T^*) = \beta(T)$ и $\beta(T^*) = \alpha(T)$. Следовательно, оператор $T^* \in B(\mathfrak{X}^*)$ полуфредгольмов и $\varkappa(T^*) = \varkappa(T)$. Аналогично, если T и S — фредгольмовы операторы, то произведение TS — фредгольмов оператор и

$$\varkappa(TS) = \varkappa(T) + \varkappa(S).$$

Возможно, наиболее важными теоремами об индексе являются два следующих результата о возмущении полуфредгольмова оператора:

Первая теорема устойчивости. *Пусть $T \in B(\mathfrak{X})$ — полуфредгольмов оператор. Существует такое $\delta > 0$, что если $S \in B(\mathfrak{X})$ и $|S - T| < \delta$, то оператор S полуфредгольмов и $\varkappa(S) = \varkappa(T)$. Кроме того, мы имеем*

$$\alpha(S) \leqslant \alpha(T), \quad \beta(S) \leqslant \beta(T).$$

Вторая теорема устойчивости. *Пусть $T \in B(\mathfrak{X})$ — полуфредгольмов оператор. Если $K \in B(\mathfrak{X})$ компактен, то оператор $S = T + K$ полуфредгольмов и $\varkappa(S) = \varkappa(T)$.*

Как заметил Гольдман [1], обе эти теоремы неверны, если оператор T не является полуфредгольмовым (т. е. $\alpha(T) = \beta(T) = \infty$).

По поводу доказательства этих теорем мы отсылаем читателя к монографии Като [13], к работам Гохберга и Крейна [2] и Гольдберга [2], где можно найти дальнейшие ссылки, исторические примечания и приложения. Мы отметим лишь, что понятие индекса возникло в 1921 г. в связи с изучением Ф. Нётером некоторых сингулярных интегральных уравнений. По существу первая теорема устойчивости была доказана Дьёдонне [22] для фредгольмовых операторов, хотя индекс он специально не выделял. В 1951 г. Аткинсон доказал обе теоремы устойчивости. В том же году Юд [2] и Гохберг [7] также доказали вторую теорему. С тех пор появилось большое число статей, обобщающих и использующих понятие индекса. Например, получены обобщения на неограниченные замкнутые операторы, на возмущения K, более общие, чем компактными операторами, на операторы в $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ или в линейных топологических пространствах. Изучены применения в теории уравнений в линейных пространствах, в теории интегральных уравнений и в теории дифференциальных операторов на многообразиях. Мы отсылаем читателя к следующим статьям и книгам: Аткинсон [2, 4], Бройер [1], Бройер и Кордес [1], Карадус [1, 2], Кобёрн и Лебоу [1, 2], Кордес [3, 4], Кордес и Лабрус [1], Дьёдонне [22], Гамелин [1], Гохберг [4, 7], Гохберг и Крейн [2], Гольдберг [2], Гольдман [1], Гольдман и Крачковский [1], Грамш [1, 2], Кашук [1, 2], Като [11, 13], Крейн и Красносельский [1], Мартиросян [1], Нейбауер [3], Ньюбергер [1], Параска [1], Петтинео [1], Пшеворска-Ролевич и Ролевич [1—4], Сафар [3—5], Шефер [2], Шехтер [1, 2], Сили [1], А. Шварц [1], Того и Сираиси [1] и Юд [2].

ГЛАВА XVI

Спектральные операторы: достаточные условия

1. Постановка задачи

В предыдущей главе мы изучали свойства ограниченных спектральных операторов, т. е. операторов, которые имеют счетно аддитивное разложение единицы, заданное на поле борелевских множеств. Оказалось, что эти операторы обладают рядом интересных свойств, обобщающих как свойства ограниченного нормального оператора в гильбертовом пространстве, так и свойства произвольного линейного оператора в комплексном конечномерном пространстве.

В этой главе будут сформулированы условия, достаточные для того, чтобы ограниченный оператор T был спектральным. Эти условия будут выражены в терминах резольвенты $R(\xi; T)$ и аналитических распространений $x(\xi)$ вектор-функций $R(\xi; T)x$. Мы уже установили ряд весьма существенных свойств резольвент спектральных операторов. Во-первых, в силу теоремы XV.3.2

(A) *для любого вектора x из $\mathfrak{X}$ функция $R(\xi; T)x$ обладает свойством однозначного распространения.*

Во-вторых,

(B) *существует постоянная K, зависящая только от оператора T, такая, что для всякой пары x и y векторов с непересекающимися спектрами $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$*

$$|x| \leqslant K\,|x+y|.$$

Для проверки этого неравенства заметим, что в силу теоремы XV.3.4 и следствия XV.3.7 $E(\sigma(x))\,x = x$, а спектр вектора $E(\sigma(x))\,y$ пуст. Тогда в силу следствия XV.3.3 $E(\sigma(x))\,y = 0$. Поэтому

$$|x| = |E(\sigma(x))(x+y)| \leqslant K\,|x+y|,$$

где K — верхняя грань для норм E.

Наконец, согласно следствию XV.3.6, спектральные операторы обладают следующим свойством:

(C) *для любого замкнутого множества δ комплексных чисел множество всех векторов x, для которых $\sigma(x) \subseteq \delta$, также замкнуто.*

В этой главе мы убедимся в том, что свойства (A), (B) и (C) весьма близки к достаточным условиям спектральности произвольного оператора T.

Настоящая глава разбивается на две основные части: § 2, 3 и 4 составляют первую часть, а § 5 — вторую. В первой части показано, что оператор T (в слабо полном пространстве) со свойствами (A), (B) и (C) обладает однозначно определенным счетно аддитивным разложением единицы, заданным на некотором σ-поле $\mathcal{M}(T)$ множеств. Вообще говоря, это поле не обязательно содержит все борелевские множества; оно может даже не содержать достаточного богатого набора множеств и тем самым быть практически бесполезным. Поэтому наш анализ становится полным лишь во второй части (§ 5), в которой даны условия, обеспечивающие то, что $\mathcal{M}(T)$ содержит поле всех борелевских множеств.

Условия § 5 требуют прежде всего, чтобы спектр T лежал на спрямляемой жордановой кривой, а резольвента $R(\lambda; T)$ оператора T имела конечный порядок роста, когда λ стремится к $\sigma(T)$. Операторы, удовлетворяющие этим условиям, автоматически удовлетворяют условиям (A) и (C). Следовательно, условия на порядок роста из § 5 и предположение ограниченности (B) в совокупности почти достаточны для того, чтобы обеспечить спектральность оператора T.

По этим причинам задачу проверки условия ограниченности (B) следует рассматривать как основную в применениях теории спектральных операторов. Нетрудно понять, что условие (B) не относится к тем условиям, которые проверяются без труда. Это и не удивительно, поскольку (B) в конечном счете сводится к утверждению о счетной аддитивности разложения единицы. Таким образом, (B) является условием, которое приводит к безусловной сходимости разложений по собственным функциям.

Более подробно мы имеем в виду следующее. Именно благодаря счетной аддитивности разложения единицы для спектральных операторов справедливы весьма важные теоремы о сходимости связанных с ними спектральных разложений. Например, если T — спектральный оператор и его спектр счетен, то всякий вектор x из $\mathfrak{X}$ имеет безусловно сходящееся разложение вида $x = \sum x_n \ (= \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E(\lambda) x)$, где спектр вектора x_n состоит только из одной точки λ_n, так что x_n — нечто вроде «обобщенного собственного вектора», соответствующего λ_n. Если T — спектральный оператор скалярного типа, то обобщенные собственные векторы являются просто собственными векторами в обычном смысле. Если T — спектральный оператор типа m, то обобщенные собственные векторы x_n удовлетворяют равенствам $(\lambda_n I - T)^{m+1} x_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, как только оператор T имеет счетно аддитивное разложение единицы, мы оказываемся в ситуации, весьма близкой к той, которая характерна для нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Если же счетная аддитивность спектрального разложения единицы нарушается, то это же происходит и со многими другими свойствами разложений по собственным векторам.

Следует отметить, что ни в коей мере не верно, будто все хорошо известные разложения по собственным векторам классического анализа являются безусловно сходящимися. Действительно, существует много примеров, как, например, разложения в ряд Фурье функций из $L_p(0, 2\pi)$, где $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, когда разложение сходится, но только условно. Другие примеры встретятся позже, в гл. XIX. Это, по-видимому, указывает на то, что дальнейшее развитие спектральной теории охватит и теорию условно сходящихся разложений, связанных с дискретным и непрерывным спектрами. Тем не менее случаи, когда имеет место безусловная сходимость разложений по собственным векторам, достаточно важны и заслуживают самостоятельного изучения. Этим обстоятельством подчеркивается важность задачи выяснения того, какие операторы являются спектральными.

2. Следствия условия (A)

В этом параграфе мы будем рассматривать ограниченное линейное преобразование T в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Будет установлен ряд свойств оператора T, основанных на единственном предположении (A), которое для удобства ссылок мы повторим:

(A) *Для любого вектора x из $\mathfrak{X}$ функция $R(\xi; T)x$ обладает свойством однозначного распространения.*

Напомним (ср. определение XV.2.6), что если T удовлетворяет условию (A), то *резольвентное множество вектора x*, обозначаемое через $\rho(x)$, можно определить как объединение всех областей $D(f)$, причем объединение берется по всем f, аналитическим распространениям вектор-функции $R(\xi; T)x$. Таким образом, $\rho(x)$ является открытым множеством, содержащим $\rho(T)$, а его дополнение $\sigma(x)$ — замкнутым подмножеством в $\sigma(T)$. Множество $\sigma(x)$ называется *спектром вектора x*. Очевидно, что существует единственное максимальное аналитическое распространение вектор-функции $R(\xi; T)x$. Это распространение, являющееся однозначной аналитической функцией, заданной на $\rho(x)$, мы будем обозначать через $x(\cdot)$. Таким образом, функция $x(\cdot)$ обладает по определению следующими свойствами:

$$(\xi I - T)x(\xi) = x, \qquad \xi \in \rho(x),$$
$$x(\xi) = R(\xi; T)x, \qquad \xi \in \rho(T).$$

Хотя условие (A) принято в качестве основного предположения в этом параграфе, оно будет указываться в скобках в формулировках всех тех лемм, в доказательстве которых оно используется.

1. Лемма (А). *Пусть* α, β — *комплексные числа, а* x, y — *векторы в* $\mathfrak{X}$; *тогда*

$$\sigma(x+y) \subseteq \sigma(x) \cup \sigma(y),$$
$$\alpha x(\xi) + \beta y(\xi) = (\alpha x + \beta y)(\xi), \qquad \xi \in \rho(x)\,\rho(y).$$

Доказательство. Функция $\alpha x(\xi) + \beta y(\xi)$ является аналитическим распространением функции

$$R(\xi; T)\,\alpha x + R(\xi; T)\,\beta y = R(\xi; T)(\alpha x + \beta y), \qquad \xi \in \rho(T),$$

заданной на открытом множестве $\rho(x)\,\rho(y)$. Следовательно, $\rho(\alpha x + \beta y) \supseteq \rho(x)\rho(y)$. Для точек $\xi \in \rho(x)\,\rho(y)$ мы имеем

$$(\alpha x + \beta y)(\xi) = \alpha x(\xi) + \beta y(\xi)$$

в силу (А), ч. т. д.

2. Лемма (А). *Спектр* $\sigma(x)$ *пуст тогда и только тогда, когда* $x = 0$.

Доказательство. Для доказательства настоящей леммы можно использовать доказательство следствия XV.3.3, ч. т. д.

3. Лемма (А). *Пусть* σ — *множество комплексных чисел, а* σ' — *его дополнение. Если* $x + y = x_1 + y_1$, *где* $\sigma(x)$, $\sigma(x_1) \subseteq \sigma$ *и* $\sigma(y)$, $\sigma(y_1) \subseteq \sigma'$, *то* $x = x_1$, $y = y_1$.

Доказательство. В силу леммы 1

$$\sigma(x - x_1) \subseteq \sigma(x) \cup \sigma(x_1) \subseteq \sigma,$$
$$\sigma(y_1 - y) \subseteq \sigma(y) \cup \sigma(y_1) \subseteq \sigma',$$

так что вектор $x - x_1 = y_1 - y$ имеет пустой спектр. Тогда по лемме 2 $x = x_1$, $y = y_1$, ч. т. д.

4. Лемма (А). *Если* P — *ограниченный линейный оператор в* $\mathfrak{X}$, *коммутирующий с* T, *то*

$$\sigma(Px) \subseteq \sigma(x), \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Так как P коммутирует с T, то он коммутирует и с резольвентой $R(\xi; T)$ при любом ξ из $\rho(T)$. В силу равенства $R(\xi; T)\,Px = PR(\xi; T)\,x$ ясно, что $Px(\xi)$ является аналитическим распространением вектор-функции $R(\xi; T)\,Px$ на область $\rho(x)$. Таким образом, $\rho(Px) \supseteq \rho(x)$, и, следовательно, $\sigma(Px) \subseteq \sigma(x)$, ч. т. д.

3. Следствия условий (А) и (В)

На протяжении всего этого параграфа мы будем предполагать, что оператор T удовлетворяет как условию (А) § 2, так и фундаментальному условию ограниченности (В), которое формулируется следующим образом:

(B) *Существует постоянная K, зависящая только от оператора T, такая, что для всякой пары x и y векторов с непересекающимися спектрами $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$ мы имеем*

$$|x| \leqslant K\,|x+y|.$$

Хотя предположения (A) и (B) будут основными во всем этом параграфе, мы будем указывать их в формулировке каждой леммы, где они используются.

Предположение (B) позволяет нам связать с некоторыми множествами δ комплексных чисел проекторы $E(\delta)$.

1. Определение. Символ $\mathscr{S}_1(T)$ будет обозначать семейство всех множеств σ, таких, что векторы вида $x+y$, где $\sigma(x)\subseteq\sigma$, $\sigma(y)\subseteq\sigma'$, плотны в $\mathfrak{X}$.

Очевидно, что если σ содержится в $\mathscr{S}_1(T)$, то и дополнение σ' также лежит в $\mathscr{S}_1(T)$.

2. Лемма (A, B). *Если σ содержится в $\mathscr{S}_1(T)$, то существует один и только один ограниченный проектор $E(\sigma)$ в $\mathfrak{X}$ со следующими свойствами*: $E(\sigma)x = x$, *если* $\sigma(x)\subseteq\sigma$, *и* $E(\sigma)x=0$, *если* $\sigma(x)\subseteq\sigma'$. *Более того*,

$$E(\sigma)+E(\sigma')=I,\qquad E(\sigma)E(\sigma')=0,\qquad |E(\sigma)|\leqslant K.$$

Доказательство. Свойства

(*) $\quad E(\sigma)x = x$, если $\sigma(x)\subseteq\sigma$, $E(\sigma)x=0$, если $\sigma(x)\subseteq\sigma'$,

определяют проектор $E(\sigma)$ на плотном множестве $\mathfrak{D} = \{x+y \mid \sigma(x)\subseteq\sigma,\ \sigma(y)\subseteq\sigma'\}$. Таким образом, единственность проектора $E(\sigma)$ обеспечена требованием его ограниченности.

Для доказательства существования некоторого оператора $E(\sigma)$, обладающего свойствами (*), заметим, что в силу леммы 2.3 свойства (*) однозначно определяют проектор на $\mathfrak{D}$. Предположение (B) просто утверждает, что этот проектор ограничен и его норма не превосходит K. Таким образом, по непрерывности он однозначно продолжается до проектора, определенного на всем $\mathfrak{X}$, норма которого не превосходит K. Поскольку очевидно, что $(E(\sigma)+E(\sigma'))x = x$ и $E(\sigma)E(\sigma')x=0$ для векторов x из $\mathfrak{D}$, то по непрерывности эти свойства распространяются на все векторы x из $\mathfrak{X}$, ч. т. д.

3. Лемма (A, B). *Если P — ограниченный линейный оператор, коммутирующий с T, то*

$$PE(\sigma)=E(\sigma)P,\qquad \sigma\in\mathscr{S}_1(T).$$

Доказательство. Для множества σ из $\mathscr{S}_1$ векторы вида $z=x+y$, где $\sigma(x)\subseteq\sigma$ и $\sigma(y)\subseteq\sigma'$, плотны в $\mathfrak{X}$. Для такого вектора z мы имеем $Pz=Px+Py$, и по лемме 2.4 $\sigma(Px)\subseteq\sigma$ и $\sigma(Py)\subseteq\sigma'$. Таким образом, согласно лемме 2, $E(\sigma)Px=Px$

и $E(\sigma)Py = 0$, так что

$$E(\sigma)Pz = Px = PE(\sigma)\, z.$$

Так как векторы z плотны в $\mathfrak{X}$, то $E(\sigma)P = PE(\sigma)$, ч. т. д.

Мы выделим теперь один подкласс в $\mathcal{S}_1(T)$ и покажем, что он является булевой алгеброй.

4. Определение (A, B). Символ $\mathcal{S}_2(T)$ будет обозначать семейство всех множеств σ, обладающих следующим свойством: для любого вектора x из $\mathfrak{X}$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют векторы x_1, x_1' со спектрами $\sigma(x_1) \subseteq \sigma(x)\sigma$, $\sigma(x_1') \subseteq \sigma(x)\sigma'$, такие, что $|x_1 + x_1' - x| < \varepsilon$.

Ясно, что класс $\mathcal{S}_2(T)$ замкнут относительно перехода к дополнениям и содержит пустое множество и всю плоскость.

5. Лемма (A, B). *Семейство $\mathcal{S}_2(T)$ является булевой алгеброй.*

Доказательство. Так как $\mathcal{S}_2(T)$ замкнуто относительно перехода к дополнениям, то для доказательства леммы достаточно показать, что оно содержит объединение любых двух своих элементов.

Пусть σ_1 и σ_2 — множества из $\mathcal{S}_2(T)$; для произвольного множества μ комплексных чисел положим

$$\mathfrak{M}(\mu) = \{x \mid \sigma(x) \subseteq \mu\}.$$

Если x лежит в $\mathfrak{X}$, то поскольку σ_1 — множество из $\mathcal{S}_2(T)$, вектор x принадлежит замыканию $\mathfrak{M}(\sigma_1\sigma(x)) + \mathfrak{M}(\sigma_1'\sigma(x))$. С другой стороны, поскольку σ_2 лежит в $\mathcal{S}_2(T)$, многообразие $\mathfrak{M}(\sigma_2\sigma_1'\sigma(x)) + \mathfrak{M}(\sigma_2'\sigma_1'\sigma(x))$ плотно в $\mathfrak{M}(\sigma_1'\sigma(x))$. Так как по лемме 2.1 $\mathfrak{M}(\sigma_1\sigma(x)) + \mathfrak{M}(\sigma_2\sigma_1'\sigma(x))$ содержится в $\mathfrak{M}((\sigma_1 \cup \sigma_2)\sigma(x))$, отсюда непосредственно вытекает, что x принадлежит замыканию $\mathfrak{M}((\sigma_1 \cup \sigma_2)\sigma(x)) + \mathfrak{M}((\sigma_1 \cup \sigma_2)'\sigma(x))$. Но это означает, что $\sigma_1 \cup \sigma_2$ содержится в $\mathcal{S}_2(T)$, ч. т. д.

6. Лемма (A, B). *Сужение проекторнозначной функции E с $\mathcal{S}_1(T)$ на булеву алгебру $\mathcal{S}_2(T)$ является спектральной мерой.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями доказательства предыдущей леммы; предположим, что σ принадлежит $\mathcal{S}_2(T)$. Так как произвольный вектор лежит в замыкании $\mathfrak{M}(\sigma\sigma(x)) + \mathfrak{M}(\sigma'\sigma(x))$ и так как по лемме 2 $E(\sigma)(z + y) = z$ для векторов z из $\mathfrak{M}(\sigma\sigma(x))$ и y из $\mathfrak{M}(\sigma'\sigma(x))$, то $E(\sigma)x$ лежит в $\overline{\mathfrak{M}(\sigma\sigma(x))}$ и $E(\sigma)x = x$, если x принадлежит $\overline{\mathfrak{M}(\sigma\sigma(x))}$. Таким образом, если σ_1, σ_2 — множества из $\mathcal{S}_2(T)$, то вектор $E(\sigma_1)E(\sigma_2)x$ содержится в $\overline{\mathfrak{M}(\sigma_1\sigma_2\sigma(x))}$. Следовательно,

$$E(\sigma_1\sigma_2)E(\sigma_1)E(\sigma_2)x = E(\sigma_1)E(\sigma_2)x.$$

Так как

$$E(\sigma_1\sigma_2)\,x \subseteq \overline{\mathfrak{M}(\sigma_1\sigma_2\sigma(x))} \subseteq \overline{\mathfrak{M}(\sigma_1\sigma(x)) \cap \mathfrak{M}(\sigma_2\sigma(x))},$$

мы имеем

$$E(\sigma_1)\,E(\sigma_2)\,E(\sigma_1\sigma_2)\,x = E(\sigma_1\sigma_2)\,x.$$

Поскольку все проекторы $E(\cdot)$ коммутируют с T и, следовательно, друг с другом, из леммы 3 вытекает, что $E(\sigma_1)\,E(\sigma_2) = E(\sigma_1\sigma_2)$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} E(\sigma_1) \vee E(\sigma_2) &= E(\sigma_1) + E(\sigma_2) - E(\sigma_1\sigma_2) = \\ &= I - (I - E(\sigma_1))\,(I - E(\sigma_2)) = \\ &= I - (E(\sigma_1')\,E(\sigma_2')) = I - E(\sigma_1'\sigma_2') = \\ &= E((\sigma_1'\sigma_2')') = E(\sigma_1 \cup \sigma_2), \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

7. Определение (A, B). Обозначим символом $\mathcal{S}(T)$ набор тех множеств $\sigma \in \mathcal{S}_2(T)$, для которых существуют замкнутые множества μ_n, $\nu_n \in \mathcal{S}_2(T)$, такие, что $\mu_n \subseteq \sigma$, $\nu_n \subseteq \sigma'$, $n = 1, 2, \ldots$, и

$$x = \lim_{n\to\infty} [E(\nu_n) + E(\mu_n)]\,x, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

8. Лемма (A, B). *Семейство $\mathcal{S}(T)$ является булевой алгеброй.*

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{S}(T)$ замкнуто относительно перехода к дополнениям. Следовательно, для проверки того, что $\mathcal{S}(T)$ является булевой алгеброй, достаточно доказать его замкнутость относительно операции образования объединения.

Пусть σ, $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}(T)$, и пусть $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ такие же, как в определении 7; предположим, что $\{\tilde{\mu}_n\}$ и $\{\tilde{\nu}_n\}$ — последовательности замкнутых множеств из $\mathcal{S}_2(T)$, такие, что $\tilde{\mu}_n \subseteq \tilde{\sigma}$, $\tilde{\nu}_n \subseteq \tilde{\sigma}'$, и

$$x = \lim_{n\to\infty} \{E(\tilde{\nu}_n)\,x + E(\tilde{\mu}_n)\,x\}, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Так как последовательность $\{E(\nu_n) + E(\mu_n)\}$ сильно сходится, она ограничена (ср. II.3.6) и, следовательно, операторы $E(\nu_n) + E(\mu_n)$ равностепенно непрерывны. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} [E(\nu_n) + E(\mu_n)]\,[E(\tilde{\mu}_n) + E(\tilde{\nu}_n)]\,x = \\ &= \lim_{n\to\infty} \{E(\mu_n\tilde{\mu}_n \cup \mu_n\tilde{\nu}_n \cup \nu_n\tilde{\mu}_n)\,x + E(\nu_n\tilde{\nu}_n)\,x\}, \quad x \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Поскольку $\{\mu_n\tilde{\mu}_n \cup \mu_n\tilde{\nu}_n \cup \nu_n\tilde{\mu}_n\}$ и $\{\nu_n\tilde{\nu}_n\}$ являются последовательностями замкнутых множеств из $\mathcal{S}_2(T)$, содержащихся в $\sigma \cup \tilde{\sigma}$ и $(\sigma \cup \tilde{\sigma})'$ соответственно, отсюда вытекает, что $\sigma \cup \tilde{\sigma}$ содержится в $\mathcal{S}(T)$, ч. т. д.

9. Лемма (A, B). *Множество* $\sigma(T)$ *принадлежит* $\mathscr{S}(T)$ *и* $E(\sigma(T)) = I$. *Кроме того, любое замкнутое подмножество* δ *резольвентного множества* $\rho(T)$ *лежит в* $\mathscr{S}(T)$ *и* $E(\delta) = 0$.

Доказательство. Так как $\sigma(x) \subseteq \sigma(T)$ для всех $x \in \mathfrak{X}$, то в силу определения 4 и леммы 2 очевидно, что $\sigma(T)$ лежит в $\mathscr{S}_2(T)$ и что $E(\sigma(T))x = x$ для всех $x \in \mathfrak{X}$. Так как $\sigma(T)$ замкнуто (см. VII.3.2), то в силу определения 7 ясно, что $\sigma(T)$ лежит в $\mathscr{S}(T)$. Если $\delta \subseteq \rho(T)$, то пустое множество $\varnothing$ и спектр $\sigma(T)$ являются замкнутыми подмножествами в δ и δ' соответственно и $E(\varnothing)x + E(\delta(T))x = x$. Тем самым доказано, что δ содержится в $\mathscr{S}(T)$. Так как $E(\rho(T)) = 0$, то $E(\delta) = E(\delta)E(\rho(T)) = 0$, ч. т. д.

10. Лемма (A, B). *Пусть* $\{\sigma_m\}$ — *убывающая последовательность множеств из* $\mathscr{S}(T)$, *пределом которой является множество* σ, *также лежащее в* $S(T)$. *Тогда*

$$E(\sigma)x = \lim_{m\to\infty} E(\sigma_m)x, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Мы хотим показать, что $\lim\limits_{m\to\infty} E(\sigma_m - \sigma)x = 0$ для всех x. Таким образом, без ограничения общности мы можем перейти от рассмотрения последовательности $\{\sigma_m\}$ к рассмотрению последовательности $\{\sigma_m - \sigma\}$, т. е. мы можем и будем в дальнейшем без ограничения общности считать, что σ пусто. Так как в силу предыдущей леммы $E(\sigma_m) = E(\sigma_m\sigma(T))$, можно также предполагать, что $\sigma_m \subseteq \sigma(T)$.

Допустим, что наше утверждение ошибочно, так что существуют $p > 0$ и вектор x, такие, что $|E(\sigma_m)x| \geqslant p$ для достаточно больших m. Переходя к подпоследовательности, мы можем без ограничения общности считать, что $|E(\sigma_m)x| \geqslant p$ для всех m.

Для множества σ из $\mathscr{S}_2(T)$ положим $M(\sigma) = \sup\limits_{\mu\subseteq\sigma} |E(\mu)x|$, $\mu \in \mathscr{S}_2(T)$. Очевидно, что если $\nu_1 \subseteq \nu_2$, то $M(\nu_1) \leqslant M(\nu_2)$. Пусть $\mu \subseteq \nu_1 \cup \nu_2$. Так как $|E(\mu)x| = |E(\mu\nu_1)x + E(\mu\nu_1'\nu_2)x| \leqslant M(\nu_1) + M(\nu_2)$, отсюда непосредственно вытекает, что

$$M(\nu_1 \cup \nu_2) \leqslant M(\nu_1) + M(\nu_2).$$

Поскольку

$$|E(\mu)x| = |E(\mu)E(\sigma)x| \leqslant K\,|E(\sigma)x|,$$

если $\mu \subseteq \sigma$, то ясно, что

$$M(\sigma) \leqslant K\,|E(\sigma)x|.$$

Так как σ_m содержится в $\mathscr{S}(T)$, в $\mathscr{S}_2(T)$ можно найти замкнутые множества μ_m и ν_m, такие, что $\mu_m \subseteq \sigma_m$, $\nu_m \subseteq \sigma_m'$ и

$$|E((\mu_m \cup \nu_m)')x| = pK^{-1}2^{-m-1}.$$

Тогда

$$M((\mu_m \cup \nu_m)') \leqslant p2^{-m-1},$$

так что, полагая $\delta_m = \sigma_m - \mu_m$, мы имеем $\delta_m = \sigma_m\mu'_m \subseteq \mu'_m \cap \mu'_m\nu'_m = (\mu_m \cup \nu_m)'$; поэтому

$$M(\delta_m) \leqslant p2^{-m-1}.$$

Отсюда вытекает, что никакая конечная сумма $\delta_1 \cup \ldots \cup \delta_n$ не может покрыть σ_n. Действительно,

$$M(\delta_1 \cup \ldots \cup \delta_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p2^{-i-1} \leqslant \frac{1}{2}p,$$

в то время как $|E(\sigma_n)x| \geqslant p$. Следовательно, множество

$$\sigma_n\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n = \sigma_n - \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_n\delta_i$$

непусто. Так как $\bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ является убывающей последовательностью непустых замкнутых подмножеств компактного множества $\sigma(T)$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mu_i \neq \varnothing$. Таким образом, поскольку $\mu_i \subseteq \sigma_i$, пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} \sigma_i \neq \varnothing$, но это противоречит сделанному предположению, ч. т. д.

В следующих трех теоремах подытожены результаты этого параграфа и в то же время закладывается фундамент для анализа, который будет проведен в § 4 и 5.

11. Теорема (A, B). *Пусть T — ограниченный линейный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда существует единственная спектральная мера на поле $\mathscr{S}(T)$, обладающая следующими свойствами*:

$$E(\delta)x = \begin{cases} x, & \delta \in \mathscr{S}(T), \quad \sigma(x) \subseteq \delta, \\ 0, & \delta \in \mathscr{S}(T), \quad \sigma(x) \subseteq \delta'. \end{cases}$$

Эта спектральная мера ограничена, счетно аддитивна на $\mathscr{S}(T)$ и коммутирует с T.

Доказательство. В силу определений 1, 4 и 7 имеет место включение $\mathscr{S}(T) \subseteq \mathscr{S}_1(T)$, и потому для каждого множества δ из $\mathscr{S}(T)$ по лемме 2 существует один и только один проектор $E(\delta)$, такой, что $E(\delta)x = x$, если $\sigma(x) \subseteq \delta$, и $E(\delta)x = 0$, если $\sigma(x) \subseteq \delta'$. Лемма 2 показывает также, что $|E(\delta)|$ равномерно ограничено по δ. В силу леммы 3 $E(\delta)$ коммутирует с T, а леммы 6, 8 и 10 показывают, что E — счетно аддитивная спектральная мера на $\mathscr{S}(T)$, ч. т. д.

Так как поле $\mathcal{S}(T)$ не обязательно является σ-полем, то естественно поставить вопрос о том, можно ли спектральную меру E продолжить на σ-поле, порожденное семейством $\mathcal{S}(T)$. Дальнейшие определение и теоремы посвящены этому вопросу.

12. Определение. Символ $\mathcal{M}(T)$ будет обозначать σ-полную булеву алгебру (или σ-поле), порожденную булевой алгеброй $\mathcal{S}(T)$. Множества из $\mathcal{M}(T)$ называются *множествами, измеримыми относительно* T, или T-*измеримыми множествами*.

13. Теорема (A, B). *Пусть T — ограниченный линейный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, а E — связанная с ним спектральная мера, существование которой установлено в теореме* 11. *Тогда в сопряженном пространстве $\mathfrak{X}^*$ существует единственное продолжение сопряженной функции E^* до спектральной меры на σ-поле $\mathcal{M}(T)$ множеств, измеримых относительно T, которая счетно аддитивна на $\mathcal{M}(T)$ в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$. Это единственное продолжение ограничено и коммутирует с T^*.*

Доказательство. Для любых векторов x из $\mathfrak{X}$ и x^* из $\mathfrak{X}^*$ существует по теореме Хана о продолжении меры (следствие III.5.9) единственное счетно аддитивное продолжение $m(e, x, x^*)$ функции множества $x^*E(e)x$ с $\mathcal{S}(T)$ на $\mathcal{M}(T)$. В силу ее единственности очевидно, что $m(e, x, x^*)$ билинейна по x и x^*, а из ограниченности $|E(e)|$ вытекает ограниченность $m(e, x, x^*)$. Таким образом, для всякого множества e из $\mathcal{M}(T)$ существует однозначно определенный ограниченный линейный оператор $A(e)$ в $\mathfrak{X}^*$, для которого

$$xA(e)x^* = m(e, x, x^*).$$

Далее будет показано, что отображение $e \to A(e)$ из $\mathcal{M}(T)$ в $B(\mathfrak{X}^*)$ является спектральной мерой. Очевидно, что она сохраняет конечные дизъюнктные объединения, переводит дополнения в дополнения, счетно аддитивна в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$ и ограничена. Остается только показать, чт

$$A(\sigma)A(\delta) = A(\sigma\delta).$$

В силу сделанных выше замечаний ясно, что для фиксированного σ семейство множеств δ, для которых это равенство справедливо, является σ-полем. Таким образом, если σ содержится в $\mathcal{S}(T)$, то равенство выполнено для всех δ из $\mathcal{M}(T)$. Аналогично, если δ — фиксированное множество из $\mathcal{M}(T)$, то, поскольку равенство выполнено для множеств σ из некоторого σ-поля, содержащего $\mathcal{S}(T)$, оно должно выполняться и для всех σ из $\mathcal{M}(T)$.

Так как операторы T и $E(\delta)$ коммутируют и $A(\delta) = E(\delta)^*$ для всех δ из $\mathcal{S}(T)$, то

$$xT^*A(\delta)x^* = xA(\delta)T^*x^*, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*, \quad \delta \in \mathcal{S}(T).$$

Поскольку A счетно аддитивна в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$, это равенство выполнено для всех δ из σ-поля, порожденного семейством $\mathscr{S}(T)$, и этим доказано, что $A(\delta)$ коммутирует с оператором T^* для любого T-измеримого множества δ. Так как $m(e, x, x^*) = x^*A(e)x$ ограничено по e, из принципа равномерной ограниченности (см. II.3.21) вытекает, что $|A(e)|$ ограничено по e из $\mathscr{M}(T)$, ч. т. д.

→ 14. Теорема (A, B). *Пусть T — ограниченный линейный оператор в слабо полном комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, а E — связанная с ним спектральная мера, существование которой установлено в теореме* 11. *Тогда существует однозначно определенное продолжение E до спектральной меры на σ-поле $\mathscr{M}(T)$ множеств, измеримых относительно T, которая счетно аддитивна на $\mathscr{M}(T)$ в сильной операторной топологии. Это продолжение ограничено и коммутирует с T.*

Доказательство. Пусть A — спектральная мера в сопряженном пространстве $\mathfrak{X}^*$, связанная с оператором T^*, как в предыдущей теореме. Если $\mathfrak{X}$ слабо полно, то $A(\delta)$ является оператором, сопряженным к некоторому оператору $E(\delta)$ в $\mathfrak{X}$. Для проверки этого факта заметим, что семейство всех множеств δ, для которых существует такой оператор $E(\delta)$ в $\mathfrak{X}$, что $A(\delta) = E(\delta)^*$, содержит в себе $\mathscr{S}(T)$. Это семейство является также булевой алгеброй, поскольку A — спектральная мера. Так как $\mathfrak{X}$ слабо полно, то это семейство является σ-полной булевой алгеброй, и, следовательно, оно совпадает с $\mathscr{M}(T)$. Так как $E(\delta)^*$ коммутирует с T^*, отсюда следует, что $E(\delta)$ коммутирует с T для любого δ из $\mathscr{M}(T)$. Теорема 13 показывает, что E счетно аддитивна на $\mathscr{M}(T)$, а в силу следствия XV.2.4 E счетно аддитивна на $\mathscr{M}(T)$ в сильной операторной топологии. Ограниченность E вытекает из ограниченности A, ч. т. д.

4. Следствия условий (A, B, C): необходимые и достаточные условия спектральности операторов

Теорема 3.14 по двум причинам оказывается недостаточной для доказательства того, что оператор T спектральный. Во-первых, спектральная мера E не обязательно является разложением единицы для оператора T, поскольку, если она даже и коммутирует с T, может не выполняться включение $\sigma(T_\delta) \subseteq \overline{\delta}$ (см. определение XV.2.2 или определение 1 ниже). Во-вторых, поле $\mathscr{S}(T)$ или σ-поле $\mathscr{M}(T)$ могут не содержать всех борелевских множеств. Первая из этих трудностей будет устранена предположением (C), которое мы сформулируем ниже. Вторая из этих трудностей приводит нас к рассмотрению операторов, спектральных относительно поля, отличного от поля борелевских множеств. Такие операторы описаны в следующем определении:

1. Определение. Пусть Σ — поле множеств в комплексной плоскости, а T — линейный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Спектральная мера E на Σ называется *разложением единицы для оператора* T, если она коммутирует с T и выполнены соотношения

$$\sigma(T_\delta) \subseteq \overline{\delta}, \qquad \delta \in \Sigma,$$

где T_δ — сужение T на $E(\delta)\mathfrak{X}$. Оператор T называется *спектральным оператором класса* $(\Sigma, \mathfrak{X}^*)$, если он имеет ограниченное разложение единицы на Σ, для которого все функции множества $x^*E(\cdot)x$, где $x \in \mathfrak{X}$, $x \in \mathfrak{X}^*$, являются счетно аддитивными на Σ. Оператор U в $\mathfrak{X}^*$ называется *спектральным оператором класса* $(\Sigma, \mathfrak{X})$, если он имеет ограниченное разложение единицы A на Σ, для которого все функции множества $xA(\cdot)x^*$, где $x \in \mathfrak{X}$, $x^* \in \mathfrak{X}^*$, счетно аддитивны на Σ.

Таким образом, T является спектральным оператором тогда и только тогда, когда он является спектральным оператором класса $(\mathscr{B}, \mathfrak{X}^*)$, где $\mathscr{B}$ — поле борелевских множеств на плоскости.

Помимо условий (A) и (B) из § 2 и 3 в большей части дальнейших утверждений будет делаться и следующее далее предположение (C). Тем не менее, если в лемме или теореме используется какое-либо из предположений (A), (B) или (C), это указывается в скобках.

(C) *Для всякого замкнутого множества* δ *комплесных чисел множество всех векторов* x, *для которых* $\sigma(x) \subseteq \delta$, *также замкнуто.*

2. Лемма (A, B, C). *Для каждого множества* δ *из* $\mathscr{S}_1(T)$ *и любого вектора* z *из* $\mathfrak{X}$ *выполнено соотношение* $\sigma(E(\delta)z) \subseteq \overline{\delta}\sigma(z)$.

Доказательство. Так как δ содержится в $\mathscr{S}_1(T)$, то произвольный вектор z из $\mathfrak{X}$ является пределом последовательности $z_n = x_n + y_n$, где $\sigma(x_n) \subseteq \delta$ и $\sigma(y_n) \subseteq \delta'$. Таким образом,

$$\sigma(E(\delta)z_n) = \sigma(x_n) \subseteq \overline{\delta},$$

а так как $E(\delta)z_n \to E(\delta)z$, то из условия (C) вытекает, что

$$\sigma(E(\delta)z) \subseteq \overline{\delta}.$$

Так как $E(\delta)$ коммутирует с T (см. лемму 3.3), то в силу леммы 2.4 очевидно, что $\sigma(E(\delta)z) \subseteq \sigma(z)$. Таким образом, $\sigma(E(\delta)z) \subseteq \subseteq \overline{\delta}\sigma(z)$, ч. т. д.

3. Лемма (A, B, C). *Если* δ *лежит в* $S_1(T)$, *возьмем в качестве* T_δ *сужение* T *на* $E(\delta)\mathfrak{X}$. *Тогда* $\sigma(T_\delta) \subseteq \overline{\delta}, \quad \delta \in \mathscr{S}_1(T)$.

Доказательство. Из леммы 3.3 вытекает, что T коммутирует с $E(\delta)$, так что T отображает $E(\delta)\mathfrak{X}$ в себя. Поэтому имеет смысл говорить о спектре сужения T на $E(\delta)\mathfrak{X}$.

Пусть $\xi \notin \bar{\delta}$. Покажем сначала, что отображение $\xi I - T$ взаимно однозначно на $E(\delta)\mathfrak{X}$. Если x лежит в $E(\delta)\mathfrak{X}$, а $(\xi I - T)x = 0$, то, поскольку

$$R(\lambda;\, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-\xi I)^n}{(\lambda-\xi)^{n+1}}$$

для всех больших λ, очевидно, что $x(\lambda) = x/(\lambda - \xi)$, если $\lambda \neq \xi$. Таким образом, спектр $\sigma(x)$ содержит самое большее точку ξ, и, следовательно, $\bar{\delta}\sigma(x)$ пусто. Так как $x = E(\delta)x$, то в силу леммы 2 спектр $\sigma(x)$ пуст, а тогда $x = 0$ по лемме 2.2. Этим показано, что отображение $\xi I - T$ взаимно однозначно на $E(\delta)\mathfrak{X}$.

Теперь покажем, что $(\xi I - T)E(\delta)\mathfrak{X} = E(\delta)\mathfrak{X}$. Пусть $x = E(\delta)x$ — произвольная точка из $E(\delta)\mathfrak{X}$. Тогда по лемме 2 $\sigma(x) \subseteq \bar{\delta}$, так что $\xi \in \rho(x)$. Таким образом, $(\xi I - T)x(\xi) = x$, и, следовательно, $(\xi I - T)E(\delta)x(\xi) = E(\delta)x = x$; тем самым показано, что $(\xi I - T)E(\delta)\mathfrak{X} = E(\delta)\mathfrak{X}$. Оператор $\xi I - T$ поэтому отображает $E(\delta)\mathfrak{X}$ взаимно однозначно на себя. Это означает, что точка ξ лежит в $\rho(T_\delta)$, и потому $\sigma(T_\delta) \subseteq \bar{\delta}$, ч. т. д.

4. Теорема. *Спектральный оператор T обладает свойствами* (A), (B) *и* (C). *Обратно, если ограниченный линейный оператор T обладает этими свойствами, то он является спектральным класса* ($\mathcal{S}(T)$, $\mathfrak{X}^*$). *Более того, T имеет разложение единицы, счетно аддитивное в сильной операторной топологии.*

Доказательство. В теореме XV.3.2 и следствии XV.3.6 показано, что спектральный оператор T обладает свойствами (A) и (C). Пусть E — разложение единицы для T, и пусть $|E(\delta)| \leqslant K$ для всех борелевских множеств δ. Предположим, что спектры $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$ не пересекаются. Тогда по теореме XV.3.4 $E(\sigma(x))x = x$ и $E(\sigma(y))y = y$. Следовательно,

$$0 = E(\sigma(x)\,\sigma(y))\,y = E(\sigma(x))\,E(\sigma(y))\,y = E(\sigma(x))\,y.$$

Таким образом,

$$|x| = |E(\sigma(x))\,x| = |E(\sigma(x))\,(x+y)| \leqslant K\,|x+y|.$$

Обратно, пусть ограниченный линейный оператор T удовлетворяет условиям (A), (B) и (C). Тогда по теореме 3.11 и лемме 3 T является спектральным оператором класса ($\mathcal{S}(T)$, $\mathfrak{X}^*$) с разложением единицы, счетно аддитивным в сильной операторной топологии, ч. т. д.

→ 5. Теорема. *Пусть T — ограниченный линейный оператор в слабо полном B-пространстве. При этом T является спектральным оператором тогда и только тогда, когда для него выполняются условия* (A), (B), (C) *и следующее условие*:

(D) *Любое комплексное число является внутренней точкой некоторого множества из $\mathcal{S}(T)$ сколь угодно малого диаметра.*

Доказательство. В предыдущей теореме было показано, что спектральный оператор обладает свойствами (A), (B) и (C). Для проверки того, что спектральный оператор T обладает свойством (D), предположим, что δ — замкнутое множество в комплексной плоскости, и выберем возрастающую последовательность $\{\delta_n\}$ замкнутых множеств, объединение которых δ' является дополнением к δ. Пусть E — спектральное разложение T. Тогда

$$x = \lim_n \{E(\delta)x + E(\delta_n)x\}.$$

По теореме XV.3.4, $\sigma(E(\delta)x) \subseteq \delta$ и $\sigma(E(\delta_n)x) \subseteq \delta_n$. Этим показано, что δ содержится в $\mathcal{S}_1(T)$. В силу леммы 2 δ лежит в $\mathcal{S}_2(T)$, а так как δ_n замкнуты, то выписанное выше равенство показывает, что δ содержится в $\mathcal{S}(T)$. Таким образом, $\mathcal{S}(T)$ содержит любое замкнутое множество и свойство (D) очевидно.

Обратно, если оператор T удовлетворяет условиям (A) — (D), то по теореме 4 он является спектральным класса $(\mathcal{S}(T), \mathfrak{X}^*)$. Согласно теореме 3.14, разложение единицы для T имеет единственное продолжение до счетно аддитивной спектральной меры E на $\mathcal{M}(T)$. Далее будет показано, что $\mathcal{M}(T)$ содержит все борелевские множества.

Для этого возьмем открытое множество U в комплексной плоскости и компактное подмножество K в U. Тогда в силу условия (D) любая точка p из K является внутренней для некоторого множества σ_p из $\mathcal{S}(T)$, причем $\sigma_p \subseteq U$. Так как K — компакт, он содержится в объединении σ конечного набора множеств σ_p. Тем самым показано, что если K — компактное подмножество в U, то существует $\sigma \in \mathcal{S}(T)$, такое, что $K \subseteq \sigma \subseteq U$. Поскольку U является объединением счетного множества своих собственных компактных подмножеств, отсюда вытекает, что U лежит в $\mathcal{M}(T)$. Так как $\mathcal{M}(T)$ содержит все открытые множества, оно содержит и семейство $\mathcal{B}$ всех борелевских множеств.

Для завершения доказательства достаточно проверить, что $\sigma(T_\delta) \subseteq \overline{\delta}$ для любого борелевского множества δ. Если $\lambda \notin \overline{\delta}$, то в силу условия (D) компактное множество $\overline{\delta}\sigma(T)$ можно покрыть множеством σ из поля $\mathcal{S}(T)$, причем $\lambda \notin \overline{\sigma}$. Так как T — спектральный оператор класса $(\mathcal{S}(T), \mathfrak{X}^*)$, то $\sigma(T_\sigma) \subseteq \overline{\sigma}$ и, следовательно, λ лежит в $\rho(T_\sigma)$, но это означает, что $\lambda I - T$ является взаимно однозначным отображением $E(\sigma)\mathfrak{X}$ на себя. Поскольку $\sigma \supseteq \overline{\delta}\sigma(T)$, мы имеем $E(\sigma) \supseteq E(\delta\sigma(T)) = E(\delta)$ и, следовательно, $E(\delta)\mathfrak{X}$ является инвариантным подпространством $E(\sigma)\mathfrak{X}$. Итак, $\lambda I - T$ является взаимно однозначным отображением $E(\delta)\mathfrak{X}$ на себя. Этим доказано, что λ лежит в $\rho(T_\delta)$ и, таким образом, $\sigma(T_\delta) \subseteq \overline{\delta}$, ч. т. д.

Мы закончим этот параграф двумя результатами о сопряженных операторах.

6. Лемма. *Пусть Σ — поле множеств в комплексной плоскости, а T — спектральный оператор класса $(\Sigma, \mathfrak{X}^*)$. Тогда его сопряженный T^* является спектральным оператором класса $(\Sigma, \mathfrak{X})$.*

Доказательство. Пусть E — разложение единицы для T. Тогда отображение $\sigma \to E(\sigma)^*$ из Σ в $B(\mathfrak{X}^*)$ является спектральной мерой в $\mathfrak{X}^*$. Более того, функция множества $xE(\sigma)^*x^*$, очевидно, счетно аддитивна на Σ для всех $x \in \mathfrak{X}$ и $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Пусть $\lambda \notin \overline{\sigma}$. Тогда сужение $\lambda I - T$ на $E(\sigma)\mathfrak{X}$ имеет обратный R_σ. Определим в $\mathfrak{X}$ оператор P_σ, полагая $P_\sigma = R_\sigma E(\sigma)$. Тогда ясно, что $E(\sigma)P_\sigma = P_\sigma = P_\sigma E(\sigma)$. Следовательно,

$$P_\sigma^* E(\sigma)^* = E(\sigma)^* P_\sigma^*,$$

так что P_σ^* отображает $E(\sigma)^*\mathfrak{X}^*$ в себя. Вместе с тем $(\lambda I - T)P_\sigma = E(\sigma)$ и

$$P_\sigma(\lambda I - T) = P_\sigma E(\sigma)(\lambda I - T) = P_\sigma(\lambda I - T)E(\sigma) = E(\sigma).$$

Таким образом,

$$P_\sigma^*(\lambda I^* - T^*) = (\lambda I^* - T^*)T_\sigma^* = E(\sigma)^*.$$

Значит, сужение P_σ^* на $E(\sigma)^*\mathfrak{X}^*$ является обратным оператором к сужению $\lambda I^* - T^*$ на $E(\sigma)^*\mathfrak{X}^*$. Следовательно, λ лежит в резольвентном множестве сужения $(T^*)_\sigma$ оператора T^* на $E(\sigma)^*\mathfrak{X}^*$. Этим показано, что $\sigma((T^*)_\sigma) \subseteq \overline{\sigma}$, и доказательство закончено, ч. т. д.

→ 7. Теорема (A, B, C, D). *Пусть T — ограниченный линейный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$ и $\mathscr{B}$ — поле борелевских множеств плоскости. Тогда T^* является спектральным оператором класса $(\mathscr{B}, \mathfrak{X})$.*

Доказательство. В силу условия (D) $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{M}(T)$. По теореме 3.13 спектральная мера E^* предыдущей леммы может быть продолжена с $\mathscr{S}(T)$ до спектральной меры, заданной на $\mathscr{M}(T)$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 5, можно показать, что $\sigma(T \mid E(\delta)\mathfrak{X}) \subseteq \overline{\delta}$ для всякого δ из $\mathscr{M}(T)$, ч. т. д.

5. Операторы, спектр которых лежит на жордановой кривой

В предыдущем параграфе было установлено (см. 4.5 и 4.7), что операторы, удовлетворяющи еусловиям (А) — (D), являются спектральными. В этом параграфе показано, что в некоторых важных частных случаях все эти условия, кроме, быть может, условия ограниченности (В), выполняются автоматически. Таким образом, для специальных типов операторов условие (В) становится как необходимым, так и достаточным условием спектральности.

1. Лемма. *Условие* (А) § 2 *выполнено, если спектр* T *нигде не плотен в комплексной плоскости.*

Доказательство. Если резольвентное множество плотно, то два любых аналитических, и даже непрерывных, продолжения $R(\lambda; T)x$ должны совпадать на их общей области непрерывности, ч. т. д.

Все специальные типы операторов, которые будут рассматриваться в этом параграфе, имеют нигде не плотный спектр, так что по лемме 1 условие (А) будет для них выполнено.

Следующая теорема, применимая, в частности, к компактным операторам, содержит топологические ограничения на спектр T, обеспечивающие выполнение условий (А), (С) и (D).

→ 2. Теорема. *Если спектр оператора в слабо полном пространстве вполне несвязен, то этот оператор является спектральным тогда и только тогда, когда выполнено условие* (В) § 3.

Доказательство. Пусть T — ограниченный линейный оператор в слабо полном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Для доказательства теоремы в силу теоремы 4.5 достаточно показать, что T обладает свойствами (А), (С) и (D). Так как спектр $\sigma(T)$ оператора T вполне несвязен, то он нигде не плотен, и по лемме 1 выполнено условие (А).

В силу теоремы VII.3.20 очевидно, что всякое спектральное множество принадлежит $\mathcal{S}_2(T)$, но тогда из определения 3.7 вытекает, что каждое спектральное множество принадлежит $\mathcal{S}(T)$. Так как спектр вполне несвязен, любая точка спектра содержится в некотором спектральном множестве сколь угодно малого диаметра и потому в некотором $\mathcal{S}(T)$-множестве сколь угодно малого диаметра. Очевидно, что любое подмножество резольвентного множества содержится в $\mathcal{S}(T)$; отсюда непосредственно вытекает условие (D).

Для проверки условия (С) возьмем замкнутое множество комплексных чисел и положим

$$\mathfrak{M}(\delta) = \{x \mid \sigma(x) \subseteq \delta\}.$$

Условие (C) будет доказано, если мы проверим, что $\mathfrak{M}(\delta)$ замкнуто. Так как $\sigma(x) \subseteq \sigma(T)$, мы имеем $\mathfrak{M}(\delta) = \mathfrak{M}(\delta\sigma(T))$, и можно, следовательно, предполагать без ограничения общности, что $\delta \subseteq \sigma(T)$. Поскольку $\sigma(T)$ вполне несвязно, замкнутое множество δ является пересечением $\bigcap_{\alpha} \delta_\alpha$ спектральных множеств δ_α. Теперь очевидно, что

$$\mathfrak{M}(\delta) = \mathfrak{M}\left(\bigcap_{\alpha} \delta_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{M}(\delta_\alpha),$$

и для проверки замкнутости $\mathfrak{M}(\delta)$ достаточно убедиться в том, что $\mathfrak{M}(\delta_\alpha)$ замкнуты. Но поскольку δ_α — спектральные множества, это вытекает из теоремы VII.3.20, ч. т. д.

Теорема 2 дает основания думать, что трудности, возникающие при проверке условий (C) и (D), в некотором смысле связаны с наличием компонент связности спектра. Оставшаяся часть этого параграфа будет посвящена изучению того случая, когда спектр содержится в объединении конечного числа непересекающихся связных множеств, каждое из которых является жордановой дугой. Прежде чем перейти к детальному анализу, приведем следующий результат, позволяющий без ограничения общности изучать лишь тот случай, когда весь спектр содержится в одной жордановой дуге.

3. Теорема. *Пусть T — оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ является прямой суммой двух своих замкнутых подпространств $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, каждое из которых инвариантно относительно T, и оба сужения T на $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ являются спектральными операторами, то оператор T спектрален.*

Доказательство. Это следствие теоремы XV.3.10 при $n = 2$, ч. т. д.

Далее в этом параграфе чаще всего будет предполагаться, что спектр $\sigma(T)$ оператора T содержится в замкнутой жордановой кривой Γ_0. Чтобы избежать технических осложнений, удобно также предполагать, что Γ_0 гладко вложена в однопараметрическое семейство замкнутых спрямляемых жордановых кривых. Более точно — и это является основой дальнейших аналитических рассмотрений,— мы будем предполагать, что существует функция $\xi = \xi(t, \delta)$, дважды непрерывно дифференцируемая в области $-1 \leqslant t, \delta \leqslant 1$ своего определения и обладающая следующими свойствами. Равенство $\xi(-1, \delta) = \xi(+1, \delta)$ выполнено для всех δ в интервале $-1 \leqslant \delta \leqslant 1$, в то время как $\xi(s, \delta) \neq \xi(t, \delta)$, кроме тех случаев, когда $s = t$ или (s, t) является парой $(-1, 1)$. Таким образом, $\xi(\cdot, \delta)$ является параметрическим представлением простой замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ_δ. Предполагается также, что кривые Γ_δ взаимно не пересекаются, что Γ_{δ_1} лежит внутри Γ_{δ_2}, если $-1 \leqslant \delta_1 < \delta_2 \leqslant 1$, и что Γ_0 содержит спектр $\sigma(T)$. Иногда нам нужно будет интегрировать по кривой Γ_δ относительно длины дуги на ней; поэтому предполагается, что кривые Γ_δ ориентированы в положительном направлении (в смысле теории комплексного переменного). Простая жорданова дуга Δ_{λ_0}, параметризованная функцией $\xi(t_0, \cdot)$, называется *трансверсалью*, проходящей через точку $\lambda_0 = \xi(t_0, 0)$. Основное предположение, которое мы будем делать в большей части этого параграфа, состоит в следующем: резольвента $R(\lambda; T)$ имеет конечный порядок роста, когда λ стремится к точке спектра λ_0 по трансверсали Δ_{λ_0}, проходящей через λ_0. Это условие на порядок роста формально состоит в следующем:

(G) *Спектр оператора T содержится в спрямляемой жордановой кривой Γ_0, описанной выше. Кроме того, для любой точки спектра λ_0 существуют два положительных числа $\nu = \nu(\lambda_0)$ и $M = M(\lambda_0)$, зависящие от λ_0 и такие, что*

$$|(\lambda-\lambda_0)^{\nu} R(\lambda; T)| \leqslant M, \quad \lambda \neq \lambda_0, \quad \lambda \in \Delta_{\lambda_0}.$$

Хотя условие на порядок роста (G) будет считаться выполненным в большинстве утверждений этого параграфа, оно будет формулироваться явно или указываться в скобках [как это делалось с условиями (A), . . ., (D)] во всех теоремах, где оно используется. Будет показано, что из этого условия роста вытекают условия (A) и (C) и что условия ограниченности (B) и роста (G) вместе весьма близки к тому, чтобы обеспечить спектральность оператора T.

4. Лемма. *Оператор со свойством* (G) *обладает также свойствами* (A) *и* (C).

Доказательство. Если оператор T в B-пространстве $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию роста (G), то его спектр лежит на спрямляемой жордановой кривой Γ_0. Таким образом, спектр нигде не плотен и условие (A) вытекает из леммы 1.

Чтобы доказать (C), возьмем замкнутое подмножество δ комплексной плоскости и положим

$$\mathfrak{M}(\delta) = \{x \mid x \in \mathfrak{X}, \quad \sigma(x) \subseteq \delta\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{M}(\delta)$ замкнуто. Для любого x имеем $\sigma(x) \subseteq \subseteq \sigma(T) \subseteq \Gamma_0$ и потому $\mathfrak{M}(\delta) = \mathfrak{M}(\delta\Gamma_0)$, что позволяет нам предполагать без ограничения общности, что δ является подмножеством кривой Γ_0. Следовательно, множество δ является пересечением $\delta = \bigcap\limits_{\alpha} \delta_\alpha$ множеств δ_α, каждое из которых — это дополнение в Γ_0 открытого подинтервала кривой Γ_0. Так как

$$\mathfrak{M}(\delta) = \mathfrak{M}\Big(\bigcap_{\alpha} \delta_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{M}(\delta_\alpha),$$

то для проверки замкнутости $\mathfrak{M}(\delta)$ достаточно показать, что $\mathfrak{M}(\delta_\alpha)$ замкнуто. Другими словами, мы можем и будем предполагать в дальнейшем, что δ является дополнением открытого подинтервала γ в Γ_0. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathfrak{X}$, сходящаяся к точке x, причем $\rho(x_n) \supseteq \gamma$. Для доказательства условия (С) достаточно показать, что $\rho(x) \supseteq \gamma$. Для этого, очевидно, достаточно проверить, что $\rho(x)$ содержит произвольный открытый подинтервал γ_0 в γ. Пусть a и b — концевые точки γ_0, а C — простая жорданова кривая, составленная из трансверсалей Δ_a и Δ_b и дуг, соединяющих их концевые точки таким образом, что C содержит γ_0 в своей внутренности, пересекает Γ_0 лишь в точках a и b, а остальная часть Γ_0 лежит во внешней части C.

Условие (G) показывает, что существует целое N, такое, что

$$\lim_{\substack{\lambda\to a\\ \lambda\in C}} (\lambda-a)^N(\lambda-b)^N x_n(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda\to b\\ \lambda\in C}} (\lambda-a)^N(\lambda-b)^N x_n(\lambda) = 0$$

равномерно по $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, существуют открытые поддуги N_a и N_b в C, содержащие a и b соответственно и такие, что вектор $y_n(\lambda) = (\lambda-a)^N(\lambda-b)^N x_n(\lambda)$ имеет норму

$$|y_n(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geqslant 1, \quad \lambda \in N_a \cup N_b.$$

Так как $x_n \to x$, мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} y_n(\lambda) = (\lambda-a)^N(\lambda-b)^N R(\lambda; T)\, x$$

равномерно по λ из $C - N_a - N_b$. Этот факт вместе с предыдущим неравенством показывает, что при некотором целом n_0, зависящем от ε, мы имеем

$$|y_n(\lambda) - y_m(\lambda)| < \varepsilon, \qquad \lambda \in C, \ n, \ m \geqslant n_0.$$

Тем самым доказано, что последовательность $\{y_n(\lambda)\}$ сходится равномерно по λ из C. По принципу максимума модуля эта последовательность сходится равномерно на объединении C и ее внутренности к некоторой аналитической функции $y(\lambda)$. Так как

$$y(\lambda) = \lim_n y_n(\lambda) = (\lambda-a)^N(\lambda-b)^N x(\lambda),$$

если $\lambda \notin \Gamma_0$, то вектор

$$X(\lambda) = \frac{y(\lambda)}{(\lambda-a)^N(\lambda-b)^N}$$

является аналитическим продолжением $x(\lambda)$ во внутренность кривой C. Поскольку $(\lambda I - T)\, X(\lambda) = x$, если $\lambda \notin \Gamma_0$, отсюда следует, что $(\lambda I - T)\, X(\lambda) = x$ для всех λ внутри C. Таким образом, $\rho(x)$ содержит внутренность C, а так как внутренность C содержит γ_0, то доказательство закончено, ч. т. д.

По предыдущей лемме и теореме 4.5 оператор T в слабо полном пространстве будет спектральным, если выполнены условия (B), (G) и (D). Теперь мы исследуем условие (D) более тщательно и увидим, что условия (B) и (G) весьма близки к предположению о выполнении условия (D). Это позволит нам заменить условие (D) разными способами более удобными условиями. Например, будет показано, что оператор T в рефлексивном пространстве, удовлетворяющий условию (G) и такой, что сопряженный к нему удовлетворяет условию (B), является спектральным.

Прежде чем перейти к этому анализу, удобно переформулировать условие (G) в виде, более соответствующем дальнейшему исследованию. Во-первых, очевидно, что числа $\nu = \nu(\lambda_0)$ и $M = M(\lambda_0)$, обладающие требуемыми свойствами, существуют для любого λ_0 из Γ_0, даже если λ_0 и не принадлежит спектру. Можно также предполагать, что для любого λ_0 из Γ_0 трансверсаль Δ_{λ_0} лежит в круге радиуса 1/2 с центром λ_0. Это укорачивание трансверсали Δ_{λ_0} может быть достигнуто заменой $\xi(\lambda, \delta)$ на $\xi_1(\lambda, \delta_1)$, где $\delta = K\delta$ и K достаточно велико. Теперь, если каждая точка Δ_{λ_0} лежит на расстоянии не более 1/2 от λ_0, то из (G) вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty}(\lambda-\lambda_0)^N R(\lambda;\, T)=0$$

равномерно по λ из $\Delta(\lambda_0)$. Таким образом, существует принимающая целочисленные значения функция $\nu = \nu(\lambda_0)$, определенная для всех $\lambda_0 \in \Gamma_0$ и такая, что $|(\lambda - \lambda_0)^{\nu(\lambda_0)} R(\lambda;\, T)| \leqslant 1$ для всех λ из Δ_{λ_0}, кроме $\lambda = \lambda_0$. Другими словами, функцию $M = M(\lambda_0)$ в условии (G) можно без ограничения общности считать тождественно равной единице. Таким образом, условие (G) может быть переформулировано в следующей эквивалентной форме:

(G) *Спектр оператора T лежит на спрямляемой жордановой кривой Γ_0. Более того, существует определенная на Γ_0 и принимающая целочисленные значения функция ν, такая, что для всех λ_0 из Γ_0 выполнено соотношение*

$$|(\lambda-\lambda_0)^{\nu(\lambda_0)} R(\lambda;\, T)| \leqslant 1, \quad \lambda \neq \lambda_0, \quad \lambda \in \Delta_{\lambda_0}.$$

В дальнейшем будет использоваться именно это неравенство, а не первоначальная формулировка условия роста (G).

5. Определение. Принимающая целочисленные значения функция ν, определенная на Γ_0 и удовлетворяющая предыдущему неравенству, называется *индексной функцией* оператора T. *Интервалом постоянства* относительно T называется непустой открытый подинтервал Γ_0, на котором некоторая индексная функция оператора T постоянна. Точка λ из Γ_0 называется *регулярной относительно T*, если она принадлежит некоторому интервалу постоянства и если, кроме того, существует такое натуральное число n, что

многообразие

$$(\lambda I - T)^n \mathfrak{X} + \{x \mid (\lambda I - T)^n x = 0\}$$

плотно в $\mathfrak{X}$.

Следует заметить, что если

$$\mathfrak{X} = \overline{(T - \lambda I)^n \mathfrak{X} + \{x \mid (T - \lambda I)^n x = 0\}},$$

то, применяя оператор $(T - \lambda I)^n$ к обеим частям этого равенства, мы получаем включение

$$(T - \lambda I)^n \mathfrak{X} \subseteq \overline{(T - \lambda I)^{2n} \mathfrak{X}}.$$

Так как многообразия $(T - \lambda I)^m \mathfrak{X}$ монотонно убывают с увеличением m, отсюда вытекает, что

$$(T - \lambda I)^n \mathfrak{X} \subseteq \overline{(T - \lambda I)^{n+1} \mathfrak{X}}.$$

Поскольку многообразия $\{x \mid (T - \lambda I)^m x = 0\}$ монотонно возрастают с ростом m, отсюда вытекает, что множество

$$(T - \lambda I)^{n+1} \mathfrak{X} = \{x \mid (T - \lambda I)^{n+1} x = 0\}$$

плотно в $\mathfrak{X}$. В силу индуктивных рассуждений ясно, что многообразие

$$(T - \lambda I)^{n+k} \mathfrak{X} + \{x \mid (T - \lambda I)^{n+k} x = 0\}$$

плотно в $\mathfrak{X}$ при любом $k \geqslant 0$. Этот факт для дальнейших ссылок мы сформулируем в виде следующей леммы:

6. Лемма. *Комплексное число λ регулярно относительно T тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором интервале постоянства относительно оператора T и для всех достаточно больших натуральных n многообразие*

$$(T - \lambda I)^n \mathfrak{X} + \{x \mid (T - \lambda I)^n x = 0\}$$

плотно в $\mathfrak{X}$.

Следует также отметить, что всякая точка λ из Γ_0, лежащая в резольвентном множестве оператора T, регулярна относительно T. Это верно, так как резольвентное множество открыто, а резольвента $R(\lambda; T)$ непрерывна, а потому λ лежит внутри некоторого интервала, на котором некоторая индексная функция постоянна. Для точек λ из резольвентного множества выполнено также и условие плотности определения 5, так как для таких точек λ верно соотношение $(T - \lambda I)\, \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

7. Лемма (A). *Если $(\lambda_0 I - T)^n x = 0$ для некоторого натурального n и некоторого вектора $x \neq 0$, то $\sigma(x) = \{\lambda_0\}$.*

Доказательство. Так как соответствующие суммы конечны, то ряд

$$X(\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(\lambda-\lambda_0)^{j+1}}(\lambda_0 I-T)^j x=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{(\lambda-\lambda_0)^{j+1}}(\lambda_0 I-T)^j x$$

сходится для любого $\lambda\neq\lambda_0$ и его сумма удовлетворяет равенству $(\lambda I - T)\,X(\lambda) = x$. Таким образом, $X(\lambda)$ является аналитическим распространением $R(\lambda; T)\,x$ на дополнение к $\{\lambda_0\}$. Это означает, что $\sigma(x)\subseteq\{\lambda_0\}$. Поскольку по лемме 2.2 спектр $\sigma(x)$ не пуст. $\sigma(x)=\{\lambda_0\}$, ч. т. д.

8. Лемма (B, G). *Всякий замкнутый подинтервал кривой Γ_0, концевые точки которого регулярны относительно T, принадлежит $\mathscr{S}_1(T)$.*

Доказательство. Пусть γ — замкнутый подинтервал Γ_0, концевые точки λ_1, λ_2 которого регулярны относительно T. Очевидно, что, делая соответствующую замену параметра s функции $\xi(s, \delta)$, мы можем считать, что $\lambda_1 = \xi(-1/2, 0)$ и $\lambda_2 = \xi(1/2, 0)$. Так как λ_1 и λ_2 — внутренние точки интервалов постоянства относительно T, найдется $\varepsilon > 0$, такое, что для точек λ_0, удовлетворяющих одному из условий $|\lambda_0 - \lambda_1| < \varepsilon$ или $|\lambda_0 - \lambda_2| < \varepsilon$, выполняется неравенство

$$\text{(i)}\qquad |\lambda-\lambda_0|^N\,|(R(\lambda; T)|\leqslant 1,\qquad \lambda_0\neq\lambda\in\Delta_{\lambda_0},$$

для всех достаточно больших значений N. В силу леммы 6 натуральное N можно зафиксировать так, что будет выполнено неравенство (i), а оба многообразия

$$\mathfrak{M}_i=(\lambda_i I-T)^N\mathfrak{X}+\{x\,|\,(\lambda_i I-T)^N x=0\},\qquad i=1,\ 2,$$

будут плотны в $\mathfrak{X}$. Поскольку $\mathfrak{M}_2$ плотно в $\mathfrak{X}$, многообразие

$$(\lambda_1 I-T)^N\mathfrak{M}_2+\{x\,|\,(\lambda_1 I-T)^N x=0\}$$

плотно в $\mathfrak{X}$, так что

$$(\lambda_1 I-T)^N(\lambda_2 I-T)^N\mathfrak{X}+\{x\,|\,(\lambda_1 I-T)^N x=0\}+\{x\ \ (\lambda_2 I-T)^N x=0\}$$

также плотно в $\mathfrak{X}$. По лемме 7 $\sigma(x)\subset\gamma$, если $(\lambda_i I - T)^N x = 0$ для $i = 1$ или $i = 2$, так что для доказательства настоящей леммы достаточно показать, что всякий элемент вида $y = (\lambda_1 I - T)^N \times$ $\times\,(\lambda_2 I - T)^N x$ может быть приближен сколь угодно точно суммой $z_1 + z_2$, где $\sigma(z_1)$ содержится в γ, а $\sigma(z_2)$ содержится в дополнении γ'.

На самом деле будет доказано больше, а именно мы покажем, что z_1 и z_2 можно выбрать так, что сумма $z_1 + z_2$ сколь угодно близка к y, а спектры $\sigma(z_1)$ и $\sigma(z_2)$ лежат *внутри* γ и γ' соответствено. Используя операционное исчисление гл. VII, мы получаем

(ii) $$y=(\lambda_1 I-T)^N(\lambda_2 I-T)^N x=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\Gamma_1}-\int_{\Gamma_{-1}}\right\}(\lambda_1-\lambda)^N(\lambda_2-\lambda)^N R(\lambda;T)\,x\,d\lambda.$$

Трансверсали Δ_{λ_1} и Δ_{λ_2} делят кольцевую область между Γ_1 и Γ_{-1} на два односвязных куска, каждый из которых ограничен кривой, состоящей] из дуг Δ_{λ_1}, Δ_{λ_2} и частей кривых Γ_1, Γ_{-1}. Пусть кусок,

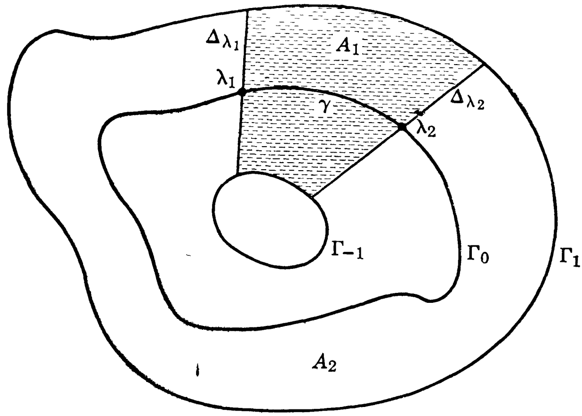

Рис. 1.

содержащий γ, обозначен через A_1, а ограничивающая его положительно ориентированная кривая — через C_1. Пусть кусок, содержащий дополнение γ', обозначен через A_2, а ограничивающая его положительно ориентированная кривая — через C_2. Так как подынтегральное выражение в представлении (ii) вектора y ограничено на C_1 и C_2, мы имеем

$$y=y_{C_1}+y_{C_2},$$

где

(iii) $$y_{C_i}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}(\lambda_1-\lambda)^N(\lambda_2-\lambda)^N R(\lambda;T)\,x\,d\lambda,\qquad i=1,\ 2.$$

Покажем, что y_{C_1} можно аппроксимировать сколь угодно точно векторами, спектры которых лежат внутри C_1, а y_{C_2} можно аппроксимировать сколь угодно точно элементами, спектры которых лежат внутри C_2. Подробное доказательство будет приведено только в случае y_{C_2}, но доказательство для y_{C_1} совершенно аналогично.

Пусть Δ_ε^-, Δ_ε^+ — трансверсали, проходящие через точки $\xi((-1/2-\varepsilon),\ 0)$, $\xi((1/2+\varepsilon),\ 0)$ соответственно. Пусть A_1^ε, A_2^ε —

две односвязные области, на которые кольцевая область между Γ_1 и Γ_{-1} делится трансверсалями Δ_ε^- и Δ_ε^+. Пусть A_2^ε — одна из этих областей, содержащаяся в A_2, и C_2^ε — ограничивающая ее кривая. В силу условия (i) подинтегральное выражение в (iii) равномерно ограничено, и элементарный подсчет с использованием теоремы Лебега об ограниченной сходимости показывает, что

$$y_{C_2} = \lim_{\varepsilon \to 0} y_{C_2^\varepsilon},$$

где

$$y_{C_2^\varepsilon} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^\varepsilon} (\lambda_1 - \lambda)^N (\lambda_2 - \lambda)^N R(\lambda; T)\, x\, d\lambda.$$

Таким образом, для проверки того, что y_{C_2} является пределом последовательности векторов, спектры которых лежат внутри C_2, достаточно показать, что спектр $\sigma(y_{C_2^\varepsilon})$ содержится в A_2^ε. Очевидно, что интеграл

$$I(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^\varepsilon} (\lambda_1 - \lambda)^N (\lambda_2 - \lambda)^N (\xi - \lambda)^{-1} R(\lambda; T)\, x\, d\lambda$$

аналитичен по ξ вне A_2^ε. Так как

$$(\xi I - T)\, I(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^\varepsilon} (\lambda_1 - \lambda)^N (\lambda_2 - \lambda)^N (\xi - \lambda)^{-1} (\xi I - T) R(\lambda; T)\, x\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2^\varepsilon} (\lambda_1 - \lambda)^N (\lambda_2 - \lambda)^N (\xi - \lambda)^{-1} (\xi - \lambda) R(\lambda; T)\, x\, d\lambda =$$
$$= y_{C_2^\varepsilon},$$

то $I(\xi)$ является аналитическим распространением $R(\xi; T)\, y_{C_2^\varepsilon}$. Таким образом, $\rho(y_{C_2^\varepsilon})$ целиком содержит дополнение A_2^ε, и потому спектр $\sigma(y_{C_2^\varepsilon})$ содержится в A_2^ε, ч. т. д.

9. Следствие (B, G). *Пусть γ — замкнутый подинтервал кривой Γ_0, концевые точки λ_1, λ_2 которого принадлежат интервалам постоянства относительно оператора T. Тогда для достаточно больших N многообразие $(\lambda_1 I - T)^N (\lambda_2 I - T)^N \mathfrak{X}$ содержится в замкнутом многообразии, порожденном векторами вида $z_1 + z_2$, где $\sigma(z_1)$ лежит внутри γ, а $\sigma(z_2)$ — внутри дополнительной дуги γ'.*

Доказательство. Именно это утверждение и было на самом деле доказано в предыдущем доказательстве, ч. т. д.

10. Лемма (B, G). *Если множество регулярных относительно оператора T точек плотно в Γ_0, то любой замкнутый подинтервал*

кривой Γ_0, *концевые точки которого регулярны относительно оператора* T, *содержится в* $\mathscr{S}(T)$, *а каждое борелевское подмножество плоскости измеримо относительно* T.

Доказательство. Пусть γ — замкнутый подинтервал Γ_0, концевые точки которого регулярны относительно T. Так как точки, регулярные относительно T, плотны в Γ_0, существует возрастающая последовательность $\{\gamma_n\}$ открытых подинтервалов Γ_0, каждый элемент которой имеет регулярные концевые точки, лежащие в дуге γ', дополнительной к γ, объединение которых есть полная дуга γ'. По лемме 8 все интервалы γ и $\overline{\gamma}_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ лежат в $\mathscr{S}_1(T)$. Так как γ содержится в $\mathscr{S}_1(T)$, то для любого x из $\mathfrak{X}$ и $\varepsilon > 0$ существуют векторы y и z, такие, что

$$|y+z-x| < \varepsilon, \qquad \sigma(y) \subseteq \gamma, \qquad \sigma(z) \subseteq \gamma'.$$

Так как $\sigma(z)$ — компакт, то $\overline{\gamma}_n \supseteq \gamma_n \supseteq \sigma(z)$ для всех достаточно больших n. Таким образом, по лемме 3.2 $[E(\gamma) + E(\overline{\gamma}_n)](y+z) = y+z$ для всех больших n. В силу предположения ограниченности (B) нормы проекторов $E(\gamma) + E(\overline{\gamma}_n)$ ограничены по n, и, так как $\varepsilon > 0$ произвольно, мы имеем

$$\text{(i)} \qquad x = \lim_n [E(\gamma)x + E(\overline{\gamma}_n)]x, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Из леммы 4 тогда вытекает, что T обладает свойствами (A) и (C), и в силу леммы 4.2 очевидно, что

$$\text{(ii)} \qquad \sigma(E(\gamma)x) \subseteq \gamma\sigma(x), \qquad \sigma(E(\overline{\gamma}_n)x) \subseteq \overline{\gamma}_n\sigma(x).$$

Соотношения (i) и (ii) показывают, что γ лежит в $\mathscr{S}_2(T)$. Так как γ — произвольный замкнутый подинтервал Γ_0, концевые точки которого регулярны относительно T, мы доказали, что замыкание $\overline{\gamma}_n$ также лежит в $\mathscr{S}_2(T)$. Таким образом, из соотношения (i) и определения 3.7 вытекает, что γ содержится в $\mathscr{S}(T)$. Поэтому всякое борелевское подмножество кривой Γ_0 измеримо относительно T. По лемме 3.9 всякое подмножество в $\rho(T)$ лежит в $\mathscr{S}(T)$ и, следовательно, является измеримым относительно T множеством, ч. т. д.

В силу леммы 10 нам следует искать условия, при которых точки Γ_0, регулярные относительно T, плотны на Γ_0. Некоторые результаты в этом направлении будут получены в следующих четырех леммах.

11. Лемма (G). *Объединение всех интервалов постоянства относительно оператора* T *является открытым множеством, плотным в* Γ_0.

Доказательство. Очевидно, что объединение интервалов постоянства открыто. Для проверки его плотности возьмем замкнутую поддугу γ в Γ_0 положительной длины и положим

$$\gamma_n = \{\lambda_0 \mid \lambda_0 \in \gamma,\ |\lambda - \lambda_0|^n |R(\lambda; T)| \leqslant 1,\ \lambda_0 \neq \lambda \in \Delta_{\lambda_0}\} =$$

$$= \{\lambda_0 \mid \lambda_0 \in \gamma,\ |\xi(\lambda_0, \delta) - \lambda_0|^n |R(\xi(\lambda_0, \delta); T)| \leqslant 1, \quad 0 < |\delta| \leqslant 1\}.$$

В силу второго представления множества γ_n очевидно, что оно замкнуто, а из условия (G) вытекает, что всякая точка из γ является точкой одного из множеств γ_n. Таким образом, по теореме Бэра о категориях (см. I.6.9) одно из множеств γ_n содержит нетривиальный подинтервал из γ, ч. т. д.

12. Лемма (G). *Если точечный спектр сопряженного оператора T^* не содержит нетривиальных поддуг кривой Γ_0, то множество регулярных относительно T точек плотно в Γ_0.*

Доказательство. Если λ не лежит в точечном спектре оператора, сопряженного к T, то не существует функционала $x^* \neq 0$, для которого $x^* (\lambda I - T)\mathfrak{X} = 0$. В силу теоремы Хана — Банаха это означает, что $(\lambda I - T)\mathfrak{X}$ плотно в $\mathfrak{X}$. Поэтому если λ содержится в некотором интервале постоянства относительно оператора T, то λ регулярно относительно T. Таким образом, настоящая лемма вытекает из леммы 11, ч. т. д.

13. Лемма (G). *Если пространство $\mathfrak{X}$ рефлексивно и функция, тождественно равная единице на Γ_0, является индексной функцией для T, то каждая точка из Γ_0 регулярна относительно T.*

Доказательство. Очевидно, что кривая Γ_0 сама является интервалом постоянства относительно T. Пусть x — произвольный вектор из $\mathfrak{X}$, λ_0 — произвольная точка на Γ_0, а $\{\lambda_n\}$ — последовательность точек трансверсали Δ_{λ_0}, причем $\lambda_n \neq \lambda_0$ и $\lambda_0 = \lim \lambda_n$. Так как $\mathfrak{X}$ рефлексивно, ограниченная последовательность $\{(\lambda_n - \lambda_0) R(\lambda_n; T) x\}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу y из $\mathfrak{X}$ (см. теорему II.3.28). Заменяя последовательность $\{\lambda_n\}$ надлежащим образом выбранной подпоследовательностью, мы можем поэтому предполагать, что в слабой топологии

$$\lim_n (\lambda_n - \lambda_0) R(\lambda_n; T) x = y.$$

Тогда $(\lambda_0 I - T) y$ является слабым пределом последовательности

$$(\lambda_n - \lambda_0)(\lambda_0 I - T) R(\lambda_n; T) x = (\lambda_n - \lambda_0) x - (\lambda_0 - \lambda_n)^2 R(\lambda_n; T) x,$$

а этот предел, очевидно, равен нулю. Итак, $(\lambda_0 I - T) y = 0$.

Далее будет показано, что вектор $x - y$ лежит в замыкании многообразия $(\lambda_0 I - T)\mathfrak{X}$. Для этого в силу следствия II.3.13 достаточно проверить, что $x^* (x - y) = 0$ для всякого линейного функционала x^*, обращающегося в нуль на $(\lambda_0 I - T)\mathfrak{X}$. Если x^* — такой функционал, то $T^*x^* = \lambda_0 x^*$,

$$R(\lambda_n; T)^* x^* = \frac{x^*}{\lambda_n - \lambda_0},$$

а потому

$$x^* y = \lim_{n\to\infty} x^*(\lambda_n - \lambda_0) R(\lambda_n; T) x = x^* x$$

и $x^*(x - y) = 0$. Этим показано, что произвольный вектор x из $\mathfrak{X}$ является суммой вектора y, такого, что $(\lambda_0 I - T) y = 0$, и вектора $x - y$ из замыкания $(\lambda_0 I - T)\mathfrak{X}$. Так как λ_0 — внутренняя точка некоторого интервала постоянства относительно T, она является регулярной точкой относительно T, ч. т. д.

14. Лемма (G). *Если $\mathfrak{X}$ рефлексивно и сопряженный оператор T^* удовлетворяет условию ограниченности* (B), *то регулярные относительно T точки плотны в Γ_0 и, в частности, каждый интервал постоянства относительно T целиком состоит из регулярных точек.*

Доказательство. В силу леммы 11 достаточно показать, что точка λ_0 из интервала постоянства относительно T регулярна. Так как $\sigma(T^*) = \sigma(T)$ и $R(\lambda; T^*) = R(\lambda; T)^*$, оператор T^* также удовлетворяет условию роста (G), а каждая индексная функция для T является также индексной функцией для T^*, и наоборот. Применяя следствие 9 к оператору T^* и интервалу, состоящему из единственной точки λ_0, мы видим, что при достаточно больших N любой элемент многообразия $(\lambda_0 I^* - T^*)^N \mathfrak{X}^*$ может быть аппроксимирован элементами z^*, такими, что $\lambda_0 \notin \sigma(z^*)$. Для доказательства того, что λ_0 регулярна относительно T, покажем, что для таких N многообразие

$$\text{(i)} \qquad (\lambda_0 I - T)^N \mathfrak{X} + \{x \mid (\lambda_0 I - T)^N x = 0\}$$

плотно в $\mathfrak{X}$. Для этого в силу теоремы Хана — Банаха (см. следствие II.3.13) достаточно проверить, что функционал $x^* = 0$ является единственным функционалом, обращающимся в нуль на многообразии (i). Пусть x^* — такой функционал. Тогда

$$\text{(ii)} \qquad (\lambda_0 I^* - T^*)^N x^* = 0.$$

Для проверки того, что $x^* = 0$, докажем сначала включение

$$\text{(iii)} \qquad x^* \in \overline{(\lambda_0 I^* - T^*)^N \mathfrak{X}^*}.$$

Если (iii) неверно, то, поскольку $\mathfrak{X}$ рефлексивно, из теоремы Хана — Банаха (см. следствие II.3.13) вытекает существование такого вектора x в $\mathfrak{X}$, что $x^* x \neq 0$ и $[(\lambda_0 I^* - T^*)^N \mathfrak{X}^*]\, x = 0$, но это означает, что $(\lambda_0 I - T)^N x = 0$. Так как x^* обращается в нуль на многообразии (i), то $x^* x = 0$, но это противоречит неравенству $x^* x \neq 0$ и устанавливает соотношение (iii).

Теперь из соотношений (ii) и (iii) можно заключить, что $x^* = 0$. Для этого заметим сначала, что, согласно лемме 7, мы имеем $\sigma(x^*) = \{\lambda_0\}$. В силу леммы 9, примененной к оператору T^* и интервалу, состоящему из единственной точки λ_0, существует последовательность $\{x_n^*\}$, сходящаяся к x^*, причем $\lambda_0 \notin \sigma(x_n^*)$. Так как T^* удовлетворяет условию (B), мы имеем

$$|x^*| \leqslant K |x^* - x_n^*| \to 0,$$

так что $x^* = 0$. Этим завершается доказательство того, что многообразие (i) плотно в $\mathfrak{X}$; тем самым доказано, что λ_0 — регулярная относительно T точка, ч. т. д.

Предыдущие леммы вместе с общими критериями, данными в теоремах 4.5 и 4.7, позволяют сформулировать совокупность условий, достаточных для того, чтобы оператор был спектральным. Это будет сделано в двух следующих утверждениях.

→ 15. Теорема. *Если ограниченный линейный оператор в слабо полном пространстве удовлетворяет условию ограниченности* (B) *и условию роста* (G), *то он является спектральным оператором при выполнении одного из следующих условий*:

(a) *точечный спектр сопряженного оператора не содержит нетривиальных поддуг кривой* Γ_0;

(b) *пространство рефлексивно, и функция*

$$\nu(\lambda) = 1, \quad \lambda \in \Gamma_0,$$

является индексной функцией для оператора;

(c) *пространство рефлексивно, и сопряженный оператор удовлетворяет условию ограниченности* (B).

Доказательство. Если ограниченный линейный оператор T в слабо полном пространстве обладает свойствами (B) и (G), то по лемме 4 он обладает свойствами (A) и (C). Таким образом, в силу теоремы 4.5 для доказательства этой теоремы достаточно показать, что T обладает свойством (D). По лемме 10 условие (D) будет выполнено, если точки, регулярные относительно T, плотны в Γ_0. Таким образом, леммы 12, 13 и 14 дают требуемые утверждения, ч. т. д.

16. Теорема. *Пусть T — ограниченный линейный оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условиям* (B) *и* (G), *а $\mathscr{B}$ — поле борелевских множеств плоскости. Тогда сопряженный оператор T^* является спектральным класса $(\mathscr{B}, \mathfrak{X})$, если выполнено одно из условий* (a), (b), (c) *предыдущей теоремы.*

Доказательство. Доказательство такое же, что и в предыдущей теореме, только вместо теоремы 4.7 надо воспользоваться теоремой 4.5, ч. т. д.

По аналогии с конечными матрицами, принимая во внимание теорему XV.6.7, следует ожидать, что спектральный оператор T, удовлетворяющий условию роста (G), будет спектральным оператором типа $m-1$ тогда и только тогда, когда постоянная функция $\nu(\xi) \equiv m$ является индексной. Для удобства ссылок это условие роста конечного порядка формулируется в виде следующего определения:

17. Определение. Говорят, что ограниченный линейный оператор T удовлетворяет *условию роста* (G_m), если его спектр лежит на кривой Γ_0 и при некоторой постоянной M

$$|(\xi-\xi_\delta)^m R(\xi_\delta; T)| \leqslant M, \quad \xi \in \Gamma_0, \quad 0 < |\delta| \leqslant 1,$$

где ξ_δ — пересечение трансверсали Δ_ξ с кривой Γ_δ.

→ 18. Теорема. *Ограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве, спектр которого лежит на жордановой кривой Γ_0, является спектральным оператором типа $m-1$ тогда и только тогда, когда оба оператора T и его сопряженный удовлетворяют условиям* (B) *и* (G_m).

Доказательство. Если T — спектральный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$, то, поскольку $\mathfrak{X}$ рефлексивно, сопряженный T^* по лемме 4.6 является спектральным оператором. По теореме 4.4 и T, и T^* удовлетворяют условию ограниченности (B). Далее, если T — оператор типа $m-1$ с радикальной частью N и разложением единицы E, то

$$R(\xi; T) = \sum_{n=0}^{m-1} N^n \int_{\sigma(T)} \frac{E(d\lambda)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}, \qquad \xi \in \rho(T),$$

откуда видно, что T, а следовательно, и T^* удовлетворяют условию (G_m).

Обратно, пусть T и его сопряженный удовлетворяют условиям (B) и (G_m). В силу теоремы 15 (c) ясно, что T — спектральный оператор, и потому надо лишь доказать, что T оператор типа $m-1$.

В доказательстве будут использованы римановы интегралы типа

$$\text{(i)} \qquad \int_{\sigma(T)} F(\xi) E(d\xi),$$

где E — разложение единицы для T, а F — операторнозначная функция, определенная на спектре $\sigma(T)$, непрерывная в равномерной операторной топологии и такая, что

$$\text{(ii)} \qquad F(\xi) T = T F(\xi), \quad \xi \in \sigma(T).$$

В силу следствия XV.3.7 $F(\xi)$ коммутирует с проекторами E, т. е.

$$\text{(iii)} \qquad F(\xi)\, E(\sigma) = E(\sigma)\, F(\xi), \qquad \xi \in \rho(T),$$

для всякого борелевского множества σ. Если $\pi = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, $\pi' = \{\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n\}$ — два разбиения $\sigma(T)$ и $\xi_i \in \sigma_i$, $\xi'_j \in \sigma'_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n'$, то, используя соотношение (iii) и лемму XV.6.8, мы видим, что для некоторой постоянной K выполнено неравенство

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\, E(\sigma_i) - \sum_{j=1}^{n'} F(\xi'_j)\, E(\sigma'_j) \Big| =$$
$$= \Big| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} \{F(\xi_i) - F(\xi'_j)\}\, E(\sigma_i \sigma'_j) \Big| \leqslant K \sup |F(\xi_i) - F(\xi'_j)|,$$

где верхняя грань берется по всем i и j, для которых пересечение $\sigma_i\sigma'_j$ непусто. Если под нормой $|\pi|$ понимается величина

$$|\pi| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{diam} \sigma_i,$$

то ясно, что предел

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\, E(\sigma_i)$$

существует в равномерной операторной топологии для всякой функции F на $\sigma(T)$, непрерывной в равномерной операторной топологии и удовлетворяющей условию (ii). Этот предел определяет риманов интеграл (i). Ясно, что этот интеграл линеен по F и удовлетворяет неравенству

$$\text{(iv)} \qquad \Big| \int_{\sigma(T)} F(\xi)\, E(d\xi) \Big| \leqslant K \sup_{\xi \in \sigma(T)} |F(\xi)|.$$

Если F и G — две непрерывные операторнозначные функции, удовлетворяющие условию (ii), то, поскольку

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\, E(\sigma_i) \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} G(\xi_j)\, E(\sigma_j) \Big) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\, G(\xi_i)\, E(\sigma_i),$$

мы получаем, что

$$\text{(v)} \quad \Big\{ \int_{\sigma(T)} F(\xi)\, E(d\xi) \Big\} \Big\{ \int_{\sigma(T)} G(\xi)\, E(d\xi) \Big\} = \int_{\sigma(T)} F(\xi)\, G(\xi)\, E(d\xi).$$

Далее будет показано, что

$$\text{(vi)} \qquad \int_{\sigma(T)} (\xi I - T)^{2m}\, E(d\xi) = 0.$$

В доказательстве соотношения (vi) будет использован интеграл

$$\text{(vii)} \qquad I(\mu, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\delta(\mu, \gamma)} (\mu - \xi)^m (\gamma - \xi)^m R(\xi; T)\, d\xi,$$

где μ, γ — точки на Γ_0, а при $0 < \delta \leqslant 1$ контур $C_\delta(\mu, \gamma)$ является положительно ориентированным контуром, который проходит через μ и γ и определяется следующим образом. Для произвольной точки ξ

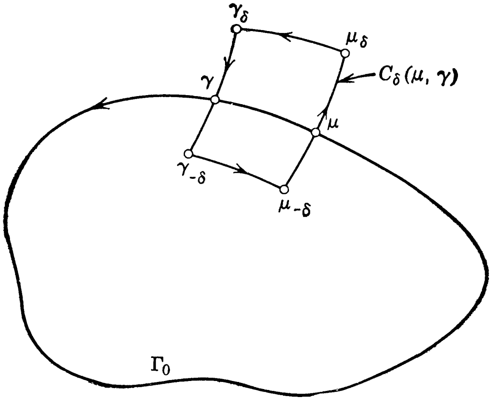

Рис. 2.

из Γ_0 обозначим через ξ_δ пересечение трансверсали, проходящей через ξ, с кривой Γ_δ. Кривая $C_\delta(\mu, \gamma)$ является положительно ориентированной жордановой кривой, проходящей через точки μ_δ, γ_δ, $\gamma_{-\delta}$, $\mu_{-\delta}$ и состоящей из поддуг кривых Γ_δ, Δ_γ, $\Gamma_{-\delta}$, Δ_μ. Кривая $C_\delta(\mu, \gamma)$ определяется таким образом, что она содержит внутри себя внутренность направленного сегмента (μ, γ) ориентированного контура Γ_0. Подинтегральное выражение $f(\xi)$ в $I(\mu, \gamma)$ определено и непрерывно в каждой точке кривой $C_\delta(\mu, \gamma)$, за исключением μ и γ. В силу условия (G_m) функция $f(\xi)$ ограничена на $C_\delta(\mu, \gamma)$. Следовательно, интеграл $I(\mu, \gamma)$ существует и, очевидно, не зависит от δ, так как $f(\xi)$ имеет особенности только на Γ_0. Покажем сначала, что $I(\mu, \gamma) \to 0$ при $|\mu - \gamma| \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и зафиксировано такое $\delta > 0$, что длина каждой из дуг $\mu_{-\delta}\mu_\delta$ и $\gamma_{-\delta}\gamma_\delta$ меньше ε. Выберем K_ε, так, чтобы

$$|R(\xi; T)| \leqslant K_\varepsilon, \qquad \xi \in \Gamma_\delta \cup \Gamma_{-\delta},$$

и $\alpha_\varepsilon > 0$ так, чтобы обе дуги $\gamma_{-\delta}\mu_{-\delta}$ и $\mu_\delta\gamma_\delta$ имели длину, меньшую чем $\varepsilon/K_\varepsilon$, если только $|\mu - \gamma| < \alpha_\varepsilon$. Тогда при $|\mu - \gamma| < \alpha_\varepsilon$ мы имеем

$$|I(\mu, \gamma)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left[2\varepsilon M + 2K_\varepsilon \frac{\varepsilon}{K_\varepsilon}\right],$$

откуда видно, что $I(\mu, \gamma) \to 0$, если $|\mu - \gamma| \to 0$.

Заметим далее, что спектр любого вектора вида $I(\mu, \gamma)x$ содержится в направленной замкнутой дуге $\mu\gamma$. Чтобы убедиться в этом, выберем точку λ, лежащую в $\rho(T)$ и вне $C_\delta(\mu, \gamma)$. Тогда из резольвентного тождества вытекает, что

$$R(\lambda; T)I(\mu, \gamma)x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\delta(\mu, \gamma)} \frac{(\mu-\xi)^m(\gamma-\xi)^m}{\lambda-\xi} R(\xi; T)x\,d\xi,$$

а интеграл в правой части этого равенства дает аналитическое распространение $R(\lambda; T)I(\mu; \gamma)x$ во все точки, лежащие вне $C_\delta(\mu, \gamma)$. Таким образом, спектр $\sigma(I(\mu, \gamma)x)$ содержится в замкнутой дуге $\mu\gamma$. Поэтому если замкнутые интервалы $[\mu, \gamma]$ и $[\mu', \gamma']$ на Γ_0 не пересекаются, то в силу следствия XV.3.3 мы имеем

$$E([\mu, \gamma])\,I(\mu', \gamma') = 0.$$

Пусть $\mu_n, \mu, \gamma, \gamma_n$ — упорядоченное множество на ориентированной кривой Γ_0, причем $\mu_n \to \mu$ и $\gamma_n \to \gamma$. Тогда $E([\mu, \gamma])\,I(\gamma_n, \mu_n) = 0$. Так как

$$(\mu I - T)^m(\gamma I - T)^m = I(\mu_n, \mu) + I(\mu, \gamma) + I(\gamma, \gamma_n) + I(\gamma_n, \mu_n)]$$

и $I(\mu_n, \mu) \to 0$, $I(\gamma, \gamma_n) \to 0$, отсюда вытекает, что

$$E([\mu, \gamma])(\mu I - T)^m(\gamma I - T)^m = I(\mu, \gamma).$$

Пусть теперь Γ_0 разбита на n непересекающихся подинтервалов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, каждый длины L/n, где L — длина Γ_0, и пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, $\xi_{n+1} = \xi_1$ — упорядоченная в соответствии с положительной ориентацией Γ_0 последовательность концевых точек этих отрезков. Тогда в силу предыдущего равенства

$$\text{(viii)}\quad E(\sigma_i)(\xi_j I - T)^m(\xi_{j+1}I - T)^m = I(\xi_j, \xi_{j+1}).$$

Положим теперь $\delta = 1/n$, так что длина $C_\delta(\xi_j, \xi_{j+1})$ имеет порядок $1/n$. Из соотношений (vii) и (viii) вытекает, что

$$|E(\sigma_j)(\xi_j I - T)^m(\xi_{j+1}I - T)^m| \leqslant \frac{C_1}{n^{m+1}}$$

и, таким образом,

$$\left|\sum_{j=1}^{n}(\xi_j I - T)^m(\xi_{j+1}I - T)^m E(\sigma_j)\right| \leqslant \frac{C_2}{n^m}.$$

Элементарные соображения, связанные с непрерывностью, показывают, что сумма, норма которой появилась в левой части последнего неравенства, стремится к интегралу $\int\limits_{\sigma(T)}(\xi I - T)^{2m}E(d\xi)$, когда $n \to \infty$, и потому это неравенство устанавливает соотношение (vi).

Далее будет доказано, что

$$\text{(ix)} \qquad \int\limits_{\sigma(T)} (\xi I - T)^j E(d\xi) = 0, \qquad j \geqslant m.$$

В силу соотношения (vi) это равенство можно доказать по индукции по убывающим j. Таким образом, мы покажем, что соотношение (ix) выполнено для целого $j \geqslant m$, если оно выполнено для целого числа $j+1$. Для этого обозначим через ξ_δ точку пересечения кривой Γ_δ с трансверсалью Δ_ξ, проходящей через точку ξ на Γ_0, и положим $R(\xi_\delta) = R(\xi_\delta; T)$. Тогда в силу (iv) и условия (G_m) мы имеем

$$\left| \int\limits_{\sigma(T)} (\xi - \xi_\delta)^{j+1} R(\xi_\delta) E(d\xi) \right| \leqslant C_1 |\xi - \xi_\delta|;$$

это неравенство показывает, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\sigma(T)} (\xi - \xi_\delta)^{j+1} R(\xi_\delta) E(d\xi) = 0.$$

С другой стороны, в силу соотношения $(\xi - \xi_\delta) I = (\xi I - T) - (\xi_\delta I - T)$ ясно, что

$$\int\limits_{\sigma(T)} (\xi - \xi_\delta)^{j+1} R(\xi_\delta) E(d\xi) = \int\limits_{\sigma(T)} (\xi_\delta I - T)^{j+1} R(\xi_\delta) E(d\xi) + \\ + \sum_{r=1}^{j+1} (-1)^r \binom{j+1}{r} \int\limits_{\sigma(T)} (\xi I - T)^{j+1-r} (\xi_\delta I - T)^{r-1} E(d\xi).$$

Но ввиду соотношения (v) и предположения индукции

$$\int\limits_{\sigma(T)} (\xi I - T)^{j+1} R(\xi_\delta) E(d\xi) = 0, \qquad 0 < \delta \leqslant 1.$$

Так как $\lim\limits_{\delta \to 0} (\xi_\delta I - T)^{r-1} = (\xi I - T)^{r-1}$ в равномерной операторной топологии, из (iv) вытекает, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\sigma(T)} (\xi - \xi_\delta)^{j+1} R(\xi_\delta) E(d\xi) = - \int\limits_{\sigma(T)} (\xi I - T)^j E(d\xi);$$

тем самым равенство (ix) доказано для всех $j \geqslant m$. Далее, если S — скалярная часть оператора T, то

$$0 = \int\limits_{\sigma(T)} (\xi I - T)^m E(d\xi) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \int\limits_{\sigma(T)} \xi^{m-r} E(d\xi) (-T)^r = \\ = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} S^{m-r} (-T)^r = \\ = (S - T)^m = (-N)^m,$$

т. е. $N^m = 0$. Тот факт, что T является оператором типа $m-1$, вытекает теперь из теоремы XV.5.4, ч. т. д.

Спектральная теорема для ограниченного самосопряженного оператора T в гильбертовом пространстве вытекает из теоремы 18. Это будет показано в следующем параграфе.

Другой частный случай — это случай, неограниченный аналог которого (XVIII.2.39) полезен при рассмотрении несамосопряженных сингулярных краевых задач для дифференциальных операторов второго порядка, изученных Наймарком. Однако ввиду особой природы этого случая можно провести независимое доказательство, более короткое, чем доказательство теоремы 18, что мы сейчас и сделаем. В этой теореме спектр оператора T лежит на гладкой кривой Γ_0, как это описано при обсуждении условия роста (G). Нет, однако, необходимости делать предположение о выполнении условия роста, поскольку оно будет вытекать из других предположений.

→ Теорема 19. *Пусть T — оператор в рефлексивном пространстве $\mathfrak{X}$ и его спектр лежит на кривой Γ_0. Кроме того, пусть $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_0^*$ — плотные линейные многообразия в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$ соответственно, обладающие следующими тремя свойствами:*

(i) *для векторов x_0 из $\mathfrak{X}_0$ и x_0^* из $\mathfrak{X}_0^*$ существует постоянная $K(x_0^*, x_0)$, такая, что*

$$|x_0^* R(\xi(t, \delta); T)x_0| \leqslant K(x_0^*, x_0), \quad -1 \leqslant t, \quad \delta \leqslant 1, \quad \delta \neq 0;$$

(ii) *для любых векторов x_0 из $\mathfrak{X}_0$ и x_0^* из $\mathfrak{X}_0^*$ пределы*

$$R^+(\lambda, x^*, x_0) = \lim_{\delta \to 0+} x_0^* R(\xi(t, \delta); T)x_0$$

и

$$R^-(\lambda, x_0^*, x_0) = \lim_{\delta \to 0-} x_0^* R(\xi(t, \delta); T)x_0$$

существуют во всех точках $\lambda = \xi(t, 0)$ кривой Γ_0;

(iii) *существует постоянная M, зависящая только от оператора T и такая, что*

$$\int_{\sigma(T)} |R^+(\lambda, x_0^*, x_0) - R^-(\lambda, x_0^*, x_0)|\, ds \leqslant M |x_0^*| |x_0|, \quad x_0 \in \mathfrak{X}, \quad x_0^* \in \mathfrak{X}^*,$$

где s — длина дуги на Γ_0.

Тогда T — спектральный оператор скалярного типа, спектральное разложение которого определяется по формуле

$$\text{(iv)} \qquad x_0^* E(\sigma) x_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \{R^+(\lambda, x_0^*, x_0) - R^-(\lambda, x_0^*, x_0)\}\, d\lambda.$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ и f — однозначная функция, аналитическая в окрестности кольцевой области, ограниченной кривыми Γ_δ и $\Gamma_{-\delta}$. Тогда (см. определение VI.3.9)

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{\Gamma_\delta} f(\lambda)\,R(\lambda;T)\,d\lambda-\int\limits_{\Gamma_{-\delta}} f(\lambda)\,R(\lambda;T)\,d\lambda\right],$$

где оба интеграла берутся при обходе контуров в положительном направлении. В силу предположений (i) и (ii) эта формула может быть переписана в виде

$$x_0^*f(T)\,x_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} f(\lambda)\,\{R^+(\lambda,x_0^*,x_0)-R^-(\lambda,x_0^*,x_0)\}\,d\lambda,$$

где $x_0\in\mathfrak{X}_0$, $x_0^*\in\mathfrak{X}_0$. Так как подинтегральное выражение обращается в нуль, если λ лежит в резольвентном множестве, то

$$\text{(v)}\qquad x_0^*f(T)\,x_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\{R^+(\lambda,x_0^*,x_0)-R^-(\lambda,x_0^*,x_0)\}\,d\lambda.$$

В силу предположения (iii) правая часть равенства (v) определяет для любой ограниченной борелевской функции f на $\sigma(T)$ непрерывную билинейную форму (f,x_0^*,x_0), которая, поскольку $\mathfrak{X}_0$ и $\mathfrak{X}_0^*$ плотны, имеет единственное расширение до ограниченной билинейной формы (f,x^*,x), определенной для всех x из $\mathfrak{X}$ и x^* из $\mathfrak{X}^*$. Так как $\mathfrak{X}$ рефлексивно, отсюда вытекает существование однозначно определенного оператора $f(T)$ в $\mathfrak{X}$, для которого выполнено условие (v). Отображение $f\to f(T)$ является гомоморфизмом алгебры аналитических функций f, а поскольку любая непрерывная функция на Γ_0 является равномерным пределом аналитических функций, отсюда следует, что это отображение также является гомоморфизмом алгебры непрерывных функций. Чтобы убедиться в том, что оно является и гомоморфизмом алгебры ограниченных борелевских функций, заметим следующее: для фиксированной непрерывной функции g множество всех ограниченных борелевских функций f, для которых выполнено соотношение

$$\text{(vi)}\qquad (fg)(T)=f(T)\,g(T),$$

содержит все непрерывные функции. Более того, если равенство (vi) выполнено для каждой функции из равномерно ограниченной поточечно сходящейся последовательности $\{f_n\}$, то из соотношения (v) вытекает, что (vi) выполнено и для предельной функции $f=\lim f_n$. Таким образом, соотношение (vi) справедливо для всех ограниченных борелевских функций f и всех непрерывных функций g. Повторное использование этих рассуждений показывает, что (vi) выполнено также и тогда, когда обе функции f и g ограниченные борелевские. Таким образом, операторы $f(T)$ и $g(T)$ коммутируют, и, как показывает равенство (v), удовлетворяют неравенству

$$\text{(vii)}\qquad |f(T)|\leqslant M\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|f(\lambda)|.$$

Эти факты означают, что оператор $E(\sigma)$, определяемый соотношением (iv), является ограниченной спектральной мерой, которая, согласно теореме IV.10.1 Орлича — Петтиса, счетно аддитивна в сильной операторной топологии. Для проверки того, что E является спектральным разложением для оператора T, достаточно поэтому показать, что для любого борелевского подмножества σ в $\sigma(T)$ спектр сужения $T \mid E(\sigma)\mathfrak{X}$ содержится в $\bar{\sigma}$. Для каждого $\xi \notin \bar{\sigma}$ определим ограниченную борелевскую функцию r_ξ соотношением $r_\xi(\lambda) = (\xi - \lambda)^{-1}\chi_\sigma(\lambda)$, где χ_σ — характеристическая функция σ. Тогда $r_\xi(T)(\xi I - T) = E(\sigma)$; это равенство показывает, что $\sigma(T \mid E(\sigma)\mathfrak{X}) \subseteq \bar{\sigma}$ и что T — спектральный оператор. Из соотношения (vii) вытекает теперь, что T — скалярный оператор, ч. т. д.

6. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Цель этого параграфа — показать, как теория спектральных операторов может быть использована для получения классической спектральной теоремы в гильбертовом пространстве, т. е. теоремы, утверждающей, что ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве является спектральным оператором скалярного типа. Для этого читателю следует вспомнить, что ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$ называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным в смысле гильбертова пространства, т. е. $T = T^*$. Скалярное произведение векторов x и y из $\mathfrak{X}$ мы будем, как обычно, обозначать через (x, y). Для того чтобы можно было воспользоваться теорией спектральных операторов, нам необходимы две леммы. Эти леммы покажут, что предположения теоремы 5.18 выполнены в случае самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

1. Лемма. *Если T — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то его спектр веществен, и для любого невещественного α мы имеем*

$$|R(\alpha; T)| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}(\alpha)|}$$

Доказательство. Если α невещественно, то разложение скалярного произведения $((\alpha I - T)x, (\alpha I - T)x)$ приводит к отношению

$$|(\alpha I - T)x|^2 = |\operatorname{Im}(\alpha)x|^2 + |(\operatorname{Re}(\alpha)I - T)x|^2 \geqslant |\operatorname{Im}(\alpha)|^2 |x|^2,$$

так что

$$|x| \leqslant \frac{|(\alpha I - T)x|}{|\operatorname{Im}(\alpha)|}.$$

Это показывает, что $(\alpha I - T)^{-1}$ существует как ограниченный оператор, откуда сразу же вытекает замкнутость образа $(\alpha I - T)\mathfrak{X}$.

Следовательно, остается только доказать, что образ $(\alpha I - T)\mathfrak{X}$ плотен. Если вектор y ортогонален к этому многообразию, то

$$0 = ((\alpha I - T)x, y) = (x, (\bar{\alpha} I - T)y), \qquad x \in \mathfrak{X},$$

откуда вытекает, что $(\bar{\alpha} I - T)y = 0$. Так как $\bar{\alpha}$ невещественно, то $y = 0$ и (см. лемму IV.4.4) $(\alpha I - T)\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, ч. т. д.

2. Лемма. *Самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве удовлетворяет условию ограниченности* (B).

Доказательство. Так как ортогональные векторы x, y удовлетворяют соотношению $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, достаточно показать, что x ортогонален к y, если их спектры $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$ относительно самосопряженного оператора T не пересекаются. В этом случае функция

$$(R(\lambda; T)x, y) = (x, R(\bar{\lambda}; T)y) = \overline{(R(\bar{\lambda}; T)y, x)}$$

аналитична, если либо $\lambda \notin \sigma(x)$, либо $\bar{\lambda} \notin \sigma(y)$. По лемме 1 спектр $\sigma(y)$ веществен, так что функция $(R(\lambda; T)x, y)$ аналитична всюду. Разложение (см. VII.3.4)

$$(R(\lambda; T)x, y) = \frac{(x, y)}{\lambda} + \frac{(Tx, y)}{\lambda^2} + \dots$$

показывает, что функция $(R(\lambda; T)x, y)$ обращается в нуль в бесконечности и, следовательно, тождественно равна нулю. Таким образом, коэффициент $(x, y) = 0$, ч. т. д.

→ 3. Теорема. *Ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве является спектральным оператором скалярного типа.*

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 теорема 5.18 показывает, что ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве является спектральным оператором типа 0, но это и означает, что он является оператором скалярного типа, ч. т. д.

7. Упражнения

В некоторых упражнениях будут использованы следующие обозначения. Символом T обозначается ограниченный линейный оператор в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Для любого вектора x из $\mathfrak{X}$ символ $[x]$ используется для обозначения замкнутого линейного многообразия, порожденного всеми векторами $R(\xi; T)x$, где $\xi \in \rho(T)$. Если σ — замкнутое множество комплексных чисел, то через $\mathfrak{M}(\sigma)$ обозначается множество всех векторов x, спектр которых содержится в σ и, как обычно, $\mathcal{F}(\sigma)$ обозначает класс всех комплекснозначных функций, однозначных и аналитических в открытом множестве, содержащем σ.

1. Для любого вектора x из $\mathfrak{X}$ выполнены соотношения

(a) $$x \in [x];$$

(b) $$f(T)[x] \subseteq [x], \quad f \in \mathscr{F}(\sigma(T));$$

(c) $$x(\xi) \in [x], \quad \xi \in \rho(x);$$

(d) $$[y] \subseteq [x], \quad y \in [x].$$

(e) Если σ — связная компонента резольвентного множества $\rho(x)$, содержащая некоторую точку из $\rho(T)$, то $x(\lambda) \in [x]$ для всех $\lambda \in \sigma$. Показать, что это может оказаться неверным, если $\sigma \cap \rho(T) = \varnothing$.

2. Если T удовлетворяет условию (C), то для каждого замкнутого множества σ комплексных чисел множество $\mathfrak{M}(\sigma)$ является замкнутым линейным многообразием, причем $T\mathfrak{M}(\sigma) \subseteq \mathfrak{M}(\sigma)$ и

$$\sigma(T \mid \mathfrak{M}(\sigma)) \subseteq \sigma.$$

3. Если T обладает свойством (C), то для любой пары σ_1, σ_2 непересекающихся замкнутых множеств комплексных чисел существует постоянная K, зависящая только от σ_1 и σ_2, такая, что

$$|x(\xi)| \leqslant K|x|, \quad \xi \in \sigma_1, \quad x \in \mathfrak{M}(\sigma_2).$$

4. Если T обладает свойством (C), то для любого вектора x из $\mathfrak{X}$ выполнены соотношения $T[x] \subseteq [x]$ и $\sigma(T \mid [x]) = \sigma(x)$.

5. Если T обладает свойством (C), то

$$\sigma(y) \subseteq \sigma(x), \quad y \in [x].$$

6. Определение. Оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ называется *спектральным оператором класса* (Γ), где Γ — тотальное линейное многообразие в $\mathfrak{X}^*$ (т. е. $\Gamma x = 0$ только в том случае, когда $x = 0$), если T имеет разложение единицы E, определенное на борелевских множествах комплексной плоскости и такое, что x^*E счетно аддитивна для всех x^* из Γ.

7. (Фиксман.) Пусть $\mathfrak{X} = l_\infty$ и T переводит вектор $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ из l_∞ в элемент $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$, где

$$\eta_1 = \xi_1; \quad \eta_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\xi_n, \quad n \geqslant 2.$$

Пусть Γ — линейное многообразие в $(l_\infty)^*$, порожденное координатными функционалами

$$\gamma_n(x) = \xi_n, \quad n \geqslant 1.$$

Пусть $E(\sigma)x = y$, где $\eta_1 = \xi_1$ тогда и только тогда, когда $1 \in \sigma$, и $\eta_n = \xi_n$, $n \geqslant 2$, тогда и только тогда, когда $1 - 1/n \in \sigma$. Показать, что T — спектральный оператор класса (Γ), но он не является спектральным оператором класса $(\mathfrak{X}^*)$.

8. (Фиксман.) Пусть T такой же, как в предыдущем упражнении, и пусть φ из $(l_\infty)^*$— банахов предел, как в упр. II.4.22. Пусть A определен в l_∞ соотношением

$$Ax = A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) = (\varphi(x), 0, 0, \ldots).$$

Показать, что $A^2 = 0$, что $\varphi(Tx) = \varphi(x)$ и $AT = TA$. Однако если $\sigma = \{1\}$, то $AE(\sigma) = 0$ и $E(\sigma)A = A$. Следовательно, A является нильпотентным оператором, коммутирующим с T, но не коммутирующим с разложением единицы E.

9. (Фиксман.) Пусть T, E и A такие же, как в предыдущем упражнении, и пусть F для любого борелевского множества σ определяется соотношением

$$F(\sigma) = E(\sigma) + AE(\sigma) - E(\sigma)A.$$

Показать, что F — ограниченная спектральная мера и что x^*F счетно аддитивна для всех x^* из многообразия Γ_1, порожденного линейными функционалами

$$\{\gamma_1 - \varphi, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\}.$$

Показать, что F — разложение единицы для T и что T — спектральный оператор класса (Γ_1), но разложения E и F не совпадают и не коммутируют. [Указание: $AE(\sigma)A = 0$ и $F(\sigma) = E(\overline{\sigma})F(\sigma)$ для всех борелевских множеств σ.]

8. Примечания и дополнения

Характеризация спектральных операторов. В этой главе сформулированы условия, достаточные для того, чтобы оператор из $B(\mathfrak{X})$ был спектральным. Изложенные здесь результаты принадлежат Данфорду (см. особенно [16, 17, 19]). Некоторые из результатов гл. XVII также могут быть использованы для получения достаточных условий спектральности оператора. Например, если $\mathfrak{X}$ — слабо полное B-пространство и $T \in B(\mathfrak{X})$ имеет вещественный спектр, то T является оператором скалярного типа тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $M > 0$, что для любого многочлена p выполнено неравенство

$$|p(T)| \leqslant M \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |p(\lambda)|$$

(см. теорему XVII.2.5). Аналогично, оператор $T \in B(\mathfrak{X})$ является оператором скалярного типа тогда и только тогда, когда множество

$$\{p(T)x \mid p \text{—многочлен}, \sup_{\lambda \in \delta(T)} |p(\lambda)| \leqslant 1\}$$

слабо секвенциально компактно для любого $x \in \mathfrak{X}$ (см. Клуванек [1]). Другие результаты того же типа были получены Фиксманом [1].

Хотя нетрудно привести примеры операторов, которые *не* являются спектральными, полезно упомянуть о некоторых «хороших» операторах, не являющихся спектральными. Оператор $U \in B(\mathfrak{X})$, изометрично отображающий $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{X}$, иногда называют *унитарным оператором* в $\mathfrak{X}$. Очевидно, что если $U \in B(\mathfrak{X})$ унитарен, то (i) $|U^n| = 1$ для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, (ii) $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in C \mid |\lambda| = 1\}$ и (iii) $|R(\lambda; U)| \leqslant |1 - |\lambda||^{-1}$ для $\lambda \in \rho(U)$. Кроме того, если U — унитарный оператор, являющийся спектральным, то он скалярного типа.

Пусть K — компактное хаусдорфово пространство; тогда произвольный унитарный оператор в $C(K)$ имеет вид

$$(Uf)(x) = \mu(x) f(\varphi(x)), \quad x \in K,$$

где φ — гомеоморфизм K, $\mu \in C(K)$ и $|\mu(x)| = 1$. Фиксманом [1] было доказано, что если φ не периодичен, то оператор U не является спектральным оператором.

Пусть $l_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначает пространство комплексных последовательностей $x = \{x_k \mid k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ с нормой $|x| = \{\sum |x_k|^p\}^{1/p} < \infty$, и пусть U — *оператор сдвига*, определяемый соотношением

$$U(\{x_k\}) = \{x_{k+1}\}.$$

Фиксман [1] показал, что если $p \neq 2$, то унитарный оператор U не является спектральным. См. также работу Краббе [3], в которой отмечается, что преобразование Гильберта в $l_p(-\infty, \infty)$, порожденное матрицей $(1/(n-m))$, не является скалярным оператором. С другой стороны, Краббе [6] показал, что хотя некоторые операторы свертки не являются спектральными операторами, они обладают свойством, позволяющим представлять их в слабой операторной топологии интегралом вида $\int \lambda E(d\lambda)$, где E — аддитивная операторнозначная функция, заданная на *прямоугольниках*.

В гильбертовом пространстве из условия «$|e^{itT}| \leqslant M$ для всех $t \in R$» вытекает, что T эквивалентен самосопряженному оператору и, следовательно, является оператором скалярного типа с вещественным спектром. (Это следует из леммы XV.6.1, из которой вытекает, что ограниченная группа $G = \{e^{itT} \mid t \in R\}$ эквивалентна группе унитарных операторов. По теореме Стоуна эта группа унитарных операторов имеет инфинитезимальную образующую iA, где A — самосопряженный оператор. Таким образом, T эквивалентен A.) Однако если $\mathfrak{X}$ есть B-пространство и $T \in B(\mathfrak{X})$, то условие «$|e^{itT}| \leqslant M$ для $t \in R$» не влечет за собой спектральности оператора T, даже если $\mathfrak{X}$ рефлексивно. Чтобы убедиться в этом, заметим, что если S и T — коммутирующие операторы скалярного типа с вещественными спектрами, то $|e^{itS}| \leqslant M_1$ и $|e^{itT}| \leqslant M_2$ для $t \in R$. Следовательно, мы имеем

$$|e^{it(S+T)}| = |e^{itS}e^{itT}| = |e^{itS}||e^{itT}| \leqslant M_1 M_2$$

для всех $t \in R$. Поэтому если бы из такой ограниченности вытекало, что $S + T$ — спектральный оператор, то мы пришли бы к противоречию с модификацией Маккарти [2, I] примера Какутани. Но, с другой стороны, Берксон [2] доказал, что если $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то $T \in B(\mathfrak{X})$ — оператор скалярного типа тогда и только тогда, когда существуют коммутирующие операторы A и B, такие, что $T = A + iB$ и множество $\{e^{iP} \mid P \in R(A, B)\}$ ограничено в $B(\mathfrak{X})$, где $R(A, B)$ обозначает семейство многочленов от A и B с вещественными коэффициентами. Аналогично, Канторович [7; стр. 545] показал, что если $\mathfrak{X}$ слабо полно и для некоторой постоянной $M > 0$ и любого многочлена p с вещественными коэффициентами выполнено неравенство $|e^{ip(T)}| \leqslant M$, то T — спектральный оператор скалярного типа с вещественным спектром.

Канторович [4] заметил, что если T — оператор скалярного типа с вещественным спектром, то $e^{-2\pi itT}$ является преобразованием Фурье — Стильтьеса его разложения единицы E; следовательно, E можно рассматривать как *обратное* преобразование Фурье — Стильтьеса группы $\{e^{-2\pi itT} \mid t \in R\}$. Предполагая, что эта группа ограничена в $B(\mathfrak{X})$, в случае рефлексивного $\mathfrak{X}$ Канторович получил характеризацию операторов скалярного типа с вещественным спектром, добавив соответствующие аналитические условия, обеспечивающие существование обратного преобразования Фурье — Стильтьеса. Канторовичем [4] был доказан следующий результат:

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ рефлексивно и $T \in B(\mathfrak{X})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *T — спектральный оператор скалярного типа с вещественным спектром.*

(2) *Существует постоянная $M > 0$, такая, что для любой функции $f \in L_1(R)$ выполнено неравенство*

$$\left|\int_R f(t)\, e^{-2\pi itT}\, dt\right| \leqslant M \sup_{s \in R} |\hat{f}(s)|,$$

где $\hat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f.

(3) *Существует постоянная $M > 0$, такая, что для любого вещественного вектора $(t_1, \ldots, t_n)$ и любого комплексного вектора $(c_1, \ldots, c_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, выполнено неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{-2\pi it_k T}\right| \leqslant M \sup_{s \in R} \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{-2\pi it_k s}\right|.$$

(4) *Существует постоянная* $M > 0$, *такая, что для любых векторов* $x \in \mathfrak{X}$, $x^* \in \mathfrak{X}^*$ *с единичной нормой выполнено неравенство*

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_R |x^* \{R(t-i\varepsilon; T) - R(t+i\varepsilon; T)\} x| \, dt \leqslant M.$$

Аналогично, если $\mathfrak{X}$ — произвольное B-пространство, то T является спектральным оператором скалярного типа с вещественным спектром тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathfrak{X}$ множество

$$\left\{ \int_R f(t) e^{-2\pi i t T} x \, dt: \quad |\hat{f}|_\infty \leqslant 1, \ f \in L_1(R) \right\}$$

слабо секвенциально компактно (см. Клуванек [2]).

Операторы, спектр которых лежит на вещественной прямой R или на единичной окружности, а резольвента удовлетворяет определенным условиям роста, представляют собой характерные примеры обобщенных скалярных операторов в смысле Коложоары и Фойаша [4; гл. 4, 5]. Причиной для этого, как заметили Вульф [4] и Тильман [2], является то, что они допускают операционное исчисление. Наиболее ранние результаты в этом направлении восходят к Лорху [7], который рассматривал операторы T, являющиеся *степенно-ограниченными* в том смысле, что множество $\{|T^n| \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ограничено в $B(\mathfrak{X})$. Спектр таких операторов лежит на окружности $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$, а их резольвенты удовлетворяют условию роста вида

$$|R(\lambda; T)| \leqslant \frac{K}{|1-|\lambda||}$$

для $|\lambda| \neq 1$. Если $\mathfrak{X}$ — гильбертово пространство, то из упомянутой выше теоремы Секефальви-Надя [7] вытекает, что такой оператор подобен унитарному оператору; следовательно, он является оператором скалярного типа с разложением единицы E, которое можно считать заданным на единичной окружности. В случае B-пространства примеры унитарных операторов показывают, что степенно-ограниченные операторы не обязательно являются спектральными. Однако в случае рефлексивного B-пространства $\mathfrak{X}$ Лорху для любого $\theta \in [0, 2\pi]$ удалось построить пару $(\mathfrak{S}_\theta, \mathfrak{F}_\theta)$ замкнутых подпространств, которые инвариантны относительно T и напоминают многообразия, соответствующие разложению единицы. Другими словами, существует семейство $\{P_\theta\}$ замкнутых (но, быть может, неограниченных) проекторов, играющих во многих отношениях роль разложения единицы. Работа Лорха была упрощена и продолжена Лифом [1], который рассмотрел операторы, удовлетворяющие условиям (a) $|T^n| = o(|n|)$ при $|n| \to \infty$ и (b) $\sigma(T) = \sigma_c(T)$ без предположения о рефлексивности $\mathfrak{X}$; спектры этих операторов лежат на единичной окружности, и выполняется условие роста второго порядка. См. также работу Лифа [2], где рассмотрен случай $|T^n| = O(|n|^q)$.

Бартл [6, 7] и Кокан [1] рассмотрели операторы с вещественным спектром и условием роста $|R(\lambda; T)| \leqslant K/|\operatorname{Im}(\lambda)|^n$ при $|\operatorname{Im}(\lambda)| > 0$, такие, что $\sigma(T) = \sigma_c(T)$. Доказано, что для любого вещественного числа t существует замкнутый (но, возможно, неограниченный) определенный на всюду плотном множестве проекционный оператор P_t, который коммутирует с T и с любым оператором, коммутирующим с T, такой, что семейство $\{P_t \mid t \in R\}$ «возрастает» от 0 до I, когда t пробегает R, и что $t_0 \in \rho(T)$ тогда и только тогда, когда P_t постоянен в окрестности t_0. Если $n = 1$ и $\mathfrak{X}$ рефлексивно, то условие $\sigma(T) = \sigma_c(T)$ можно опустить и получить аналогичные результаты. Подобные результаты были также получены Доллингером [1] и Сайном [1] в предположении, что T допускает определенного типа операционное исчисление; правда, их предположения имеют совершенно иную природу. Стемпфли [12] рассмотрел операторы, спектр которых лежит на C^2-кривой, а резольвента имеет конечный порядок роста. Он получил как обобщения результатов настоящей главы, так и аналогичные теоремы.

ГЛАВА XVII

Алгебры спектральных операторов

1. Введение

Сумма и произведение двух коммутирующих ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве являются нормальными операторами и, следовательно, спектральными. Из следствия XV.6.5 видно, что этот принцип можно распространить на сумму и произведение двух коммутирующих спектральных операторов в гильбертовом пространстве. Однако внимательный читатель, вероятно, заметил, что мы не пытались доказать соответствующую теорему в произвольных B-пространствах. Действительно, как показывает пример Какутани [15], такое обобщение было бы неверным. В этой главе будет проведено систематическое изучение алгебраических и аналитических свойств семейств спектральных операторов с тем, чтобы найти достаточные условия того, что сумма и произведение двух коммутирующих спектральных операторов являются спектральными. В то же время будут получены различные достаточные условия того, что равномерные, слабые и сильные пределы последовательностей коммутирующих и некоммутирующих спектральных операторов являются спектральными.

Вкратце структура настоящей главы такова. В § 2 дано представление равномерно замкнутых коммутативных алгебр спектральных операторов. В § 3 рассматриваются слабо и сильно замкнутые коммутативные алгебры спектральных операторов. Наконец, в § 4 получены два результата о сильном пределе последовательности некоммутирующих спектральных операторов.

Более подробно, в § 2 вместе с семейством τ коммутирующих спектральных операторов рассматривается не только алгебра, но и *полная алгебра*, порожденная τ, которая определяется следующим образом:

1. Определение. *Полной алгеброй* операторов называется равномерно замкнутая алгебра операторов, содержащая обратный к каждому из своих обратимых элементов. *Полной алгеброй, порожденной семейством операторов*, называется пересечение всех полных алгебр, содержащих данное семейство операторов.

Следует заметить, что полная алгебра операторов замкнута в равномерной операторной топологии, в то время как алгебра, содержащая все обратные элементы (см. определение XV.13.4), не обязательно является замкнутой.

Взяв далее семейство τ коммутирующих спектральных операторов, присоединив к нему семейство всех проекторов спектральных разложений операторов из τ и образовав полную алгебру $\mathfrak{A}$, порожденную этим расширенным семейством операторов, мы начнем § 2 с доказательства того, что при определенных условиях $\mathfrak{A}$ разлагается в прямую векторную сумму

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{R}$ — радикал в $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{S}$ — полупростая полная подалгебра $\mathfrak{A}$, алгебраически и топологически эквивалентная множеству всех непрерывных функций на ее собственном пространстве максимальных идеалов. Эта теорема обобщает теорему Гельфанда — Наймарка (см. IX.3.7) на алгебры спектральных операторов. Более того, она аналогична второй основной теореме Веддерберна об абстрактной алгебре. Далее в § 2 рассматриваются алгебры операторов, изоморфные алгебрам непрерывных функций, и доказываются общие теоремы о функциональном исчислении, обобщающие следствия X.2.9 и X.2.10 со случая гильбертова пространства на произвольные B-пространства.

В § 3 в рассмотрение вводится коммутирующее семейство τ спектральных операторов *скалярного типа* и ставится два вопроса:

(i) Когда все операторы в слабо замкнутой алгебре, порожденной τ, являются спектральными операторами скалярного типа?

(ii) Какие операторы принадлежат слабо замкнутой алгебре, порожденной семейством τ?

Как будет показано в § 3, можно дать удовлетворительные ответы на эти вопросы для поразительно широкого класса случаев.

Следует также отметить, что в ходе § 3 доказан ряд результатов о булевых алгебрах проекторов; некоторые из них необходимы для получения ответов на вопросы (i) и (ii), а некоторые приведены ради полноты изложения или представляют самостоятельный интерес. Многие из этих глубоких результатов были получены Бейдом.

Наконец, в § 4 показано, что при определенных условиях сильный предел T произвольной последовательности $\{T_n\}$ спектральных операторов скалярного типа является спектральным оператором и что разложение единицы для T является в некотором смысле пределом разложений единицы для операторов T_n.

2. Структура коммутативной B-алгебры спектральных операторов

В этом параграфе изучаются коммутативные алгебры спектральных операторов, замкнутые в равномерной операторной топологии. Сначала мы покажем, что такие алгебры $\mathfrak{A}$ могут быть разложены в прямую векторную сумму вида $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} \oplus \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — радикал в $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{S}$ — алгебра операторов скалярного типа, эквивалентная алгебре непрерывных функций.

1. Лемма. *Равномерно замкнутая алгебра операторов, порожденная ограниченной булевой алгеброй проекторов, является полной алгеброй, эквивалентной алгебре непрерывных функций на ее собственном пространстве максимальных идеалов.*

Доказательство. Пусть B — булева алгебра проекторов и $\mathfrak{A}_0(B)$ — множество всех операторов U вида

$$U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i, \tag{i}$$

где

$$0 \neq E_i \in B, \quad \sum_{i=1}^{n} E_i = I, \quad E_i E_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{ii}$$

Тогда очевидно, что $\mathfrak{A}_0(B)$ — алгебра операторов, содержащая B. Следовательно, если $\mathfrak{A}(B) = \overline{\mathfrak{A}_0(B)}$, то $\mathfrak{A}(B)$ является равномерно замкнутой алгеброй операторов, порожденной B.

Для проверки того, что $\mathfrak{A}(B)$ — полная алгебра, возьмем оператор A из $\mathfrak{A}(B)$, имеющий обратный A^{-1} в кольце ограниченных операторов. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность элементов $\mathfrak{A}_0(B)$, равномерно сходящаяся к A. Тогда по лемме VII.6.1 при достаточно больших n операторы A_n обратимы и $A_n^{-1} \to A^{-1}$ равномерно. Для проверки того, что A^{-1} лежит в $\mathfrak{A}(B)$, достаточно, следовательно, показать, что A_n^{-1} принадлежат $\mathfrak{A}(B)$. Таким образом, мы можем без ограничения общности предполагать, что A лежит в $\mathfrak{A}_0(B)$, т. е. что A имеет вид, указанный в соотношениях (i), (ii). Тогда, если $\alpha_i = 0$ при некотором i, то $E_i \neq 0$, $AE_i = 0$, но это противоречит предположению о существовании A^{-1}. Таким образом, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, так что оператор $A^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-1} E_i$ принадлежит $\mathfrak{A}(B)$. Этим доказано, что $\mathfrak{A}(B)$ — полная алгебра.

Пусть $\varkappa$ — каноническое отображение алгебры $\mathfrak{A}(B)$ в кольцо непрерывных функций на ее собственном пространстве $\mathcal{M}$ максимальных идеалов (см. IX.2.9). Для проверки того, что $\varkappa$ устанавливает эквивалентность $\mathfrak{A}(B)$ и всей алгебры $C(\mathcal{M})$, достаточно показать, что $\varkappa^{-1}$ ограничено и что $\varkappa\mathfrak{A}(B)$ плотно в $C(\mathcal{M})$. Для доказательства ограниченности $\varkappa^{-1}$ будет установлено существование конечной постоянной M, такой, что

$$|U| \leqslant 4M \sup_{m \in \mathcal{M}} |U(m)|.$$

Так как с обеих сторон этого неравенства стоят непрерывные функции от U, достаточно проверить его для U из $\mathfrak{A}_0(B)$. Таким образом, пусть U имеет вид, задаваемый соотношением (i), причем выполнены дополнительные условия (ii). Для каждого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, поскольку E_k не квазинильпотентно, можно найти в $\mathcal{M}$ максимальный идеал m, такой, что $E_k(m) \neq 0$. Поскольку $E_k E_j = 0$ для $j \neq k$, мы имеем $E_j(m) = 0$ при $j \neq k$, а так как $E_k^2(m) = E_k(m)$, выполняется равенство $E_k(m) = 1$. Отсюда вытекает, что $U(m) = \alpha_k$. С другой стороны, очевидно, что всякий максимальный идеал m из $\mathcal{M}$ обладает тем свойством, что $E_i(m) = 1$ для одного и только одного целого $i \leqslant n$, а для остальных целых $j \leqslant n$ выполнено соотношение $E_j(m) = 0$. Таким образом,

$$\sup_{m \in \mathcal{M}} |U(m)| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|.$$

Пусть M — верхняя грань норм $|E|$ проекторов E из B. Покажем, что

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i=1}^{n} |x^* E_i x| \leqslant 4M |x| |x^*|, \qquad x \in \mathfrak{X}, \qquad x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

Заметим для этого, что

$$\begin{aligned} \sum \operatorname{Re}(x^* E_i x) &= \sum{}^{+} \operatorname{Re}(x^* E_i x) - \sum{}^{-} \operatorname{Re}(x^* E_i x) = \\ &= \operatorname{Re}\left(x^* \left(\sum{}^{+} E_i\right) x\right) - \operatorname{Re}\left(x^* \left(\sum{}^{-} E_i\right) x\right) \leqslant \\ &\leqslant 2M |x| |x^*|, \end{aligned}$$

где $\sum^{+}$ $(\sum^{-})$ обозначает сумму по тем индексам i, для которых $\operatorname{Re}(x^* E_i x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$. Рассматривая аналогично мнимую часть и складывая соответствующие неравенства, мы получаем, что

$$\sum |x^* E_i x| \leqslant 4M |x| |x^*|,$$

так что (i) доказано. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned} |U| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i\right| = \sup_{|x^*|,\, |x| \leqslant 1} \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^* E_i x\right| \leqslant \\ \leqslant 4M \sup |\alpha_i| \leqslant 4M \sup_{m \in \mathcal{M}} |U(m)|, \end{aligned}$$

и ограниченность $\varkappa^{-1}$ доказана.

Для проверки того, что $\varkappa\mathfrak{A}(B)$ плотно в $C(\mathcal{M})$, достаточно в силу теоремы Вейерштрасса (см. IV.6.17) показать, что $\varkappa\mathfrak{A}_0(B)$

различает точки $\mathcal{M}$ и содержит комплексно сопряженную функцию для любого своего элемента. Так как $\varkappa\mathfrak{A}_0(B)$ плотно в $\varkappa\mathfrak{A}(B)$ и $\mathcal{M}$ — пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}(B)$, мы получаем сразу же, что $\varkappa\mathfrak{A}_0(B)$ различает точки из $\mathcal{M}$. Если m лежит в $\mathcal{M}$, а E — в B, то $E(m)^2 = E(m)$, так что $E(m)$ равно 0 или 1 и, следовательно, вещественно. Таким образом,

$$\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i\right)(m)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i E_i\right)(m),$$

и мы доказали, что $\varkappa\mathfrak{A}_0(B)$, а следовательно и $\varkappa\mathfrak{A}(B)$, содержит комплексно сопряженные функции для всех своих элементов, ч. т. д.

Некоторые неравенства, полученные в ходе предыдущего доказательства, будут полезны и в дальнейшем; поэтому они собраны и явно сформулированы в следующей лемме:

2. Лемма. *Пусть M — верхняя грань булевой алгебры B проекторов и $\mathcal{M}$ — структурное пространство равномерно замкнутой алгебры $\mathfrak{A}(B)$, порожденной B. Тогда*

$$\sup_{m\in\mathcal{M}} |U(m)| \leqslant |U| \leqslant 4M \sup_{m\in\mathcal{M}} |U(m)|, \qquad U \in \mathfrak{A}(B),$$

и, в частности,

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i\right| \leqslant 4M \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i|,$$

каковы бы ни были дизъюнктные проекторы $E_1, \ldots, E_n$.

Предыдущие леммы подготавливают нас к основному результату, описывающему структуру равномерно замкнутой полной алгебры $\mathfrak{A}(\tau)$, порожденной коммутирующим семейством τ спектральных операторов и булевой алгеброй B, которая определяется их разложениями единицы. Как будет показано, при определенных условиях такая алгебра является прямой векторной суммой $\mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — радикал в $\mathfrak{A}(\tau)$, а $\mathfrak{A}(B)$, равномерно замкнутая алгебра, порожденная B, эквивалентна алгебре непрерывных функций на пространстве $\mathcal{M}$ максимальных идеалов в $\mathfrak{A}(\tau)$. Следует отметить, что, как вытекает из этого разложения, пространство $\mathcal{M}$ гомеоморфно пространству $\mathcal{M}_1$ максимальных идеалов в $\mathfrak{A}(B)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что всякий комплексный гомоморфизм (комплексный мультипликативный линейный функционал) на $\mathfrak{A}(\tau)$ обращается в нуль на радикале, и потому соотношение $\mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R}$ порождает естественное взаимно однозначное соответствие между ненулевыми комплексными гомоморфизмами на $\mathfrak{A}(\tau)$ и на $\mathfrak{A}(B)$. Отсюда вытекает (см. IX.2.2 и IX.2.7), что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_1$ гомеоморфны. Если в $\mathfrak{A}(\tau)$ нет радикала, как в случае коммутативных B^*-алгебр операторов в гильбертовом пространстве, то $\mathfrak{A}(\tau)$ эквивалентна алгебре непрерывных функций на ее структурном пространстве. Таким образом, следующая теорема является обобщением теоремы Гельфанда — Наймарка (см. IX.2.7):

→ 3. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}(\tau)$ — полная алгебра, порожденная семейством τ коммутирующих спектральных операторов и их разложениями единицы. Если булева алгебра B, порожденная разложениями единицы операторов из τ, ограничена, то $\mathfrak{A}(\tau)$ является прямой векторной суммой*

$$\mathfrak{A}_{(\tau)} = \mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{R}$ — радикал в $\mathfrak{A}(\tau)$, а $\mathfrak{A}(B)$, равномерно замкнутая алгебра, порожденная B, эквивалентна алгебре непрерывных функций на структурном пространстве алгебры $\mathfrak{A}(\tau)$.

Доказательство. Как только разложение будет установлено, последнее утверждение о структуре алгебры $\mathfrak{A}(B)$ вытекает из леммы 1 и замечаний, сделанных в абзаце перед формулировкой теоремы.

Первая часть теоремы будет доказана путем построения проектора P в пространстве $\mathfrak{A}(\tau)$, такого, что $P\mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{A}(B)$, $(I - P)\,\mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{R}$. Это построение осуществляется в два шага. Сначала P определяется на плотном подмножестве $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}(\tau)$, а затем доказывается, что P ограничен на $\mathfrak{B}$, так что он может быть продолжен по непрерывности до проектора, заданного на всей алгебре $\mathfrak{A}(\tau)$.

Заметим сначала, что если $E(\cdot;\, T)$, $E(\cdot;\, U)$ — разложения единицы для операторов $T, U \in \tau$ соответственно, то для любой пары σ, μ борелевских множеств на плоскости проекторы $E(\sigma;\, T)$, $E(\mu;\, U)$ коммутируют. Это получается при помощи двойного применения следствия XV.3.7. Таким образом, различные проекторы $E(\sigma;\, T)$, определяемые по борелевским множествам σ и операторам T из τ, порождают булеву алгебру B.

Пусть $\mathfrak{B}$ обозначает семейство всех элементов U из $\mathfrak{A}(\tau)$, имеющих вид

(i) $$U = S + N,$$

где N — элемент из радикала $\mathfrak{R}$ алгебры $\mathfrak{A}(\tau)$, а

(ii) $$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i,$$

где

(iii) $$0 \neq E_i \in B, \quad E_i E_j = 0, \quad i \neq j, \quad E_1 + \ldots + E_n = I.$$

Положим $PU = S$. В силу утверждения о единственности в теореме XV.4.5 P является вполне определенным линейным отображением $\mathfrak{B}$ в себя. Более того, очевидно, что это проектор в $\mathfrak{B}$.

Множество $\mathfrak{B}$, очевидно, является подалгеброй в $\mathfrak{A}(\tau)$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{B}}$ его замыкание в равномерной операторной топологии. В силу теоремы XV.4.5 и того очевидного факта, что оператор скалярного типа принадлежит равномерно замкнутой алгебре, порожденной проекторами из его разложения единицы (см. определение XV.4.1), имеет место включение $\overline{\mathfrak{B}} \supseteq \tau$. Ниже будет показано, что $\overline{\mathfrak{B}}$ — полная алгебра и потому $\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}(\tau)$. Кроме того, будет также доказано, что P ограничено на $\mathfrak{B}$, так что P можно продолжить по непрерывности до проектора (который также обозначается символом P) алгебры $\mathfrak{A}(\tau)$ в себя. Так как в силу определения P очевидно, что $P\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}(B)$, отсюда вытекает, что $P\mathfrak{A}(\tau) \subseteq \mathfrak{A}(B)$. С другой стороны, так как $P\mathfrak{B}$ содержит все элементы из $\mathfrak{A}(B)$ вида (ii) и так как это множество элементов плотно в $\mathfrak{A}(B)$, будет показано, что $P\mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{A}(B)$. Более того, ясно, что $(I - P)\mathfrak{B} = \mathfrak{R}$, и так как $\mathfrak{R}$ замкнуто, то мы получим, что $(I - P)\mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{R}$.

Таким образом, для проверки соотношения $\mathfrak{A}(\tau) = \mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R}$ достаточно показать, что отображение P ограничено на $\mathfrak{B}$ и что $\mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R}$ — полная алгебра. Для проверки ограниченности P на $\mathfrak{B}$ рассмотрим элемент вида (i), при этом выполнены соотношения (ii) и (iii). Если $\mathcal{M}$ — пространство максимальных идеалов в $\mathfrak{A}(\tau)$, то, поскольку E_i не квазинильпотентен, в $\mathcal{M}$ существует такой элемент m, что $E_i(m) \neq 0$. Так как $E_i^2 = E_i$, $E_iE_j = 0$ для $\neq j$, ясно, что $E_i(m) = 1$, $E_j(m) = 0$ при $j \neq i$. Следовательно, $U(m) = S(m) + R(m) = S(m) = \alpha_i$; таким образом, $\sup |\alpha_i| \leqslant \leqslant \sup_{m \in \mathcal{M}} |U(m)| \leqslant |U|$, и в силу предыдущего соотношения

$$|PU| = |S| \leqslant 4M \sup |\alpha_i| \leqslant 4M |U|;$$

это доказывает ограниченность P на $\mathfrak{B}$.

Для проверки того, что $\mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R}$ — полная алгебра, возьмем T из $\mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R}$ и предположим, что T^{-1} существует как элемент $B(\mathfrak{X})$. Мы хотим показать, что T^{-1} лежит в $\mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R}$. Положим $T = S + N$, где S лежит в $\mathfrak{A}(B)$, а N — в $\mathfrak{R}$. Так как N — топологический нильпотент, оператор $S = T - N$ имеет обратный $\sum_0^\infty (T^{-1})^{n+1}N^n$, и этот обратный в силу леммы 1 принадлежит $\mathfrak{A}(B)$. Элементарное умножение показывает, что выполняется равенство $(S + N)(S^{-1} + C) = I$, где $C = -NS^{-1}T^{-1}$. Поскольку N содержится в радикале $\mathfrak{R}$, то же верно и для C, а потому $T^{-1} = S^{-1} + C$ лежит в алгебре $\mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R}$; тем самым доказано, что эта алгебра является полной алгеброй, ч. т. д.

Получив общую структуру алгебры, описанную в предыдущей теореме, мы изучим теперь более подробно алгебры типа $\mathfrak{A}(B)$. Как видно из следующей теоремы, произвольный изоморфный гомеоморфизм алгебры $\mathfrak{A}(B)$ на алгебру непрерывных функций на ее структурном пространстве может быть представлен в виде интеграла относительно некоторой однозначно определенной спектральной меры. Это — аналог общей спектральной теоремы для алгебр нормальных операторов в гильбертовом пространстве (см. X.2.1).

4. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра операторов в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, являющаяся гомоморфным образом при непрерывном гомоморфизме S алгебры $C(\Lambda)$ всех комплексных непрерывных функций на компактном пространстве Λ. Тогда существует единственная спектральная мера A в $\mathfrak{X}^*$, определенная на борелевских множествах в Λ, такая, что функция множества $xA(\cdot)x^*$ регулярна и счетно аддитивна для всех x из $\mathfrak{X}$ и x^* из $\mathfrak{X}^*$, причем*

$$S^*(f)=\int_{\Lambda} f(\lambda)A(d\lambda), \qquad f\in C(\Lambda).$$

Доказательство. Для любых x из $\mathfrak{X}$ и x^* из $\mathfrak{X}^*$ число $x^*S(f)x$ зависит линейно и непрерывно от функции f из $C(\Lambda)$ и, следовательно (см. IV.6.3), определяет единственную регулярную меру $\mu(\cdot, x, x^*)$ на борелевских множествах в Λ, для которой выполнено соотношение

$$\text{(i)} \qquad x^*S(f)x=\int_{\Lambda} f(\lambda)\mu(d\lambda, x, x^*), \qquad f\in C(\Lambda).$$

Левая часть этого равенства билинейна относительно x и x^*, а так как мера $\mu(\cdot, x, x^*)$ однозначно определяется этим равенством, то число $\mu(\delta, x, x^*)$, следовательно, билинейно относительно x и x^*. Более того, поскольку

$$|\mu(\delta, x, x^*)|\leqslant v(\Lambda, \mu(\cdot, x, x^*))=\sup_{|f|=1}|x^*S(f)x|\leqslant K|x||x^*|,$$

ясно, что $\mu(\delta, x, x^*)$ непрерывна по x и x^*. Таким образом, для каждого борелевского множества δ в Λ и каждого вектора x^* из $\mathfrak{X}^*$ существует вектор $\Lambda(\delta)x^*$ из $\mathfrak{X}^*$, такой, что

$$\mu(\delta, x, x^*) = xA(\delta)x^*, \qquad x\in\mathfrak{X}.$$

Из билинейности и ограниченности μ вытекает, что $A(\delta)x^*$ линейно и непрерывно по x^*, т. е. $A(\delta)$ существует как ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{X}^*$. Поскольку каждая функция f из $C(\Lambda)$ ограничена и измерима по Борелю, интеграл $\int f(\lambda)A(d\lambda)$ существует, и, как видно из (i), выполнено соотношение

$$\text{(ii)} \qquad S^*(f)=\int_{\Lambda} f(\lambda)A(d\lambda), \qquad f\in C(\Lambda).$$

Теперь мы покажем, что A — спектральная мера в $\mathfrak{X}^*$. Полагая $f = 1$ в (ii), мы получаем, что $I^* = A(\Lambda)$, а так как $A(\delta)$ аддитивна по δ, то

$$A(\delta)' = I^* - A(\delta) = A(\Lambda) - A(\delta) = A(\delta').$$

Для доказательства того, что A — спектральная мера, достаточно, следовательно, показать, что $A(\delta \cap \sigma) = A(\delta) A(\sigma)$ для любой пары борелевских подмножеств δ, σ в Λ. Далее, для любой пары f, g функций из $C(\Lambda)$ имеем

$$\int_\Lambda f(\lambda) \int_\Lambda g(\mu) A(d\mu \cap d\lambda) = \int_\Lambda f(\lambda) g(\lambda) A(d\lambda) = S^*(fg) =$$
$$= S^*(f) S^*(g) = \int_\Lambda f(\lambda) S^*(g) A(d\lambda) = \int_\Lambda f(\lambda) \int_\Lambda g(\mu) A(d\mu) A(d\lambda).$$

Таким образом, для x из $\mathfrak{X}$ и x^* из $\mathfrak{X}^*$ выполнено соотношение

$$\text{(iii)} \qquad \int_\Lambda f(\lambda) \int_\Lambda g(\mu) xA(d\mu \cap d\lambda) x^* =$$
$$= \int_\Lambda f(\lambda) \int_\Lambda g(\mu) xA(d\mu) A(d\lambda) x^*.$$

Так как все меры $xA(\cdot)x^*$ регулярны, а интеграл (как функционал на $C(\Lambda)$) однозначно определяет регулярную меру, из соотношения (iii) вытекает, что

$$\int_\Lambda g(\mu) xA(d\mu \cap \delta) x^* = \int_\Lambda g(\mu) xA(d\mu) A(\delta) x^*, \quad g \in C(\Lambda).$$

Эти рассуждения о единственности можно повторить и прийти к выводу, что

$$A(\sigma \cap \delta) = A(\sigma) A(\delta)$$

для любой пары σ, δ борелевских подмножеств в Λ; этим доказано, что A — спектральная мера, ч. т. д.

Следующая теорема дает более полную информацию в том случае, когда пространство $\mathfrak{X}$ слабо полно.

5. Теорема. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра операторов в слабо полном комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, являющаяся образом при непрерывном гомоморфизме S алгебры $C(\Lambda)$ всех комплексных функций на компактном пространстве Λ. Тогда существует однозначно определенная спектральная мера E в $\mathfrak{X}$, заданная на борелевских множествах в Λ, счетно аддитивная в сильной операторной топологии и такая, что*

$$S(f) = \int_\Lambda f(\lambda) E(d\lambda), \qquad f \in C(\Lambda).$$

Доказательство. Для фиксированного вектора x из $\mathfrak{X}$ рассмотрим отображение $f \to S(f)x$ алгебры $C(\Lambda)$ в $\mathfrak{X}$. Поскольку каждое ограниченное линейное отображение из $C(\Lambda)$ в слабо полное пространство слабо компактно (см. VI.7.6), в силу теоремы VI.7.3 ясно, что отображение $f \to S(f)x$ однозначно определяет регулярную $\mathfrak{X}$-значную меру $\nu(\cdot, x)$, такую, что

$$\text{(i)} \qquad S(f)x = \int_\Lambda f(\lambda)\,\nu(d\lambda, x), \qquad f \in C(\Lambda).$$

Сравнивая это равенство с равенством (ii) из доказательства теоремы 4 и используя утверждение о единственности в теореме Рисса о представлении, мы получаем, что

$$\text{(ii)} \qquad xA(\delta)x^* = x^*\nu(\delta, x), \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

откуда вытекает, что $\nu(\delta, x)$ линейно и непрерывно по x. Таким образом, для любого борелевского множества δ из Λ существует ограниченный линейный оператор $E(\delta)$ в $\mathfrak{X}$, такой, что $\nu(\delta, x) = E(\delta)x$. Равенство (ii) показывает, что $E^*(\delta) = A(\delta)$, и потому E — спектральная мера. Необходимое интегральное представление вытекает непосредственно из равенства (i), ч. т. д.

Далее изучаются алгебры, представимые при помощи спектральной меры, как в теореме 5.

В оставшейся части этого параграфа буква E будет обозначать счетно аддитивную спектральную меру в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Иногда E будет определена на произвольном σ-поле Σ подмножеств абстрактного множества Λ, а в некоторых случаях ее областью определения будет поле борелевских множеств комплексной плоскости. В любом случае полезно использовать понятие E-существенно ограниченной функции, описанное в следующем определении.

6. Определение. Пусть E — счетно аддитивная спектральная мера, заданная на σ-поле Σ подмножеств множества Λ. Тогда функция f на Λ называется *E-существенно ограниченной на Λ*, если величина

$$E\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)| = \inf_{E(\delta)=I} \sup_{\lambda \in \delta} |f(\lambda)|$$

конечна.

Так как E счетно аддитивна на Σ, в Σ существует множество δ_0, такое, что $E(\delta_0) = I$ и

$$E\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \delta_0} |f(\lambda)|;$$

следовательно, на Λ существует ограниченная функция f_0, такая, что $f(\lambda) = f_0(\lambda)$, кроме точек λ из некоторого E-нулевого множества.

Если f является Σ-измеримой, то такой же будет и функция f_0, и ясно, что интеграл $\int f_0(\lambda)\, E(d\lambda)$ не зависит от конкретной ограниченной функции f_0, совпадающей E-почти всюду с f. Таким образом, интеграл E-существенно ограниченной Σ-измеримой функции f может быть определен как интеграл ограниченной Σ-измеримой функции, совпадающей с f E-почти всюду на Λ. Следует также отметить, что пространство всех E-существенно ограниченных Σ-измеримых функций на Λ является B-алгеброй с естественными операциями

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} &(\alpha f+\beta g)(\lambda)=\alpha f(\lambda)+\beta g(\lambda), && \lambda\in\Lambda;\\ &(fg)(\lambda)=f(\lambda)\,g(\lambda), && \lambda\in\Lambda;\\ &e(\lambda)=1, && \lambda\in\Lambda;\\ &|f|_E=E\text{-ess}\sup_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|. && \end{aligned}$$

Как и в случае самосопряженной спектральной меры в гильбертовом пространстве, можно построить операционное исчисление, которое устанавливает изоморфизм между алгеброй E-существенно ограниченных Σ-измеримых функций на Λ и B-алгеброй спектральных операторов.

7. Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное B-пространство и E — спектральная мера в $\mathfrak{X}$, заданная и счетно аддитивная на σ-поле Σ подмножеств множества Λ. Тогда алгебра всех комплексных Σ-измеримых E-существенно ограниченных функций на S будет обозначаться через $EB(\Lambda, \Sigma)$. Операции в $EB(\Lambda, \Sigma)$ определяются выписанными выше соотношениями. Если Λ — топологическое пространство, а Σ — поле борелевских множеств в Λ, то вместо $EB(\Lambda, \Sigma)$ иногда будет использоваться символ $EB(\Lambda)$.

В следующей] лемме сформулирован принцип замены мер, несколько более общий, чем тот, который использовался до сих пор. Он будет часто использоваться в дальнейшем.

8. Лемма. *Пусть E — спектральная мера в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, заданная и счетно аддитивная на σ-поле Σ подмножеств множества Λ, и пусть g — ограниченная измеримая по Борелю функция, определенная в комплексной плоскости. Тогда*

$$\int_\Lambda g(f(\lambda))\,E(d\lambda)=\int_{f(\Lambda)} g(\mu)\,E(f^{-1}(d\mu)), \qquad f\in EB(\Lambda, \Sigma).$$

Доказательство. Пусть f принадлежит $EB(\Lambda, \Sigma)$; для любого борелевского множества δ в комплексной плоскости положим $E_1(\delta) = E(f^{-1}(\delta))$. Если g — характеристическая функция такого множества δ, то, поскольку E_1 обращается в нуль вне $f(\Lambda)$,

$$\int\limits_{f(\Lambda)} g(\mu)\, E_1(d\mu) = E_1(\delta) = E(f^{-1}(\delta)) = \int\limits_{\Lambda} g(f(\lambda))\, E(d\lambda).$$

Далее, множество ограниченных измеримых по Борелю функций g, для которых

$$\int\limits_{f(\Lambda)} g(\mu)\, E_1(d\mu) = \int\limits_{\Lambda} g(f(\lambda))\, E(d\lambda),$$

очевидно, линейно и замкнуто в множестве всех ограниченных борелевских функций. Так как это множество содержит все характеристические функции борелевских множеств, оно содержит и каждую ограниченную борелевскую функцию, ч. т. д.

9. Лемма. *Пусть E — спектральная мера в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$, заданная и счетно аддитивная на σ-поле Σ подмножеств множества Λ. Тогда отображение*

$$S(f) = \int\limits_{\Lambda} f(\lambda)\, E(d\lambda), \qquad f \in EB(\Lambda, \Sigma),$$

является непрерывным гомоморфизмом $EB(\Lambda, \Sigma)$ в алгебру спектральных операторов скалярного типа. Более того, разложение единицы для $S(f)$ определяется соотношением

$$E(\delta;\ S(f)) = E(f^{-1}(\delta)),$$

где δ — произвольное борелевское множество в комплексной плоскости.

Доказательство. Ясно, что $S(f)$ линейно по f и что

(i) $$|S(f)| \leqslant 4K\, |f|_E, \qquad f \in EB(\Lambda, \Sigma),$$

где K — верхняя грань чисел $|E(\sigma)|$, $\sigma \in \Sigma$ (см. лемму 2). Так как $E(\sigma\delta) = E(\sigma)\, E(\delta)$, ясно, что

(ii) $$S(fg) = S(f)\, S(g),$$

если f и g — характеристические функции множеств из Σ. При фиксированной характеристической функции f множество тех g из $EB(\Lambda, \Sigma)$, для которых выполнено соотношение (ii), линейно, а в силу (i) оно замкнуто. Таким образом, поскольку это множество содержит все характеристические функции множеств из Σ, оно должно содержать каждую функцию из $EB(\Lambda, \Sigma)$. Следовательно, для произвольной функции g из $EB(\Lambda, \Sigma)$ соотношение (ii) выполнено для любой характеристической функции f множества из Σ. Но множество функций f, для которых выполнено соотношение (ii), линейно и замкнуто и, следовательно, совпадает с $EB(\Lambda, \Sigma)$. Таким образом, отображение $f \to S(f)$ является непрерывным гомоморфизмом $EB(\Lambda, \Sigma)$ на некоторую алгебру операторов $S(f)$.

Для проверки того, что $S(f)$ — оператор скалярного типа с указанным в лемме разложением единицы, возьмем f из $EB(\Lambda, \Sigma)$ и для любого борелевского множества δ в плоскости положим $E_1(\delta) = E(f^{-1}(\delta))$. Тогда, полагая $g(\mu) = \mu$ в лемме 8, получаем

$$\text{(iii)} \qquad S(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda)\, E(d\lambda) = \int_{f(\Lambda)} \mu E_1(d\mu) = \int \mu E_1(d\mu),$$

где последний интеграл берется по всей комплексной плоскости. Теперь E_1 определена и счетно аддитивна на поле борелевских множеств и коммутирует с $S(f)$. Таким образом, для проверки того, что E_1 — разложение единицы для $S(f)$, достаточно показать, что

$$\text{(iv)} \qquad \sigma(S(f) \mid E_1(\delta)\mathfrak{X}) \subseteq \bar{\delta}$$

для любого борелевского множества δ комплексных чисел. Пусть δ — такое борелевское множество, и пусть $\mu \notin \bar{\delta}$. Тогда

$$\left(\int_{\delta} \frac{E_1(d\mu)}{\mu_0 - \mu}\right)\left(\int_{\delta} (\mu_0 - \mu)\, E_1(d\mu)\right) = \int_{\delta} E_1(d\mu) = E_1(\delta).$$

Этим показано, что $\mu_0 \in \rho(S(f) \mid E_1(\delta)\mathfrak{X})$, и доказано включение (iv). Так как E_1 — разложение единицы для $S(f)$, из равенства (iii) вытекает, что $S(f)$ — оператор скалярного типа, ч. т. д.

10. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное B-пространство и E — спектральная мера, определенная и счетно аддитивная на σ-поле Σ подмножеств множества Λ. Для каждой E-существенно ограниченной Σ-измеримой функции f в Λ определим оператор $S(f)$ при помощи равенства*

$$S(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda)\, E(d\lambda), \qquad f \in EB(\Lambda, \Sigma).$$

Тогда $f \to S(f)$ является изоморфизмом B-алгебры $EB(\Lambda, \Sigma)$ и полной B-алгебры спектральных операторов скалярного типа. Разложение единицы для оператора $S(f)$ определяется равенством

$$E(\sigma;\ S(f)) = E(f^{-1}(\sigma)),$$

где σ — произвольное борелевское подмножество комплексной плоскости. Более того, существует постоянная K, такая, что

$$|f|_E \leqslant |S(f)| \leqslant K\,|f|_E, \quad f \in EB(\Lambda, \Sigma).$$

Доказательство. Из предыдущей леммы видно, что отображение $f \to S(f)$ является непрерывным гомоморфизмом $EB(\Lambda, \Sigma)$ на алгебру спектральных операторов скалярного типа. Таким образом, для некоторой постоянной K мы имеем $|S(f)| \leqslant K\,|f|$, и для доказательства последнего неравенства теоремы достаточно установить, что $|f|_E \leqslant |S(f)|$. Так как обе части этого неравенства являются непрерывными функциями от f, достаточно доказать его для функций f из некоторого множества, плотного в $EB(\Lambda, \Sigma)$. Таким образом, положим $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\sigma_i}$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — непересекающиеся множества в Σ, объединение которых есть Λ. Существует $i_0 \leqslant n$, такое, что $E(\sigma_{i_0}) \neq 0$ и $|f|_E = |\alpha_{i_0}|$. Если $E(\sigma_{i_0}) x_0 = x_0 \neq 0$, то $S(f) x_0 = \alpha_{i_0} x_0$ и

$$|S(f)| \geqslant |\alpha_{i_0}| = |f|_E.$$

Этим установлено последнее неравенство теоремы. В силу этого неравенства ясно, что гомоморфизм $f \to S(f)$ является изоморфизмом и что алгебра $\{S(f) \mid f \in EB(\Lambda, \Sigma)\}$ является B-алгеброй.

Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что алгебра всех операторов $S(f)$, где $f \in EB(\Lambda, \Sigma)$, является полной. Это означает, что если $S(f)^{-1}$ существует как ограниченный всюду определенный оператор, то $S(f)^{-1} = S(g)$ для некоторой функции g из $EB(\Lambda, \Sigma)$. Покажем, что если $S(f)^{-1}$ существует, то f^{-1} является E-существенно ограниченной и $S(f)^{-1} = S(f^{-1})$. Для каждого $m = 1, 2, \ldots$ выберем непересекающиеся борелевские множества $\delta_1, \ldots, \delta_{n_m}$ диаметра меньше $1/m$, объединение которых есть круг $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant |f|_E\}$. Пусть $\sigma_i = f^{-1}(\delta_i)$ и λ_i — точка из σ_i. Тогда функции

$$f_m = \sum_{i=1}^{n_m} f(\lambda_i) \chi_{\sigma_i}$$

обладают следующими свойствами:

$$|f - f_m|_E \leqslant \frac{1}{m}, \qquad |S(f) - S(f_m)| \leqslant \frac{K}{m}.$$

Поскольку $S(f)^{-1}$ существует как ограниченный всюду определенный оператор, из леммы VII.6.1 вытекает, что при достаточно больших значениях m операторы

$$S(f_m) = \sum_{i=1}^{n_m} f_m(\lambda_i) E(\sigma_i)$$

имеют ограниченные всюду определенные обратные. Это показывает, что $f_m(\lambda_i) \neq 0$ при достаточно больших m, если $E(\sigma_i) \neq 0$, и потому f_m^{-1} лежит в $EB(\Lambda, \Sigma)$ и $S(f_m)^{-1} = S(f_m^{-1})$. Далее, так как

$$|f_m^{-1} - f_n^{-1}| \leqslant |S(f_m^{-1}) - S(f_n^{-1})| = |S(f_m)^{-1} - S(f_n)^{-1}| \to 0,$$

последовательность $\{f_n^{-1}\}$ сходится в $EB(\Lambda, \Sigma)$, откуда вытекает, что f^{-1} является E-существенно ограниченной и что $S(f)^{-1} = \lim_m S(f_m)^{-1} = \lim_m S(f_m^{-1}) = S(f^{-1})$, ч. т. д.

11. Следствие. *Изоморфизм* $f \to S(f)$ *теоремы* 10 *обладает следующими дополнительными свойствами:*

(i) *Оператор* $S(f)$ *имеет ограниченный всюду определенный обратный тогда и только тогда, когда функция* f^{-1} *является* E*-существенно ограниченной на* Λ. *В этом случае* $S(f)^{-1} = S(f^{-1})$.

(ii) *Спектр оператора* $S(f)$ *описывается формулой*

$$\sigma(S(f)) = \bigcap_{E(\delta)=I} \overline{f(\delta)}, \quad f \in EB(\Lambda, \Sigma).$$

(iii) *Если* $\{f_n\}$ — *ограниченная последовательность в* $EB(\Lambda, \Sigma)$ *и если* $f(\lambda) = \lim_n f_n(\lambda)$ *всюду, за исключением* λ *из некоторого множества* E*-меры нуль, то* $S(f_n)x \to S(f)x$ *для всех* x *из* $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Первое утверждение было установлено в конце доказательства теоремы 10, а третье вытекает из теоремы IV.10.10. Для доказательства второго утверждения возьмем множество δ из Σ, такое, что $E(\delta) = I$. Если $\lambda_0 \notin \overline{f(\delta)}$, то функция h, определяемая соотношениями

$$h(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_0 - f(\lambda)}, & \lambda \in \delta, \\ 0, & \lambda \notin \delta, \end{cases}$$

E-существенно ограничена на Λ и

$$S(h)(\lambda_0 I - S(f)) = I.$$

Тем самым показано, что λ_0 содержится в резольвентном множестве $\rho(S(f))$. Итак, $\overline{f(\delta)} \supseteq \sigma(S(f))$, если $E(\delta) = I$, и, следовательно,

$$\bigcap_{E(\delta)=I} \overline{f(\delta)} \supseteq \sigma(S(f)).$$

Обратно, если $\lambda_0 \in \rho(S(f))$, то из (i) вытекает, что функция $(\lambda_0 - f(\lambda))^{-1}$ является E-существенно ограниченной на Λ. Следовательно, существует множество σ в Σ, такое, что $E(\sigma) = I$ и

$$\left| \frac{1}{\lambda_0 - f(\lambda)} \right| \leqslant M, \quad \lambda \in \sigma.$$

Таким образом, λ_0 не принадлежит $\overline{f(\sigma)}$. Это показывает, что

$$\sigma(S(f)) \supseteq \overline{f(\sigma)} \supseteq \bigcap_{E(\delta)=I} \overline{f(\delta)},$$

и завершает доказательство леммы, ч. т. д.

12. Следствие. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *алгебра операторов в слабо полном* B*-пространстве* $\mathfrak{X}$. *Допустим, что* $\mathfrak{A}$ *топологически и алгебраически изоморфна некоторой* B*-алгебре ограниченных непрерывных функций. Тогда любой оператор из* $\mathfrak{A}$ *является спектральным оператором скалярного типа.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 5 и теоремы 10, ч. т. д.

13. Следствие. *Каждый оператор в равномерно замкнутой алгебре, порожденной ограниченной булевой алгеброй проекционных операторов в слабо полном В-пространстве, является спектральным оператором скалярного типа.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 12 и леммы 1, ч. т. д.

14. Следствие. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *слабо полное В-пространство. Пусть* $\mathfrak{A}(\tau)$ — *полная алгебра, порожденная семейством* τ *коммутирующих спектральных операторов. Если булева алгебра* B, *порожденная разложениями единицы операторов из* τ, *ограничена, то всякий оператор из* $\mathfrak{A}(\tau)$ *является спектральным.*

Доказательство. Так как всякий оператор из радикала алгебры $\mathfrak{A}(\tau)$ квазинильпотентен, то утверждение вытекает непосредственно из теоремы 3, следствия 13 и теоремы XV.4.5, ч. т. д.

15. Следствие. *Полная алгебра* $\mathfrak{A}$, *порожденная конечным набором* $T_1, \ldots, T_n$ *коммутирующих спектральных операторов в гильбертовом пространстве и их разложениями единицы, имеет вид*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{R}$ — *радикал в* $\mathfrak{A}$, *а* $\mathfrak{B}$ — *алгебра, порожденная проекторами из разложений единицы для* $T_1, \ldots, T_n$. *Кроме того, всякий оператор из* $\mathfrak{A}$ *является спектральным.*

Доказательство. Из следствия XV.6.3 вытекает, что все проекторы, порождающие $\mathfrak{B}$, содержатся в ограниченной булевой алгебре B проекторов, и потому требуемое разложение $\mathfrak{A}$ получается из теоремы 3. Заключительное утверждение вытекает из следствия 14, ч. т. д.

Предыдущее следствие неверно, если гильбертово пространство заменено произвольным B-пространством. Действительно, как показал Какутани [15], сумма двух коммутирующих спектральных операторов скалярного типа в пространстве непрерывных функций не обязательно является спектральным оператором. Однако, если $n = 1$ в следствии 15, то гильбертово пространство можно заменить произвольным комплексным B-пространством. Точнее, полная алгебра $\mathfrak{A}$, порожденная спектральным оператором T и семейством B проекторов из его разложения единицы, не только является векторной прямой суммой $\mathfrak{B} \oplus \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{B}$ — операторная алгебра, порожденная семейством B, а $\mathfrak{R}$ — радикал в $\mathfrak{A}$, но и любой оператор в $\mathfrak{A}$ является спектральным. В этой ситуации мы имеем два представления алгебры $\mathfrak{B}$; действительно, $\mathfrak{B}$ эквивалентна алгебре всех непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов в $\mathfrak{A}$, а если E — разложение единицы для T, то $\mathfrak{B}$ эквивалентна алгебре всех E-существенно ограниченных борелевских измеримых функций на спектре T. Последнее представление иногда более полезно, поскольку оно скорее дает операционное исчисление для функций, заданных на спектре оператора T, чем операционное исчисление для функций, заданных на компактном хаусдорфовом пространстве максимальных идеалов в $\mathfrak{A}$. Опишем теперь эту ситуацию:

→ 16. Теорема. *Пусть T — спектральный оператор, E — его разложение единицы, а S — скалярная часть. Тогда полная алгебра, порожденная оператором T и семейством B проекторов из области значений E, является векторной прямой суммой*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(B) \oplus \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{A}(B)$ — алгебра, порожденная семейством B, а $\mathfrak{R}$ — радикал в $\mathfrak{A}$. Более того, $\mathfrak{A}(B)$ — полная алгебра спектральных операторов скалярного типа, эквивалентная алгебре всех E-существенно ограниченных борелевских измеримых функций на спектре $\sigma(T) = \sigma(S)$, которая состоит из всех операторов вида

$$f(S) = \int_{\sigma(S)} f(\lambda)\, E(d\lambda), \qquad f \in EB(\sigma(S)).$$

Любой оператор в $\mathfrak{A}$ является спектральным.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы 3. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — алгебра всех операторов вида $\int f(\lambda)\, E(d\lambda)$, где f является E-существенно ограниченной на $\sigma(S)$. Из теоремы 10 вытекает, что $\mathfrak{A}_1$ — полная алгебра спектральных операторов скалярного типа, эквивалентная $EB(\Lambda, \Sigma)$. Из определения интеграла вытекает что $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}(B)$. С другой стороны, каждый проектор $E(\delta)$ из B лежит в $\mathfrak{A}_1$. Таким образом, $\mathfrak{A}(B) \subseteq \mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}(B) = \mathfrak{A}_1$. Заключительное утверждение вытекает из теоремы XV.4.5, ч. т. д.

3. Сильно замкнутые алгебры и полные булевы алгебры

В этом параграфе мы попытаемся дать описание сильного замыкания коммутативной алгебры спектральных операторов. Как мы уже замечали (см. VI.1.5), выпуклое множество в пространстве всех ограниченных линейных отображений между двумя B-пространствами имеет одно и то же замыкание как в слабой, так и в сильной операторных топологиях. Таким образом, *сильное и слабое операторные замыкания алгебры операторов совпадают.* Мы начинаем этот параграф, как и предыдущий, с рассмотрения коммутирующего семейства τ спектральных операторов вместе с их разложениями единицы и хотим описать все операторы в сильно (или, что то же самое, слабо) замкнутой операторной алгебре, порожденной τ. Дальнейшие рассмотрения будут относиться к тому случаю, когда все операторы данного коммутирующего семейства являются спектральными операторами скалярного типа. Поскольку каждый оператор скалярного типа содержится в сильном (даже равномерном) замыкании алгебры, порожденной проекторами его разложения единицы, задача настоящего параграфа сводится к описанию операторов в сильном (или слабом) замыкании операторной алгебры, порожденной булевой алгеброй проекционных операторов. Основным результатом в этом направлении является следующая теорема Бейда:

Теорема. *Пусть B — ограниченная булева алгебра проекционных операторов в слабо полном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда слабо* (*или, что то же самое, сильно*) *замкнутая операторная алгебра, порожденная алгеброй B, состоит из всех операторов в $\mathfrak{X}$, которые оставляют инвариантными каждое замкнутое линейное многообразие, инвариантное относительно всех операторов из B.*

Доказательство этой теоремы, которое следует схеме Бейда, основано на тщательном анализе и сравнении различных понятий полноты булевых алгебр. Действительно, как видно из приведенного ниже следствия 8, ограниченная булева алгебра проекторов в слабо полном пространстве сильно замкнута тогда и только тогда, когда она полна в смысле следующего определения:

1. Определение. Булева алгебра B проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$ называется *полной* (*σ-полной*) *как абстрактная булева алгебра*, если каждое подмножество (последовательность) в B имеет наибольшую нижнюю грань и наименьшую верхнюю грань в B. Булева алгебра B называется *полной* (*σ-полной*), если она полна (σ-полна) как абстрактная булева алгебра и если для каждого множества (последовательности) B_0 в B выполнены соотношения

$$\Big(\bigvee_{E\in B} E\Big)\mathfrak{X}=\overline{\operatorname{sp}}\,\{E\mathfrak{X}\mid E\in B_0\},\qquad \Big(\bigwedge_{E\in B_0} E\Big)\mathfrak{X}=\bigcap_{E\in B_0} E\mathfrak{X}.$$

Булева алгебра B называется *ограниченной*, если существует постоянная K, такая, что

$$|E|\leqslant K,\ E\in B.$$

Цель первых двух лемм — показать, что булева алгебра, обладающая слабейшим из четырех свойств полноты предыдущего определения (т. е. свойством быть σ-полной как абстрактная булева алгебра), заведомо ограничена. Соображения, используемые при доказательстве этих лемм, немного отходят от основной линии рассуждений, используемых в доказательстве теоремы Бейда, и читатель, желающий поскорее понять суть проблемы, может опустить эти леммы, добавив просто излишнее предположение об ограниченности в рассмотрениях, начинающихся с леммы 4.

2. Лемма. *Если множество $\{b_\alpha\}$ в абстрактной булевой алгебре B имеет наименьшую верхнюю грань, то для любого b из B множество $\{b \wedge b_\alpha\}$ пересечений имеет наименьшую верхнюю грань и*

$$b \wedge (\bigvee_\alpha b_\alpha) = \bigvee_\alpha (b \wedge b_\alpha), \qquad b \in B.$$

Доказательство. Очевидно, что $b \wedge (\bigvee_\alpha b_\alpha) \geqslant b \wedge b_\alpha$ для всех α. Пусть, далее, $a \geqslant b \wedge b_\alpha$ для всех α, так что

$$a \vee [(\bigvee_\alpha b_\alpha) \wedge b'] \geqslant (b \wedge b_\alpha) \vee (b_\alpha \wedge b') = b_\alpha$$

и, следовательно,

$$a \vee [(\bigvee_\alpha b_\alpha) \wedge b'] \geqslant \bigvee_\alpha b_\alpha.$$

Таким образом, взяв пересечения обеих частей этого неравенства с элементом b и используя распределительный закон $b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c)$, мы получаем

$$(b \wedge a) \vee \{b \wedge [\bigvee_\alpha b_\alpha] \wedge b'\} = b \wedge a \geqslant b \wedge (\bigvee_\alpha b_\alpha),$$

так что

$$a \geqslant b \wedge a \geqslant b \wedge (\bigvee_\alpha b_\alpha);$$

тем самым показано, что элемент $b \wedge (\bigvee_\alpha b_\alpha)$ является наименьшей верхней гранью для всех элементов $b \wedge b_\alpha$, ч. т. д.

3. Лемма. *Если булева алгебра проекторов σ-полна как абстрактная булева алгебра, то она ограничена.*

Доказательство. Предположим, что булева алгебра B проекторов не является ограниченной. Покажем сначала, что B содержит монотонно возрастающую последовательность $\{E_n\}$, такую, что

$$|E_n| \geqslant n + |E_{n-1}|, \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

Мы будем говорить, что проекция E обладает свойством (α), если $\sup_{F \leqslant E} |F| = \infty$. Ясно, что для любого E из B или E, или $I - E$ обладает свойством (α), а если E обладает свойством (α) и $F \leqslant E$, то или F, или $E - F$ обладает свойством (α). Пусть E_1 обладает свойством (α). Тогда существует элемент $F_1 \leqslant E_1$, такой, что $|F_1| \geqslant 2 + 2|E_1|$. Пусть E_2 — один из членов пары F_1, $E_1 - F_1$ со свойством (α). Неравенство $|E_1 - F_1| \geqslant |F_1| - |E_1|$ показывает, что $|E_2| \geqslant 2 + |E_1|$. Выберем теперь F_2 в E_2 так, чтобы $|F_2| \geqslant 3 + 2|E_2|$, и т. д. Построение продолжается по индукции.

Теперь для каждого n положим $G_n = E_n - E_{n+1}$. Проекторы G_n дизъюнктны, и $\lim_{n\to\infty} |G_n| = \infty$. Выбирая подпоследовательности последовательности $\{G_n\}$, мы получим набор взаимно непересекающихся последовательностей проекторов $\{H_{jk}\}$, $j = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$\lim_{k\to\infty} |H_{jk}| = \infty, \qquad j = 1, 2 \ldots .$$

Положим $P_j = \bigvee_{k=1}^{\infty} H_{jk}$. Тогда из леммы 2 непосредственно вытекает, что $P_n P_m = 0$ при $n \neq m$. Соотношение

$$\frac{|H_{mn}x|}{|x|} = \frac{|H_{mn}P_m x|}{|x|} \leqslant \frac{|P_m|\,|H_{mn}P_m x|}{|P_m x|}, \qquad P_m x \neq 0,$$

показывает, что

$$|H_{mn}|_{P_m\mathfrak{X}} \geqslant \frac{|H_{mn}|}{|P_m|},$$

где в левой части стоит норма H_{mn} как оператора в $P_m\mathfrak{X}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} |H_{mn}|_{P_m\mathfrak{X}} = \infty, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Выберем подпоследовательность $\{n_i\}$ и единичные векторы x_i в $P_i\mathfrak{X}$ так, что $|H_{in_i}x_i| > i$, $i = 1, 2, \ldots$. Проектор $Q \bigvee_{i=1}^{\infty} H_{in_i}$ не может быть ограниченным, поскольку

$$|Qx_i| = |QP_i x_i| = |H_{in_i}x_i| > i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и это противоречие завершает доказательство леммы, ч. т. д.

4. Лемма. *Пусть B — полная (σ-полная) булева алгебра проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$ и $\{E_\alpha\}$ — монотонная обобщенная последовательность (монотонная последовательность) в B. Тогда если $\{E_\alpha\}$ возрастает, то*

$$\lim_{\alpha} E_\alpha x = \left(\bigvee_{\alpha} E_\alpha\right) x, \qquad x \in \mathfrak{X},$$

а если $\{E_\alpha\}$ убывает, то

$$\lim_{\alpha} E_\alpha x = \left(\bigwedge_{\alpha} E_\alpha\right) x, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Обратно, если любая монотонно возрастающая обобщенная последовательность (монотонно возрастающая последовательность) эле-

ментов булевой алгебры B проекторов сильно сходится к элементу B, то B полна (σ-полна).

Доказательство. Пусть $E_0 = \bigvee_\alpha E_\alpha$ — объединение возрастающей обобщенной последовательности $\{E_\alpha\}$, а число $\varepsilon > 0$ и вектор $x \in \mathfrak{X}$ выбраны произвольно. Так как $E_0\mathfrak{X} = \overline{\operatorname{sp}} E_\alpha \mathfrak{X}$, существуют вектор $y = \sum_{i=1}^n z_i$ и индексы α_i, такие, что $E_{\alpha_i} z_i = z_i$ и $|E_0 x - y| \leqslant \varepsilon$. Если $\alpha \geqslant \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, то $E_\alpha y = y$. Поскольку $E_\alpha E_0 = E_\alpha$, отсюда вытекает, что для $\alpha \geqslant \alpha_i$

$$
\begin{aligned}
|E_\alpha x - E_0 x| \leqslant |E_\alpha x - y| + |y - E_0 x| = \\
= |E_\alpha (E_0 x - y)| + |y - E_0 x| < (K+1)\varepsilon,
\end{aligned}
$$

где K — верхняя грань для норм проекторов из B (см. лемму 3). Этим доказано, что $\lim_\alpha E_\alpha x = E_0 x$. Двойственное утверждение об убывающих последовательностях вытекает теперь из формулы

$$\bigwedge_\alpha E_\alpha = I - \bigvee_\alpha (I - E_\alpha).$$

Доказательство в случае σ-полноты совершенно аналогично.

Для доказательства обратного утверждения возьмем подмножество $\{E\}$ в B, а в качестве $\{F_\alpha\}$ — обобщенную последовательность конечных объединений элементов из $\{E\}$, упорядоченную в естественном возрастающем порядке проекторов. Проектор F является верхней гранью для $\{E\}$ тогда и только тогда, когда он является верхней гранью для $\{F_\alpha\}$, а так как

$$(E_1 \vee \ldots \vee E_n)\mathfrak{X} = \overline{\operatorname{sp}} \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \mathfrak{X} \right)$$

для любого конечного множества проекторов, для построения наименьшей верхней грани для $\{E\}$, обладающей свойством, требуемым в определении 1, достаточно провести соответствующее построение для $\{F_\alpha\}$. Для этого положим $F_\infty = \lim_\alpha F_\alpha$, где предел берется в сильной операторной топологии. Так как $F_\alpha F_\beta = F_\alpha$, если $\beta \geqslant \alpha$, мы имеем

$$F_\alpha F_\infty = \lim_\beta F_\alpha F_\beta = F_\alpha,$$

откуда $F_\infty \geqslant F_\alpha$, и потому F_∞ является верхней гранью для $\{F_\alpha\}$. Если F — другая верхняя грань, то

$$F F_\infty = \lim_\alpha F F_\alpha = \lim_\alpha F_\alpha = F_\infty,$$

откуда $F \geqslant F_\infty$, а потому F_∞ является наименьшей верхней гранью $\bigvee_\alpha F_\alpha$ для $\{F_\alpha\}$. Так как

$$F_\infty x = \lim_\alpha F_\alpha x \in \overline{\mathrm{sp}} \{ \bigcup_\alpha F_\alpha \mathfrak{X} \},$$

отсюда вытекает, что $F_\infty \mathfrak{X} \subseteq \overline{\mathrm{sp}} \{ \bigcup_\alpha F_\alpha \mathfrak{X} \}$. С другой стороны, $F_\infty \mathfrak{X} \supseteq F_\alpha \mathfrak{X}$ для всех α, и это показывает, что

$$F_\infty \mathfrak{X} = \overline{\mathrm{sp}} \{ \bigcup_\alpha F_\alpha \mathfrak{X} \}.$$

Если каждая возрастающая обобщенная последовательность $\{F_\alpha\}$ проекторов в B сходится сильно, то ясно (для этого следует перейти к рассмотрению последовательности $\{I - F_\alpha\}$), что любая монотонная убывающая обобщенная последовательность проекторов в B также сходится сильно. Учитывая это соображение, можно построить наибольшую нижнюю грань для $\{E\}$, обладающую свойством определения 1, тем же способом, который был использован при построении наименьшей верхней грани. Доказательство в случае σ-полноты проводится по той же схеме, ч. т. д.

5. Лемма. *Сильно замкнутая ограниченная булева алгебра проекторов в слабо полном B-пространстве полна.*

Доказательство. Если сильно замкнутая ограниченная булева алгебра B проекторов не полна, то в силу предыдущей леммы существуют вектор x и возрастающая обобщенная последовательность $\{E_\alpha\}$ проекторов в B, такие, что предел $\lim_\alpha E_\alpha x$ не существует. Из леммы I.7.5 вытекает, что $\{E_\alpha x\}$ не является обобщенной последовательностью Коши. Следовательно, существуют $\varepsilon > 0$ и для любого α индекс $\beta(\alpha) \geqslant \alpha$, такие, что

$$|E_{\beta(\alpha)} x - E_\alpha x| > \varepsilon.$$

Пусть α_1 произвольно; для $n \geqslant 1$ положим $\alpha_{n+1} = \beta(\alpha_n)$ и $E_n = E_{\alpha_n}$. Тогда $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность элементов из B, для которой не существует предела $\lim_n E_n x$. Если мы рассмотрим равномерно замкнутую операторную алгебру $\mathfrak{A}(B)$, порожденную проекторами в B, то получим противоречие с этим утверждением. По лемме 2.1 алгебра $\mathfrak{A}(B)$ эквивалентна при изоморфизме $S(f) \longleftrightarrow f$ алгебре $C(\Lambda)$ непрерывных функций на пространстве Λ максимальных идеалов в $\mathfrak{A}(B)$. Более того, по теореме 2.5 этот изоморфизм $S(f)$ задается при помощи счетно аддитивной спектральной меры E, определенной на семействе борелевских множеств в Λ равенством

$$S(f) = \int_\Lambda f(\lambda) E(d\lambda), \qquad f \in C(\Lambda).$$

Проектор E_n является образом при отображении S непрерывной функции f_n, и так как $E_n^2 = E_n$, то $f_n^2 = f_n$. Поэтому можно предполагать, что f_n принимает лишь значения нуль и один и, следовательно, является характеристической функцией некоторого множества e_n. Так как f_n непрерывна, множество e_n открыто и замкнуто. Более того, поскольку $E_{n+1}E_n = E_n$, мы имеем $f_{n+1}f_n = f_n$ и $e_{n+1}e_n = e_n$, а это показывает, что последовательность $\{e_n\}$ возрастающая. Поскольку

$$E_n = S(f_n) = \int_\Lambda f_n(\lambda)\, E(d\lambda) = E(e_n),$$

предел

$$\lim_n E_n x = \lim_n E(e_n)\, x$$

существует в силу счетной аддитивности спектральной меры E. Это противоречие завершает доказательство леммы, ч. т. д.

6. Лемма. *Полная булева алгебра проекторов содержит каждый проектор в слабо замкнутой операторной алгебре, которую она порождает.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{W}$ — сильно замкнутая и слабо замкнутая операторные алгебры, порожденные полной булевой алгеброй B проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Так как в силу следствия VI.1.5 $\mathfrak{S}(B) = \mathfrak{W}(B)$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что каждый проектор F из $\mathfrak{S}(B)$ принадлежит B. Для этого мы покажем, что для каждой пары векторов (y, z), где $y \in \mathfrak{M} = F\mathfrak{X}$, а $z \in \mathfrak{N} = (I - F)\mathfrak{X}$, существует соответствующий проектор E_{yz} в B, такой, что $E_{yz}y = y = Fy$ и $E_{yz}z = 0 = Fz$. Действительно, если это так, то проектор

$$E = \bigwedge_{z \in \mathfrak{N}} \bigvee_{y \in \mathfrak{M}} E_{yz}$$

лежит в B, поскольку алгебра B полна. Если $x_0 = y_0 + z_0$, где $y_0 \in \mathfrak{M}$ и $z_0 \in \mathfrak{N}$, то $\left(\bigvee_{y \in \mathfrak{M}} E_{yz}\right) y_0 = y_0$ для всех z из $\mathfrak{N}$ и $\left(\bigvee_{y \in \mathfrak{M}} E_{yz_0}\right) z_0 = 0$. Таким образом, $Ey_0 = y_0$, $Ez_0 = 0$ и $E = F$.

Теперь будут построены проекторы E_{yz}. Следует отметить, что в построении используется лишь тот факт, что B является σ-полной. Пусть y и z — фиксированные элементы из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно и ε — заданное положительное число. Так как F принадлежит сильно замкнутой операторной алгебре, порожденной B, существует оператор A вида $A=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E_i$, где

$$0\neq E_i\in B,\quad \sum_{i=1}^{n}E_i=I,\qquad E_iE_j=0,\qquad 1\leqslant i\neq j\leqslant n,$$

такой, что

$$|y-Ay|<\varepsilon,\qquad |Az|<\varepsilon.$$

По лемме 3 существует верхняя грань $K>1$ норм проекторов в B, и, таким образом, если

$$E=\sum_{|\alpha_i|>1/2}E_i,$$

то из леммы 2.2 вытекает, что

$$|Ez|=\Big|\Big(\sum_{|\alpha_i|>1/2}\alpha_i^{-1}E_i\Big)Az\Big|\leqslant 8K\varepsilon.$$

По тем же соображениям ясно, что

$$|y-Fy|=\Big|\sum_{|\alpha_i|\leqslant 1/2}E_i y\Big|=$$
$$=\Big|\Big(\sum_{|\alpha_i|\leqslant 1/2}(1-\alpha_i)^{-1}E_i\Big)(y-Ay)\Big|\leqslant 8K\varepsilon.$$

Выбирая ε так, что $8K\varepsilon<2^{-n}$, мы видим, что существует последовательность $\{E_n\}$ в B, такая, что

$$\text{(i)}\qquad |y-E_ny|<\frac{1}{2^n},\qquad |E_nz|<\frac{1}{2^n}.$$

Пусть проектор $E_{n,m}$ определен соотношением

$$E_{n,m}=\bigvee_{k=n}^{n+m}E_k.$$

Тогда $E_{n,m}\geqslant E_n$, $(I-E_{n,m})\leqslant I-E_n$, и потому

$$(I-E_{n,m})y=(I-E_{n,m})(I-E_n)y,$$

откуда вытекает, что

$$\text{(ii)}\qquad |y-E_{n,m}y|\leqslant\frac{K}{2^n}.$$

Так как

$$E_{n,m+1}=E_{n,m}+(I-E_{n,m})E_{n+m+1},$$

то по индукции из соотношения (i) получается, что

$$\text{(iii)}\qquad |E_{n,m}z|\leqslant\frac{1}{2^n}+\frac{K}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{K}{2^{n+m}}<\frac{K}{2^{n-1}}.$$

Последовательность $\{E_{n,m}\}$ возрастает по m, а последовательность

$$\{\bigvee_{m=0}^{\infty} E_{n,m}\} = \{\bigvee_{k=n}^{\infty} E_k\}$$

убывает. Таким образом, по лемме 4 предел

$$E_{yz} = \bigwedge_{n=0}^{\infty} \bigvee_{m=0}^{\infty} E_{n,m} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} E_{n,m}$$

существует в сильной операторной топологии. Из соотношений (ii) и (iii) непосредственно вытекает, что этот предел обладает требуемыми свойствами, а именно выполнены соотношения $E_{yz}y = y$, $E_{yz}z = 0$, ч. т. д.

7. Следствие. *Полная булева алгебра проекторов сильно замкнута.*

Доказательство. Так как всякий оператор в сильном замыкании ограниченной булевой алгебры проекторов сам является проектором, то это следствие вытекает непосредственно из лемм 3 и 6, ч. т. д.

8. Следствие. *Ограниченная булева алгебра проекторов в слабо полном пространстве полна тогда и только тогда, когда она сильно замкнута.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из леммы 5 и следствия 7, ч.т.д.

9. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}(B)$ — равномерно замкнутая операторная алгебра, порожденная полной булевой алгеброй B проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{A}(B)$ эквивалентна алгебре непрерывных функций на ее собственном множестве Λ максимальных идеалов, и любой гомеоморфный изоморфизм T между этими алгебрами однозначно определяет регулярную счетно аддитивную спектральную меру E в $\mathfrak{X}$, заданную на семействе борелевских множеств в Λ и такую, что*

$$T(f) = \int_{\Lambda} f(\lambda) E(d\lambda), \qquad f \in C(\Lambda).$$

Кроме того, областью значений E является в точности булева алгебра B.

Доказательство. По лемме 3 булева алгебра B ограничена, а по лемме 2.1 алгебра $\mathfrak{A}(B)$ эквивалентна алгебре непрерывных функций на структурном пространстве Λ для $\mathfrak{A}(B)$. Из теоремы 2.4 вытекает существование спектральной меры A в $\mathfrak{X}^*$, заданной на борелевских множествах в Λ и такой, что

$$xT(f)x^* = \int_{\Lambda} f(\lambda)\, xA(d\lambda)\, x^*, \qquad x \in \mathfrak{X}, \qquad x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

Эта спектральная мера A однозначно определена и обладает тем свойством, что для всех x из $\mathfrak{X}$ и x^* из $\mathfrak{X}^*$ числовая мера $xA(\cdot)\,x^*$ регулярна и счетно аддитивна. Покажем теперь, используя полноту B, что для любого борелевского множества e оператор $A(e)$ сопряжен к проектору из B. Для этого рассмотрим семейство Σ тех борелевских множеств e из Λ, для которых $A(e) = E(e)^*$ при некотором проекторе $E(e)$ из B. Так как B — булева алгебра, семейство Σ является полем. Для проверки того, что Σ есть σ-поле, возьмем возрастающую последовательность $\{e_n\}$ множеств из Σ. Поскольку

$$E(e_{n+1})^*\,E(e_n)^* = A(e_{n+1}e_n) = A(e_n) = E(e_n)^*,$$

последовательность $\{E(e_n)\}$ возрастающая, а так как B полна, из леммы 4 вытекает, что сильный предел $E = \lim\limits_n E(e_n)$ существует и является проектором из B. Таким образом,

$$xA\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n\Big)\,x^* = \lim_{n\to\infty} xA(e_n)\,x^* =$$
$$= \lim_{n\to\infty} xE(e_n)^*\,x^* = xE^*x^*, \quad x\in\mathfrak{X}, \quad x^*\in\mathfrak{X}^*,$$

а это означает, что объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ лежит в Σ и что Σ есть σ-поле. Следовательно, для проверки того, что Σ содержит все борелевские множества, достаточно показать, что Σ содержит все открытые множества. Пусть e — открытое подмножество в Λ, x и x^* — элементы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$ соответственно и $\varepsilon > 0$. Тогда ввиду регулярности функции $xA(\cdot)\,x^*$ существует замкнутое подмножество δ в e, такое, что

$$\text{(i)} \qquad |\,xA(\delta_1)\,x^* - xA(e)\,x^*\,| < \varepsilon$$

для любого борелевского множества δ_1, удовлетворяющего условию $\delta \subseteq \delta_1 \subseteq e$. Каждому E из B соответствует непрерывная функция f_E, которая однозначно определяется равенством $E = T(f_E)$. Так как $E^2 = E$, то $f_E^2 = f_E$, т. е. f_E является характеристической функцией множества $\sigma(E)$. Поскольку f_E непрерывна, множество $\sigma(E)$ открыто и замкнуто. Отображение $E \leftrightarrow \sigma(E)$ является, очевидно, изоморфизмом между B и булевой алгеброй всех открыто-замкнутых подмножеств Λ. Эти открыто-замкнутые множества $\sigma(E)$ образуют базис топологии Λ. Чтобы убедиться в этом, заметим, что множества вида $\{\lambda \mid |(T^{-1}A)(\lambda)| < \alpha\}$, где $A \in \mathfrak{A}(B)$, образуют по определению подбазис топологии Λ, а так как B порождает $\mathfrak{A}(B)$, то множества $\sigma(E)$ образуют подбазис топологии Λ. Поскольку $\sigma(E)\,\sigma(F) = \sigma(EF)$, множества $\sigma(E)$ действительно образуют базис топологии Λ (см. теорему IX.2.11 и ее доказательство).

Рассмотрим теперь замкнутое множество δ_1, причем $\delta \subseteq \delta_1 \subseteq e$. Каждая точка λ из δ_1 является внутренней для некоторого множества $\sigma(E) \subseteq e$. Так как δ_1 компактно, конечное число множеств

$\sigma(E_1), \ldots, \sigma(E_n)$ покрывает δ_1, и, таким образом, если E_0 — объединение проекторов $E_1, \ldots, E_n$, то

$$\delta \subseteq \delta_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(E_i) = \sigma(E_0) \subseteq e.$$

Итак, если E — проектор из B и $\sigma(E) \subseteq \sigma(E) \subseteq e$, то из соотношения (i) вытекает, что

$$\text{(ii)} \qquad |xA(\sigma(E))x^* - xA(e)x^*| < \varepsilon.$$

Так как

$$A(\sigma(E)) = \int_{\sigma(E)} A(d\lambda) = \int_{\Lambda} \chi_{\sigma(E)}(\lambda) A(d\lambda) = T(\chi_{\sigma(E)}) = E,$$

то из неравенства (ii) вытекает, что

$$\text{(iii)} \qquad |x^*Ex - xA(e)x^*| < \varepsilon$$

для любого проектора E из B, удовлетворяющего условию $\sigma(E_0) \subseteq \sigma(E) \subseteq e$. Таким образом, если $\{E_\alpha\}$ — обобщенная последовательность проекторов E из B, причем $\sigma(E) \subseteq e$, направленная в естественном возрастающем порядке проекторов, то из соотношения (iii) видно, что

$$xA(e)x^* = \lim_{\alpha} x^*E_\alpha x.$$

С другой стороны, из леммы 4 вытекает, что

$$E_\infty = \bigvee_{\alpha} E_\alpha = \lim_{\alpha} E_\alpha$$

в сильной операторной топологии. Таким образом, $x^*E_\infty x = xA(e)x^*$, а это показывает, что e лежит в Σ и что Σ состоит из всех борелевских множеств в Λ. Это означает, что для любого борелевского множества e в Λ существует проектор $E(e)$ в B, такой, что $A(e) = E(e)^*$. Итак, доказательство закончено, ч. т. д.

10. Следствие. *Булева алгебра проекторов в B-пространстве является σ-полной тогда и только тогда, когда она совпадает с областью значений счетно аддитивной регулярной спектральной меры, заданной на σ-поле подмножеств некоторого компактного пространства.*

Доказательство. Пусть B есть σ-полная булева алгебра проекторов. Тогда доказательство предыдущей леммы показывает, что эта алгебра совпадает с областью значений некоторой счетно аддитивной спектральной меры E, заданной на σ-поле Σ множеств в компактном пространстве Λ. Обратно, предположим, что B совпадает с областью значений спектральной меры E, заданной и счетно аддитивной на

σ-поле Σ подмножеств множества Λ. Пусть $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность элементов B. Если $E_n = E(e_n)$, то

$$E(e_n - e_{n+1}) = E(e_n) - E(e_{n+1}e_n) = E_n - E_{n+1}E_n = E_n - E_n = 0,$$

так что с точностью до множества E-меры нуль мы имеем $e_n \subseteq e_{n+1}$. Так как E счетно аддитивна, то предел

$$\lim_n E_n = \lim_{n\to\infty} E(e_n) = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n\right)$$

существует в сильной операторной топологии и, более того, он принадлежит B. Из леммы 4 вытекает, что B σ-полна, ч. т. д.

11. Следствие. *Сужение σ-полной булевой алгебры проекторов на инвариантное подпространство σ-полно.*

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из критерия σ-полноты, сформулированного в следствии 10, ч. т. д.

Булева алгебра B самосопряженных проекторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ обладает тем свойством, что для всякого x_0 из $\mathfrak{H}$ скалярное произведение (Ex_0, x_0) неотрицательно и обращается в нуль только тогда, когда $Ex_0 = 0$. Чтобы продолжить анализ булевых алгебр в произвольных B-пространствах, можно воспользоваться изящным результатом Бейда:

12. Лемма. *Пусть B есть σ-полная булева алгебра проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда для всякого x_0 из $\mathfrak{X}$ существует линейный функционал $x_0^* \in \mathfrak{X}^*$, обладающий следующими свойствами:*

(i) $$x_0^*Ex_0 \geqslant 0, \qquad E \in B,$$

(ii) *если $x_0^*Ex_0 = 0$ для некоторого E из B, то $Ex_0 = 0$.*

Доказательство. В силу следствия 10 B совпадает с областью значений некоторой счетно аддитивной спектральной меры E, заданной на σ-поле Σ. Согласно следствию 11 и теореме Хана — Банаха, можно предполагать, что $\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{sp}}\,\{Ex_0 \mid E \in B\}$. Для каждого линейного функционала y^* из $\mathfrak{X}^*$ рассмотрим меру μ_{y^*}, заданную на Σ соотношением

$$\mu_{y^*}(e) = y^*E(e)x_0, \qquad e \in \Sigma,$$

и назовем множество δ в Σ y^*-носителем, если $\mu_{y^*}(\delta) \neq 0$ и если любое измеримое подмножество e в δ, на котором полная вариация $v(\mu_{y^*}, e) = 0$, имеет образ $E(e) = 0$. Заметим, что при данном определении y^*-носитель может обладать собственными подмножествами, которые являются y^*-носителями. Это обстоятельство в дальнейшем будет несущественным. Применение леммы Цорна приводит к максимальному семейству $\{\delta_\alpha\}$ непересекающихся множеств, каждое из которых является y_α^*-носителем при некотором y_α^* из $\mathfrak{X}^*$. Убедимся сначала в том, что множество $\{\delta_\alpha\}$ не более чем счетно. Для этого заметим, что, так как спектральная мера E сильно счетно аддитивна на Σ, каждый ряд $\sum\limits_\alpha E(\delta_\alpha)x_0$, состоящий из счетного числа элементов, сходится и, следовательно, содержит лишь конечное число элементов, нормы которых превосходят заданное положительное число. Поскольку

$$0 \neq \mu_{y^*}(\delta_\alpha) = y^*E(\delta_\alpha)x_0$$

для всех α, последовательность $\{\delta_\alpha\}$ не более чем счетна и потому ее можно записывать далее в виде $\{\delta_n\}$. Пусть $\Delta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n$, так что дополнительное множество Δ' не содержит носителей. Далее будет показано, что $E(\Delta') = 0$. Действительно, если $E(\Delta') \neq 0$, то из того факта, что $\{E(e)x_0 \mid e \in \Sigma\}$ порождает $\mathfrak{X}$, вытекает, что $E(\Delta')x_0 \neq 0$, и, следовательно, для некоторого функционала y_0^* мы имеем $y_0^*E(\Delta')x_0 \neq 0$. Положим $y^* = E(\Delta')^*y_0^*$, так что мера μ_{y^*} обращается в нуль на подмножествах Δ, и потому полная вариация $v(\mu_{y^*}, \Delta) = 0$. По лемме IV.10.5 векторная мера $E(\cdot)x_0$ непрерывна относительно некоторой конечной положительной меры ν на Σ. Мера ν не может быть μ_{y^*}-сингулярной; действительно, если бы это было так, то в Σ нашлось бы множество e, такое, что $v(\mu_{y^*}, e) = 0$ и $\nu(e') = 0$, а тогда $E(e')x_0 = 0$, $v(\mu_{y^*}, e') = 0$. Отсюда вытекало бы, что $v(\mu_{y^*}, \Delta) = v(\mu_{y^*}, e) + v(\mu_{y^*}, e') = 0$, но это противоречит тому факту, что $\mu_{y^*} \neq 0$. Из теоремы о разложении (III.4.14) вытекает существование множества e_1 с мерой $\mu_{y^*}(e_1) \neq 0$, такого, что ν, а следовательно и E, обращается в нуль на любом подмножестве δ в e_1, на котором полная вариация $v(\mu_{y^*}, \delta) = 0$. Если $\delta = e_1\Delta'$, то $\mu_{y^*}(\delta) = \mu_{y^*}(e_1) \neq 0$, но вместе с тем из соотношений $\delta_1 \subseteq \delta$ и $v(\mu_{y^*}, \delta_1) = 0$ вытекает, что $E(\delta_1) = 0$. Таким образом, δ является носителем, содержащимся в Δ', а это противоречит тому факту, что Δ' не содержит носителей. Это завершает доказательство соотношения $E(\Delta') = 0$.

Пусть y_n^* — такой функционал, что δ_n является y_n^*-носителем. Рассмотрим теперь любую меру вида

$$(\alpha) \qquad \mu(e) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v(\mu_{y_n^*}, e), \qquad e \in \Sigma,$$

где $c_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $\mu(e) = 0$, то $v(\mu_{y_n^*}, e) = 0$ для всех n, и, таким образом, $E(e\delta_n) = 0 = E(e\Delta)$. Так как $E(\Delta') = 0$, то мы имеем $E(e) = 0$. Поэтому доказательство леммы можно завершить, установив существование вектора x_0^*, такого, что мера $\mu_{x_0}^*$ имеет вид (α).

Прежде чем перейти к построению такого вектора x_0^*, заметим, что в силу теоремы Радона — Никодима (III.10.7) существует функция f_n, для которой выполнено соотношение

$$v(\mu_{y_n^*}, e) = \int_e f_n(\lambda)\,\mu_{y_n^*}(d\lambda), \qquad e \in \Sigma, \qquad n \geqslant 1.$$

Так как по теореме III.20.2 (a)

$$v(\mu_{y_n^*}, e) = \int_e |f_n(\lambda)|\, v(\mu_{y_n^*}, d\lambda), \qquad e \in \Sigma,$$

то $|f_n(\lambda)| = 1$ для $\mu_{y_n^*}$-почти всех λ. Поэтому можно предполагать, что $|f_n(\lambda)| = 1$ для всех λ в Λ. Пусть $z_n^* = T_n^* y_n^*$, где операторы T_n определены по формулам

$$T_n = \int_\Lambda f_n(\lambda)\, E(d\lambda), \qquad n \geqslant 1.$$

Поскольку функции f_n ограничены, то же верно и для опера торов T_n. Тогда

$$\mu_{z_n^*}(e) = (T_n^* y_n^*)\, E(e)\, x_0 = y_n^* E(e)\, T_n x_0 =$$
$$= y_n^* \int_e f_n(\lambda)\, E(d\lambda)\, x_0 = \int_e f_n(\lambda)\, \mu_{y_n^*}(d\lambda) = v(\mu_{y_n^*}, e).$$

Таким образом, функционалу

$$x_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (1 + |z_n^*|)}\, z_n^*$$

соответствует мера

$$\mu_{x_0^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (1 + |z_n^*|)}\, \mu_{z_n^*}$$

вида (α); ч. т. д.

13. Лемма. *Пусть B есть σ-полная булева алгебра проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что для некоторого x_0 из $\mathfrak{X}$ векторы Ex_0, когда E пробегает B, образуют фундаментальное множество в $\mathfrak{X}$. Пусть x_0^* — функционал, обладающий свойствами* (i) *и* (ii) *из леммы* 12. *Тогда $\mathfrak{X}$-замыкание линейного многообразия в $\mathfrak{X}^*$, порожденного векторами $E^* x_0^*$, $E \in B$, совпадает со всем пространством $\mathfrak{X}^*$.*

Доказательство. В силу следствия 10, B совпадает с областью значений счетно аддитивной регулярной спектральной меры E на σ-поле Σ подмножеств пространства Λ. Таким образом, для доказательства плотности множества $\operatorname{sp}\{E^*x_0^* \mid E^* \in B^*\}$ в $\mathfrak{X}^*$ в его $\mathfrak{X}$-топологии, достаточно проверить, что $x=0$ является единственным вектором x в $\mathfrak{X}$, для которого

$$E^*(\sigma)\,x_0^*x = x_0^*E(\sigma)\,x = 0, \qquad \sigma \in \Sigma.$$

Так как векторы вида $E(\sigma)\,x_0$, $\sigma \in \Sigma$, образуют фундаментальное множество в $\mathfrak{X}$, то существует последовательность $\{f_n\}$ конечных линейных комбинаций характеристических функций, такая, что

$$x = \lim_{n\to\infty} \int_\Lambda f_n(\lambda)\,E(d\lambda)\,x_0.$$

Поскольку B ограничена (см. лемму 3),

$$\lim_{n\to\infty} \int_\sigma f_n(\lambda)\,x_0^*E(d\lambda)\,x_0 = x_0^*E(\sigma)\,x = 0$$

равномерно по σ из Σ. Так как

$$\int_\Lambda |f_n(\lambda)|\,x_0^*E(d\lambda)\,x_0 \leqslant 4 \sup_{\sigma \in \Sigma}\left|\int_\sigma f_n(\lambda)\,x_0^*E(d\lambda)\,x_0\right|,$$

то ясно, что f_n сходится к нулю в пространстве $L_1(\Lambda, \Sigma, x_0^*E(\cdot)\,x_0)$. Таким образом, некоторая подпоследовательность $\{g_n\}$ в $\{f_n\}$ сходится к нулю почти всюду и почти равномерно. Пусть $\{\delta_m\}$ — убывающая последовательность множеств в Σ, такая, что $x_0^*E(\delta_m)\,x_0 \to 0$, а g_n сходится равномерно к нулю на дополнении каждого подмножества δ_m, $m \geqslant 1$. Тогда

$$x = \lim_{n\to\infty} \int_{\delta_m} g_n(\lambda)\,E(d\lambda)\,x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{\delta_m'} g_n(\lambda)\,E(d\lambda)\,x_0 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E(\delta_m) \int_\Lambda g_n(\lambda)\,E(d\lambda)\,x_0 = E(\delta_m)\,x_0, \qquad m \geqslant 1,$$

а это показывает, что

$$x = \lim_{m\to\infty} E(\delta_m)\,x_0 = E\Bigl(\bigcap_{m=1}^\infty \delta_m\Bigr)\,x_0.$$

Так как $x_0^*E\Bigl(\bigcap_{m=1}^\infty \delta_m\Bigr)\,x_0 = 0$, то $E\Bigl(\bigcap_{m=1}^\infty \delta_m\Bigr)\,x_0 = 0$, и, следовательно, $x=0$, ч. т. д.

Следующая лемма является ослабленным вариантом теоремы Бейда, сформулированной во введении к этому параграфу.

14. Лемма. *Пусть B есть σ-полная булева алгебра проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что для некоторого x из $\mathfrak{X}$ множество $\{Ex \mid E \in B\}$ фундаментально в $\mathfrak{X}$. Тогда равномерно замкнутая операторная алгебра, порожденная B, состоит из тех и только тех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$, которые коммутируют с каждым элементом алгебры B.*

Доказательство. Очевидно, что всякий элемент равномерно замкнутой алгебры, порожденной B, коммутирует с каждым элементом из B. Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить, что каждый оператор A, коммутирующий с любым элементом из B, лежит в равномерно замкнутой операторной алгебре, порожденной B. В силу следствия 10, B совпадает с областью значений счетно аддитивной спектральной меры E на σ-поле Σ подмножеств множества Λ. Пусть так же, как в лемме 12, y^* соответствует вектору x. Тогда по теореме Радона — Никодима существует Σ-измеримая функция h, такая, что

$$y^*AE(e)x = \int_e h(\lambda)\, y^*E(d\lambda)\, x, \qquad e \in \Sigma.$$

Положим

$$e_n = \{\lambda \mid |h(\lambda)| \leqslant n\}, \qquad A_n = \int_{e_n} h(\lambda)\, E(d\lambda),$$

так что

$$y^*\{E(e)E(e_n)AE(\delta) - E(e)A_nE(\delta)\}x =$$
$$= \int_{e\delta e_n} (h(\lambda) - h(\lambda))\, y^*E(d\lambda)\, x = 0, \qquad e,\ \delta \in \Sigma.$$

Поскольку множество $\{E(\delta)x \mid \delta \in \Sigma\}$ фундаментально в $\mathfrak{X}$, имеет место равенство

$$E(e)^*\, y^*E(e_n)Az = E(e)^*\, y^*A_nz, \qquad z \in \mathfrak{X}.$$

По лемме 13 многообразие в $\mathfrak{X}^*$, порожденное векторами вида $E(e)^*y^*$, где $e \in \Sigma$, $\mathfrak{X}$-плотно в $\mathfrak{X}^*$. Из предыдущего равенства поэтому вытекает, что $E(e_n)A = A_n$, и так как A — ограниченный оператор, последовательность $\{|A_n|\}$ ограничена. По теореме 2.10

$$\sup_n E\text{-ess}\sup_{\lambda \in \Lambda} |h_n(\lambda)| < \infty,$$

и, следовательно, функция h является E-существенно ограниченной. Поэтому можно считать, что h ограничена, и, значит, $e_n = \Lambda$ для всех достаточно больших n. Отсюда вытекает, что

$$A = A_n = \int_\Lambda h(\lambda)\, E(d\lambda)$$

для достаточно больших целых n, и потому A лежит в равномерно замкнутой алгебре, порожденной B, ч. т. д.

15. Следствие. *Пусть B есть σ-полная булева алгебра, удовлетворяющая условию предыдущей леммы. Тогда слабо замкнутая операторная алгебра, порожденная алгеброй B, совпадает с равномерно замкнутой алгеброй, порожденной B.*

Доказательство. Ясно, что любой элемент слабо замкнутой операторной алгебры, порожденной B, коммутирует с любым элементом из B, так что следствие вытекает непосредственно из леммы 14, ч. т. д.

→ 16. Теорема. *Равномерно замкнутая операторная алгебра, порожденная полной булевой алгеброй B проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$, состоит из всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{X}$, которые оставляют инвариантным любое многообразие, инвариантное относительно любого элемента из B.*

Доказательство. Очевидно, что всякий оператор из равномерно замкнутой алгебры, порожденной алгеброй B, обладает требуемым свойством инвариантности.

Прежде чем перейти к доказательству обратного утверждения, сделаем несколько общих замечаний. Если Λ — структурное пространство равномерно замкнутой операторной алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной B, то по лемме 9 существует гомеоморфный изоморфизм T алгебр $C(\Lambda)$ и $\mathfrak{A}$. Таким образом, каждый проектор E из B определяет функцию f_E из $C(\Lambda)$, такую, что $E = T(f_E)$. Так как $E^2 = E$, то $f_E^2 = f_E$, и потому f_E является характеристической функцией некоторого множества $\sigma(E)$ в Λ. Поскольку f непрерывна, множество $\sigma(E)$ одновременно открыто и замкнуто. Отметим, что

(i) множества $\sigma(E)$ образуют базис топологии в Λ.

Чтобы убедиться в этом, выберем λ_0 в открытом множестве N. Так как функции из $C(\Lambda)$ разделяют точки из Λ и B порождает алгебру $\mathfrak{A}$, эквивалентную $C(\Lambda)$, ясно, что характеристические функции множеств $\sigma(E)$, где $E \in B$, разделяют точки из Λ. Таким образом, если λ_1 лежит в дополнении N', то существует проектор E из B, такой, что $\lambda_0 \in \sigma(E)$, $\lambda_1 \notin \sigma(E)$. Это показывает, что пересечение всех замкнутых множеств $\sigma(E)N'$, где E пробегает все проекторы из B, с $\lambda_0 \in \sigma(E)$, пусто. Так как Λ — компакт, то некоторое конечное пересечение $\sigma(E_1) \ldots \sigma(E_n) N'$ пусто. Таким образом, если $E = E_1E_2 \ldots E_n$, то $\lambda_0 \in \sigma(E) \subseteq N$, но это противоречит утверждению (i).

Поскольку B полна, то проекторы

(ii) $$E_x = \bigwedge_{Ex=x} E, \quad x \in \mathfrak{X},$$

существуют; соответствующие открыто-замкнутые множества $\sigma(E_x)$ мы будем обозначать через σ_x. Из леммы 4 вытекает, что

(iii) $$E_x x = x.$$

Отметим далее, что

(iv) если $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \notin \sigma_x$ и если $T(f)x = 0$, то $f = 0$.

Чтобы убедиться в этом, предположим, что $f \neq 0$; тогда в силу (i) существует проектор $E \neq 0$ в B, такой, что $f(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \sigma(E)$. Поскольку $\sigma(E)$ — компакт, функция g, определяемая соотношением

$$g(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(\lambda)}, & \lambda \in \sigma(E), \\ 0, & \lambda \notin \sigma(E), \end{cases}$$

непрерывна и $T(g)T(f) = E$. Тогда $Ex = T(g)T(f)x = 0$, и, используя соотношение (iii), мы получаем $(E_x - E)x = x$, откуда вытекает, что $E_x - E \geqslant E_x$. Но так как $f(\lambda) = 0$ на σ_x', то $\sigma(E) \subseteq \subseteq \sigma_x$, а потому $E \leqslant E_x$ и $E_x - E \leqslant E_x$. Следовательно, $E_x - E = = E_x$ и $E = 0$, т е. мы получили противоречие и доказали свойство (iv).

Пусть теперь A — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{X}$, который оставляет инвариантным любое многообразие, инвариантное относительно каждого элемента из B. Тогда $AE\mathfrak{X} \subseteq E\mathfrak{X}$ и $A(I - E)\mathfrak{X} \subseteq (I - E)\mathfrak{X}$, откуда вытекает, что

$$EAE = AE, \quad EA(I - E) = 0$$

и, следовательно, что

$$AE = EAE = EAE + EA(I - E) = EA.$$

Значит,

(v) $$EA = AE, \quad E \in B.$$

По лемме 9 булева алгебра B совпадает с областью значений счетно аддитивной спектральной меры E на семействе Σ борелевских подмножеств пространства Λ. Для любого x из $\mathfrak{X}$ положим

$$\mathfrak{X}(x) = \overline{\mathrm{sp}}\,\{Ex \mid E \in B\}.$$

Так как $\mathfrak{X}(x)$ инвариантно относительно любого элемента из B, оно также инвариантно и относительно A, и в силу свойства (v) рассуждения, использованные в доказательстве леммы 14, показывают, что сужение A на $\mathfrak{X}(x)$ задается формулой

$$A \mid \mathfrak{X}(x) = \int h_x(\lambda)\,(E \mid \mathfrak{X}(x))\,(d\lambda),$$

где h_x — ограниченная измеримая по Борелю функция на Λ, причем

$$\sup_{\lambda} |h_x(\lambda)| = |(A \mid \mathfrak{X}(x))| \leqslant |A|.$$

Если оператор A_x определяется формулой

$$A_x = E_x \int_{\Lambda} h_x(\lambda) E(d\lambda),$$

то очевидно, что

$$A_x \in \mathfrak{A}, \quad A_x x = Ax, \quad A_x E_x = A_x, \quad |A_x| \leqslant K |A|,$$

где K — верхняя грань для B. Так как A_x лежит в $\mathfrak{A}$, то существует однозначно определенная непрерывная функция f_x из $C(\Lambda)$, такая, что $A_x = T(f_x)$. Эта функция обладает следующими свойствами:

(vi) $$T(f_x)x = Ax, \quad f_x(\lambda) = 0, \quad \lambda \notin \sigma_x.$$

Кроме того, если g также обладает свойствами (vi), то из (iv) вытекает, что $f_x = g$, так что свойства (vi) характеризуют f_x.

Заметим далее, что

(vii) $$\sigma_{Fx} = \sigma(F)\sigma_x, \quad F \in B.$$

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что $(E_x F) Fx = FE_x x = Fx$, а потому $E_x F \geqslant E_{Fx}$. Обратно, если $E_x F > E_{Fx}$, то существует элемент $G \neq 0$, такой, что $G \leqslant E_x F$ и $GE_{Fx} = 0$. Для такого G очевидно, что $GFx = GE_{Fx}Fx = 0$ и $G(I - F) = 0$. Таким образом,

$$Gx = GFx + G(I - F)x = 0,$$

и, следовательно $(I - G)x = x$, $I - G \geqslant E_x$, а потому $G \leqslant I - E_x$. Этим доказано, что $G \leqslant (I - E_x) E_x = 0$; мы получили противоречие и установили соотношение $E_x F = E_{Fx}$, из которого непосредственно вытекает утверждение (vii). Далее мы установим соотношение

(viii) $$f_{Fx} = f_x \chi_{\sigma(F)}, \quad F \in B.$$

Для его проверки положим $g = f_x \chi_{\sigma(F)}$, так что, используя (vii), получаем $g(\lambda) = 0$ при $\lambda \notin \sigma_x \sigma(F) = \sigma_{Fx}$. К тому же

$$T(g) Fx = T(f_x) T(\chi_{\sigma(F)}) Fx = FT(f_x) x = FAx = AFx.$$

Таким образом, утверждение (vi), если заменить в нем f_x на g, а x — на F_x, показывает, что $g = f_{Fx}$; тем самым соотношение (viii) установлено. Теперь мы проверим соотношение

(ix) $$f_x(\lambda) = f_y(\lambda), \quad \lambda \in \sigma_x \sigma_y.$$

При его доказательстве можно предполагать, что $\sigma_x = \sigma_y$; действительно, если $z = E_y x$, а $w = E_x y$, то из (vii) вытекает, что $\sigma_z =$

$=\sigma_y\sigma_x=\sigma_w$, а из (viii) — что $f_z=\chi_{\sigma_y}f_x$ и $f_w=\chi_{\sigma_x}f_y$. Таким образом, если $f_z(\lambda)=f_w(\lambda)$ на $\sigma_z=\sigma_w$, то равенство (ix) будет установлено. Следовательно, мы можем и будем при доказательстве соотношения (ix) считать, что $\sigma_x=\sigma_y$.

Так как $A(x-y)=Ax-Ay$, то мы получаем

$$T(f_{x-y})(x-y)=T(f_x)x-T(f_y)y$$

и, следовательно,

$$T(f_{x-y}-f_x)x=T(f_{x-y}-f_y)y.$$

Соотношение (ix) докажем теперь от противного; предположим, что оно неверно, т. е. будем считать, что функции f_x и f_y не являются тождественно равными и одна из них, скажем f_x, отлична от обеих функций f_x и f_{x-y} в некоторой точке λ_0 из σ_x. Таким образом, в силу (i) существуют проектор E и число $\varepsilon>0$, такие, что $\sigma(E)\subseteq\sigma_x=\sigma_y$ и

$$|f_{x-y}(\lambda)-f_x(\lambda)|\geqslant\varepsilon,\qquad \lambda\in\sigma(E).$$

Так как $\sigma(E)$ открыто и замкнуто, функция

$$g(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{f_{x-y}(\lambda)-f_x(\lambda)}, & \lambda\in\sigma(E),\\ 0, & \lambda\notin\sigma(E),\end{cases}$$

непрерывна и, следовательно, принадлежит $C(\Lambda)$. Положим $h(\lambda)=(f_{x-y}(\lambda)-f_y(\lambda))g(\lambda)$. Тогда

$$T(h)y=T(g)T(f_{x-y}-f_y)y=T(g)T(f_{x-y}-f_x)x=T(\chi_{\sigma(E)})x=Ex,$$

так что

$$T(f_x)Ex=AEx=AT(h)y=T(f_y)T(h)y=T(f_y)Ex.$$

Таким образом, $T(f_y\chi_{\sigma(E)})Ex=AEx$ и $f_y(\lambda)\chi_{\sigma(E)}(\lambda)=0$, если $\lambda\notin\sigma_y\cap\sigma(E)=\sigma_x\cap\sigma(E)=\sigma_{Ex}$ (в силу (vii)). Так как соотношениями (vi) функция f_x определяется однозначно, то ясно, что

$$f_y\chi_{\sigma(E)}=f_{Ex}.$$

С другой стороны, из соотношения (viii) вытекает, что $f_{Ex}=f_x\chi_{\sigma(E)}$. Таким образом, $f_y(\lambda)=f_x(\lambda)$, если $\lambda\in\sigma(E)$; полученное противоречие доказывает соотношение (ix).

В силу (ix) функция

$$\mathfrak{F}(\lambda)=\begin{cases} f_x(\lambda), & \lambda\in\sigma_x,\\ 0, & \lambda\notin\bigcup\limits_x\sigma_x,\end{cases}$$

определена и непрерывна на открытом множестве $\bigcup\limits_x\sigma_x$. Так как

$$|f_x|=|T^{-1}A_x|\leqslant|T^{-1}|\,|A_x|\leqslant K|T^{-1}|\,|A|,$$

то функции f_x равномерно ограничены, и, следовательно, $\mathfrak{F}$ является ограниченной борелевской функцией. Положим

$$A_0 = \int_{\Lambda} \mathfrak{F}(\lambda)\, E(d\lambda). \tag{x}$$

Тогда

$$A_0 x = A_0 E_x x = \int_{\sigma_x} \mathfrak{F}(\lambda)\, E(d\lambda)\, x =$$

$$= \int_{\sigma_x} f_x(\lambda)\, E(d\lambda)\, x = A_x E_x x = Ax, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Поскольку $A_0 = A$, равенство (x) показывает, что A принадлежит равномерно замкнутой алгебре, порожденной проекторами $E(e)$, а потому A лежит в равномерно замкнутой алгебре, порожденной B, ч. т. д.

17. Следствие. *Слабо замкнутая операторная алгебра, порожденная полной булевой алгеброй B проекторов, совпадает с равномерно замкнутой операторной алгеброй, порожденной B.*

Доказательство. В силу следствия VI.1.5 слабо замкнутая операторная алгебра $\mathfrak{W}(B)$, порожденная B, совпадает с сильно замкнутой алгеброй, порожденной B. Таким образом, всякий оператор A из $\mathfrak{W}(B)$ является сильным пределом конечных линейных комбинаций элементов из B. Отсюда вытекает, что A оставляет инвариантным всякое замкнутое линейное многообразие, инвариантное относительно всех элементов B. Теорема показывает, что A содержится в равномерно замкнутой алгебре $\mathfrak{A}(B)$, порожденной B. Таким образом, $\mathfrak{W}(B) \subseteq \mathfrak{A}(B)$. С другой стороны, очевидно, что $\mathfrak{A}(B) \subseteq \mathfrak{W}(B)$, ч. т. д.

Материал, изложенный в настоящем параграфе, преимущественно носил характер подготовки к следующему основному результату Бейда, о котором мы говорили во введении.

18. Теорема. *Пусть B — ограниченная булева алгебра проекторов в слабо полном пространстве. При этом оператор лежит в слабо замкнутой алгебре, порожденной B, тогда и только тогда, когда он оставляет инвариантным всякое замкнутое линейное многообразие, инвариантное относительно всех элементов из B.*

Доказательство. В предыдущем доказательстве было отмечено, что оператор из слабо замкнутой алгебры, порожденной B, обладает требуемым свойством инвариантности. Для доказательства обратного утверждения предположим, что A оставляет инвариантным всякое замкнутое линейное многообразие, инвариантное относительно всех элементов B, и обозначим через B_1 сильное замыкание B. Тогда ясно, что A оставляет инвариантным каждое замкнутое линейное многообразие, инвариантное относительно всех элементов из B_1. В силу следствия 8 B_1 полна, и по теореме 16 A содержится в сильно (или слабо) замкнутой алгебре, порожденной B, ч. т. д.

Следующий примыкающий к этой теореме результат также принадлежит Бейду:

19. Теорема. *Пусть B — ограниченная булева алгебра проекторов в слабо полном пространстве. Тогда каждый оператор из слабо замкнутой алгебры, порожденной B, является спектральным оператором скалярного типа.*

Доказательство. Пусть B_1 — сильное замыкание B. В силу следствия 8 B_1 полна, а в силу следствия 17 слабо замкнутая операторная алгебра, порожденная B, совпадает с равномерно замкнутой операторной алгеброй, порожденной B_1. Необходимый результат вытекает теперь из леммы 2.1 и следствия 2.12, ч. т. д.

Следующий результат показывает, что в частном случае, когда некоторое множество вида $\{Ex \mid E \in B\}$ фундаментально в $\mathfrak{X}$, условие инвариантности в теореме 18 можно заменить более простым условием коммутирования.

20. Теорема. *Пусть B — ограниченная булева алгебра проекторов в слабо полном пространстве, и пусть для некоторого вектора x множество $\{Ex \mid E \in B\}$ фундаментально в $\mathfrak{X}$. Ограниченный оператор лежит в слабо замкнутой операторной алгебре, порожденной B, тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми элементами из B.*

Доказательство. Ясно, что каждый элемент слабо замкнутой операторной алгебры, порожденной B, коммутирует со всеми элементами из B. Для доказательства обратного утверждения предположим, что A коммутирует со всеми элементами B, и обозначим через B_1 сильное замыкание B. Очевидно, что A коммутирует со всеми элементами B_1, и в силу леммы 5 B_1 полна. Таким образом, утверждение теоремы вытекает из леммы 14 и следствия 15, ч. т. д.

21. Лемма. *Пусть B — ограниченная σ-полная булева алгебра проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что для некоторой последовательности $\{x_i\}$ в $\mathfrak{X}$ выполнено соотношение*

$$\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{sp}} \{Ex_i \mid E \in B, \quad i \geqslant 1\}.$$

Тогда B полна.

Доказательство. Мы покажем, что любое множество дизъюнктных проекторов в B не более чем счетно. Отсюда вытекает в силу леммы IV.11.5, что любое множество в B имеет наименьшую верхнюю грань, которая является наименьшей верхней гранью какого-то счетного подмножества. Таким образом, полнота алгебры B будет вытекать из ее σ-полноты.

Пусть $\{E_\alpha\}$ — семейство дизъюнктных элементов в B. Из леммы 4 вытекает, что любой ряд вида $\sum_{i=1}^{\infty} E_{\alpha_i}$, где $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, сильно сходится. Поэтому для любого натурального $n \geqslant 1$ и любого $\varepsilon > 0$ лишь конечное число векторов $E_\alpha x_n$ имеет нормы, большие чем ε. Это показывает, что для всех индексов α, кроме счетного их числа, $E_\alpha x_n = 0$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Таким образом, за исключением счетного числа индексов α, справедливо соотношение $E_\alpha E x_n = 0$ для всех E из B и $n \geqslant 1$. Так как множество $\{E x_n \mid E \in B, n \geqslant 1\}$ фундаментально в $\mathfrak{X}$, отсюда вытекает, что $E_\alpha = 0$ для всех индексов α, кроме счетного их числа. Таким образом, множество $\{E_\alpha\}$ счетно, ч. т. д.

Теперь мы можем получить следующий классический результат Дж. фон Неймана:

22. Теорема. *Пусть T — ограниченный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве. Тогда следующие четыре алгебры совпадают:*

(i) *алгебра всех ограниченных борелевских функций от T;*

(ii) *слабо замкнутая операторная алгебра, порожденная T;*

(iii) *множество всех ограниченных линейных операторов, коммутирующих с каждым оператором, который коммутирует с T;*

(iv) *равномерно замкнутая операторная алгебра, порожденная проекторами из разложения единицы для T.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_4$ алгебры, определенные в (i), ..., (iv) соответственно. Из теоремы 2.10 вытекает, что $\mathfrak{A}_1$ равномерно замкнута, и, таким образом, $\mathfrak{A}_4 \subseteq \mathfrak{A}_1$. В силу определения интеграла $\int f(\lambda) E(d\lambda)$, ясно, что $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_4$. Таким образом, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_4$. В силу определения этих алгебр очевидно, что $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_3$. Для доказательства того, что $\mathfrak{A}_4 \subseteq \mathfrak{A}_2$, достаточно проверить, что все проекторы $E(e)$ из области значений разложения единицы для T лежат в $\mathfrak{A}_2$. Так как $\mathfrak{A}_2$ — алгебра, то семейство Σ борелевских множеств e, для которых $E(e) \in \mathfrak{A}_2$, является полем. В силу следствия 2.11(iii) оно является также и σ-полем. Поскольку характеристическая функция ограниченного интервала является пределом ограниченной последовательности многочленов, из следствия 2.11(iii) вытекает, что любой ограниченный интервал вещественной оси содержится в Σ. Так как спектр T веществен (см. теорему X.4.2), семейство Σ состоит из всех борелевских множеств. Итак, мы показали, что $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_4 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_3$, и для завершения доказательства достаточно проверить, что $\mathfrak{A}_3 \subseteq \mathfrak{A}_4$.

Для этого предположим, что A — оператор из $\mathfrak{A}_3$, а $\mathfrak{H}_0$ — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве, инвариантное относительно всех элементов $E(e)$ разложения единицы для T. Таким образом, если P — ортогональный проектор на $\mathfrak{H}_0$, то, поскольку $E(e)$ оставляет $\mathfrak{H}_0$ инвариантным, $PE(e)P = E(e)P$. Если вектор y ортогонален к $\mathfrak{H}_0$, то

$$(E(e)y, \mathfrak{H}_0) = (y, E(e)\mathfrak{H}_0) = 0,$$

так что вектор $E(e)y$ ортогонален к $\mathfrak{H}_0$. Таким образом, $E(e)$ оставляет ортогональное к $\mathfrak{H}_0$ дополнение инвариантным, а потому

$$(I - P)E(e)(I - P) = E(e)(I - P).$$

Следовательно,

$$PE(e) = PE(e)P + PE(e)(I - P) =$$
$$= E(e)P + P(I - P)E(e)(I - P) = E(e)P,$$

откуда сразу же вытекает, что $PT = TP$. Так как оператор A лежит в $\mathfrak{A}_3$, то мы имеем $AP = PA$, так что A оставляет $\mathfrak{H}_0$ инвариантным. Итак, мы показали, что всякий оператор из $\mathfrak{A}_3$ оставляет инвариантным любое замкнутое линейное многообразие, которое инвариантно относительно всех проекторов из разложения единицы для T. Поскольку по предположению гильбертово пространство сепарабельно, то эти проекторы образуют (см. лемму 21) полную булеву алгебру. Таким образом, из теоремы 16 вытекает, что $\mathfrak{A}_3 \subseteq \mathfrak{A}_4$, ч. т. д.

23. Лемма. *Сильно замкнутая булева алгебра проекторов, порожденная σ-полной булевой алгеброй проекторов в B-пространстве, полна.*

Доказательство. Пусть B есть σ-полная булева алгебра проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$, а B_1 — ее сильное замыкание. По лемме 3, B ограничена, а потому B_1 также является ограниченной булевой алгеброй проекторов в $\mathfrak{X}$. Предположим, что B_1 не полна. Согласно лемме 4, в B_1 существуют монотонно возрастающая обобщенная последовательность $\{E_\alpha\}$ и вектор x в $\mathfrak{X}$, такие, что не существует предела $\lim\limits_{\alpha} E_\alpha x$. Обозначим через $\mathfrak{X}(x)$, $\mathfrak{X}_1(x)$ замкнутые линейные многообразия, порожденные множествами $\{Ex \mid E \in B\}$, $\{Ex \mid E \in B_1\}$ соответственно. Так как B_1 — сильное замыкание B, то всякий вектор Ex, где $E \in B_1$, содержится в $\mathfrak{X}(x)$, и потому $\mathfrak{X}(x) \supseteq \mathfrak{X}_1(x)$. Очевидно, $\mathfrak{X}(x) \subseteq \mathfrak{X}_1(x)$, так что $\mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}_1(x)$, откуда вытекает соотношение $E\mathfrak{X}(x) \subseteq \mathfrak{X}(x)$ для всех E из B_1. Для каждого E из B_1 обозначим через $\widetilde{E}$ сужение E на $\mathfrak{X}(x)$. Ясно, что множество $\{ \widetilde{E} \mid E \in B_1\}$ содержится в сильном замыкании множества $B(x) = \{\widetilde{E} \mid E \in B\}$. Так как предел $\lim\limits_{\alpha} E_\alpha x$ не существует, то и предел $\lim\limits_{\alpha} \widetilde{E}_\alpha$ не существует в сильной операторной топологии. Из леммы 4 вытекает, что сильное замыкание $B(x)$ не полно. Таким образом, в силу следствия 7 $B(x)$ не полно. С другой стороны, согласно следствию 11, $B(x)$ является σ-полной алгеброй. Эти два утверждения противоречат лемме 21 и доказывают лемму, ч. т. д.

24. Следствие. *Ограниченный линейный оператор лежит в слабо замкнутой операторной алгебре, порожденной σ-полной булевой алгеброй B проекторов в B-пространстве, тогда и только тогда, когда он оставляет инвариантным всякое замкнутое линейное многообразие, которое инвариантно относительно всех операторов из B.*

Доказательство. Пусть B_1 — сильное замыкание B. По лемме 23 B_1 полна, и поэтому из теоремы 16 и следствия 17 вытекает, что слабо замкнутая операторная алгебра, порожденная B_1 (которая, очевидно, совпадает с алгеброй, порожденной B), состоит из тех операторов, которые оставляют инвариантным всякое замкнутое линейное многообразие, инвариантное относительно любого оператора из B. Поскольку ясно, что замкнутое линейное многообразие инвариантно относительно любого элемента из B_1 тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно всех операторов из B, доказательство закончено, ч. т. д.

25. Следствие. *Каждый оператор из слабо замкнутой операторной алгебры, порожденной σ-полной булевой алгеброй проекторов в B-пространстве, является спектральным оператором скалярного типа.*

Доказательство. Пусть B_1 — сильное замыкание σ-полной булевой алгебры B, так что в силу леммы 23 B_1 полно. Согласно следствию 17, слабо замкнутая операторная алгебра, порожденная B_1 (и, очевидно, совпадающая со слабо замкнутой операторной алгеброй, порожденной B), есть не что иное, как равномерно замкнутая операторная алгебра, порожденная B_1. Каждый оператор в такой равномерно замкнутой алгебре в силу леммы 9 представим в терминах счетно аддитивной спектральной меры выражением вида $\int f(\lambda)\, E(d\lambda)$. Такие операторы по лемме 2.9 являются спектральными операторами скалярного типа, ч. т. д.

26. Следствие. *Любой оператор из слабо замкнутой операторной алгебры, порожденной спектральным оператором скалярного типа и проекторами его разложения единицы, является спектральным оператором скалярного типа.*

Доказательство. Так как спектральный оператор скалярного типа, очевидно, лежит в слабо замкнутой алгебре $\mathfrak{A}$, порожденной проекторами из его разложения единицы, то достаточно показать, что всякий оператор в $\mathfrak{A}$ является спектральным оператором скалярного типа. Это непосредственно вытекает из следствий 10 и 25, ч. т. д.

Этот параграф мы завершим двумя теоремами Бейда, которые относятся к интересному классу результатов в B-пространствах относительно условий, при которых из слабой сходимости вытекает сильная.

27. Теорема. *Если обобщенная последовательность проекторов из σ-полной булевой алгебры проекторов в B-пространстве слабо сходится к проектору, то она сходится сильно.*

Доказательство. В силу леммы 23 доказательство можно ограничить тем случаем, когда булева алгебра B полна. Пусть $\{E_\alpha\}$ — слабо сходящаяся обобщенная последовательность в B, и пусть ее предел E является проектором. Надо показать, что $\{E_\alpha\}$ сильно сходится к E. По лемме 6 E лежит в B, а рассмотрение последовательности $\{E_\alpha - E\}$ показывает, что мы можем считать $E = 0$. Проводя доказательство от противного, предположим, что последовательность $\{E_\alpha\}$ слабо сходится к нулю, но для некоторого вектора x_0 последовательность $\{E_\alpha x_0\}$ к нулю не сходится. Следовательно, по лемме 9 B является областью значений счетно аддитивной спектральной меры E, заданной на σ-поле Σ. Тогда $E_\alpha = E(e_\alpha)$, где $e_\alpha \in \Sigma$. В силу леммы 12 существует линейный функционал y^*, такой, что мера $\mu = y^* E x_0$ обладает следующим свойством: если $\mu(e) = 0$, то $E(e)\, x_0 = 0$. Из теоремы IV.10.1 Петтиса вытекает, что $\lim\limits_{\mu(e) \to 0} E(e)\, x_0 = 0$. Так как $\{E(e_\alpha)\}$ слабо сходится к нулю, то $\mu(e_\alpha) \to 0$, и, следовательно, из результата Петтиса вытекает, что $E(e_\alpha)\, x_0 \to 0$; полученное противоречие завершает доказательство, ч. т. д.

28. Следствие. *Если обобщенная последовательность из ограниченной булевой алгебры проекторов в слабо полном B-пространстве слабо сходится к проектору, то она сходится и сильно.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 27 и леммы 5, ч. т. д.

4. Сильные пределы спектральных операторов: некоммутативный случай

В этом параграфе будут сформулированы условия того, что сильный предел $T = \lim\limits_{\alpha} T_\alpha$ обобщенной последовательности $\{T_\alpha\}$ спектральных операторов скалярного типа сам является спектральным оператором скалярного типа. Те же самые условия обеспечивают и тот факт, что $f(T_\alpha) \to f(T)$ сильно для любой ограниченной борелевской функции f, множество точек разрыва которой имеет меру нуль относительно разложения единицы для T. Это — теорема о возмущении типа Реллиха.

1. Теорема. *Пусть $\{T_\alpha\}$, $\alpha \in A$, — сильно сходящаяся обобщенная последовательность спектральных операторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что существует компактное множество V, содержащее все спектры $\sigma(T_\alpha)$. Пусть каждая комплекснозначная непрерывная функция на V является равномерным пределом рациональных функций, а разложения единицы E_α для T_α удовлетворяют неравенствам*

$$|E_\alpha(\delta)| \leqslant M, \qquad \alpha \in A,$$

для всех δ из семейства $\mathscr{B}$ всех борелевских множеств комплексных чисел. Тогда если $T = \lim\limits_\alpha T_\alpha$ и $\sigma(T) \subseteq V$, то T^* является спектральным оператором класса $(\mathscr{B}, \mathfrak{X})$. Если $\mathfrak{X}$ слабо полно, то T сам является спектральным оператором.

Замечание. Чтобы множество V обладало тем свойством, что всякая непрерывная функция на нем является равномерным пределом рациональных функций, очевидно, необходимо, чтобы V не имело внутренних точек. Однако известно, что не каждое компактное нигде не плотное множество V обладает этим свойством, а вопрос о полном описании таких множеств, по-видимому, является нерешенной задачей теории приближений. Лаврентьев [1] (см. также Мергелян [1]) показал, что если V нигде не плотно и не разделяет плоскости, то V обладает указанным выше свойством. Гартогс и Розенталь [1] показали, что если V имеет плоскую меру нуль, то оно обладает указанным свойством. Уолш [1] доказал, что если V является объединением конечного числа жордановых дуг, никакие две из которых не пересекаются более чем в конечном числе точек, то V обладает указанным свойством[1]).

Доказательство. Поскольку операторы T_α являются спектральными операторами со спектрами, лежащими в V, их резольвенты определяются по формуле

$$R(\lambda; T_\alpha) = \int\limits_V \frac{E_\alpha(d\zeta)}{\zeta - \lambda}, \qquad \lambda \notin V,$$

и из теоремы 2.10 вытекает, что

$$|R(\lambda; T_\alpha)| \leqslant 4M \sup_{\zeta \in V} \frac{1}{|\zeta - \lambda|}, \qquad \lambda \in V.$$

---

[1]) Широкий круг задач теории приближений рациональными функциями решен А. Г. Витушкиным (см. *УМН*, **22**: 6 (1967), 141—199). — *Прим. перев.*

Из тождества

$$R(\lambda;\,T_\alpha)-R(\lambda;\,T)=R(\lambda;\,T_\alpha)(\lambda I-T)R(\lambda;\,T)-$$
$$-R(\lambda;\,T_\alpha)(\lambda I-T_\alpha)R(\lambda;\,T)=R(\lambda;\,T_\alpha)(T_\alpha-T)R(\lambda;\,T)$$

вытекает, что при $\lambda \notin V$ имеет место сильная сходимость $R(\lambda;\,T_\alpha)\to R(\lambda;\,T)$. Пусть теперь r — элемент класса $R(V)$ рациональных функций, непрерывных на V. Тогда $r(T_\alpha)$ является конечным произведением сомножителей вида $\lambda I - T_\alpha$ и $R(\lambda;\,T_\alpha)$. Так как произведение ограниченных сильно сходящихся обобщенных последовательностей является сильно сходящейся обобщенной последовательностью, то $r(T_\alpha)\to r(T)$ сильно. Поэтому из теоремы 2.10 вытекает, что

$$|r(T_\alpha)|=\left|\int_V r(\lambda)\,E_\alpha(d\lambda)\right|\leqslant 4M\sup_{\zeta\in V}|r(\zeta)|,$$

а так как $r(T_\alpha)\to r(T)$ сильно, то $|r(T)|\leqslant 4M\sup_{\zeta\in V}|r(\zeta)|$. Поскольку $R(V)$ плотно в $C(V)$, это неравенство показывает, что гомоморфизм $r\to r(T)$, заданный на $R(V)$, имеет единственное непрерывное продолжение до гомоморфизма из $C(V)$ на равномерно замкнутую операторную алгебру, порожденную операторами $r(T)$, где $r\in R(V)$. Наша теорема вытекает теперь непосредственно из теорем 2.4, 2.5 и 2.10, ч. т. д.

2. Следствие. *В условиях предыдущей теоремы*

$$f(T)=\lim_\alpha f(T_\alpha),\qquad f\in C(V),$$

в смысле сильной операторной топологии.

Доказательство. Пусть $\{r_n\}$ — последовательность рациональных функций, равномерно сходящаяся к непрерывной функции f на V. В предыдущем доказательстве показано, что для каждого n

$$r_n(T)\,x=\lim_\alpha r_n(T_\alpha)\,x,\qquad x\in\mathfrak{X}.$$

С другой стороны,

$$r_n(T_\alpha)-f(T_\alpha)|\leqslant 4M\sup_{\lambda\in V}|r_n(\lambda)-f(\lambda)|,$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(T_\alpha)\,x=f(T_\alpha)\,x$$

равномерно при $|x|\leqslant 1$. Таким образом, по теореме Мура — Смита о сходимости (см. I.7.6)

$$f(T)\,x=\lim_n\lim_\alpha r_n(T_\alpha)\,x=\lim_\alpha\lim_n r_n(T_\alpha)\,x=\lim_\alpha f(T_\alpha)\,x,\ \text{ч. т. д.}$$

Используя следствие 2, можно получить следующий результат, аналогичный теореме Реллиха о возмущении (см. теорему X.7.2) для нормальных операторов в гильбертовом пространстве:

3. Теорема. *Предположим, что условия теоремы* 1 *выполнены и что* E — *разложение единицы для* T. *Тогда*

$$f(T)x = \lim_{\alpha} f(T_{\alpha})x, \qquad x \in \mathfrak{X},$$

для всякой ограниченной борелевской функции f *на* V, *такой, что множество ее разрывов содержится в замкнутом множестве, на котором* E *обращается в нуль.*

Доказательство. Пусть K — множество разрывов функции f, а g_n — непрерывная функция, обращающаяся в нуль на замыкании $\overline{K}$, равная 1 в точках λ, расстояние которых от $\overline{K}$ больше $1/n$, и всюду удовлетворяющая неравенству $|g_n(\lambda)| \leqslant 1$ (см. теорему I.5.2). Тогда функция fg_n непрерывна, так что в силу следствия 2

$$\lim_{\alpha} f(T_{\alpha})g_n(T_{\alpha})x = f(T)g_n(T)x, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Аналогично, $\lim\limits_{\alpha} g_n(T_{\alpha}) = g_n(T)$ в смысле сильной операторной топологии. Так как

$$|f(T_{\alpha})| \leqslant 4M \sup_{\lambda \in V} |f(\lambda)| \leqslant L,$$

то неравенство

$$|f(T_{\alpha})g_n(T)x - f(T_{\alpha})g_n(T_{\alpha})x| \leqslant L|g_n(T)x - g_n(T_{\alpha})x|$$

показывает, что

$$\lim_{\alpha} f(T_{\alpha})g_n(T_{\alpha})x = \lim_{\alpha} f(T_{\alpha})g_n(T)x, \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

Таким образом,

$$\lim_{\alpha} f(T_{\alpha})y = f(T)y$$

для всех векторов y вида $y = g_n(T)x$. Но по предположению $E(\overline{K}) = 0$, и потому $g_n(T)x \to E(\overline{K}')x = x$; это показывает, что векторы $y = g_n(T)x$ плотны в $\mathfrak{X}$. Поскольку операторы $f(T_{\alpha})$ равномерно ограничены по α, отсюда вытекает, что $f(T_{\alpha})x \to \to f(T)x$ для всех x из $\mathfrak{X}$, ч. т. д.

5. Упражнения

1. Определение. Пусть K — компактное множество в комплексной плоскости. Обозначим через $R(K)$ множество рациональных функций, аналитических на K, а через $CR(K)$ — замыкание $R(K)$ в $C(K)$. Множество K называется *R-множеством*, если $CR(K) = C(K)$.

2. Пусть $\mathfrak{X}$ — рефлексивное B-пространство и $T \in B(\mathfrak{X})$; предположим, что спектр $\sigma(T)$ является R-множеством. Оператор T является спектральным оператором скалярного типа тогда и только тогда, когда существует постоянная A, такая, что

$$|f(T)| \leqslant A\,|f|, \quad f \in R(\sigma(T)).$$

3. Пусть $\mathfrak{X}$ — рефлексивное B-пространство и $T \in B(\mathfrak{X})$; предположим, что спектр $\sigma(T)$ является R-множеством. При этом T — спектральный оператор скалярного типа тогда и только тогда, когда существует такая постоянная A, что

$$|f(T)|^2 \leqslant A\,|f(T)|^2, \quad f \in R(\sigma(T)).$$

4. Пусть U — унитарный оператор из $B(\mathfrak{X})$. Если оператор U спектральный, то существует постоянная A, такая, что для всех

$$P(\lambda) = \sum_{-N}^{N} c_k \lambda^k$$

выполнено неравенство

$$|P(U)| \leqslant A \sup_{|\lambda|=1} |P(\lambda)|.$$

Обратно, если $\mathfrak{X}$ рефлексивно и U — унитарный оператор, удовлетворяющий такому условию, то U — спектральный оператор.

5. (Фиксман, Краббе.) Оператор правого сдвига U, определенный в $\mathfrak{X} = l_1(-\infty, \infty)$ соотношением

$$U(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots) = (\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \ldots),$$

не является спектральным. [Указание: исследовать $\sigma_r(U)$ или воспользоваться тем фактом, что существует непрерывная функция, ряд Фурье которой не сходится абсолютно.]

6. (Фиксман, Краббе.) Оператор правого сдвига U, определенный в $l_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, соотношением

$$U(\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_{+1}, \ldots) = (\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \ldots),$$

не является спектральным. [Указание: если $1 < p < 2$, то известно (Зигмунд [1; стр. 190]), что существует непрерывная функция, последовательность коэффициентов Фурье которой не принадлежит l_p.]

7. (Фиксман.) Пусть $\alpha > 0$ и r_α — поворот в положительном направлении единичной окружности $S = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ на α радиан. Тогда r_α — гомеоморфизм S на S, и он периодичен тогда и только тогда, когда α равно рациональному кратному π. Пусть оператор U_α определен в $C(S)$ соотношением $(U_\alpha f)(s) = f(r_\alpha(s))$. Показать, что U_α — спектральный оператор в $C(S)$ тогда и только тогда, когда α — рациональное кратное π. [Указание: если α/π иррационально, то для любого n существует точка s_0, такая, что точки $s_k = r_\alpha^k(s_0)$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, имеют непересекающиеся окрестности.]

8. Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная подалгебра в $B(\mathfrak{X})$, содержащая I и являющаяся *полной* (в том смысле, что если $A \in \mathfrak{A}$ и $A^{-1} \in B(\mathfrak{X})$, то $A^{-1} \in \mathfrak{A}$). (i) Показать, что спектр $\sigma(A, \mathfrak{A})$ оператора A как элемента $\mathfrak{A}$ совпадает со спектром $\sigma(A, \mathfrak{X})$ оператора A как элемента $B(\mathfrak{X})$. (ii) Если E — проектор из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_E = \{AE \mid A \in \mathfrak{A}\}$, то $\sigma(A, \mathfrak{A}_E) = \sigma(A, E\mathfrak{X})$.

9. Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативная полная подалгебра в $B(\mathfrak{X})$, содержащая I. Пусть E — проектор из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_E = \{AE \mid A \in \mathfrak{A}\}$; обозначим через $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_E$ множества всех мультипликативных линейных функционалов на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_E$ соответственно. (i) Показать, что существует взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{M}_E$ и $\{m \in \mathfrak{M} \mid m(E) = 1\}$. (ii) Показать, что если $A \in \mathfrak{A}_E$, то

$$\sigma(A, E\mathfrak{X}) = \{m(A) \mid m \in \mathfrak{M}, \quad m(E) = 1\}.$$

10. Пусть S, T — коммутирующие операторы в $B(\mathfrak{X})$. (i) Показать, что

$$\sigma(S + T) \subseteq \sigma(S) + \sigma(T).$$

В частности, если N квазинильпотентен, то $\sigma(S + N) = \sigma(S)$. (ii) Если E — проекционный оператор, коммутирующий с S и N, то

$$\sigma(S + N, E\mathfrak{X}) = \sigma(S, E\mathfrak{X}).$$

11. Используя предыдущие упражнения, дать другое доказательство теоремы XV.4.5 о каноническом представлении спектрального оператора на его скалярную и нильпотентную части.

12. Пусть E — счетно аддитивная спектральная мера, а $\mathfrak{A}$ — полная коммутативная алгебра, содержащая E. Если m — мультипликативный линейный функционал на $\mathfrak{A}$, то существует единственное комплексное число λ_m, такое, что числовая мера $mE(\cdot)$ равна 1 на каждой окрестности точки λ_m и равна 0 на любом замкнутом множестве, не содержащем λ_m.

13. (Сафферн.) Пусть T — оператор из $B(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{A}(T)$ — полная замкнутая подалгебра в $B(\mathfrak{X})$, порожденная T. Показать, что $\mathfrak{A}(T)$ является равномерным замыканием семейства

$$R(T) = \{f(T) \mid f \text{ рациональна с полюсами в } \rho(T)\}.$$

14. (Канторович.) Пусть A и B — элементы $B(\mathfrak{X})$ с резольвентами $R(\lambda; A)$ и $R(\lambda; B)$. Предположим, что μ не лежит в множестве

$$\sigma(A) + \sigma(B) = \{a + b \mid a \in \sigma(A), \ b \in \sigma(B)\},$$

а C_μ — положительно ориентированный спрямляемый контур, охватывающий $\sigma(A)$ и содержащийся вместе со своей внутренностью в $\mu - \rho(B)$. Показать, что интеграл

$$J(\mu; A, B) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\mu} R(\mu - \lambda; B) R(\lambda; A)\, d\lambda$$

существует в $B(\mathfrak{X})$ и не зависит от контура C_μ. Показать, что этот интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{D_\mu} R(\lambda; B)\, R(\mu-\lambda; A)\, d\lambda,$$

где D_μ — контур, охватывающий $\sigma(B)$ и содержащийся вместе со своей внутренностью в $\mu - \rho(A)$.

15. (Канторович.) В обозначениях предыдущего упражнения показать, что если $AB = BA$, то

$$R(\mu; A+B) = J(\mu; A, B).$$

Более того, если расстояние между μ и $\sigma(A)$ превышает спектральный радиус $|\sigma(B)|$, то

$$R(\mu; A+B) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\mu; A)^{n+1} B^n.$$

16. (Стоун.) Вполне регулярное пространство называется *экстремально несвязным*, если замыкание любого открытого множества в нем открыто. Доказать, что каждая полная булева алгебра проекторов в B-пространстве изоморфна (как булева алгебра) булевой алгебре всех открыто-замкнутых множеств некоторого экстремально несвязного компактного хаусдорфова пространства. [Указание: воспользоваться теоремой I.12.1.]

6. Примечания и дополнения

Результаты, изложенные в настоящей главе, заимствованы в основном из работ Данфорда [18] и Бейда [3—5]. Кроме этих статей, укажем следующие работы, посвященные преимущественно алгебрам спектральных операторов, булевым алгебрам проекторов или теории кратности: Дьёдонне [19—21], Доусон [2, 4, 6], Эдвардс и Ионеску [1], Фельдзамен [1, 2], Фогель [3, 5, 7, 8], Люмер [2], Маккарти [1], Маккарти и Шварц [1], Маккарти и Цафрири [1], Мойал [1], Симпсон [3], Цафрири [2—6] и Уолш [1—3]. (Следует, однако, иметь в виду, что другие работы, посвященные спектральным операторам или операторным алгебрам, также иногда содержат результаты, примыкающие к рассмотренным здесь.)

Материал § 2 о равномерно замкнутых коммутативных алгебрах спектральных операторов взят из работы Данфорда [18]. Большинство результатов § 3 принадлежит Бейду [3, 4], хотя частные случаи некоторых из этих теорем были доказаны раньше. Например, если B — ограниченная булева алгебра проекторов в рефлексивном пространстве, то полнота сильного замыкания B вытекает из теоремы Дэя [10] — факт, явно сформулированный Данфордом [2] (см. также Бейд [3; стр. 404]). Обобщая теорему Лорха [2] для последовательностей, Барри [1] доказал, что ограниченная монотонная обобщенная последовательность проекторов в рефлексивном пространстве сильно сходится к некоторому проектору. В случае гильбертовых пространств лемма 3.14 была доказана Вульфом [2]. Как заметил Ф. Рисс [21], из более ранних результатов фон Неймана вытекает, что если A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а B — ограниченный оператор, коммутирующий со всяким оператором, который коммутирует с A, то $B = f(A)$ для некоторой ограниченной борелевской функции f. Рисс дал другое доказательство этого результата, и его метод был перенесен Мимурой [1] на неограниченные операторы. По поводу других доказательств см. Накано [8, 9], Рисс и Секефальви-Надь [1; § 129] и Секефальви-Надь [3; стр. 63—65]. Теорема не верна, если $\mathfrak{H}$ не сепарабельно (см. Накано [9], Секефальви-Надь [3; стр. 65], Веккен [2]). Однако в случае ограниченных операторов Сигал [5, II] получил обобщения, рассматривая более широкий класс функций. Результат Сигала перенесен на спектральные операторы Бейдом [3; стр. 410]. Теоремы 3.16 и 3.18 можно также рассматривать как обобщения этой теоремы фон Неймана — Рисса.

Берксон [3] доказал, что если $\mathfrak{X}$ — равномерно выпуклое B-пространство, а B — ограниченная булева алгебра проекторов в $\mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{X}$ имеется такая эквивалентная норма, что функционалы, определенные в лемме 3.12, можно представить при помощи полувнутреннего произведения. С другой стороны, Уолш [2; стр. 315] показал, что в полном метризуемом локально выпуклом пространстве может не существовать *единственного* функционала, соответствующего x_0^*; однако некоторые из изложенных здесь результатов все же могут быть обобщены.

Уолш [1] показал, что если $\mathfrak{A}$ — комплексная B-алгебра, обладающая тем свойством, что для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ существует гомоморфизм h_a: $C(\sigma(a)) \to \mathfrak{A}$, переводящий функцию $f(\lambda) \equiv \lambda$ в a, то $\mathfrak{A}$ полупроста, коммутативна и изоморфна $C(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ — пространство максимальных идеалов $\mathfrak{A}$.

Доусон [2] установил, что если S — скалярный оператор, спектр которого нигде не плотен и не разделяет плоскости, то разложение единицы для S содержится в слабо секвенциально замкнутой алгебре, порожденной S и I. Однако это утверждение не верно, если спектр $\sigma(S)$ имеет непустую внутренность или разделяет плоскость.

Результаты § 4 о сильных пределах спектральных операторов принадлежат Бейду [3; стр. 397—403] и [4]. Теорема 4.3 обобщает теоремы Капланского [7] и Реллиха [2, II]. Дальнейшие результаты в этом направлении были получены Фогелем [1, 4], Канторовичем [4, 5] и Цафрири [3, 4]. Аналогичные результаты были доказаны в локально выпуклых пространствах Симпсоном [1]. Теорема 4.1 не верна без предположения о том, что $\sigma(T) \subseteq V$. Это было показано с помощью контрпримера, построенного Фойашем. Берксон [5] показал, что это условие выполнено, если дополнение V связно.

ГЛАВА XVIII

Неограниченные спектральные операторы

1. Введение

В гл. XII, XIII, XIV было показано, что для применения спектральной теории эрмитовых операторов к дифференциальным операторам (обыкновенным и в частных производных) необходимо обобщить спектральную теорию ограниченных операторов на неограниченные эрмитовы операторы. Настоящая глава представляет собой попытку построить аналогичное обобщение теории спектральных операторов.

Прежде всего мы дадим определение замкнутого спектрального оператора, его разложения единицы и покажем, что разложение единицы определяется однозначно. Затем будет развито функциональное исчисление: сначала для аналитических функций от общих спектральных операторов, потом для произвольных неограниченных борелевских функций от спектральных операторов скалярного типа. В последнем случае оказывается возможным перенести весьма общую теорию, развитую для неограниченных эрмитовых операторов (см. XII.2.5—XII.2.9), на произвольные B-пространства. Далее мы покажем на примере, что аналитическая функция $f(T)$ спектрального оператора T, *не принадлежащего скалярному типу*, может не быть спектральным оператором, и выведем достаточные условия на функцию f, обеспечивающие спектральность $f(T)$. Будет показано, что связь между спектральным оператором общего вида и его скалярной частью в случае неограниченных операторов является не столь жесткой, как для ограниченных операторов. Глава завершается теоремой, устанавливающей достаточные условия спектральности неограниченного оператора; эти условия будут использованы при доказательстве основного результата следующей главы.

Заметим, что в этой главе отсутствует теория расширений спектральных операторов, аналогичная развитой в § XII.4. Подобное исследование, несомненно, было бы полезно для изучения несамосопряженных дифференциальных операторов, и его отсутствие является серьезным пробелом.

2. Неограниченные спектральные операторы

1. Определение. Пусть $\mathscr{B}$ означает σ-поле борелевских подмножеств комплексной плоскости. Пусть T — линейный оператор, область определения и область значений которого содержатся в комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда оператор T называется *спектральным*, если он замкнут и существует такая регулярная счетно аддитивная спектральная мера E, определенная на $\mathscr{B}$, что

(i) $\mathfrak{D}(T) \supseteq E(\sigma)\mathfrak{X}$, если σ ограничено,

(ii) $E(\sigma)\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T)$

и

$$TE(\sigma)x = E(\sigma)Tx, \qquad x \in \mathfrak{D}(T), \quad \sigma \in B,$$

(iii) спектр сужения $T \mid E(\sigma)\mathfrak{X}$, определенного на множестве $\mathfrak{D}(T) \cap E(\sigma)\mathfrak{X}$, удовлетворяет условию

$$\sigma(T \mid E(\sigma)\mathfrak{X}) \subseteq \bar{\sigma}, \qquad \sigma \in \mathscr{B}.$$

Спектральная мера E называется *разложением единицы оператора T*.

Ясно, что спектральный оператор замкнут и область его определения плотна в $\mathfrak{X}$.

Мы покажем, что разложение единицы спектрального оператора определяется однозначно. Это делается в следующей далее теореме 5; предварительные леммы основаны на тех же соображениях, которые были использованы в случае ограниченных спектральных операторов.

2. Лемма. *Если σ — борелевское множество, T — спектральный оператор и E — его разложение единицы, то сужение $T \mid E(\sigma)\mathfrak{X}$ оператора T на $E(\sigma)\mathfrak{X}$ является спектральным оператором, а его разложение единицы есть сужение E на подпространство $E(\sigma)\mathfrak{X}$. Если множество σ ограничено, то оператор $T \mid E(\sigma)\mathfrak{X}$ ограничен.*

Доказательство. Если множество σ ограничено, то, согласно определению 1(i), сужение R оператора T на $E(\sigma)\mathfrak{X}$ является замкнутым оператором, определенным на всем пространстве $E(\sigma)\mathfrak{X}$; из теоремы о замкнутом графике следует, что R ограничен. Если F — сужение E на подпространство $E(\sigma)\mathfrak{X}$, то из определения 1(ii) вытекает, что $E(e)\mathfrak{D}(R) \subseteq \mathfrak{D}(R)$ и $F(e)R \subseteq RF(e)$ для любого борелевского множества e. Следовательно, мы можем утверждать, применяя обозначения определения 1(iii), что $R \mid E(e)E(\sigma)\mathfrak{X} = T \mid E(e\sigma)\mathfrak{X}$, откуда, согласно определению 1(iii), $\sigma(R \mid E(e)E(\sigma)\mathfrak{X}) \subseteq \overline{e\sigma} \subseteq \bar{\sigma}$. Таким образом, R — спектральный оператор, имеющий указанное в лемме разложение единицы, ч. т. д.

Следующая лемма является аналогом теоремы XV.3.4 для неограниченных операторов.

3. Лемма. *Пусть T — спектральный оператор, E — его разложение единицы и σ — компактное подмножество плоскости. Тогда вектор x принадлежит множеству $E(\sigma)\mathfrak{X}$ в том и только в том случае, если существует вектор-функция y_λ, аналитическая при $\lambda \notin \sigma$ и удовлетворяющая равенству*

$$(\lambda I - T)\, y_\lambda = x, \quad \lambda \notin \sigma.$$

Доказательство. Предположим, что существует вектор-функция y_λ, $\lambda \notin \sigma$, обладающая указанными свойствами. Пусть e — произвольное ограниченное борелевское множество. Тогда, согласно определению 1(ii), мы имеем

$$(\lambda I - T)\, E(e)\, y_\lambda = Ee(x), \quad \lambda \notin \sigma.$$

Отсюда следует (в обозначениях определения 1(iii) и теоремы XV.3.4), что спектр $\sigma(E(e)x)$ элемента $E(e)x$ из $E(e)\mathfrak{X}$ относительно оператора $T \mid E(e)\,\mathfrak{X}$ содержится в σ. Отсюда, применяя лемму 2 и теорему XV.3.4, получаем, что $E(\sigma)\,E(e)\,x = E(e)\,x$. Переходя в этом равенстве к пределу, когда e пробегает расширяющуюся последовательность ограниченных борелевских подмножеств, объединение которых есть вся комплексная плоскость, получаем равенство $E(\sigma)\,x = x$, так что $x \in E(\sigma)\,\mathfrak{X}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $x \in E(\sigma)\,\mathfrak{X}$. Согласно определению 1(iii), определена резольвента $R(\lambda; T \mid E(\sigma)\,\mathfrak{X})$, аналитически зависящая от λ при $\lambda \notin \sigma$. Полагая $y_\lambda = R(\lambda; T \mid E(\sigma)\,\mathfrak{X})\,x$, мы получаем $(\lambda I - T)\, y_\lambda = x$ при $\lambda \notin \sigma$, ч. т. д.

4. Следствие. *Пусть T — замкнутый спектральный оператор с разложением единицы E и A — ограниченный оператор, удовлетворяющий условиям $A\,\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T)$, $ATx = TAx$ для всех x из $\mathfrak{D}(T)$. Тогда $AE(e) = E(e)\,A$ для любого борелевского множества e.*

Доказательство. Пусть σ — компактное множество и x — вектор из $E(\sigma)\,\mathfrak{X}$. Тогда в силу леммы 3 существует такая вектор-функция, аналитическая при $\lambda \notin \sigma$, что

$$(\lambda I - T)\, y_\lambda = x, \quad \lambda \notin \sigma.$$

Отсюда

$$(\lambda I - T)\, Ay_\lambda = Ax, \quad \lambda \notin \sigma.$$

Из леммы 3 вытекает, что Ax лежит в $E(\sigma)\,\mathfrak{X}$. Но тогда $E(\sigma)\,AE(\sigma) = AE(\sigma)$, и потому $(I - E(\sigma))\,AE(\sigma) = 0$ для любого компактного множества σ. Если e — произвольное открытое множество, то, взяв возрастающую последовательность компактных множеств σ, объединение которых есть e, и переходя к пределу в полученном равенстве, мы получим, что $E(e)\,AE(e) = AE(e)$.

Таким образом,

$$AE(\sigma) = E(\sigma)\,AE(\sigma) = E(\sigma)\,AE(\sigma) + (I - E(\sigma'))\,AE(\sigma') = \\ = E(\sigma)\,A\,(E(\sigma) + E(\sigma')) = E(\sigma)\,A$$

для каждого компактного множества σ. Так как совокупность всех множеств e, для которых $E(e)\,A = AE(e)$ есть, очевидно, σ-поле, то $E(e)A = AE(e)$ для любого борелевского множества e, ч. т. д.

5. Теорема. *Разложение единицы замкнутого спектрального оператора определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть E, E_1 — два разложения единицы замкнутого спектрального оператора T. Согласно следствию 4, операторы $E(e)$ и $E_1(f)$ коммутируют для любой пары борелевских множеств e и f. Пусть σ — компактное множество. Тогда подпространство $E_1(\sigma)\,\mathfrak{X}$ инвариантно относительно проектора $E(e)$. Согласно лемме 2, сужение S оператора T на подпространство $E_1(\sigma)\,\mathfrak{X}$ является ограниченным спектральным оператором, разложение единицы которого есть сужение F_1 оператора E_1 на подпространство $E_1(\sigma)\,\mathfrak{X}$. Мы покажем несколько позже, что сужение F оператора E на $E_1(\sigma)\,\mathfrak{X}$ также является разложением единицы для оператора S. Как только это будет сделано, мы применим теорему единственности, сформулированную в следствии XV.3.8, и получим, что $F_1 = F$, откуда $E_1(e)\,E(\sigma) = E(e)\,E(\sigma)$ для любого борелевского множества e и любого компактного множества σ. Так как $E(\sigma)$ счетно аддитивно по σ, мы получим отсюда равенство $E_1(e) = E(e)$, которое доказывает требуемую единственность.

Итак, для доказательства теоремы достаточно показать, что F есть разложение единицы для оператора S. Ясно, что $F(e)\,S = SF(e)$ для любого борелевского множества e, и нам остается только проверить, что спектр сужения $S \mid E(e)\,E_1(\sigma)\,\mathfrak{X} = T \mid E(e)\,E_1(\sigma)\,\mathfrak{X}$ полностью содержится в $\bar{e}$.

Из определения 1(iii) следует, что если $\lambda \notin \bar{e}$, то оператор $\lambda I - T$ является взаимно однозначным отображением подпространства $E(\sigma)\,\mathfrak{X}$ в себя. Таким образом, достаточно доказать, что если $\lambda \notin \bar{e}$, то оператор $\lambda I - T$ взаимно однозначно отображает пространство $E(e)\,E_1(\sigma)\,\mathfrak{X} = E_1(\sigma)\,E(e)\,\mathfrak{X}$ на себя. Отсюда вытекает, что оператор $(\lambda I - T \mid E(e)\,E_1(\sigma)\,\mathfrak{X})^{-1}$ всюду определен, замкнут и, следовательно, ограничен, так что $\lambda \notin \sigma(T \mid E(e)\,E_1(\sigma)\,\mathfrak{X})$. Но, в силу определения 1, если $\lambda \notin \bar{e}$, то $(\lambda I - T)(\mathfrak{D}(T) \cap E(e)\mathfrak{X}) = E(e)\,\mathfrak{X}$, откуда

$$E_1(\sigma)\,E(e)\,\mathfrak{X} = E_1(\sigma)\,(\lambda I - T)\,(\mathfrak{D}(T) \cap E(e)\,\mathfrak{X}) = \\ = (\lambda I - T)\,E_1(\sigma)\,(\mathfrak{D}(T) \cap E(e)\,\mathfrak{X}) \subseteq \\ \subseteq (\lambda I - T)\,E_1(\sigma)\,E(e)\,\mathfrak{X},$$

снова в силу определения 1, ч. т. д.

Возвращаясь к теории функций от неограниченных спектральных операторов, мы начнем анализ со следующей полезной общей леммы:

6. Лемма. *Пусть Σ есть σ-поле подмножеств некоторого множества S и E — счетно аддитивная спектральная мера в B-пространстве $\mathfrak{X}$, определенная на Σ. Пусть Σ_0 — подсемейство σ-поля Σ, удовлетворяющее следующим условиям: 1) если $\{e_\alpha\}$ — любой конечный набор множеств из Σ_0, то $\bigcup\limits_\alpha e_\alpha$ — также элемент семейства Σ_0; 2) если $e \in \Sigma_0$ и e_1 — подмножество множества e, принадлежащее σ-полю Σ, то $e_1 \in \Sigma_0$. Пусть Q_0 — линейный оператор, определенный на множестве $\bigcup\limits_{e \in \Sigma_0} E(e)\mathfrak{X}$. Предположим, что оператор $Q_0E(e)$ ограничен для любого e из Σ_0 и*

$$E(e)Q_0x = Q_0E(e)x, \qquad e \in \Sigma_0, \qquad x \in \mathfrak{D}(Q_0).$$

Выберем некоторую возрастающую последовательность $\{e_n\}$ из Σ_0, удовлетворяющую условию $E\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n\right) = I$, и определим оператор Q равенствами

$$\mathfrak{D}(Q) = \{x \mid \lim_{n\to\infty} Q_0E(e_n)x \text{ существует}\},$$

$$Q(x) = \lim_{n\to\infty} Q_0E(e_n)x, \quad x \in \mathfrak{D}(Q).$$

Тогда множество $\mathfrak{D}(Q)$ плотно в $\mathfrak{X}$, оператор Q замкнут и не зависит от выбора возрастающей последовательности множеств $\{e_n\}$ из Σ_0, удовлетворяющей условию $E\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n\right) = I$.

Доказательство. Очевидно, что Q — линейный оператор. Если $x = E(e_n)y$, где $y \in \mathfrak{X}$, то $Q_0E(e_m)x = Q_0x$ для $m \geqslant n$, так что $\lim\limits_{m\to\infty} Q_0E(e_m)x = Q_0x = Q_0E(e_n)x$. Следовательно, $x \in \mathfrak{D}(Q)$. Итак, $\mathfrak{D}(Q) \supseteq E(e_n)\mathfrak{X}$ для любого n, и поскольку $E\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n\right) = I$, то $\mathfrak{D}(Q)$ плотно в $\mathfrak{X}$.

Пусть z — любой вектор из $\mathfrak{D}(Q)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} Q_0E(e_n)E(e)z = \lim_{n\to\infty} E(e)Q_0E(e_n)z = E(e)Qz, \quad e \in \Sigma_0,$$

и, следовательно, $QE(e)z = E(e)Qz$ для любого $e \in \Sigma_0$ и любого $z \in \mathfrak{D}(Q)$. Ясно, кроме того, что $QE(e_n)z = Q_0E(e_n)z$ для любого $n \geqslant 1$ и любого $z \in \mathfrak{X}$.

Пусть теперь $x_m \in \mathfrak{D}(Q)$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$ и $\lim\limits_{m\to\infty} Qx_m = y$. Тогда с помощью тех же рассуждений, что и в предыдущем абзаце, мы получаем, что

$$y = \lim_{m\to\infty} Qx_m = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} Q_0E(e_n)x_m = \\ = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} E(e_n)Qx_m.$$

Поскольку нормы $|E(e_n)|$ равномерно ограничены (см. теорему о равномерной ограниченности и следствие IV.10.2), $\lim\limits_{m\to\infty} E(e_n)Qx_m = E(e_n)y$ равномерно по n. Из теоремы Мура — Смита о перестановке предельных переходов (I.7.6) и ограниченности $Q_0E(e_n)$ вытекает, что

$$y = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} E(e_n)Qx_m = \\ = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} Q_0E(e_n)x_m = \\ = \lim_{n\to\infty} Q_0E(e_n)x.$$

Таким образом, $x \in \mathfrak{D}(Q)$ и $y = Qx$. Мы доказали, что Q замкнут.

Пусть $\{\tilde{e}_n\}$ — другая возрастающая последовательность элементов семейства Σ_0, $E\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{e}_n\right) = I$ и оператор $\tilde{Q}$ определен равенствами

$$\mathfrak{D}(\tilde{Q}) = \{x \mid \lim_{n\to\infty} Q_0E(\tilde{e}_n)x \text{ существует}\},$$
$$\tilde{Q}x = \lim_{n\to\infty} Q_0E(\tilde{e}_n)x, \qquad x \in \mathfrak{D}(\tilde{Q}).$$

Мы должны доказать, что $Q = \tilde{Q}$. Если $x \in \mathfrak{D}(\tilde{Q})$, то $\lim\limits_{n\to\infty} E(\tilde{e}_n)x = x$ и, повторяя рассуждения, уже примененные выше, получаем

$$\tilde{Q}x = \lim_{n\to\infty} Q_0E(\tilde{e}_n)x = \lim_{n\to\infty} QE(\tilde{e}_n)x.$$

Так как Q замкнут, то $x \in \mathfrak{D}(Q)$ и $Qx = \tilde{Q}x$. Мы показали, что $\tilde{Q} \subseteq Q$, а из соображений симметрии $Q \subseteq \tilde{Q}$, ч. т. д.

7. Следствие. *Пусть выполнены предположения леммы* 6. *Тогда* $E(e)\mathfrak{D}(Q) \subseteq \mathfrak{D}(Q)$ *и* $QE(e)x = E(e)Qx$ *для любого* x *из* $\mathfrak{D}(Q)$ *и любого* e *из* Σ.

Доказательство. Пусть последовательность $\{e_n\}$ из Σ_0 такая же, как в предыдущем доказательстве, и x — вектор из $\mathfrak{D}(Q)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} E(e)E(e_n)x = E(e)x$ и

$$\lim_{n\to\infty} QE(e_n)E(e)x = \lim_{n\to\infty} QE(e_ne)x = \lim_{n\to\infty} E(e_ne)Qx = E(e)Qx,$$

согласно второй части доказательства предыдущей леммы. Так как Q замкнут, то $E(e)x$ содержится в $\mathfrak{D}(Q)$ и $E(e)Qx = QE(e)x$, ч. т. д.

Теперь можно определить функции от неограниченных спектральных операторов. Пусть T — замкнутый спектральный оператор, E — его разложение единицы и f — функция, аналитическая на открытом множестве U, причем $E(\sigma(T) - U) = 0$. Пусть e — ограниченное борелевское множество, замыкание которого лежит в U. Согласно лемме 2, $T \mid E(e)\mathfrak{X}$ — ограниченный линейный оператор, спектр которого содержится в U. Применяя функциональное исчисление, развитое в § XV.5, или теорию из § VII.3, мы можем определить $f(T \mid E(e)\mathfrak{X})$.

Теперь заметим, что если x лежит в $E(e)\mathfrak{X} \cap E(\tilde{e})\mathfrak{X}$, то $f(T \mid E(e)\mathfrak{X})x = f(T \mid E(\tilde{e})\mathfrak{X})x$. Поскольку $e \supseteq e\tilde{e} \subseteq \tilde{e}$, достаточно проверить это соотношение для $\tilde{e} \subseteq e$. В этом случае наше утверждение сразу следует из определения аналитической функции от ограниченного оператора (см. VII.3.9), так как

$$R(\lambda; T \mid E(\tilde{e})\mathfrak{X})x = R(\lambda; T \mid E(e)\mathfrak{X})x, \quad \lambda \notin \bar{\tilde{e}}, \quad x \in E(\tilde{e})\mathfrak{X}.$$

Итак, $f(T \mid E(e)\mathfrak{X})x = f(T \mid E(\tilde{e})\mathfrak{X})x$ для любого вектора x из $E(e)\mathfrak{X} \cap E(\tilde{e})\mathfrak{X}$. Но тогда для функции f, аналитической в открытой области U, мы можем построить линейный оператор Q_0 на множестве $\bigcup\limits_{e} E(e)\mathfrak{X}$, где e пробегает все ограниченные борелевские множества, замыкания которых лежат в U, следующей формулой:

$$Q_0 x = f(T \mid E(e)\mathfrak{X})x, \qquad x \in E(e)\mathfrak{X}.$$

Используя технику, примененную в лемме 6, можно определить $f(T)$ следующим образом:

8. Определение. Пусть T — спектральный оператор, E — его разложение единицы и f — функция, аналитическая в открытой области U, причем $E(U) = I$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная возрастающая последовательность ограниченных борелевских множеств, замыкания которых содержатся в U, и $E(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n) = I$. Оператор $f(T)$ определяется равенствами

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \{x \mid \lim_{n\to\infty} f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)x \text{ существует}\},$$

$$f(T)x = \lim_{n\to\infty} f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)x, \qquad x \in \mathfrak{D}(f(T)).$$

9. Теорема. *Построенный в определении 8 оператор $f(T)$ линеен, замкнут и не зависит от выбора последовательности борелевских множеств $\{e_n\}$, использованной для его определения.*

(i) *Если e — любое борелевское множество и x — любой элемент из $\mathfrak{D}(f(T))$, то $E(e)\mathfrak{D}(f(T)) \subseteq \mathfrak{D}(f(T))$ и $E(e)f(T)x = f(T)E(e)x$.*

(ii) *Если e — произвольное борелевское множество, то $f(T \mid E(e)\mathfrak{X}) = f(T) \mid E(e)\mathfrak{X}$. Если, в частности, e — ограниченное борелевское множество и его замыкание содержится в U, то оператор $f(T) \mid E(e)\mathfrak{X}$ ограничен.*

(iii) *Если множество Z нулей функции f имеет спектральную меру нуль (т. е. $E(Z) = 0$), то $f(T)$ обратим и $f(T)^{-1} = (1/f)(T)$.*

(iv) *Если f — многочлен, то определение* 8 *согласуется с определением* VII.9.6.

(v) *Если T ограничен и f аналитична на $\sigma(T)$, то $f(T)$ ограничен и определение* 8 *согласуется в этом случае с определением* VII.3.9. *Если f аналитична на $\sigma(T)$ и на бесконечности, то $f(T)$ ограничен.*

Кроме того, если g — другая функция, аналитическая в открытой области V, причем $E(V) = I$, то

(vi) $$\mathfrak{D}(g(T)+f(T)) = \mathfrak{D}((g+f)(T)) \cap \mathfrak{D}(g(T))$$

и

$$g(T)x + f(T)x = (g+f)(T)x \text{ для всех } x \text{ из } \mathfrak{D}(g(T)+f(T)).$$

(vii) $$\mathfrak{D}(g(T)f(T)) = \mathfrak{D}((gf)(T)) \cap \mathfrak{D}(f(T))$$

и

$$g(T)f(T)x = (gf)(T)x \text{ для всех } x \text{ из } \mathfrak{D}(g(T)f(T)).$$

(viii) *Если $\alpha \neq 0$, то $\mathfrak{D}((\alpha f)(T)) = \mathfrak{D}(f(T))$ и*

$$(\alpha f)(T)x = \alpha f(T)x \quad \text{для всех } x \text{ из } \mathfrak{D}(f(T)).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из определения 8, трех предшествующих ему абзацев и леммы 6. Утверждение (i) вытекает из следствия 7. Докажем утверждение (ii), предполагая сначала, что e — ограниченное борелевское множество, замыкание которого лежит в U. Можно считать, что $e = e_1$, ибо $f(T)$ не зависит от выбора последовательности $\{e_n\}$. Если x принадлежит $E(e)\mathfrak{X}$, то в силу рассуждений абзаца, предшествующего определению 8, $f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})x = f(T \mid E(e)\mathfrak{X})x$ при $n \geqslant 1$, откуда $f(T)x = \lim_{n\to\infty} f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})x = f(T \mid E(e)\mathfrak{X})x$. Этим доказано утверждение (ii) для случая, когда e — ограниченное борелевское множество, замыкание которого лежит в U.

Чтобы доказать утверждение (ii) в общем случае, возьмем борелевское множество e и заметим, что, согласно лемме 2, $T \mid E(e)\mathfrak{X}$ — спектральный оператор, разложение единицы которого (обозначим его через F) есть сужение E на $E(e)\mathfrak{X}$. Ясно, что $F(U) = I$, и, следовательно, можно определить оператор $f(T \mid E(e)\mathfrak{X})$. Пусть $\{e_n\}$ — такая возрастающая последовательность ограниченных борелевских множеств, что замыкание каждого e_n содержится в U и $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n\right) = I$. Тогда $F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n\right) = I$. Возьмем вектор x из $E(e)\mathfrak{X}$, и пусть x лежит в $\mathfrak{D}(f(T \mid E(e)\mathfrak{X}))$. Так как для ограниченных борелевских множеств, замыкание которых лежит в U, утверждение уже доказано, то, согласно определению 8,

$$\begin{aligned} f(T \mid E(e)\mathfrak{X})x &= \lim_{n\to\infty} f(T \mid F(e_n)E(e)\mathfrak{X})F(e_n)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} f(T \mid E(ee_n)\mathfrak{X})E(e_n)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} f(T)E(e_n)x. \end{aligned}$$

Поскольку $E(e_n)x \to x$ и $f(T)$ замкнут, x лежит в $\mathfrak{D}(f(T))$ и $f(T)x = f(T \mid E(e)\mathfrak{X})x$. Покажем, что верно и обратное. Для этого возьмем такой x из $E(e)\mathfrak{X}$, что x лежит в $\mathfrak{D}(f(T))$. Так как $E(e)f(T)x = f(T)E(e)x = f(T)x$, то $f(T)x$ принадлежит $E(e)\mathfrak{X}$. Отсюда, используя утверждение (i) и тот факт, что утверждение (ii) уже доказано для ограниченных борелевских множеств, замыкание которых лежит в U, мы получаем:

$$\begin{aligned} f(T)x &= \lim_{n\to\infty} f(T)E(ee_n)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} f(T \mid E(ee_n)\mathfrak{X})E(e_n)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} f(T \mid F(e_n)E(e)\mathfrak{X})F(e_n)x. \end{aligned}$$

Из определения 8 вытекает, что x лежит в $\mathfrak{D}(f(T \mid E(e)\mathfrak{X}))$ и что $f(T \mid E(e)\mathfrak{X})x = f(T)x$. Тем самым утверждение (ii) доказано и в общем случае.

Теперь докажем утверждение (vii). Пусть x лежит в $\mathfrak{D}(g(T)f(T))$. Так как $E(\sigma(T - (U \cap V)) = 0$, то без ограничения общности можно считать, что $U = V$. Пусть $\{e_n\}$ — такая возрастающая последовательность ограниченных борелевских множеств, что замыкание каждого e_n содержится в U и $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n\right) = I$. Так как $T \mid E(e_n)\mathfrak{X}$ — ограниченный оператор, можно применить функциональное исчисление для ограниченных операторов (см. VII.3.10), откуда, используя (i) и (ii), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (gf)(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)x &= \lim_{n\to\infty} g(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} g(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)f(T)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} E(e_n)g(T)f(T)x = g(T)f(T)x. \end{aligned}$$

Таким образом, из определения 8 следует, что x лежит в $\mathfrak{D}(gf\,(T))$ и $(gf)\,(T)\,x = g\,(T)\,f\,(T)\,x$.

Возьмем теперь элемент x из $\mathfrak{D}(f\,(T)) \cap \mathfrak{D}((gf)\,(T))$. Тогда, используя доказанное утверждение, а также утверждения (i) и (ii), мы видим, что

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g\,(T\,|\,E\,(e_n)\,\mathfrak{X})\,E\,(e_n)\,f\,(T)\,x &= \lim_{n\to\infty} g\,(T)\,E\,(e_n)\,f\,(T)\,x = \\ &= \lim_{n\to\infty} g\,(T)\,f\,(T)\,E\,(e_n)\,x = \\ &= \lim_{n\to\infty} (gf)\,(T)\,E\,(e_n)\,x = \\ &= \lim_{n\to\infty} E\,(e_n)\,(gf)\,(T)\,x = (gf)\,(T)\,x,\end{aligned}$$

откуда следует, что x принадлежит $\mathfrak{D}(g\,(T)\,f\,(T))$ и $g\,(T)\,f\,(T)\,x = (gf)\,(T)\,x$. Этим доказано утверждение (vii).

Чтобы доказать (iii), поступим следующим образом. Пусть $g = 1/f$. Тогда, согласно (vii),

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}\,(f\,(T)\,g\,(T)) = \mathfrak{D}\,(g\,(T)); \qquad \mathfrak{D}\,(g\,(T)\,f\,(T)) = \mathfrak{D}\,(f\,(T));\\ &f\,(T)\,g\,(T)\,x = x, \qquad x \in \mathfrak{D}\,(g\,(T));\\ &g\,(T)\,f\,(T)\,x = x, \qquad x \in \mathfrak{D}\,(f\,(T)).\end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что операторы $f\,(T)$ и $g\,(T)$ взаимно однозначны и что область значений $f\,(T)$ содержится в области определения $g\,(T)$, и обратно. Если x лежит в $\mathfrak{D}(f\,(T))$, то $x = g\,(T)\,f\,(T)\,x$, так что x принадлежит области значений $\mathfrak{R}\,(g\,(T))$ оператора $g\,(T)$. Итак, $\mathfrak{R}\,(g\,(T)) = \mathfrak{D}\,(f\,(T))$. Таким же образом доказывается равенство $\mathfrak{R}\,(f\,(T)) = \mathfrak{D}\,(g\,(T))$. Тем самым утверждение (iii) доказано.

Утверждение (viii) очевидно.

Чтобы доказать (vi), возьмем элемент x из $\mathfrak{D}(f\,(T) + g\,(T))$ и такую же, как выше, последовательность $\{e_n\}$. Так как оператор $T\,|\,E\,(e_n)\,\mathfrak{X}$ ограничен, то, применяя утверждения (i), (ii) и функциональное исчисление для ограниченных операторов (см. VII.3.10), получаем

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} (f+g)\,(T\,|\,E\,(e_n)\,\mathfrak{X})\,E\,(e_n)\,x = \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} \{f\,(T\,|\,E\,(e_n)\,\mathfrak{X})\,E\,(e_n)\,x + g\,(T\,|\,E\,(e_n)\,\mathfrak{X})\,E\,(e_n)\,x\} = \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} E\,(e_n)\,\{f\,(T)\,x + g\,(T)\,x\} = \\ &\qquad = f\,(T)\,x + g\,(T)\,x.\end{aligned}$$

Применяя теперь определение 8, находим, что x лежит в $\mathfrak{D}\,((f+g)\,(T))$ и что $(f+g)\,(T)\,x = f\,(T)\,x + g\,(T)\,x$. Итак, $\mathfrak{D}\,((f+g)\,(T)) \supseteq \mathfrak{D}\,(f\,(T) + g\,(T))$, и так как $\mathfrak{D}\,(f\,(T)) \supseteq \mathfrak{D}\,(f(T) + g(T))$, то $\mathfrak{D}\,(f\,(T) + g\,(T)) \subseteq \mathfrak{D}\,((f+g)\,(T)) \cap \mathfrak{D}\,(f\,(T))$.

Из тех же соображений, используя (vii), находим, что

$$\mathfrak{D}(g(T)) \supseteq \mathfrak{D}((f+g)(T)-f(T)) = \mathfrak{D}((f+g)(T) \cap \mathfrak{D}(f(T)),$$

а так как $\mathfrak{D}(f(T)+g(T)) = \mathfrak{D}(f(T)) \cap \mathfrak{D}(g(T))$, то $\mathfrak{D}(f(T)+ + g(T)) \supseteq \mathfrak{D}((f+g)(T)) \cap \mathfrak{D}(f(T))$. Этим доказано утверждение (vi).

Утверждение (iv) без труда выводится из (vi), (vii) и определения VII.9.6.

Остается доказать утверждение (v). Пусть сначала T ограничен и f аналитична на $\sigma(T)$. Тогда $\sigma(T)$ — компактное подмножество из U и, согласно следствию XV.3.5, $E(\sigma(T)) = I$. Поэтому без потери в общности можно взять в качестве e_n множество $\sigma(T)$ (для каждого $n \geqslant 1$). Тогда в силу определения 8 $f(T)$ совпадает с $f(T \mid E(\sigma(T))\mathfrak{X})E(\sigma(T))$, а так как $E(\sigma(T)) = I$, то $f(T)$ совпадает с оператором $f(T)$, определенным в VII.3.9. Итак, первая часть утверждения (v) доказана.

Для доказательства второй части этого утверждения достаточно показать, поскольку $f(T)$ замкнут, что $f(T)$ определен всюду (см. теорему о замкнутом графике II.2.4). Согласно (ii), $\mathfrak{D}(f(T)) \supseteq \supseteq E(e)\mathfrak{X}$, где e — любое ограниченное борелевское множество. Следовательно, достаточно проверить, что $\mathfrak{D}(f(T)) \supseteq E(b_r)\mathfrak{X}$, где r — некоторое положительное число и $b_r\{z \mid |z| \geqslant r\}$. Пусть r выбрано столь большим, что b_{r-2} полностью содержится в области аналитичности функции f. Из утверждения (ii) следует, что достаточно проверить включение $\mathfrak{D}(f(T \mid E(b_r)\mathfrak{X})) \supseteq E(b_r)\mathfrak{X}$. Так как, согласно лемме 2, оператор $T \mid E(b_r)\mathfrak{X}$ спектрален и его разложение единицы F удовлетворяет условию $F(b_r) = I$, то в дальнейшем достаточно рассмотреть тот случай, когда $T = T \mid E(b_r)\mathfrak{X}$ и $E(b_r) = I$.

Пусть C — окружность $|z| = r-1$. Возьмем число $R > r$ и через C_R обозначим окружность $|z| = R$. Предположим, что C_R ориентирована в положительном направлении, а C — в отрицательном. Тогда, согласно VII.3.9,

$$[*] \qquad f(S) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_C - \int_{C_R}\right\} f(\lambda)(\lambda I - S)^{-1}\,d\lambda$$

для любого ограниченного оператора S, спектр которого содержится между C и C_R. Замечая, что

$$(\lambda I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}S^n$$

для достаточно больших λ (см. VII.3.4), мы можем положить $R \to \infty$ в формуле [*], откуда

$$f(S) = -f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)(\lambda I - S)^{-1}\,d\lambda.$$

Пусть $\{e_n\}$ — возрастающая последовательность компактных подмножеств из b_r, объединение которых есть b_r. Тогда, используя предыдущую формулу и утверждение (ii), мы видим, что

$$f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X}) = \\ = -f(\infty) I \mid E(e_n)\mathfrak{X} + \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)\{(\lambda I - T)^{-1} \mid E(e_n)\mathfrak{X}\}\, d\lambda = \\ = \left\{ -f(\infty) I + \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)(\lambda I - T^{-1})\, d\lambda \right\} \Big| E(e_n)\mathfrak{X}.$$

Так как оператор

$$-f(\infty) I + \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\, d\lambda,$$

очевидно, ограничен, из последнего равенства видно, что предел $\lim_{n\to\infty} f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})\, E(e_n)\, x$ существует для всех x из $\mathfrak{X}$, чем доказано равенство (v), ч. т. д.

В теореме 9 мы построили операционное исчисление для произвольного спектрального оператора. Функция f, по которой мы получили оператор $f(T)$, предполагалась аналитической. Мы покажем сейчас, что в случае спектрального оператора скалярного типа можно взять более широкий класс функций. Начнем с распространения функционального исчисления, построенного в гл. XII (см. XII.2.5—XII.2.9), на произвольные B-пространства.

10. Определение. Пусть S — множество, Σ — σ-поле подмножеств из S и E — сильно счетно аддитивная спектральная мера, определенная на Σ. Пусть f — измеримая функция, определенная почти всюду на S (в смысле меры E). Тогда оператор $T(f)$ определяется равенствами

$$\mathfrak{D}(T(f)) = \{x \mid \lim_n T(f_n)\, x \text{ существует}\},$$

где

$$f_n(\lambda) = f(\lambda) \quad \text{при} \quad |f(\lambda)| \leqslant n; \qquad f_n(\lambda) = 0 \quad \text{при} \quad |f(\lambda)| > n$$

и

$$T(f_n) = \int_S f_n(s)\, E(ds); \qquad T(f)\, x = \lim_{n\to\infty} (f_n)\, x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T(f)).$$

→ 11. Теорема. *Пусть* (S, Σ, E), f *и* $T(f)$ — *объекты, указанные в определении* 10. *Тогда* $T(f)$ — *замкнутый оператор с плотной областью определения. Кроме того,*

(a) $\mathfrak{D}(T(f)) = \mathfrak{D}(T(|f(\cdot)|))$;

(b) $\mathfrak{D}(T(f)) \subseteq \mathfrak{D}(T(g))$, *если* $|f(s)| \geqslant |g(s)|$ *почти всюду на* S *(в смысле меры* E*)*;

(c) *$T(f)$ ограничен в том и только в том случае, если f является E-существенно ограниченной на множестве S и*

$$E\text{-ess}\sup_{s\in S}|f(s)|\leqslant|T(f)|\leqslant 4M\, E\text{-ess}\sup_{s\in S}|f(s)|;$$

(d) $T(\alpha f)=\alpha T(f)$;

(e) $T(f+g)\supseteq T(f)+T(g)$ *и*

$$\mathfrak{D}(T(f)+T(g))=\mathfrak{D}(T(f+g))\cap\mathfrak{D}(T(f));$$

(f) $T(fg)\supseteq T(f)T(g);\quad \mathfrak{D}(T(f)T(g))=\mathfrak{D}(T(fg))\cap\mathfrak{D}(T(g))$;

(g) $T(f)E(e)\supseteq E(e)T(f)$ *для любого e из Σ.*

(h) *$T(f)$ имеет обратный тогда и только тогда, когда $E(f^{-1}(0))=0$ и в этом случае $T(f)^{-1}=T(1/f)$;*

(i) $$x^*T(f)x=\int_S f(s)\,x^*E(ds)\,x,\quad x\in\mathfrak{D}(T(f)),\quad x^*\in\mathfrak{X}^*$$

Доказательство. Для доказательства того, что $T(f)$ замкнут и имеет плотную область определения, применим лемму 6. В качестве семейства Σ_0 леммы 6 мы возьмем семейство всех таких множеств e из Σ, на которых f ограничена. Оператор Q_0 с областью определения $\bigcup_{e\in\Sigma_0}E(e)\mathfrak{X}$, указанный в лемме 6, определяется равенством

$$Q_0x=T(f\chi_e)x,\quad x\in E(e)\mathfrak{X},\quad e\in\Sigma_0.$$

Так как функция $f\chi_e$ ограничена, то оператор $T(f\chi_e)$ ограничен. Если элемент x лежит в $E(\tilde{e})\mathfrak{X}\cap E(e)\mathfrak{X}$, то, применяя операционное исчисление для ограниченных функций (см. XVII.2.10), получим

$$T(f\chi_e)x=T(f\chi_e)E(\tilde{e})x=T(f\chi_{e\tilde{e}})x=$$
$$=T(f\chi_{\tilde{e}})E(e)x=T(f\chi_{\tilde{e}})x,$$

так что оператор Q_0 определен корректно на $\bigcup_{e\in\Sigma_0}E(e)\mathfrak{X}$. Из леммы 6 следует, что оператор $T(f)$ замкнут и определен на плотном множестве из $\mathfrak{X}$. Из следствия 7 вытекает также утверждение (g).

Утверждение (d) очевидно. Для доказательства утверждения (c) возьмем множество $e\in\Sigma_0$ и вектор $x\in E(e)\mathfrak{X}$. Согласно операционному исчислению для ограниченных функций (см. § XVII.2),

$$T(f\chi_e)x=\lim_{n\to\infty}T(f\chi_e)E(e_n)x=\lim_{n\to\infty}(T\chi_e\chi_{e_n})x=$$
$$=\lim_{n\to\infty}T(f\chi_{e_n})x=T(f)x.$$

Следовательно, для вектора $x\in E(e)\mathfrak{X}$ мы имеем равенство $T(f\chi_e)x=T(f)E(e)x$. С другой стороны, если $x\in E(S-e)\mathfrak{X}$.

то $T(f)E(e)x = 0$ и

$$T(f\chi_e)x = T(f\chi_e^2)x = T(f\chi_e)E(e)x = 0$$

(согласно операционному исчислению для ограниченных функций). Отсюда $T(f\chi_e)x = T(f)E(e)x$ для $x \in E(S - e)$. Итак, во всех случаях $T(f\chi_e)x = T(f)E(e)x$. Если $T(f)$ ограничен, то семейство операторов $T(f\chi_e)$ равномерно ограничено, и в силу теоремы XVII.2.10 семейство функций $f\chi_e$, $e \in \Sigma$, равномерно E-существенно ограничено на множестве S. Таким образом, если $T(f)$ ограничен, то функция f является E-существенно ограниченной на S. Это доказывает часть утверждения (c); оставшаяся часть этого утверждения следует из теоремы XVII.2.10.

Утверждение (a), очевидно, вытекает из (b). Утверждение (b) следует из (f); в самом деле, считая, что $|f(s)| \geqslant |g(s)|$, положим $h(s) = g(s)/f(s)$, если $f(s) \neq 0$, и $h(s) = 0$ в противном случае. Тогда $|h(s)| \leqslant 1$, и, согласно утверждению (c), оператор $T(h)$ ограничен. Так как $g = hf$ и $\mathfrak{D}(T(h))$ совпадает со всем пространством $\mathfrak{X}$, то из (f) выводим, что $\mathfrak{D}(T(f)) = \mathfrak{D}(T(h)T(f)) = \mathfrak{D}(T(f)) \cap \mathfrak{D}(T(g))$, откуда $\mathfrak{D}(T(f)) \supseteq \mathfrak{D}(T(g))$, чем доказано утверждение (b).

Докажем (f). Пусть $e_n = \{s \mid |f(s)| \leqslant n, \ |g(s)| \leqslant n\}$. Из рассуждений, использованных в начале этого доказательства, и леммы 6 следует, что

$$\mathfrak{D}(T(g)) = \{x \mid \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})x \text{ существует}\},$$

$$T(g)x = \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})x, \quad x \in \mathfrak{D}(T(g)),$$

где $T(g\chi_{e_n})$ — *ограниченный* оператор, определенный согласно функциональному исчислению для ограниченных функций (см. XVII.2.10). Аналогичное утверждение верно также для $T(gf)$ и $T(f)$. Следовательно, если x — вектор из $\mathfrak{D}(T(g)T(f))$, то мы получаем (см. XVII.2.10), что

$$\lim_{n\to\infty} T(gf\chi_{e_n})x = \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f\chi_{e_n})E(e_n)x.$$

Отсюда, согласно (g), $T(f)T(E(e_n))z = \lim_{m\to\infty} T(f\chi_{e_m}\chi_{e_n})E(e_n)z = T(f\chi_{e_n})E(e_n)z$ для вектора $z \in \mathfrak{D}(T(f))$. Аналогично, $T(g)E(e_n)z = T(g\chi_{e_n})E(e_n)z$ для $z \in \mathfrak{D}(T(g))$. Используя (g), мы находим, что

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T(gf\chi_{e_n})x &= \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f)E(e_n)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} T(g)E(e_n)T(f)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} E(e_n)T(g)T(f)x = T(g)T(f)x.\end{aligned}$$

Это показывает, что x лежит в $\mathfrak{D}(T(gf))$ и $T(gf)x = T(g)T(f)x$. Обратно, пусть x принадлежит $\mathfrak{D}(T(gf)) \cap \mathfrak{D}(T(f))$. Тогда, применяя (g), получаем

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f)x &= \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})E(e_n)T(f)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f)E(e_n)x = \\ &= \lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})T(f\chi_{e_n})x = \\ &= \lim_{n\to\infty} T(gf\chi_{e_n})x = T(gf)x.\end{aligned}$$

Следовательно, $T(f)x$ лежит в $\mathfrak{D}(T(g))$ и $T(g)T(f)x = T(gf)x$. Этим доказано (f).

Докажем (e). Выберем последовательность $\{e_n\}$, как в предыдущем абзаце. Пусть $x \in \mathfrak{D}(T(f)+T(g))$. Тогда, согласно XVII.2.10,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T((f+g)\chi_{e_n})x &= \lim_{n\to\infty}[T(f\chi_{e_n})x + T(g\chi_{e_n})x] = \\ &= T(f)x + T(g)x,\end{aligned}$$

так что $x \in \mathfrak{D}(T(f+g))$ и $T(f+g)x = T(f)x + T(g)x$. Обратно, если x лежит в $\mathfrak{D}(T(f+g)) \cap \mathfrak{D}(T(g))$, то

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T(g\chi_{e_n})x &= \lim_{n\to\infty} T((f+g)\chi_{e_n} - f\chi_{e_n})x = \\ &= \lim_{n\to\infty}[T((f+g)\chi_{e_n})x - T(f\chi_{e_n})x] = \\ &= T(f+g)x - T(f)x,\end{aligned}$$

так что x лежит в $\mathfrak{D}(T(g))$ и, следовательно, $\mathfrak{D}(T(f)+T(g)) = \mathfrak{D}(T(f)) \cap \mathfrak{D}(T(g))$, т. е. (e) доказано.

Докажем (h). Если $E(f^{-1}(0)) \neq 0$, то найдется такой $x \neq 0$, что $E(f^{-1}(0))x = x$. Тогда, согласно определению 10, x принадлежит $\mathfrak{D}(T(f))$ и $T(f)x = 0$; поэтому $T(f)$ не имеет обратного. Обратно, если $E(f^{-1}(0)) = 0$, то функция $1/f$ определена E-почти всюду и Σ-измерима, и в силу (f) мы имеем

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}(T(f)T(1/f)) = \mathfrak{D}(T(1/f)); \qquad \mathfrak{D}(T(1/f)T(f)) = \mathfrak{D}(T(f));\\ &T(f)T(1/f)x = x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T(1/f));\\ &T(1/f)T(f)x = x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T(f)).\end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что операторы $T(f)$ и $T(1/f)$ взаимно однозначны, а область значений $T(f)$ содержится в области определения $T(1/f)$, и обратно. Если $x \in \mathfrak{D}(T(f))$, то $x = T(1/f)\,T(f)\,x$, так что x лежит в области значений $\mathfrak{R}(T(1/f))$ оператора $T(1/f)$. Итак, $\mathfrak{R}(T(1/f)) = \mathfrak{D}(T(f))$. Аналогично, $\mathfrak{R}(T(f)) = \mathfrak{D}(T(1/f))$. Тем самым доказано (h).

Чтобы доказать (i), возьмем элемент x из $\mathfrak{D}(T(f))$, x^* из $\mathfrak{X}^*$ и через M обозначим верхнюю грань норм $|E(e)|$, где e пробегает Σ. Тогда для каждого подмножества e из e_n

$$\left|\int_e f(s)\,x^*E(ds)\,x\right| = |x^*E(e)\,T(f_n)\,x| = $$
$$= |x^*E(e)\,T(f)\,x| \leqslant M\,|x^*|\,|T(f)\,x|.$$

Отсюда, согласно III.2.20(a) и III.1.5,

$$\int_{e_n} |f(s)|\,v(x^*E(\cdot)\,x,\ ds) \leqslant 4M\,|x^*|\,|T(f)\,x|.$$

Полагая $n \to \infty$, получаем, что f является $x^*E(\cdot)\,x$-интегрируемой. Из теоремы Лебега III.6.16 следует, ввиду ограниченности f_n, что

$$\int_S f(s)\,x^*E(ds)\,x = \lim_{n\to\infty} \int_{e_n} f(s)\,x^*E(ds)\,x =$$
$$= \lim_{n\to\infty} x^* \left\{ \int_{e_n} f(s)\,E(ds) \right\} x =$$
$$= \lim_{n\to\infty} x^*T(f_n)\,x = x^*T(f)\,x, \text{ ч. т. д.}$$

12. Определение. Пусть T — линейный оператор, ограниченный или неограниченный, в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Если существует такое счетно аддитивное разложение единицы E на σ-поле борелевских подмножеств плоскости, что $T = T(f)$ в смысле определения 10, где $f(z) = z$, то T называется *спектральным оператором скалярного типа*. Спектральная мера E называется *разложением единицы оператора* T.

13. Лемма. *Неограниченный спектральный оператор скалярного типа в смысле определения* 12 *является спектральным оператором в смысле определения* 1. *Кроме того, разложения единицы оператора T в смысле определений* 1 *и* 12 *совпадают.*

Доказательство. Мы будем пользоваться обозначениями определений 1 и 12. Пусть T и E — те же, что в определениях 1 и 12. Из определения 10 вытекает, что $\mathfrak{D}(T) \supseteq E(e)\,\mathfrak{X}$ для любого ограниченного борелевского множества e. Согласно теореме 11 (g), $E(e)\,\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T)$ и $TE(e)\,x = E(e)\,Tx$ для любого вектора x из $\mathfrak{D}(T)$.

Пусть e — борелевское множество и $\lambda \notin \bar{e}$. Положим $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$, если $z \in e$, и $f(z) = 0$, если $z \notin e$. Тогда в силу теоремы 11 $T(f)$ — всюду определенный ограниченный оператор, $T(f)(\lambda I - T)x = E(e)x$ для вектора $x \in \mathfrak{D}(T)$ и $(\lambda I - T)T(f)x =$

$= E(e)x$ для всех x. Более того, $E(e)T(f) = T(f)E(e)$. Отсюда видно, что сужение оператора $T(f)$ на подпространство $E(e)\mathfrak{X}$ является обратным по отношению к сужению $(\lambda I - T) \mid E(e)\mathfrak{X}$, описанному в определении 1. Таким образом, T и E удовлетворяют всем условиям, указанным в определении 1, ч. т. д.

14. Следствие. *Спектральный оператор скалярного типа обладает единственным разложением единицы.*

Доказательство. Это следует из леммы 13 и теоремы 5, ч. т. д.

15. Определение. Пусть f — комплекснозначная борелевская функция комплексного переменного и T — спектральный оператор скалярного типа. Возьмем разложение единицы оператора T и построим по нему оператор $T(f)$, как описано в определении 10. Под оператором $f(T)$ мы будем понимать полученный оператор $T(f)$.

Из следствия 14 вытекает, что это определение корректно. Покажем, что определение 15 согласуется с определением 8. Для этого докажем следующую лемму:

16. Лемма. *Пусть T — спектральный оператор скалярного типа, E — его разложение единицы и f — функция, аналитическая в открытом множестве U, причем $E(U) = I$. Тогда операторы $f(T)$, построенные в определениях* 15 *и* 8, *совпадают.*

Доказательство. По f и T построим операторы $f(T)$ с помощью определений 15 и 8. Полученные операторы обозначим через $f_1(T)$ и $f_2(T)$ соответственно. Пусть $\{e_n\}$ — такая возрастающая последовательность компактных подмножеств из U, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n = U$. Поскольку, согласно теореме 11,

$$Tx = \int_{e_n} \lambda E(d\lambda)x, \qquad x \in E(e_n)\mathfrak{X},$$

из определения 12 вытекает, что $T \mid E(e_n)\mathfrak{X}$ есть ограниченный спектральный оператор скалярного типа, разложение единицы которого определяется формулой $F(e) = E(ee_n) \mid E(e_n)\mathfrak{X}$. Так как $\sigma(T \mid E(e_n)\mathfrak{X}) \subseteq e_n$ и f аналитична на e_n, то в силу теоремы XV.5.1 $f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X}) = \int_{e_n} f(\lambda)F(d\lambda)$, откуда

$$f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)x = \int_{e_n} f(\lambda)E(d\lambda)x, \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Из теоремы 11 вытекает, что

$$f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)x = f_2(T)E(e_n)x.$$

Возьмем теперь x из $\mathfrak{D}(f_1(T))$. Из определения 8 и предыдущей формулы следует, что

$$f_1(T)x = \lim_{n\to\infty} f_2(T)E(e_n)x.$$

Но так как $\lim_{n\to\infty} E(e_n)x = x$ и, в силу теоремы 11, $f_2(T)$ замкнут, то x лежит в $\mathfrak{D}(f_2(T))$ и $f_1(T)x = f_2(T)x$. Этим доказано, что $f_1(T) \subseteq f_2(T)$.

Пусть $\sigma_n = \{\lambda \mid |f_n(\lambda)| \leqslant n\}$. Покажем, что $\mathfrak{D}(f_1(T)) \supseteq E(\sigma_m)\mathfrak{X}$. Действительно, если x лежит в $E(\sigma_m)\mathfrak{X}$, то из теоремы 11 и доказанного выше утверждения мы получаем

$$\begin{aligned} f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)x &= \int_{e_n} f(\lambda)E(d\lambda)x = \\ &= E(e_n)\int_{\sigma_m} f(\lambda)E(d\lambda)x = \\ &= E(e_n)f_2(T)x. \end{aligned}$$

Следовательно, предел $f_1(T)x = \lim_{n\to\infty} f(T \mid E(e_n)\mathfrak{X})E(e_n)x$ существует и равен $f_2(T)x$. Отсюда по теореме 11

$$f_1(T)E(\sigma_m)x = f_2(T)E(\sigma_m)x = E(\sigma_m)f_2(T)x$$

для каждого x из $\mathfrak{D}(f_2(T))$. Значит, $\lim_{m\to\infty} f_1(T)E(\sigma_m)x = f_2(T)x$. Так как, согласно теореме 9, $\lim_{m\to\infty} E(\sigma_m)x = x$ и $f_1(T)$ замкнут, то x лежит в $\mathfrak{D}(f_1(T))$ и $f_1(T)x = f_2(T)x$. Таким образом, $f_1(T) \subseteq \subseteq f_2(T)$, ч. т. д.

17. Теорема. *Пусть S — множество, Σ — σ-поле подмножеств из S и E — сильно счетно аддитивное разложение единицы, определенное на Σ. Пусть f есть Σ-измеримая функция, определенная на S. Тогда оператор $T(f)$, построенный в определении* 10, *является спектральным оператором скалярного типа и его разложение единицы задается формулой*

$$E_1(e) = E(f^{-1}(e)).$$

Доказательство. Положим $f_n(s) = f(s)$, если $|f(s)| \leqslant n$, и $f_n(s) = 0$, если $|f(s)| > n$. Тогда

$$\mathfrak{D}(T(f)) = \{x \mid \lim_{n\to\infty} T(f_n)x \text{ существует}\},$$

$$T(f)x = \lim_{n\to\infty} T(f_n)x, \quad x \in \mathfrak{D}(T).$$

Согласно следствию 14, лемме 13 и определению 12, достаточно показать, что

$$\mathfrak{D}(T(f)) = \left\{ x \mid \lim_{n\to\infty} \int_{|\lambda|\leqslant n} dE_1(d\lambda)\, x \text{ существует} \right\},$$

$$T(f)\,x = \lim_{n\to\infty} \int_{\lambda\leqslant n} \lambda E_1(d\lambda)\, x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T(f)).$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что в силу леммы XVII.2.9

$$T(f_n) = \int_{|\lambda|\leqslant n} \lambda E_1(d\lambda),$$

откуда следуют требуемые утверждения, ч. т. д.

18. Теорема. *Пусть E — счетно аддитивная спектральная мера, определенная на σ-поле Σ подмножеств множества S. Пусть $g, f_1, f_2, \ldots$ — такая поточечно сходящаяся последовательность Σ-измеримых функций, что*

$$|f_n(s)| \leqslant |g(s)|, \qquad s \in S,$$
$$f(s) = \lim f_n(s), \qquad s \in S,$$

и пусть x лежит в $\mathfrak{D}(T(g))$. Тогда x лежит в каждом из множеств $\mathfrak{D}(T(f))$, $\mathfrak{D}(T(f_n))$, $n \geqslant 1$, и

$$T(f)\,x = \lim_{n\to\infty} T(f_n)\,x.$$

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из теоремы 11(b). Положим $h_n(s) = f_n(s)/g(s)$, если $g(s) \neq 0$, $h_n(s) = 0$, если $g(s) = 0$, и пусть $h(s) = f(s)/g(s)$, если $g(s) \neq 0$, $h(s) = 0$, если $g(s) = 0$. Тогда $|h_n(s)| \leqslant 1$, $|h(s)| \leqslant 1$, $h_n g = f_n$ и $hg = f$. Из теоремы 11(f) вытекает, что $T(f_n)\,x = T(h_n)\,T(g)\,x$, $T(f)\,x = T(h)\,T(g)\,x$. Поэтому достаточно показать, что $T(h_n)$ сходится к $T(h)$ в сильной операторной топологии. Но это сразу следует из теоремы IV.10.10, ч. т. д.

Было бы интересно обобщить теорему 17 со случая спектральных операторов скалярного типа на произвольные спектральные операторы. К сожалению, ее нельзя перенести буквально на этот последний случай, как показывает приведенный ниже пример спектрального оператора T, для которого оператор $\sin \pi T$ не является спектральным. Пусть $n \geqslant 1$, и пусть $\mathfrak{H}_{(n)}$ есть n-мерное унитарное пространство с ортонормированным базисом $(x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})$. Положим $A_{(n)}x = nx$ для $x \in \mathfrak{H}_n$ и определим оператор $B_{(n)}$ равенством $B_{(n)}x_i^{(n)} = 2^{-1}nx_{i-1}^{(n)}$, $1 < i \leqslant n$, $B_{(n)}x_1^{(n)} = 0$. Пусть

$\mathfrak{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}_{(n)}$. Определим в $\mathfrak{H}$ операторы A, B формулами

$$\mathfrak{D}(A) = \{x^{(1)} \oplus x^{(2)} \oplus \ldots \mid \sum_{n=1}^{\infty} |A_{(n)} x^{(n)}|^2 < \infty\},$$

$$\mathfrak{D}(B) = \{x^{(1)} \oplus x^{(2)} \oplus \ldots \mid \sum_{n=1}^{\infty} |B_{(n)} x^{(n)}|^2 < \infty\},$$

$$A(x) = A(x^{(1)} \oplus x^{(2)} \oplus \ldots) = A_{(1)} x^{(1)} \oplus A_{(2)} x^{(2)} \oplus \ldots, \quad x \in \mathfrak{D}(A),$$

$$B(x) = B(x^{(1)} \oplus x^{(2)} \oplus \ldots) = B_{(1)} x^{(1)} \oplus B_{(2)} x^{(2)} \oplus \ldots, \quad x \in \mathfrak{D}(B),$$

соответственно. Ясно, что A и B — замкнутые операторы и $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(B)$. Следовательно, для оператора $C = A + B$ мы имеем $\mathfrak{D}(C) = \mathfrak{D}(A)$. Мы сейчас подробно исследуем оператор C, так как в дальнейшем он будет использоваться для построения других контрпримеров этой главы.

Сначала мы покажем, что $\sigma(C)$ есть множество целых положительных чисел. Пусть число λ не является целым положительным. Так как $B_{(n)}$ — нильпотентный оператор, то, обозначая через $I_{(n)}$ тождественный оператор в $\mathfrak{H}_{(n)}$, получаем, что существует оператор

$$(\lambda I_{(n)} - (A_{(n)} + B_{(n)}))^{-1} = ((\lambda - n) I_{(n)} - B_{(n)})^{-1}.$$

Кроме того,

$$|((\lambda - n) I_{(n)} - B_{(n)})^{-1}| = \frac{1}{n} \left| \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) I_n + \frac{1}{n} B_{(n)} \right)^{-1} \right|,$$

и так как $|n^{-1} B_n| = 1/2$, то

$$\varlimsup_{n \to \infty} n |(\lambda I_{(n)} - (A_{(n)} + B_{(n)}))|^{-1} \leq 2.$$

Следовательно, если мы определим оператор $R(\lambda)$ равенством

$$R(\lambda)(x^{(1)} \oplus x^{(2)} \oplus \ldots) = \\ = R^{(1)}(\lambda; A_{(1)} + B_{(1)}) x^{(1)} \oplus R^2(\lambda; A_{(2)} + B_{(2)}) x^{(2)} \oplus \ldots,$$

то отсюда будет следовать, что $R(\lambda)$ ограничен и множество его значений содержится в области определения оператора C. Таким образом, $(\lambda I - C) R(\lambda) x = x$ для всех x из $\mathfrak{H}$ и $R(\lambda)(\lambda I - C) x = x$ для векторов x из $\mathfrak{D}(C)$, т. е. $R(\lambda) = R(\lambda; C)$, и потому $\lambda \notin \sigma(C)$. С другой стороны, если $\lambda = n$ и x лежит в $\mathfrak{H}_{(n)}$, то $(\lambda I - C)^n x = B_{(n)}^n x = 0$, так что λ принадлежит $\sigma(C)$. Итак, $\sigma(C)$ совпадает с множеством всех целых положительных чисел. Аналогичным рассуждением доказывается, что если J — произвольное подмножество целых положительных чисел и $\mathfrak{H}_J = \sum_{n \in J} \oplus \mathfrak{H}_{(n)}$, то спектр сужения $C | \mathfrak{H}_J$ совпадает с J. Поскольку $(iI - C)^{-1}$ ограничен, то $iI - C$ замкнут. Поэтому C замкнут.

Пусть $P_{(n)}$ — ортогональный проектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_{(n)}$. Для каждого борелевского множества e положим $E(e) = \sum_{n \in e} P_{(n)}$. Тогда E есть сильно счетно аддитивное разложение единицы. Если J — множество целых чисел, содержащихся в e, то очевидно, что $E(e)\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_J$. Поэтому $\sigma(C \mid E(e)\mathfrak{H}) = J \subseteq \bar{e}$, так что выполнено условие (iii) определения 1. Условия (i) и (ii) определения 1 выполнены очевидным образом, и, таким образом, C — спектральный оператор и его спектральное разложение есть E.

Функция $f(z) = \sin \pi z$ целая. Покажем, что $\sin \pi C$ не является спектральным оператором. Допустим противное: пусть оператор $\sin \pi C$ спектральный и F — его разложение единицы. Из следствия 4 и теоремы 9 (i) вытекает, что F коммутирует с E. По теореме 9(ii) сужение $(\sin \pi C) \mid P_{(n)}\mathfrak{H}$ совпадает с оператором

$$\sin(\pi C \mid P_{(n)}\mathfrak{H}) = \sin \pi (A_{(n)} + B_{(n)}) = \sin \pi (nI_{(n)} + B_{(n)}) =$$
$$= (-1)^n \sin \pi B_{(n)} = B_{(n)} h(B_{(n)}),$$

где $(hz) = \pm z^{-1} \sin \pi z$. Так как $B_{(n)}^n = 0$, то $(\sin \pi C)^n P_{(n)}\mathfrak{H} = \{0\}$. Пусть e — замкнутое подмножество комплексной плоскости, не содержащее нуля. По теореме 9

$$((\sin \pi C) F(e))^n P_{(n)}\mathfrak{H} = (\sin \pi C)^n F(e) P_{(n)}\mathfrak{H} =$$
$$= (\sin \pi C)^n P_{(n)} F(e)\mathfrak{H} = \{0\}.$$

Поскольку по определению 1 оператор $(\sin \pi C) \mid F(e)\mathfrak{H}$ взаимно однозначен, отсюда следует, что $P_{(n)} F(e) = 0$. Суммируя по n, получаем, что $F(e) = 0$. Следовательно, $F(\{0\}) = I$. Из определения 1 следует, что $\sigma(\sin \pi C) = 0$. Но мы сейчас покажем, что это равенство неверно. Точнее, мы докажем, что

$$\lim_{n \to \infty} |(\lambda I_{(n)} - (-1)^n \sin \pi B_{(n)})^{-1}| \to \infty, \qquad \lambda \neq 0,$$

откуда вытекает существование такой последовательности элементов $y_{(n)}$ из $\mathfrak{H}_{(n)}$, что $|y_{(n)}| = 1$ и $(\lambda I - \sin \pi C) y_{(n)} \to 0$. Но это означает, что $\sigma(\sin \pi C)$ совпадает со всей комплексной плоскостью. Для доказательства нашего утверждения заметим, что $(\sin \pi B_{(n)}) x_1^{(n)} = 0$ и $(\sin \pi B_{(n)}) x_2^{(n)} = (\pi/2n) x_1^{(n)}$, откуда

$$(\lambda I - (-1)^n \sin \pi B_{(n)})^{-1} x_2^{(n)} = \lambda^{-1} \left(x_2^{(n)} + (-1)^n \frac{n\pi}{2\lambda} x_1^{(n)} \right),$$

а теперь ясно, что $|\lambda I - (-1)^n \pi \sin B_{(n)})^{-1}| \to \infty$. Мы доказали, что $\sin \pi C$ не является спектральным оператором.

Точно таким же способом доказывается, что $\sigma(B)$ есть вся комплексная плоскость. Кроме того, BA^{-1} является, очевидно, ограниченным оператором с нормой $1/2$, а его n-я степень имеет норму 2^{-n}.

19. Лемма. *Пусть T — спектральный оператор и E — его разложение единицы. Пусть e — открытое множество. Тогда*

$$\sigma(T) \cap e \subseteq \sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X}) \subseteq \sigma(T) \cap \bar{e}.$$

Доказательство. Согласно определению 1, $\sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X}) \subseteq \bar{e}$. Если $\lambda \notin \sigma(T)$, то $\lambda I - T$ имеет ограниченный обратный R, и, обозначая через R_0 сужение $E(e)R$ на $E(e)\mathfrak{X}$, мы находим, что

$$R_0(\lambda I - T)x = E(e)R(\lambda I - T)x = E(e)x = x, \quad x \in \mathfrak{D}(T \mid E(e)\mathfrak{X}),$$

и

$$(\lambda I - T)R_0x = E(e)(\lambda I - T)Rx = E(e)x = x, \quad x \in E(e)\mathfrak{X},$$

в силу определения 1. Итак, $\lambda \notin \sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X})$, откуда $\sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X}) \subseteq \subseteq \sigma(T) \cap \bar{e}$.

Обратно, возьмем такую точку λ, что $\lambda \in e$ и $\lambda \notin \sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X})$. Тогда существует ограниченный оператор $R_0 = (\lambda I - T \mid E(e)\mathfrak{X})^{-1}$. Пусть e' — дополнение множества e. Так как $\lambda \notin e'$, то в силу определения 1 существует ограниченный оператор $R_1 = (\lambda I - T \mid E(e')\mathfrak{X})^{-1}$. Если мы положим $Rx = R_0E(e)x + R_1E(e')x$ для векторов x из $\mathfrak{X}$, то, очевидно, получим $R = R(\lambda; T)$, а потому $\lambda \notin \sigma(T)$. Итак, $e \cap \sigma(T) \subseteq \sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X})$, ч. т. д.

20. Следствие. *Пусть оператор T удовлетворяет предположениям леммы 19, а E — такой проектор, что $E\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T)$ и $ETx = TEx$ для всех x из $\mathfrak{D}(T)$. Тогда $\sigma(T) \supseteq \sigma(T \mid E\mathfrak{X})$.*

Доказательство. В конце предыдущего доказательства использовались только два эти свойства $E(e)$, ч. т. д.

Следующая теорема дает достаточные условия того, что функция спектрального оператора общего вида является спектральным оператором:

→ 21. Теорема. *Пусть T — спектральный оператор и E — его разложение единицы. Пусть функция f аналитична в области U, причем объединение U с некоторым конечным множеством содержит окрестность множества $\sigma(T)$, а также окрестность бесконечности (точки упомянутого конечного множества мы назовем исключительными). Предположим, что $E(p) = 0$ для каждой исключительной точки p и что в каждой исключительной точке p, а также в бесконечности функция f либо аналитична, либо имеет полюс. Тогда $f(T)$ является спектральным оператором, разложение единицы которого задается формулой $E_1(e) = E(f^{-1}(e))$, а спектр определяется формулой $\sigma(f(T)) = \overline{f(\sigma(T))}$.*

Доказательство. Определим E_1 формулой $E_1(e) = E(f^{-1}(e))$. Из теоремы 9 следует, что $E_1(e)\mathfrak{D}(f(T)) \subseteq \mathfrak{D}(f(T))$ и что $f(T)E_1(e)x = E_1(e)f(T)x$ для x из $\mathfrak{D}(f(T))$.

Пусть e — ограниченное борелевское множество. Мы проверим сначала условие (i) определения 1, т. е. покажем, что $\mathfrak{D}(f(T)) \supseteq E_1(e)\mathfrak{X}$. Если f не аналитична на бесконечности, то множество $e_1 = f^{-1}(e)$ ограничено, и, согласно теореме 9(ii), $\mathfrak{D}(f(T)) \supseteq E(e_1)\mathfrak{X} = E_1(e)\mathfrak{X}$. Пусть теперь f аналитична на бесконечности. Тогда, очевидно, f аналитична в окрестности множества $\bar{e}_1 \cap \sigma(T)$. Согласно лемме 19, $\sigma(T \mid E_1(e)\mathfrak{X}) = \sigma(T \mid E(e_1)\mathfrak{X}) \subseteq \bar{e}_1 \cap \sigma(T)$; отсюда следует, что f аналитична в окрестности $\sigma(T \mid E_1(e)\mathfrak{X})$ и на бесконечности. Значит, по теореме 9(v), $\mathfrak{D}(f(T \mid E_1 e)\mathfrak{X})) = \mathfrak{D}(f(T \mid E(e)\mathfrak{X})) \supseteq E(e_1)\mathfrak{X}$. Отсюда вытекает, согласно теореме 9(ii), что $\mathfrak{D}(f(T)) \supseteq E_1(e)\mathfrak{X}$.

Следовательно, для доказательства первых двух утверждений теоремы достаточно проверить, что для любого борелевского множества e имеет место включение $\sigma(f(T) \mid E_1(e)\mathfrak{X}) \subseteq \bar{e}$ или, ввиду теоремы 9(ii), включение $\sigma(f(T \mid E(e_1)\mathfrak{X})) \subseteq \overline{f(\bar{e}_1)}$. Так как $T \mid E(e_1)\mathfrak{X}$ есть спектральный оператор со спектром, содержащимся в $\bar{e}_1$, достаточно показать, что $\sigma(f(A)) \subseteq \overline{f(\sigma(A))}$ для каждого спектрального оператора и любой функции f, удовлетворяющей условиям теоремы. Пусть $\lambda \notin \overline{f(\sigma(A))}$; следует показать, что $\lambda \notin \sigma(f(A))$. Можно считать, не теряя в общности, что $\lambda = 0$, и тогда необходимо проверить, что оператор $f(A)$ обладает ограниченным обратным.

Согласно лемме 3, $E(A, \sigma(A)) = I$. Следовательно, если множество $\sigma(A)$ ограничено, то, в силу леммы 2, A ограничен. Так как $1/f$ ограничена на $\sigma(A)$ и ее особыми точками на $\sigma(A)$ могут быть лишь полюсы, то $1/f$ аналитична на $\sigma(A)$. Таким образом, применяя операционное исчисление для ограниченных операторов (см. VII.3.10(b)), находим, что $f(A)$ имеет обратный $(1/f)(A)$.

Рассмотрим случай, когда множество $\sigma(A)$ не ограничено. Согласно теореме 9 (v), $f(A)$ имеет обратный $(1/f)(A)$. Так как мы предположили, что $0 \notin \overline{f(\sigma(A))}$, то $1/f$ ограничена на $\sigma(A)$. Поскольку особенностями $1/f$ на $\sigma(A)$ и на бесконечности могут быть лишь полюсы, а множество $\sigma(A)$ не ограничено, $1/f$ аналитична на $\sigma(A)$ и на бесконечности; из теоремы 9 (v) сразу же следует, что оператор $(1/f)(A)$ ограничен. Мы доказали первые два утверждения теоремы и включение $\sigma(f(T)) \subseteq \overline{f(\sigma(T))}$, которое является частью последнего утверждения теоремы.

Так как множество $\sigma(f(T))$ замкнуто, то для доказательства равенства $\sigma(f(T)) = \overline{f(\sigma(T))}$ достаточно проверить, что $\sigma(f(T)) \supseteq f(\sigma(T))$. Возьмем λ из $f(\sigma(T))$. Можно считать, очевидно, что $\lambda = 0$. Пусть Z — множество точек из $\sigma(T)$, в которых значение f равно нулю. Поскольку f аналитична в каждой точке из $\sigma(T)$ и на бесконечности, за исключением, возможно, полюсов, Z — конечное множество, и, следовательно, оно ограничено. Пусть e — окрестность Z, замыкание которой компактно и содержится в области аналитичности f. Тогда, в силу теоремы 9 (ii) и леммы 19, $T \mid E(e)\mathfrak{X}$ — ограниченный оператор и $\sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X}) \supseteq Z$. Из теоремы об отображении спектра для ограниченных операторов (теорема VII.3.11), теорем 9(ii), 9(i) и следствия 20 видно, что

$$0 \in \sigma(f(T \mid E(e)\mathfrak{X})) = \sigma(f(T) \mid E(e)\mathfrak{X}) \subseteq \sigma(f(T)), \quad \text{ч. т. д.}$$

22. Следствие. *Многочлен от замкнутого спектрального оператора является замкнутым спектральным оператором.*

23. Следствие. *Пусть точка λ принадлежит резольвентному множеству замкнутого оператора T. Оператор T будет спектральным в том и только в том случае, если оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ является спектральным, а его спектральная мера $E_1(\cdot)$ удовлетворяет условию $E_1(\{0\}) = 0$.*

Доказательство. Пусть T — спектральный оператор. Тогда, согласно теоремам 9 и 21, $(\lambda I - T)^{-1}$ — спектральный оператор, и его спектральная мера $E_1(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$E_1(\{0\}) = E(\{z \mid (\lambda - z)^{-1} = 0\}) = 0.$$

Обратно, пусть $(\lambda I - T)^{-1}$ — спектральный оператор, и его спектральная мера удовлетворяет условию $E_1(\{0\}) = 0$. Тогда в силу теорем 9 и 21 $(\lambda I - T) = ((\lambda I - T)^{-1})^{-1}$ — спектральный оператор, и, следовательно, T — спектральный оператор, ч. т. д.

→ 24. Теорема. *Пусть T и f удовлетворяют условиям теоремы 21. Пусть E_1 — спектральное разложение спектрального оператора $f(T)$ и функция g аналитична на открытом множестве U, причем $E_1(U) = I$. Тогда, если $g(f(z)) = h(z)$, то*

$$g(f(T)) = h(T).$$

Доказательство. Пусть E — спектральное разложение оператора T. Тогда h аналитична на $f^{-1}(U)$, и так как $E(f^{-1}(U)) = E_1(U)$ в силу теоремы 21, то определен замкнутый оператор $h(T)$.

Определим множество q, полагая $q = \{f(\infty)\}$, если f аналитична на бесконечности; в противном случае будем считать q пустым. Рассмотрим множество $q' = U - q$. Заключение теоремы разобьем на две части:

(a) $$g(f(T)) \mid E_1(q)\mathfrak{X} = h(T) \mid E_1(q)\mathfrak{X},$$

(b) $$g(f(T)) \mid E_1(q')\mathfrak{X} = h(T) \mid E_1(q')\mathfrak{X}.$$

Для доказательства части (a) заметим, что в силу теорем 9 (ii) и 21

$$g(f(T)) \mid E_1(q)\mathfrak{X} = g(f(T \mid E(f^{-1}(q))\mathfrak{X})).$$

Поскольку множество $f^{-1}(q)$ конечно, оператор $T \mid E(f^{-1}(q))\mathfrak{X}$ ограничен (по теореме 9(ii)); отсюда, согласно теореме VII.3.12

и 9(ii), находим, что

$$g(f(T \mid E(f^{-1}(q))\mathfrak{X})) = h(T \mid E(f^{-1}(q))\mathfrak{X}) = \\ = h(T) \mid E(f^{-1}(q))\mathfrak{X};$$

тем самым (a) доказано.

Для доказательства равенства (b) заметим, что, согласно 9(ii), равенство (b) равносильно утверждению

$$g(f(T \mid E(f^{-1}(q'))\mathfrak{X})) = h(T \mid E(f^{-1}(q'))\mathfrak{X}).$$

Из леммы 2 следует, что мы не потеряем в общности, если вместо T рассмотрим $T \mid E(f^{-1}(q'))\mathfrak{X}$; другими словами, мы можем считать, что $E(f^{-1}(q')) = I$. Это равносильно тому, что $U = q'$, т. е. если f аналитична на бесконечности, то она не принимает значения $f(\infty)$ ни в одной точке из $f^{-1}(U)$.

Пусть e_n — возрастающая последовательность компактных подмножеств из U, причем $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n = U$. Положим $\widetilde{e_n} = f^{-1}(e_n)$. Так как e_n не содержит $f(\infty)$, то $\widetilde{e_n}$ компактно. Возьмем x из $\mathfrak{D}(g(f(T)))$. Применяя теорему 9(ii), определение 8 и теорему VII.3.12, находим

$$g(f(T))x = \lim_{n\to\infty} g(f(T) \mid E_1(e_n))E_1(e_n)x = \\ = \lim_{n\to\infty} g(f(T \mid E(\widetilde{e}_n)))E(\widetilde{e}_n)x = \\ = \lim_{n\to\infty} h(T \mid E(\widetilde{e}_n))E(\widetilde{e}_n)x.$$

Из определения 8 следует теперь, что x лежит в $\mathfrak{D}(h(T))$ и $h(T)x = g(f(T))x$. С другой стороны, если x лежит в $\mathfrak{D}(h(T))$, то эти рассуждения можно обратить и заключить, что x принадлежит $\mathfrak{D}(g(f(T)))$. Утверждение (b) доказано, ч.т.д.

25. Лемма. *Пусть T — замкнутый спектральный оператор и E — его разложение единицы. Тогда*

$$\sigma(T) = \bigcap_{E(e)=I} \bar{e}.$$

Доказательство. Если $E(e) = I$, то в силу определения 1 $\sigma(T) = \sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X}) \subseteq \bar{e}$. Значит, для получения требуемого результата достаточно проверить, что $E(\sigma(T)) = I$. Пусть σ' — любое компактное подмножество дополнения к $\sigma(T)$. По лемме 19 $\sigma(T \mid E(\sigma')\mathfrak{X}) \subseteq \sigma(T) \cap \sigma' = \varnothing$. Из теоремы 9(ii) и леммы VII.3.4 следует, что $E(\sigma') = 0$. Так как E счетно аддитивна, дополнение к $\sigma(T)$ имеет E-меру, равную нулю. Итак, $E(\sigma(T)) = I$, ч. т. д.

Теперь мы можем восполнить пробел в формулировке п. (v) теоремы 9:

26. Следствие. *Пусть T — спектральный оператор и f аналитична на $\sigma(T)$ и в окрестности бесконечности. Тогда операторы $f(T)$, построенные по определениям* 8 *и* VII.9.3, *совпадают.*

Доказательство. Из теоремы 9(v) и определения VII.9.3 видно, что достаточно проверить равенство $f(T) = g((\lambda I - T)^{-1})$, где $f(T)$ — оператор, построенный в определении 8, λ — точка из резольвентного множества оператора T, а функция g определена равенством $f(z) = g((\lambda - z)^{-1})$. Но это сразу же следует из теоремы 24 и леммы 25, ч. т. д.

По-видимому, не существует разумного обобщения теоремы XV.4.5 на неограниченные спектральные операторы. Можно дать определение скалярной части спектрального оператора общего вида, но не известно никакого удовлетворительного описания разности между спектральным оператором и его скалярной частью.

27. Определение. Пусть T — замкнутый спектральный оператор и E — его разложение единицы. Замкнутый спектральный оператор скалярного типа, определенный равенствами

$$\mathfrak{D}(S) = \left\{ x \mid \lim_{n \to \infty} \int_{|\lambda| \leq n} \lambda E(d\lambda)\, x \text{ существует} \right\},$$

$$Sx = \lim_{n \to \infty} \int_{|\lambda| \leq n} \lambda E(d\lambda)\, x, \qquad x \in \mathfrak{D}(S),$$

называется *скалярной частью оператора* T.

Так же, как в теории ограниченных операторов, мы можем рассмотреть оператор $N = T - S$, однако изучение N наталкивается на трудности. Из леммы 2 видно, что сужение N на каждое подпространство $E(\sigma)\mathfrak{X}$, где σ — ограниченное борелевское множество, является квазинильпотентным оператором, но сам оператор N может не быть квазинильпотентным. Он может оказаться ограниченным, но не квазинильпотентным и даже неограниченным. Может даже случиться, что оператор NS^{-1} не будет квазинильпотентным. Рассмотрим, например, спектральный оператор C, построенный в примере перед леммой 19; его скалярной частью является оператор A, и замыкание оператора $C - A$ есть B. Как мы отметили перед леммой 19, $\sigma(B)$ есть вся комплексная плоскость, так что B весьма далек от того, чтобы быть квазинильпотентным оператором. Заметим также, что $|(BA^{-1})^n| = 2^{-n}$ при $n \geqslant 1$, и потому $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(BA^{-1})^n|} = 1/2$; мы видим, что BA^{-1} не является квазинильпотентным. Все это показывает, сколь патологичным может оказаться поведение оператора $N = T - S$.

По-видимому, до сих пор не получено никакого описания разности между спектральным оператором и его скалярной частью. Следующая теорема дает частичное обобщение теоремы XV.4.5.

28. Теорема. *Пусть S — спектральный оператор скалярного типа и E — его спектральное разложение. Пусть N — ограниченный оператор, коммутирующий со всеми проекторами $E(e)$, и его сужение на каждое подпространство $E(e)\mathfrak{X}$, где e — ограниченное множество, является квазинильпотентным. Тогда $S+N$ — спектральный оператор и его разложением единицы является E.*

Доказательство. Так как N ограничен, то, очевидно, оператор $T=S+N$ замкнут, $\mathfrak{D}(T)\supseteq E(\sigma)\mathfrak{X}$, если σ — ограниченное множество, и $TE(\sigma)\supseteq E(\sigma)T$ для любого ограниченного борелевского множества σ. В силу определения 1 для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X})\subseteq\bar{e}$ для любого борелевского множества e.

Пусть $\lambda\notin\bar{e}$. Тогда оператор

$$M=N\int_e(\lambda-z)^{-1}E(dz)$$

квазинильпотентен. Действительно, возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и столь большое ограниченное борелевское множество $e_1\subseteq e$, что $|N|\,|\lambda-z|^{-1}<\varepsilon$ при $z\in e-e_1$. Тогда

$$M=(N\,|\,E(e_1)\mathfrak{X})\int_{e_1}(\lambda-z)^{-1}E(dz)+N\int_{e-e_1}(\lambda-z)^{-1}E(dz).$$

Так как N коммутирует с проекторами семейства E, то в силу теоремы 11

$$M^n=(N\,|\,E(e_1)\mathfrak{X})^n\int_{e_1}(\lambda-z)^{-n}E(dz)+N^n\int_{e-e_1}(\lambda-z)^{-n}E(dz),\qquad n\geqslant 1.$$

Поскольку $N\,|\,E(e_1)\mathfrak{X}$ квазинильпотентен, то, согласно теореме 11 (с),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|M^n|^{1/n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|N|\left|\int_{e-e_1}(\lambda-z)^{-n}E(dz)\right|^{1/n}\leqslant$$
$$\leqslant|N|\max_{z\in e-e_1}|\lambda-z|^{-1}<\varepsilon.$$

Так как ε — произвольное число, то M квазинильпотентен. Положим

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}M^n\int_e(\lambda-z)^{-1}E(dz).$$

По теореме 11 (с) оператор R ограничен. Взяв вектор x из $\mathfrak{D}(T\,|\,E(e)\mathfrak{X})$, используя теорему 11 и тот факт, что N коммутирует со всеми проекторами $E(e)$, получаем

$$R(\lambda I - S - N)x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} N^n \int_e (\lambda - z)^{-n} E(dz)\, x - \sum_{n=0}^{\infty} N^{n+1} \int_e (\lambda - z)^{-n-1} E(dz)\, x = x.$$

Заметим, что $SN \supseteq NS$, ибо если существует предел $\lim_{n\to\infty} \int_{|z|\leq n} zE(dz)\, x$, то предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|z|\leq n} zE(dz)\, Nx = \lim_{n\to\infty} N \int_{|z|\leq n} zE(dz)\, x$$

также существует и равен $N \lim_{n\to\infty} \int_{|z|\leq n} zE(dz)\, x$.

Отсюда следует, что если $x \in \mathfrak{D}(T \mid E(e)\mathfrak{X})$, то

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda I - S - N) \sum_{n=0}^{k} N^n \int_e (\lambda - z)^{-n-1} E(dz)\, x =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} N^n \int_e (\lambda - z)^{-n} E(dz)\, x - \sum_{n=0}^{k} N^{n+1} \int_e (\lambda - z)^{-n-1} E(dz)\, x =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (x - M^{k+1} x) = x.$$

Так как M квазинильпотентен и $\lambda I - T$ замкнут, то Rx лежит в $\mathfrak{D}(T)$ и $(\lambda I - S - N)Rx = x$. Отсюда вытекает, что $R \mid E(e)\mathfrak{X} = (\lambda I - T \mid E(e)\mathfrak{X})^{-1}$, так что $\lambda \notin \sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X})$. Итак, $\sigma(T \mid E(e)\mathfrak{X}) \subseteq \subseteq \bar{e}$, ч. т. д.

В частном случае, когда оператор N из теоремы 28 квазинильпотентен, теорему 9(v) можно значительно усилить:

→ 29. Теорема. *Пусть оператор T имеет вид $T = S + N$, где S — оператор скалярного типа и N — ограниченный квазинильпотентный оператор, коммутирующий с S. Пусть E — разложение единицы оператора T, и пусть функция f аналитична и ограничена в области, содержащей все такие точки, расстояние которых до спектра оператора T меньше фиксированного положительного числа. Тогда $f(T)$ — ограниченный спектральный оператор и*

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \int_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda)\, E(d\lambda),$$

причем члены ряда являются ограниченными операторами, а ряд сходится в равномерной операторной топологии.

Доказательство. Пусть U — область, на которой f аналитична и ограничена и которая содержит все комплексные числа, отстоящие от спектра $\sigma(T)$ меньше, чем на положительное число d. Пусть $|f(z)| \leqslant M$ для точек z из U. Если z — точка из $\sigma(T)$, то

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C f(\zeta)(\zeta - z)^{-n-1}\, d\zeta,$$

где C — окружность радиуса $d/2$ с центром в точке z, так что

$$(n!)^{-1} |f^{(n)}(z)| \leqslant M 2^n d^{-n}.$$

Отсюда по теореме 11

$$\left| (n!)^{-1} \int_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda) E(d\lambda) \right| \leqslant 4MK 2^n d^{-n},$$

где $K = \sup |E(e)|$. Так как N квазинильпотентен, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \int_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda) E(d\lambda)$$

равномерно сходится к ограниченному оператору R. Пусть $\{e_m\}$ — возрастающая последовательность компактных подмножеств из U и $\bigcup e_m = U$. Тогда $T | E(e_m)\mathfrak{X} = S | E(e_m)\mathfrak{X} + N | E(e_m)\mathfrak{X}$. Ясно, что

$$S | E(e_m)\mathfrak{X} = \int_{e_m} \lambda F(d\lambda),$$

где $F(e) = E(e) | E(e_m)\mathfrak{X}$. Таким образом, по теореме XV.5.1

$$f(T | E(e_m)\mathfrak{X})\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(N | E(e_m)\mathfrak{X})^n}{n!} \int_{e_m} f^{(n)}(\lambda) F(d\lambda)\, x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(N | E(e_m)\mathfrak{X})^n}{n!} \int_{e_m} f^{(n)}(\lambda) E(d\lambda)\, x$$

для всех x из $E(e_m)\mathfrak{X}$. Так как, согласно следствию 4, N коммутирует с $E(\sigma)$, то мы получаем отсюда

$$f(T | E(e_m)\mathfrak{X}) E(e_m)\, x = E(e_m) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \int_{\sigma(T)} f^{(n)}(\lambda) E(d\lambda)\, x =$$

$$= E(e_m) R x, \qquad x \in \mathfrak{X}, \qquad m \geqslant 1.$$

Согласно определению 8, $f(T)$ определен для всех x из $\mathfrak{X}$ и $f(T) = R$, ч. т. д.

В заключение этого параграфа мы рассмотрим условия, при которых замкнутый оператор с вполне несвязным спектром является спектральным. Эти условия существенно используются в следующей главе.

30. Определение. Пусть T — замкнутый оператор и σ — компактное подмножество из $\sigma(T)$, открытое и замкнутое в индуцированной топологии множества $\sigma(T)$. Тогда σ называется *компактным спектральным множеством оператора* T. Пусть f_σ — функция, равная 1 в окрестности множества σ и равная 0 в окрестности множества $\sigma(T)-\sigma$. Тогда f_σ аналитична в окрестности $\sigma(T)$ и в окрестности бесконечности, так что определен ограниченный оператор $f_\sigma(T)$ (см. VII.9.3). Мы будем писать $f_\sigma(T)=E(\sigma;\ T)$, а также $f_\sigma(T)=E(\sigma)$, если ясно, о каком операторе идет речь.

31. Лемма. Оператор $E(\sigma)$, *построенный в определении* 30, *является проектором. Далее,* $E(\varnothing)=0$, $E(\sigma_1)E(\sigma_2)=E(\sigma_1\sigma_2)$ *и* $E(\sigma_1\cup\sigma_2)=E(\sigma_1)\vee E(\sigma_2)$. *Наконец,*

$$E(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C(\lambda I-T)^{-1}d\lambda,$$

где C — объединение конечного семейства замкнутых жордановых кривых, ориентированных положительно в смысле теории функций комплексного переменного, причем область, ограниченная семейством кривых C, содержит все точки множества σ и не содержит ни одной точки из $\sigma(T)-\sigma$.

Доказательство. Первые три утверждения теоремы сразу вытекают из функционального исчисления, построенного в теореме VII.9.5. Из теоремы VII.9.4, применяя обозначения из определения 30, получаем

$$[*]\qquad f_\sigma(T)=f_\sigma(\infty)I+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}f_\sigma(\zeta)(\zeta I-T)^{-1}d\zeta,$$

где C_1 — конечное семейство замкнутых жордановых кривых, ориентированных положительно в смысле теории функций комплексного переменного, причем область D_1, ограниченная семейством C_1, содержит $\sigma(T)$ и окрестность бесконечности. Указанное в лемме семейство C ограничивает область D, содержащую множество σ и не содержащую точек из $\sigma(T)-\sigma$. Очевидно, можно найти такое конечное семейство кривых C_2, что область D_2, ограниченная семейством C_2, содержит $\sigma(T)-\sigma$ и окрестность бесконечности и множество $C_2\cup D_2$ не имеет общих точек с $C\cup D$. Мы можем считать, не ограничивая общности, что $D_1=D\cup D_2$ и $C_1=C\cup C_2$. Так как $f_\sigma(\zeta)=0$ при $\zeta\in C_2\cup D_2$ и $f_\sigma(\zeta)=1$ при $\zeta\in C\cup D$, то из [*] немедленно следует равенство

$$f_\sigma(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_C (\zeta I-T)^{-1}\,d\zeta.$$

→ 32. Теорема. *Пусть T — оператор в слабо полном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что $\sigma(T)$ вполне несвязен. Тогда T является спектральным оператором в том и только в том случае, если*

(a) *семейство проекторов $E(\sigma;\ T)$, соответствующих компактным спектральным множествам оператора T, равномерно ограничено и*

(b) *ни один ненулевой вектор x из $\mathfrak{X}$ не удовлетворяет равенству $E(\sigma)\,x=0$ для каждого компактного спектрального множества σ оператора T.*

Доказательство. Пусть выполнены условия (a) и (b). Так как $\sigma(T)$ вполне несвязен, то существует комплексное число $\lambda \notin \sigma(T)$. Мы не потеряем в общности, если будем считать, что $\lambda=0$. Пусть $R=T^{-1}$. Тогда по теореме VII.9.5 $\sigma(R)=\{z \mid z^{-1}\in \in \sigma(T)\}\cup\{0\}$. Поскольку $\sigma(T)$ вполне несвязен, каждая точка λ из $\sigma(T)$ содержится в сколь угодно малом компактном подмножестве σ из $\sigma(T)$, сткрытом в индуцированной топологии множества $\sigma(T)$. Отсюда следует, что множество $\tau(\sigma)=\{z \mid z^{-1}\in\sigma\}$ есть компактное подмножество из $\sigma(R)$, открытое в индуцированной топологии множества $\sigma(R)$. Таким образом, любая отличная от нуля точка из $\sigma(R)$ содержится в сколь угодно малом компактном подмножестве множества $\sigma(R)$, открытом в индуцированной топологии множества $\sigma(R)$.

Пусть U — некоторая окрестность нуля в $\sigma(R)$. Тогда, как мы заметили выше, каждая точка p из $\sigma(R)-U$ содержится в открытом и замкнутом подмножестве σ_p из $\sigma(R)$, не содержащем нуля. Множество $\sigma(R)-U$ можно покрыть конечным числом таких множеств $\sigma_{p_1},\ \ldots,\ \sigma_{p_n}$; тогда множество

$$\sigma=\sigma(R)-\sigma_{p_1}-\sigma_{p_2}-\ldots-\sigma_{p_n}$$

является открытым и замкнутым подмножеством, содержащим нуль и лежащим в U. Итак, каждая точка множества $\sigma(R)$, включая нуль, содержится в произвольно малом компактном множестве, открытом в $\sigma(R)$. Таким образом, $\sigma(R)$ вполне несвязно.

Из определения VII.9.3 следует, что $E(\sigma;\ T)=E(\tau(\sigma);\ R)$ для любого компактного спектрального множества σ оператора T. Более того, ясно, что если σ пробегает семейство K всех компактных открытых подмножеств из $\sigma(T)$, то $\tau(\sigma)$ пробегает семейство всех компактных открытых подмножеств из $\sigma(R)$, не содержащих нуля. Мы утверждаем теперь, что семейство норм $|E(\sigma_1;\ R)|$, где σ_1 пробегает все компактные открытые подмножества из $\sigma(R)$, равномерно ограничено. Это следует из следующих фактов: (1) семейство

$|E(\sigma; T)|$ равномерно ограничено по всем σ из K; (2) каждое компактное открытое подмножество σ_1 из $\sigma(R)$ является либо компактным открытым подмножеством, не содержащим нуля, либо дополнением к такому множеству; (3) $E(\sigma(R) - \sigma_1; R) = I - E(\sigma_1; R)$ (см. VII.3.10). Таким образом, в силу теоремы XVI.5.2, R — спектральный оператор.

Отметим теперь, что если T — спектральный оператор с вполне несвязным спектром $\sigma(T)$, то, применяя следствие 23, мы можем провести предыдущие рассуждения в обратном порядке и заключить, что выполняется условие (a).

Продолжим прерванное доказательство. Пусть E_1 — разложение единицы оператора R. Согласно условию (b), если для вектора x выполняется равенство $E(\tau; R)x = E(\tau(\sigma); R)x = E(\sigma; T)x = 0$ для любого компактного открытого множества τ из $\sigma(R)$; то $x = 0$. Так как спектр $\sigma(R)$ вполне несвязен, а разложение E_1 счетно аддитивно, мы получаем равенство $E_1(\{0\}) = 0$. Согласно следствию 23, T — спектральный оператор.

Обратно, если T — спектральный оператор, то из следствия 23 вытекает, что $E_1(\{0\}) = 0$. Проводя предыдущие рассуждения в обратном порядке, получаем, что выполнено условие (b), ч. т. д.

→ 33. Следствие. *Пусть T — оператор в слабо полном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что $\sigma(T)$ есть счетное множество точек $\{\lambda_i\}$ и $|\lambda_i| \to \infty$ при $i \to \infty$. Тогда T спектрален в том и только в том случае, если*

(a) *множество всех конечных сумм проекторов $E(\lambda_i; T)$, соответствующих точкам λ_i из $\sigma(T)$, равномерно ограничено;*

(b) *ни один ненулевой вектор x из $\mathfrak{X}$ не удовлетворяет условиям $E(\lambda_i)x = 0$ для всех $i \geqslant 1$.*

Доказательство. Ясно, что при наших предположениях относительно $\sigma(T)$ компактными спектральными множествами оператора T будут в точности конечные подмножества множества $\{\lambda_i\}$. А теперь следствие сразу же вытекает из теоремы 32 и леммы 31, ч. т. д.

Следующая теорема является обобщением теоремы XVI.5.19 на случай неограниченных операторов. Она окажется полезной при изучении применений общей спектральной теории в гл. XX.

→ 34. Теорема. *Пусть S — замкнутый неограниченный оператор в рефлексивном пространстве $\mathfrak{X}$, спектр которого $\sigma(S)$ представляет собой объединение конечного множества точек $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и не пересекающегося с ним подмножества простой жордановой кривой C. Предположим, что кривая C взаимно однозначно параметризована гладкой функцией $z(t)$, определенной при $-\infty < t < \infty$, причем $z'(t)$ стремится к пределу α при $t \to \pm\infty$. Тогда C делит комплексную сферу на две области R_1 и R_2, причем C обхо-*

дит R_1 (соответственно R_2) в положительном (соответственно отрицательном) направлении в смысле теории функций комплексного переменного. В дальнейшем, рассматривая некоторую окрестность кривой C, мы будем говорить, что точки из пересечения этой окрестности с R_1 лежат слева от C, а точки из пересечения упомянутой окрестности с R_2 — справа от C. Допустим, что существуют такие плотные линейные многообразия $\mathfrak{X}_0$ и $\mathfrak{X}_0^*$ в пространствах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$ соответственно и такая «особая» точка ν_0 из $\sigma(S)$, что

(i) *для любых x_0 из $\mathfrak{X}_0$ и x_0^* из $\mathfrak{X}_0^*$ величина $|\lambda-\nu_0|\times$ $\times|x_0^*R(\lambda;\ S)x_0|$ ограничена постоянной $K(x_0^*,\ x_0)$ на открытом множестве, содержащем окрестность кривой C, а также все точки некоторой окрестности точки $\lambda=\infty$, не лежащие на C;*

(ii) *для любых x_0 из $\mathfrak{X}_0$ и x_0^* из $\mathfrak{X}_0^*$ функция $x_0^*R(\lambda;\ S)x_0$ имеет предельные значения $R^+(\hat{\lambda},\ x_0^*,\ x_0)$ и $R^-(\hat{\lambda},\ x_0^*,\ x_0)$ для почти всех точек $\hat{\lambda}$ на C, когда точка приближается по некасательному пути к $\hat{\lambda}$, оставаясь справа (соответственно слева) от C;*

(iii) *существует такая постоянная M, зависящая только от S, что*

$$\int_\sigma |R^+(\lambda,\ x_0^*,\ x_0)-R^-(\lambda,\ x_0^*,\ x_0)|\,ds\leqslant M\,|x_0^*|\,|x_0|,$$

$$x_0\in\mathfrak{X}_0,\qquad x_0^*\in\mathfrak{X}_0^*,$$

где s — длина дуги вдоль C.

Тогда S — спектральный оператор. Для любого ограниченного борелевского множества $e\subseteq\sigma$, не содержащего особой точки ν_0, спектральный проектор $E(e)$ задается формулой

$$x_0^*E(e)\,x_0=\frac{1}{2\pi i}\int_e\{R^+(\lambda,\ x_0^*,\ x_0)-R^-(\lambda,\ x_0^*,\ x_0)\}\,d\lambda.$$

Доказательство. Наметим общую идею доказательства. Сначала мы покажем, что наличие конечного точечного спектра не приводит к существенному усложнению, так что, не теряя в общности, можно считать, что $n=0$, т. е. спектр оператора S целиком лежит на C. Считая, что S обратим (это допущение не ограничивает общности), рассматриваем ограниченный оператор $T=S^{-1}$. Применяя к нему соображения, использованные в доказательстве теоремы XVI.5.19, устанавливаем, что T — спектральный оператор. Отсюда и будет получена формула для спектрального разложения S.

Перейдем к подробному доказательству. Прежде всего мы будем считать, что S имеет ограниченный обратный $T=S^{-1}$; это не ограничивает общности, ибо в противном случае мы можем перейти от S к оператору $S+zI$, выбрав подходящее z.

Пусть f — аналитическая функция, равная 1 в окрестности множества $\{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n\}$ и нулю — в окрестности множества σ и в окрестности бесконечности. Применяя операционное исчисление, построенное в § VII.9 (см., в частности, теорему VII.9.5), определим оператор $E=f(S)$. Согласно теореме VII.9.5, E есть проектор; в силу теоремы VII.9.8, E отображает $\mathfrak{X}=\mathfrak{D}(T)$ в $\mathfrak{D}(S)$ и $ESx=SEx$ для всех x из $\mathfrak{X}$. Отсюда, полагая $\mathfrak{X}_1=E\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_2=(I-E)\mathfrak{X}$, мы получаем, что операторы $S_i=S\mid\mathfrak{X}_i\cap\mathfrak{D}(T)$, $i=1, 2$, замкнуты, а их резольвенты удовлетворяют равенствам $R(\lambda; S_i)=R(\lambda; S)\mid\mathfrak{X}_i$, $i=1, 2$. Оператор S_1 определен всюду и, следовательно, ограничен. Используя теоремы VII.9.5 и VII.9.8, читатель без труда проверит, что $\sigma(S_1)=\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и $\sigma(S_2)=\sigma$. Из определения VII.3.17 (см. также абзац перед этим определением), теоремы VII.3.19 и определений XV.2.2 и XV.2.5 следует, что S_1 — спектральный оператор, так что S_1^{-1} — спектральный оператор. В дальнейшем мы покажем, что S_2^{-1} тоже является спектральным оператором. Тогда из теоремы XV.3.10 сразу же вытекает, что оператор S^{-1}, являющийся прямой суммой S_1^{-1} и S_2^{-1}, также спектральный. Применяя затем следствие 2.23, получим, что S — спектральный оператор.

Полагая $T=S_2^{-1}$, получаем ограниченный оператор T в пространстве $\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}_2$. Пусть $\mathfrak{Y}_0^*$ — множество сужений на $\mathfrak{Y}$ всех функционалов из $\mathfrak{X}_0^*$ и $\mathfrak{Y}_0=(I-E)\mathfrak{X}_0$. Ясно, что $\mathfrak{Y}_0^*$ плотно в $\mathfrak{Y}^*$ и $\mathfrak{Y}_0$ плотно в $\mathfrak{Y}$. Так как $R(\lambda; S_2)$ является сужением $R(\lambda; S)$ на пространство $\mathfrak{Y}$, то из предположений нашей теоремы сразу же вытекают следующие утверждения:

(i′) Если $y_0\in\mathfrak{Y}_0$ и $y_0^*\in\mathfrak{Y}_0$, то функция $|\lambda-\nu_0||y_0^*R(\lambda; S_2)y_0|$ ограничена некоторой постоянной $K(y_0^*, y_0)$ на открытом множестве, содержащем окрестность кривой C и все точки некоторой окрестности бесконечности, не лежащие на C.

(ii′) Для любых y_0 из $\mathfrak{Y}_0$ и y_0^* из $\mathfrak{Y}_0^*$ функция $y_0^*R(\lambda; S_2)y_0$ имеет предельные значения $R^+(\hat\lambda, y_0^*, y_0)$ и $R^-(\hat\lambda, y_0^*, y_0)$ для почти всех точек $\hat\lambda\in C$, когда точка λ приближается к $\hat\lambda$ по некасательному пути к C, оставаясь слева (соответственно справа) от C.

(iii′) Существует такая постоянная M, зависящая только от S, что

$$\int\limits_{\sigma(S_2)}|R^+(\lambda, y_0^*, y_0)-R^-(\lambda, y_0^*, y)|\,ds\leqslant M|y_0^*||y_0|,\quad y_0\in\mathfrak{Y}_0,\ y_0^*\in\mathfrak{Y}_0^*,$$

где s — длина дуги вдоль C.

Заметим, что $\sigma(T)$ лежит на гладкой жордановой кривой $\Gamma_0=\{\lambda^{-1}\mid\lambda\in C\}\cup\{0\}$ (см. теорему VII.9.5 и формулу [*] из доказательства леммы VII.9.2) и

$$R(\lambda; T)=\lambda^{-2}R(\lambda^{-1}; S_2)+\lambda^{-1}I. \tag{1}$$

Мы можем поэтому переформулировать указанные выше свойства (i′)—(iii′) в форме, удобной для непосредственного применения к оператору T:

(i″) Если $y_0 \in \mathfrak{D}_0$ и $y_0^* \in \mathfrak{D}_0^*$, то $|\lambda - \nu_0^{-1}| |\lambda|^2 |y_0^* R(\lambda; T) y_0|$ ограничена некоторой постоянной $K(y_0^*, y_0)$ на открытом множестве, содержащем спектр $\sigma(T)$ оператора T.

(ii″) Для любых y_0 из $\mathfrak{D}_0$ и y_0^* из $\mathfrak{D}_0^*$ функция $y_0^* R(\lambda; T) y_0$ имеет предельные значения $R_1^+(\hat{\lambda}, y_0^*, y_0)$ и $R_1^-(\hat{\lambda}, y_0^*, y_0)$ для почти всех точек $\hat{\lambda}$ из Γ_0, когда λ приближается к $\hat{\lambda}$ по некасательному пути к Γ_0, оставаясь слева (соответственно справа) от Γ_0.

(iii″) Существует такая постоянная M, зависящая только от S, что

$$\int\limits_{\sigma(T)} |R_1^+(\lambda, y_0^*, y_0) - R_1^-(\lambda, y_0^*, y_0)| \, ds \leqslant |y_0^*| |y_0|, \quad y_0 \in \mathfrak{D}_0, \quad y_0^* \in \mathfrak{D}_0^*,$$

где s — длина дуги кривой Γ_0.

Для доказательства утверждения (iii″) заметим, что в силу равенства (1)

$$(2) \qquad R_1^+(\lambda, y_0^*, y_0) - R_1^-(\lambda, y_0^*, y_0) = \\ = \lambda^{-2} \{R^+(\lambda^{-1}, y_0^*, y_0) - R^-(\lambda^{-1}, y_0^*, y_0)\},$$

а элемент дуги dt на кривой C в точке μ и элемент дуги ds на кривой Γ_0 в соответствующей точке $\lambda = \mu^{-1}$ связаны соотношением $ds = |\lambda|^2 dt$, так что (iii″) следует из (iii′).

Если f — однозначная функция, аналитическая в окрестности Γ_0, то

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\delta} f(\lambda) R(\lambda; T) \, d\lambda,$$

где Γ_δ есть замкнутая жорданова кривая или пара замкнутых жордановых кривых, проходящих на расстоянии δ от Γ_0. Если f имеет нуль по меньшей мере второго порядка в точке $\lambda = 0$ и нуль по меньшей мере первого порядка в точке ν_0^{-1}, то в силу условий (i″) и (ii″) мы можем положить $\delta \to 0$ и получить

$$y_0^* f(T) y_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} f(\lambda) \{R_1^+(\lambda, y_1^*, y_0) - R_1^-(\lambda, y_0^*, y_0)\} \, d\lambda, \\ y_0 \in \mathfrak{D}_0, \quad y_0^* \in \mathfrak{D}_0^*.$$

Когда точка $\lambda \in \Gamma_0$ лежит в резольвентном множестве оператора T, подинтегральное выражение равно нулю и последнее равенство можно переписать так:

$$(3) \qquad y_0^* f(T) y_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma(T)} f(\lambda) \{R^+(\lambda, y_0^*, y_0) - R^-(\lambda, y_0^*, y_0)\} \, d\lambda, \\ y_0 \in \mathfrak{D}_0, \quad y_0^* \in \mathfrak{D}_0^*,$$

если f имеет в точке $\lambda = 0$ нуль по меньшей мере второго порядка, а в точке $\lambda = \nu_0^{-1}$ нуль по меньшей мере первого порядка. Из условия (iii″) видно, что для любой ограниченной борелевской функции f, определенной на $\sigma(T)$, правая часть равенства (3) определяет непрерывную билинейную форму (f, y_0^*, y_0), где $y_0 \in \mathfrak{Y}_0$, $y_0^* \in \mathfrak{Y}^*$. Так как $\mathfrak{Y}_0$ и $\mathfrak{Y}_0^*$ плотны в $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}^*$ соответственно, то эта форма однозначно продолжается до ограниченной билинейной формы, определенной для всех $y \in \mathfrak{Y}$ и $y^* \in \mathfrak{Y}^*$. Поскольку пространство $\mathfrak{Y}$ рефлексивно, существует единственный оператор $T(f)$, такой, что

$$(4) \qquad y_0^* T(f) y_0 = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \{R^+(\lambda, y_0^*, y_0) - R^-(\lambda, y_0^*, y_0)\} d\lambda, \quad y_0 \in \mathfrak{Y}_0, \ y_0^* \in \mathfrak{Y}_0^*.$$

Отображение $f \to T(f)$ есть гомоморфизм алгебры аналитических функций, имеющих нуль по меньшей мере второго порядка в точке $\lambda = 0$ и по меньшей мере первого порядка в точке $\lambda = \nu_0^{-1}$, в алгебру ограниченных операторов пространства $\mathfrak{Y}$. Но так как любая непрерывная функция на Γ_0, обращающаяся в нуль в точках $\lambda = 0$ и $\lambda = \nu_0^{-1}$, является пределом таких аналитических функций в смысле равномерной сходимости на Γ_0, то указанное отображение является гомоморфизмом алгебры всех непрерывных на Γ_0 функций, обращающихся в нуль в точках $\lambda = 0$ и $\lambda = \nu_0^{-1}$. Покажем, что отображение $f \to T(f)$ является также гомоморфизмом алгебры всех ограниченных борелевских функций в алгебру ограниченных операторов пространства $\mathfrak{Y}$. Если зафиксировать непрерывную функцию g, обращающуюся в нуль в точках 0 и ν_0^{-1}, то множество всех борелевских функций f, для которых

$$(5) \qquad T(fg) = T(f)\, T(g),$$

содержит все непрерывные функции, обращающиеся в нуль в точках 0 и ν_0^{-1}. Из (4) видно, что если равенство (5) выполнено для каждой функции из равномерно ограниченной последовательности борелевских функций $\{f_n\}$ и

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

на множестве Γ_0, то равенство (5) выполняется также для функции f. Отсюда следует, что равенство (5) выполнено для любой ограниченной борелевской функции g, обращающейся в нуль в точках 0 и ν_0^{-1}. Повторяя это рассуждение, получим, что соотношение (5) выполняется для любой пары ограниченных борелевских функций f, g, обращающихся в нуль при $\lambda = 0$ и $\lambda = \nu_0^{-1}$. Но так как для функции f, равной нулю всюду, кроме, быть может, точек 0 и ν_0^{-1}, справедливо равенство $T(f) = 0$, то равенство (5) доказано для любой пары ограниченных борелевских функций f и g.

Отсюда следует, что оператор $E_0 = T(1)$ есть проектор, удовлетворяющий условию $T^2(T - \nu_0^{-1}I)\,T(1) = T(g)\,T(1) = T(g) = T^2(T - \nu_0^{-1}I)$, где в качестве g мы взяли функцию

$g(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - \nu_0^{-1})$. Следовательно, если $E = I - E_0$, то $T^2 (T - \nu_0^{-1} I) E = 0$, а поскольку оператор $T = S_2^{-1}$ обратим, $(T - \nu_0^{-1} I) E = 0$. Для любой ограниченной борелевской функции f положим $\overline{T}(f) = T(f) + f(\nu_0^{-1}) E$. Тогда $T(f) E = T(f)(I - T(1)) = T(f) - T(f) = 0$, $f \to \overline{T}(f)$ есть снова гомоморфизм алгебры всех ограниченных борелевских функций и $\overline{T}(1) = I$.

Если $(T - \nu_0^{-1}) y = 0$, то $R(\lambda; T) y$ аналитична при $\lambda \neq \nu_0^{-1}$, и из (4) видно, что $T(f) y = 0$ для всех ограниченных борелевских функций f. Отсюда $E_0 y = 0$, $Ey = y$. Поэтому, взяв функцию $h(\lambda) \equiv \lambda$, мы получаем в силу (3) и (4), что

$$T^2 (T - \nu_0^{-1} I) T(h) = T(g) T(h) = T(gh) = T^3 (T - \nu_0^{-1} I),$$

а поскольку T — обратимый оператор, мы приходим к равенству $(T - \nu_0^{-1})(T(h) - T) = 0$, т. е. $E_0 (T(h) - T) = 0$. Кроме того, $E(T(h) + \nu_0^{-1} E - T) = 0$. Таким образом,

$$(T(h) + \nu_0^{-1} E - T) = E_0 (T(h) - T) + E(T(h) + \nu_0^{-1} - T) = 0,$$

так что $\overline{T}(h) = T$. Отсюда следует, что если функция f аналитична на $\sigma(T)$, имеет нуль второго порядка в точке $\lambda = 0$ и мы положим $f_1(\lambda) = (\lambda - \nu_0^{-1}) f(\lambda)$, то

$$(T - \nu_0^{-1} I) f(T) = f_1(T) = T(f_1) = (T - \nu_0^{-1} I) T(f).$$

Поэтому $E_0 (f(T) - T(f)) = 0$. Так как $E(f(T) - f(\nu_0^{-1}) E) = 0$, то отсюда следует равенство $f(T) = \overline{T}(f)$, если f аналитична на $\sigma(T)$ и имеет нуль второго порядка в точке $\lambda = 0$. Из всего сказанного следует, что $f(T) = \overline{T}(f) = T(f) + f(\nu_0^{-1}) E$ для любой функции f, аналитической на спектре оператора T. Рассуждая точно так же, как в конце доказательства теоремы XVI.5.19, мы можем заключить, что T — оператор скалярного типа и его разложение единицы определяется формулой

$$y_0^* E_1(e) y_0 = y_0^* E y_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_e \{R_1^+(\lambda, y_0^*, y_0) - R_1^-(\lambda, y_0^*, y_0)\} d\lambda,$$

если e — борелевское множество, содержащее точку ν_0^{-1}, и формулой

$$y_0^* E_1(e) y_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_e \{R_1^+(\lambda, y_0^*, y_0) - R_1^-(\lambda, y_0^*, y)\} d\lambda,$$

если e не содержит точки ν_0^{-1}. Производя замену переменной по формуле $\mu = \lambda^{-1}$ и применяя тождество (2), можно переписать предыдущую формулу в виде

$$y_0^* E_1(e^{-1})\, y_0 = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_e \{R^+(\lambda, y_0^*, y) - R^-(\lambda, y_0^*, y)\}\, d\lambda, \quad y_0 \in \mathfrak{Y}_0, \quad y_0^* \in \mathfrak{Y}_0^*,$$

если только $\nu_0^{-1} \notin e^{-1}$. Из теоремы 21 следует, что спектральное разложение оператора $S_2 = T^{-1}$ задается формулой

$$y_0^* E(e)\, y_0 = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_e \{R^+(\lambda, y_0^*, y_0) - R^-(\lambda, y_0^*, y_0)\}\, d\lambda, \quad y_0 \in \mathfrak{Y}_0, \; y_0^* \in \mathfrak{Y}_0^*,$$

если $\nu_0 \notin e$. Отсюда, применяя теорему XV.3.10, мы получаем требуемое утверждение теоремы, ч. т. д.

→ 35. Следствие. *Если выполнены предположения предыдущей теоремы, то каждая точка $\lambda \in \sigma$, за возможным исключением точки ν_0, принадлежит непрерывному спектру спектрального оператора S. Точка ν_0 принадлежит точечному спектру оператора S, если она является собственным значением S, и непрерывному спектру оператора S в противном случае.*

Доказательство. Из леммы 19 следует, что если $\lambda \in \sigma$ и δ — замкнутая окрестность точки λ в комплексной плоскости P, то $E(P - \delta)\, \mathfrak{X}$ содержится в области значений оператора $S - \lambda I$. Следовательно, $E(P - \{\lambda\})\, \mathfrak{X} = (I - E(\{\lambda\}))\, \mathfrak{X}$ содержится в замыкании области значений оператора $S - \lambda I$. Поэтому, если $E(\{\lambda\}) = 0$, то замыкание области значений оператора $S - \lambda I$ плотно в $\mathfrak{X}$. Кроме того, так как из равенства $(S - \lambda I)\, x = 0$ вытекает равенство $E(P - \delta)\, x = 0$ для любой замкнутой окрестности δ точки λ, то $E(\{\lambda\})\, x = x$. Следовательно, если $E(\{\lambda\}) = 0$, то λ не может принадлежать ни точечному, ни остаточному спектру оператора S. Применяя формулу для спектрального разложения оператора S, полученную в теореме, мы получаем, что $E(\{\lambda\}) = 0$, если $\lambda \neq \nu_0$, $\lambda \in \sigma$. Итак, любая точка $\lambda \in \sigma$, $\lambda \neq \nu_0$, принадлежит непрерывному спектру оператора S.

Мы отметили в ходе доказательства предыдущей теоремы, что S является прямой суммой двух операторов S_1 и S_2, причем $\sigma(S_1)$ отделен от ν_0 и S_2 спектрален. Отсюда следует, что ν_0 принадлежит точечному (соответственно остаточному или непрерывному) спектру оператора S в том и только в том случае, если она принадлежит точечному (соответственно остаточному или непрерывному) спектру S_2. Поскольку S_2 — спектральный оператор скалярного типа, то $(S_2 - \nu_0 I)\, E_2(\{\nu_0\}) = 0$, где $E_2(\cdot)$ — спектральное разложение оператора S_2. Отсюда следует, что если ν_0 не принадлежит точечному спектру S_2, то $E_2(\{\nu_0\}) = 0$, откуда вытекает, как и выше, что ν_0 принадлежит непрерывному спектру S_2. Этим доказано последнее утверждение следствия, ч. т. д.

3. Теория кратности и спектральное представление

Методы и результаты этого параграфа принадлежат Бейду и тесно связаны с идеями, изложенными в § XVII.3. Мы построим теорию кратности для булевых алгебр проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$ и применим ее для доказательства того, что при некоторых дополнительных предположениях оператор скалярного типа S в $\mathfrak{X}$ подобен нормальному оператору V в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, т. е. $S = A^{-1}VA$, где оператор $A\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{H}$ и его обратный замкнуты и имеют плотную область определения.

1. Определение. Пусть B — полная булева алгебра проекторов в вещественном либо комплексном B-пространстве $\mathfrak{X}$. Функция m, определенная на B и принимающая значения в множестве всех кардинальных чисел, называется *функцией кратности булевой алгебры* B, если

$$\text{(i)} \qquad m(0) = 0,$$

$$\text{(ii)} \qquad m\Big(\bigvee_{\alpha} E_\alpha\Big) = \bigvee_{\alpha} m(E_\alpha), \quad \{E_\alpha\} \subseteq B.$$

Число $m(E)$ называется *кратностью* проектора E. Говорят, что проектор $E \in B$ имеет *однородную кратность* n, если $m(F) = n$ для всех $F \in B$, удовлетворяющих условию $0 \neq F \leqslant E$.

Идеалом булевой алгебры проекторов B называется подмножество $D \subset B$, удовлетворяющее следующим условиям: a) если $E \in D$, $F \in D$, то $E \vee F \in D$; b) если $E \in D$, $G \leqslant E$, то $G \in D$. Идеал D называется *плотным*, если любой элемент из B является объединением элементов из D. Идеал D, содержащий объединение любого счетного числа проекторов из D, называется *σ-идеалом*.

2. Лемма. *Пусть D — плотный идеал в B и m — функция на D со значениями в множестве всех кардинальных чисел, причем* $m(0) = 0$, $m\big(\bigvee_{\alpha} E_\alpha\big) = \bigvee_{\alpha} m(E_\alpha)$ *для любого семейства* $\{E_\alpha\} \subseteq D$, *удовлетворяющего условию* $\bigvee_{\alpha} E_\alpha \in D$. *Тогда m однозначно продолжается до функции кратности, определенной на B.*

Доказательство. Для любого $E \in B$ положим $m(E) = \bigvee_{\alpha} m(B_\alpha)$, где $\{B_\alpha\}$ — любое семейство из D, удовлетворяющее равенству $\bigvee B_\alpha = E$. Если $\{C_\beta\}$ — другое семейство проекторов из D, удовлетворяющее условию $E = \bigvee C_\beta$, то для любых α, β имеем $B_\alpha = \bigvee_{\beta} B_\alpha C_\beta$ и $C_\beta = \bigvee_{\alpha} B_\alpha C_\beta$. Отсюда

$$\bigvee_{\alpha} m(B_\alpha) = \bigvee_{\alpha} m\Big(\bigvee_{\beta} B_\alpha C_\beta\Big) = \bigvee_{\alpha,\,\beta} m(B_\alpha C_\beta) =$$
$$= \bigvee_{\beta} m\Big(\bigvee_{\alpha} B_\alpha C_\beta\Big) = \bigvee_{\beta} m(C_\beta),$$

а потому построенное продолжение m на B определено корректно. Покажем, что это продолжение является функцией кратности. Пусть $E_0 \in B$, $E_0 = \bigvee_{\gamma} E_\gamma$, $E_\gamma \in B$. Для любого γ имеем $E_\gamma = \bigvee_{\gamma} G_{\gamma\delta}$, где $G_{\gamma\delta} \in D$. Поэтому

$$m(E_0) = \bigvee_{\gamma, \delta} m(G_{\gamma\delta}) = \bigvee_{\gamma} \bigvee_{\delta} m(G_{\gamma\delta}) = \bigvee_{\gamma} m(E_\gamma).$$

Однозначность продолжения сразу же следует из дистрибутивности, ч. т. д.

3. Теорема. *Пусть m — функция кратности полной булевой алгебры B проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда существует одно и только одно семейство $\{E_n\}$ попарно дизъюнктных элементов из B, определенных для всех кардинальных чисел $n \leqslant m(I)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $I = \bigvee E_n$;

(ii) *если $E_n \neq 0$, то E_n имеет однородную кратность, равную n.*

Доказательство. Сначала покажем, что для каждого ненулевого $E \in B$ найдется такой ненулевой элемент $G \in B$, что $G \leqslant E$ и G обладает некоторой однородной кратностью. Пусть $n_0 = \min\{m(F) \mid 0 \neq F \leqslant E\}$. Так как кардинальные числа вполне упорядочены, то существует такой проектор $G \leqslant E$, что $m(G) = n_0$. Ясно, что G имеет однородную кратность n_0. Применяя лемму Цорна, мы получаем максимальное семейство $\mathfrak{F}$ попарно дизъюнктных элементов из B, каждый из которых обладает однородной кратностью. Для каждого кардинального числа n обозначим через E_n верхнюю грань множества всех $F \in \mathfrak{F}$, для которых $m(F) = n$. Если $0 \neq G \leqslant E_n$, то G есть объединение дизъюнктных элементов из B, имеющих кратность n. Следовательно, E_n имеет однородную кратность n. Наконец, предположим, что $I = \bigvee F_n$, где F_n попарно дизъюнктны и удовлетворяют условию (ii). Пусть $E_k \neq 0$. Так как $E_k = \bigvee E_k F_n$, то каждый элемент $E_k F_n$ либо равен нулю, либо имеет однородную кратность k. Отсюда $E_k F_n = 0$ при $n \neq k$. Следовательно, $F_k \neq 0$ и $E_k \leqslant F_k$. Точно так же, если $F_k \neq 0$, то $E_k \neq 0$ и $F_k \leqslant E_k$. Итак, $E_k = F_k$ для всех k, и мы доказали единственность, ч. т. д.

Для того чтобы естественным образом приписать данной булевой алгебре B проекторов функцию кратности, нам понадобятся некоторые понятия, вводимые в следующем определении.

4. Определение. Для любого $x \in \mathfrak{X}$ проектор $\bigwedge \{E \mid Ex = x\}$ мы будем называть *проектором-носителем* элемента x. (Заметим, что если G — проектор-носитель элемента x и $0 \neq F \leqslant G$, то $Fx \neq 0$.) Подпространство $\mathfrak{M}(x) = \overline{\mathrm{sp}}\{Ex \mid E \in B\}$

называется *циклическим подпространством*, порожденным элементом x. Мы будем говорить, что проектор $E \in B$ удовлетворяет *условию счетности цепей*, если любое семейство попарно дизъюнктных проекторов из B, ограниченных проектором E, не более чем счетно. Множество всех $E \in B$, удовлетворяющих этому условию, обозначим через $\mathscr{C}$.

Мы покажем, что $\mathscr{C}$ является плотным σ-идеалом в B; отсюда, применяя лемму 2, получаем, что для построения функции кратности для B достаточно рассмотреть $\mathscr{C}$.

5. Лемма. *Множество $\mathscr{C}$ является плотным σ-идеалом в B. Элементами множества $\mathscr{C}$ являются те и только те проекторы, которые служат проекторами-носителями векторов из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Сначала докажем чисто алгебраический факт, что $\mathscr{C}$ есть σ-идеал. Ясно, что $\mathscr{C}$ — идеал. Допустим, что $F = \bigvee_{n=1}^{\infty} F_n$, где $F_n \in \mathscr{C}$; пусть F представлен в виде объединения семейства $\{E_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ попарно дизъюнктных проекторов из B. Тогда для каждого фиксированного n среди проекторов $F_n E_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, имеется не более чем счетное множество ненулевых проекторов. Отсюда следует, что множество $\{\gamma \mid E_\gamma F_n \neq 0$ для некоторого $n\}$ также не более чем счетно. Но это множество совпадает с множеством тех γ, для которых $E_\gamma \neq 0$, ибо $E_\gamma = \bigvee_{n=1}^{\infty} E_\gamma F_n$ для каждого γ. Отсюда следует, что $\mathscr{C}$ есть σ-идеал.

Пусть теперь E — проектор-носитель вектора x. Допустим, что E есть объединение семейства $\{E_\alpha\}$, $\alpha \in A$, попарно дизъюнктных элементов из B. Согласно лемме XVII.3.4, $\lim_{\sigma} \sum_{\alpha \in \sigma} E_\alpha x = x$, где σ пробегает все конечные подмножества из A, упорядоченные по включению. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент σ, что $| x - \sum_{\sigma} E_\alpha x | < \varepsilon M^{-1}$, так что для элемента $\beta \notin \sigma$ имеем $| E_\beta x | = | E_\beta (x - \sum_{\sigma} E_\alpha x) | < \varepsilon$. Но тогда среди векторов $E_\alpha x$, $\alpha \in A$, существует не более чем счетное множество ненулевых. Так как $E_\alpha \leqslant E$, то из равенства $E_\alpha x = 0$ следует, что $E_\alpha = 0$ (см. определение 4). Итак, среди проекторов $\{E_\alpha\}$, $\alpha \in A$, имеется не более счетного числа ненулевых. Тем самым проектор-носитель любого вектора лежит в $\mathscr{C}$.

Теперь покажем, что $\mathscr{C}$ — плотный идеал. Если $E \in B$, то, очевидно, E мажорирует проектор-носитель любого вектора из области значений E. По лемме Цорна существует максимальное семейство попарно дизъюнктных проекторов-носителей E_γ, мажорируемых проектором E. Тогда $E = \bigvee E_\gamma$; действительно, если бы проектор $E - \bigvee_\gamma E_\gamma$ был ненулевым, то он мажорировал бы некоторый проектор-носитель, а это противоречит максимальности семейства $\{E_\gamma\}$. Кроме того, как показано выше, каждый E_γ лежит в $\mathscr{C}$. Итак, $\mathscr{C}$ — плотный идеал.

Покажем, наконец, что любой $E \in \mathscr{C}$ является проектором-носителем некоторого вектора. Так как $E \in \mathscr{C}$, то мы можем представить E в виде объединения *последовательности* попарно дизъюнктных проекторов E_n, каждый из которых является проектором-носителем вектора x_n с нормой $|x_n| \leqslant 1$. Положим $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$. Ясно, что $Ex_0 = x_0$. Покажем, что E является проектором-носителем вектора x_0. Пусть $F \in B$ и $Fx_0 = x_0$. Тогда для любого n

$$2^{-n} x_n = E_n x_0 = E_n F x_0 = F E_n x_0 = 2^{-n} F x_n.$$

Следовательно, $Fx_n = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, откуда $F \geqslant E_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $F \geqslant E$, ч. т. д.

6. Определение. Для любого проектора E из $\mathscr{C}$ определим его *кратность* $m(E)$ как наименьшую мощность множества векторов, удовлетворяющих условию

$$E\mathfrak{X} = \overline{\operatorname{sp}}\,\{\mathfrak{M}(x) \mid x \in A\}.$$

7. Лемма. *Если* $E, F \in \mathscr{C}$ *и* $F \leqslant E$, *то* $m(F) \leqslant m(E)$. *Если* $\{E_\alpha\} \subseteq \mathscr{C}$ *и* $E_0 = \bigvee E_\alpha \in \mathscr{C}$, *то* $m(E_0) = \bigvee_\alpha m(E_\alpha)$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, ибо из равенства $E\mathfrak{X} = \overline{\operatorname{sp}}\{\mathfrak{M}(x) \mid x \in A\}$ вытекает равенство $F(\mathfrak{X}) = \overline{\operatorname{sp}}\,\{\mathfrak{M}(Fx) \mid x \in A\}$. Отсюда же вытекает, что $\bigvee_\alpha m(E_\alpha) \leqslant m(E_0)$; нам следует показать, что здесь имеет место знак равенства. Заметим сначала, что существует такая последовательность $\{G_k\}$ попарно дизъюнктных элементов из $\mathscr{C}$, что любой элемент G_k мажорируется некоторым E_{α_k} и $E_0 = \bigvee_{k=1}^{\infty} G_k$. Действительно, рассмотрим семейства попарно дизъюнктных проекторов из B, каждый член которых мажорируется некоторым проектором E_α, и упорядочим эти семейства по включению. По лемме Цорна среди таких семейств существует максимальное, которое является счетным, ибо $E_0 \in \mathscr{C}$. Ясно, что объединением проекторов этого максимального семейства является E_0. Положим $n_0 = \bigvee m(E_\alpha)$. Найдутся такие векторы x_n^k, $k = 1, 2, \ldots$ (некоторые из них могут быть нулевыми), что $|x_n^k| \leqslant 1$, $G_k x_n^k = x_n^k$ и

$$G_k\mathfrak{X} = \overline{\operatorname{sp}}\,\{\mathfrak{M}(x_n^k) \mid 1 \leqslant n \leqslant n_0\}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Для любого кардинального числа $n \leqslant n_0$ положим $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_n^k$.

Тогда $G_k y_n = 2^{-k} x_n^k$ и

$$E_0\mathfrak{X} = \overline{\mathrm{sp}}\{G_k\mathfrak{X} \mid k = 1, 2, \ldots\} = \overline{\mathrm{sp}}\{\mathfrak{M}(x_n^k) \mid 1 \leqslant k < \infty, \ n \leqslant n_0\} = \\ = \overline{\mathrm{sp}}\{\mathfrak{M}(y_n) \mid n \leqslant n_0\}.$$

Таким образом, $m(E_0) \leqslant n_0$. Следовательно, $m(E_0) = \bigvee m(E_\alpha)$, ч. т. д.

→ 8. Теорема. *Пусть B — полная булева алгебра проекторов в $\mathfrak{X}$. Тогда существует одна и только одна функция кратности m, определенная на B и обладающая следующим свойством: для любого E из B, удовлетворяющего условию счетности цепей, $m(E)$ есть наименьшая из мощностей множеств циклических подпространств, линейная оболочка которых плотна в области значений E. Существует единственное разложение единицы $I = \bigvee E_n$ на попарно дизъюнктные проекторы E_n, такое, что если $E_n \neq 0$, то E_n имеет однородную кратность n.*

Доказательство. Эта теорема следует непосредственно из предыдущей теоремы, леммы 2 и теоремы 3, ч. т. д.

Теперь мы изучим структуру циклических подпространств полной булевой алгебры B проекторов в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Это исследование позволит нам получить спектральное представление для некоторого класса операторов скалярного типа (ограниченных и неограниченных).

Сначала напомним (см. лемму XVII.3.9), что B есть множество значений спектральной меры E, определенной на борелевских множествах структурного пространства Λ, точками которого являются максимальные идеалы равномерно замкнутой операторной алгебры $\mathfrak{A}(B)$, порожденной семейством B. Алгебра $\mathfrak{A}(B)$ является также слабо замкнутой алгеброй, порожденной семейством B, ибо, согласно следствию XVII.3.17, равномерно замкнутая и слабо замкнутая алгебры, порожденные полной булевой алгеброй проекторов, совпадают. Сначала мы предположим, что $\mathfrak{X}$ — гильбертово пространство и B — полная булева алгебра ортогональных проекторов. Напомним, что если f — комплекснозначная борелевская измеримая функция, то оператор

$$S(f) = \int_\Lambda f(\lambda)\, E(d\lambda)$$

имеет область определения

$$\mathfrak{D}(S(f)) = \left\{ y \mid \int_\Lambda |f(\lambda)|^2 (E(d\lambda)\, y, y) < \infty \right\}.$$

Циклическое подпространство $\mathfrak{M}(x)$ вектора x из $\mathfrak{X}$ совпадает с замкнутой линейной оболочкой всех векторов вида $S(f)\,x$, где f

пробегает все такие борелевские измеримые функции, для которых $x \in \mathfrak{D}(S(f))$. Точнее (см. лемму XII.3.1), соответствие $S(f)\,x \to f$ определяет изометрический изоморфизм между циклическим подпространством $\mathfrak{M}(x)$ и пространством $L_2(\Lambda, \mathscr{B}, \mu)$, где $\mathscr{B}$ означает семейство борелевских подмножеств из Λ и $\mu = (E(\cdot)\,x, x)$. Более того, действие операторов $S(g)$ в $\mathfrak{M}(x)$ переходит при этом изоморфизме в умножение на функцию g из $L_2(\Lambda, \mathscr{B}, \mu)$. Если проектор из B удовлетворяет условию счетности цепей и имеет кратность n, то мы можем разложить область его значений в ортогональную сумму n циклических подпространств и продолжить упомянутый изоморфизм до изометрического отображения пространства

$$\sum_{i \leqslant n} \mathfrak{M}(x_i) \text{ на } \sum_{i \leqslant n} L_2(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_i), \qquad \mu_i = (E(\cdot)\,x_i, x_i).$$

Наша цель — перенести это построение на произвольное банахово пространство $\mathfrak{X}$. Основная трудность такого обобщения заключается в отсутствии ортогонального дополнения в $\mathfrak{X}$, так что мы должны искать подходящую замену для меры $(E(\cdot)\,x, x)$. Соответствующее представление области значений проектора E будет получено только в случае $m(E) < \infty$. При этом условии сходство со случаем гильбертова пространства оказывается поразительным.

Прежде всего мы хотим охарактеризовать, как и в случае гильбертова пространства, циклические подпространства. Пусть B — полная булева алгебра проекторов в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$. Будем рассматривать B как спектральную меру; напомним (т. II, стр. 43—44), что для любой ограниченной борелевской функции f интеграл $S(f) = \int\limits_{\Lambda} f(\lambda)\,E(d\lambda)$ существует в равномерной операторной топологии и соответствие $f \to S(f)$ определяет гомоморфизм алгебры ограниченных борелевских функций на Λ в алгебру ограниченных операторов пространства $\mathfrak{X}$. Если функция f не ограничена, то, согласно теореме XIII.2.10, оператор $S(f)$ определяется формулами

$$\mathfrak{D}(S(f)) = \left\{ y \,\Big|\, \lim_{m \to \infty} \int\limits_{e_m} f(\lambda)\,E(d\lambda)\,y \text{ существует} \right\},$$

где $e_m = \{\lambda \,|\, |f(\lambda)| \leqslant m\}$, и

$$S(f)\,y = \lim_{m \to \infty} \int\limits_{e_m} f(\lambda)\,E(d\lambda)\,y, \qquad y \in \mathfrak{D}(S(f)).$$

В теореме 2.11 было построено операционное исчисление, основанное на этом определении, для неограниченных операторов $S(f)$, и в дальнейшем мы будем опираться на эти элементарные результаты, не упоминая иногда явно саму теорему.

Если $x \in \mathfrak{X}$, то из определения интеграла следует, что $\mathfrak{M}(x) \supseteq \supseteq \{S(f)x \mid x \in \mathfrak{D}(S(f))\}$. Доказательство того, что в этом включении имеет место знак равенства, требует некоторой техники. Важную роль в доказательстве играет теорема отделимости (теорема 12), которую мы докажем ниже. Для ее доказательства нам понадобятся некоторые свойства семейства B^*, состоящего из операторов, сопряженных к элементам из B. Если $E \in B$, то E^* — проектор в $\mathfrak{X}^*$, областью значений которого является $\mathfrak{X}$-замкнутое линейное многообразие $\{x^* \mid x^*(I-E)\mathfrak{X} = 0\}$. Так как $E \vee F = E + F - EF$ и $E \wedge F = EF$, то $(E \vee F)^* = E^* \vee F^*$ и $(E \wedge F)^* = E^* \wedge F^*$. Отсюда $E^* \leqslant F^*$ в том и только в том случае, если $E \leqslant F$. Следовательно, B^*— булева алгебра проекторов, нормы которых ограничены тем же числом, что и нормы элементов из B. Вопрос о полноте B^* (при условии, что B полна) выясняется в следующих ниже определении и лемме.

9. Определение. Пусть D — булева алгебра проекторов в $\mathfrak{X}^*$, и пусть $F\mathfrak{X}^*$ является $\mathfrak{X}$-замкнутым для любого $F \in D$. Тогда D называется *$\mathfrak{X}$-полным* (*$\mathfrak{X}$-σ-полным*), если для любого подмножества (соответственно последовательности) $\{F_\alpha\} \subseteq D$ выполнены следующие условия:

(a) $\mathfrak{X}^*$ допускает разложение в прямую сумму $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, где

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{X}\,\mathrm{sp}\{F_\alpha \mathfrak{X}^*\}, \qquad \mathfrak{N} = \bigcap_\alpha (I - F_\alpha)\mathfrak{X}^*;$$

здесь и в дальнейшем через $\mathfrak{X}\,\mathrm{sp}\{A_\alpha\}$ обозначается наименьшее $\mathfrak{X}$-замкнутое линейное многообразие из $\mathfrak{X}^*$, содержащее все множества A_α.

(b) Определенный этим разложением проектор F_0, тождественный на $\mathfrak{M}$ и аннулирующий $\mathfrak{N}$, принадлежит D.

Легко проверить, что из $\mathfrak{X}$-полноты следует полнота D как абстрактной булевой алгебры и что определенный выше проектор F_0 совпадает с $\bigvee\limits_\alpha F_\alpha$. Кроме того,

$$\Big(\bigwedge_\alpha F_\alpha\Big)\mathfrak{X}^* = \bigcap_\alpha F_\alpha \mathfrak{X}^*, \quad \Big(I - \bigwedge_\alpha F_\alpha\Big)\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}\,\mathrm{sp}\{(I - F_\alpha)\mathfrak{X}^*\}.$$

10. Лемма. *Пусть B — полная (σ-полная) булева алгебра проекторов в $\mathfrak{X}$ и B^* — булева алгебра операторов, сопряженных в $\mathfrak{X}^*$ к элементам из B. Тогда B^* является полной ($\mathfrak{X}$-σ-полной) в $\mathfrak{X}^*$. В частности, многообразия E^*B^*, $E^* \in B^*$, являются $\mathfrak{X}$-замкнутыми.*

Доказательство. Множество $E^*\mathfrak{X}^* = \{x^* \mid (I-E)^* x^* = 0\}$ является $\mathfrak{X}$-замкнутым как множество нулей сопряженного оператора. Пусть $\{E_\alpha\}$ — произвольное множество (последовательность) элементов из B и $E_0=\bigvee E_\alpha$. Так как можно заменить $\{E_\alpha\}$ возрастающей обобщенной последовательностью ее конечных объединений, мы можем считать, что $\{E_\alpha\}$ — возрастающая обобщенная последовательность. Согласно лемме XVII.3.4, $E_0x=\lim\limits_\alpha E_\alpha x$, $x\in\mathfrak{X}$. Следовательно, $E_0^*x^*(x)=x^*E_0x=\lim x^*E_\alpha x=\lim E_\alpha^*x^*x$, $x\in\mathfrak{X}$. Отсюда $E_0^*\mathfrak{X}^*\subseteq X\,\mathrm{sp}\,\{E_\alpha^*\mathfrak{X}^*\}$. Но множество $E_0^*\mathfrak{X}^*$ является $\mathfrak{X}$-замкнутым. Поэтому $E_0^*\mathfrak{X}^*=\mathfrak{X}\,\mathrm{sp}\,\{E_\alpha^*\mathfrak{X}^*\}$. Аналогично доказывается, что $(I^*-E_0^*)\,\mathfrak{X}^*=\bigcap\limits_\alpha(I^*-E_\alpha^*)\,\mathfrak{X}^*$, ч. т. д.

11. Определение. Замкнутое линейное многообразие $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{X}$ называется *инвариантным подпространством*, если $S(f)\,x\in\mathfrak{M}$ для вектора $x\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{D}(S(f))$.

→ 12. Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое инвариантное подпространство в $\mathfrak{X}$ и $x_0\in\mathfrak{X}$, причем $\mathfrak{M}(x_0)\cap\mathfrak{M}=(0)$. Тогда существует такой функционал $x_0^*\in\mathfrak{X}^*$, что*

1) $x_0^*(\mathfrak{M})=(0)$,

2) $x_0^*S(f)\,x_0>0$, *если f — неотрицательная борелевская функция и $S(f)\,x_0\neq0$.*

Доказательство. Ясно, что мы не ограничим общности, если предположим, что проектор-носитель элемента x_0 есть единичный оператор I. Следовательно, если $0\neq E\in B$, то $Ex_0\neq0$ и I удовлетворяет условию счетности цепей. Удобно, однако, выделить часть доказательства в следующее предложение:

13. Предложение. *Если $0\neq F\in B$, то существуют такой проектор G из B и такой ненулевой функционал $y^*\in\mathfrak{X}^*$, что*

(i) $G=\bigwedge\{E\mid y^*Ex=y^*x,\quad x\in\mathfrak{M}(x_0)\}$,

(ii) $y^*(\mathfrak{M})=(0)$ *и*

(iii) $0\neq G\leqslant F$.

Доказательство предложения. Выберем элемент $z^*\in\mathfrak{X}^*$ так, что $z^*(\mathfrak{M})=(0)$, в то время как $z^*(Fx_0)\neq0$. Пусть $\mathcal{G}=\{E\in B\mid z^*Fx=z^*Fx,\quad x\in\mathfrak{M}(x_0)\}$. Тогда, если $E_1, E_2\in\mathcal{G}$, то $z^*E_1E_2x=z^*FE_2x=z^*E_2Fx=z^*F^2x=z^*Fx$ для любого $x\in\mathfrak{M}(x_0)$, так что $\mathcal{G}$ замкнуто относительно конечных пересечений. Следовательно, если члены $\mathcal{G}$ упорядочить по включению, то $\mathcal{G}$ становится обобщенной убывающей последовательностью, но тогда по лемме XVII.3.4 она сильно сходится к проектору

$$G=\bigwedge\{E\mid E\in\mathcal{G}\}.$$

Следовательно,

$$G^*z^*x=z^*Gx=\lim_{E\in\mathcal{G}}z^*Ex=z^*Fx,\qquad x\in\mathfrak{M}(x_0),$$

и
$$G^*z^*y = \lim_{E \in \mathcal{G}} z^*Ey = 0, \qquad y \in \mathfrak{M}.$$

Если мы положим $y^* = G^*z^*$, то очевидно, что G и y^* удовлетворяют условиям (ii) и (iii). Пусть $H = \bigwedge \{E \mid y^*Ex = y^*x,\ x \in \mathfrak{M}(x_0)\}$. Ясно, что $G \geqslant H$. Однако если $y^*Ex = y^*x$ для всех $x \in \mathfrak{M}(x_0)$, то
$$z^*GEx = y^*Ex = y^*x = F^*G^*z^*x =$$
$$= G^*z^*Fx = z^*Fx, \qquad x \in \mathfrak{M}(x_0),$$
откуда $GE \geqslant G$. Итак, $G \leqslant E$, и потому $G \leqslant H$. Следовательно, $G = H$, ч. т. д.

Продолжим доказательство теоремы 12. Проектор $G^* \in B^*$ назовем *x_0-носителем* функционала y^*, если выполняется условие (i) предложения 13. Из него вытекает существование таких семейств попарно дизъюнктных проекторов в B^*, каждый член которых является x_0-носителем некоторого ненулевого функционала, обращающегося в нуль на $\mathfrak{M}$. По лемме Цорна существует максимальное семейство $\mathcal{F}$, обладающее таким свойством. Так как $I \in \mathcal{C}$, то семейство $\mathcal{F}$ счетно. Пусть $\mathcal{F} = \{G_n^*\}$, где G_n^* — x_0-носитель функционала y_n^*. Ясно, что $\bigvee G_n^* = I^*$ (в самом деле, в противном случае, применяя предложение 13 к $I - \bigvee G_n$, мы получили бы противоречие с максимальностью $\mathcal{F}$). Мы можем считать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^*$ сходится; положим $y_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^*$. Мы утверждаем, что I^* есть x_0-носитель элемента y_0^*. Действительно, если $y_0^*Ex = y_0^*x$, $x \in \mathfrak{M}(x_0)$, то для каждого n
$$y_n^*Ex = G_n^*y_0^*Ex = y_0^*EG_nx = y_0^*G_nx = y_n^*x, \quad x \in \mathfrak{M}(x_0),$$
откуда $E^* \geqslant G_n^*$, $n = 1, 2, \ldots$.

Наконец, из y_0^* мы получим x_0^*. Для этого снова рассмотрим B как спектральную меру. Пусть ν — полная вариация меры $y_0^*E(\cdot)x_0$. Тогда существует такая функция g из $L_1(\Lambda, \mathcal{B}, \nu)$, что
$$\nu(e) = \int_e g(\lambda)\, y_0^*E(d\lambda)\, x_0, \qquad e \in \mathcal{B}.$$
Поэтому
$$\nu(e) = \int_e |g(\lambda)|\, \nu(d\lambda), \qquad e \in \mathcal{B},$$
откуда следует, что $|g(\lambda)| = 1$ для всех точек λ, за исключением некоторого множества ν-меры нуль. Будем считать, что на этом множестве функция g равна нулю, положим $S(g) = \int_\Lambda g(\lambda)\, E(d\lambda)$,

и пусть $x_0^* = S(g)^* y_0^*$. Тогда $x_0^* E(\cdot) x_0 = \nu(\cdot)$ и $x_0^*(\mathfrak{M}) = y_0^*(S(g)\mathfrak{M}) \subseteq y_0^*(\mathfrak{M}) = (0)$. Предположим теперь, что f — ограниченная неотрицательная борелевская функция и $x_0^* S(f) x_0 = \int_\Lambda f(\lambda) x_0^* E(d\lambda) x_0 = 0$. Ясно, что

$$y_0^* E(e) x_0 = 0, \quad e \in \mathscr{B}, \quad e \subseteq e_0,$$

где $e_0 = \{\lambda \mid f(\lambda) > 0\}$. Тогда $y_0^*(\mathfrak{M}(E(e_0) x_0)) = (0)$; следовательно, $y_0^*(I - E(e_0)) x = y_0^* x$, $x \in \mathfrak{M}(x_0)$. Поскольку I^* есть x_0-носитель элемента y_0^*, то $E(e_0) = 0$. Таким образом, $S(f) x_0 = 0$, ч. т. д.

→ 14. Следствие. *Пусть B — полная булева алгебра проекторов в $\mathfrak{X}$ и x_0 — вектор из $\mathfrak{X}$. Тогда существует такой функционал x_0^* в $\mathfrak{X}^*$, что мера $x_0^* E(\cdot) x_0$ положительна и мажорирует векторную меру $E(\cdot) x_0$.*

→ 15. Теорема. *Если $x_0 \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{M}(x_0) = \{S(f) x_0 \mid x_0 \in \mathfrak{D}(S(f))\}$.*

Доказательство. Пусть x_0^* выбран так, как указано в следствии 14, и $\mu_0 = x_0^* E(\cdot) x_0$. Если $\mu_0(e) = 0$, то $E(d) x_0 = 0$ для $d \subseteq e$ и, таким образом, $\mathfrak{M}(E(e) x_0) = (0)$. Поэтому если $x \in \mathfrak{M}(x_0)$, то $x_0^* E(e) x = 0$. По теореме Радона—Никодима, существует такая функция $f \in L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_0)$, что

$$x_0^* E(e) x = \int_e f(\lambda) \mu_0(d\lambda), \qquad e \in \mathscr{B}.$$

Соответствие $T: x \to f$ определяет линейное отображение $\mathfrak{M}(x_0)$ в $L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_0)$. Оно является непрерывным, ибо $\int_\Lambda |f(\lambda)| \mu_0(d\lambda) = v(x_0^* E(\cdot) x, \Lambda)$[1] $= 4M |x_0^*| |x|$. Для любого m положим $e_m = \{\lambda \mid |f(\lambda)| \leqslant m\}$. Мы покажем, что $E(e_m) x = S(f \cdot \chi_{e_m}) x_0$, где χ_e означает характеристическую функцию множества e. Если $x^* \in \mathfrak{X}^*$, то μ_0 мажорирует меру $x^* E(\cdot) x_0$ и, следовательно,

$$x^* E(e) x_0 = \int_e p(\lambda) \mu_0(d\lambda), \qquad e \in \mathscr{B},$$

где $p \in L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_0)$. Пусть d — такое подмножество из e_m, на котором p ограничена, и $\{g_n\}$ — такая последовательность ограниченных функций, что $x = \lim S(g_n) x_0$. Тогда в силу непрерывности T

$$x^* S(g_n) E(d) x_0 = \int_d g_n(\lambda) p(\lambda) \mu_0(d\lambda) \to \int_d f(\lambda) p(\lambda) \mu_0(d\lambda) = x^* S(f \cdot \chi_d) x_0.$$

[1]) Имеется в виду полная вариация меры $x_0^* E(\cdot) x$ на множестве Λ.— *Прим. перев.*

Но $x^*S(g_n)E(d)x_0 \to x^*E(d)x$. Поэтому $x^*S(f\cdot\chi_d)x_0 = x^*E(d)x$. Так как это верно для любого $d \subset e_m$, на котором p ограничена, то $x^*S(f\cdot\chi_{e_m})x_0 = x^*E(e_m)x$. Так как x^* произволен, то $E(e_m)x = S(f\cdot x_{e_m})x_0$. Поскольку $x = \lim E(e_m)x$, то $x_0 \in \mathfrak{D}(S(f))$ и $x = S(f)x_0$, ч. т. д.

16. Следствие. *Если f — борелевская функция и $x \in \mathfrak{D}(S(f))$, то $f \in L_1(\Lambda, \mathscr{B}, x_0^*E(\cdot)x_0)$ для любого x_0^*, удовлетворяющего условиям следствия* 14.

Теперь мы изучим область значений проектора E, имеющего конечную однородную кратность. Так как любой проектор из B является объединением попарно дизъюнктных проекторов из $\mathscr{C}$, достаточно предположить, что E лежит в $\mathscr{C}$. Мы будем считать для удобства изложения, что единичный оператор принадлежит $\mathscr{C}$ и имеет конечную однородную кратность n. Тогда существуют такие векторы $x_1, \ldots, x_n$, что $\mathfrak{X} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(x_i)$ и $\mathfrak{X}$ нельзя представить в виде линейной оболочки меньшего числа циклических подпространств. Здесь через $\bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(x_i)$ обозначено наименьшее замкнутое линейное многообразие, содержащее все $\mathfrak{M}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Мы покажем, что многообразия $\mathfrak{M}(x_i)$ из указанного разложения попарно различны и что имеется вложение $\mathfrak{X}$ в прямую сумму L_1-пространств $\sum_{i=1}^{n} L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_i)$, аналогичное вложению гильбертова пространства в прямую сумму L_2-пространств. Меры μ_i имеют вид $x_i^*E(\cdot)x_i$; $x_i^* \in \mathfrak{X}^*$. Этот факт будет играть основную роль в последующем изучении двойственности между кратностями булевых алгебр проекторов в $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}^*$.

Следующая лемма справедлива без тех дополнительных предположений, о которых мы говорили выше.

17. Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое инвариантное подпространство и $y_0 \in \mathfrak{X}$. Тогда среди проекторов $E_0 \in B$, удовлетворяющих условию $E_0y_0 \in \mathfrak{M}$, существует максимальный проектор E_0. При этом*

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}((I-E_0)y_0) = (0).$$

Доказательство. Если $z \in \mathfrak{M}(y_0) \cap \mathfrak{M}$, то по теореме 15 $z = S(f)y_0$ для некоторой борелевской функции f. Если e — некоторое множество из $\mathscr{B}$, на котором f удовлетворяет неравенству $K^{-1} \leqslant |f(\lambda)| \leqslant K$, то $E(e)y_0 = S(g)z$, где $g = f^{-1}\chi_e$. Следовательно, если $\mathfrak{M}(y_0) \cap \mathfrak{M} \neq (0)$, то найдется такой проектор E, что $0 \neq Ey_0 \in \mathfrak{M}(y_0) \cap \mathfrak{M}$. Пусть E_0 — верхняя грань проекторов, обладающих этим свойством. Тогда $\mathfrak{M}((I-E_0)y_0) \cap \mathfrak{M} \neq (0)$, ибо в противном случае мы получили бы противоречие с максимальностью E_0. Итак, лемма доказана при условии $\mathfrak{M}(y_0) \cap \mathfrak{M} \neq (0)$. Если же $\mathfrak{M}(y_0) \cap \mathfrak{M} = (0)$, то в качестве E_0 возьмем дополнение к проектору-носителю элемента y_0. Тогда $(I-E_0)\,y_0 = y_0$, $E_0 y_0 = 0$, а потому $E_0 y_0 \in \mathfrak{M}$ и

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}((I-E_0)\,y_0) = 0.$$

Чтобы проверить максимальность E_0, заметим (см. замечание в определении 4), что если $E_1 > E$, то $(I-E_1)\,y_0 \neq 0$, и так как $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство, то

$$0 \neq (I-E_0)\,y_0 \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}((I-E_0)\,y_0);$$

тем самым доказана максимальность E_0, ч. т. д.

18. Лемма. *Пусть единичный оператор удовлетворяет условию счетности цепей и имеет конечную однородную кратность n. Если $x_1, \ldots, x_n$ — такое множество векторов, что $\mathfrak{X} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(x_i)$, то*

(1) *носитель каждого x_i есть I;*

(2) $\mathfrak{M}(x_i) \cap \bigvee_{j \neq i} \mathfrak{M}(x_j) = (0)$, $i = 1, \ldots, n$;

(3) *для любого i найдется такой линейный функционал x_i^*, что $x_i^*\left(\bigvee_{j \neq i} \mathfrak{M}(x_j)\right) = 0$, и $x_i^* S(f)\, x_i > 0$ для любой неотрицательной борелевской функции f, удовлетворяющей условию $S(f)\, x_i \neq 0$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения (2) предположим для определенности, что существует ненулевой вектор $z \in \mathfrak{M}(x_n) \cap \bigvee_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}(x_i)$. По лемме 17 найдется такой проектор E, что $0 \neq Ex_n$, $Ex_n \in \bigvee_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}(x_i)$. Следовательно, $E\mathfrak{X} = \bigvee_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}(Ex_i)$, откуда $m(E) \leqslant n-1$, а это противоречит предположению об однородной кратности n. Утверждение (1) доказывается аналогично: если E — носитель x_i, то $(I-E)\,\mathfrak{X} \subseteq \bigvee_{j \neq i} \mathfrak{M}((I-E)\,x_j)$. Утверждение 3 следует из теоремы 12, ч. т. д.

→ 19. Теорема. *Пусть выполнены условия леммы 18. Тогда существует такое взаимно однозначное линейное непрерывное отображение T пространства $\mathfrak{X}$ на плотное подпространство прямой суммы $\sum_{i=1}^{n} L(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_i)$, $\mu_i = x_i^* E(\cdot)\, x_i$, что если $Tx = [f_1, \ldots, f_n]$,* *то*

(a) $x_i^* E(e) x = \int_e f_i(\lambda)\, \mu_i(d\lambda), \quad e \in \mathscr{B}, \quad i = 1, \ldots, n;$

(b) $x = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(f_i \cdot \chi_{e_m}) x_i,$

где

$$e_m = \{\lambda \mid |f_i(\lambda)| \leqslant m, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Доказательство близко к доказательству теоремы 15. Если $x \in \mathfrak{X}$, то существуют такие ограниченные функции g_i^m, что

$$x = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(g_i^m) x_i.$$

Для любого $e \in \mathscr{B}$

$$x_i^* E(e) x = \lim_{m\to\infty} x_i^* S(g_i^m \cdot \chi_e) x_i.$$

Следовательно, из равенства $\mu_i(e) = 0$ следует равенство $E(d) x_i = 0$, если $d \subseteq e$, откуда $x_i^* E(e) x = 0$. Поэтому для любого i существует такая функция $f_i \in L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_i)$, что

$$x_i^* E(e) x = \int_e f_i(\lambda)\, \mu_i(d\lambda).$$

Поскольку

$$\sup_i \int_{\Lambda} |f_i(\lambda)|\, \mu_i(d\lambda) = \sup_i v\{x_i^* E(\cdot) x\} \leqslant 4M |x| \sup_i |x_i^*|$$ [1],

то линейное отображение $T: x \to [f_1, \ldots, f_n]$, действующее из $\mathfrak{X}$ в $\sum_{i=1}^{n} L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_i)$, непрерывно. Пусть теперь $e_m = \{\lambda \mid |f_1(\lambda)| \leqslant m, i = 1, \ldots, n\}$. Мы покажем, что

$$(*) \qquad E(e_m) x = \sum_{i=1}^{n} S(f_i \cdot \chi_{e_m}) x_i, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Зафиксируем номер m и элемент $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Мы можем найти такие функции $p_i \in L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_i)$, что

$$x^* E(e) x_i = \int_e p_i(\lambda)\, \mu_i(d\lambda), \qquad e \in \mathscr{B}.$$

---

[1]) См. прмечание на стр. 360.— *Прим. перев.*

Если d — произвольное подмножество из e_m, на котором $p_1, \ldots, p_n$ ограничены, то

$$\sum_{i=1}^{n} x^* S(g_i^k) E(d) x_i = \sum_{i=1}^{n} \int_d g_i^k(\lambda) p_i(\lambda) \mu_i(d\lambda) \to$$

$$\to \sum_{i=1}^{n} \int_d f_i(\lambda) p_i(\lambda) \mu_i(d\lambda) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x^* S(f_i \chi_d) x_i.$$

С другой стороны,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x^* S(g_i^k) E(d) x_i = x^* E(d) x.$$

Итак,

$$x^* E(d) x = \sum_{i=1}^{n} x^* S(f_i \cdot \chi_d) x_i$$

для всех множеств d указанного вида, откуда

$$x^* E(e_m) x = \sum_{i=1}^{n} x^* S(f_i \cdot \chi_{e_m}) x_i.$$

Поскольку элемент x^* выбран произвольно, соотношение (*) доказано. Полагая $m \to \infty$, приходим к утверждению (b). Из (b) следует, что если $Tx = 0$, то $x = 0$. Так как область значений оператора T содержит все строки $[f_1, \ldots, f_n]$, где f_i — произвольные ограниченные функции, то она плотна в $\sum_{i=1}^{n} L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \mu_i)$, ч. т. д.

20. Следствие. *Если выполнены условия предыдущей теоремы, то* $[\bigvee_{i\in\sigma} \mathfrak{M}(x_i)] \cap [\bigvee_{j\in\sigma'} \mathfrak{M}(x_j)] = (0)$ *для любого разбиения* $[\sigma, \sigma']$ *множества* $[1, \ldots, n]$.

Доказательство. Допустим, например, что $0 \neq z \in \bigvee_{i=1}^{p} \mathfrak{M}(x_i) \cap \bigcap \bigvee_{i=p+1}^{n} \mathfrak{M}(x_i)$. Тогда найдутся такое множество $e \in \mathscr{B}$ и такие ограниченные функции g_i, что

$$E(e) z = \sum_{i=1}^{n} S(g_i) E(e) x_i, \qquad E(e) z \neq 0.$$

Предположим, не теряя в общности, что $S(g_n)E(e)x_n \neq 0$. Тогда $S(g_n)E(e)x_n$ принадлежит множеству $\bigvee_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}(x_i)$, а это противоречит условию $\mathfrak{M}(x_n) \cap \bigvee_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}(x_i) = (0)$, ч. т. д.

Теперь мы обратимся к построению функции кратности полной булевой алгебры B^* в $\mathfrak{X}^*$, состоящей из всех операторов E^*, где E пробегает полную булеву алгебру проекторов B. Как уже отмечалось (см. замечания перед определением 11), B^* есть полная булева алгебра проекторов в $\mathfrak{X}^*$, изоморфная B, т. е. $(E \vee F)^* = E^* \vee F^*$, $(E \wedge F)^* = E^* \wedge F^*$ (отсюда сразу следует, что $(\bigvee E_\alpha)^* = \bigvee E_\alpha^*$, $(\bigwedge E_\alpha)^* = \bigwedge E_\alpha^*$ для произвольных множеств $\{E_\alpha\} \subset B$). Мы отмечали также, что нормы операторов из B и B^* ограничены одним и тем же числом и что $E \leqslant F$ в том и только в том случае, если $E^* \leqslant F^*$; областью значений проектора E^* из B^* служит $\mathfrak{X}$-замкнутое линейное многообразие $\{x^* \mid x^*(I-E)\mathfrak{X} = 0\}$. В лемме 10 были выведены свойства полноты B^*. Как было замечено после определения 9, если $\{E_\alpha\} \subset B$, то

$$\left(\bigvee_\alpha E_\alpha^*\right)\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}\,\mathrm{sp}\,\{E_\alpha^*\mathfrak{X}^*\},$$

$$\left(\bigwedge_\alpha E_\alpha^*\right)\mathfrak{X}^* = \bigcap_\alpha E_\alpha^*\mathfrak{X}^*,$$

$$\left(I - \bigwedge_\alpha E_\alpha^*\right)\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}\,\mathrm{sp}\,\{(I - E_\alpha^*)\,\mathfrak{X}^*\}.$$

Из этих свойств и леммы XVII.3.4 следует, что если $\{E_\alpha^*\}$ — возрастающая обобщенная последовательность из B^*, то

$$\lim_\alpha (E_\alpha^* x^*)\,x = \left(\left(\bigvee_\alpha E_\alpha^*\right)x^*\right)x, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*;$$

если же $\{E_\alpha\}$ — убывающая последовательность, то

$$\lim_\alpha (E_\alpha^* x^*)\,x = \left(\left(\bigwedge_\alpha E_\alpha^*\right)x^*\right)x, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

Действительно, согласно лемме XVII.3.4, для возрастающей обобщенной последовательности $\{E_\alpha\}$ последовательность $\{E_\alpha x\}$ сильно сходится, откуда

$$\lim_\alpha x^* E_\alpha x = x^*\left(\bigvee_\alpha E_\alpha\right)x, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad x^* \in \mathfrak{X}^*,$$

но так как $(\bigvee E_\alpha)^* = \bigvee E_\alpha^*$, то

$$\lim_\alpha (E_\alpha^* x^*)\,x = \left(\left(\bigvee_\alpha E_\alpha\right)^* x^*\right)x = \left(\left(\bigvee_\alpha E_\alpha^*\right)x^*\right)x.$$

Аналогично разбирается случай убывающей последовательности.

Если $x^* \in \mathfrak{X}^*$, то через $\mathfrak{N}(x^*)$ обозначим замыкание в $\mathfrak{X}$-топологии линейной оболочки множества $\{E^*x^* \mid E^* \in B^*\}$; назовем $\mathfrak{N}(x^*)$ *циклическим подпространством*, порожденным элементом x^*. Эти подпространства будут служить основными элементами при построении теории кратности в $\mathfrak{X}^*$. Через $\mathscr{C}^*$ обозначим семейство всех проекторов из B^*, удовлетворяющих условию счетности цепей. Ясно, что $E^* \in \mathscr{C}^*$ тогда и только тогда, когда $E \in \mathscr{C}$. Проектор $\bigwedge \{E^* \mid E^*x^* = x^*\}$ назовем *проектором-носителем* элемента x^*.

21. Лемма. *Семейство $\mathscr{C}^*$ является плотным σ-идеалом в B^*. Каждый проектор $E^* \in \mathscr{C}^*$ является проектором-носителем некоторого вектора из $\mathfrak{X}^*$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 5. Чтобы доказать второе, возьмем проектор $E^* \in \mathscr{C}^*$; напомним, что по лемме 5 E есть проектор-носитель вектора $x_0 \in \mathfrak{X}$. Выберем элемент x_0^*, как в следствии 14. Мы можем считать, что $E^*x_0^* = x_0^*$ (в противном случае возьмем $E^*x_0^*$ вместо x_0^*). Пусть $F^* \in B^*$ и $F^*x_0^* = x_0^*$. Тогда $(I^* - F^*)\,x_0^* = 0$. Следовательно, $x_0^*(I - F)\,x_0 = 0$, откуда $Fx_0 = x_0$. Итак, $F \geqslant E$ и потому $F^* \geqslant E^*$. Таким образом, E^* есть проектор-носитель элемента x_0^*, ч. т. д.

Вообще говоря, как это видно из следующего примера, не каждый проектор-носитель из B^* принадлежит семейству $\mathscr{C}^*$. Пусть R — вещественная прямая, Γ есть σ-поле всех подмножеств из R и γ — мера, сопоставляющая каждой точке массу 1. Пусть $\mathfrak{X} = L_1(R, \Gamma, \gamma)$ и $\mathfrak{X}^* = M(R)$ — банахово пространство всех ограниченных функций на R. Для любого $e \in \Gamma$ положим $(E(e)f)(r) = \delta_r^e f(r)$, где $\delta_r^e = 0$, если $r \notin e$, $\delta_r^e = 1$, если $r \in e$. Мы получили полную булеву алгебру проекторов, а семейство $\mathscr{C}$ образовано проекторами, соответствующими счетным множествам. Если x^* — функция из $M(R)$, тождественно равная 1, то ее носителем является I^*, причем I^* не лежит в $\mathscr{C}^*$.

22. Определение. Если $E^* \in \mathscr{C}^*$, то *кратностью* проектора E^* мы назовем наименьшую мощность $m(E^*)$ множеств A векторов из $\mathfrak{X}^*$, удовлетворяющих следующему условию: $E^*\mathfrak{X}^*$ есть замыкание в $\mathfrak{X}^*$-топологии линейной оболочки множества $\{\mathfrak{N}(x^*) \mid x^* \in A\}$.

В следующей лемме устанавливается свойство непрерывности m:

23. Лемма. *Если E^*, $F^* \in \mathscr{C}^*$ и $F^* \leqslant E^*$, то $m(F^*) \leqslant m(E^*)$. Если $\{E_\alpha^*\} \subseteq \mathscr{C}^*$ и $E_0^* = \bigvee E_\alpha^* \in \mathscr{C}^*$, то $m(E_0^*) = \bigvee m(E_0^*)$.*

Доказательство почти такое же, как в лемме 7. Например, для доказательства второго утверждения мы показываем сначала, применяя лемму Цорна, что $E_0^* = \bigvee_{n=1}^{\infty} G_n^*$, где G_n^* принадлежит $\mathscr{C}^*$ и мажорирует некоторый $E_{\alpha_n}^*$. Найдутся такие семейства $\{x_k^{*k}\}$, что $G_k^*\mathfrak{X}^*$ есть замыкание в $\mathfrak{X}$-топологии линейной оболочки множества $\{\mathfrak{N}(x_n^{*k}) \mid 1 \leqslant n \leqslant n_0\}$, $n_0 = \bigvee m(E_\alpha^*)$. Тогда функционалы $y_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k^{*k}$ порождают $E_0^*\mathfrak{X}$, ч. т. д.

Из теоремы 3 вытекает

24. Теорема. *Существует единственная функция кратности m, определенная на B^* и удовлетворяющая следующему условию: для любого $F^* \in \mathscr{C}^*$, $m(F^*)$ есть наименьшая мощность множества циклических подпространств, порождающих в $\mathfrak{X}$-топологии $F^*\mathfrak{X}^*$. Существует, и притом единственное, разложение единицы $I^* = \bigvee F_n^*$ на попарно дизъюнктные проекторы, такие, что если $F_n^* \neq 0$, то F_n^* имеет однородную кратность n.*

Мы можем рассматривать B^* как проекторнозначную меру на борелевских множествах $\mathscr{B}$ из Λ. Мера $E^*(\cdot)\,x^*x$ счетно аддитивна для любых $x \in \mathfrak{X}$ и $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Однако если $\mathfrak{X}$ нерефлексивно, то векторная мера $E^*(\cdot)\,x^*$ может не быть счетно аддитивной. Если f — ограниченная борелевская функция, то интеграл $S^*(f) = \int_\Lambda f(\lambda)\,E^*(d\lambda)$ существует в равномерной операторной топологии и ясно, что $S^*(f)$ сопряжен с оператором $S(f) = \int_\Lambda f(\lambda)\,E(d\lambda)$. Таким образом, если f — неограниченная функция, то естественно определить $S^*(f)$ как оператор, сопряженный с оператором $S(f)$, который замкнут и имеет плотную область определения. Другими словами, $\mathfrak{D}(S^*(f))$ есть множество всех таких x^*, что функционал $z^*(x) = x^*S(f)\,x$ непрерывен по x в $\mathfrak{D}(S(f))$ и $S^*(f)\,x^* = z^*$ для $x^* \in \mathfrak{D}(S^*(f))$.

Доказательство следующей леммы очевидно, и потому мы его не приводим.

25. Лемма. (a) *Оператор $S^*(f)$ замкнут, и $\mathfrak{D}(S^*(f))$ является $\mathfrak{X}$-плотным в $\mathfrak{X}^*$.*

(b) *Пусть $e_m = \{\lambda \mid |f(\lambda)| \leqslant m\}$. Тогда $x^* \in \mathfrak{D}(S^*(f))$ в том и только в том случае, если*

$$\lim_{n\to\infty} S^*(f \cdot \chi_{e_m})\,x^*x \text{ существует для каждого } x \in \mathfrak{X}.$$

Если этот предел существует, то он равен $S^*(f)\,x^*x$.

(c) *Если* g — *ограниченная функция и* $x^* \in \mathfrak{D}(S^*(f))$, *то* $S^*(g)x^* \in \mathfrak{D}(S^*(f))$ *и* $S^*(g)S^*(f)x^* = S^*(f)S^*(g)x^*$.

А теперь мы хотим доказать равенство $\mathfrak{N}(x^*) = \{S^*(f)x^* \mid x^* \in \in \mathfrak{D}(S^*(f))\}$.

Для этого, а также и для других целей нам понадобится теорема отделимости, аналогичная теореме 12.

26. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{N}$ *есть* $\mathfrak{X}$-*замкнутое инвариантное подпространство в* $\mathfrak{X}^*$ *и* x_0^* — *функционал, носитель которого содержится в* $\mathscr{C}^*$. *Если* $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}(x_0^*) = (0)$, *то существует такой вектор* $x_0 \in \mathfrak{X}$, *что*

(1) $y^*(x_0) = 0$ *для всех* $y^* \in \mathfrak{N}$;

(2) $S^*(f)x_0^*x_0 > 0$ *для любой ограниченной неотрицательной борелевской функции* f, *удовлетворяющей условию* $S^*(f)x_0^* \neq 0$.

Доказательство. Мы только наметим доказательство, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 12. Как и раньше, достаточно ограничиться случаем, когда носителем x_0^* является I^*. Известно (см. теорему V.3.9), что $\mathfrak{X}$-непрерывные функционалы на $\mathfrak{X}^*$ — это в точности те функционалы, которые порождены векторами из $\mathfrak{X}$. К тому же в замечании после следствия 20 было показано, что если $\{G_\alpha^*\}$ — убывающая обобщенная последовательность в B^*, то $\lim G_\alpha^* x^*(x) = (\bigwedge G_\alpha^*)\, x^*(x)$ для $x \in \mathfrak{X}$ и $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Из этих двух фактов следует, как и раньше, что если $0 \neq F^* \in B^*$, то найдутся такие проектор G^* в B^* и ненулевой вектор y в $\mathfrak{X}$, что

(i) $G^* = \bigwedge\{E^* \mid E^*x^*y = x^*y, \quad x^* \in \mathfrak{N}(x_0^*)\}$;

(ii) $y^*y = 0$ для $y^* \in \mathfrak{N}$;

(iii) $0 \neq G^* \leqslant F^*$.

Используя лемму Цорна, представим I^* в виде суммы элементов последовательности попарно дизъюнктных проекторов G_n^*, каждый из которых удовлетворяет условию (i) для некоторого вектора y_n с нормой 1. Искомый вектор x_0 получается по формуле $x_0 = S(f)\, y_0$, где $y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} y_n$, а f — производная Радона — Никодима полной вариации $x_0^* E(\cdot)\, y_0$ относительно $x_0^*\, E(\cdot)\, y_0$.

→27. Теорема. *Если* $x_0^* \in \mathfrak{X}^*$, *то*

$$\mathfrak{N}(x_0^*) = \{S^*(f)\, x_0^* \mid x_0^* \in \mathfrak{D}(S^*(f))\}.$$

Доказательство. Из леммы 25 ясно, что каждый функционал $S^*(f)x_0^*$ лежит в $\mathfrak{N}(x_0^*)$. При доказательстве обратного утверждения достаточно ограничиться случаем, когда носитель x_0^* лежит в $\mathscr{C}^*$, так как он всегда является суммой попарно дизъюнктных проекторов из $\mathscr{C}^*$. Если $z^* \in \mathfrak{N}(x_0^*)$, то найдется такая обобщенная последовательность $\{g_\alpha\}$ конечных линейных комбинаций характеристических функций, что

$$S^*(g_\alpha)\,x_0^*(x) \to z^*(x), \qquad x \in \mathfrak{X}.$$

По теореме 26 существует вектор x_0, удовлетворяющий условию

$$\nu_0 = E^*(\cdot)\,x_0^* x_0 = x_0^* E(\cdot)\,x_0 \geqslant 0,$$

и если $E^*(e_0)\,x_0^* x_0 = 0$, то $E^*(e_0)\,x_0^* = 0$. Ясно, что мера $z^*E(\cdot)\,x_0$ подчинена мере ν_0, и поэтому существует такая функция $f \in L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \nu_0)$, что

$$z^*E(e)\,x_0 = \int_e f(\lambda)\,\nu_0(d\lambda), \qquad e \in \mathscr{B}.$$

Если h — ограниченная борелевская функция, то

$$\begin{aligned}\int_\Lambda f(\lambda)\,h(\lambda)\,\nu_0(d\lambda) = z^*S(h)\,x_0 &= \\ &= \lim_\alpha S^*(g_\alpha)\,x_0^* S(h)\,x_0 = \\ &= \lim_\alpha \int_\Lambda g_\alpha(\lambda)\,h(\lambda)\,\nu_0(d\lambda),\end{aligned}$$

и, следовательно, $g_\alpha \to f$ слабо в $L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \nu_0)$.

Осталось показать, что $z^* = S^*(f)\,x_0^*$. Если $x \in \mathfrak{X}$, то мера $x_0^* E(\cdot)x = E^*(\cdot)\,x_0^* x$ подчинена мере ν_0, ибо, как указано выше, из равенства $\nu_0(e) = 0$ вытекает равенство $E^*(e)\,x_0^* = 0$. Выберем функцию $p \in L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \nu_0)$ так, что

$$x_0^* E(e)\,x = \int_e p(\lambda)\,\nu_0(d\lambda), \quad e \in \mathscr{B},$$

и положим $e_m\{\lambda \mid |f(\lambda)| \leqslant m\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Если d — такое подмножество из e_m, на котором p ограничена, и $g_\alpha \to f$ слабо, то

$$S^*(g_\alpha)\,x_0^* E(d)\,x = \int_d g_\alpha(\lambda)\,p(\lambda)\,\nu_0(d\lambda) \to \int_d f(\lambda)\,\nu_0(d\lambda).$$

Следовательно, $z^*E(d)\,x = S^*(f \cdot \chi_d)\,x_0^* x$. Отсюда предельным переходом получаем равенство $z^*E(e_m)\,x = S^*(f \cdot \chi_{e_m})\,x_0^* x$ и, поскольку x произвольно, $E^*(e_m)\,z^* = S^*(f \cdot \chi_{e_m})\,x_0^*$. Отсюда следует, что $x_0^* \in \mathfrak{D}(S^*(f))$ и $z^* = S^*(f)\,x_0^*$, ч. т. д.

Следующая лемма аналогична лемме 17.

28. Лемма. *Пусть $\mathfrak{N}$ есть $\mathfrak{X}$-замкнутое инвариантное подпространство в $\mathfrak{X}^*$ и $y_0^* \in \mathfrak{X}^*$. Тогда среди проекторов $E_0^* \in B^*$, удовле-*

творяющих условию $E_0^* y_0^* \in \mathfrak{N}$, существует максимальный проектор E_0^*. При этом $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}((I^* - E_0^*) x_0^*) = (0)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 17, и потому мы его опускаем.

Рассмотрим теперь подпространство $E^*\mathfrak{X}^*$, где $E^* \in \mathscr{C}^*$ и имеет однородную кратность n. Мы получим примерно те же результаты, что и для $\mathfrak{X}$. Так как B^* удовлетворяет более слабому условию полноты, то и результат, который мы получим о представлении B^*, будет менее сильным; это объясняется тем, что $\mathfrak{X}^*$ теперь наделяется $\mathfrak{X}$-топологией. Как и раньше, мы ограничимся случаем, когда E^* — тождественный оператор I^*.

29. Лемма. *Пусть тождественный оператор I^* из B^* удовлетворяет условию счетности цепей и имеет конечную однородную кратность n. Если $x_1^*, \ldots, x_n^*$ — функционалы, удовлетворяющие условию $\mathfrak{X}^* = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{N}(x_i^*)$ (здесь мы пишем $\bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{N}(x_i^*)$ вместо $\mathfrak{X}\,\mathrm{sp}\{\mathfrak{N}(x_i^*),\ i = 1, \ldots, n\}$), то*

(1) *носитель каждого x_i^* есть I^*;*

(2) $\mathfrak{N}(x_i^*) \cap \bigvee_{j \neq i} \mathfrak{N}(x_i^*) = 0, \quad i = 1, \ldots, n;$

(3) *для любого i существует такой вектор $x_i \in \mathfrak{X}$, что $y^*(x_i) = 0$ для $y^* \in \bigvee_{j \neq i} \mathfrak{N}(x_j^*)$ и $S^*(f) x_i^* x_i > 0$ для любой неотрицательной ограниченной борелевской функции f, удовлетворяющей условию $S^*(f) x_i^* \neq 0$.*

Доказательство. Лемма выводится из леммы 28 и теоремы 26 точно так же, как лемма 18 была получена из леммы 17 и теоремы 12, ч. т. д.

→ 30. Теорема. *Пусть выполнены предположения леммы 29. Тогда существует такое линейное взаимно однозначное отображение U пространства $\mathfrak{X}^*$ на плотное (по норме) подпространство пространства $\sum_{i=1}^{n} L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \nu_i)$, $\nu_i = E^*(\cdot) x_i^* x_i$, что если $Ux^* = [f_1, \ldots, f_n]$, то*

$$\text{(a)} \quad E^*(e) x^* x_i = \int_e f_i(\lambda)\, \nu_i(d\lambda), \quad e \in \mathscr{B}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\text{(b)} \quad x^*(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S^*(f_i \cdot \chi_{e_m}) x_i^*(x), \quad x \in \mathfrak{X},$$

где

$$e_m = \{\lambda \mid |f_i(\lambda)| \leqslant m, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Отображение U непрерывно относительно топологий, порождаемых в $\mathfrak{X}^*$ и $\sum_{i=1}^{n} L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \nu_i)$ их нормами, а также относительно $\mathfrak{X}$-топологии в $\mathfrak{X}^*$ и слабой топологии в $\sum_{i=1}^{n} L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \nu_i)$.

Доказательство. Доказательство в основном аналогично доказательству теоремы 19. Для данного $x^* \in \mathfrak{X}^*$ найдется такая обобщенная последовательность ограниченных функций g_i^α, что

$$x^*x = \lim \sum_{i=1}^{n} S^*(g_i^\alpha)\, x^*(x), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Если $e \in \mathscr{B}$, то

$$x^*E(e)\, x_i = \lim_{\alpha} x^*S(g_i^\alpha \cdot \chi_e)\, x_i,$$

и, согласно теореме Радона—Никодима, существуют такие функции $[f_1, \ldots, f_n]$, что

$$x^*E(e)\, x_i = \int_e f_i(\lambda)\, \nu_i(d\lambda), \quad e \in \mathscr{B},$$

откуда получаем равенство (a). Равенство (b) и непрерывность U относительно топологий, порождаемых нормами, доказывается так же, как в теореме 19.

Пусть теперь $z_\alpha^*(x) \to z_0^*(x)$ для любого $x \in \mathfrak{X}$. Возьмем произвольный набор $[h_1, \ldots, h_n]$ ограниченных борелевских функций. Тогда

$$z_\alpha^* S(h_i)\, x_i \to z_0^* S(h_i)\, x_i$$

для каждого $i = 1, \ldots, n$. Положим $Uz_\alpha^* = [f_1^\alpha, \ldots, f_n^\alpha]$ и $Uz_0^* = [f_1^0, \ldots, f_n^0]$. Используя лемму 29, получаем

$$\begin{aligned} z_\alpha^* S(h_i)\, x_i &= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{n} S^*(f_j^\alpha \cdot \chi_{e_m})\, x_j^* S(h_i)\, x_i = \\ &= \lim_{m\to\infty} S^*(f_i^\alpha \cdot \chi_{e_m})\, x_i^* S(h_i)\, x_i = \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{e_m} f_i^\alpha(\lambda)\, h_i(\lambda)\, \nu_i(d\lambda) = \\ &= \int_\Lambda f_i^\alpha(\lambda)\, h_i(\lambda)\, \nu_i(d\lambda). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$z_0^* S(h_i)\, x_i = \int_\Lambda f_i^0(\lambda)\, h_i(\lambda)\, \nu_i(d\lambda).$$

Следовательно,

$$\lim_{\alpha} \int_{\Lambda} f_i^{\alpha}(\lambda)\, h_i(\lambda)\, \nu_i(d\lambda) = \int_{\Lambda} f_i^{0}(\lambda)\, h_i(\lambda)\, \nu_i(d\lambda), \qquad i=1, \ldots, n,$$

откуда следует непрерывность U относительно $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$ и слабой топологии пространства $\sum_{i=1}^{n} L_1(\Lambda, \mathscr{B}, \nu_i)$, ч. т. д.

31. Следствие. *Если выполнены предположения теоремы* 30, *то* $[\bigvee_{i \in \sigma} \mathfrak{N}(x_i^*)] \cap [\bigvee_{j \in \sigma'} \mathfrak{N}(x_j^*)] = (0)$ *для любого разбиения* $[\sigma, \sigma']$ *множества* $[1, \ldots, n]$.

Теперь докажем следующую важную теорему:

→ 32. Теорема. *Пусть B — полная булева алгебра проекторов в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ и B^* — булева алгебра операторов, сопряженных с операторами из B. Тогда проектор E из B имеет конечную однородную кратность n в том и только в том случае, если сопряженный оператор E^* из B^* имеет конечную однородную кратность n.*

Доказательство. Можно считать, что E и E^* удовлетворяют условию счетности цепей. Так как любой проектор представляет собой объединение проекторов с однородной кратностью, достаточно проверить два утверждения: (а) если E имеет конечную однородную кратность n, то $m(E^*) \leqslant n$; (b) если E^* имеет конечную однородную кратность n, то $m(E) \leqslant n$. Для доказательства утверждения (а) предположим, что $E\mathfrak{X} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(x_i)$, и выберем x_i^*, как в лемме 18. Если допустить, что $E^*\mathfrak{X}^* \neq \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{N}(x_i^*)$, то по теореме Хана — Банаха в $\mathfrak{X}$-топологии пространства $\mathfrak{X}^*$ (см. следствие V.3.12) найдется такой ненулевой вектор $x \in E\mathfrak{X}$, что $y^*x = 0$ для всех $y^* \in \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{N}(x_i^*)$. Тогда $x_i^*E(e)\,x = 0$, $e \in \mathscr{B}$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $x = 0$, ибо отображение T из теоремы 19 взаимно однозначно. Подобным же образом доказательство утверждения (b) выводится из взаимной однозначности U (теорема 30), ч. т. д.

33. Следствие. *Если n — целое число и $E \in B$, то $m(E) = n$ в том и только в том случае, если $m(E^*) = n$.*

34. Следствие. *Если $\mathfrak{X}$ сепарабельно, то $m(E) = m(E^*)$ для любого $E \in B$.*

Доказательство. Для каждого *целого* n возьмем проекторы E_n и F_n^* однородной кратности n, указанные соответственно в теоремах 8 и 24. Тогда, согласно теореме 32, F_n^* сопряжен с E_n, т. е. $F_n^* = E_n^*$. Так как $\mathfrak{X}$ сепарабельно, то проектор $E_0 = I - \bigvee_{n=1}^{\infty} E_n$ либо нулевой, либо имеет однородную кратность $\aleph_0$. Теперь нам осталось только проверить, что если $E_0 \neq 0$, то $m(E_0^*) = \aleph_0$. По теореме V.4.2 единичная сфера в $\mathfrak{X}^*$ компактна в $\mathfrak{X}$-топологии, но так как $\mathfrak{X}$ сепарабельно, то в силу теоремы V.5.1 $\mathfrak{X}$-топология этой сферы порождается метрикой; отсюда следует, что сфера в $\mathfrak{X}^*$ сепарабельна в $\mathfrak{X}$-топологии. Следовательно, $m(E_0^*) \leqslant \aleph_0$ и из определения проекторов F_n^* видно, что E_0^* не мажорирует никакого проектора с конечной однородной кратностью, ч. т. д.

Теперь мы рассмотрим вопрос о подобии некоторых классов спектральных операторов скалярного типа. Пусть Q — оператор скалярного типа с разложением единицы $E(\cdot)$. Так как $E(\cdot)$ счетно аддитивно в сильной операторной топологии, то булева алгебра B, состоящая из всех проекторов $E(\cdot)$, σ-полна. Следовательно, ее замыкание $\bar{B}^s$ в сильной топологии полно (см. лемму XVII.3.23) и к $\bar{B}^s$ применима построенная выше теория кратности. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\bar{B}^s$ не содержит проекторов бесконечной однородной кратности. Мы хотим показать, что при этом условии оператор Q подобен (в некотором уточняемом ниже смысле) нормальному оператору в гильбертовом пространстве. Не стремясь к излишней общности, мы ограничимся случаем, когда *алгебра B полна и удовлетворяет условию счетности цепей*. Оба эти условия заведомо выполняются в случае сепарабельного пространства $\mathfrak{X}$, так что до конца этого параграфа $\mathfrak{X}$ предполагается сепарабельным.

По теореме 8 существуют такие попарно дизъюнктные проекторы E_n, $n = 1, 2, \ldots$, что $I = \bigvee_{n=1}^{\infty} E_n$ и каждый E_n либо нулевой, либо имеет однородную кратность n (напомним, что $E_{\aleph_0} = 0$). Для каждого n найдется такое борелевское множество e_n на плоскости, что $E_n = E(e_n)$. Мы можем считать, что множества e_n попарно не пересекаются и $\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$ есть вся плоскость $\mathfrak{P}$.

Зафиксируем такое n, что $E_n \neq 0$. Согласно лемме 18 и теореме 19, существуют такие векторы $x_1, \ldots, x_n$ и такие функционалы $x_1^*, \ldots, x_n^*$, что $E_n\mathfrak{X} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{M}(x_i)$, $x_i^*\left(\bigvee_{j\neq i} \mathfrak{M}(x_j)\right) = 0$, при этом мера $\mu_i = x_i^* E(\cdot) x_i$, определенная на борелевских множествах плоскости $\mathfrak{P}$ положительна и равна нулю вне e_n. Кроме того, существует естественное непрерывное линейное отображение T_n пространства $E_n\mathfrak{X}$ в $\sum_{i=1}^{n} L_1(\mathfrak{P}, \mathscr{B}, \mu_i)$, обладающее обратным с плотной областью определения. Пусть W_n — тождественное отображение пространства $\mathfrak{H}_n = \sum_{i=1}^{n} L_2(\mathfrak{P}, \mathscr{B}, \mu_i)$ в $\sum_{i=1}^{n} L_1(\mathfrak{P}, \mathscr{B}, \mu_i)$. Так как мера μ_i конечна, то W_n определено всюду на $\mathfrak{H}_n$ и непрерывно, а отображение $A_n = W_n^{-1}T_n$, действующее из $E_n\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{H}_n$, определено на плотном подмножестве из $E_n\mathfrak{X}$, замкнуто и имеет обратное отображение T_n^{-1}, также определенное на плотном множестве из $\mathfrak{H}_n$. Превратим $\mathfrak{H}_n$ в гильбертово пространство, определив норму элемента $[h_1, \ldots, h_n]$ формулой

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathfrak{P}} |h_i(\lambda)|^2 \mu_i(d\lambda)\right]^{1/2}.$$

Легко видеть, что

$$\mathfrak{D}(A_n) = \{x \in E_n\mathfrak{X} \mid (T_n x)_i(\cdot) \in L_2(\mathfrak{P}, \mathscr{B}, \mu_i), \quad i = 1, \ldots, n\},$$

$$\mathfrak{D}(A_n^{-1}) = \{[h_1, \ldots, h_n] \in \mathfrak{H}_n \mid \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S(h_i \cdot \chi_{e_m}) x_i \quad \text{существует}\},$$

где $e_m = \{\lambda \mid |h_i(\lambda)| \leqslant m, i = 1, \ldots, n\}$. Кроме того, если g — ограниченная борелевская функция на $\mathfrak{P}$, то замыкание в $\mathfrak{H}_n$ оператора $A_n S(g) A_n^{-1}$, определенного на плотном многообразии, переводит вектор $[h_1, \ldots, h_n]$ в $[gh_1, \ldots, gh_n]$, т. е. сводится к умножению на g. Взяв в качестве g характеристические функции χ_e борелевских множеств, получаем изоморфизм $E(e) \to \chi_e$ множества проекторов из B, содержащихся в E_n, на булеву алгебру $\widetilde{B}_n$ самосопряженных проекторов в $\mathfrak{H}_n$. Кроме того, $\widetilde{B}_n$ есть разложение единицы ограниченного нормального оператора $\widetilde{Q}_n = \int_{e_n} \lambda \widetilde{E}(d\lambda)$, который является замыканием оператора $A_n E(e_n) Q A_n^{-1}$.

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $\mathfrak{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}_n$, являющееся прямой суммой гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_n$, элементы которого мы будем обозначать через h. Построим отображение $A\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{H}$. Для этого положим

$$\mathfrak{D}(A) = \{x \mid E_n x \in \mathfrak{D}(A_n) \text{ для всех } n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} A_n E_n x \quad \text{сходится в } \mathfrak{H}\},$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A_n E_n x, \qquad x \in \mathfrak{D}(A).$$

В следующей лемме указаны свойства отображения A.

35. Лемма. *Оператор* $A\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{H}$ *замкнут, определен на плотном множестве и имеет обратный* A^{-1}, *обладающий тем же свойством. Если* P_n — *ортогональный проектор из* $\mathfrak{H}$ *в* $\mathfrak{H}_n$, *то*

$$\mathfrak{D}(A^{-1}) = \{h \mid P_n h \in \mathfrak{D}(A_n^{-1}) \text{ для всех } n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-1} P_n h \text{ сходится в } \mathfrak{X}\}$$

и

$$A^{-1}h = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-1} P_n h, \qquad h \in \mathfrak{D}(A^{-1}).$$

Доказательство. Пусть $y_m \in \mathfrak{D}(A)$, $y_m \to y_0$ и $Ay_m \to h_0$. Тогда $E_n y_m \to E_n y_0$ и $P_n A y_m = A_n E_n y_m \to P_n h_0$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как A_n замкнут, то $E_n y_0 \in \mathfrak{D}(A_n)$ и $A_n E_n y_0 = P_n h_0$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n E_n y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n h_0 = h_0.$$

Отсюда $y_0 \in \mathfrak{D}(A)$ и $Ay_0 = h_0$, так что A замкнут. Если $Ax = 0$, то $A_n E_n x = E_n A x = 0$. Поскольку существует A_n^{-1}, то $E_n x = 0$, откуда $x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(x) = 0$, и потому существует A^{-1}. Так как каждый A_n^{-1} имеет плотную область определения, то и A^{-1} обладает этим свойством. Формула для $\mathfrak{D}(A^{-1})$ проверяется без труда, ч. т. д.

Следующая теорема легко выводится из изложенного выше.

→ 36. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *сепарабельное комплексное банахово пространство и* Q — *ограниченный спектральный оператор скалярного типа. Пусть* B — *множество всех проекторов из разложения единицы* $E(\cdot)$ *оператора* Q. *Предположим, что* B *не содержит проекторов с бесконечной однородной кратностью. Если* $\mathfrak{H}$ — *гильбертово пространство и* A — *замкнутое линейное отображение из* $\mathfrak{X}$ *в* $\mathfrak{H}$ *с плотной областью определения, построенные в лемме* 35, *то замыкание* $\tilde{Q}$ *оператора* AQA^{-1} *есть ограниченный нормальный оператор. Для каждой ограниченной борелевской функции* g *на плоскости обозначим через* $\tilde{S}(g)$ *замыкание оператора* $AS(g)A^{-1}$. *Тогда соответствие* $\tau\colon S(g) \to \tilde{S}(g)$ *естественным образом согласовано с операционными исчислениями в* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{H}$ *и*

$$\tilde{Q} = \int_{\sigma(Q)} \lambda \tilde{E}(d\lambda),$$

где $\tau E(e) = \tilde{E}(e)$, $e \in \mathscr{B}$.

Наконец, мы хотим показать, что оператор A порождает взаимно однозначное соответствие между подпространствами в $\mathfrak{X}$, инвариантными относительно B, и подпространствами в $\mathfrak{H}$, инвариантными относительно $\tilde{B}$, разложения единицы оператора $\tilde{Q}$.

37. Определение. Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое инвариантное подпространство в $\mathfrak{X}$, то через $\Phi(\mathfrak{M})$ обозначим замыкание в $\mathfrak{H}$ множества $A(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{D}(A))$. Аналогично если $\mathfrak{K}$ — замкнутое инвариантное подпространство в $\mathfrak{H}$, то через $\Psi(\mathfrak{K})$ обозначим замыкание в $\mathfrak{X}$ множества $A^{-1}(\mathfrak{K} \cap \mathfrak{D}(A^{-1}))$.

Из теоремы 19(b) и леммы 35 следует, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{D}(A)$ плотно в $\mathfrak{M}$. Аналогично, $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{D}(A^{-1})$ плотно в $\mathfrak{K}$. Могло бы случиться так, что $\Phi(\mathfrak{M})$ содержит векторы из $\mathfrak{D}(A^{-1})$, не лежащие в $A(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{D}(A))$; в этом случае $\mathfrak{M}$ было бы собственным подпространством в $\Psi(\Phi(\mathfrak{M}))$. Мы покажем, однако, что это невозможно, другими словами, докажем, что $\Psi(\Phi(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M}$, $\Phi(\Psi(\mathfrak{K})) = \mathfrak{K}$ для всех $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$. Это свойство инвариантных подпространств мы выведем из спектральных свойств подпространств $E_n\mathfrak{X}$, $n = 1, 2, \ldots$. Докажем предварительно лемму об отображениях A_n.

38. Лемма. (a) *Если* $\mathfrak{M}$ — *инвариантное подпространство из* $E_n\mathfrak{X}$, *то*

$$\Phi(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{D}(A_n^{-1}) \subseteq A_n[\mathfrak{M} \cap \mathfrak{D}(A_n)].$$

(b) *Если* $\mathfrak{K}$ — *инвариантное подпространство из* $\mathfrak{H}_n$, *то*

$$\Psi(\mathfrak{K}) \cap \mathfrak{D}(A_n) \subseteq A_n^{-1}[\mathfrak{K} \cap \mathfrak{D}(A_n^{-1})].$$

Доказательство. Чтобы доказать (a), возьмем элемент $h^0 = [h_1^0, \ldots, h_n^0]$ из $\Phi(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{D}(A_n^{-1}) \subseteq \mathfrak{H}_n$; пусть $h^0 = A_n y_0$. Следует показать, что $y_0 \in \mathfrak{M}$. Существуют такие векторы y_m в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{D}(A_n)$, что $A_n y_m = [h_1^m, \ldots, h_n^m] \to [h_1^0, \ldots, h_n^0]$ в пространстве $\mathfrak{H}_n = \sum_{i=1}^{n} L_2(\mathfrak{P}, \mathscr{B}, \mu_i)$. Выделяя нужную подпоследовательность, мы можем считать, что $h_i^m \to h_i^0$ почти всюду относительно меры μ_i, $i = 1, \ldots, n$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое борелевское множество e_ε, что $\mu_i(e'_\varepsilon) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, и $h_i^m \to h_i^0$ равномерно на e_ε. Функции h_i^m ограничены на e_ε, и

$$E(e_\varepsilon) y_m = \sum_{i=1}^{n} S(h_i^m \cdot \chi_{e_\varepsilon}) x_i \to \sum_{i=1}^{n} S(h_i^0 \cdot \chi_e) = E(e_\varepsilon) y_0,$$

откуда $E(e_\varepsilon) y_0 \in \mathfrak{M}$. Теперь очевидные рассуждения, связанные с предельным переходом, показывают, что $y_0 \in \mathfrak{M}$, чем доказано утверждение (a).

Если $y_0 \in \Psi(\mathfrak{K}) \cap \mathfrak{D}(A_n)$ и $y_0 = A_n^{-1} h_0$, то найдется такая последовательность $\{h^m\}$ векторов из $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{D}(A^{-1})$, что $y_m = A_n^{-1} h^m \to y_0$. Тогда $T_n y_m = [h_1^m, \ldots, h_n^m] \to [h_1^0, \ldots, h_n^0]$ в $\sum_{i=1}^{n} L_1(\mathfrak{P}, \mathscr{B}, \mu_i)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое борелевское множество e_ε, что $\tilde{E}(e_\varepsilon) h^m \to \tilde{E}(e_\varepsilon) h^0$ и $\mu_i(e'_\varepsilon) < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Итак, $h_0 \in \mathfrak{K}$, так что $y_0 \in A_n^{-1}[\mathfrak{K} \cap \mathfrak{D}(A_n^{-1})]$, ч. т. д.

39. Теорема. *Пусть выполнены предположения теоремы 36, а Φ, Ψ — отображения, описанные в определении 37. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между инвариантными подпространствами $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{X}$ и инвариантными подпространствами $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{H}$, которые задаются следующими соотношениями*

$$\Psi(\Phi(\mathfrak{M}))=\mathfrak{M}, \quad \Phi(\Psi(\mathfrak{K}))=\mathfrak{K}, \quad \mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{K}\subseteq\mathfrak{H}.$$

Доказательство. Указанные в теореме равенства немедленно следуют из равенств

$$\text{(a)} \qquad \Phi(\mathfrak{M})\cap\mathfrak{D}(A^{-1})=A(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{D}(A))$$

и

$$\text{(b)} \qquad \Psi(\mathfrak{K})\cap\mathfrak{D}(A)=A^{-1}(\mathfrak{K}\cap\mathfrak{D}(A^{-1})).$$

Докажем (a) (доказательство равенства (b) аналогично). Во-первых, ясно, что правая часть (a) содержится в левой. Из леммы 38 следует, что

$$(\#) \quad \Phi(E_n\mathfrak{M})\cap\mathfrak{D}(A^{-1})\subseteq A[(E_n\mathfrak{M})\cap\mathfrak{D}(A)], \quad n=1, 2, \ldots .$$

Далее,

$$(E_n\mathfrak{M})\cap\mathfrak{D}(A)=E_n(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{D}(A))$$

и

$$P_nA(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{D}(A))=AE_n(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{D}(A)).$$

Взяв замыкание обеих частей последнего равенства, находим, что $P_n\Phi(\mathfrak{M})=\Phi(E_n\mathfrak{M})$, $n=1, 2, \ldots$. Положим теперь $h\in\Phi(\mathfrak{M})\cap\cap\mathfrak{D}(A^{-1})$ и $h=Ax$. Для каждого n

$$P_nh\in P_n\Phi(\mathfrak{M})=\Phi(E_n\mathfrak{M}).$$

Отсюда, согласно равенству (#),

$$A^{-1}P_nh=E_nx\in E_n\mathfrak{M},$$

так что

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}E_nx\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{D}(A^{-1}), \qquad \text{ч. т. д.}$$

4. Примечания и дополнения

Содержание этой главы является развитием теории, построенной Бейдом [2]. Как уже указывалось, Ионеску [3] и Шефер [10] рассматривали спектральные операторы в некоторых локально выпуклых пространствах, не всегда предполагая, что областью определения служит все пространство. Таким образом, многие из их результатов применимы также к неограниченным операторам

Нел [1] получил каноническое разложение неограниченного спектрального оператора, доказав следующий результат:

Теорема. *Замкнутый оператор T спектрален в том и только в том случае, если он является минимальным замкнутым расширением оператора вида $S+N$, где S — оператор скалярного типа с разложением единицы E, а N удовлетворяет следующим условиям:*

(a) *если b — ограниченное борелевское множество, то $E(b)\mathfrak{X} \subseteq D(N)$, $E(b)NE(b) = NE(b)$ и $N \mid E(b)\mathfrak{X}$ — квазинильпотентный оператор;*

(b) *если c — борелевское множество, $\beta \notin \bar{c}$ и $b_n = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant n\}$, то последовательность*

$$(\beta I - T)^{-1} E(b_n \cap c)x = \sum_{k=0}^{+\infty} N^k \int_{b_n \cap c} (\beta - \gamma)^{-k-1} E(d\gamma)x$$

ограничена для любого $x \in \mathfrak{X}$.

Теория кратности, изложенная в § 3, принадлежит Бейду [5]. Дьёдонне [20] ранее построил теорию кратности для случая, когда пространство $\mathfrak{X}^*$, сопряженное $\mathfrak{X}$, сепарабельно (отсюда следует, что и $\mathfrak{X}$ сепарабельно). В связи с леммой 3.18 отметим, что, вообще говоря, $\mathfrak{X}$ не является алгебраической прямой суммой подпространств $\mathfrak{M}(x_i)$. Дьёдонне [21] построил тонкий пример банахова пространства $\mathfrak{X}$ и булевой алгебры B проекторов, в которой любой ненулевой проектор E имеет кратность, равную 2, но ни для каких x_1, $x_2 \in \mathfrak{X}$ и $E \in B$ подпространство $E\mathfrak{X}$ не является алгебраической суммой $\mathfrak{M}(Ex_1)$ и $\mathfrak{M}(Ex_2)$.

Остается нерешенным вопрос о соотношении между значениями функций кратности булевых алгебр B и B^* на проекторах бесконечной кратности. Как показано в следствии 3.33, $m(E) = m(E^*)$ для проекторов конечной кратности. Мы не располагаем никакой информацией по этому вопросу. Не ясно даже, будет ли кратность E^* бесконечной, если E имеет бесконечную однородную кратность. Родственная проблема связана с инвариантными подпространствами. Если $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство, то можно определить кратность B в $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, то естественно ожидать, что $m_1(E) \leqslant m_2(E)$, $E \in B$. Это верно, если B не содержит проекторов бесконечной однородной кратности, но в общем случае вопрос остается открытым.

ГЛАВА XIX

Возмущения спектральных операторов с дискретным спектром

1. Введение

В этой главе мы изучим вопрос, затронутый в теореме XVI.5.2; другими словами, мы получим некоторые достаточные условия равномерной ограниченности булевой алгебры проекторов $E(\sigma; T)$, связанной с компонентами спектра оператора, имеющего вполне несвязный спектр. Тем самым мы установим аналитические условия спектральности оператора. Основная идея нашего метода состоит в следующем: если T — спектральный оператор, а оператор P в некотором смысле достаточно мал по сравнению с T, то и оператор $T+P$ спектрален. Оказывается, для того чтобы оператор P можно было считать достаточно малым по сравнению с T, в качестве T следует брать неограниченный оператор. Поэтому основная часть этой главы посвящена возмущениям неограниченных операторов; эта теория применяется затем к возмущениям дифференциальных операторов.

Основная теоретическая часть этой главы содержится в § 2, а точнее в теореме 2.7. В этой теореме методами теории возмущений доказывается, что если T — спектральный оператор, спектр которого есть дискретная последовательность с некоторыми условиями регулярности, если всем точкам спектра $\sigma(T)$, за возможным исключением конечного их числа, соответствуют одномерные спектральные проекторы [1]) и если оператор P в некотором смысле мал по сравнению с T, то $T+P$ — спектральный оператор. Два следующих параграфа посвящены применениям этого основного результата к несимметрическим обыкновенным дифференциальным операторам. В качестве T мы возьмем дифференциальный оператор $i^{-n}(d/dt)^n$ порядка n, определенный на функциях, подчиненных некоторым граничным условиям, на которые будут налагаться некоторые достаточно широкие ограничения типа регулярности. Мы покажем, что если P — произвольный дифференциальный оператор меньшего порядка, то $T+P$ — спектральный оператор. Таким способом будет построен широкий класс несамосопряженных спектральных

[1]) То есть проекторы, имеющие одномерную область значений. — *Прим. перев.*

дифференциальных операторов. В § 4 мы получим общий результат в этом направлении. К сожалению, его доказательство требует длинных вычислений. Поэтому в § 3 мы приводим доказательство спектральности для оператора $-(d/dx)^2$ (с несамосопряженными граничными условиями); это вызвано также и тем, что операторы второго порядка важны для приложений. Хотя результаты § 3 существенно обобщаются в § 4, они являются своего рода подготовкой к более сложному случаю.

В § 5 выясняется, при каких условиях линейная оболочка корневых векторов оператора плотна в пространстве, в котором действует оператор. По-видимому, это имеет место для более широкого класса операторов, нежели тот, которой указан в теореме 2.7.

Случай условной (в противоположность к безусловной) сходимости разложений по собственным функциям является промежуточным между случаем, описанным в теореме 2.7, и общими результатами § 5. В § 6 приведены результаты об условной сходимости разложений по собственным функциям.

2. Основная абстрактная теорема о возмущениях

В этом параграфе мы изучим возмущения операторов с компактной резольвентой. Основной результат дает условия, при которых возмущение спектрального оператора является спектральным. Эти результаты нацелены на изучение несамосопряженных дифференциальных операторов, которому посвящены два следующих параграфа. Так как в этом параграфе часто встречаются операторы с компактной резольвентой, мы введем для них специальное название:

→ 1. Определение. Оператор T называется *дискретным*, если в его резольвентном множестве найдется такая точка λ, что резольвента $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ компактна.

Замечание. В бесконечномерном пространстве дискретный оператор T не может быть ограниченным; действительно, в противном случае по теореме VI.5.4 единичный оператор

$$I = (\lambda I - T)\, R(\lambda; T)$$

компактен, а по теореме IV.3.5 $\mathfrak{X}$ конечномерно.

Результаты двух следующих лемм аналогичны результатам, установленным в гл. VII для ограниченных операторов.

2. Лемма. *Если T дискретен, то*

(a) *его спектр есть счетное множество точек, не имеющее конечных предельных точек*;

(b) *резольвента $R(\lambda; T)$ компактна для всех $\lambda \notin \sigma(T)$*;

(c) *любая точка* λ_0 *из* $\sigma(T)$ *является полюсом некоторого конечного порядка* $\nu(\lambda_0)$ *резольвенты, и если вектор* f *удовлетворяет для некоторого* k *условию*

$$(T - \lambda_0 I)^k f = 0,$$

то f *удовлетворяет также условию*

$$(T - \lambda_0 I)^{\nu(\lambda_0)} f = 0.$$

Множество всех векторов f, *удовлетворяющих условию* $(T - \lambda_0 I)^{\nu(\lambda_0)} f = 0$, *есть конечномерное линейное подпространство; оно называется корневым подпространством, соответствующим собственному значению* λ_0. *Если* $E(\lambda_0;\ T) = E(\lambda_0)$ *есть функция от* T, *соответствующая аналитической функции, равной* 1 *в окрестности* λ_0 *и нулю в окрестности остальных точек спектра оператора* T, *а также в окрестности бесконечности, то* $E(\lambda_0)$ *есть проектор, отображающий* $\mathfrak{X}$ *на корневое подпространство, соответствующее* λ_0.

Доказательство. Мы не ограничим общности, если будем считать, что $0 \notin \sigma(T)$ и T^{-1} компактен. Тогда по теореме VII.4.5 оператор $R(\mu) = (\mu I - T^{-1})^{-1}$ существует для любого комплексного числа μ, за исключением нуля и не более чем счетной последовательности точек $\mu_n \neq 0$, стремящейся к нулю. Для любой из точек μ_n существует такой ненулевой вектор x_n, что $T^{-1}x_n = \mu_n x_n$. Отсюда следует, что $Tx_n = \mu_n^{-1}x_n$, так что $\sigma(T) \supseteq \{\mu_n^{-1}\}$. С другой стороны, если $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \mu_n^{-1}$, $n \geqslant 0$, то, полагая $\lambda = \mu^{-1}$, имеем

$$-(\mu^{-1}I - T)\,\mu T^{-1}R(\mu) = I$$

и

$$\begin{aligned} -\mu T^{-1}R(\mu)(\mu^{-1}I - T)\,x &= -R(\mu)\,\mu T^{-1}(\mu^{-1}I - T)\,x = \\ &= -R(\mu)(T^{-1} - \mu I)\,x = \\ &= x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T). \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda = \mu^{-1} \in \rho(T)$ и

$$[*] \qquad (\mu^{-1}I - T)^{-1} = -\mu T^{-1}R(\mu).$$

Отсюда следует, что $\sigma(T) = \{\mu_n^{-1}\}$, чем доказано утверждение (a). Так как T^{-1} компактен, то из [*] видно, что оператор $(\mu^{-1}I - T)^{-1}$ компактен для $\mu^{-1} \notin \sigma(T)$. Этим доказано утверждение (b).

Согласно теореме VII.4.5, каждая точка μ_n есть полюс некоторого конечного порядка $\nu(\mu_n)$ для $R(\mu)$; отсюда и из формулы [*] видно, что точка μ_n^{-1} есть полюс конечного порядка $\nu(\mu_n)$ для $(\mu^{-1}I - T)^{-1}$. Этим доказана первая часть утверждения (c). Если ненулевой вектор f удовлетворяет условию $(T - \lambda_0 I)^k f = 0$, то $(\lambda_0^{-1}I - T^{-1})^k f = 0$ и, следовательно, по теореме VII.1.7 f удовлетворяет условию $(\lambda_0^{-1}I - T^{-1})^{\nu(\lambda_0^{-1})} f = 0$. С другой стороны, для

$\mu \neq 0$ и $k \geqslant 0$ справедливо равенство $T^k(\mu I - T^{-1})^k = (\mu T - I)^k$ (его смысл состоит в том, что операторы $T^k(\mu I - T^{-1})^k$ и $(\mu T - I)^k$ имеют одну и ту же область определения и $T^k(\mu I - T^{-1})^k f = (\mu T - I)^k f$ для любого f из этой области). Это равенство докажем с помощью индукции. Оно очевидно при $k = 1$, и так как $P(T)Q(T) = Q(T)P(T)$ для любых двух многочленов от T, то

$$\begin{aligned} T^k(\mu I - T^{-1})^k &= T(\mu T - I)^{k-1}(\mu I - T^{-1}) = \\ &= (\mu T - I)^{k-1} T(\mu I - T^{-1}) = \\ &= (\mu T - I)^k, \end{aligned}$$

как и утверждалось. Отсюда видно, что если $(\lambda_0^{-1}I - T^{-1})^{\nu(\lambda_0^{-1})} f = 0$, то $(T - \lambda_0 I)^{\nu(\lambda_0)} f = 0$; тем самым доказана и вторая часть утверждения (c). Обратно, если $(T - \lambda_0 I)^k f = 0$, то, умножая на $(T^{-1})^k$, находим, что $(\lambda_0^{-1}I - T^{-1})^k f = 0$. Отсюда следует в силу теоремы VII.4.5, что

$$\{f \mid (T - \lambda_0 I)^{\nu(\lambda_0)} f = 0\} = E(\lambda_0^{-1}; T^{-1})\,\mathfrak{X}$$

и, в частности, что подпространство $\{f \mid (T - \lambda_0 I)^{\nu(\lambda_0)} f = 0\}$ конечномерно. Мы доказали третью часть утверждения (c).

Докажем последнюю часть утверждения (c). Если C — достаточно малая кривая, охватывающая точку λ_0 и пробегаемая один раз в положительном направлении, то, согласно лемме XVIII.2.31 и равенству [*],

$$\begin{aligned} E(\lambda_0; T) = E(\lambda_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I - T)^{-1}\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C T^{-1}(T^{-1} - \lambda^{-1}I)^{-1}\lambda^{-1}\, d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \mu^{-1}T^{-1}(\mu I - T^{-1})^{-1}\, d\mu, \end{aligned}$$

где C' — достаточно малая кривая, охватывающая точку λ_0^{-1} и пробегаемая один раз в положительном направлении. Из функционального исчисления для ограниченного оператора (теорема VII.3.10) следует, что последнее выражение равно

$$\begin{aligned} T^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \mu^{-1}(\mu I - T)^{-1} d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} (\mu I - T^{-1})\, d\mu = \\ = E(\lambda_0^{-1}; T^{-1}), \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

Замечание. Мы доказали несколько больше, чем требовалось в лемме 2. Мы установили взаимно однозначное соответствие между точками из $\sigma(T)$ и отличными от нуля точками из $\sigma(T^{-1})$

по формуле $\mu \to \mu^{-1}$, при этом $(\mu I - T)^{-1} = -\mu^{-1}T^{-1}(\mu^{-1}I - T^{-1})^{-1}$ при $\mu \notin \sigma(T)$, а соответствующие проекторы связаны равенством $E(\mu; T) = E(\mu^{-1}; T^{-1})$. Это есть обобщение на случай неограниченных дискретных операторов теоремы VII.3.19. Теорема VII.3.11 содержит результат, более общий, чем доказанное сейчас равенство $\sigma(T^{-1}) = \overline{\sigma(T)^{-1}}$.

3. Лемма. *Пусть T — неограниченный дискретный оператор и σ — компактное открытое подмножество из $\sigma(T)$. Тогда $\mathfrak{D}(T) \supseteq E(\sigma; T)\mathfrak{X}$. Пространство $E(\sigma; T)\mathfrak{X}$ инвариантно относительно T и $\sigma(T \mid E(\sigma; T)\mathfrak{X}) = \sigma$. Если σ непусто, то $E(\sigma; T) \neq 0$. Если $E(\sigma; T)$ есть k-мерный проектор, то σ состоит не более чем из k точек; в частности, если $E(\sigma; T)$ одномерен, то σ состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. Пусть C — замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в резольвентном множестве оператора T и ограничивающая область, пересечение которой с $\sigma(T)$ есть в точности σ. Тогда по лемме XVIII.2.31

$$E(\sigma; T)x = \frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda I - T)^{-1} x \, d\lambda.$$

Так как интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C T(\lambda I - T)^{-1} x \, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda(\lambda I - T)^{-1} x \, d\lambda$$

существует, то, в силу теоремы III.6.20, $E(\sigma; T)\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}(T)$ и

$$TE(\sigma; T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda(\lambda I - T)^{-1} d\lambda. \qquad [*]$$

Теперь из теоремы VII.9.8 следует, что $E(\sigma; T)Tx = Tx$ для $x \in E(\sigma; T)\mathfrak{X}$, так что $TE(\sigma; T)\mathfrak{X} \subseteq E(\sigma; T)\mathfrak{X}$. Согласно формуле [*],

$$Tx = \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda(\lambda I - T)^{-1} x \, d\lambda, \qquad x \in E(\sigma; T)\mathfrak{X}. \qquad [**]$$

Возьмем $\mu \notin \sigma$, функцию $f_\mu(z) = (\mu - z)^{-1}$ для z из окрестности σ и $f_\mu(z) = 0$ для z из окрестности $\sigma(T) - \sigma$ и окрестности бесконечности. Из теоремы VII.9.5 следует, что $f_\mu(T)E(\sigma; T)\mathfrak{X} \subseteq E(\sigma; T)\mathfrak{X}$ и

$$f_\mu(T)(\mu I - T)x = (\mu I - T)f_\mu(T)x = x, \qquad x \in E(\sigma; T)\mathfrak{X}.$$

Таким образом, оператор $f_\mu(T) \mid E(\sigma; T)\mathfrak{X}$ является обратным к оператору $(\mu I - T) \mid E(\sigma; T)\mathfrak{X}$, и, следовательно, $\sigma(T \mid E(\sigma; T)\mathfrak{X}) \subseteq \sigma$.

Предположим теперь, что $E(\sigma; T) = 0$, но σ непусто. Тогда $E(\lambda; T) = E(\lambda \cap \sigma; T) = E(\lambda; T)E(\sigma; T) = 0$ для $\lambda \in \sigma$. Из замечания к лемме 2 видно, что $E(\lambda^{-1};\ T^{-1})=0$. Отсюда, применяя первое утверждение теоремы VII.3.20, получаем, что λ^{-1} лежит в $\rho(T^{-1})$. Следовательно, согласно замечанию к лемме 2, $\lambda \notin \sigma(T)$, что противоречит предположению $\sigma \subseteq \sigma(T)$. Таким образом, $E(\sigma;\ T) \neq 0$, если σ непусто.

Пусть точка λ лежит в σ. Тогда по лемме 2 $(\lambda I - T)^{\nu(\lambda)} \times E(\lambda;\ T)\mathfrak{X}=0$. Так как $E(\lambda;\ T)\mathfrak{X}\neq 0$, то λ принадлежит $\sigma(T \mid E(\sigma;\ T)\mathfrak{X})$. Итак, $\sigma(T \mid E(\sigma;\ T)\mathfrak{X})=\sigma$. Наконец, пусть σ состоит из k точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. По лемме XVIII.2.31 подпространства $E(\lambda_i;\ T)\mathfrak{X}$ из $E(\sigma;\ T)\mathfrak{X}$ линейно независимы. Следовательно, размерность $E(\sigma;\ T)\mathfrak{X}$ не меньше чем k. Этим доказано последнее утверждение леммы, ч. т. д.

4. Определение. Пусть T — неограниченный дискретный оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$ со спектром $\{\lambda_i\}$. Если $E(\lambda_i;\ T) = E(\lambda_i)$ для каждого $\lambda_i \in \sigma(T)$, то определим линейное многообразие $\mathfrak{S}_\infty(T)$ равенством

$$\mathfrak{S}_\infty(T)=\{f \mid E(\lambda_i)f=0,\ 1\leqslant i<\infty\}.$$

5. Лемма. *Подпространство $\mathfrak{S}_\infty(T)$ либо бесконечномерно, либо состоит из одного нуля.*

Доказательство. Можно считать, что $0 \notin \sigma(T)$. Если $U=T^{-1}$, то из замечания к лемме 2 следует, что

$$\sigma(U)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\lambda_i^{-1}\}\cup\{0\}$$

и что проекторы $\hat{E}(\lambda_i^{-1})=E(\lambda_i^{-1};\ U)$ определяются формулами

$$\hat{E}(\lambda_i^{-1})=E(\lambda_i).$$

Если $f\in\mathfrak{S}_\infty=\mathfrak{S}_\infty(T)$, то

$$\hat{E}(\lambda_i^{-1})Uf=U\hat{E}(\lambda_i^{-1})f=0,$$

откуда $U\mathfrak{S}_\infty\subseteq\mathfrak{S}_\infty$. Кроме того, по теореме VII.3.20 функция $(U-\lambda I)^{-1}f$ аналитична в любой точке λ_i^{-1}, если $f\in\mathfrak{S}_\infty$. Итак, если $f\in\mathfrak{S}_\infty$, то функция $(U-\lambda I)^{-1}f$ не имеет особых точек, отличных от нуля. Следовательно, спектр оператора $U \mid \mathfrak{S}_\infty$ состоит только из нуля. Если $\mathfrak{S}_\infty$ имеет конечную положительную размерность, то найдется такой вектор $x\neq 0$ в $\mathfrak{S}_\infty$, что $Ux=0$. Умножая на T, получаем $TUx=x=0$. Это противоречие доказывает лемму, ч. т. д.

6. Лемма. *Пусть T — дискретный оператор. Тогда подпространство $\mathfrak{S}_\infty(T)$ состоит из всех таких $f\in\mathfrak{X}$, для которых $(T-\lambda I)^{-1}f$ является целой функцией от λ.*

Доказательство. Если $(T-\lambda I)^{-1}f$ — целая функция, то, взяв достаточно малую окружность C с центром в точке $\lambda_i \in \sigma(T)$, получим

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\lambda I)^{-1} f\, d\lambda = -E(\lambda_i) f.$$

Обратно, пусть теперь $E(\lambda_i) f = 0$. Можно считать (это не ограничивает общности), что T^{-1} существует. Согласно замечанию к лемме 2,

$$(\mu I - T)^{-1} f = -\mu^{-1} T^{-1} (\mu^{-1} I - T^{-1})^{-1} f, \qquad \mu \notin \sigma(T).$$

Поскольку, в силу того же замечания, $E(\lambda_i^{-1};\ T^{-1}) f = 0$, то по теореме VII.3.20 функция $(\mu^{-1} I - T^{-1})^{-1} f$ аналитична при $\mu \neq 0$. Итак, функция $(\mu I - T)^{-1} f$ аналитична при $\mu \neq 0$, а так как $\mu = 0$ не лежит в $\sigma(T)$, то $(\mu I - T)^{-1} f$ — целая функция, ч. т. д.

Перейдем к основной теореме этого параграфа.

→ 7. Теорема. *Пусть T — дискретный спектральный оператор в слабо полном пространстве $\mathfrak{X}$, и пусть E — его разложение единицы. Предположим, что проектор $E(\lambda)$ одномерен для всех точек λ спектра, за возможным исключением конечного их числа. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$, $0 \leqslant \nu < 1$ и P — такой оператор, что $\mathfrak{D}(P) \supseteq \mathfrak{D}((T-\lambda_0 I)^{\nu})$, а оператор $P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ ограничен. Пусть $\{\lambda_n\}$ есть спектр $\sigma(T)$; обозначим через d_n расстояние от точки $\lambda_n \in \sigma(T)$ до множества $\sigma(T) - \{\lambda_n\}$. Тогда если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-1} (|\lambda_n| + d_n)^{\nu} < \infty,$$

то $T + P$ есть дискретный спектральный оператор. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-2} (|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} < \infty$$

и $\mathfrak{X}$ — гильбертово пространство, то $T + P$ есть дискретный спектральный оператор.

Замечание. Так как множество $\sigma(T)$ не имеет конечных предельных точек, то через точку λ_0 можно провести луч γ, не пересекающий $\sigma(T)$. На дополнении к γ определены аналитичные ветви функции $(z-\lambda_0)^{\nu}$, причем любые две такие ветви отличаются множителем вида $e^{2\pi i \nu k}$. Если зафиксированы луч γ и аналитическая ветвь функции $(z-\lambda_0)^{\nu}$, определенная в дополнении γ, то определен оператор $(T-\lambda_0 I)^{\nu}$ (см. определение XVIII.2.8). Следующее ниже доказательство не зависит от выбора указанных элементов, а потому в дальнейшем предполагается, что такой выбор сделан раз и навсегда.

Доказательство. Пусть E — спектральное разложение оператора T. Согласно лемме XVIII.2.25, $E(e)=0$, если e — борелевское множество, не пересекающееся с $\sigma(T)$. Таким образом, для любого борелевского множества e справедливо равенство $E(e) = \sum_{\lambda \in e \cap \sigma(T)} E(\lambda)$, причем ряд сходится в сильной операторной топологии. Пусть S — скалярная компонента T и $N = T - S$. По теореме XVIII.2.28 и лемме XVIII.2.25 S и T имеют одинаковое разложение единицы и одинаковый спектр. В силу определения XVIII.2.1

$$\sigma(T \mid E(\lambda)\mathfrak{X}) = \sigma(S \mid E(\lambda)\mathfrak{X}) = \{\lambda\}$$

для $\lambda \in \sigma(T)$. Следовательно, если $E(\lambda)\mathfrak{X}$ одномерно, то $Tx = Sx = \lambda x$ для x из $E(\lambda)\mathfrak{X}$. Пусть σ_0 — конечное множество тех точек из $\sigma(T)$, для которых $E(\lambda)$ не одномерен, и $\sigma_0' = \sigma(T) - \sigma_0$. Согласно определению XVIII.2.8, x лежит в $\mathfrak{D}(f(T))$ в том и только в том случае, если $x \in \mathfrak{D}(f(S))$. Более того, $f(T)x = f(S)x$ для любой функции f, аналитической на $\sigma(T)$, и любого $x \in E(\sigma_0')\mathfrak{X}$. В частности, $x \in \mathfrak{D}(T)$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{D}(S)$, и $Tx = Sx$ для любого x из $E(\sigma_0')\mathfrak{X}$. В силу теоремы XVIII.2.9 (ii), $E(\sigma_0)\mathfrak{X}$ содержится в $\mathfrak{D}(f(T))$ и $\mathfrak{D}(f(S))$, и по этой же теореме $E(\sigma_0)\mathfrak{X}$ инвариантно относительно $f(T)$ и $f(S)$, причем $f(T)$ и $f(S)$ ограничены в $E(\sigma_0)\mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{D}(f(T)) = \mathfrak{D}(f(S))$, и если положить

$$N_f x = \begin{cases} f(T)x - f(S)x, & x \in E(\sigma_0)\mathfrak{X}, \\ 0, & x \in E(\sigma_0')\mathfrak{X}, \end{cases}$$

то оператор N_f ограничен, а $f(T) = f(S) + N_f$. В частности, $T = S + N$, где N — ограниченный, а S — дискретный операторы. Кроме того, если положить

$$Lx = \begin{cases} x, & x \in E(\sigma_0')\mathfrak{X}, \\ (T-\lambda I)^{\nu}(S-\lambda I)^{-\nu}x, & x \in E(\sigma_0)\mathfrak{X}, \end{cases}$$

то очевидно, что L — ограниченный оператор и $(S-\lambda I)^{-\nu} = (T-\lambda I)^{-\nu}L$.

Следовательно, оператор

$$(P+N)(S-\lambda I)^{-\nu} = P(S-\lambda I)^{-\nu} + N(S-\lambda I)^{-\nu} = P(T-\lambda I)^{-\nu}L + N(S-\lambda I)^{-\nu}$$

ограничен. Так как $T + P = S + (N + P)$, $\sigma(T) = \sigma(S)$ и N ограничен, то, не теряя в общности, мы можем считать, что $T = S$, т. е. T — оператор скалярного типа. Кроме того, мы можем предполагать, что $\lambda_0 = 0$, ибо $T + P = (T - \lambda_0 I) + (P + \lambda_0 I)$ и $\sigma(T - \lambda_0 I) = \{z - \lambda_0 \mid z \in \sigma(T)\}$.

Поскольку $\mathfrak{D}(T^{\nu}) \supseteq \mathfrak{D}(T)$ (теорема XVIII.2.11), $\mathfrak{D}(P) \supseteq \mathfrak{D}(T)$. Следовательно, $\mathfrak{D}(T+P) = \mathfrak{D}(T)$. По предположению оператор $PT^{-\nu}$ ограничен; обозначим его через A.

Рассмотрим ряд

$$B(\mu) = R(\mu; T) \sum_{n=0}^{\infty} \{AT^{\nu}R(\mu; T)\}^n,$$

где $R(\mu; T) = (\mu I - T)^{-1}$. Он определен при $\mu \notin \sigma(T)$ и сходится равномерно, если $|T^{\nu}R(\mu; T)| < |A|^{-1}$. Для тех значений μ, для которых ряд $B(\mu)$ сходится, имеем

$$(\mu I - T - P)\, B(\mu) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (AT^{\nu}R(\mu; T))^n - AT^{\nu}R(\mu; T) \sum_{n=0}^{\infty} (AT^{\nu}R(\mu; T))^n = I$$

и

$$B(\mu)(\mu I - T - P)\, x = x + R(\mu; T) \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} (AT^{\nu}R(\mu; T))^{n-1} \Big\} AT^{\nu}x -$$
$$- R(\mu; T) \Big\{ \sum_{n=0}^{\infty} (AT^{\nu}R(\mu; T))^n \Big\} AT^{\nu}x = x,$$
$$x \in \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T+P).$$

Отсюда следует, что если $|T^{\nu}R(\mu; T)| < |A|^{-1}$, то оператор $(\mu I - T - P)^{-1}$ существует и равен $B(\mu)$.

Пусть C_n — окружность радиуса $d_n/2$ с центром в точке λ_n. Пусть $M/4$ — верхняя грань норм проекторов E из разложения единицы $E(\cdot)$. Если $\mu \in C_n$, то по теореме XVIII.2.11

$$|T^{\nu}R(\mu; T)| \leqslant \max_{1 \leqslant k < \infty} M |\lambda_k|^{\nu} |\lambda_k - \mu|^{-1}.$$

Далее, $|\lambda_k - \mu| \geqslant |\lambda_k - \lambda_n| - |\lambda_n - \mu| = |\lambda_k - \lambda_n| - d_n/2$. Кроме того, $|\lambda_k| \leqslant |\lambda_n| + |\lambda_k - \lambda_n|$. Так как функция $(a+x)^{\nu}(x-b)^{-1}$ убывает при $x > b$, $a > 0$, $b > 0$, то $(a+x)^{\nu}(x-b)^{-1} < (a+2b)^{\nu} b^{-1}$ при $x > 2b$, $a > 0$, $b > 0$.

В частности,

$$\max_{1 \leqslant k < \infty} |\lambda_k|^{\nu} |\lambda_k - \mu|^{-1} \leqslant \max_{1 \leqslant k < \infty} (|\lambda_n| + |\lambda_k - \lambda_n|)^{\nu} \Big(|\lambda_k - \lambda_n| - \frac{d_n}{2}\Big)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant 2(|\lambda_n| + d_n)^{\nu} d_n^{-1}.$$

Итак,

$$|T^{\nu}R(\mu; T)| < 2M(|\lambda_n| + d_n)^{\nu} d_n^{-1}, \qquad \mu \in C_n.$$

По условию правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, для достаточно больших n каждая точка μ из C_n лежит в $\rho(T+P)$ и $R(\mu; T+P) = B(\mu)$. Поскольку $B(\mu)$ является, очевидно, произведением компактного оператора $R(\mu; T)$ и ограниченного оператора, то оператор $T+P$ дискретен. Так как оператор $(T+P-\mu I)^{-1}$ ограничен и, следовательно, замкнут, то и оператор $T+P$ замкнут.

Аналогично, если n достаточно велико и $\mu \in C_n$, то

$$|R(\mu; T+P)-R(\mu;T)|=|B(\mu)-R(\mu; T)|\leqslant$$
$$\leqslant 2Md_n^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}(|\lambda_n|+d_n)^{m\nu}d_n^{-m}(2M|A|)^m\leqslant$$
$$\leqslant 8M^2|A|d_n^{-2}(|\lambda_n|+d_n)^{\nu},$$

ибо при достаточно больших n

$$\sum_{m=0}^{\infty}(|\lambda_n|+d_n)^{m\nu}d_n^{-m}(2M|A|)^m=[1-2M|A|(|\lambda_n|+d_n)^{\nu}d_n^{-1}]^{-1}\leqslant 2.$$

Следовательно, если n достаточно велико, то

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}R(\mu; T+P)\,d\mu-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}R(\mu; T)\,d\mu\right|\leqslant$$
$$\leqslant 4M^2|A|d_n^{-1}(|\lambda_n|+d_n)^{\nu}.$$

Из леммы XVIII.2.31 видно, что первый из написанных выше интегралов есть проектор $E(\sigma_n; T+P)$, где σ_n — часть спектра $\sigma(T+P)$, заключенная внутри C_n. Итак,

$$[*]\qquad |E(\sigma_n; T+P)-E(\lambda_n; T)|\leqslant 4M^2|A|d_n^{-1}(|\lambda_n|+d_n)^{\nu}.$$

Так как правая часть этого неравенства стремится к 0 при $n\to\infty$, то по лемме VII.6.7 проектор $E(\sigma_n; T+P)$ одномерен при достаточно больших n. Из леммы 3 следует, что при $n\geqslant K$ (K достаточно велико) σ_n состоит из единственной точки μ_n.

Предположим теперь, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|\lambda_n|+d_n)^{\nu}d_n^{-1}<\infty.$$

Поскольку множество конечных сумм проекторов $E(\lambda_n; T)$ равномерно ограничено, то из [*] следует, что множество конечных сумм проекторов $E(\mu_n; T+P)$, $n\geqslant K$, равномерно ограничено по норме. Кроме того, ряд $\sum_{n=p}^{\infty}(E(\lambda_n; T)-E(\mu_n; T+P))$, очевидно, сходится по норме при $p\geqslant K$ и его сумма стремится к нулю (по норме) при $p\to\infty$. Так как ряд $\sum_{n=p}^{\infty}E(\lambda_n; T)$ сильно сходится (в силу спектральности оператора T), то ряд $E_p = \sum_{n=p}^{\infty} E(\mu_n; T+P)$ сильно сходится, а если мы определим операторы $\hat{E}_p$ формулой $\hat{E}_p = \sum_{n=p}^{\infty} E(\lambda_n; T)$, то $\lim_{p\to\infty} |\hat{E}_p - E_p| = 0$. Так как $\hat{E}_p + \sum_{n=1}^{p-1} E(\lambda_n; T) = I$, то $I - \hat{E}_p$ конечномерен для любого p. Значит, по лемме VII.6.7 оператор $I - E_p$ конечномерен для всех достаточно больших p. Из счетной аддитивности спектрального разложения E вытекает, что $E(\mu; T+P)(I - E_p) = 0$, если μ не совпадает ни с одной из точек μ_n, $n \geqslant K$. Согласно лемме 3, $\sigma(T+P)$ представляет собой объединение точек μ_n, $n \geqslant K$, и некоторого конечного множества. Следовательно, множество всех конечных сумм проекторов $E(\lambda; T+P)$, где $\lambda \in \sigma(T+P)$, равномерно ограничено.

Поскольку $I - E_p$ конечномерен для достаточно больших p, подпространство

$$\mathfrak{X}_0 = \{x \mid E(\lambda; T+P)x = 0, \quad \lambda \in \sigma(T+P)\}$$

конечномерно. Но тогда, согласно лемме 6, $\mathfrak{X}_0 = \{0\}$. Из следствия XVIII.2.33 получаем, что $T + P$ — спектральный оператор.

Если $\mathfrak{X}$ — гильбертово пространство и $\sum_{n=1}^{\infty} (|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} d_n^{-2} < \infty$, то доказательство завершается так же, как изложенное выше, если только мы покажем, что множество конечных сумм проекторов $E(\mu_i; T+P)$ равномерно ограничено и

$$\lim_{p\to\infty} \Big| \sum_{n=p}^{\infty} E(\lambda_n; T) - E(\mu_n; T+P) \Big| = 0.$$

Это доказывается так. Согласно лемме XV.6.2, существует автоморфизм гильбертова пространства, переводящий каждый проектор $E(\lambda_n; T)$ в ортогональный. Таким образом, мы можем предположить без ограничения общности, что все проекторы $E(\lambda_n; T)$ ортогональны. Выше мы показали, что для достаточно больших n и всех $\mu \in C_n$ выполняется равенство $R(\mu; T+P) = B(\mu)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &R(\mu; T+P) - R(\mu; T) - R(\mu; T)AT^{\nu}R(\mu; T)| \leqslant \\ &\qquad \leqslant 2Md_n^{-1} \sum_{m=2}^{\infty} (2M)^m (|\lambda_n| + d_n)^{m\nu} d_n^{-m} |A|^m \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant 16M^3 |A|^2 d_n^{-3} (|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} \end{aligned}$$

для достаточно больших n. Отсюда получаем для достаточно больших n

$$[*] \qquad \left| E(\lambda_n; T) - E(\mu_n; T+P) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} R(\mu; T) A T^{\nu} R(\mu; T)\,d\mu \right| \leqslant$$
$$\leqslant 8M^3 |A|^2 (|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} d_n^{-2}.$$

По теореме XVIII.2.11

$$R(\mu; T) = (\mu - \lambda_n)^{-1} E(\lambda_n; T) + \sum_{i \neq n} (\mu - \lambda_i)^{-1} E(\lambda_i; T).$$

Второй член в правой части равенства, который мы обозначим через $R_{(n)}(\mu; T)$, аналитичен при $\mu \in \rho(T)$ и $\mu = \lambda_n$. Аналогично,

$$T^{\nu} R(\mu; T) = \lambda_n^{\nu} (\mu - \lambda_n)^{-1} E(\lambda_n; T) + T^{\nu} R_{(n)}(\mu; T)$$

и $T^{\nu} R_{(n)}(T; \mu)$ аналитична по μ при $\mu \in \rho(T)$ и при $\mu = \lambda_n$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} R(\mu; T) A T^{\nu} R(\mu; T)\,d\mu =$$
$$= E(\lambda_n; T) A T^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n; T) + \lambda_n^{\nu} R(\lambda_n; T) A E(\lambda_n; T).$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} (|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} d_n^{-2} < \infty$ (по условию теоремы), то в силу соотношения [*] достаточно проверить, что множество всех конечных сумм операторов $E(\lambda_n; T) A T^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n; T)$, а также операторов $\lambda_n^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n; T)\, AE(\lambda_n; T)$ равномерно ограничено и что

$$\lim_{p \to \infty} \left| \sum_{n=p}^{\infty} E(\lambda_n; T) A T^{\nu} R_{(n)}(\lambda; T) + \lambda_n^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n; T) A E(\lambda_n; T) \right| = 0.$$

Далее, поскольку $E(\lambda_n; T)x$ и $E(\lambda_m; T)x$ ортогональны при $n \neq m$, то для любого конечного множества J целых чисел мы имеем при $|x| \leqslant 1$

$$\left| \sum_{n \in J} E(\lambda_n; T) A T^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n; T) x \right|^2 =$$
$$= \sum_{n \in J} |A T^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n; T) x|^2 \leqslant 2(M|A|)^2 \sum_{n \in J} (|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} d_n^{-2}.$$

Здесь использовано неравенство

$$|T^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n; T)| \leqslant 2M (|\lambda_n| + d_n)^{\nu} d_n^{-1},$$

которое доказывается так же, как выше было доказано аналогичное неравенство для $|T^{\nu} R(\lambda_n; T)|$.

По предположению множество конечных сумм, написанных в правой части полученного неравенства, равномерно ограничено. Теперь ясно, что ряд

$$C_p = \sum_{n=p}^{\infty} E(\lambda_n;\ T)\, AT^{\nu}R_{(n)}(\lambda_n;\ T)$$

сходится по норме и

$$|C_p|^2 \leqslant (2M|A|)^2 \sum_{n=p}^{\infty} (|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} d_n^{-2}.$$

Отсюда следует, что $|C_p| \to 0$ при $p \to \infty$.

Так как $|U| = |U^*|$ для любого ограниченного оператора, то

$$\Big|\sum_{n\in J} \lambda_n^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n;\ T)\, AE(\lambda_n;\ T)\Big|^2 = \Big|\sum_{n\in J} \bar{\lambda}_n^{\nu} E(\lambda_n;\ T)\, A^* R_{(n)}(\lambda_n;\ T)^*\Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (2M|A|)^2 \sum_{n\in J} (|\lambda_n| + d_n)^{2\nu} d_n^{-2}$$

для любого конечного множества J целых чисел. Отсюда, как и выше, получаем, что множество всех конечных сумм

$$\sum_{n\in J} \lambda_n^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n;\ T)\, AE(\lambda_n;\ T)$$

равномерно ограничено и

$$\lim_{p\to\infty} \Big|\sum_{n=p}^{\infty} \lambda_n^{\nu} R_{(n)}(\lambda_n;\ T)\, AE(\lambda_n;\ T)\Big| = 0.$$

Таким образом, теорема 7 полностью доказана, ч. т. д.

8. Следствие. *Пусть выполнены предположения теоремы 7. Тогда спектр $\sigma(T+P)$ состоит из последовательности $\{\mu_n\}$, удовлетворяющей неравенству*

$$|\lambda_n - \mu_n| \leqslant K_2 |\lambda_n|^{\nu}, \qquad n \geqslant K_1,$$

где K_1 и K_2 — некоторые постоянные и $K_1 \geqslant 1$. Проекторы $E(\mu_n;\ T+P)$ одномерны при $n \geqslant K_1$.

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 7 мы показали, что (в введенных выше обозначениях) если n достаточно велико, то в круге C_n содержится ровно одна точка μ_n из $\sigma(T+P)$ и подпространство $E(\mu_n;\ T+P)\,\mathfrak{X}$ одномерно. Кроме того, было показано, что если $|T^{\nu}R(\mu;\ T)| < |A|^{-1}$, то μ_n лежит в $\rho(T+P)$. Осталось только доказать указанное в следствии неравенство. Пусть C — постоянная (ее выбор мы уточним позже), и пусть

$C\,|\,\lambda_n\,|^\nu \leqslant |\,\mu - \lambda_n\,| \leqslant d_n/2$. Так как функция $(a+x)^\nu (x-b)^{-1}$ убывает при $x > b$, $a > 0$, $b > 0$, то

$$\max_{1\leqslant k<\infty} |\lambda_k|^\nu |\lambda_k - \mu|^{-1} =$$
$$= \max_{1\leqslant k<\infty} (|\lambda_n| + |\lambda_n - \lambda_k|)^\nu (|\lambda_n - \lambda_k| - |\mu - \lambda_n|)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (|\lambda_n| + 2|\mu - \lambda_n|)^\nu |\mu - \lambda_n|^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant (|\lambda_n| + d_n)^\nu C^{-1} |\lambda_n|^{-\nu} \leqslant C^{-1}\left(1 + \frac{d_n}{|\lambda_n|}\right)^\nu .$$

Так как $d_n < |\lambda_n - \lambda_0|$, то $\lim\limits_{n\to\infty} d_n/|\lambda_n| \leqslant 1$. Следовательно, для достаточно больших n

$$\max_{1\leqslant k<\infty} |\lambda_k|^\nu |\lambda_k - \mu|^{-1} \leqslant 2C^{-1}, \qquad C|\lambda_n|^\nu \leqslant |\mu - \lambda_n| \leqslant \frac{d_n}{2}.$$

Согласно теореме XVIII.2.11 (c), $|\,T^\nu R(\mu;\ T)\,| \leqslant 2MC^{-1}$ для всех μ из кольца $C\,|\,\lambda_n\,|^\nu \leqslant |\,\mu - \lambda_n\,| \leqslant d_n/2$. Выберем C так, чтобы $2MC^{-1} < |\,A\,|^{-1}$. Тогда ни одна точка μ из указанного кольца не лежит в $\sigma(T+P)$. Поскольку μ_n лежит в $\sigma(T+P)$ и $|\,\lambda_n - \mu_n\,| \leqslant d_n/2$, то $|\,\lambda_n - \mu_n\,| \leqslant C\,|\,\lambda_n\,|^\nu$, ч. т. д.

9. Следствие. *Пусть T — дискретный спектральный оператор в слабо полном пространстве. Пусть E — его разложение единицы, $\{\lambda_n\}$ — его спектр и d_n — расстояние от λ_n до $\sigma(T) - \{\lambda_n\}$. Предположим, что проектор $E(\lambda_n)$ является одномерным для всех n, кроме конечного множества. Пусть B — ограниченный оператор. Тогда*

(a) *если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^{-1} < \infty$, *то* $T+B$ — *спектральный оператор*;

(b) *если T действует в гильбертовом пространстве и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^{-2} < \infty$, *то* $T+B$ — *спектральный оператор.*

Доказательство. Следствие вытекает из теоремы 7 при $\nu = 0$, ч. т. д.

Приведем примеры, иллюстрирующие полученные нами результаты. Сначала предположим, что $\mathfrak{X}$ есть B-пространство l_p, $p \geqslant 1$, элементами которого являются последовательности $\xi = \{\xi_n\}$, $n \geqslant 1$. Пусть T — замкнутый оператор, определенный формулами

$$\mathfrak{D}(T) = \{\{\xi_n\} \mid \{n\xi_n\} \in l_p\}, \qquad T\{\xi_n\} = \{n\xi_n\}.$$

Тогда, очевидно, T — спектральный оператор скалярного типа, $\sigma(T) = \{n,\ n \geqslant 1\}$ и $E(n;\ T)$ одномерен для всех $n \geqslant 1$. Пусть

$\alpha > 0$ и $\{p_{mn}\}$ — бесконечная матрица, удовлетворяющая таким условиям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |p_{mn}| n^{-\alpha} < K, \qquad m \geqslant 1,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |p_{mn}| m^{-\alpha} < K, \qquad n \geqslant 1,$$

где K — положительная постоянная. Определим оператор P с помощью матрицы $\{p_{mn}\}$ следующим образом:

$$\mathfrak{D}(P) = \mathfrak{D}(T^{\alpha}),$$

$$P\{\xi_m\} = \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn}\xi_n\Big\}, \qquad \{\xi_m\} \in \mathfrak{D}(P).$$

Ясно, что P можно записать в виде $P = QT^{\alpha}$, где Q — ограниченный оператор вида

$$Q(\xi_m) = \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} n^{-\alpha}\xi_n\Big\}.$$

Ограниченность Q вытекает из результата упр. VI.9.54. Для полноты приведем независимое доказательство. Если последовательность $\xi = \{\xi_i\}$ ограничена, $\sup\limits_{1 \leqslant i < \infty} |\xi_i| = |\xi|_{\infty}$, то

$$|Q\xi|_{\infty} = \sup_{1 \leqslant m < \infty} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} n^{-\alpha}\xi_n\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{1 \leqslant m < \infty} |\xi|_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |p_{mn}| n^{-\alpha} \leqslant K |\xi|_{\infty}.$$

Если же $\xi = \{\xi_i\} \in l_1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = |\xi|_1$, то

$$|Q\xi|_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} n^{-\alpha}\xi_n\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |p_{mn}| n^{-\alpha} |\xi_n| \leqslant K \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = K |\xi|_1.$$

Теперь ограниченность Q как оператора в l_p следует из теоремы Рисса о выпуклости (VI.10.11). Из теоремы 7 вытекает, что если $\beta > \alpha + 2$, то $T^{\beta} + P$ — дискретный спектральный оператор. Если $p = 2$, т. е. $\mathfrak{X} = l_2$ — гильбертово пространство, то при $\beta > \alpha + 3/2$ оператор $T^{\beta} + P$ дискретен.

Приведем более специальный, но менее искусственный пример. Рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$-\frac{d}{dt}(1-t^2)\frac{d}{dt}+\frac{2\alpha^2}{1+t}+\frac{2\beta^2}{1-t},$$

введенный в § XIII.8. Пусть снова $\alpha \geqslant 1/2$, $\beta \geqslant 1/2$. Согласно теории, развитой в гл. XIII (см. § XIII.8), этот формальный дифференциальный оператор определяет единственный самосопряженный оператор L в гильбертовом пространстве $L_2(-1, +1)$. Как показано в § XIII.8, $\sigma(L)$ состоит из чисел $\lambda_n = (n+\alpha+\beta+1) \times (n+\alpha+\beta)$ и соответствующие собственные подпространства одномерны. Из следствия 9 вытекает, что оператор $L+B$ спектрален для любого ограниченного оператора B. В частности, мы приходим к следующему выводу. Пусть $q(z)$ — функция, аналитическая в комплексной окрестности отрезка $[-1, 1]$ без точек $-1, 1$, в которых $q(z)$ имеет полюсы первого порядка. Предположим, что вычет q в точке $z=1$ ($z=-1$) веществен и не меньше чем $1/2$ (соответственно не больше чем $-1/2$). Пусть M — оператор, определенный формулой

$$(Mf)(t) = -((1-t^2)f'(t))' + q(t)f(t), \quad f \in \mathfrak{D}(M),$$

на множестве всех $f \in L_2(-1, 1)$, имеющих абсолютно непрерывную первую производную и удовлетворяющих условию

$$-((1-t^2)f'(t))' + q(t)f(t) \in L_2(-1, 1).$$

Тогда M — дискретный спектральный оператор.

Если вычеты q в точках ± 1 вещественны, но не лежат в указанных пределах, то справедливо аналогичное утверждение, но в этом случае необходимы граничные условия в концевых точках.

В качестве последнего примера рассмотрим самосопряженный оператор T в пространстве $L_2(0, 1)$, определенный (в смысле гл. XIII) формальным дифференциальным оператором id/dt и «периодическими» граничными условиями $f(0)=f(1)$. Собственными значениями оператора T являются $\lambda_n = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а соответствующие собственные функции имеют вид $e^{2\pi i n x}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Ясно, что для любого нечетного $k = 2m+1$ каждый проектор $E(\lambda; T^k)$, соответствующий точке $\lambda \in \sigma(T^k) = \{\sigma(T)\}^k$, одномерен. Согласно теореме 7, если P — замкнутый оператор и $\mathfrak{D}(P) \supseteq \mathfrak{D}(T^{k\nu})$, где

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{-4m} |n|^{2\nu(2m+1)} < \infty,$$

то $T+P$ — спектральный оператор. Это условие равносильно тому, что $k\nu < k - 3/2$. Рассмотрим, в частности, случай $\mathfrak{D}(P) \supseteq \mathfrak{D}(T^{k-2})$. Из определения $\mathfrak{D}(T)$ сразу следует, что $\mathfrak{D}(T^j)$ состоит из всех функций $f \in L_2(0, 1)$, которые имеют $j-1$ абсолютно непрерывных производных, удовлетворяющих равенствам

$$f(0)=f(1), \ \ldots, \ f^{(j-1)}(0)=f^{(j-1)}(1),$$

а $f^{(j)}$ лежит в $L_2(0, 1)$. Следовательно, в качестве P можно взять оператор вида

$$B_{k-2}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-2}+\ldots+B_0,$$

где коэффициенты B_j — произвольные ограниченные операторы в $L_2(0, 1)$. В дополнение к тем формальным дифференциальным операторам, которые охватываются теоремой 7, мы приведем несколько довольно занятных примеров с целью показать, сколь широк класс получаемых таким образом операторов. Мы можем взять, например, $(B_0 f)(t)=f(t/2)$, а также $(B_0 f)(t)=f(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ — дробная часть числа $t+\alpha$. Если $t \to \varphi(t)$ — произвольное сохраняющее меру преобразование отрезка $(0, 1)$, то можно положить $(B_0 f)(t)=f(\varphi(t))$. Так как любая функция из $\mathfrak{D}(T^{k-2})$ имеет $k-3$ непрерывных производных, то мы можем взять также оператор

$$(B_{k-2}f^{(k-2)})(t)=\int_0^1 f^{(k-3)}(s)\,\mu(ds), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где μ — мера Бореля на $[0, 1]$. Например, оператор, заданный формально равенствами

$$\begin{aligned}(Tf)(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{2m+1} f(t)+\sum_{k=0}^{2m-1} a_k(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)+\\ +\sum_{k=0}^{2m-2} c_k f^{(k)}(t\rho)+\sum_{j=0}^{2m-1}\int_0^1 K_j(t, s) f^{(j)}(s)\,ds+\\ +\sum_{i=0}^{2m-1} f^{(i)}(\varphi_i(t)), \qquad f(0)=f(1), \ \ldots, \ f^{(2m)}(0)=f^{(2m)}(1),\end{aligned}$$

есть дискретный спектральный оператор, если $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, ядра K_j таковы, что функция

$$\int_0^1 |K_j(t, s)|\,ds+\int_0^1 |K_j(t, s)|\,dt$$

ограничена, а φ_j — сохраняющие меру преобразования отрезка $(0, 1)$ в себя.

Последний пример является иллюстрацией общей проблемы, которой мы уделим основное внимание в оставшейся части этой главы,— проблемы описания тех формальных дифференциальных операторов и совокупности граничных условий, которые приводят к спектральным операторам. Как видно из разобранного примера, достаточно изучить простейший дифференциальный оператор $(d/dt)^k$ и затем применить теорему 7, рассматривая члены низшего порядка как «возмущения». В § 4 мы осуществим эту идею. Однако, поскольку изучение случая $k > 2$ технически сложно, мы разберем в следующем параграфе отдельно случай $k = 2$ и покажем тем самым на простом примере действие того аналитического метода (основанного на простой идее), который будет развит в § 4.

3. Оператор второго порядка с разделенными граничными условиями

В этом параграфе мы покажем, применяя следствие 2.9, что оператор $T + B$, где B — произвольный ограниченный оператор, а T — неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$, определенный формальным дифференциальным оператором $-(d/dt)^2$ и произвольными разделенными граничными условиями, является спектральным. Мы начнем с общей леммы, относящейся к спектру и точечному спектру дифференциального оператора. Читатель, незнакомый с обозначениями и терминологией следующих далее лемм, должен обратиться к определениям из гл. XIII и особенно к § 2—5 гл. XIII.

1. Лемма. *Пусть τ — формально симметрический формальный дифференциальный оператор порядка n в интервале I. Предположим, что оба индекса дефекта оператора τ равны m. Пусть S — неограниченный оператор в $L_2(I)$, определенный τ и m линейно независимыми граничными условиями $A_i(f) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда любая точка λ из конечной комплексной плоскости, лежащая в спектре $\sigma(S)$ оператора S, но не принадлежащая $\sigma_e(\tau)$, принадлежит точечному спектру $\sigma_p(S)$ оператора S.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda \notin \sigma_p(S)$, и пусть $\lambda \notin \sigma_e(\tau)$. Согласно следствию XIII.6.8, по крайней мере m линейно независимых решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$ лежат в $L_2(I)$. Обозначим через Σ линейную оболочку этих решений. Так как $\lambda \notin \sigma_p(S)$, то отображение $\sigma \to [A_1(\sigma), \ldots, A_m(\sigma)]$ взаимно однозначно на Σ. Поскольку размерность Σ не меньше m, то образом Σ при этом отображении является все m-мерное координатное пространство. Мы должны доказать, что λ принадлежит резольвентному множеству оператора S. Для этого достаточно проверить, что оператор $T_1(\tau) - \lambda I$ отображает $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ на все $L_2(I)$. Действительно, если это доказано, то для любой функции g из $L_2(I)$ существует такая функция φ из $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, что $\tau\varphi - \lambda\varphi = g$. Положим $A_i(\varphi) = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда, в силу изложенного выше, существует такое решение σ уравнения $\tau\sigma - \lambda\sigma = 0$, что $A_i(\sigma) = \gamma_i = A_i(\varphi)$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть $\psi = \varphi - \sigma$; тогда $\psi \in \mathfrak{D}(S)$ и $(S - \lambda I)\psi = g$. Следовательно, $S - \lambda I$ является взаимно однозначным отображением $\mathfrak{D}(S)$ на $L_2(I)$. Поскольку, в силу теоремы XIII.2.10 и леммы XII.1.6(a), $T_1(\tau)$ замкнут, из определения XIII.2.17 и замечания перед определением XIII.2.29 вытекает, что оператор S также замкнут. Следовательно, оператор $S - \lambda I$ замкнут, и по лемме XII.1.5 $(S - \lambda I)^{-1}$ также замкнут. Так как последний оператор определен всюду, то по теореме о замкнутом графике (II.2.4) он ограничен. Таким образом, λ принадлежит резольвентному множеству S.

Итак, осталось показать, что $T_1(\tau) - \lambda I$ отображает $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$ на $L_2(I)$. Так как $\lambda \notin \sigma_e(\tau)$, то множество $(T_1(\tau) - \lambda I)\,\mathfrak{D}(T)$ замкнуто. Таким образом, в силу леммы XII.1.6(d) достаточно проверить, что подпространство $\{(T_1(\tau) - \lambda I)\,\mathfrak{D}(T_1(\tau))\}^{\perp} = \{f \mid T_1(\tau)^* f = \bar{\lambda} f\}$ состоит лишь из нулевого вектора. Поскольку $T_1(\tau) = T_0(\tau)^*$ (теорема XIII.2.10), то, согласно леммам XII.4.8 и XII.7.1, $T_1(\tau)^* = T_0(\tau)^{**} = \overline{T_0(\tau)}$.

Пусть f удовлетворяет условию $\overline{T_0(\tau)}\, f = \bar{\lambda} f$. Если λ вещественно, то $S \supseteq \overline{T_0(\tau)}$ (в силу определения XIII.2.17 и замечания перед определением XIII.2.29), поэтому $Sf = \lambda f$, откуда, поскольку $\lambda \in \rho(S)$, $f = 0$. С другой стороны, если λ не является вещественным, то ввиду симметричности оператора $\overline{(T_0(\tau))}$ (см. лемму XII.4.8) и леммы XII.2.1 $f = 0$. Это завершает доказательство леммы, ч. т. д.

2. Следствие. *Пусть τ — формально симметрический формальный дифференциальный оператор в замкнутом ограниченном интервале I. Пусть S — неограниченный оператор в $L_2(I)$, порожденный формальным оператором τ и конечным числом граничных условий. Тогда любая точка из конечной комплексной плоскости, принадлежащая спектру $\sigma(S)$ оператора S, является собственным значением S.*

Доказательство. Из теорем XIII.4.1, XIII.4.2, XIII.6.5 и следствия XIII.6.4 видно, что множество $\sigma_c(\tau)$ пусто, и тогда лемма следует из леммы 1, ч. т. д.

3. Лемма. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор в конечном интервале I и S — оператор, порожденный формальным оператором τ и некоторым множеством граничных условий. Тогда S — дискретный оператор, если только его спектр не есть вся плоскость.*

Доказательство. Будем считать (это не ограничивает общности), что точка $\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству

$\rho(S)$. В противном случае рассмотрим оператор $\tau-\lambda$ вместо τ. Пусть U — единичная сфера в $L_2(I)$ и $\{f_n\}$ — последовательность элементов множества $S^{-1}(U)$; каждый элемент f_n имеет вид $f_n = S^{-1}g_n$, $g_n \in U$. Так как $L_2(I)$ рефлексивно, то из последовательности $\{g_n\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу g. По лемме XIII.2.16 последовательность $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, которая слабо сходится в топологии пространства $C(I)$ к некоторому элементу f из $C(I)$. Следовательно, последовательность $\{f_{n_i}\}$ равномерно ограничена и сходится к f всюду на I, откуда по теореме Лебега $|f_{n_i}-f|^2 = \int_I |f_{n_i}(x)-f(x)|^2\,dx \to 0$. Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность. Значит, множество $S^{-1}(U)$ компактно, т. е. S^{-1} — компактный оператор, ч. т. д.

Аналитическая часть нашего метода включает понятие асимптотического ряда. Ниже мы дадим определения и выведем некоторые основные свойства таких рядов.

4. Определение. (a) Пусть R — неограниченное подмножество комплексной плоскости, R_1 — произвольное подмножество, а f — функция, определенная на $R\times R_1$. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность функций на R_1. Предположим, что для любого N

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in R}} |z|^N \left| f(z,\ w)-\sum_{n=0}^{N} g_n(w)\,z^{-n}\right| = 0$$

равномерно по $w\in R_1$. Тогда говорят, что f имеет *равномерное асимптотическое разложение* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(w)\,z^{-k}$ при $z=\infty$ на множестве $R\times R_1$ и пишут

$$f(z,\ w)\sim\sum_{n=0}^{\infty} g_n(w)\,z^{-n}$$

равномерно на $R\times R_1$.

(b) Пусть R_1 — подмножество комплексной плоскости и $\{f_m\}$ — последовательность функций, определенных на R_1. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность функций, определенных на R_1. Предположим, что для любого N

$$\lim_{m\to\infty} m^N \left| f_n(w)-\sum_{n=0}^{N} g_n(w)\,m^{-n}\right| = 0$$

равномерно по w из R_1. Тогда говорят, что последовательность $\{f_m\}$ имеет *равномерное асимптотическое представление* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(w)\, m^{-n}$ на R_1 и пишут

$$f_m(w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w)\, m^{-n}$$

равномерно на R_1.

Если множество R_1 состоит из одной точки, то эти понятия сводятся соответственно к понятиям асимптотического представления на бесконечности функции, определенной на неограниченном множестве R, и асимптотического представления последовательности.

Таким образом, функция $f(z)$, определенная на неограниченном множестве R, имеет *асимптотический ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n}$, если

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in R}} |z|^N \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} g_n z^{-n} \right| = 0, \qquad N \geqslant 1;$$

аналогично, последовательность $\{f_m\}$ имеет *асимтотический ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n m^{-n}$, если

$$\lim_{m\to\infty} m^N \left| f_m - \sum_{n=0}^{N} g_n m^{-n} \right| = 0, \qquad N \geqslant 1.$$

5. Лемма. *Пусть R_1 — замыкание ограниченной области в комплексной плоскости и $\{f_m\}$ — последовательность непрерывных функций, определенных на R_1 и аналитических внутри R_1. Пусть*

$$f_m(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)\, m^{-n}$$

равномерно на R_1. Предположим, что функция g_0 имеет единственный простой нуль во внутренней точке ζ_0 из R_1. Тогда для всех достаточно больших m функция f_m имеет простой нуль ξ_m в R_1 и последовательность ξ_m представляется асимптотическим рядом

$$\xi_m \sim \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n m^{-n},$$

где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — некоторые коэффициенты.

Доказательство. Из определения 4 сразу следует, что функции g_m непрерывны в R_1 и аналитичны во внутренних точках R_1. Таким образом, мы можем утверждать, что ζ_0 — простой нуль функции g_0. Пусть U — достаточно малый круг с центром ζ_0 и C —

его граница, причем $U \cup C$ содержится в R_1. Так как g_0 не обращается в нуль в $R_1 - U$ и непрерывна, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $|g_0(z)| \geqslant \varepsilon$ при $z \in R_1 - U$. Поскольку $\lim_{m\to\infty} |f_m(z) - g_0(z)| = 0$ равномерно в R_1, то для достаточно больших m функция $f_m(z)$ не имеет нулей в $R_1 - U$. По интегральной формуле Коши число нулей функции f_m в U (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность) определяется формулой $(2\pi i)^{-1} \int_C \{f'_m(z)/f_m(z)\}\,dz$. Так как этот интеграл является целым числом и стремится к $(2\pi i)^{-1} \int_C \{g'_0(z)/g_0(z)\}\,dz = 1$ при $m \to \infty$, то, очевидно, для достаточно больших m функция f_m имеет единственный простой нуль ξ_m в R_1, который лежит в U. По интегральной формуле Коши

$$\xi_m = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z f'_m(z)}{f_m(z)}\,dz.$$

Из асимптотического соотношения

$$\left| f_m(z) - \sum_{n=0}^{N} g_n(z)\, m^{-n} \right| = o(m^{-N})$$

следует, что $\left| f'_m(z) - \sum_{n=0}^{N} g'_n(z)\, m^{-n} \right| = o(m^{-N})$, откуда

$$\frac{z f'_m(z)}{f_m(z)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} h_n(z)\, m^{-n}$$

равномерно по z на C, где $h_0(z) = z\, g'_0(z)/g_0(z)$. Полагая $\zeta_n = (2\pi i)^{-1} \int_C h_n(z)\,dz$, мы видим, что $\xi_m \sim \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n m^{-n}$, ч. т. д.

Нам понадобится в дальнейшем понятие оператора, сопряженного к неограниченному оператору.

6. Определение. Пусть T — линейный оператор, определенный на плотном подмножестве $\mathfrak{D}(T)$ из B-пространства $\mathfrak{X}$. *Область определения* $\mathfrak{D}(T^*)$ сопряженного оператора T^* состоит из всех линейных функционалов $y^* \in \mathfrak{X}^*$, для которых функция y^*Tx непрерывна на $\mathfrak{D}(T)$. Так как $\mathfrak{D}(T)$ плотно в $\mathfrak{X}$, то однозначно определен такой функционал z^* из $\mathfrak{X}^*$, что $y^*Tx = z^*x$ для всех x из $\mathfrak{D}(T)$. Оператор T^*, *сопряженный* к T, определяется равенством

$$T^*y^* = z^*, \qquad y^* \in \mathfrak{D}(T^*).$$

7. Лемма. *Замыкание области значений линейного оператора T с плотной областью определения состоит из всех таких x, что $y^*x = 0$ для любого функционала y^*, удовлетворяющего равенству $T^*y^* = 0$.*

Доказательство. Если $T^*y^* = 0$, то $y^*y = y^*Tz = (T^*y^*) z = 0$ для всех $y = Tz$ из области значений оператора T и потому для всех y из замыкания области значений T. С другой стороны, если y не принадлежит замыканию области значений T, то по теореме Хана — Банаха (II.3.13) существует такой y^* в $\mathfrak{X}^*$, что $y^*y \neq 0$, $y^*Tz = 0$ для всех z из $\mathfrak{D}(T)$. Из определения 6 следует, что $T^*y^* = 0$, в то время как $y^*y \neq 0$, ч. т. д.

8. Лемма. *Пусть λ_0 — точка спектра дискретного оператора T в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Пусть $f_1^*, \ldots, f_n^*$ — базис пространства решений уравнения $(T^* - \lambda_0) f^* = 0$, а Σ — пространство решений уравнения $(T - \lambda_0)\sigma = 0$. Тогда λ_0 будет кратным полюсом резольвенты $R(\lambda; T)$ в том и только том случае, если некоторый ненулевой элемент σ из Σ удовлетворяет уравнениям $f_i^*(\sigma) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Из леммы 2.2(c) видно, что λ_0 будет кратным полюсом резольвенты тогда и только тогда, когда уравнение $(T - \lambda_0)^2 g = 0$ имеет решение, не являющееся решением уравнения $(T - \lambda_0) g = 0$; другими словами, тогда и только тогда, когда некоторый ненулевой вектор σ из Σ лежит в области значений оператора $T - \lambda_0 I$. Лемма вытекает из леммы 7, как только будет доказана замкнутость области значений $\mathfrak{R}(T)$ оператора $T - \lambda_0 I$. Докажем это. Согласно теореме VII.9.8, $E(\lambda_0; T)\,\mathfrak{R}(T) \subseteq \mathfrak{R}(T)$, откуда $\mathfrak{R}(T) = E(\lambda_0; T)\,\mathfrak{R}(T) \oplus (I - E(\lambda_0; T))\,\mathfrak{R}(T)$. Первое из этих слагаемых конечномерно по лемме 2.2 и, следовательно, замкнуто в силу следствия IV.3.2. Остается доказать замкнутость второго слагаемого. Согласно VII.9.8(b),

$$(I-E(\lambda_0;\ T))(T-\lambda_0 I)\,\mathfrak{D}(T) \supseteq (I-E(\lambda_0;\ T))(T-\lambda_0 I)\,h(T)\,\mathfrak{X} = (I-E(\lambda_0;\ T))\,\mathfrak{X},$$

где $h(\lambda) = 0$ в окрестности λ_0 и $h(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}$ в остальных точках. Так как, очевидно, что $(I-E(\lambda_0;\ T))(T-\lambda_0 I)\,\mathfrak{X} \subseteq \subseteq (I-E(\lambda_0;\ T))\,\mathfrak{X}$, то

$$(I-E(\lambda_0;\ T))\,\mathfrak{R}(T) = (I-E(\lambda_0;\ T))\,\mathfrak{X},$$

откуда следует замкнутость $\mathfrak{R}(T)$, ч. т. д.

В дальнейшем в этой главе мы вернемся к общей теории неограниченных сопряженных операторов в банаховом пространстве. Следует отметить, однако, что в том случае, когда рассматриваемое банахово пространство является гильбертовым, имеется еще одно понятие сопряженного оператора. Дело в том, что в гильбертовом случае используют обычно *эрмитово* сопряженный оператор. Это приводит к тому, что в формулах, относящихся к гильбертову пространству, возникает комплексное сопряжение, в то время как в соответствующих формулах в банаховых пространствах его нет. Однако это различие не доставит читателю серьезных затруднений.

9. Лемма. *Пусть E — проектор в B-пространстве $\mathfrak{X}$ с конечномерной областью значений и E^*: $\mathfrak{X}^* \to \mathfrak{X}^*$ — его сопряженный. Тогда если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — базис в $E\mathfrak{X}$, то в $E^*\mathfrak{X}^*$ найдется единственный базис $\psi_1^*, \psi_2^*, \ldots, \psi_n^*$, удовлетворяющий условиям $\psi_i^*(\varphi_j) = \delta_{ij}$; при этом*

$$Ef = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \psi_i^*(f), \qquad f \in \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Любой элемент Ef можно единственным образом записать в виде

$$Ef = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \alpha_i(f),$$

где $\alpha_i(f)$ — линейные функционалы. Если $f_m \to f$ и $\alpha_i(f_m) \to \alpha_i$, то, очевидно, $\alpha_i = \alpha_i(f)$. По теореме о замкнутом графике, однозначно определенные линейные функционалы α_i непрерывны. Следовательно, $\alpha_i(f) = \psi_i^*(f)$ для некоторых $\psi_i^* \in \mathfrak{X}^*$. Из равенства

$$Ef = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \psi_i^*(f)$$

сразу же следует, что

$$E^*\psi^* = \sum_{i=1}^{n} \psi_i^* \psi^*(\varphi_i),$$

так что элементы $\psi_1^*, \psi_2^*, \ldots, \psi_n^*$ порождают $E^*\mathfrak{X}^*$. Покажем, что $\psi_1^*, \psi_2^*, \ldots, \psi_n^*$ линейно независимы. Допустим, что $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i^* = 0$; тогда

$$\beta_j = \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \psi_i^*\Big) \varphi_j = 0,$$

так что лемма 9 полностью доказана, ч. т. д.

Переходим к подробному исследованию дифференциального оператора второго порядка, порожденного формальным дифференциальным оператором

$$\tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t).$$

Следствие 2.9 позволяет свести изучение этого оператора к более простому оператору $-(d/dt)^2$ в $L_2(0, 1)$. Свойства последнего оператора собраны в следующей лемме:

10. Лемма. *Пусть* k_0, k_1 — *произвольные постоянные и* T — *неограниченный оператор в* $L_2(0, 1)$, *определенный формальным дифференциальным оператором* $\tau = -(d/dt)^2$ *и граничными условиями*

$$f(0) - k_0 f'(0) = 0, \quad f(1) - k_1 f'(1) = 0.$$

Тогда T — *спектральный оператор, удовлетворяющий предположениям п.* (b) *из следствия* 2.9.

Замечание. Утверждение леммы остается в силе, если хотя бы одна из величин k_0, k_1 (или каждая из них) равна ∞; соответствующие граничные условия в этом случае будут иметь вид $f'(0) = 0$ и $f'(1) = 0$.

Доказательство. Мы будем предполагать, что k_0 и k_1 отличны от нуля и бесконечности; случай, когда это условие не выполнено, разбирается совершенно аналогично. Если положить $\lambda = s^2$, то общее решение уравнения

$$-f''(t) - \lambda f(t) = 0$$

имеет вид $\sin s(t + \alpha)$, где α — произвольная постоянная. Граничные условия в точках $t = 0$ и $t = 1$ приводят соответственно к равенствам

$$\operatorname{tg} s\alpha = k_0 s,$$
$$\operatorname{tg} s(1 + \alpha) = k_1 s.$$

Отсюда, используя формулу сложения для функции tg, получаем, что $T - \lambda I$ не имеет обратного лишь в тех точках $\lambda = s^2$, в которых s является корнем уравнения

$$\text{(i)} \qquad \operatorname{tg} s = \frac{(k_1 - k_0)s}{1 + k_0 k_1 s^2} = \frac{cs}{1 + ds^2}, \qquad d \neq 0.$$

По следствию 2, λ лежит в спектре $\sigma(T)$ в том и только в том случае, если s удовлетворяет уравнению (i). Так как не каждое s удовлетворяет уравнению (i), то, согласно лемме 3, T дискретен. Поскольку функция $\operatorname{tg} s$ периодична с периодом π, то корень уравнения (i) в полосе $(2n - 1/2)\pi \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant (2n + 3/2)\pi$ является суммой $2\pi n$ и нуля функции

$$\text{(ii)} \qquad \operatorname{tg} s - \frac{c(s + 2\pi n)}{1 + d(s + 2\pi n)^2}$$

в полосе $-(1/2)\pi \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant (3/2)\pi$. Заметим, что $|\operatorname{tg} s| \to 1$ при $|s| \to \infty$ в этой полосе и

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c(s+2\pi n)}{1+d(s+\pi n)^2}\right| = 0;$$

отсюда следует существование такого конечного K, что при достаточно больших n нули функции (ii) лежат в прямоугольнике $|\operatorname{Im} s| \leqslant K$, $-(1/2)\pi \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant (3/2)\pi$. Функция $\operatorname{tg} s$ имеет два простых нуля в точках $s = 0$ и $s = \pi$ полосы $-(1/2)\pi \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant$ $\leqslant (3/2)\pi$. Отсюда в силу леммы 5 для больших n функция (ii) имеет ровно два нуля в полосе $-(1/2)\pi \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant (3/2)\pi$, и эти нули s_n, s'_n имеют асимптотические разложения

$$s_n \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k n^{-k} \quad \text{и} \quad s'_n \sim \sum_{k=1}^{\infty} a'_k n^{-k}.$$

Подставляя эти ряды в (ii), мы получаем $a'_1 = a_1 = c(d\pi)^{-1}$. Следовательно, нули s_n функции (ii) можно перенумеровать, пропустив конечное число членов, так что $s_n = \pi n + c(d\pi n)^{-1} + O(n^2)$. Таким образом, мы расположили собственные значения оператора T в такую последовательность λ_n ($n = k, k+1, \ldots$; возможно, $k \neq 1$), что

$$\lambda_n = (\pi n)^2 + 2cd^{-1} + O(n^{-1}).$$

Отсюда, обозначая через d_n расстояние от λ_n до остальной части спектра T, получаем

$$d_n = \pi^2(2n-1) + O(n^{-1}),$$

так что

$$\sum_{n=k}^{\infty} d_n^{-2} < \infty.$$

Граничные условия, определяющие наш оператор, таковы, что каждому λ_n соответствует, очевидно, единственная (с точностью до скалярного множителя) функция φ_n, удовлетворяющая условию

$$(T - \lambda_n I)\varphi_n = 0.$$

Следовательно, если $E(\lambda_n)$ не одномерен, то в силу леммы 2.2 λ_n есть кратный полюс резольвенты. По лемме 8 это имеет место лишь при условии $(\varphi_n, \psi_n) = 0$, где ψ_n — решение уравнения

$$(T^* - \bar{\lambda}_n I^*)\psi_n = 0.$$

Поскольку в силу теорем XIII.2.10 и XII.4.28 T^* определен формальным дифференциальным оператором $-(d/dt)^2$ и граничными условиями $f(0) - \bar{k}_0 f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$, то существует такое число $\gamma_n \neq 0$, что

$$\gamma_n \psi_n(t) = \overline{\varphi_n(t)}.$$

Итак, λ_n может быть кратным полюсом резольвенты оператора T лишь при условии

$$\int_0^1 (\varphi_n(t))^2\,dt=0.$$

Имеем

$$\varphi_n(t)=\sin s_n(t+\alpha_n)=\sin(s_nt+\beta_n),$$

где число β_n удовлетворяет условию

$$k_0^{-1}s_n^{-1}\sin\beta_n=\cos\beta_n.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\beta_n=\frac{\pi}{2}-(n\pi k_0)^{-1}+O(n^{-2}),$$

так что

$$\varphi_n(t)=\cos(s_nt+\delta_n),\qquad \delta_n=(n\pi k_0)^{-1}+O(n^{-2}).$$

Поэтому

$$\int_0^1(\varphi_n(t))^2\,dt\sim\int_0^1\cos^2 n\pi t\,dt=\frac{1}{2},$$

так что лишь конечное число точек λ_n может оказаться кратными полюсами резольвенты T. Для тех λ_n, которые являются простыми полюсами резольвенты T, проектор $E(\lambda_n)$ по лемме 9 является интегральным оператором с ядром

$$\hat{\varphi}_n(t)\,\hat{\varphi}_n(u)=E_n(t,\ u),$$

где $\hat{\varphi}_n=c_n\varphi_n$ и c_n выбрано так, что

$$\int_0^1|\hat{\varphi}_n(t)|^2\,dt=1.$$

Простой подсчет показывает, что

$$c_n=2^{-1/2}+O(n^{-2}).$$

Отсюда

$$E_n(x,\ y)=\frac{1}{2}\cos n\pi x\ \cos n\pi y-\frac{(cd^{-1}x+k_0^{-1})}{2n\pi}\sin n\pi x\ \cos n\pi y-\\ -\frac{(cd^{-1}y+k_0^{-1})}{2n\pi}\sin n\pi y\ \cos n\pi x+O(n^{-2}),$$

и потому E_n разлагается на четыре слагаемых:

(iii) $$E_n=\hat{E}_n+A_n+B_n+\Delta_n.$$

Используя разложение (iii), легко доказать равномерную ограниченность величин $\left|\sum_{n\in J} E_n\right|$, где J — произвольное конечное множество целых чисел. Имеем

$$\left|\sum_{n\in J} \hat{E}_n\right| \leqslant 1,$$

ибо проекторы $\hat{E}_n$ взаимно ортогональны. Далее,

$$\left|\sum_{n\in J} \Delta_n\right| \leqslant M,$$

так как

$$|\Delta_n| = O(n^{-2}) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

Операторы A_n и B_n имеют вид

$$A_n = \hat{E}_n\hat{A}_n, \qquad B_n = \hat{B}_n\hat{E}_n,$$

где

$$|\hat{A}_n| = O(n^{-1}) \quad \text{и} \quad |\hat{B}_n| = O(n^{-1});$$

повторяя (с очевидными изменениями) рассуждения, примененные в конце доказательства теоремы 2.7, мы получаем не только равномерную ограниченность величин $\left|\sum_{n\in J} A_n\right|$, но и соотношение

$$\text{(iv)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{m=n}^{\infty} A_m\right| = 0.$$

Чтобы закончить доказательство леммы, остается проверить равенство

$$\sum_{i=k}^{\infty} E(\lambda_i) = I.$$

По лемме 2.5 проектор

$$E_\infty = I - \sum_{i=k}^{\infty} E(\lambda_i)$$

либо отображает все пространство на бесконечномерное подпространство, либо является нулевым. Но, согласно (iv),

$$\lim_{m\to\infty}\left|\left(I - \sum_{n=m}^{\infty} E(\lambda_n)\right) - \left(I - \sum_{n=m}^{\infty} \hat{E}_n\right)\right| = 0.$$

Следовательно, по лемме VII.6.7, оператор

$$I - \sum_{n=m}^{\infty} E(\lambda_n)$$

является конечномерным при достаточно больших m; отсюда вытекает, что E_∞ — конечномерный проектор, ч. т. д.

→ 11. Теорема. *Пусть T — неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$, определенный формальным дифференциальным оператором $\tau = -(d/dx)^2$ и граничными условиями*

[*] $$f(0) - k_0 f'(0) = 0, \quad f(1) - k_1 f'(1) = 0,$$

где k_0 и k_1 — произвольные (возможно, бесконечные) комплексные числа. Тогда для любого ограниченного оператора B оператор $T + B$ является спектральным.

Доказательство следует из леммы 10 и следствия 2.9, ч. т. д.

12. Следствие. *Пусть q — ограниченная измеримая функция и T — неограниченный дифференциальный оператор, определенный формальным дифференциальным оператором*

$$\tau = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + q(x)$$

и граничными условиями [*]. *Тогда T — спектральный оператор.*

Доказательство следует из теоремы 11, ч. т. д.

В заключение мы докажем одно полезное элементарное утверждение из теории спектральных дифференциальных операторов.

13. Лемма. *Пусть τ — формальный дифференциальный оператор порядка n, определенный в интервале I, T — дискретный спектральный оператор, порожденный оператором τ и конечным числом граничных условий, $\{\lambda_n\}$ — спектр $\sigma(T)$ оператора T и J — компактный интервал из I. Тогда для любой f из $\mathfrak{D}(T)$ ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i; T) f$$

сходится к f безусловно в топологии пространства $A^{(n)}(J)$.

Доказательство. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i; T) f$, разумеется, сходится безусловно в топологии пространства $L_2(J)$. То же самое верно и для ряда

$$T\left(\sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i; T) f\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i; T)(Tf)$$

(см. VII.9.8). Следовательно, по лемме XIII.2.16 исходный ряд сходится безусловно в топологии пространства $A^{(n)}(J)$, ч. т. д.

14. Следствие. *Пусть T — тот же оператор, что в следствии 12, и f — функция из $\mathfrak{D}(T)$. Если $\{\lambda_i\}$ — спектр $\sigma(T)$, то ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\lambda_i) f$$

сходится безусловно в топологии пространства $A^{(2)}(J)$.

Доказательство сразу же следует из следствия 12 и леммы 13, ч. т. д.

4. Спектральные свойства оператора $\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)^n$

В этом параграфе будет показано, что дифференциальный оператор n-го порядка на конечном отрезке порождает спектральный оператор при граничных условиях из некоторого достаточно широкого класса. Для этой цели мы применим общую теорию возмущений из § 2, рассматривая произвольный дифференциальный оператор n-го порядка (со старшим членом $(-id/dt)^n$) на отрезке $[0, 1]$ как возмущение основного оператора

$$\tau_n = i^{-n}\frac{d^n}{dt^n}$$

на отрезке $[0, 1]$. Иногда мы будем писать τ вместо τ_n.

В этом параграфе через B_i, $i = 1, \ldots, n$, мы обозначаем совокупность n линейно независимых граничных значений для τ. Согласно следствию XIII.2.23, существуют две такие $(n \times n)$-матрицы α_{ij}, β_{ij}, что

$$B_i(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} f^{(j)}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} f^{(j)}(1), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Через T обозначается оператор, заданный на множестве

$$\mathfrak{D}(T) = \{f \mid f \in H^{(n)}(I),\ B_i(f) = 0,\ i = 1, \ldots, n\} \tag{2}$$

формулой

$$Tf = \tau_n f, \qquad f \in \mathfrak{D}(T). \tag{3}$$

Мы изучим резольвенту T; для этого начнем с исследования множества собственных значений этого оператора.

Сначала мы произведем нормализацию множества граничных условий. Пусть B — граничное значение $Bf = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j f^{(j)}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\gamma}_j f^{(j)}(1)$. Назовем *порядком граничного значения B в точке* 0 наибольший из номеров j, для которых $\gamma_j \neq 0$. Аналогично определяется *порядок граничного значения B в точке* 1. Наибольший из этих порядков называется *порядком граничного значения* B. Ясно, что, имея два граничных условия $B(f) = 0$, $C(f) = 0$, в которых граничные значения B и C имеют одинаковый порядок m в нуле, мы можем, вычитая из B надлежащим образом подобранное кратное C, перейти к равносильной паре граничных условий $B(f) = 0$, $(C - \rho B)(f) = 0$, где граничное значение $C - \rho B$ имеет в нуле порядок, меньший чем m. То же самое относится к точке 1. Отсюда следует, что, имея три граничных условия $B(f) = 0$, $C(f) = 0$ и $D(f) = 0$, в которых порядки B, C и D не превосходят m, мы можем найти равносильную систему трех граничных условий $\widetilde{B}(f) = 0$, $\widetilde{C}(f) = 0$, $\widetilde{D}(f) = 0$, в которых порядки $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ не превосходят m, а порядок $\widetilde{D}$ не превосходит $m - 1$. Если $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ оба имеют порядок m, то, заменяя $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ на $\widetilde{B} - \rho\widetilde{C}$ и $\widetilde{C} - \rho_1\widetilde{B}$, где ρ, ρ_1 — подходящим образом подобранные числа, мы приходим к равносильной системе из трех граничных условий, в которой не более одного элемента имеет порядок m в точке 0 и не более одного элемента имеет порядок m в точке 1. Применяя это рассуждение по индукции к исходной системе B_i граничных условий, получаем равносильную систему, в которой *порядки m_i граничных значений B_i образуют невозрастающую последовательность целых чисел, не содержащую трех последовательных равных элементов, причем если B_i и B_{i+1} имеют одинаковые порядки, то B_i имеет в нуле больший порядок, чем B_{i+1}, а B_{i+1} имеет в точке 1 больший порядок, чем B_i.*

Сумму $\sum_{i=1}^{n} m_i$ мы обозначим через p.

Легко видеть в этом случае, что пара членов порядка m_i в граничном значении B_i определяется с точностью до умножения на постоянную и не зависит от способа нормализации исходного множества граничных условий. Наконец, умножая B_i на подходящие отличные от нуля числа, мы можем считать, что если B_i содержит $f^{(m_i)}(0)$ с ненулевым коэффициентом, то этот коэффициент равен 1, а если B_i не содержит $f^{(m_i)}(0)$ с ненулевым коэффициентом, то коэффициент при $f^{(m_i)}(1)$ равен 1.

При доказательстве нам придется различать случаи четного и нечетного n; мы рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай 1: *n четно.* Пусть $n = 2\nu$ и ω_j, $j = 0, \ldots, n - 1$,— корни степени n из единицы, перенумерованные так, что $\omega_0 = 1$, $\omega_\nu = -1$, мнимая часть ω_i положительна при $0 < i < \nu$ и отрицательна при $\nu < i < 2\nu$.

Пусть λ — произвольное комплексное число и $\mu = \mu(\lambda)$ — единственный корень степени n из λ, лежащей в секторе $\pi/n \geqslant$

$\geqslant \arg \mu \geqslant (-\pi)/n$ комплексной плоскости. Положим

$$(4) \qquad \sigma_k(t, \mu) = \begin{cases} e^{i\mu w_k t}, & 0 \leqslant k \leqslant \nu, \\ e^{i\mu w_k (t-1)}, & \nu < k < 2\nu. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, функции $\sigma_0(t, \mu(\lambda)), \ldots, \sigma_{n-1}(t, \mu(\lambda))$ образуют базис пространства решений уравнения $\tau_n f = \lambda f$.

Положим

$$(5) \qquad B_i(\sigma_k(\mu)) = M_{ik}(\mu).$$

Ясно, что собственными значениями T являются в точности те λ, для которых существуют такие не равные нулю одновременно постоянные $c_0, \ldots, c_{n-1}$, что

$$B_i\Big(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \sigma_k(\mu(\lambda))\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k M_{ik}(\mu(\lambda)) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, если положить

$$(6) \qquad M(\mu) = \det(M_{ij}(\mu)),$$

то собственными значениями T будут корни уравнения $M(\mu(\lambda)) = 0$.

Мы изучим корни уравнения $M(\mu) = 0$ и покажем, что при некоторых ограничениях на граничные условия $\{B_i(f) = 0\}$, определяющие оператор T, они допускают простое асимптотическое представление.

Из формулы (4) для функций $\sigma_k(t, \mu)$ и из формулы (1) для B_i видно, что функции $B_i(\sigma_k(t, \mu)) = M_{ik}(\mu)$ имеют вид

$$(7) \qquad M_{ik}(\mu) = \begin{cases} P_{ik}(\mu) + Q_{ik}(\mu)\, e^{iw_k \mu}, & 0 \leqslant k \leqslant \nu, \\ P_{ik}(\mu) + Q_{ik}(\mu)\, e^{-iw_k \mu}, & \nu < k < 2\nu, \end{cases}$$

где P_{ik} и Q_{ik} — многочлены от μ степени, не превосходящей m_i для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Пусть A есть сектор

$$(8) \qquad A = \left\{ z \,\middle|\, |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{n} \right\}$$

в комплексной плоскости. Изучим нули $M(\mu)$ в A. Так как $\mu(\lambda)$ лежит в секторе A для всех λ, то мы получим поэтому полную информацию о нулях $M(\mu(\lambda))$. Поскольку w_k при $0 < k < \nu$ есть корень n-й степени из единицы с положительной мнимой частью, то при $0 < k < \nu$ число $iw_k\mu$ пробегает некоторый угол в левой полуплоскости, когда μ пробегает A. Аналогично, при $\nu < k < 2\nu$

число $iw_k\mu$ пробегает некоторый угол в правой полуплоскости, когда μ пробегает A. Следовательно, если положить

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&N_{ik}(\mu)=P_{ik}(\mu), \qquad 0<k<\nu \text{ или } \nu<k<2\nu,\\
&N_{i0}(\mu)=M_{i0}(\mu)=P_{i0}(\mu)+Q_{i0}(\mu)\,e^{i\mu},\\
&N_{i\nu}(\mu)=M_{i\nu}(\mu)=P_{i\nu}(\mu)+Q_{i\nu}(\mu)\,e^{-i\mu},
\end{aligned}
$$

то найдется такое $a>0$, что

$$
(10)\qquad |N_{ik}(\mu)-M_{ik}(\mu)|=O(e^{-a|\mu|}),
$$

когда μ стремится к бесконечности, оставаясь в секторе A. Положим $N(\mu)=\det(N_{ik}(\mu))$. Из формулы (9) для матрицы $N_{ik}(\mu)$ видно, что $N(\mu)$ можно представить в виде

$$
(11)\qquad N(\mu)=\pi_1(\mu)\,e^{i\mu}+\pi_2(\mu)\,e^{-i\mu}+\pi_3(\mu),
$$

где π_1, π_2 и π_3 — многочлены от μ степени, не превосходящей $p=\sum_{i=1}^{n} m_i$. Из соотношения (10) следует, что для любого положительного числа $b<a$

$$
(12)\qquad |N(\mu)-M(\mu)|=O(e^{-b|\mu|+|\operatorname{Im}\mu|}),
$$

когда $\mu\to\infty$, оставаясь в секторе A.

Чтобы продолжить исследование, нам придется сделать следующее предположение:

1. Условие регулярности в случае четного порядка. *Многочлены π_1 и π_2 имеют степень p.*

Если условие регулярности 1 выполнено, то

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
&\pi_1(\mu)=a_p\mu^p+a_{p-1}\mu^{p-1}+\ldots+a_0, \qquad a_p\neq 0,\\
&\pi_2(\mu)=b_p\mu^p+b_{p-1}\mu^{p-1}+\ldots+b_0, \qquad b_p\neq 0,\\
&\pi_3(\mu)=c_p\mu^p+c_{p-1}\mu^{p-1}+\ldots+c_0.
\end{aligned}
$$

Проверку условия 1 можно облегчить, используя следующее элементарное соображение. Из уравнений (1), (4) и описанной выше нормализации граничных условий видно, что члены порядка p в определителе $N(\mu)$ совпадают с членами порядка p в определителе $\hat N(\mu)$ матрицы $(\hat N_{ik}(\mu))$, определенной равенствами

$$
\begin{aligned}
&\hat N_{ik}(\mu)=\alpha_{i,m_i}(i\mu w_k)^{m_i}, \qquad 0<k<\nu,\\
&\hat N_{ik}(\mu)=\beta_{i,m_i}(i\mu w_k)^{m_i}, \qquad \nu<k<2\nu,\\
&\hat N_{i0}(\mu)=\alpha_{i,m_i}(i\mu)^{m_i}+\beta_{i,m_i}(i\mu)^{m_i}\,e^{i\mu},\\
&\hat N_{i\nu}(\mu)=\alpha_{i,m_i}(-i\mu)^{m_i}+\beta_{i,m_i}(-i\mu)^{m_i}\,e^{-i\mu}.
\end{aligned}
$$

Вынося из определителя $\hat{N}(\mu)$ множитель $(i\mu)^p$, получаем, что коэффициенты a_p, b_p, c_p членов порядка p в определителе $N(\mu)$ совпадают с коэффициентами a_p, b_p, c_p в определителе $\hat{\hat{N}}(\mu) = a_p e^{i\mu} + b_p e^{-i\mu} + c_p$ матрицы $(\hat{\hat{N}}_{ik})$, определенной равенствами

$$\hat{\hat{N}}_{ik} = \begin{cases} \alpha_{i, m_i} w_k^{m_i}, & 0 < k < \nu, \\ \beta_{i, m_i} w_k^{m_i}, & \nu < k < 2\nu, \end{cases}$$

$$\hat{\hat{N}}_{i0} = \alpha_{i, m_i} + \beta_{i, m_i} e^{i\mu},$$

$$\hat{\hat{N}}_{i\nu} = (\alpha_{i, m_i} + \beta_{i, m_i} e^{-i\mu})(-1)^{m_i}.$$

Таким образом, вопрос о том, выполнено или нет условие 1, полностью определяется лишь «старшими» коэффициентами в граничных условиях, т. е. коэффициентами α_{i, m_i} и β_{i, m_i} при старших производных, входящих в $\hat{N}(\mu)$ с ненулевыми коэффициентами.

Если условие регулярности 1 выполнено, то из соотношений (11), (12) и (13) мы получаем, что

$$\mu^{-p} M(\mu) = a_p e^{i\mu} + b_p e^{-i\mu} + c_p + p_1(\mu) e^{i\mu} + p_2(\mu) e^{-i\mu} + p_3(\mu) + O(e^{-b|\mu| + |\operatorname{Im}\mu|}) \tag{14}$$

равномерно, когда $|\mu| \to \infty$, оставаясь в A, где p_1, p_2 и p_3 — многочлены от μ^{-1} без свободного члена. Пусть t и s — столь большие числа, что

$$|p_1(\mu)| + |p_2(\mu)| + |p_3(\mu)| < \frac{1}{3}|a_p|, \qquad |\mu| > t,$$

$$|b_p e^{-i\mu}| + |c_p| < \frac{1}{3}|a_p e^{i\mu}|, \qquad -\operatorname{Im}(\mu) > s,$$

и последний член из правой части равенства (14) меньше, чем $|a_p e^{i\mu}|/3$ при $|\mu| > t$, $-\operatorname{Im}\mu > s$. Тогда из (14) ясно, что $M(\mu)$ не обращается в нуль в области $\{\mu \in A \mid -\operatorname{Im}\mu > s, |\mu| > t\}$ из A. Аналогично, мы можем выбрать столь большие t и s, что $M(\mu)$ будет отлична от нуля в области $\{\mu \in A \mid \operatorname{Im}\mu > s, |\mu| > t\}$. Итак, мы доказали следующую лемму:

2. Лемма. *Пусть совокупность* (1) *граничных условий удовлетворяет условию регулярности* 1. *Тогда существуют столь большие вещественные числа t и s, что любой нуль z функции $M(\mu)$* (*определенной формулой* (6)), *лежащий в угле A* (*определенном формулой* (8)), *удовлетворяет либо условию $|z| < t$, либо условию $|\operatorname{Im} z| < s$.*

Выберем α так, чтобы

$$a_p e^{i\alpha} = -b_p e^{-i\alpha} = k. \tag{15}$$

Тогда мы можем написать, что

$$a_p e^{i\mu} + b_p e^{-i\mu} + c_p = k\left(e^{i(\mu-\alpha)} - e^{-i(\mu-\alpha)}\right) + c_p = \\ = 2ik\{\sin(\mu-\alpha) - \beta\}, \tag{16}$$

где

$$\beta = \frac{c_p}{2ik}. \tag{17}$$

Мы покажем ниже, что нули $M(\mu)$ близки к нулям функции $\sin(\mu - \alpha) - \beta$. При $\beta \neq \pm 1$ все нули последней функции простые. При $\beta = \pm 1$ функция $\sin(\mu - \alpha) \pm 1$ имеет двойные нули в точках $\mu = \alpha \pm \pi/2 + 2\pi n$. Следовательно, мы должны отдельно разобрать случаи $\beta = \pm 1$ и $\beta \neq \pm 1$.

Случай 1А: *постоянная* β *в формуле* (16) *отлична от* ± 1. Тогда полоса периодов $0 \leqslant \operatorname{Re} z < 2\pi$ содержит ровно два корня z_1, z_2 уравнения $\sin z = \beta$. Действительно, отображение $w \to h(w) = w - (1/w)$ переводит w-плоскость с выколотой точкой $w = 0$ на всю z-плоскость, и при этом любая точка z, кроме $z = \pm 2i$, является образом ровно двух точек w. Отображение $z \to e^{iz}$ переводит взаимно однозначно полосу периодов $0 \leqslant \operatorname{Re} z < 2\pi$ на w-плоскость с выколотой точкой $w = 0$. Так как $\sin z = (1/2i)\, h(e^{iz})$, то наше утверждение становится очевидным. Следовательно, уравнение $\sin(z - \alpha) - \beta = 0$ имеет лишь простые корни, которые распадаются на две арифметические прогрессии вида $z = 2\pi n + \alpha + z_1$ и $z = 2\pi n + \alpha + z_2$, где $2\pi > \operatorname{Re} z_1 \geqslant \operatorname{Re} z_2 \geqslant 0$, $z_1 \neq z_2$. Чтобы получить отсюда информацию о нулях $M(\mu)$, мы воспользуемся сформулированной ниже леммой 3.

Согласно лемме 2, все нули $M(\mu)$, за возможным исключением конечного их числа, лежат в полосе $|\operatorname{Im} z| < s$. Пусть α_1 выбрано так, что нули $z_1 + \alpha$ и $z_2 + \alpha$ уравнения $\sin(z - \alpha) = \beta$ лежат внутри полосы периодов $2\pi(n+1) \geqslant \operatorname{Re}(z - \alpha_1) \geqslant 2\pi n$; выберем столь большое y, что $y > |\operatorname{Im}(z_1 + \alpha)| + |\operatorname{Im}(z_2 + \alpha)|$. Разделим область $2\pi \geqslant \operatorname{Re}(z - \alpha_1) \geqslant 0$ на две области $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, каждая из которых содержит ровно один из корней уравнения $\sin(z - \alpha) = \beta$. Положим $R^{(1)}_m = R^{(1)} + 2m\pi$, $R^{(2)}_m = R^{(2)} + 2m\pi$. Используя тот факт, что нули функции $\sin(z - \alpha) - \beta$ имеют вид $2\pi m + \alpha + z_1$, $2\pi m + \alpha + z_2$, $z_1 \neq z_2$, $2\pi > \operatorname{Re} z_1 \geqslant \operatorname{Re} z_2 \geqslant 0$, применяя лемму 3.5 и формулы (16) и (14), мы видим, что для достаточно больших m области $R^{(1)}_m$ и $R^{(2)}_m$ содержат ровно по одному нулю функции $M(\mu)$. Из леммы 3.5 и формул (16), (14) вытекает также, что нули ξ_n функции $M(\mu)$, лежащие в $R^{(1)}_n$, имеют асимптотическое представление

$$\xi_n \sim 2\pi n + \alpha + z_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \zeta_m n^{-m},$$

а нули $\tilde{\xi}_n$ функции $M(\mu)$, лежащие в $R_n^{(2)}$, имеют асимптотическое представление

$$\tilde{\xi}_n \sim 2\pi n+\alpha+z_2+\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\zeta}_m n^{-m},$$

где ζ_m, $\tilde{\zeta}_m$ — некоторые коэффициенты. Поскольку полоса $|\operatorname{Im} z|< s$, $\operatorname{Re} z \geqslant (z_1+z_2)/2-\pi$ является объединением областей $R_n^{(1)}$, $n=1, 2, \ldots$, и $R_n^{(2)}$, $n=1, 2, \ldots$, мы доказали следующий результат:

3. Лемма. *Пусть множество граничных условий* (1) *удовлетворяет условию регулярности* 1 *и постоянная* β *из формулы* (16) *отлична от* ± 1. *Тогда все нули функции* $M(\mu)$ (*определенной формулой* (6)) *в секторе* A (*определенном формулой* (8)), *кроме, быть может, конечного их числа, являются простыми и могут быть расположены в две последовательности* $\{\xi_m\}$, $\{\tilde{\xi}_m\}$, *имеющие асимптотические разложения*

$$\xi_m \sim 2\pi m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n m^{-n}\right), \qquad \tilde{\xi}_m \sim 2\pi m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n m^{-n}\right), \tag{18}$$

где

$$\tilde{c}_1=c_1+z, \qquad z \neq 0, \qquad 1>\operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Так как $\lambda=(\mu(\lambda))^n$, то корни уравнения $M(\mu(\lambda))=0$ — это просто n-е степени корней уравнения $M(\mu)=0$. Таким образом, в силу следствия 3.2 спектр T совпадает с множеством корней уравнения $M(\mu(\lambda))=0$. Из леммы 3 и следствия 3.2 вытекает

4. Лемма. *Пусть множество граничных условий* (1) *удовлетворяет условию регулярности* 1 *и постоянная* β *из формулы* (16) *отлична от* ± 1. *Тогда спектр оператора* T, *определенного формулами* (2) *и* (3), *содержит только изолированные точки, каждая из которых принадлежит точечному спектру* T. *Если исключить некоторое конечное множество этих точек, то оставшиеся точки можно расположить в две последовательности* $\{\lambda_m\}$, $\{\tilde{\lambda}_m\}$, *допускающие асимптотические разложения*

$$\lambda_m \sim (2\pi m)^n\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} d_k m^{-k}\right), \qquad \tilde{\lambda}_m \sim (2\pi m)^n\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{d}_k m^{-k}\right), \tag{19}$$

где

$$d_1=\tilde{d}_1+z, \qquad z \neq 0, \qquad n>\operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

5. Следствие. *Если выполнены предположения леммы* 4, *то оператор* T *дискретен.*

Доказательство вытекает из лемм 4 и 3, ч. т. д.

Чтобы применить к T теорию возмущений из § 2, мы должны показать, что для всех точек λ_0 из $\sigma(T)$, за исключением конечного их числа, проектор $E(\lambda_0)$ одномерен. Это делается в следующей лемме.

6. Лемма (*Г. Д. Биркгоф*). *Простой нуль* λ_0 *функции* $M(\mu(\lambda))$ *является простым полюсом резольвенты оператора* T. *При этом проектор* $E(\lambda_0) = E(\lambda_0;\ T)$, *соответствующий точке* λ_0, *одномерен*.

Доказательство. Обозначим отрезок $[0, 1]$ через I. Возьмем функцию f из $L_2(I)$ и обозначим через $G(\lambda) f$ единственное решение g уравнения $(\lambda - \tau_n) g = f$, удовлетворяющее начальным условиям $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-1)}(0) = 0$. Согласно следствию XIII.1.5, $G(\lambda) f$ зависит от λ аналитически. Так как, очевидно, $G(\lambda)$ является замкнутым отображением из $L_2(I)$ в $H^{(n)}(I)$, то по теореме о замкнутом графике (II.2.4) $G(\lambda)$ — ограниченное отображение $L_2(I)$ в $H^{(n)}(I)$. Но поскольку топология $H^{(n)}(I)$ сильнее индуцированной топологии $H^{(n)}(I)$ (как подпространства в $L_2(I)$), $G(\lambda)$ можно рассматривать либо как ограниченное отображение $L_2(I)$ в $H^{(n)}(I)$, либо как ограниченное отображение $L_2(I)$ в себя, аналитически зависящее от параметра λ. Пусть $\widetilde{M}_{ik}(\mu)$ — алгебраическое дополнение элемента $M_{ik}(\mu)$ матрицы (5), так что $M(\mu)^{-1}\widetilde{M}_{ik}(\mu)$ — элементы матрицы, обратной к матрице, определенной равенствами (5). Тогда $\widetilde{M}_{ik}(\mu)$ аналитически зависит от μ, $1 \leqslant i,\ k \leqslant n$. Рассмотрим элемент

$$H(\lambda) f = G(\lambda) f - M(\mu(\lambda))^{-1} \sum_{i,k=1}^{n} \widetilde{M}_{ik}(\mu(\lambda)) (B_i G(\lambda) f) \sigma_k(\mu(\lambda))$$

из $H^{(n)}(I)$. Так как $(\tau - \lambda)\sigma_k(\mu(\lambda)) = 0$, мы имеем $(\lambda - \tau) H(\lambda) f = (\lambda - \tau) G(\lambda) f = f$. Кроме того, в силу соотношений (5),

$$B_j H(\lambda) f = B_j G(\lambda) f - M(\mu(\lambda))^{-1} \sum_{i,k=1}^{n} \widetilde{M}_{ik}(\mu(\lambda)) M_{kj}(\mu(\lambda)) B_i G(\lambda) f =$$
$$= B_j G(\lambda) f - B_j G(\lambda) f = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $H(\lambda) f$ лежит в $\mathfrak{D}(T)$, т. е. $H(\lambda)$ совпадает с резольвентой $R(\lambda; T)$. Итак, доказана формула

$$(20) \quad R(\lambda; T) f = G(\lambda) f - M(\mu(\lambda))^{-1} \sum_{i,k=1}^{n} \widetilde{M}_{ik}(\mu(\lambda)) (B_i G(\lambda) f) \sigma_k(\mu(\lambda))$$

для любого такого λ, что $M(\mu(\lambda)) \neq 0$. Отсюда видно, что простой нуль функции $M(\mu(\lambda))$ является простым полюсом резольвенты $R(\lambda;\ T)$, и первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть λ_0 — простой нуль функции $M(\mu(\lambda))$ и, следовательно, простой полюс $R(\lambda; T)$. Предположим, что подпространство значений проектора $E(\lambda_0)$ по меньшей мере двумерно. Так как, согласно лемме 2.2 и следствию 5, $(T-\lambda_0 I)f=0$ для любой функции f из области значений проектора $E(\lambda_0)$, то существуют по меньшей мере два линейно независимых решения φ_1, φ_2 уравнения $\tau\varphi=\lambda_0\varphi$, удовлетворяющие условиям $B_i(\varphi_1)=B_i(\varphi_2)=0$, $i=1, \ldots, k$. Функции φ_1, φ_2 однозначно представляются в виде $\varphi_1=\sum_{j=1}^{n} c_{1j}\sigma_j(\mu(\lambda))$ и $\varphi_2=$ $=\sum_{j=1}^{n} c_{2j}\sigma_j(\mu(\lambda))$ соответственно. Далее, векторы $[c_{11}, \ldots, c_{1n}]$ и $[c_{21}, \ldots, c_{2n}]$, очевидно, линейно независимы. Дополним их до базиса n-мерного пространства векторами $[c_{31}, \ldots, c_{3n}], \ldots$ $\ldots, [c_{n1}, \ldots, c_{nn}]$. Тогда (c_{ij}) — невырожденная матрица. Положим $\sigma_i(\lambda)=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\sigma_j(\mu(\lambda))$, $\Phi_{ij}(\lambda)=B_i(\varphi_j(\lambda))$, $\Phi(\lambda)=\det\{\Phi_{ij}(\lambda)\}$. Если C — отличный от нуля определитель матрицы (c_{ij}), то $\Phi(\lambda)=$ $=CM(\mu(\lambda))$ в силу соотношений (5) и (6). При $\lambda=\lambda_0$ две первые строки матрицы $\Phi_{ij}(\lambda)$ обращаются в нуль. Поскольку определитель Φ матрицы Φ_{ij} является линейной комбинацией произведений элементов двух этих строк на элементы остальных строк, то Φ имеет двойной нуль в точке $\lambda=\lambda_0$. Это противоречие доказывает лемму, ч. т. д.

Выведем асимптотическую формулу для проекторов, связанных с различными собственными значениями оператора T.

Положим

$$(21)\qquad g(\mu; t, s)=\begin{cases} n^{-1}\mu^{1-n}\sum_{j=0}^{n}(i\omega_j)\,e^{i\omega_j\mu(t-s)}, & t>s,\\ -n^{-1}\mu^{1-n}\sum_{j=\nu+1}^{2\nu-1}(i\omega_j)\,e^{i\omega_j\mu(t-s)}, & t<s.\end{cases}$$

Ясно, что g бесконечно дифференцируема по t и s при $t\neq s$ и

$$(\tau_n-\mu^n)\,g(\mu; t, s_0)=0, \qquad t\neq s_0.$$

Кроме того,

$$g^{(k)}(\mu; s_+, s)-g^{(k)}(\mu; s_-, s)=n^{-1}\mu^{1-n}\sum_{j=0}^{2\nu-1}(i\omega_j)^{k+1}.$$

Поскольку сумма k-х степеней корней n-й степени из единицы равна 0 при $k\neq n$ и равна n при $k=n$, мы имеем

$$(22)\qquad \begin{aligned} &g^{(k)}(\mu; s_+, s)-g^{(k)}(\mu; s_-, s)=0, \qquad 0\leqslant k<n-1,\\ &g^{(n-1)}(\mu; s_+, s)-g^{(n-1)}(\mu; s_-, s)=i^n.\end{aligned}$$

Следовательно, $g(\mu; s_0)$ лежит в $C^{(n-2)}[0, 1]$, но не в $C^{(n-1)}[0, 1]$. Положим

$$(G_\mu f)(t) = \int_0^1 g(\mu; t, s) f(s)\, ds.$$

Тогда

$$(G_\mu f)^{(k)}(t) = \int_0^1 g^{(k)}(\mu; t, s) f(s)\, ds, \qquad 0 \leqslant k < n,$$

и, дифференцируя еще раз, получаем

$$\begin{aligned}(G_\mu f)^{(n)}(t) &= \int_0^1 g^{(n)}(\mu; t, s) f(s)\, ds + \\ &+ (g^{(n-1)}(\mu; t, t_-) - g^{(n-1)}(\mu; t, t_+)) f(t) = \\ &= \int_0^1 g^{(n)}(\mu; t, s) f(s)\, ds + i^n f(t).\end{aligned}$$

Итак, $(\tau_n - \mu^n) G_\mu f = f$.

Рассуждая так же, как при выводе формулы (20) из леммы 6, приходим к соотношению

$$R(\mu^n; T) f = G_\mu f - M(\mu)^{-1} \sum_{i, k=1}^{n} \widetilde{M}_{ik}(\mu)(B_i G_\mu f)\, \sigma_k(\mu), \tag{23}$$

где $\widetilde{M}_{ik}(\mu)$ — алгебраическое дополнение к элементу $M_{ik}(\mu)$ матрицы, элементы которой заданы равенствами (5).

Из (9) и (10) ясно, что $\widetilde{M}_{jk}(\mu)$ имеет асимптотическое представление

$$\widetilde{M}_{jk}(\mu) \sim \mu^{p-m_j} (\widetilde{\pi}_{jk}(\mu) e^{i\mu} + \widetilde{\pi}'_{jk}(\mu) e^{-i\mu} + \widetilde{\pi}''_{jk}(\mu)), \tag{24}$$

где $\widetilde{\pi}_{jk}$, $\widetilde{\pi}'_{jk}$, $\widetilde{\pi}''_{jk}$ — многочлены от $1/\mu$. Из формул (21) и (4) следует, что $(B_i G_\mu f)$ можно записать в виде

$$(B_i G_\mu f) = \mu^{1-n} \sum_{k=1}^{n} T_{ik}(\mu) \int_0^1 \sigma_k(1-s, \mu) f(s)\, ds, \tag{25}$$

где T_{ik} — многочлен от μ степени, не превосходящей m_i. Используя формулы (11), (23), (24) и (25), мы видим, что резольвента

$R(\mu^n; T)$ представляется асимптотическим рядом

(26) $$R(\mu^n; T) f(x) \sim G_\mu f(x) - \\ - \mu^{1-n} \frac{\sum_{k,j=1}^{n} (A_{kj}(\mu) e^{i\mu} + A'_{kj}(\mu) e^{-i\mu} + A''_{kj}(\mu)) \sigma_j(x, \mu) \int_0^1 \sigma_k(1-s, \mu) f(s)\, ds}{A(\mu) e^{i\mu} + A'(\mu) e^{-i\mu} + A''(\mu)},$$

где A, A', A'' и A_{kj}, A'_{kj} и A''_{kj} — многочлены от $1/\mu$. Более того, асимптотическая формула (26) допускает дифференцирование любого порядка по x. Ясно, что свободные члены a, a' и a'' в $A(\mu)$, $A'(\mu)$ и $A''(\mu)$ — это те же самые постоянные a_p, b_p, c_p, которые участвуют в формулах (13) и (16). Проекторы $E_m = E(\lambda_m; T)$ и $\widetilde{E}_m = E(\widetilde{\lambda}_m; T)$ являются вычетами в точках ξ_m и $\widetilde{\xi}_m$ функции $R(\lambda; T)$, а также, очевидно, функции $n\mu^{n-1}R(\mu^n; T)$. В силу формулы (21) G_μ аналитична, так что достаточно рассмотреть вычеты функции

(27) $$n\mu^{n-1}R(\mu^m; T) - n\mu^{n-1}G_\mu$$

в точках ξ_m и $\widetilde{\xi}_m$. Согласно лемме 3, существует столь малое $\varepsilon > 0$, что если C_m — окружность радиуса ε с центром в точке $2\pi m + 2\pi c_1$, то ξ_m является единственной особой точкой $R(\mu^n; T)$ в C_m. Следовательно, вычет $E_m = E(\lambda_m; T)$ можно получить интегрированием функции (27) по C_m. Из формулы (26) вытекает, что E_m представляется асимптотическим рядом

(28) $$(E_m f)(t) \sim \\ \sim \frac{n}{2\pi i} \int_{C_0} \int_0^1 \frac{\sum_{k,j=1}^{n} \{A_{kj}(\mu + 2\pi m) e^{i\mu} + A'_{kj}(\mu+2\pi m) e^{-i\mu} + A''_{kj}(\mu+2\pi m)\}}{A(\mu+2\pi m) e^{i\mu} + A'(\mu+2\pi m) e^{-i\mu} + A''(\mu+2\pi m)} \times \\ \times \sigma_j(t, \mu+2\pi m) \sigma_k(1-s, \mu+2\pi m) f(s)\, ds\, d\mu,$$

причем обе части этой формулы допускают дифференцирование по x любого порядка. Так как в круге C_0 нет нулей функции $ae^{i\mu} + a'e^{-i\mu} + a'' \equiv a_p e^{i\mu} + b_p e^{-i\mu} + c_p$, то

$$|(A(\mu+2\pi m) e^{i\mu} + A'(\mu+2\pi m) e^{-i\mu} + A''(\mu+2\pi m))^{-1} - \\ - (ae^{-i\mu} + a'e^{-i\mu} + a'')^{-1}| = O(n^{-1})$$

равномерно на C_0. Следовательно, формулу (28) можно переписать так:

(29) $$(E_m f)(\cdot) \sim \sum_{k,j=0}^{n-1} \int_{C_0} \int_0^1 \frac{(a_{kj}e^{-i\mu} + a'_{kj}e^{-i\mu} + a''_{kj})}{ae^{i\mu} + a'e^{i\mu} + a''} \times \\ \times \sigma_j(\cdot, \mu+2\pi m) \sigma_k(1-y, \mu+2\pi m) f(y)\, dy\, d\mu + \\ + \sum_{k,j=0}^{n-1} \int_{C_0} \int_0^1 F_{kj}^{(m)}(\mu) \sigma_j(\cdot, \mu+2\pi m) \sigma_k(1-s, \mu+2\pi m) f(s)\, ds\, d\mu,$$

где a_{kj}, a'_{kj}, a''_{kj} — некоторые постоянные, а $F_{kj}^{(m)}$, $0 \leqslant k$, $j < n$, $m \geqslant 1$, — последовательность функций от μ, имеющая асимптотику $O(m^{-1})$ равномерно на C_0 при $m \to \infty$. Используя формулу (29), мы покажем, что семейство всех сумм

$$\left| \sum_{m \in J} E_m \right|,$$

где J пробегает все конечные подмножества множества целых чисел, равномерно ограничено. Так как функции $\sigma_j(\cdot, \mu + 2\pi m)$ равномерно ограничены при $\mu \in C_0$ и $m \geqslant 1$ (по формуле (4)) и $\sigma_k(1-y, \mu + 2\pi m) = \sigma_k(1-y, \mu)\sigma_k(1-y, 2\pi m)$ (согласно той же формуле), то в силу соотношения (29) достаточно доказать два следующих утверждения.

(a) Пусть $A_{kj}^{(m)}(\mu)$, где $0 \leqslant k$, $j < n$, $m \geqslant 1$ и $\mu \in C_0$, есть интегральный оператор вида

$$A_{kj}^{(m)}(\mu) f = \sigma_k(\mu + 2\pi m) \int_0^1 \sigma_j(1-s, \mu + 2\pi m) f(s)\, ds. \tag{30}$$

Тогда семейство всех сумм

$$\sum_{m \in J} A_{kj}^{(m)}(\mu)$$

остается равномерно ограниченным, если μ пробегает C_0, k, j — множество всех целых чисел, лежащих между 0 и $n-1$, а J — совокупность всех конечных множеств целых чисел.

(b) Пусть при $0 \leqslant k < n$ оператор $b_m^{(k)}(f)$ определен формулой

$$b_m^{(k)} f = \int_0^1 \sigma_k(1-s, 2\pi m) f(s)\, ds.$$

Тогда существует такая постоянная M, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b_m^{(k)}(f)|}{m} \leqslant M|f|, \qquad 0 \leqslant k < n, \; f \in L_2(0, 1).$$

Утверждение (b) сразу же следует из теоремы о равномерной ограниченности (следствие II.3.21) и леммы IV.4.1, как только мы покажем, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b_m^{(k)}(f)|^2 < \infty, \qquad 0 \leqslant k < n, \quad f \in L_2(0, 1). \tag{31}$$

Это будет доказано в следующей далее лемме 7.

Если $U_\mu^{(k)}$, $V_\mu^{(k)}$ обозначают операторы умножения на $\sigma_k(t, \mu)$ и $\sigma_k(1-t, \mu)$ соответственно, то из формул (30) и (4) следует, что

$$A_{kj}^{(m)}(\mu) = U_\mu^{(k)} A_{kj}^{(m)}(0)\, V_\mu^{(k)}. \tag{32}$$

Поскольку операторы $U_\mu^{(k)}$ и $V_\mu^{(k)}$ равномерно ограничены, когда μ пробегает C_0, для доказательства утверждения (a) достаточно проверить, что семейство сумм

$$\sum_{m \in J} A_{kj}^{(m)}(0), \qquad 0 \leqslant k,\ j < n,$$

равномерно ограничено, когда J пробегает множество всех конечных подмножеств целых чисел. В силу принципа равномерной ограниченности (следствие II.3.21) и формул (31), (30), для этого достаточно доказать равномерную ограниченность в $L_2(0, 1)$ семейства сумм

$$\sum_{m \in J} b_m \sigma_j(t, 2\pi m),$$

когда J пробегает множество всех конечных подмножеств целых чисел; здесь $0 \leqslant j < n$, а $\{b_m\}$ — произвольная последовательность из l_2.

Таким образом, оба утверждения (a) и (b) вытекают из следующей леммы:

7. Лемма. *Пусть* $\alpha \neq 0$, $\operatorname{Re} \alpha \leqslant 0$. *Тогда*

(a) *для любой функции* f *из* $L_2(0, 1)$ *последовательность*

$$a_m(f) = \int_0^1 e^{2\pi m \alpha t} f(t)\, dt$$

принадлежит l_2;

(b) *для любой последовательности* $\{b_m\}$ *из* l_2 *семейство всех конечных сумм членов последовательности* $\{b_m \exp(2\pi m \alpha x)\}$ *ограничено в* $L_2(0, 1)$.

Доказательство. Сначала докажем (a). Если $\alpha = i\beta$, $\operatorname{Im} \beta = 0$, то, разлагая f в конечную сумму квадратично интегрируемых функций, каждая из которых обращается в нуль вне интервала длины не более $1/\beta$, и применяя обычную теорию разложений по ортонормированным системам в гильбертовом пространстве (теорема IV.4.13), мы сразу получаем нужное утверждение. Если $\beta = -\operatorname{Re} \alpha > 0$, то, очевидно,

$$|a_m(f)| \leqslant \int_0^1 e^{-2\pi m \beta t} |f(t)|\, dt.$$

Полагая $f(t)=0$ при $t>1$ и делая замену $s=-2\pi\beta t$, мы можем записать правую часть неравенства в виде

$$b_m(|f|)=\int_0^\infty e^{-mt}\,|f(t)|\,dt.$$

Остается доказать, что для любой функции f из $L_2(0,\infty)$ последовательность $b_m(f)$, определенная при $m\geqslant 1$ формулой

$$b_m(f)=\int_0^\infty e^{-mt} f(t)\,dt,$$

лежит в l_2. Мы можем считать (это не ограничивает общности), что f неотрицательна; в этом случае последовательность $b_m(f)$ будет невозрастающей. Следовательно, $|b_m(f)|^2\leqslant\int_{m-1}^{m}|b_t(f)|^2\,dt$ и нам остается только проверить, что

$$\int_0^\infty b_m(f)^2\,dm<\infty.$$

По теореме Фубини, для доказательства утверждения (a) достаточно убедиться в том, что величина

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-mt}e^{-ms} f(t)\,f(s)\,dt\,ds\,dm=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{f(t)\,f(s)}{t+s}\,dt\,ds$$

конечна. Так как f лежит в $L_2(0,\infty)$, то, согласно неравенству Шварца, достаточно проверить, что функция

$$g(t)=\int_0^\infty\frac{f(s)}{s+t}\,ds=\int_0^\infty\frac{f(ut)}{1+u}\,du$$

принадлежит $L_2(0,\infty)$. Полагая $f_t(x)=f(tx)$ и применяя теорему III.11.17, мы можем представить g как интеграл от вектор-функции

$$g=\int_0^\infty\frac{f_u}{1+u}\,du.$$

Заметим, что $|f_u|=\left(\int_0^\infty f(tu)^2\,dt\right)^{1/2}=u^{-1/2}\,|f|$. Отсюда

$$|g|\leqslant\int_0^\infty\frac{u^{-1/2}\,|f|}{1+u}\,du,$$

и так как

$$\int_0^\infty \frac{u^{-1/2}}{1+u}\, du < \infty,$$

то $|g| < \infty$. Итак, $g \in L_2(0, \infty)$ и утверждение (a) доказано.

Мы сейчас выведем утверждение (b) из (a). В силу теоремы о равномерной ограниченности (II.3.21) и теоремы IV.8.1 для доказательства утверждения (b) достаточно установить, что для любой функции f из $L_2(0, 1)$ множество всех конечных сумм величин $b_m \int_0^1 \exp(2\pi m \alpha t) f(t)\, dt = b_m a_m(f)$ равномерно ограничено. Поскольку $\{b_m\}$ принадлежит l_2 по предположению и $\{a_m(f)\}$ принадлежит l_2 согласно (a), то это утверждение очевидно, ч. т. д.

Как указывалось выше, из леммы 7 вытекает равномерная ограниченность (по норме) множества всех конечных сумм проекторов E_m. Так же доказывается равномерная ограниченность множества всех конечных сумм проекторов $\widetilde{E}_m$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Множество всех конечных сумм проекторов $E(\lambda; T)$, $\lambda \in \sigma(T)$, равномерно ограничено по норме.

(Здесь мы использовали теорему о равномерной ограниченности (следствие II.3.21). Рекомендуем читателю сравнить эти и последующие рассуждения с концом доказательства леммы 3.10.)

Мы докажем сейчас, что

$$\sum_{\lambda \in \sigma(T)} E(\lambda; T) = I, \tag{33}$$

откуда вытекает, что в случае 1A оператор T спектрален. По леммам XVII.3.5 и XVII.3.4 ряд $\sum_{\lambda \in \sigma(T)} E(\lambda; T) f$ сходится сильно и безусловно для любого f из $L_2(0, 1)$. Положим

$$g = f - \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E(\lambda; T) f;$$

мы хотим показать, что $g = 0$. Ясно, что $E(\lambda; T) g = 0$ для любого λ из $\sigma(T)$. По определению 2.4 и лемме 2.6 $R(\lambda; T) g$ — целая функция от λ. С другой стороны, из асимптотической формулы (26) и формулы (21), выражающей ядро оператора G_μ, видно, что если из угла A на μ-плоскости (определенного формулой (8)) удалить круги радиуса ε с центрами в точках $2\pi m + 2\pi c_1$, $2\pi m + 2\pi\widetilde{c}_1$, являющихся нулями функции $ae^{i\mu} + a'e^{-i\mu} + a'' \equiv a_p e^{i\mu} + b_p e^{-i\mu} + c_p$, то в оставшейся области функция $R(\mu^n; T) g$ равномерно ограничена и на бесконечности стремится к нулю, как

$O(|\mu|^{1-n})$. Следовательно, согласно принципу максимума модуля и теореме Лиувилля, целая функция $R(\lambda;\ T)g$ является постоянной. Дифференцируя по λ, находим, что $R(\lambda;\ T)^2 g = 0$, но так как оператор $R(\lambda;\ T)$ взаимно однозначен при $\lambda \in \rho(T)$, то $g = 0$. Итак, в случае 1А оператор T спектрален.

Полученные результаты мы сформулируем в следующей теореме.

8. Теорема. *Пусть n — четное число. Пусть граничные условия* (1) *удовлетворяют предположению* 1 *и постоянная* β *в формуле* (16) *отлична от* ± 1. *Тогда оператор T, определенный формулами* (2) *и* (3), *является дискретным спектральным оператором и для всех его собственных значений λ (за возможным исключением конечного их числа) соответствующий проектор $E(\lambda;\ T)$ одномерен. Собственные значения T имеют асимптотическое представление, указанное в лемме* 4.

Перейдем к случаю нечетного n.

Случай 2: *n нечетно.* Пусть $n = 2\nu + 1$, и пусть w_j, $j = 0, \ldots, n-1$,— корни n-й степени из 1, перенумерованные так, что $w_0 = 1$, мнимая часть w_j положительна при $0 < j \leqslant \nu$ и отрицательна при $\nu < j \leqslant 2\nu$.

Пусть λ — произвольное комплексное число. Если λ лежит в правой полуплоскости, то обозначим через $\mu = \mu(\lambda)$ единственный корень n-й степени из λ, лежащий в угле $\{\mu \mid \pi/2n \geqslant \arg \mu > -\pi/2n\}$. Если же λ лежит в левой полуплоскости, то через $\mu(\lambda)$ обозначим единственный корень n-й степени из λ, лежащий в угле $\{\mu \mid \pi/2n \geqslant (\arg \mu) - \pi > -\pi/2n\}$ комплексной плоскости. Положим

$$\sigma_k(t,\ \mu) = \begin{cases} e^{i\mu w_k t}, & 0 \leqslant k \leqslant \nu, \\ e^{i\mu w_k (t-1)}, & \nu < k \leqslant 2\nu. \end{cases} \tag{34}$$

Тогда функции $\sigma_0(t,\ \mu(\lambda)), \ldots, \sigma_{n-1}(t,\ \mu(\lambda))$, очевидно, образуют базис в пространстве решений уравнения $\tau f = \lambda f$. Пусть

$$B_i(\sigma_k(\mu)) = M_{ik}(\mu), \qquad M(\mu) = \det(M_{ij}(\mu)). \tag{35}$$

(Граничные условия B_i определены в (1).) Как и в случае четного n, собственными значениями оператора T будут нули функции $M(\mu(\lambda))$. Мы изучим эти нули, рассматривая отдельно правую и левую полуплоскости.

Из формул (34) для $\sigma_k(t,\ \mu)$ и формулы (1) для B_i видно, что $M_{ik}(\mu)$ имеет вид

$$M_{ik}(\mu) = \begin{cases} P_{ik}(\mu) + Q_{ik}(\mu)\, e^{i w_k \mu}, & 0 \leqslant k \leqslant \nu, \\ P_{ik}(\mu) + Q_{ik}(\mu)\, e^{-i w_k \mu}, & \nu < k \leqslant 2\nu, \end{cases} \tag{36}$$

где P_{ik} и Q_{ik} — многочлены от μ степени, не превосходящей m_i, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

На комплексной плоскости определим углы A_1 и A_2 следующим образом:

$$(37) \qquad \begin{aligned} A_1 &= \left\{ z \,\Big|\, |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2n} \right\}, \\ A_2 &= \left\{ z \,\Big|\, |(\arg z) - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2n} \right\}. \end{aligned}$$

Изучим нули функции $M(\mu)$ в A_1, а затем в A_2. Так как $\mu(\lambda)$ лежит в $A_1 \cup A_2$ для любого λ, то это дает нам полную информацию о нулях функции $M(\mu(\lambda))$. Поскольку w_k при $0 < k \leqslant \nu$ является корнем n-й степени из единицы с положительной мнимой частью, мы приходим к выводу, что $iw_k\mu$ при $0 < k \leqslant \nu$ пробегает некоторый угол, целиком содержащийся в левой полуплсскости, когда μ пробегает A_1. Аналогично, $iw_k\mu$ при $\nu < k \leqslant 2\nu$ пробегает некоторый угол в правой полуплоскости, когда μ пробегает A_2. Следовательно, если положить

$$(38) \qquad \begin{aligned} N_{i0}(\mu) &= M_{i0}(\mu) = P_{i0}(\mu) + Q_{i0}(\mu)\, e^{i\mu}, \\ N_{ik}(\mu) &= P_{i0}(\mu), \qquad 0 < k \leqslant 2\nu, \end{aligned}$$

то найдется такое число $a > 0$, что

$$(39) \qquad |N_{ik}(\mu) - M_{ik}(\mu)| = O(e^{-a|\mu|}),$$

когда $\mu \to \infty$, оставаясь в A_1. Положим $N(\mu) = \det(N_{ik}(\mu))$. Из формулы (38) для матрицы $(N_{ik}(\mu))$ следует, что $N(\mu)$ имеет такой вид:

$$(40) \qquad N(\mu) = \pi_1(\mu)\, e^{i\mu} + \pi_2(\mu),$$

где π_1 и π_2 — многочлены от μ, степени которых не превосходят p. Из соотношения (39) вытекает, что для любого положительного числа $b < a$ справедливо соотношение

$$(41) \qquad |N(\mu) - M(\mu)| = O(e^{-b|\mu|} e^{|\operatorname{Im}\mu|}),$$

когда $|\mu| \to \infty$, оставаясь в A_1. Чтобы продолжить наше исследование, нам придется сделать следующее предположение:

9. Первое условие регулярности в случае нечетного порядка. *Многочлены π_1 и π_2 имеют степень p.*

Итак, мы можем записать следующие равенства:

$$(42) \qquad \begin{aligned} \pi_1(\mu) &= a_p\mu^p + \ldots + a_0, \qquad a_p \neq 0, \\ \pi_2(\mu) &= b_p\mu^p + \ldots + b_0, \qquad b_p \neq 0. \end{aligned}$$

Из (42), (40) и (41) следует, что

(43) $$\mu^{-p}M(\mu)=a_pe^{i\mu}+b_p+P_1(\mu)e^{i\mu}+P_2(\mu)+O(e^{-b|\mu|+|\mathrm{Im}\,\mu|})$$

равномерно, когда $\mu\to\infty$, оставаясь в A_1, где $P_1(\mu)$ и $P_2(\mu)$ — многочлены от μ^{-1} без свободных членов. Выберем столь большие t и s, что

$$|P_1(\mu)|+|P_2(\mu)|<\frac{1}{3}|a_p|, \qquad |\mu|>t,$$

$$|b_p|<\frac{1}{9}|a_pe^{i\mu}|, \qquad -\mathrm{Im}\,\mu>s,$$

а последний член в правой части равенства (43) меньше, чем $|a_pe^{i\mu}|/3$ при $|\mu|>t$ и $-\mathrm{Im}\,\mu>s$. Из равенства (43) видно, что $M(\mu)$ не обращается в нуль в области $\{\mu\in A_1\mid -\mathrm{Im}\,\mu>s, |\mu|>t\}$. Аналогично, можно найти столь большие t и s, что $M(\mu)$ будет отлична от нуля в области $\{\mu\in A_1\mid \mathrm{Im}\,\mu>s, |\mu|>t\}$.

Подобные рассуждения проведем для угла A_2. Положим

(44) $$\begin{aligned}\widetilde{N}_{i0}(\mu)&=M_{i0}=P_{i0}(\mu)+Q_{i0}(\mu)e^{i\mu},\\ \widetilde{N}_{ik}(\mu)&=Q_{ik}(\mu), \qquad 0<k\leqslant 2\nu.\end{aligned}$$

Тогда существует такое число $a>0$, что

(45) $$|N_{ik}(\mu)-e^{-iw_k\mu}M_{ik}(\mu)|=O(e^{-a|\mu|}), \qquad 0<i\leqslant\nu,$$

(46) $$|N_{ik}(\mu)-e^{iw_k\mu}M_{ik}(\mu)|=O(e^{-a|\mu|}), \qquad \nu<k\leqslant 2\nu,$$

когда $|\mu|\to\infty$, оставаясь в угле A_2. Положим $\widetilde{N}(\mu)=\det(\widetilde{N}_{ik}(\mu))$. Из (46) вытекает, что для любого положительного числа $b<a$ справедливо соотношение

$$|\widetilde{N}(\mu)-e^{i\eta\mu}M(\mu)|=O(e^{-b|\mu|}e^{|\mathrm{Im}\,\mu|}),$$

когда $|\mu|\to\infty$, оставаясь в A_1; здесь использовано обозначение

$$\eta=-i\sum_{k=1}^{\nu}w_k+i\sum_{k=\nu+1}^{2\nu}w_k.$$

Из формулы (44) для матрицы $\widetilde{N}_{ik}(\mu)$ вытекает, что $\widetilde{N}(\mu)$ можно записать в виде

(47) $$\widetilde{N}(\mu)=\widetilde{\pi}_1(\mu)e^{i\mu}+\widetilde{\pi}_2(\mu),$$

где $\widetilde{\pi}_1$ и $\widetilde{\pi}_2$ — многочлены, степени которых не превосходят p. Сделаем теперь второе предположение.

10. Второе условие регулярности в случае нечетного порядка. *Многочлены $\widetilde{\pi}_1$ и $\widetilde{\pi}_2$ имеют порядок p*:

(48) $$\begin{aligned}\widetilde{\pi}_1(\mu)&=\widetilde{a}_p\mu^p+\ldots+\widetilde{a}_0, \qquad \widetilde{a}_p\neq 0,\\ \widetilde{\pi}_2(\mu)&=\widetilde{b}_p\mu^p+\ldots+\widetilde{b}_0, \qquad \widetilde{b}_p\neq 0.\end{aligned}$$

Как и в случае 1, мы можем упростить проверку условий регулярности 9 и 10, используя следующее соображение. Если $\hat{N}(\mu) = ae^{i\mu} + b$ есть определитель матрицы $\hat{N}_{ik}(\mu)$, заданной равенствами

$$\hat{N}_{ik}(\mu) = \begin{cases} \alpha_{i,\,m_i}(\omega_k)^{m_i}, & 0 < k \leqslant \nu, \\ \beta_{i,\,m_i}(\omega_k)^{m_i}, & \nu < k \leqslant 2\nu, \end{cases}$$

$$\hat{N}_{i0}(\mu) = \alpha_{i,\,m_i} + \beta_{i,\,m_i}e^{i\mu},$$

то, как и в случае 1, коэффициенты a и b совпадают (с точностью до общего множителя, модуль которого равен 1) с коэффициентами a_p и b_p из формулы (42). Аналогично, если $\hat{\tilde{N}}(\mu) = \tilde{a}e^{i\mu} + \tilde{b}$ есть определитель матрицы $\hat{\tilde{N}}_{ik}(\mu)$, заданной равенствами

$$\hat{\tilde{N}}_{ik}(\mu) = \begin{cases} \beta_{i,\,m_i}(\omega_k)^{m_i}, & 0 < k \leqslant \nu, \\ \alpha_{i,\,m_i}(\omega_k)^{m_i}, & \nu < k \leqslant 2\nu, \end{cases}$$

$$\hat{\tilde{N}}_{i0}(\mu) = \alpha_{i,\,m_i} + \beta_{i,\,m_i}e^{i\mu},$$

то коэффициенты $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ совпадают (с точностью до множителя, модуль которого равен 1) с коэффициентами $\tilde{a}_p$, $\tilde{b}_p$ из формулы (48). Следовательно, для нормализованной системы граничных условий предположения 9 и 10 зависят только от «старших» коэффициентов в граничных условиях, т. е. от коэффициентов α_{i,m_i} и β_{i,m_i} при производных наибольшего порядка, входящих в граничные условия с ненулевыми коэффициентами. Если выполнены условия регулярности 9 и 10, то, как и в случае области A_1, можно выбрать столь большие t, s, что $M(\mu)$ не будет иметь нулей в подмножестве $\{\mu \in A_2 \mid |\operatorname{Im}\mu| > s,\ |\mu| > t\}$ области A_1. Таким образом, мы доказали следующий результат:

11. Лемма. *Пусть граничные условия* (1) *удовлетворяют предположениям регулярности* 9 *и* 10. *Тогда существуют столь большие вещественные t и s, что любой нуль z функции $M(\mu)$, определенной формулой* (35), *который лежит в области $A = A_1 \cup A_2$, определенной формулой* (37), *удовлетворяет либо условию $|z| < t$, либо условию $|\operatorname{Im} z| < s$.*

Заметим, что все корни уравнения $a_p e^{i\mu} + b_p = 0$ простые и образуют арифметическую прогрессию вида $2\pi mi + z_0$. Используя это обстоятельство, лемму 3.5 и предыдущую лемму, мы получаем, как и в случае 1, что все корни уравнения $M(\mu) = 0$, лежащие в A_1 (кроме конечного их числа), простые и могут быть расположены в виде последовательности $\{\xi_m\}$, причем выполняется асимптотическое соотношение

$$\xi_m \sim 2\pi m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n m^{-n}\right). \tag{49}$$

Рассуждения в случае области A_2 совершенно аналогичны проведенным, и мы приходим к выводу, что все корни уравнения $M(\mu) = 0$, лежащие в A_2 (кроме конечного их числа), простые и могут быть перенумерованы так, что выполняется асимптотическое соотношение

$$\tilde{\xi}_m \sim -2\pi m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n m^{-n}\right). \tag{50}$$

Переходя от μ-плоскости к λ-плоскости, где $\lambda = \mu^n$, и используя леммы 3.5 и 4.6, мы получаем следующее утверждение (в случае четного n аналогичное утверждение содержалось в лемме 4 и следствии 5):

12. Лемма. *Пусть граничные условия* (1) *удовлетворяют предположениям регулярности* 9 *и* 10. *Тогда оператор T, определенный формулами* (2) *и* (3), *дискретен. Спектр T состоит полностью из изолированных точек. Если исключить из него некоторое конечное подмножество, то все оставшиеся точки будут простыми полюсами резольвенты T, причем соответствующие проекторы одномерны. Точки спектра $\sigma(T)$ можно расположить в две последовательности $\{\lambda_m\}$ и $\{\tilde{\lambda}_m\}$, удовлетворяющие асимптотическим соотношениям*

$$\begin{aligned} \lambda_m &\sim (2\pi m)^n\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} d_k m^{-k}\right), \\ \tilde{\lambda}_m &\sim -(2\pi m)^n\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{d}_k m^{-k}\right). \end{aligned} \tag{51}$$

Чтобы доказать спектральность оператора T, мы поступим так же, как в случае 1А. Положим

$$g(\mu;\, t,\, s) = \begin{cases} n^{-1}\mu^{1-n} \sum\limits_{j=0}^{\nu} (iw_j)\, e^{iw_j\mu(t-s)}, & t > s, \\ -n^{-1}\mu^{1-n} \sum\limits_{j=\nu+1}^{2\nu} (iw_j)\, e^{iw_j\mu(t-s)}, & t < s. \end{cases} \tag{52}$$

Тогда g бесконечно дифференцируема по t и s при $t \neq s$. Как и в случае 1А, полагая

$$(G_\mu f)(t) = \int_0^1 g(\mu;\, t,\, s)\, f(s)\, ds,$$

получаем

$$(\tau_n - \mu^n)\, G_\mu f = f,$$

так что

(53) $$R(\mu^n;\, T) f = G_\mu f - M(\mu)^{-1} \sum_{i,\, k=1}^{n} \widetilde{M}_{ik}(\mu)\, (B_i G_\mu f)\, \sigma_k(\mu),$$

где $\widetilde{M}_{ik}(\mu)$ — алгебраическое дополнение элемента $M_{ik}(\mu)$ в матрице, элементы которой определены равенствами (5).

Согласно формуле (38), $\widetilde{M}_{ik}(\mu)$ удовлетворяет асимптотическому соотношению

(54) $$\widetilde{M}_{jk}(\mu) \sim \mu^{p-m_j} (\widetilde{\pi}_{jk}(\mu)\, e^{i\mu} + \widetilde{\pi}'_{jk}(\mu)),$$

где $\widetilde{\pi}_{jk}$, $\widetilde{\pi}'_{jk}$ — многочлены от $1/\mu$. Из формул (52) и (34) следует, что $(B_i G_\mu f)$ можно записать в виде

(55) $$(B_i G_\mu f) = \mu^{1-n} \sum_{k=1}^{n} T_{ik}(\mu) \int_0^1 \sigma_k(1-s,\ \mu)\, f(s)\, ds,$$

где T_{ik} — многочлены от μ степени, не превосходящей m_i. Используя формулы (40), (41), (53), (54) и (55), мы видим, что резольвента $R(\mu^n;\ T)$ удовлетворяет в секторе A_1 следующему асимптотическому соотношению:

(56) $$R(\mu^n;\, T) f(x) \sim G_\mu f(x) - \\ - \mu^{1-n} \frac{\sum\limits_{k,\, j=1}^{n} (A_{kj}(\mu)\, e^{i\mu} + A'_{kj}(\mu))\, \sigma_j(x,\, \mu) \int\limits_0^1 \sigma_k(1-s,\, \mu)\, f(s)\, ds}{A(\mu)\, e^{i\mu} + A'(\mu)},$$

где A, A', A_{kj} и A'_{kj} — многочлены от $1/\mu$. При этом асимптотическое соотношение (56) допускает дифференцирование по x (любого порядка). Очевидно, что свободные члены a, a' в $A(\mu)$ и $A'(\mu)$ совпадают с постоянными a_p и b_p из формулы (42). Отсюда, как и в случае 1A, выводим, что проекторы $E_m = E(\lambda_m;\ T)$ удовлетворяют асимптотическому соотношению

(57) $$(E_m f)(x) \sim \\ \sim \frac{n}{2\pi i} \int\limits_{C_0} \int\limits_0^1 \frac{\left\{ \sum\limits_{k,\, j=1}^{n} A_{kj}(\mu + 2\pi m)\, e^{i\mu} + A'_{kj}(\mu + 2\pi m) \right\}}{A(\mu + 2\pi m)\, e^{i\mu} + A'(\mu + 2\pi m)} \times \\ \times \sigma_j(x,\ \mu + 2\pi m)\, \sigma_k(1-s,\ \mu + 2\pi m)\, f(s)\, ds\, d\mu,$$

где C_0 — достаточно малая окружность с центром $2\pi m c_1$, а c_1 определяется формулой (49). Более того, это асимптотическое соотношение допускает дифференцирование по x любое число раз. Так как C_0 не содержит нулей функции $ae^{i\mu}+a'=a_pe^{i\mu}+b_p$, то

$$|(A(\mu+2\pi m)e^{i\mu}+A(\mu+2\pi m))^{-1}-(ae^{i\mu}+a')^{-1}|=O(m^{-1})$$

равномерно на C_0. Следовательно, формулу (57) можно переписать в виде

$$(58)\quad (E_mf)\sim\sum_{k,\,j=0}^{n-1}\int_{C_0}\int_0^1\frac{(a_{kj}e^{i\mu}+a'_{kj})}{ae^{i\mu}+a'}\times$$
$$\times\sigma_j(\cdot,\ \mu+2\pi m)\,\sigma_k(1-s,\ \mu+2\pi m)\,f(s)\,ds\,d\mu+$$
$$+\sum_{k,\,j=1}^{n-1}\int_{C_0}\int_0^1 F_{kj}^{(m)}(\mu)\,\sigma_j(\cdot,\ \mu+2\pi m)\,\sigma_k(1-s,\ \mu+2\pi m)\,f(s)\,ds\,d\mu,$$

где a_{kj}, a'_{kj} — некоторые постоянные, а $F_{kj}^{(m)}$, $0\leqslant k,\ j<n,\ m\geqslant 1$, — последовательность функций, имеющая асимптотику $O(m^{-1})$ на C_0 при $m\to\infty$. Используя формулу (58), мы покажем, что множество сумм

$$\Big|\sum_{m\in J}E_m\Big|,$$

где J пробегает множество всех конечных подмножеств целых чисел, равномерно ограничено. Это следует из (58) с помощью рассуждений, использующих лемму 7, как и в случае 1А. Аналогично, множество всех конечных сумм проекторов $E(\widetilde{\lambda}_m;\ T)$ равномерно ограничено. Итак,

множество всех конечных сумм проекторов $E(\lambda;\ T)$, *где* $\lambda\in\sigma(T)$, *ограничено.*

Теперь мы покажем, что

$$\sum_{\lambda\in\sigma(T)}E(\lambda;\ T)=I,$$

так что в случае 2 оператор T также оказывается спектральным. Как и в случае 1А, достаточно доказать, что если $R(\lambda;\ T)g$ — целая функция, то $g=0$. Из асимптотической формулы (56) и формулы (52) для ядра оператора G_μ видно, что если удалить из угла A_1 на μ-плоскости (см. формулу, следующую за формулой (36)) круги с центрами в точках $2\pi m+2\pi c_1$, являющихся нулями функций $ae^{i\mu}+a'=a_pe^{i\mu}+b_p$, то в оставшейся области функция $R(\mu^n;\ T)g$ ограничена. По принципу максимума модуля $R(\mu^n;\ T)g$ ограничена в A_1. Точно так же доказывается, что функция $R(\mu^n;\ T)g$ ограничена в A_2. Следовательно, $R(\mu^n;\ T)g$ ограничена на всей комплексной плоскости, откуда, как и в случае 1, получаем, что $g=0$. Итак, T — спектральный оператор.

Полученные нами результаты мы сформулируем в виде теоремы:

13. Теорема. *Пусть n — нечетное число и граничные условия* (1) *удовлетворяют предположениям регулярности* 9 *и* 10. *Тогда оператор T, определенный формулами* (2) *и* (3), *является дискретным спектральным оператором, а проекторы $E(\lambda; T)$, соответствующие собственным значениям λ, за исключением, быть может, конечного их числа, одномерны. Собственные значения оператора T удовлетворяют асимптотическим соотношениям, описанным в лемме* 12

Г. П. Крамер описал интересный частный случай, когда условие регулярности 1 выполняется автоматически. Пусть $n = 2\nu$ и граничные значения $\{B_i f\}$ распадаются на две части: $B_1, \ldots, B_\nu$, где B_i выражается только через $f^{(j)}(0)$, $0 \leqslant j < \nu$, и $B_{\nu+1}, \ldots, B_{2\nu}$, где B_i выражается только через $f^{(j)}(1)$, $0 \leqslant j < \nu$. В силу замечания, следующего за формулой (3), можно считать, не теряя в общности, что порядки m_i граничных значений B_i удовлетворяют условиям $m_1 > m_2 > \ldots > m_\nu$, $m_{\nu+1} > m_{\nu+2} > \ldots > m_{2\nu}$. Кроме того, мы можем считать, что коэффициент при $f^{(m_i)}$ в выражении $B_i(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j f^{(j)}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\gamma}_j f^{(j)}(1)$ равняется 1. Тогда, располагая все граничные значения $B_1, \ldots, B_\nu$ и $B_{\nu+1}, \ldots, B_{2\nu}$ в порядке убывания их порядков m_i, мы получим совокупность граничных значений, удовлетворяющую условиям, описанным после формулы (3). Таким образом, мы можем применить использованные ранее рассуждения без предварительной нормализации граничных значений $B_1, \ldots, B_n$. Согласно замечанию, сделанному после формулировки условия регулярности 1, мы можем ограничиться рассмотрением граничных условий вида $B_i f = f^{(m_i)}(0)$ при $1 \leqslant i \leqslant \nu$ и $B_i f = f^{(m_i)}(1)$ при $\nu < i \leqslant 2\nu$. Следовательно, матрица $\hat{\hat{N}}_{ik}(\mu)$, указанная после формулировки свойства регулярности 1, определяется такими равенствами:

$$\hat{\hat{N}}_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < k < \nu \quad \text{и} \quad \nu < i \leqslant 2\nu, \\ 0 & \text{при } \nu < k < 2\nu \quad \text{и} \quad 1 \leqslant i \leqslant \nu, \\ (i\omega_k)^{m_i} & \text{для остальных} \quad i \text{ и } k \neq 0, \quad k \neq \nu, \end{cases}$$

$$\hat{\hat{N}}_{j0} = \begin{cases} i^{m_j}, & 1 \leqslant j \leqslant \nu, \\ i^{m_j} e^{i\mu}, & \nu < j \leqslant 2\nu, \end{cases}$$

$$\hat{\hat{N}}_{j\nu} = \begin{cases} (-i)^{m_j}, & 1 \leqslant j \leqslant \nu, \\ (-i)^{m_j} e^{-i\mu}, & \nu < j \leqslant 2\nu. \end{cases}$$

Определитель $\hat{\hat{N}}(\mu)$ имеет, следовательно, следующий вид:

Первые ν строк	Нулевой столбец		ν-й столбец	Нули
Последние ν строк		Нули		

Раскрывая этот определитель порядка 2ν по минорам порядка ν, согласно правилу Лагранжа, мы получаем всего два не обращающихся в нуль члена. Таким образом, наш определитель представляется в виде $P_1P_2 \pm Q_1Q_2$, где P_1P_2 есть произведение

$$\begin{vmatrix} (iw_0)^{m_1} & (iw_1)^{m_1} \ldots & (iw_{\nu-1})^{m_1} \\ (iw_0)^{m_2} & \ldots & \ldots \\ \ldots & & \ldots \\ (iw_0)^{m_\nu} & \ldots & (iw_{\nu-1})^{m_\nu} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} e^{-i\mu}(iw_\nu)^{m_{\nu+1}} & (iw_{\nu+1})^{m_{\nu+1}} \ldots & (iw_{2\nu-1})^{m_{\nu+1}} \\ e^{-i\mu}(iw_\nu)^{m_{\nu+2}} & (iw_{\nu+1})^{m_{\nu+2}} & \ldots \\ \ldots & & \ldots \\ e^{-i\mu}(iw_\nu)^{m_{2\nu}} & (iw_{\nu+1})^{m_{2\nu}} \ldots & (iw_{2\nu-1})^{m_{2\nu}} \end{vmatrix} = c_1 e^{-i\mu},$$

причем c_1, будучи произведением двух ненулевых определителей Вандермонда, отличен от нуля, а Q_1Q_2 есть произведение

$$\begin{vmatrix} e^{i\mu}(iw_0)^{m_{\nu+1}} & (iw_{\nu+1})^{m_{\nu+1}} \ldots & (iw_{2\nu-1})^{m_{\nu+1}} \\ e^{i\mu}(iw_0)^{m_{\nu+2}} & \ldots \quad \ldots & \\ \ldots & & \ldots \\ e^{i\mu}(iw_0)^{m_{2\nu}} & \ldots \quad \ldots & (iw_{2\nu-1})^{m_{2\nu}} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (iw_1)^{m_1} & (iw_2)^{m_1} \ldots & (im_\nu)^{m_1} \\ (iw_1)^{m_2} & \ldots \quad \ldots & \\ \ldots & & \ldots \\ (iw_1)^{m_\nu} & \ldots & (iw_\nu)^{m_\nu} \end{vmatrix} = c_2 e^{+i\mu};$$

причем c_2 не равен нулю по тем же причинам. Из замечания, сделанного после формулировки условия регулярности 1, мы приходим к выводу, что постоянные a_p и b_p из формулы (13) отличны от нуля, в то время как постоянная c_p из той же формулы равна нулю. Следовательно, условие регулярности 1 выполнено и число β из формулы (16) равно нулю.

Таким образом, заключение теоремы 8 справедливо во всех случаях, когда $n = 2\nu$, а граничные значения (1) распадаются на ν граничных значений в нуле и ν граничных условий в 1.

Сформулируем это в виде теоремы:

14. Теорема (*Г. П. Крамер*). *Пусть n — четное число и T — замкнутый оператор, определенный формальным дифференциальным оператором $\tau_n = i^{-n}(d/dt)^n$ на отрезке* $[0, 1]$ *и n линейно независимыми граничными условиями, причем $n/2$ граничных условий задано в нуле и остальные $n/2$ в точке* 1. *Тогда справедливо заключение теоремы* 8.

В этой связи сделаем одно замечание о понятии регулярных граничных условий в случае дифференциального оператора второго порядка. Если граничные условия записаны в той нормализованной форме, которая описана после формулы (3), то имеются три возможности.

(a) $m_1 = 1$, $m_2 = 1$. В этом случае нормализованные граничные условия имеют вид

$$[*] \qquad u'(0) + \ldots = 0, \qquad u'(1) + \ldots = 0$$

(невыписанные члены имеют порядок, меньший 1). В силу замечания, следующего за формулой (13), и замечания, сделанного после формулировки условия регулярности 1, граничные условия [*] регулярны, ибо регулярны граничные условия $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

(b) $m_1 = 0$, $m_2 = 0$. В этом случае нормализованные граничные условия имеют вид

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0$$

и, очевидно, регулярны.

(c) $m_1 = 1$, $m_2 = 0$. Для определенности предположим, что $u'(0)$ входит с ненулевым коэффициентом в первое из граничных условий; тогда граничные условия имеют вид

$$u'(0) + ku'(1) + \ldots = 0,$$
$$au(0) + bu(1) = 0.$$

Если $a = 0$, то эти граничные условия можно записать следующим образом:

$$u'(0) + ku'(1) + \ldots = 0,$$
$$u(1) = 0,$$

и, как легко видеть, они регулярны. Если $a \neq 0$, то граничные условия принимают вид

$$u'(0) + ku'(1) + \ldots = 0,$$
$$u(0) + k'u(1) = 0,$$

и несложный подсчет, основанный на условии регулярности 1, показывает, что эти граничные условия регулярны тогда и только тогда, когда $k + k' \neq 0$. Следовательно, совокупность двух линейно независимых граничных условий для оператора второго порядка нерегулярна в том и только в том случае, если она имеет вид

$$u'(0) + ku'(1) + \ldots = 0,$$
$$u(0) - ku(1) = 0$$

или

$$u'(1) + ku'(0) + \ldots = 0,$$
$$u(1) - ku(0) = 0.$$

Чтобы перейти к основной теореме 16, докажем вспомогательный результат.

15. Лемма. *Пусть T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$, полученный из формального дифференциального оператора $((1/i)(d/dt))^n$ наложением n граничных условий. В случае четного n предположим, что эти условия удовлетворяют предположению регулярности* 1 *и что постоянная* β *из формул* (16) *и* (17) *отлична от* 1. *Если же n нечетно, предположим, что выполнены предположения регулярности* 9 *и* 10. *Пусть $\lambda \in \sigma(T)$ и k — целое число. Тогда $(T - \lambda I)^{-k/n}$ является непрерывным линейным отображением $L_2(0, 1)$ в $H^{(k)}(0, 1)$.*

Доказательство. Как и в начале доказательства теоремы 2.7 (оно дословно переносится на случай любого дискретного оператора T, всем точкам спектра которого, за исключением, быть может, конечного их числа, отвечают одномерные проекторы), мы убеждаемся в том, что оператор $(T - \lambda I)^{-k/n}$ ограничен. Пусть σ_0 — конечное множество, содержащее все точки λ из $\sigma(T)$, для которых проектор $E(\lambda; T)$ не является одномерным, а также точку 0, если $0 \in \sigma(T)$. Положим $\sigma_0' = \sigma(T) - \sigma_0$. Тогда по теореме XVIII.2.9

$$(T - \lambda I)^{-k/n} = E(\sigma_0)(T - \lambda I)^{-k/n} E(\sigma_0) + (T - \lambda I)^{-k/n} E(\sigma_0').$$

Мы покажем, что $E(\sigma_0)(T - \lambda I)^{-k/n} E(\sigma_0)$ и $(T - \lambda I)^{-k/n} E(\sigma_0')$ отображают $L_2(0, 1)$ в $H^{(k)}(0, 1)$ непрерывно, и тем самым докажем лемму.

Согласно леммам 4 и 12, мы можем без потери общности считать, что $\sigma_0' = \{\lambda_K, \widetilde{\lambda}_K, \lambda_{K+1}, \widetilde{\lambda}_{K+1}, \ldots\}$, где $K > 1$, и что последовательности $\{\lambda_j\}$, $\{\widetilde{\lambda}_j\}$ удовлетворяют асимптотическим соотношениям, указанным в этих леммах. Как и в начале доказательства теоремы 2.7, получаем

$$\text{(i)}\quad (T-\lambda I)^{-k/n} E(\sigma_0')f=$$
$$=\lim_{p\to\infty}\Big\{\sum_{i=K}^{p}(\lambda_i-\lambda)^{-k/n}E(\lambda_i)f+\sum_{i=K}^{p}(\widetilde{\lambda}_i-\lambda)^{-k/n}E(\widetilde{\lambda}_i)f\Big\}.$$

В силу леммы 3.9 одномерные проекторы $E(\lambda_i)$ и $E(\widetilde{\lambda}_i)$ являются ограниченными операторами из $L_2(0, 1)$ в $H^{(k)}(0, 1)$. Ясно, что предел в правой части равенства (i) существует в топологии пространства $H^{(k)}(0, 1)$ для любой f из $E(\sigma_0)L_2(0, 1)$ и для любой функции $f\in(E(\lambda_i)+E(\widetilde{\lambda}_i))L_2(0, 1)$, и, следовательно, для всех f из плотного подмножества пространства $L_2(0, 1)$. По теоремам 8, 13 и II.3.6 для доказательства непрерывности $(T-\lambda I)^{-k/n}$ как отображения из $L_2(0, 1)$ в $H^{(k)}(0, 1)$ достаточно проверить, что множество всех отображений

$$\text{(ii)}\qquad \sum_{i=K}^{p}(\lambda_i-\lambda)^{-k/n}E(\lambda_i)+\sum_{i=K}^{p}(\widetilde{\lambda}_i-\lambda)^{-k/n}E(\widetilde{\lambda}_i),\qquad p\geqslant K,$$

из $L_2(0, 1)$ в $H^{(k)}(0, 1)$ равномерно ограничено. Сначала докажем, что множество отображений

$$\sum_{i=K}^{p}(\lambda_i-\bar{\lambda})^{-k/n}E(\lambda_i),\qquad p\geqslant K,$$

из $L_2(0, 1)$ в $H^{(k)}(0, 1)$ равномерно ограничено. Соответствующий результат для отображений

$$\sum_{i=K}^{p}(\widetilde{\lambda}_i-\lambda)^{-k/n}E(\widetilde{\lambda}_i),\qquad p\geqslant K,$$

доказывается аналогично. Из этих двух утверждений сразу же вытекает (ii).

В силу лемм 4 и 12, справедливо асимптотическое соотношение $(\lambda_m-\lambda)^{-k/n}\sim \mathrm{const}\cdot m^{-k}$. По теореме XVIII.2.11 оператор

$$A=\sum_{m=K}^{\infty}(\lambda_m-\lambda)^{-k/n}m^kE(\lambda_m)$$

из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ ограничен и имеет ограниченный обратный. Так как по теореме XVIII.2.11

$$\Big(\sum_{m=K}^{p}(\lambda_m-\lambda)^{-k/n}E(\lambda_m)\Big)=\Big(\sum_{m=K}^{p}m^{-k}E(\lambda_m)\Big)A,$$

достаточно проверить, что семейство отображений

$$\text{(iii)} \qquad \sum_{m=K}^{p} m^{-k} E(\lambda_m), \qquad p \geqslant K,$$

из $L_2(0, 1)$ в $H^{(k)}(0, 1)$ равномерно ограничено. Норма в $H^{(k)}(0, 1)$ эквивалентна норме

$$\text{(iv)} \qquad |f| = \left\{ \int_0^1 |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} + \left\{ \int_0^1 |f^{(k)}(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Ясно, что семейство (iii) отображений, рассматриваемых как отображения из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, равномерно ограничено. Поэтому, используя теорему о равномерной ограниченности (следствие II.3.21), мы видим, что достаточно доказать равномерную ограниченность в $L_2(0, 1)$ семейства функций

$$\text{(v)} \qquad \sum_{m=K}^{p} m^{-k} \left(\frac{d}{dx} \right)^k (E(\lambda_m) f)(t), \qquad p \geqslant K,$$

для любой f из $L_2(0, 1)$. Из формулы (28) (в случае 1A) и соответствующей формулы (57) (в случае 2) следует, что функция

$$m^{-k} \left(\frac{d}{dx} \right)^k (E(\lambda_m) f)(t)$$

удовлетворяет тому же асимптотическому соотношению ((28) или (57)), что и $(E(\lambda_m) f)(t)$. Теперь мы можем доказать равномерную ограниченность в $L_2(0, 1)$ семейства (v) так же, как в теоремах 8 и 13 была доказана равномерная ограниченность множества функций

$$\sum_{m=K}^{p} E(\lambda_m) f, \qquad p \geqslant K.$$

Это замечание завершает доказательство теоремы, ч. т. д.

→ 16. Теорема. *Пусть T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$, порожденный формальным дифференциальным оператором $(-id/dt)^n$ и n граничными условиями. В случае четного n предположим, что эти граничные условия удовлетворяют предположению регулярности* 1 *и число β из формул* (16) *и* (17) *отлично от* 1. *Если же n нечетно, то предположим, что выполнены предположения регулярности* 9 *и* 10. *Пусть P — оператор, определенный на подмножестве $H^{(n-1)}[(0, 1)]$ из $L_2(0, 1)$ формулой*

$$(Pf)(t) = a_{n-1}(x) f^{(n-1)}(t) + \sum_{j=0}^{n-2} (B_j f^{(j)})(t),$$

где $a_{n-1}(x)$ — функция из $C^\infty[(0, 1)]$, а $B_0, \ldots, B_{n-2}$ — произвольные ограниченные операторы в $L_2(0, 1)$. Тогда $T+P$ является дискретным спектральным оператором, все точки его спектра, за возможным исключением конечного множества, являются простыми полюсами резольвенты, а соответствующие проекторы $E(\lambda; T+P)$ одномерны.

Доказательство. Сначала предположим, что $a_{n-1}(t) \equiv 0$. Тогда утверждение теоремы будет следовать из теоремы 2.7, следствия 2.8, теорем 8, 13 и леммы 15, как только мы покажем (в обозначениях теоремы 2.7), что $\sum_{m=1}^{\infty} d_m^{-2}(|\lambda_m| + d_m)^{2(n-2)/n} < \infty$. Из асимптотических формул для λ_n, полученных в леммах 4 и 12, видно, что для этого достаточно доказать неравенство $d_m \geqslant Km^{n-1}$ для достаточно больших m и некоторой постоянной K. Рассмотрим, например, случай четного n. Согласно лемме 4, собственные значения, за исключением конечного их числа, можно разбить на две такие последовательности λ_m, $\tilde\lambda_m$, что разности между λ_m и

$$(*)\qquad \mu_m = (2\pi m)^n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k m^{-k}\Big),$$

а также между $\tilde\lambda_m$ и

$$({*\atop *})\qquad \tilde\mu_m = (2\pi m)^n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde c_k m^{-k}\Big)$$

равномерно ограничены. Кроме того,

$$({*\atop {*\atop *}})\qquad \tilde c_1 = c_1 + nz, \quad z \neq 0, \quad n > \operatorname{Re} z \geqslant 0.$$

Мы докажем, что расстояние от μ_m до множества точек $\{\mu_k, k \neq m\} \cup \{\tilde\mu_k\}$ ограничено снизу функцией вида $Km^{n'-1}$, а затем установим такой же результат для $\tilde\mu_m$. Отсюда, очевидно, следует нужный результат.

Умножая μ_m и $\tilde\mu_m$ на подходящее число α, $|\alpha| = 1$, мы можем без ограничения общности считать, что $\operatorname{Re} c_1 \neq \operatorname{Re} \tilde c_1$, $\operatorname{Re} c_1 = \operatorname{Re} c_2 + z'$, $n > \operatorname{Re} z' > 0$. Так как $|\mu - \lambda| \geqslant |\operatorname{Re}\mu - \operatorname{Re}\lambda|$, достаточно проверить наше утверждение для последовательностей

$$\operatorname{Re}\mu_m = (2\pi m)^n \Big(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\operatorname{Re} c_k)\, m^{-k}\Big)$$

и $\operatorname{Re}\tilde\mu_m$. Таким образом, можно считать без потери в общности, что c_k и $\tilde c_k$ вещественны (тогда и μ_m, $\tilde\mu_m$ вещественны). Ясно, что μ_m и $\tilde{\mu}_m$ для достаточно больших m образуют возрастающие последовательности. Следовательно, если m достаточно велико,

$$\min_{k\neq m} |\mu_m-\mu_k| \geqslant \min(|\mu_m-\mu_{m-1}|,\ |\mu_m-\mu_{m+1}|).$$

Так как в силу соотношения (*)

$$|\mu_m-\mu_{m+1}| \sim 2\pi n(2\pi m)^{n-1},$$

то ясно, что величина $\min\limits_{k\neq m}|\mu_m-\mu_k|$ для достаточно больших m ограничена снизу функцией вида Km^{n-1}. Поскольку $c_1\neq\tilde{c}_1$, мы имеем $c_1>\tilde{c}_1$ или $\tilde{c}_1>c_1$. Для определенности предположим, что $c_1>\tilde{c}_1$. Тогда, очевидно, $\mu_m>\tilde{\mu}_m$ для достаточно больших m. С другой стороны,

$$\tilde{\mu}_m-\mu_{m-1}=2\pi(\tilde{c}_1-c_1)(2\pi m)^{n-1}+2\pi n(2\pi m)^{n-1}+O(m^{n-2})=$$
$$=2\pi(n+\tilde{c}_1-c_1)(2\pi m)^{n-1}+O(m^{n-2})$$

и $n+\tilde{c}_1-c_1>0$; следовательно, $\mu_m>\tilde{\mu}_m>\mu_{m-1}$ для достаточно больших m. Отсюда

$$\ldots>\tilde{\mu}_{m+1}>\mu_m>\tilde{\mu}_m>\mu_{m-1}>\tilde{\mu}_{m-1}>\ldots.$$

Значит,

$$\min_k|\tilde{\mu}_m-\mu_k|=\min(|\mu_m-\tilde{\mu}_m|,\ |\tilde{\mu}_m-\mu_{m+1}|).$$

Из (*), $\binom{*}{*}$ и $\left(\begin{smallmatrix}*\\*\\*\end{smallmatrix}\right)$ вытекает теперь, что величина $\min\limits_k|\mu_m-\tilde{\mu}_k|$ ограничена снизу функцией вида Km^{n-1}, и наша теорема доказана, если n четно и $a_{n-1}(t)\equiv 0$.

Если n нечетно, то соответствующий результат получается с помощью аналогичных (и даже более простых) вычислений, основанных на лемме 12.

Если $a_{n-1}(t)\not\equiv 0$, то мы поступим следующим образом. Пусть $b(t)=n^{-1}\int\limits_0^t a_{n-1}(s)\,ds$ и $h(t)=\exp(b(t))$. Тогда $h(t)\neq 0$, так что оператор U, определенный формулой $(Uf)(t)=h(t)f(t)$, ограничен в $L_2(0,1)$ и обладает ограниченным обратным. Мы имеем формальное равенство

$$\left(U^{-1}\left(\frac{d}{dt}\right)Uf\right)(t)=\left(\left(\frac{d}{dt}\right)+b'(t)\right)f(t).$$

Отсюда и из определения XIII.2.17 видно, что если S — оператор в $L_2(0,1)$, определенный формальным дифференциальным оператором $(-id/dt)^n$ и некоторыми граничными условиями $C_i(f)=0$,

$i=1, \ldots, n$, то $U^{-1}TU$ — оператор в $L_2(0, 1)$, определенный формальным дифференциальным оператором $(-id/dt+b'(t))^n$ и граничными условиями $C_i(Uf)=0$, $i=1, \ldots, n$. Так как

$$\left((-i)^n\left(\frac{d}{dt}\right)+b(t)\right)^n=(-i)^n\left(\frac{d}{dt}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}+\ldots,$$

то указанный в теореме оператор

$$T+P=T+a_{n-1}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}B_j\left(\frac{d}{dt}\right)^j$$

может быть записан в виде

$$S+\sum_{j=0}^{n-2}\widetilde{B}_j\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

где $\widetilde{B}_j$, $j=0, \ldots, n-2$, — ограниченные операторы. Следовательно, $U(T+P)U^{-1}$ можно записать в виде $T+P'$, где P' — оператор вида $\sum_{j=0}^{n-2}\widetilde{\widetilde{B}}_j(d/dt)^j$, а $\widetilde{\widetilde{B}}_j$, $0\leqslant j\leqslant n-2$, — ограниченные операторы. Так как $T+P$, рассматриваемый как абстрактный оператор, имеет тот же самый спектр и по существу обладает теми же самыми свойствами, что и $U(T+P)U^{-1}$, то без потери общности можно считать, что $a_{n-1}(t)=0$ (если граничные условия $C_i(Uf)=$ $=0$ регулярны). Если мы теперь докажем, что граничные условия $C_i(Uf)=0$ регулярны, то, как показано выше, наша теорема верна для оператора $U(T+P)U^{-1}$ и, следовательно, для оператора $T+P$.

Чтобы завершить доказательство, осталось проверить регулярность множества граничных условий $C_i(Uf)=0$, $i=1, \ldots, n$. Пусть $C_i(f)$ имеет вид

$$C_i(f)=\sum_{j=0}^{m_i}\alpha_{ij}f^{(j)}(0)+\sum_{j=0}^{m_i}\beta_{ij}f^{(j)}(1).$$

Тогда, поскольку $U^{-1}(d/dt)Uf=((d/dt)+b'(t))f(t)$, мы получаем

$$C_i(Uf)=\sum_{j=0}^{m_i}\hat{\alpha}_{ij}f^{(j)}(0)+\sum_{j=0}^{m_i}\hat{\beta}_{ij}f^{(j)}(1),$$

где $\hat{\alpha}_{im_i}=\alpha_{im_i}$, $\hat{\beta}_{im_i}=\beta_{im_i}$. Теперь регулярность граничных условий $C_i(Uf)=0$ вытекает из регулярности граничных условий $C_i(f)=0$ и замечаний, сделанных после формулировки условий регулярности 1, 9 и 10, ч. т. д.

5. Полнота системы корневых подпространств

Во многих случаях спектр дискретного спектрального оператора T распределен на комплексной плоскости настолько беспорядочно, что весьма ограничительные предположения теоремы 2.7 оказываются неприменимыми. Тем не менее некоторая модификация доказательства этой теоремы позволяет показать, что множество решений уравнения $(T+P-\lambda)^k f=0$, $k \geqslant 1$, $\lambda \in \sigma(T+P)$, является фундаментальным в B-пространстве $\mathfrak{X}$. В этом параграфе мы сформулируем и докажем результаты такого рода. Мы начнем с основного определения и с изучения общего понятия сопряженного к замкнутому оператору в B-пространстве.

1. Определение. Пусть $\mathfrak{X}$ есть B-пространство и T — дискретный оператор в $\mathfrak{X}$. Тогда замыкание линейной оболочки всех подпространств $E(\lambda; T)\,\mathfrak{X}$, $\lambda \in \sigma(T)$, мы назовем *спектральным подпространством* оператора T и обозначим через $\overline{\mathrm{sp}}(T)$.

Замечание. Согласно лемме 2.2, $\overline{\mathrm{sp}}(T)$ есть наименьшее замкнутое многообразие в $\mathfrak{X}$, содержащее решения f всех уравнений вида $(T-\lambda I)^k f=0$, $k \geqslant 1$, $\lambda \in \sigma(T)$, а также наименьшее замкнутое многообразие, содержащее решения f всех уравнений $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)} f=0$, $\lambda \in \sigma(T)$.

Понятие сопряженного оператора T^* для неограниченного оператора с плотной областью определения было введено в определении 3.6. Мы продолжим построение теории сопряженных операторов (для неограниченных операторов), аналогичной соответствующей теории для гильбертова пространства (см. § XII.1).

Пусть $\mathfrak{X}$ есть B-пространство и $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{X}$ — прямая сумма двух экземпляров пространства $\mathfrak{X}$. Определим в $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{X}$ норму

$$|[x, y]|=|x|+|y|.$$

Тогда $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{X}$ становится B-пространством. Рассмотрим два его автоморфизма

$$A_1:\quad [x, y] \to [y, x],$$
$$A_2:\quad [x, y] \to [-y, x].$$

Ясно, что

$$A_1^2=-A_1^2=I, \qquad A_1A_2=-A_2A_1.$$

Для любого подмножества M из некоторого банахова пространства $\mathfrak{Y}$ обозначим через $M^{\perp}$ его аннулятор, т. е. замкнутое подпространство в $\mathfrak{Y}^*$, определенное равенством

$$M^{\perp}=\{y^* \in \mathfrak{Y}^* \mid y^*(M)=0\}.$$

Как всегда, графиком линейного преобразования T в B-пространстве $\mathfrak{X}$ называется множество

$$\Gamma(T)=\{[x,\ Tx]\mid x\in\mathfrak{D}(T)\}.$$

Пусть φ — непрерывный линейный функционал в $\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{X}$. Тогда, очевидно, равенства $\varphi_1(x)=\varphi([x,\ 0])$ и $\varphi_2(y)=\varphi([0,\ y])$ определяют непрерывные линейные функционалы в $\mathfrak{X}$ и отображение $\varphi\to[\varphi_1,\ \varphi_2]$ есть изоморфизм $(\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{X})^*$ на $\mathfrak{X}^*\oplus\mathfrak{X}^*$. Следовательно, можно отождествить $\mathfrak{X}^*\oplus\mathfrak{X}^*$ с пространством, сопряженным к $\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{X}$, полагая

$$[x^*,\ y^*]\,[x,\ y]=x^*x+y^*y.$$

Отсюда ясно также, что $\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{X}$ *рефлексивно, если* $\mathfrak{X}$ *рефлексивно.*

Согласно определению 3.6,

$$\begin{aligned}\Gamma(T^*)&=\{[x^*,\ y^*]\mid x^*(Tx)=y^*(x),\quad x\in\mathfrak{D}(T)\}=\\&=\{[x^*,\ y^*]\mid x^*y-y^*x=0,\quad [x,\ y]\in\Gamma(T)\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Gamma(T^*)=[A_2\Gamma(T)]^{\perp}.$$

Отсюда видно, в частности, что T^* — замкнутый оператор.

2. Лемма. *Пусть T — замкнутый оператор с плотной областью определения. Тогда*

(a) *T и T^* обладают ограниченным обратным с плотной областью определения, если им обладает хотя бы один из них, и* $(T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$;

(b) *если B — ограниченный оператор, то* $(T+B)^*=T^*+B^*$.

Доказательство. Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть T — линейный оператор (вообще говоря, многозначный), графиком $\Gamma(T)$ которого является произвольное линейное подпространство из $\mathfrak{X}\oplus\mathfrak{X}$, и пусть T^{-1} и T^* — линейные (возможно, многозначные) операторы, *определенные* равенствами

$$\Gamma(T^{-1})=A_1\Gamma(T),\qquad \Gamma(T^*)=[A_2\Gamma(T)]^{\perp}.$$

Для доказательства утверждения (a) леммы достаточно заметить, что

$$\Gamma((T^*)^{-1})=A_1\Gamma(T^*)=A_1(A_2\Gamma(T))^{\perp}=(A_2(A_1\Gamma(T)))^{\perp}=\Gamma((T^{-1})^*).$$

Итак, $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$, причем это равенство справедливо в том случае, когда одно или даже оба из этих преобразований неограничены, многозначны и область их определения не плотна в $\mathfrak{X}$, так что утверждение (a) вытекает отсюда как частный случай.

Для доказательства утверждения (b) возьмем сначала элемент x^* из $\mathfrak{D}(T^* + B^*)$. Так как B^* ограничен, то x^* лежит в $\mathfrak{D}(T^*)$ и

$$\{(T^*+B^*)x^*\}(x) = (T^*x^*)(x) + (B^*x^*)(x) = \\ = x^*\{(T+B)x\}, \quad x \in \mathfrak{D}(T).$$

Итак, x^* лежит в $\mathfrak{D}((T+B)^*)$ и $(T+B)^*x^* = T^*x^* + B^*x^*$. С другой стороны, если x^* принадлежит $\mathfrak{D}((T+B)^*)$ и, следовательно,

$$x^*((T+B)y) = (T+B)^*x^*(y), \quad y \in \mathfrak{D}(T),$$

то

$$x^*(Ty) = \{(T+B)^*x^* - B^*x^*\}(y), \quad y \in \mathfrak{D}(T).$$

Значит, $x^* \in \mathfrak{D}(T)^*$ и

$$T^*x^* + B^*x^* = (T+B)^*x^*, \quad \text{ч. т. д.}$$

3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{X}$ — рефлексивное пространство, T — замкнутый оператор с плотной областью определения в $\mathfrak{X}$ и T^* — сопряженный оператор. Тогда*

(a) *$\mathfrak{D}(T^*)$ плотно в $\mathfrak{X}^*$;*

(b) *второй сопряженный T^{**} совпадает с T.*

Доказательство. Если $\mathfrak{D}(T^*)$ не плотно в $\mathfrak{X}^*$, то в силу теоремы Хана — Банаха (следствие II.3.14) и рефлексивности $\mathfrak{X}$ существует такой x в $\mathfrak{X}$, что $x\mathfrak{D}(T^*) = 0$ и $x \neq 0$. Тогда

$$A_2[0, x] = [-x, 0] \in \Gamma(T^*)^{\perp}.$$

Следовательно,

$$-[0, x] = A_2^2[0, x] \in (A_2\Gamma(T^*))^{\perp} = \Gamma(T^{**}).$$

Таким образом, если (b) доказано, то $[0, x] \in \Gamma(T)$, и так как T однозначен, то $x = 0$. Итак, (a) следует из (b).

Для доказательства (b) мы покажем сначала, что для замкнутого линейного подмногообразия $\mathfrak{M}$ рефлексивного B-пространства справедливо равенство $(\mathfrak{M}^{\perp})^{\perp} = \mathfrak{M}$. Ясно, что $\mathfrak{M} \subseteq (\mathfrak{M}^{\perp})^{\perp}$. Пусть теперь $x \notin \mathfrak{M}$. Тогда по теореме Хана — Банаха существует такой y^* в $\mathfrak{M}^{\perp}$, что $y^*(x) \neq 0$, а потому $x \notin (\mathfrak{M}^{\perp})^{\perp}$.

Следовательно,

$$\Gamma(T^{**}) = (A_2\Gamma(T^*))^{\perp} = [A_2(A_2\Gamma(T))^{\perp}]^{\perp} = A_2^2(\Gamma(T)^{\perp})^{\perp} = \\ = -\Gamma(T) = \Gamma(T), \quad \text{ч. т. д.}$$

4. Лемма. *Пусть T — оператор с плотной областью определения в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Тогда*

(a) *если один из операторов T или T^* дискретен, то дискретен и другой;*

(b) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$;

(c) *если T и T^* — дискретные операторы, то* $E(\lambda;\ T)^* = E(\lambda;\ T^*)$ *для любого* λ *из* $\sigma(T) = \sigma(T^*)$;

(d) *если $\mathfrak{X}$ рефлексивно, операторы T и T^* дискретны и один из них спектрален, то и другой также спектрален.*

Доказательство. По лемме 2

$$((T-\lambda I)^{-1})^* = ((T-\lambda I)^*)^{-1} = (T^*-\lambda I^*)^{-1},$$

причем операторы, участвующие в этом равенстве, существуют и ограничены при одних и тех же λ. Отсюда следуют утверждения (b) и (a), поскольку по теореме VI.5.2 оператор и его сопряженный компактны или некомпактны одновременно.

Для доказательства утверждения (c) заметим, что

$$E(\lambda;\ T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T-\mu I)^{-1}\,d\mu,$$

где C — достаточно малая окружность с центром в точке λ. Но тогда, в силу утверждения (b) и леммы 2,

$$\begin{aligned}E(\lambda;\ T^*) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C (T^*-\mu I)^{-1}\,d\mu = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C ((T-\mu I)^{-1})^*\,d\mu = \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_C (T-\mu I)^{-1}\,d\mu\right)^* = \\ &= E(\lambda;\ T)^*;\end{aligned}$$

тем самым доказано утверждение (c).

Докажем утверждение (d). Из предыдущей леммы следует, что мы должны только доказать следующее: если T спектрален, то и T^* спектрален. Из (c) вытекает, что если T спектрален, то T^* удовлетворяет условию (a) из следствия XVIII.2.33, так что для доказательства спектральности T^*, согласно этому следствию, достаточно доказать такой факт: если $E(\lambda;\ T^*)\,x^* = 0$ для всех $\lambda \in \sigma(T)$, то $x^* = 0$. Для этого заметим, что, поскольку T спектрален, из утверждения (c) вытекает равенство

$$\begin{aligned}x^*(x) = x^*\Big(\sum_{\lambda\in\sigma(T)} E(\lambda;\ T)\,x\Big) &= \sum_{\lambda\in\sigma(T)} (E(\lambda;\ T)^*\,x^*)(x) = \\ &= \sum_{\lambda\in\sigma(T)} 0 = 0, \qquad x \in \mathfrak{X},\end{aligned}$$

откуда $x^* = 0$, ч. т. д.

А теперь мы установим связь между спектральным подпространством $\overline{\mathrm{sp}}\,(T)$ оператора T и многообразием $\mathfrak{S}_\infty(T^*)$ из определения 2.4.

5. Лемма. *Если T — дискретный оператор в рефлексивном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, то $\overline{\mathrm{sp}}(T)=\mathfrak{S}_\infty(T^*)^\perp$.*

Доказательство. Ясно, что если λ лежит в $\sigma(T)$ и $E(\lambda)f=f$, причем $E(\mu)^*g^*=0$ для любого μ из $\sigma(T)=\sigma(T^*)$, то

$$g^*(f)=g^*(E(\lambda)f)=E(\lambda)^*g^*(f)=0.$$

Отсюда следует, что $\overline{\mathrm{sp}}(T)\subseteq\mathfrak{S}_\infty(T^*)^\perp$. С другой стороны, если $f\notin\overline{\mathrm{sp}}(T)$, то существует такой функционал g^* в $\mathfrak{X}^*$, что

$$g^*(f)=1, \qquad g^*(\overline{\mathrm{sp}}(T))=0.$$

Так как $g^*(E(\lambda)f')=0$ для любого f' из $\mathfrak{X}$ и любого λ из $\sigma(T)$, то

$$E(\lambda)^*g^*=0, \qquad \lambda\in\sigma(T)=\sigma(T^*).$$

Таким образом, согласно п. (с) предыдущей леммы, g^* лежит в $\mathfrak{S}_\infty(T^*)$; так как $g^*(f)=1$, то $f\notin\mathfrak{S}_\infty(T^*)^\perp$, ч. т. д.

Замечание. Следует подчеркнуть, что условие $\overline{\mathrm{sp}}(T)=\mathfrak{X}$ предыдущей леммы равносильно соотношению $\mathfrak{S}_\infty(T^*)=0$, но не равносильно условию $\mathfrak{S}_\infty(T)=0$. В самом деле, Гамбургер [1] построил пример компактного оператора U в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$, линейная оболочка корневых векторов которого плотна в $\mathfrak{X}$, но при этом в $\mathfrak{X}$ существует такое бесконечномерное замкнутое подпространство $\mathfrak{X}_0$, что $U\mathfrak{X}_0\subseteq\mathfrak{X}_0$, а сужение U на $\mathfrak{X}_0$ квазинильпотентно. Если мы положим $T=(U^*)^{-1}$, то $\overline{\mathrm{sp}}(T)\neq\mathfrak{X}$, но $\mathfrak{S}_\infty(T)=0$.

В следующей теореме доказан основной результат этого параграфа.

→ 6. Теорема. *Пусть T — дискретный спектральный оператор в B-пространстве $\mathfrak{X}$. Предположим, что все, за исключением, быть может, конечного числа, точки из $\sigma(T)$ являются простыми полюсами резольвенты $R(\lambda; T)$. Пусть U_i — последовательность ограниченных областей, объединение которых совпадает со всей комплексной плоскостью и $\min\limits_{z\in U_i}|z|\to\infty$ при $i\to\infty$. Через V_i обозначим границу U_i. Пусть $0\leqslant\nu<1$ и*

$$\mu_i=\max_{\lambda\in V_i,\ \mu\in\sigma(T)}|\mu|^\nu|\lambda-\mu|^{-1}.$$

Пусть $\lambda_0\notin\sigma(T)$ и P — такой оператор, что $P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ ограничен. Тогда

(a) *если $\mu_i\to 0$, то $T+P$ дискретен и $\mathfrak{S}_\infty(T+P)=0$;*

(b) *если $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\,\mu_i\leqslant K\leqslant\infty$, то существует такое $\delta=\delta(K, T)>0$, что для любого оператора P, удовлетворяющего неравенству*

$|P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}| < \delta$, *оператор* $T+P$ *дискретен и* $\mathfrak{S}_\infty(T+P)=0$;

(c) *если* $\varliminf_{i\to\infty} \mu_i < \infty$ *и оператор* $P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ *компактен, то оператор* $T+P$ *дискретен и* $\mathfrak{S}_\infty(T+P)=0$.

Доказательство. Пусть S — скалярная часть оператора T, $N=T-S$ и E — разложение единицы для T. Тогда по определению XVIII.2.27 и леммам XVIII.2.13 и XVIII.2.25 S и T имеют одинаковый спектр. Согласно лемме 2.2, $T\,|\,E(\lambda)\mathfrak{X}=\lambda I\,|\,E(\lambda)\mathfrak{X}$, если λ — простой полюс резольвенты $R(\lambda;\,T)$. Следовательно, по определению XVIII.2.27 $T\,|\,E(\lambda)\mathfrak{X}=S\,|\,E(\lambda)\mathfrak{X}$ для любого простого полюса λ резольвенты $R(\lambda;\,T)$. Пусть σ_0 — конечное множество тех точек λ из $\sigma(T)$, для которых λ не является простым полюсом резольвенты $R(\lambda;\,T)$, и $\sigma_0'=\sigma(T)-\sigma_0$. Тогда в силу определения XVIII.2.8 для любой функции f, аналитической на $\sigma(T)$, вектор x из $E(\sigma_0')\mathfrak{X}$ принадлежит $\mathfrak{D}(f(T))$ в том и только в том случае, если он лежит в $\mathfrak{D}(f(S))$ и справедливо равенство $f(T)x=f(S)x$. В частности, x лежит в $\mathfrak{D}(T)$ тогда и только тогда, когда он лежит в $\mathfrak{D}(S)$, причем $Tx=Sx$ для любого x из $E(\sigma_0')\mathfrak{X}$. По теореме XVIII.2.9 $E(\sigma_0)\mathfrak{X}$ содержится как в $\mathfrak{D}(f(T))$, так и в $\mathfrak{D}(f(S))$, и в силу той же теоремы $E(\sigma_0)\mathfrak{X}$ инвариантно относительно $f(T)$ и $f(S)$, а сужения этих операторов на $E(\sigma_0)\mathfrak{X}$ ограничены. Отсюда следует, что $\mathfrak{D}(f(T))=\mathfrak{D}(f(S))$, и если мы положим

$$N_f(x)=\begin{cases} f(T)x-f(S)x, & x\in E(\sigma_0)\mathfrak{X},\\ 0, & x\in E(\sigma_0')\mathfrak{X},\end{cases}$$

то N_f — ограниченный оператор и $f(T)=f(S)+N_f$. Оператор N_f имеет конечномерную область значений, и, следовательно, он компактен. Значит, для любой функции f, аналитической на $\sigma(T)$, оператор $f(T)$ есть сумма $f(S)$ и некоторого компактного оператора. В частности, $T=S+N$, где N — компактный оператор. Отсюда следует, что S дискретен в том и только в том случае, если дискретен T. Кроме того, если положить

$$Lx=\begin{cases} x, & x\in E(\sigma_0')\mathfrak{X},\\ (T-\lambda I)^{\nu}(S-\lambda I)^{-\nu}x, & x\in E(\sigma_0)\mathfrak{X},\end{cases}$$

то очевидно, что L — ограниченный оператор и $(S-\lambda I)^{-\nu}=(T-\lambda I)^{-\nu}L$. Значит, оператор

$$(P+N)(S-\lambda I)^{-\nu}=P(S-\lambda I)^{-\nu}+N(S-\lambda I)^{-\nu}=$$
$$=P(T-\lambda I)^{-\nu}L+N(S-\lambda I)^{-\nu}$$

ограничен; если же $P(T-\lambda I)^{-\nu}$ компактен, то этот оператор также компактен (см. VI.5.4). Таким образом, при доказательстве всех трех утверждений (a), (b), (c) нашей теоремы мы можем вместо пары T, $T+P$ рассматривать пару S, $S+(N+P)$. Другими словами, мы можем считать, не ограничивая общности, что $T=S$ является оператором скалярного типа.

При этом предположении $(T-\lambda_0 I)^{-\nu}=\sum_{\lambda\in\sigma(T)}(\lambda-\lambda_0)^{-\nu}E(\lambda;\,T)$, и, согласно теореме XVIII.2.11, $(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ есть предел при $n\to\infty$ конечных сумм

$$\sum_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant n}}(\lambda-\lambda_0)^{-\nu}E(\lambda;\,T)$$

в равномерной топологии (для любого $\nu>0$). По лемме 2.2 каждая из этих конечных сумм является конечномерным оператором, а потому компактным. В силу леммы VI.5.3 при $\nu>0$ оператор $(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ компактен. Но поскольку $P+T=(P+\lambda_0 I)+$ $+(T-\lambda_0 I)$ и $(P+\lambda_0 I)(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ компактен тогда и только тогда, когда компактен $P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$, мы можем вместо пары T, $T+P$ рассматривать пару $T-\lambda_0 I$, $(T-\lambda_0 I)+(P+\lambda_0 I)$. Другими словами, мы можем считать, не ограничивая общности, что $\lambda_0=0$. При $\nu=0$ это рассуждение неприменимо; однако, чтобы избежать излишних усложнений в обозначениях, мы будем считать, что $\lambda_0=0$ и в этом случае. Рекомендуем читателю убедиться в том, что случай произвольного λ_0 приводит лишь к простым изменениям в доказательстве.

Ниже будет доказано, что $T+P$ — дискретный оператор. Пока предположим, что это установлено. Пусть f — вектор из $\mathfrak{S}_\infty(T+P)$, и, следовательно, по лемме 2.6 функция

$$F(\lambda)=(T+P-\lambda I)^{-1}f$$

является целой. Покажем, что $F(\lambda)$ равномерно ограничена; отсюда, согласно теореме Лиувилля, мы получим, что $F(\lambda)\equiv g=\text{const}$, а потому $f=(T+P-\lambda I)\,g$ для всех λ. Далее, этот факт влечет за собой равенство $0=(\lambda_1-\lambda_2)\,g$ для всех λ_1 и λ_2, откуда $g=0$, $f=0$. Тем самым теорема будет доказана.

Чтобы доказать равномерную ограниченность $F(\lambda)$, поступим следующим образом. По теореме XVIII.2.9 (vii) мы имеем $\mathfrak{D}(T^\nu)\supseteq$ $\supseteq\mathfrak{D}(T)$, и, следовательно, $\mathfrak{D}(P)\supseteq\mathfrak{D}(T)$. Таким образом, $\mathfrak{D}(T+P)=\mathfrak{D}(T)$. По предположению оператор $PT^{-\nu}$ ограничен, и мы обозначим его через A.

Повторяя рассуждение, использованное при доказательстве теоремы 2.7, мы замечаем, что для любого μ, удовлетворяющего неравенству $|T^\nu R(\mu;\,T)|<|A|^{-1}$, существует всюду определенный и ограниченный оператор $(\mu I-T-P)^{-1}$, определенный рядом

$$B(\mu)=R(\mu;\,T)\sum_{n=0}^{\infty}\{AT^\nu R(\mu;\,T)\}^n. \tag{i}$$

По теореме XVIII.2.11 существует такая постоянная $M = M(T)$, что

$$|T^{\nu}R(\mu;\ T)| \leqslant M \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|^{\nu} |\mu - \lambda|^{-1}.$$

Отсюда ясно, что если имеет место случай (a) теоремы, то для достаточно больших i ни одна точка из $\mu \in V_i$ не принадлежит $\sigma(T + P)$ и $B(\mu) = (\mu I - T - P)^{-1}$ для μ из V_i. То же самое верно и в случае (b), если только мы рассматриваем такие целые i, для которых $M\mu_i\,|A| \leqslant 1$, т. е. если оператор A удовлетворяет условию $|A| < \delta$, $\delta \leqslant (MK)^{-1}$.

Из равенства (i) и теоремы XVIII.2.11

$$|B(\mu)| \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(T)} M |\mu - \lambda|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (M|A|\mu_i)^n =$$
$$= M(1 - M|A|\mu_i)^{-1} \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\mu - \lambda|^{-1}, \quad \mu \in V_i.$$

Так как, по предположению, $0 \notin \sigma(T)$, то существует такая постоянная K_1, что

$$\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\mu - \lambda|^{-1} \leqslant K_1 \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|^{\nu} |\mu - \lambda|^{-1}.$$

Следовательно,

$$\text{(ii)} \qquad |B(\mu)| \leqslant MK_1\mu_i(1 - M|A|\mu_i)^{-1}, \quad \mu \in V_i.$$

Напомним, что в обоих случаях (a) и (b) нашей теоремы выполняется неравенство $M\,|A|\,\mu_i < 1$ для достаточно больших i. Отсюда, применяя неравенство (ii), находим, что целая функция

$$f(\mu) = R(\mu;\ T + P)f = B(\mu)f$$

равномерно ограничена на всех V_i, начиная с некоторого i, и, следовательно, равномерно ограничена на всех V_i. По принципу максимума модуля $f(\mu)$ равномерно ограничена на всех U_i, и так как $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ есть вся плоскость, то $f(\mu)$ равномерно ограничена на всей плоскости. Более того, как показывает равенство (i), оператор $T + P$ дискретен. Таким образом, требуемый результат в случаях (a) и (b) установлен.

Если имеет место случай (c) теоремы, то доказательство близко к изложенному выше. Пусть $\{\lambda_n\}$ — точки спектра $\sigma(T)$ и $\sigma_n = \bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\sigma_n' = \sigma(T) - \sigma_n$. Сначала покажем, что если E — разложение единицы оператора T, то $\lim_{n \to \infty} |E(\sigma_n')A| = 0$. Если это не так, то найдутся такое $\varepsilon > 0$, такая возрастающая последовательность $\{n_i\}$ целых чисел и такие векторы x_i, $|x_i| = 1$, что $|E(\sigma_{n_i}')Ax_i| \geqslant \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$. Так как A компактен, то мы можем предположить, не ограничивая общности, что предел $\lim\limits_{i\to\infty} Ax_i = y$ существует. Отсюда, обозначая через M верхнюю грань величин $|E(\sigma'_{ni})|$, получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon \leqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} |E(\sigma'_{n_i}) Ax_i| \leqslant \\ \leqslant \overline{\lim_{i\to\infty}} |E(\sigma'_{n_i})(Ax_i - y)| + \overline{\lim_{i\to\infty}} |E(\sigma'_{n_i}) y| \leqslant \\ \leqslant M \overline{\lim_{i\to\infty}} |Ax_i - y| + 0 = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает требуемый результат.

Ряд для $B(\mu)$ из формулы (i) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\text{(iii)}\quad B(\mu) = T^{-\nu}(T^\nu R(\mu;\ T) + T^\nu R(\mu;\ T) AT^\nu R(\mu;\ T) + \\ + T^\nu R(\mu;\ T) AT^\nu R(\mu;\ T) AT^\nu R(\mu;\ T) + \ldots) = \\ = T^{-\nu}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} (T^\nu R(\mu;\ T) A)^n\right\} T^\nu R(\mu;\ T).\end{aligned}$$

Следовательно, он сходится для всех μ, для которых $|T^\nu R(\mu;\ T) A| < 1$, и если $K_1 = |T^{-\nu}|$, то

$$|B(\mu)| \leqslant K_1 |T^\nu R(\mu;\ T)| (1 - |T^\nu R(\mu;\ T) A|)^{-1}.$$

Мы уже отмечали, что $|T^\nu R(\mu;\ T)| < M\mu_i$ для всех μ из V_i. Таким образом, если $\mu \in V_i$ и $|T^\nu R(\mu;\ T) A| < 1$, то оператор $B(\mu) = (\mu I - T - P)^{-1}$ существует и

$$|B(\mu)| \leqslant K_1 M\mu_i (1 - |T^\nu R(\mu;\ T) A|)^{-1}.$$

Далее будет доказано, что $|T^\nu R(\mu;\ T) A| \leqslant 1/2$ для всех μ из V_i и достаточно больших i. Отсюда, как и выше, вытекает, что функция $f(\mu) = R(\mu;\ T + P) f$ ограничена на всей плоскости. Мы покажем также, что оператор $T^{-\nu}$ компактен. Затем, согласно равенству (iii) и теореме VI.5.4, мы получим, что оператор $B(\mu) = R(\mu;\ T + P)$ компактен для всех μ из V_i, если i достаточно велико, и тогда теорема будет доказана.

Возьмем точку μ из V_i и покажем, что $|T^\nu R(\mu;\ T) A| \leqslant 1/2$ для достаточно больших i. В силу сказанного выше, $|T^\nu R(\mu;\ T)| \leqslant M\mu_i$, откуда $|T^\nu R(\mu;\ T)| \leqslant MM'$, где $M' = \sup\limits_{1\leqslant i<\infty} \mu_i$. Выше было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} |E(\sigma'_n) A| = 0$. Следовательно, существует такое N, что $|E(\sigma'_N) A| \leqslant (4MM')^{-1}$. Далее,

$$\begin{aligned}|T^\nu R(\mu;\ T) A| \leqslant |T^\nu R(\mu;\ T) E(\sigma_N) A| + |T^\nu R(\mu;\ T) E(\sigma'_N) A| \leqslant \\ \leqslant |T^\nu R(\mu;\ T) E(\sigma_N) A| + 1/4.\end{aligned}$$

Согласно теореме XVIII.2.11,

$$|T^{\nu}R(\mu;\ T)\,E(\sigma_N)\,A|\leqslant M\sup_{\lambda\in\sigma_N}|\lambda|^{\nu}|\lambda-\mu|^{-1}|A|.$$

Так как $\inf\limits_{z\in U_i}|z|\to\infty$ при $i\to\infty$, то

$$|T^{\nu}R(\mu;\ T)\,E(\sigma_N)\,A|\leqslant 1/4$$

для всех μ из V_i, если i достаточно велико. Итак, $|T^{\nu}R(\mu;\ T)\,A|\leqslant\leqslant 1/2$ для $\mu\in V_i$ и достаточно больших i, как и утверждалось.

Докажем, что при $\nu>0$ оператор $T^{-\nu}$ компактен. По теореме XVIII.2.11 $\lim\limits_{n\to\infty}|T^{-\nu}-\sum\limits_{\lambda\in\sigma_N}\lambda^{-\nu}E(\lambda)|=0$, так что $T^{-\nu}$ является пределом в равномерной операторной топологии последовательности конечномерных операторов. Поскольку конечномерный оператор, очевидно, компактен, $T^{-\nu}$ компактен по лемме VI.5.3. Доказательство для случая $\nu>0$ закончено.

Если $\nu=0$, будем рассуждать следующим образом. Согласно равенству (iii),

$$B(\mu)=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(R(\mu;\ T)\,A)^n\right\}R(\mu;\ T);$$

так как $R(\mu;\ T)$ — компактный оператор, то $B(\mu)=(\mu I-T-P)^{-1}$ тоже компактен. Итак, оператор $T+P$ дискретен и в случае $\nu=0$, и теорема доказана полностью, ч. т. д.

Следующая теорема является следствием теоремы 6.

7. Теорема. *Пусть T — дискретный спектральный оператор в рефлексивном B-пространстве $\mathfrak{X}$, причем все точки из $\sigma(T)$, за исключением, быть может, конечного их числа, являются простыми полюсами резольвенты $R(\mu;\ T)$. Пусть U_i — последовательность ограниченных областей, объединением которых является вся комплексная плоскость, и* $\lim\limits_{i\to\infty}\min\limits_{z\in U_i}|z|=\infty$; *через V_i обозначим границу U_i. Пусть, далее, $0\leqslant\nu<1$ и*

$$\mu_i=\max_{\lambda\in V_i,\ \mu\in\sigma(T)}|\mu|^{\nu}|\lambda-\mu|^{-1}.$$

Пусть $\lambda_0\notin\sigma(T)$, и пусть P — такой оператор, что $P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ ограничен. Тогда

(a) *если $\mu_i\to 0$, то $T+P$ — дискретный оператор и $\overline{\mathrm{sp}}(T+P)=\mathfrak{X}$;*

(b) *если $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\,\mu_i\leqslant K<\infty$, то существует такое число $\delta=\delta(K,T)>0$, что при условии $|P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}|<\delta$ оператор $T+P$ дискретен и $\overline{\mathrm{sp}}(T+P)=\mathfrak{X}$;*

(c) *если* $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\mu_i < \infty$ *и оператор* $P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ *компактен, то оператор* $T+P$ *дискретен и* $\overline{\mathrm{sp}}(T+P)=\mathfrak{X}$.

Доказательство. Согласно теореме 6 и лемме 5, в каждом из указанных случаев (a), (b) и (c) достаточно доказать, что оператор $(T+P)^*$ дискретен и $\mathfrak{S}_\infty((T+P)^*)=0$. По лемме 4 и теореме 6, оператор $T+P$ дискретен. Следовательно, как и при доказательстве теоремы 6, достаточно показать, что функция

$$F^*(\lambda)=((T+P)^*-\lambda I)^{-1}f^*$$

ограничена (по норме) на всей λ-плоскости для любого $f\in\mathfrak{S}_\infty((T+P)^*)$. Но в ходе доказательства теоремы 6 мы установили, что функция $|((T+P)-\lambda I)^{-1}|$ равномерно ограничена по λ на множестве $\bigcup\limits_{i=N}^{\infty}V_i$ для достаточно больших N. В силу леммы 3 для всех λ из $\bigcup\limits_{i=N}^{\infty}V_i$ справедливо равенство

$$|((T+P)^*-\lambda I)^{-1}|=|(T+P-\lambda I)^{-1}|.$$

Таким образом, функция $F^*(\lambda)$ равномерно ограничена по λ на множестве $\bigcup\limits_{i=N}^{\infty}V_i$ и в силу принципа максимума модуля равномерно ограничена по λ на множестве $\bigcup\limits_{i=N}^{\infty}U_i$. Поскольку дополнение к множеству $\bigcup\limits_{i=N}^{\infty}U_i$ ограничено, то функция $|F^*(\lambda)|$ равномерно ограничена на комплексной плоскости, ч. т. д.

8. Следствие. *Пусть T — дискретный спектральный оператор в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, причем все точки его спектра, за возможным исключением конечного их числа, являются простыми полюсами резольвенты $R(\lambda;T)$. Пусть $\{U_i\}$ — последовательность ограниченных областей, объединение которых совпадает со всей комплексной плоскостью, и* $\lim\limits_{i\to\infty}\min\limits_{z\in U_i}|z|=\infty$. *Предположим, что граница V_i области U_i не пересекается со спектром для всех i. Через d_i обозначим расстояние от V_i до спектра $\sigma(T)$, и пусть B — ограниченный оператор. Тогда*

(a) *если* $d_i\to\infty$, *то* $T+B$ *дискретен и* $\mathfrak{S}_\infty(T+B)=0$;

(b) *если* $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}}d_i\geqslant K>0$, *то существует такое число* $\varepsilon=\varepsilon(K,T)>0$, *что при условии* $|B|\leqslant\varepsilon$ *оператор* $T+B$ *дискретен и* $\mathfrak{S}_\infty(T+B)=0$;

(c) *если* $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, d_i>0$ *и* B *компактен, то* $T+B$ *дискретен и* $\mathfrak{S}_\infty(T+B)=0$.

Доказательство следует из теоремы 6 при $\nu = 0$, ч. т. д.

9. Следствие. *Пусть* T — *дискретный спектральный оператор в рефлексивном* B-*пространстве* $\mathfrak{X}$, *причем все точки его спектра* $\sigma(T)$, *за исключением, быть может, конечного их числа, являются простыми полюсами резольвенты* $R(\lambda; T)$; *пусть* $\{U_i\}$ — *последовательность ограниченных областей, объединение которых покрывает всю комплексную плоскость, так что* $\lim\limits_{i\to\infty} \min\limits_{z\in U_i} |z| = \infty$. *Предположим, что граница* V_i *множества* U_i *не пересекается с* $\sigma(T)$. *Через* d_i *обозначим расстояние от* V_i *до спектра* $\sigma(T)$, *и пусть* B — *ограниченный оператор. Тогда*

(a) *если* $d_i \to \infty$, *то* $T + B$ *дискретен и* $\overline{\mathrm{sp}}\,(T + B) = \mathfrak{X}$;

(b) *если* $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, d_i \geqslant K > 0$, *то существует такое число* $\varepsilon = \varepsilon(K, T) > 0$, *что для любого* B, *удовлетворяющего неравенству* $|B| \leqslant \varepsilon$, *оператор* $T + B$ *дискретен и* $\overline{\mathrm{sp}}\,(T + B) = \mathfrak{X}$;

(c) *если* $\underline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, d_i > 0$ *и* B *компактен, то* $T + B$ *дискретен и* $\overline{\mathrm{sp}}\,(T + B) = \mathfrak{X}$.

Теорема 7 описывает достаточно широкий класс операторов, для которых имеет место свойство «спектральной полноты» $\overline{\mathrm{sp}}\,(T) = \mathfrak{X}$. Однако в приложениях более удобно иметь дело с решениями уравнения $(T - \lambda I) f = 0$, чем уравнения $(T - \lambda I)^k f = 0$. В следующей лемме мы укажем один простой случай, когда почти все корневые подпространства оператора $T + P$ одномерны.

10. Лемма. *Пусть* T — *дискретный спектральный оператор в банаховом пространстве* $\mathfrak{X}$, *причем все точки спектра* $\{\lambda_n\}$, *за возможным исключением конечного их числа, являются простыми полюсами резольвенты и соответствующие проекторы имеют одномерные области значений. Предположим, что дана последовательность ограниченных открытых областей* U_i, $i \geqslant 1$, *объединение которых есть вся комплексная плоскость, причем* $\lim\limits_{i\to\infty} \min\limits_{z\in \overline{U}_i} |z| = \infty$ *и каждая область* U_i *при достаточно больших* i *содержит не более одной точки из* $\sigma(T)$; *границу* U_i *обозначим через* V_i. *Пусть* $0 \leqslant \nu < 1$ *и*

$$\mu_i = \max_{\lambda\in V_i,\ \mu\in\sigma(T)} |\mu|^{\nu} |\lambda - \mu|^{-1}.$$

Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$ *и* P — *такой линейный оператор, что* $P(T - \lambda_0 I)^{-\nu}$ *ограничен. Тогда все точки спектра* $\sigma(T + P)$, *за возможным исключением конечного их числа, являются простыми полюсами резоль-*

венты $R(\lambda; T+P)$, *а соответствующие этим точкам проекторы одномерны, если выполняется одно из следующих условий*:

(a) $\mu_i \to 0$ *при* $i \to \infty$;

(b) $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \mu_i \leqslant K < \infty$ *и* $|P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}| < \delta = \delta(K, T)$;

(c) $\mathfrak{X}$ *рефлексивно*, $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \mu_i < \infty$ *и оператор* $P(T-\lambda_0 I)^{-\nu}$ *компактен*.

Доказательство. По теореме 6 оператор $T+P$ дискретен. Как и при доказательстве теоремы 6, можно показать, что в каждом из случаев (a), (b) или (c) выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \sup_{\lambda \in V_i} |PR(\lambda; T)| = 1 - \varepsilon < 1.$$

Следовательно, если положить $\delta = \varepsilon/2$, то для всех i, за исключением, быть может, конечного множества, выполняется неравенство

$$\sup_{\lambda \in V_i} |PR(\lambda; T)| \leqslant 1 - \delta.$$

Рассмотрим все области U_i, для которых нарушается это неравенство, а также все области U_j, которые содержат более одной точки из $\sigma(T)$, и все U_k, которые содержат хотя бы один кратный полюс резольвенты или точку спектра, для которой соответствующий проектор неодномерен. Обозначим через W_0 объединение всех перечисленных областей, а через W_1 — объединение $\overline{W}_0$ со всеми областями U_j, пересекающими $\overline{W}_0$. Если μ — точка границы $\hat{W}_1$ множества W_1, то, очевидно, она лежит на границе одной из этих областей U_j. Следовательно,

$$\sup_{\lambda \in \hat{W}_1} |PR(\lambda; T)| \leqslant 1 - \delta.$$

Если множества U_i, не входящие в W_1, мы расположим в последовательность $W_2, W_3, \ldots$, то сможем считать тогда, не теряя при этом в общности, что указанная в теореме последовательность U_i удовлетворяет таким условиям:

(i) $\sup\limits_{\lambda \in V_i} |PR(\lambda; T)| \leqslant 1 - \delta$ для всех $i \geqslant 1$;

(ii) если $i \geqslant 2$, то U_i содержит не более одной точки из $\sigma(T)$, которая является простым полюсом резольвенты, а соответствующий проектор одномерен. (Действительно, если не выполнено хотя бы одно из этих условий, то мы можем заменить последовательность U_i на W_i.)

Пусть $\delta_1 = \{(1-\delta)^{-1} - 1\}/2$. Тогда $\sup\limits_{\lambda \in V_i} |\eta PR(\lambda; T)| < 1$ при $|\eta| < 1 + \delta_1$ и $i \geqslant 1$. Пусть λ_0 — некоторая подходящим образом выбранная точка из некоторого V_i. Из доказательства теоремы 6 следует, что если $|\eta| < 1+\delta_1$, то оператор

$$K(\eta) = (\lambda_0 I - T - \eta P)^{-1}$$

существует и задается формулой

$$K(\eta) = R(\lambda_0;\ T)(I - \eta PR(\lambda_0;\ T))^{-1}.$$

Так как оператор $R(\lambda_0;\ T)$ компактен (по лемме 2.2), то, в силу леммы VII.6.6 и теоремы VI.5.4, $K(\eta)$ — компактный оператор, аналитически зависящий от η при $|\eta| < 1+\delta_1$. Из леммы VII.6.6 следует, что если O — некоторое ограниченное открытое множество, граница которого не содержит точек из $\sigma(K(\eta_0))$, и $|\eta_0| < 1+\delta_1$, то $E(O;\ K(\eta))$ зависит от η аналитически в некоторой окрестности η_0. Отсюда и из теоремы VII.9.5 вытекает, что $E(U_i;\ T+\eta P)$ зависит от η аналитически при $|\eta| < 1+\delta_1$ для любого $i \geqslant 1$. Поскольку в силу условия (ii) проектор $E(U_i;\ T)$ одномерен при $i \geqslant 2$, из леммы VII.6.7 вытекает, что оператор $E(U_i;\ T+P)$ также одномерен при $i \geqslant 2$. Из теорем VII.9.5 и VII.3.18 следует, что область U_i при $i \geqslant 2$ содержит ровно одну точку из $\sigma(T+P)$ и эта точка является простым полюсом резольвенты $R(\lambda;\ T+P)$. Так как U_i ограничено и $T+P$ регулярен, из леммы 2.2 вытекает, что U_i содержит только конечное число точек из $\sigma(T+P)$. Таким образом, лемма доказана.

Приведем результат несколько иного типа, опирающийся на неравенство Карлемана (см. § XI.6).

11. Теорема. *Пусть T — дискретный неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $\{\lambda_n\}$ — последовательность его собственных значений, в которой каждое собственное значение повторяется столько раз, какова размерность подпространства $E(\lambda_n;\ T)\mathfrak{H}$. Предположим, что для некоторого целого k*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-2k} < \infty.$$

Пусть P — такой оператор (возможно, неограниченный), что любой оператор A, представимый в виде произведения $l \leqslant k$ сомножителей, каждый из которых есть либо P, либо T, причем A не является степенью оператора T, удовлетворяет условиям $\mathfrak{D}(A) \supseteq \mathfrak{D}(T^l)$ и

$$\lim_{\mu\to+\infty} |A\{R(\mu i;\ T)\}^l| = 0.$$

Тогда $T+P$ — дискретный оператор и $\overline{\mathrm{sp}}(T+P) = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Выберем столь большое μ, что $|PR(\mu i;\ T)| < 1/2$. Тогда по лемме VII.3.4 оператор $(I - PR(\mu i;\ T))^{-1} = B$

существует и ограничен. Так как T дискретен, то оператор $R(\mu i; T)$ компактен согласно лемме 2.2. Следовательно, в силу теоремы VI.5.4 оператор

$$R(\mu i;\, T)\, B = C$$

компактен. Ясно, что

$$\begin{aligned}(\mu i I - T - P)\, Cx &= (B - PR(\mu i;\, T)\, B)\, x = \\ &= (I - PR(\mu i;\, T))\, Bx = x, \qquad x \in \mathfrak{H},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}C(\mu I - T - P)x &= C(I - PR(\mu i;\, T))(\mu i I - T)\, x = \\ &= R(\mu i;\, T)(\mu i I - T)\, x = x, \qquad x \in \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T+P).\end{aligned}$$

Таким образом, оператор $R(\mu i; T+P)$ существует и равен C, и, в силу определения 2.1, $T+P$ дискретен.

Так как, согласно предположению, $\mathfrak{D}(T^{l-1}P) \supseteq \mathfrak{D}(T^l)$ при $l \leqslant k$, то $P\mathfrak{D}(T^l) \subseteq \mathfrak{D}(T^{l-1})$. Следовательно, $\mathfrak{D}((T+P)^k) \supseteq \mathfrak{D}(T^k)$, и для любого μ и любого $x \in \mathfrak{D}(T^k)$ вектор $(\mu I - T - P)^k x$ можно представить в виде $(\mu I - T - P)^k x = (\mu I - T)^k x + \sum\limits_{l=0}^{k} \mu_l^{k-l} A_l x$, где каждый оператор A_l является суммой произведений l сомножителей $\pm T$, $\pm P$ и каждое такое произведение содержит хотя бы один сомножитель P. Значит, $|A_l \{R(\mu i;\, T)\}^l| \to 0$ при $\mu \to +\infty$ по предположению. В силу теоремы XII.2.6 величина $|(\mu i)^{k-l}(R(\mu i;\, T))^{k-l}|$ ограничена при $\mu \to +\infty$, откуда

$$\lim_{\mu \to +\infty} \Big| \Big(\sum_{l=0}^{k} (\mu i)^{k-l} A_l\Big)(R(\mu i;\, T))^k \Big| = 0.$$

Повторяя рассуждения, использованные в начале доказательства, мы видим, что если число μ выбрано столь большим, что норма оператора $O_\mu = \Big(\sum\limits_{l=0}^{k} (\mu i)^{k-l} A_l\Big)(R(\mu i;\, T))^k$ меньше единицы, то оператор $((\mu i I - T - P)^k)^{-1}$ существует и равен $R(\mu i;\, T)^k (I + O_\mu)^{-1}$. В частности, $\mathfrak{D}((T+P)^k) \subseteq \mathfrak{D}(T^k)$, так что $\mathfrak{D}((T+P)^k) = \mathfrak{D}(T^k)$.

Покажем, что если модуль $|\mu|$ достаточно велик и μ лежит в угле $|\arg \mu - \pi/2| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, верхней полуплоскости, то оператор $(\mu I - (T+P)^k)^{-1}$ существует и удовлетворяет неравенству

$$\text{(i)} \qquad |(\mu I - (T+P)^k)^{-1}| \leqslant O(|\operatorname{Im} \mu|^{-1}).$$

Как было показано выше, $\mathfrak{D}((T+P)^k) = \mathfrak{D}(T^k)$ и $(T+P)^k = T^k + A_0$, где $\mathfrak{D}(A_0) \supseteq \mathfrak{D}(T^k)$ и

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{\mu \to +\infty} |A_0 (R(\mu i;\, T))^k| = 0.$$

Далее,

(iii) $A_0R(\mu; T^k) = A_0(R(|\mu|^{1/k} i; T))^k (|\mu|^{1/k} iI - T)^k R(\mu; T^k)$.

По теореме XII.2.6

$$|(|\mu|^{1/k} iI - T)^k R(\mu; T^k)| \leqslant \sup_{-\infty<\lambda<\infty} \left| \frac{(\lambda - |\mu|^{1/k} i)^k}{\lambda^k - \mu} \right| = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} \left| \frac{(\lambda - i)^k}{\lambda^k - \mu/|\mu|} \right|.$$

Ясно, что $\lim_{|\lambda|\to\infty} |(\lambda - i)^k/(\lambda^k - \alpha)| = 1$ равномерно по α, $|\alpha| = 1$. Следовательно, найдется столь большое $c > 2$, что

$$\sup_{|\lambda|\geqslant c} \left| \frac{(\lambda - i)^k}{\lambda^k - \mu/|\mu|} \right| \leqslant 2.$$

С другой стороны, функция $|(\lambda - i)^k|$ ограничена в области $|\lambda| \leqslant c$, а функция $(\lambda^k - \mu/|\mu|)$ отделена от нуля, когда λ меняется в отрезке $[-c, c]$ вещественной оси, а $\mu \neq 0$ меняется в угле $|\arg \mu - \pi/2| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$ верхней полуплоскости. Таким образом, функция

$$|(T - |\mu|^{1/k} iI)^k R(\mu; T^k)|$$

равномерно ограничена, когда $\mu \neq 0$ меняется в угле $|\arg \mu - \pi/2| \leqslant (\pi/2) - \varepsilon$ верхней полуплоскости. Из соотношений (ii) и (iii) вытекает, что

(iv) $$\lim_{|\mu|\to\infty,\ \left|\arg\mu - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon} |A_0R(\mu; T^k)| = 0.$$

Те же самые соображения показывают, что

(v) $$\lim_{|\mu|\to\infty,\ \left|\arg\mu + \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon} |A_0R(\mu; T^k)| = 0.$$

Отсюда получаем, как и в начале настоящего доказательства, что если $|\arg \mu - \pi/2| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$ и $|\mu|$ столь велико, что $|A_0R(\mu; T)^k| < 1$, то резольвента $R(\mu; (T+P)^k) = R(\mu; T^k + A_0)$ существует и задается формулой

$$R(\mu; (T+P)^k) = R(\mu; T^k)(I - A_0R(\mu; T^k))^{-1}.$$

Из леммы VII.6.1 вытекает, что если $\mu \to \infty$, оставаясь в указанных углах верхней и нижней полуплоскостей, то $|(I - A_0R(\mu; T^k))^{-1}| \to 1$. Так как $|R(\mu; T^k)| = O(|\operatorname{Im} \mu|^{-1})$, то в силу выписанного выше соотношения и леммы XII.2.2

(vi) $$|R(\mu; (T+P)^k)| = O(|\operatorname{Im} \mu|^{-1}),$$

когда $|\mu|\to\infty$, оставаясь в углах $|\arg\mu\pm\pi/2|\leqslant\pi/2-\varepsilon$ верхней и нижней полуплоскостей.

Выберем теперь некоторое μ_0, для которого оператор $R_0=R(\mu_0;(T+P)^k)$ существует и задается формулой

$$R(\mu_0;(T+P)^k)=R(\mu_0;T^k)(I-A_0R(\mu_0;T^k))^{-1}.$$

Пусть $\{\varphi_n\}$ — полный ортонормированный базис гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, состоящий из собственных векторов оператора T (теорема XIII.4.2), и $T\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$. Согласно теореме XII.2.6, $E(\lambda_n)\varphi_n=\varphi_n$ и

$$R(\bar{\mu}_0;T^k)\varphi_n=(\bar{\mu}_0-\lambda_n^k)^{-1}\varphi_n.$$

Так как по предположению ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^{-2k}$ сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|R(\bar{\mu}_0;T^k)\varphi_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{\mu}_0-\lambda_n^k|^{-2}.$$

Следовательно, в силу определения XI.6.1 $R(\bar{\mu}_0;T^k)$ — оператор Гильберта — Шмидта, т. е. $R(\bar{\mu}_0;T^k)\in HS$. Кроме того,

$$R_0^*=\{(I-A_0R(\bar{\mu}_0;T^k))^{-1}\}^*R(\bar{\mu}_0;T^k),$$

так что

$$\sum_{n=1}^{\infty}|R_0^*\varphi_n|^2\leqslant|(I-A_0R(\mu_0;T^k))^{-1}|^2\sum_{n=0}^{\infty}|R(\bar{\mu}_0;T^k)\varphi_n|^2<\infty.$$

Таким образом, $R_0^*\in HS$, и потому, согласно лемме XI.6.2, $R_0\in HS$.

Так как $R_0=(\mu_0I-(T+P)^k)^{-1}$, то по лемме VII.9.2 $\sigma(R_0)=\{(\mu_0-\xi)^{-1}\,|\,\xi\in\sigma((T+P)^k)\}\cup\{0\}$, так что

$$(\mu I-R_0)^{-1}=\mu^{-1}I-\mu^{-2}R(\mu_0+\mu^{-1};(T+P)^k).$$

Из этой формулы и формулы (vi) следует, что если точка $\mu\neq0$ лежит в одном из углов $|\arg\mu-\pi/2|\leqslant\pi/2-\varepsilon$, $|\arg\mu+\pi/2|\leqslant\pi/2-\varepsilon$ и модуль $|\mu|$ достаточно велик, то оператор $(\mu I-R_0)^{-1}$ существует и

$$|(\mu I-R_0)^{-1}|=O(|\mu|^{-1}).$$

Из теоремы XI.6.29 сразу же вытекает, что система векторов

$$\{f\,|\,(R_0-\lambda I)^kf=0,\quad\lambda\in\sigma(R_0),\quad k\geqslant1\}$$

фундаментальна в $\mathfrak{H}$. Поскольку $R_0=(\mu_0I-(T+P)^k)^{-1}$, то R_0 взаимно однозначен, так что из равенства $R_0^kf=0$ следует равенство $f=0$. Значит, множество

$$\{f\,|\,(R_0-\lambda I)^kf=0,\quad\lambda\in\sigma(R_0),\quad\lambda\neq0,\quad k\geqslant1\}$$

фундаментально в $\mathfrak{H}$. Следовательно, по определению VIII.9.3 множество

$$\{f \in E(\lambda;\ R_0)\,\mathfrak{H} \mid \lambda \in \sigma(R_0),\ \lambda \neq 0\}$$

фундаментально в $\mathfrak{H}$. По теореме VII.9.5

$$\{f \in E(\lambda;\ R_0)\,\mathfrak{H} \mid \lambda \in \sigma(R_0),\ \lambda \neq 0\} =$$
$$= \{f \in E(\mu;\ (T+P)^k)\,\mathfrak{H} \mid \mu \in \sigma((T+P)^k)\} =$$
$$= \{f \in E(\hat{\mu};\ (T+P))\,\mathfrak{H} \mid \hat{\mu} \in \sigma(T+P)\}.$$

Таким образом, по определению 1 $\overline{\mathrm{sp}}\,(T+P) = \mathfrak{H}$, ч. т. д.

Мы закончим этот параграф следующим уточнением теоремы 4.16.

12. Теорема. *Пусть T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$, порожденный формальным дифференциальным оператором $(-id/dx)^n$ и n граничными условиями. В случае четного n предположим, что эти граничные условия удовлетворяют предположению регулярности* 4.1 *и число β, определенное формулами* (4.16) *и* (4.17), *отлично от* 1. *Если же n нечетно, то предположим, что эти граничные условия удовлетворяют предположениям регулярности* (4.9) *и* (4.10). *Пусть P — оператор, определенный на подмножестве $H^{(n)}(0, 1)$ из $L_2(0, 1)$ формулой*

$$Pf = Af^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} B_j f^{(j)}, \qquad f \in H^{(n)},$$

где A компактен, а B_j ограничены, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда оператор $T + P$ дискретен и $\overline{\mathrm{sp}}\,(T+P) = \mathfrak{H}$.

Доказательство. Сначала покажем, что P можно представить в виде

$$Pf = A_1 f^{(n)} + B_\infty f, \qquad f \in H^{(n)},$$

где A_1 и B_∞ компактны. Согласно теореме VI.5.4, для этого достаточно доказать, что для каждого j

$$f^{(j-1)} = (Cf^{(j)} + Bf), \qquad f \in H^{(j)},$$

где C и B компактны. Далее, $f^{(j-1)} = \mathrm{Int}\,(f^{(j)}) + f^{(j-1)}(0)$, где Int — оператор интегрирования

$$(\mathrm{Int}\,f)(t) = \int_0^t f(s)\,ds, \qquad f \in L_2(0, 1).$$

Так как в силу неравенства Шварца $|(\mathrm{Int}\,f)(t) - (\mathrm{Int}\,f)(s)| < |f|\,|t-s|^{1/2}$, то в силу теоремы IV.6.5 оператор Int компактен.

Таким образом, достаточно проверить, что $f^{(j-1)}(0)$ можно представить в виде

$$[+] \qquad f^{(j-1)}(0) = \hat{C}f^{(j)} + \hat{B}f, \qquad f \in H^{(j)},$$

где $\hat{C}$, $\hat{B}$ — непрерывные (а потому компактные) линейные функционалы на гильбертовом пространстве. Если φ — некоторая функция из $C^\infty[0, 1]$, равная нулю в окрестности точки 1 и единице в окрестности точки $t=0$, то по формуле Грина (теорема XIII.2.4)

$$f^{(j)}(0) = \int_0^1 \varphi(s) f^{(j)}(s)\,ds + (-1)^{j-1} \int_0^1 \varphi^{(j)}(s) f(s)\,ds;$$

тем самым доказано соотношение [+].

Пусть λ_n — собственные значения оператора T и $E_n = E(\lambda_n; T)$ — соответствующие проекторы. Положим $\mu_n = \operatorname{Re}\lambda_n$. Согласно теоремам VII.9.5, VII.4.5, 4.8, 4.13 и лемме XVII.2.2, оператор $\hat{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n E_n - T$ является суммой конечномерного оператора и ограниченного оператора вида $\sum_{n=N}^{\infty} (-i \operatorname{Im}\lambda_n) E_n$ [1]), а следовательно, $\hat{B}$ ограничен. Положим $\hat{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n E_n$ в смысле теоремы XVIII.2.11. По лемме XV.6.2 в $L_2(0, 1)$ можно ввести такую гильбертову норму, эквивалентную исходной, относительно которой проекторы E_n ортогональны. Следовательно, не теряя в общности, можно считать, что $\hat{T}$ самосопряжен. Так как $\mu_n \to \infty$ (и даже $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^{-2} < \infty$ в силу теорем 4.8 и 4.13), то $\hat{T}$ дискретен. Как было доказано выше,

$$(T+P)f = \hat{T}f + A_1 f^{(n)} + \tilde{B}f,$$

где A_1 компактен, а $\tilde{B}$ ограничен; так как $|\tilde{B}R(\mu i; \hat{T})| \to 0$ при $\mu \to +\infty$ (теорема XII.2.6), то наша теорема будет следовать из теоремы 11, как только мы докажем, что

$$\left| A_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^n R(\mu i; \hat{T}) \right| \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

Докажем последнее утверждение. Поскольку $\hat{T} = T + \hat{B}$, где $\hat{B}$ ограничен, то (см. доказательство теоремы 6) $\mu \notin \sigma(T)$ для достаточно больших μ и

$$R(\mu i; T) = R(\mu i; \hat{T})(I - \hat{B}R(\mu i; \hat{T}))^{-1}.$$

---

[1]) Ограниченность последнего оператора следует из ограниченности последовательности $\operatorname{Im}\lambda_n$ (см. лемму 4.2). — *Прим. перев.*

Это соотношение показывает, что если μ взять столь большим, чтобы выполнялось неравенство $|\hat{B}R(\mu i;\ T)| < 1/2$, то $|R(\mu i;\ T)| < 2\mu^{-1}$. Отсюда, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 6, находим

$$R(\mu i;\ \hat{T}) = R(\mu i;\ T)(I + \hat{B}R(\mu i;\ T))$$

для достаточно больших μ. Для доказательства теоремы осталось проверить, что

$$\lim_{\mu\to\infty} |A_1 TR(\mu i;\ T)| = 0,$$

т. е.

$$\lim_{\mu\to\infty} |A_1(\mu i R(\mu i;\ T) - I)| = 0.$$

Ясно, что

$$|\mu i(R(\mu i;\ T) - R(\mu i;\ \hat{T}))| = |\mu i R(\mu i;\ T)\hat{B}R(\mu i;\ \hat{T})| \leqslant$$
$$= 2|\hat{B}|\mu^{-1}.$$

Таким образом, все свелось к доказательству соотношения

$$\lim_{\mu\to\infty} |A_1(\mu i R(\mu i;\ \hat{T}) - I)| = 0.$$

Допустим, что оно неверно. Тогда существуют такая последовательность вещественных чисел $\{\mu_j\}$, стремящаяся к $+\infty$, такая последовательность векторов $\{x_n\}$ единичной длины и такое $\varepsilon > 0$, что

$$|A_1(\mu_j i R(\mu_j i;\ \hat{T}) - I) x_j| \geqslant \varepsilon.$$

Так как, согласно теореме XII.2.6, последовательность $\{z_n\} = \{(\mu_j i R(\mu_j i;\ \hat{T}) - I] x_j\}$ ограничена и оператор A_1 компактен, мы можем считать, не ограничивая общности, что $\{A_1 z_n\}$ стремится к некоторму z. Ясно, что $|z| \geqslant \varepsilon$, так что $z \neq 0$. С другой стороны, согласно теореме XII.2.6 и теореме Лебега, последовательность

$$(A_1 z_n,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu_n i - \lambda}(E(d\lambda) x_n,\ A_1^* y)$$

сходится к нулю при $n \to \infty$ для любого $y \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $(z,\ y) = 0$ для всех y из $\mathfrak{H}$, так что $z = 0$. Это противоречие доказывает теорему, ч. т. д.

6. Примечания и дополнения

Развитие теории, изложенной в этой главе, было начато в 1908 г. в работах Г. Биркгофа [3, 6, 7] и продолжено Тамаркиным [2] в 1912 г. Однако несколько ранее (1896 г.) эта тема была затронута А. Пуанкаре [2]. Продолжая исследования в этом направлении, Тамаркин [3] рассмотрел весьма общие задачи для уравнений n-го порядка, Биркгоф и Лангер [1] изучили случай систем дифференциальных уравнений первого порядка, а Уайлдер [1, 2]—случай оператора, порожденного формальным дифференциальным оператором и линейными условиями на функцию и ее производные в некоторой внутренней точке интервала.

Дж. Шварц [2] указал абстрактный операторный метод, основанный на теоремах о возмущении, которые мы использовали в § 2; этот метод был обобщен Г. Крамером [2] на более общий случай. Близкие результаты получили Тёрнер [2] и Кларк [1]. Маеда [1] распространил основной результат Дж. Шварца на локально выпуклые пространства.

Биркгоф и Тамаркин не занимались задачей о безусловной сходимости в среднем, задачей, которой в основном посвящена эта глава; однако они рассмотрели задачу о сходимости разложений по корневым векторам в точке. Биркгоф [3] доказал, что если граничные условия регулярны в смысле § 4 этой главы, то ряд по собственным функциям функции f, имеющей ограниченную вариацию, сходится к $\frac{1}{2}\{f(t+0)+f(t-0)\}$ в каждой внутренней точке интервала $[0, 1]$, на котором задан формальный дифференциальный оператор, а в точках 0 и 1 ряд сходится к $af(0+)+bf(1-)$, где постоянные a и b определяются граничными условиями. Тамаркин [3; теорема 12] нашел обобщение следующей теоремы о равносходимости, первоначально доказанной для операторов второго порядка Стекловым [1] и Хааром [3].

Теорема. *Пусть T — линейный оператор, определенный формальным дифференциальным оператором*

$$\tau=\left(\frac{d}{dt}\right)^n+a_{n-2}(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-2}+\ldots+a_0(t)$$

на отрезке $[0, 1]$ *и n граничными условиями, удовлетворяющими предположениям регулярности из § 4. Пусть T_0 — линейный оператор, определенный теми же граничными условиями и формальным дифференциальным оператором*

$$\tau_0=\left(\frac{d}{dt}\right)^n.$$

Возьмем функцию $f\in L_1(0, 1)$ и через $\sigma_n(f, t)$ обозначим n-ю частичную сумму разложения f по собственным и присоединенным функциям оператора T, а через $\hat{\sigma}_n(f, t)$ обозначим n-ю частичную сумму разложения f по собственным и присоединенным функциям оператора T_0. В обоих случаях предполагается, что собственные функции упорядо-

чены по возрастанию модулей соответствующих собственных значений. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leq t\leq 1}|\sigma_n(f, t)-\hat{\sigma}_n(f, t)|=0, \ f\in L_1(0, 1).$$

Эта интересная теорема позволяет в ряде случаев свести проблему сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям к задаче о сходимости рядов Фурье; последней задаче посвящена обширная литература. Доказательство теорем о равносходимости в случае второго порядка можно найти в книгах Титчмарша [16; гл. I] и Коддингтона — Левинсона [1; гл. 12, теорема 3.2]. Основные положения теории Биркгофа — Тамаркина изложены в книге Наймарка [5]. Близкий, но менее сильный результат о сходимости разложений получил Милн [2].

В работах Дж. Эллиотт [1, 2] рассматривалась задача о сходимости и суммируемости разложений по собственным и присоединенным функциям для некоторых классов сингулярных несамосопряженных операторов второго порядка с дискретным спектром. Дж. Эллиотт использовала построенную Феллером, Филлипсом и Хилле теорию полугрупп в L_1 и C, порожденных параболическими уравнениями в частных производных.

Множество всех пар линейно независимых граничных условий для оператора

$$\tau=\left(\frac{d}{dt}\right)^2$$

на отрезке [0, 1] распадается на четыре класса.

(a) *Регулярные* граничные условия (т. е. граничные условия, удовлетворяющие предположениям регулярности из § 4).

(b) *Вырожденные* граничные условия типа

$$f(0)=0, \quad f'(0)=0,$$

для которых спектр соответствующего оператора пуст.

(c) *Вырожденные* граничные условия типа

$$f(0)=f(1), \quad f'(0)=-f'(1),$$

для которых спектром соответствующего оператора является вся комплексная плоскость.

(d) *Промежуточные* граничные условия типа

$$f(0)=0, \quad f'(0)=f(1).$$

Эти граничные условия определяют оператор, спектр которого состоит из собственных значений $\lambda=s^2$, определенных уравнением

$$\sin s=ks.$$

Асимптотика собственных значений имеет вид $an^2 + ibn \ln n + \ldots$, при этом отношение a и b вещественно. Такие разложения изучал Гофман [1].

Фридман и Мишоу [1] рассмотрели разложения по собственным функциям уравнения

$$u'' + q(t)\,u + \lambda\,(p(t)\,u - u') = 0$$

с граничными условиями

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Замена переменных $v(t) = u'(t) - p(t)\,u(t)$ приводит задачу к более удобной форме. Фридман и Мишоу получили соответствующие теоремы разложения. Другие результаты, относящиеся к этой задаче, получили Мишоу и Форд [1].

Теорема 5.12 из § 5 близка к теореме полноты, доказанной Браудером [6], который применил неравенство Карлемана, использованное нами в теореме 5.12 (см. также теорему XIV.6.28).

Келдыш [1] опубликовал обобщение следующей теоремы, близкой к теоремам полноты XI.6.28 и XI.9.29, и применил его в теории разложений по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов (обыкновенных и в частных производных).

Теорема. *Пусть T — неограниченный дискретный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и A компактный оператор. Предположим, что оператор T^{-1} существует и ограничен и для достаточно большого m, а оператор T^{-m} является оператором Гильберта — Шмидта. Тогда $(I - A)\,T$ — дискретный оператор и $\overline{\mathrm{sp}}\,((I - A)\,T) = \mathfrak{H}$.*

Дифференциальные операторы. Дальнейшие результаты по дифференциальным операторам и краевым задачам получили Аскеров, С. Г. Крейн и Лаптев [1], Балслев [1], Бирман [5, 6], Батлер [2, 3], Коддингтон и Гилберт [1], Эрколано и Шехтер [1], Р. Фриман [1], Гехтман и Станкевич [1], Гилберт и Крамер [1], Глазман [5], Гольдберг [2], Грейнер [1], Хельвиг [1], Хёрмандер [2], Хьюиг [1], И. Кац [1], Келдыш и Лидский [1], Кемп [1], Кессельман [2], Лянце [4, 6], Макгарвей [1], Марченко [3], Марченко и Рофе-Бекетов [1], Мартиросян [4], Павлов [1], Штраус [6] и Вайдман [2].

Разложения по собственным функциям. Проблема разложения данной функции по собственным и присоединенным функциям оператора изучалась многими авторами. Большой интерес представляет также вопрос о полноте системы собственных и присоединенных векторов оператора в некотором заданном пространстве.

Для самосопряженного случая много сведений по этим вопросам читатель найдет в книге Березанского [5]; см. также работы следующих авторов: Александрян [1], Аллахвердиев [1—5], Березанский [3], Фойаш [4—6, 18], Герлах [1], Гирц [1], Гохберг и Крейн [6], Грейнер [1], Харазов [5], Хиршфельд [1], И. Кац [1], Кацнельсон [1], Крейн [22], Курода [8], Лидский [1, 2], Лянце [6], Мацаев [2, 3], Марченко [3], Марченко и Рофе-Бекетов [1], Маркус [1—4], К. Морен [1—7], Нельсон [1], Новосельский [1], Палант [1], Пинкус [2, 3], Пустыльник [1, 2], Рофе-Бекетов [1], Сидзута [1], Смарт [3], Тёрнер [2] и Визитей [1—3].

ГЛАВА XX

Спектральные операторы с непрерывным спектром: приложения общей теории

Эта глава посвящена описанию некоторых классов операторов с непрерывным спектром, которые являются спектральными или обладают рядом близких (более сильных или слабых) свойств. Излагаемые нами результаты носят фрагментарный характер, но мы надеемся, однако, что они послужат стимулом к новым исследованиям в этой области.

В первом параграфе, используя теорему XVIII.2.34, мы показываем (следуя Наймарку), что при некоторых ограничениях оператор T, определенный формальным дифференциальным оператором

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+q(t), \qquad 0\leqslant t<\infty,$$

является спектральным. Идея доказательства состоит в следующем. К оператору T применяется (формально) обычный метод Вейля — Кодаиры построения спектрального разложения самосопряженного оператора (теорема XIII.5.13). В результате мы получаем формальные выражения для семейства операторов $E(e)$, которые являются естественными «кандидатами» на роль спектрального разложения оператора T при условии, конечно, что для T это разложение действительно существует. Как только мы докажем, что нормы операторов $E(e)$ равномерно ограничены, то сможем показать, что оператор T является спектральным; в этом состоит содержание теоремы XVIII.2.34. Чтобы доказать равномерную ограниченность семейства операторов $E(e)$, мы сравним их с соответствующими операторами, вычисленными для «невозмущенного» формально самосопряженного оператора

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2, \qquad 0\leqslant t<\infty.$$

Естественно ожидать, что если функция q достаточно мала, то наши рассуждения приведут нас к доказательству спектральности T.

В первом параграфе мы осуществим эту программу для случая, когда функция q мала в том смысле, что

$$\int_0^\infty (1+t^2)\,|q(t)|\,dt < \infty.$$

Намеченная здесь идея имеет достаточно широкую область применения; некоторые случаи, в которых она может быть с успехом использована, указаны в упражнениях в конце главы. Отметим следующую нерешенную интересную задачу. Для каких a, b, c и q к оператору

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + a(1+t)^{-1} + b(1+t)^{-2} + c(1+t)^{-3} + q(t), \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

$$q(t) = O(t^{-4}) \qquad \text{при} \qquad t \to \infty,$$

применим метод из § 1? Для каких a, b, c этот оператор спектрален?

Параграф 2 посвящен интересной идее, принадлежащей Фридрихсу. Если даны «невозмущенный» оператор T и «возмущение» K, то мы будем искать такой оператор U, что $T + K = U^{-1}TU$; тем самым спектральная теория оператора $T + K$ сводится к спектральной теории оператора T. Мы покажем, что эта идея может быть применена к широкому классу операторов и, в частности, к некоторым дифференциальным операторам в частных производных вида $-\nabla + V(x)$. Применения того же метода к другим операторам даны в упражнениях § 5.

В § 3 мы обобщаем (следуя Тёрнеру) метод Фридрихса на операторы с дискретным спектром. Здесь рассматривается невозмущенный оператор T, заданный в «диагональной» форме, и ищется решение уравнения $T + K = U^{-1}(T + D)\,U$, где D —«диагональный» оператор (в том же базисе, что и T). Общий метод, развитый в § 3, применяется к некоторым конкретным операторам с дискретным спектром; дальнейшие применения даны в упражнениях из § 5.

Совершенно другая идея излагается в § 4. Если T — самосопряженный оператор, а $T + K$ — возмущенный самосопряженный оператор, то «волновой оператор» $U = \lim\limits_{s\to\infty} e^{isT}\, e^{-is(T+K)}$, если только он существует и унитарен, как нетрудно видеть, удовлетворяет уравнению $T + K = U^{-1}TU$. В § 4 будет развит этот «метод волновых операторов»; мы выведем общую теорему Като и Куроды о существовании и свойствах волнового оператора U, а также выясним связи между спектрами T и $T + K$. В § 4 содержится больше общих теорем, чем конкретных приложений; в упражнениях, помещенных в § 5, указан ряд применений результатов, полученных в § 4.

Следует отметить, что материал этой главы тесно связан с некоторыми глубокими исследованиями по квантовой механике, квантовой теории поля и различным областям классической волновой теории, в частности теории электромагнитных волн, которые занимают центральное место в работах физиков двадцатого века. В квантовой механике собственные значения и собственные функции некоторых самосопряженных операторов определяют уровни энергии физической системы. В классической линейной волновой теории те же функции являются основным инструментом для описания распространения и рассеяния волн. В тех случаях, когда невозможно получить точное решение задачи, физики обычно применяют теорию возмущений собственных функций дифференциальных операторов в частных производных. Типичным примером является оператор $-\nabla + V(x)$, рассматриваемый как возмущение оператора $-\nabla$; оператор вида

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial}{\partial x_6}\right)^2 + V(x_1, x_2, x_3) + V(x_4, x_5, x_6) + \\ + V(x_1 - x_4, x_2 - x_5, x_3 - x_6)$$

является возмущением оператора

$$(+) \qquad -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - \ldots - \left(\frac{\partial}{\partial x_6}\right)^2.$$

Та же идея используется и в более общих многомерных и бесконечномерных задачах. Невозмущенные операторы $-\nabla$ и $(+)$ имеют непрерывный спектр, покрывающий положительную полуось; строгое математическое решение проблемы возмущения непрерывного спектра отнюдь не просто. Математические результаты, которые мы излагаем, отражают те немногие случаи, в которых возможно строгое обоснование идей, основанных на эмпирических принципах. Дальнейшие ссылки на работы по физике и математике, связанные с этими исследованиями, содержатся в параграфе «Примечания и дополнения» в конце этой главы. Читателю, желающему познакомиться с современным состоянием этого круга вопросов, будут особенно полезны работы Фридрихса [17], Фаддеева [2—4], а также Лакса и Филлипса [2].

1. Спектральные дифференциальные операторы второго порядка

В этом параграфе мы покажем, применяя теорему XVIII.2.34, что оператор, определенный в гильбертовом пространстве формальным дифференциальным оператором τ второго порядка:

$$(1) \qquad \tau = -\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \infty,$$

является спектральным, если коэффициент $q(t)$ достаточно мал на бесконечности. Основная аналитическая часть исследования заключается в получении достаточно точных асимптотических оценок решений уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$; это позволит нам проверить предположения теоремы XVIII.2.34 (применительно к оператору τ) путем прямых вычислений. Такой способ доказательства, достаточно простой в своей основе, требует, однако, довольно много выкладок.

Пусть τ — формальный дифференциальный оператор, заданный формулой (1), и $q \in C^{\infty}[0, \infty)$. Рассмотрим нетривиальное граничное условие в нуле:

$$A(f) = 0. \tag{2}$$

Согласно следствию XIII.2.23, граничное условие (2) можно записать в одном из следующих видов:

$$f(0) = 0, \tag{2a}$$

$$f'(0) + kf(0) = 0. \tag{2b}$$

Пусть T — замкнутый оператор в $L_2(0, \infty)$, определенный с помощью τ и граничных условий (2) (определение XIII.2.17).

В следующей лемме мы налагаем на функцию q из (1) первое ограничение.

1. Лемма. *Пусть функция q в (1) удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^{\infty} |q(t)|\,dt < \infty.$$

Положим $P^+ = \{\mu \mid \operatorname{Im}\mu \geqslant 0\}$, $P_\varepsilon^+ = \{\mu \in P^+ \mid |\mu| > \varepsilon\}$. Тогда уравнение $\tau\sigma = \mu^2\sigma$ имеет решение $\sigma_1(t, \mu)$, определенное при $(t, \mu) \in [0, \infty) \times P_0^+$ и удовлетворяющее следующим условиям:

(i) $\sigma_1(t, \mu) \in C^{\infty}$ *относительно t при $\mu \in P_0^+$;*

(ii) *$\sigma_1(t, \mu)$ и $\sigma_1'(t, \mu)$ аналитичны по μ внутри области P_0^+ и непрерывны по μ при $\mu \in P_0^+$, $0 \leqslant t < \infty$. Кроме того, $\sigma_1(t, \mu)$ удовлетворяет следующим асимптотическим соотношениям:*

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1(t, \mu) \sim e^{it\mu}, \\ &\sigma_1'(t, \mu) \sim i\mu e^{ti\mu}, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\textit{если } t \to \infty, \textit{ равномерно по } \mu \in P_\varepsilon^+,\ \varepsilon > 0, \\ &\textit{а также если } \mu \to \infty, \textit{ оставаясь в } P^+, \textit{ рав-} \\ &\textit{номерно по } t,\ 0 \leqslant t < \infty. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $a \geqslant 0$; определим в B-пространстве $C[a, \infty)$ ограниченных непрерывных функций на $[a, \infty)$ оператор L_μ формулой

$$(L_\mu h)(t) = \frac{1}{2i\mu} \int_t^{\infty} [e^{2i\mu(s-t)} - 1)\, q(s)\, h(s)\, ds, \qquad \mu \in P^+. \tag{3}$$

Ясно, что $|L_\mu| \leqslant |\mu|^{-1} \int\limits_a^\infty |q(s)|\,ds$, $\mu \in P^+$. Кроме того,

$$|(L_\mu h)(t) - (L_\nu h)(t)| \leqslant \frac{1}{|\mu|} |\mu (L_\mu h)(t) - \nu (L_\nu h)(t)| + \\ + \left| \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \right| |\nu (L_\nu h)(t)| \leqslant \\ \leqslant \frac{|h|}{2|\mu|} \int\limits_t^\infty |e^{2i\mu(s-t)} - e^{2i\nu(s-t)}|\, |q(s)|\,ds + \\ + \left| \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \right| |h| \int\limits_a^\infty |q(s)|\,ds.$$

Следовательно, если b выбрано так, что $a < b < \infty$, то

$$|L_\mu - L_\nu| \leqslant \left| \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \right| \int\limits_a^\infty |q(s)|\,ds + \\ + \frac{1}{2|\mu|} \sup_{0 \leqslant r \leqslant b-a} |e^{2i\mu r} - e^{2i\nu r}| \int\limits_a^b |q(s)|\,ds + \frac{1}{|\mu|} \int\limits_b^\infty |q(s)|\,ds.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем число $\mu \neq 0$ из P^+ и столь большое b, что $|\mu|^{-1} \int\limits_b^\infty |q(s)|\,ds < \varepsilon$; из предыдущего неравенства следует, что

$$\varlimsup_{\substack{\nu \to \mu \\ \nu \in P^+}} |L_\nu - L_\mu| \leqslant \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, L_μ непрерывно зависит от μ в равномерной топологии при $\mu \in P^+$, $\mu \neq 0$. Аналогично доказывается, что L_μ аналитична по μ внутри области P^+.

Ясно, что

$$(4) \qquad (L_\mu h)'(t) = -\int\limits_t^\infty e^{2i\mu(s-t)} q(s) h(s)\,ds, \quad h \in C[a, \infty),$$

$$(L_\mu h)''(t) = q(t) h(t) + 2i\mu \int\limits_t^\infty e^{2i\mu(s-t)} q(s) h(s)\,ds, \quad h \in C[a, \infty),$$

так что

$$(5) \qquad (L_\mu h)''(t) + 2i\mu (L_\mu h)'(t) = q(t) h(t), \quad h \in C[a, \infty).$$

Обозначим через 1 функцию, тождественно равную единице, и положим

(6) $$h_\mu = (I - L_\mu)^{-1}\, 1$$

(допуская пока, что написанный здесь обратный оператор существует). Тогда

(7) $$h_\mu = L_\mu h_\mu + 1,$$

так что, в силу соотношения (5), h_μ удовлетворяет дифференциальному уравнению

(8) $$-h''_\mu(t) - 2i\mu h'_\mu(t) + q(t)\, h_\mu(t) = 0,$$

и, следовательно, функция

(9) $$g_\mu(t) = e^{2i\mu t} h_\mu(t)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $\tau g_\mu = \mu^2 g_\mu$.

Построим теперь указанное в лемме решение $\sigma_1(t, \mu)$. Зафиксируем положительное число ε и обозначим через a_ε наименьшее из неотрицательных чисел t, удовлетворяющих условию

(10) $$\varepsilon^{-1} \int_t^\infty |q(s)|\, ds \leqslant \frac{1}{2}.$$

Согласно неравенству, следующему за формулой (3),

$$|L_\mu| \leqslant \frac{1}{|\mu|} \int_{a_\varepsilon}^\infty |q(s)|\, ds \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \mu \in P_\varepsilon^+,$$

в B-пространстве $C[a_\varepsilon, \infty)$. Следовательно, в силу лемм VII.6.1, VII.6.3 и VII.6.4 обратный оператор $(I - L_\mu)^{-1}$ существует, имеет норму < 2, непрерывен по μ при $\mu \in P^+$ и аналитичен по μ внутри области P_ε^+. Поэтому h_μ и g_μ существуют, имеют нормы < 2, непрерывны в P^+ и аналитичны внутри P_ε^+ как функции от μ. Заметим также, что $h_\mu \in C[a, \infty)$ является единственным решением в $C[a, \infty)$ уравнения (7) при $\mu \in P^+$. Определим теперь $\sigma_1(t, \mu)$ как единственное решение уравнения $(\tau - \mu^2)\sigma = 0$, $(t, \mu) \in [0, \infty) \times P_\varepsilon^+$, которое совпадает с $g_\mu(t)$ при $t \geqslant a_\varepsilon$ (следствие XIII.1.5).

Если δ — другое положительное число и $\delta < \varepsilon$, то $a_\delta \geqslant a_\varepsilon$. Пусть $\hat{h}_\mu(t)$, $(t, \mu) \in [a_\delta, \infty) \times P_\delta^+$, — решение уравнения (7) из $C[a_\delta, \infty)$ (как показано выше оно существует). Тогда, в силу единственности решения уравнения (7), $\hat{h}_\mu(t) \equiv h_\mu(t)$, $(t, \mu) \in [a_\delta, \infty) \times P_\varepsilon^+$, и, значит, $e^{i\mu t}\hat{h}_\mu(t) \equiv \sigma_1(t, \mu)$, если $(t, \mu) \in [0, \infty) \times P_\varepsilon^+$. Отсюда следует, что, устремляя ε к нулю, мы получим решение $\sigma(t, \mu)$, определенное на всем множестве $[0, \infty) \times P_0^+$, причем функция $\sigma(t, \mu)$ непрерывна по μ в P_0^+ и аналитична внутри P_0^+.

Осталось доказать, что построенная функция $\sigma_1(t, \mu)$ и ее производная $\sigma_1'(t, \mu)$ удовлетворяют указанным в лемме асимптотическим соотношениям. Взяв $\varepsilon > 0$ и применив (7), получим, что

$$\sigma(t, \mu) e^{-i\mu t} - 1 = h_\mu(t) - 1 = (L_\mu h_\mu)(t), \quad (t, \mu) \in [a, \infty) \times P_\varepsilon^+. \tag{11}$$

Кроме того, согласно равенству (3),

$$|(L_\mu h_\mu)(t)| \leqslant \frac{2}{|\mu|} \int_t^\infty |q(s)|\, ds \to 0, \tag{12}$$

когда t стремится к бесконечности, равномерно по $\mu \in P_\varepsilon^+$. Кроме того,

$$|(L_\mu h_\mu)(t)| \leqslant \frac{2}{|\mu|} \int_0^\infty |q(s)|\, ds \to 0, \tag{13}$$

когда $|\mu| \to \infty$, $\mu \in P^+$, равномерно по $0 \leqslant t < \infty$. Этим доказано асимптотическое соотношение для $\sigma_1(t, \mu)$.

Выведем асимптотическое соотношение для $\sigma_1'(t, \mu)$. Из формул (4) и (7) находим

$$|h_\mu'(t)| = |(L_\mu h_\mu)'(t)| = \left| \int_t^\infty e^{2i\mu(s-t)} q(s) [(L_\mu h_\mu)(s) + 1]\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |L_\mu h_\mu| \int_t^\infty |q(s)|\, ds + \left| \int_t^\infty e^{2i\mu(s-t)} q(s)\, ds \right|.$$

Следовательно,

$$|h_\mu'(t) \leqslant \frac{2Q}{\mu} \int_t^\infty |q(s)|\, ds + \left| \int_t^\infty e^{2i\mu(s-t)} q(s)\, ds \right|, \tag{14}$$

где $Q = \int_0^\infty |q(s)|\, ds$ (здесь использовано полученное выше неравенство $|L_\mu h_\mu| \leqslant 2Q |\mu|^{-1}$).

Покажем, что второе слагаемое в правой части неравенства (14) стремится к нулю, когда $\mu \to \infty$, оставаясь в P^+, равномерно по $0 \leqslant t < \infty$. Пусть $\{q_n\}$ — такая последовательность функций из $C^\infty[0, \infty)$, каждая из которых обращается в нуль вне ограниченного подмножества из $[0, \infty)$, что

$$\int_0^\infty |q_n(t) - q(t)|\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда очевидно, что

$$\int_t^\infty e^{2i\mu(s-t)}q_n(s)\,ds \to \int_t^\infty e^{2i\mu(s-t)}q(s)\,ds$$

равномерно по $\mu \in P^+$ и по t, $0 \leqslant t < \infty$. С другой стороны, интегрируя по частям, получаем для каждого n соотношение

$$\int_t^\infty e^{2i\mu(s-t)}q_n(s)\,ds = -\frac{1}{2i\mu}q_n(t) - \frac{1}{2i\mu}\int_t^\infty e^{2i\mu(s-t)}q_n'(s)\,ds \to 0,$$

когда $|\mu| \to \infty$, $\mu \in P^+$, равномерно по $0 \leqslant t < \infty$. Теперь наше утверждение вытекает из теоремы Мура (лемма I.7.6).

Из формулы (14) следует, что $|h_\mu'(t)| \to 0$ при $|\mu| \to \infty$, $\mu \in P^+$, равномерно по $0 \leqslant t < \infty$. Из формулы (14) видно также, что $|h_\mu'(t)| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $\mu \in P_\varepsilon^+$. Так как в силу (9) $\sigma_1'(t, \mu) = g_\mu'(t) = i\mu e^{i\mu t}h_\mu(t) + e^{i\mu t}h_\mu'(t)$, то $\sigma_1'(t, \mu) \cong g_\mu'(t) \sim i\mu e^{i\mu t}$ при $t \to \infty$, равномерно по $\mu \in P_\varepsilon^+$, а также при $|\mu| \to \infty$, $\mu \in P^+$, равномерно по t, $0 \leqslant t < \infty$, ч. т. д.

Налагая на функцию q более жесткие ограничения, мы получим некоторое уточнение леммы 1:

2. Следствие. *Пусть функция q удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty (1+t)\,|q(t)|\,dt < \infty. \tag{15}$$

Тогда указанное в лемме 1 решение σ_1 можно выбрать так, чтобы оно было определено также при $\mu = 0$, удовлетворяло условиям (i) и (ii) леммы 1 при $\mu \in P^+$, условию $\sigma_1(t, 0) \sim 1$ при $t \to \infty$, а также неравенству

$$|\sigma_1(t, \mu) - e^{i\mu t}| \leqslant K(1+|\mu|)^{-1}\int_t^\infty (1+s)\,|q(s)|\,ds, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{16}$$

при $\mu \in P^+$, где K — постоянная, зависящая только от q.

Доказательство. Возьмем функцию $\varphi(a) = (2ia)^{-1}(e^{2ia} - 1)$. Ясно, что $\varphi(a)$ — целая функция и ее модуль ограничен единицей в верхней полуплоскости P^+. Равенство (3), определяющее оператор L_μ, перепишем в виде

$$(L_\mu h)(t) = \int_t^\infty \varphi(\mu(s-t))(s-t)\,q(s)\,h(s)\,ds. \tag{17}$$

Из этого соотношения ясно, что если $a \geqslant 0$, то норма отображения L_μ: $C[a, \infty) \to C[a, \infty)$ не превосходит $\int_a^\infty (1+s)|q(s)|\,ds$.

Если $a < b < \infty$, то

$$|L_\mu - L_\nu| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant b-a} |\varphi(\mu t) - \varphi(\nu t)| \int_a^b (1+s)|q(s)|\,ds + \\ + \int_b^\infty (1+s)|\varphi(s)|\,ds.$$

Откуда, как и в лемме 1, вытекает, что оператор L_μ непрерывен по $\mu \in P^+$. Первое утверждение леммы теперь выводится так же, как соответствующее утверждение леммы 1; подробное доказательство мы представляем провести читателю. Заметим, что $\sigma_1(t, \mu) = e^{i\mu t} h_\mu(t)$ для любого t, удовлетворяющего условию

$$\int_t^\infty (1+s)|q(s)|\,ds < \frac{1}{2}, \tag{18}$$

где h_μ является (см. (7)) единственным решением интегрального уравнения

$$h_\mu(t) = 1 + \int_t^\infty \varphi(\mu(s-t))(s-t)\,q(s)\,h_\mu(s)\,ds.$$

Поскольку при условии (18) норма отображения L_μ: $C[t, \infty) \to C[t, \infty)$ не превосходит 1/2, мы получаем (см. VII.6.1) неравенство $|h_\mu(t)| \leqslant 2$. Следовательно,

$$|h_\mu(t) - 1| \leqslant 2 \int_t^\infty (1+s)|q(s)|\,ds \tag{19}$$

при условии (18). Аналогично из равенства (17), используя рассуждения из доказательства леммы 1 (см. (11) и (12)), находим, что

$$|h_\mu(t) - 1| \leqslant 2|\mu|^{-1} \int_t^\infty |q(s)|\,ds \leqslant 2|\mu|^{-1} \int_t^\infty (1+s)|q(s)|\,ds \tag{20}$$

при условии (18). Из соотношений (19) и (20) вытекает, что существуют столь большие постоянные A и K_1, что

$$|h_\mu(t) - 1| \leqslant K_1(1+|\mu|)^{-1} \int_t^\infty (1+s)|q(s)|\,ds, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad \mu \in P^+,$$

за исключением тех μ и t, для которых $|\mu| \leqslant A$ и $0 \leqslant t \leqslant A$. Так как продолжение $\sigma_1(t, \mu)$ функции $g_\mu(t)$ на $[0, \infty) \times P^+$ непрерывно относительно μ и t, мы получаем неравенство

$$|\sigma_1(t, \mu) e^{-i\mu t} - 1| \leqslant K(1+|\mu|)^{-1} \int_t^\infty (1+s)|q(s)|\,ds,$$
$$0 \leqslant t < \infty, \quad \mu \in P^+;$$

тем самым доказано второе утверждение леммы. Отсюда сразу следует соотношение $\sigma_1(t, 0) \sim 1$ при $t \to \infty$, ч. т. д.

Для спектрального анализа оператора T нам понадобится также информация о «втором решении» дифференциального уравнения $\tau\sigma = \mu^2\sigma$, т. е. решении, имеющем асимптотику $e^{-i\mu t}$ при $t \to \infty$. Однако, в отличие от σ_1, это решение не определяется однозначно своей асимптотикой, что приводит к некоторым техническим усложнениям при исследовании его асимптотического поведения. По этой причине мы будем устанавливать асимптотические свойства второго решения не сразу, а постепенно — по мере их необходимости для спектрального анализа оператора T.

3. Лемма. *Пусть выполнены предположения леммы* 1. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $P_\varepsilon^+ = \{\mu \mid \operatorname{Im}\mu \geqslant 0, \ |\mu| > \varepsilon\}$. *Тогда уравнение* $\tau\sigma = \mu^2\sigma$ *имеет решение* $\sigma_2(t, \mu)$, *определенное при* $(t, \mu) \in [0, \infty) \times P_\varepsilon^+$ *и обладающее следующими свойствами*:

(i) $\sigma_2(t, \mu)$ *принадлежит классу* C^∞ *относительно* t, $0 \leqslant t < \infty$, $\mu \in P^+$;

(ii) $\sigma_2(t, \mu)$ *аналитична по* μ *внутри* P_ε^+, *а* $\sigma_2(t, \mu)$, $\sigma_2'(t, \mu)$ *непрерывны по* t *и* μ, $\mu \in P_\varepsilon^+$, $t \in [0, \infty)$.

Кроме того, $\sigma_2(t, \mu)$ *удовлетворяет следующим асимптотическим соотношениям*:

(iii) $\sigma_2(t, \mu) \sim e^{-it\mu}$; $\sigma_2'(t, \mu) \sim -ie^{-it\mu}$ *при* $t \to \infty$, *равномерно по* μ *на каждом ограниченном множестве, лежащем внутри* P_ε^+;

(iv) *функция* $e^{it\mu}\sigma_2(t, \mu)$ *ограничена по* t, $0 \leqslant t < \infty$, *равномерно по* μ *на каждом ограниченном множестве из* P_ε^+;

(v) *существует такая непрерывная функция* c, *определенная при вещественных* μ, $\mu \in P_\varepsilon^+$, *что* $\lim\limits_{t\to\infty} |\sigma_2(t, \mu) - e^{-it\mu} - c(\mu) e^{it\mu}| = 0$, μ *вещественно*, $\mu \in P^+$.

Доказательство. Мы поступим так же, как при доказательстве леммы 1. Пусть a столь велико, что

$$\varepsilon^{-1} \int_a^\infty |q(s)|\,ds < \frac{1}{2}.$$

Определим в $C[a, \infty)$ линейный оператор

$$(21)\qquad (K_\mu f)(t)=\frac{1}{2i\mu}\left[\int_a^t e^{-2i\mu(s-t)}q(s)f(s)\,ds+\int_t^\infty q(s)f(s)\,ds\right].$$

Мы получаем, как и в доказательстве леммы 1, что $|K_\mu|<1/2$ при $\mu\in P_\varepsilon^+$ и K_μ аналитична по μ внутри P_ε^+. Из формулы (21) видно, что $(K_\mu f)(t)$ непрерывна по μ, притом равномерно по $\mu\in P_\varepsilon^+$ и по t в каждом конечном отрезке. Согласно лемме VII.6.1, существует оператор $(I-K_\mu)^{-1}$, а по леммам VII.6.3 и VII.6.4 вектор $f_\mu\in C[a, \infty)$, определенный формулой

$$f_\mu=(I-K_\mu)^{-1}1,$$

удовлетворяет неравенству $|f_\mu|\leqslant 2$, $\mu\in P^+$, непрерывен по μ при $\mu\in P_\varepsilon^+$ и аналитичен по μ внутри P_ε^+. Ясно, что

$$(22)\qquad \begin{aligned}(K_\mu f)'(t)&=\int_a^t e^{-2i\mu(s-t)}q(s)f(s)\,ds, \quad f\in C[a, \infty),\\ (K_\mu f)''(t)&=q(t)f(t)+2i\mu\int_a^t e^{-2i\mu(s-t)}q(s)f(s)\,ds, \quad f\in C[a, \infty),\end{aligned}$$

откуда

$$(K_\mu f)''(t)-2i\mu(K_\mu f)'(t)=q(t)f(t).$$

Так как f_μ удовлетворяет уравнению

$$(23)\qquad f_\mu=K_\mu f_\mu+1,$$

то f_μ удовлетворяет также уравнению

$$-f_\mu''(t)+2i\mu f_\mu'(t)+q(t)f_\mu(t)=0,$$

и, следовательно, функция

$$(24)\qquad \hat{g}_\mu(t)=e^{-i\mu t}f_\mu(t)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $\tau\hat{g}_\mu=\tau^2\hat{g}_\mu$. В силу (9) и леммы VII.6.1 $|f_\mu(t)|\leqslant 2$, $a\leqslant t<\infty$. Следовательно, согласно равенству (21),

$$(25)\qquad |(K_\mu f_\mu)(t)|\leqslant$$
$$\leqslant|\mu|^{-1}\left[\int_a^t e^{2\delta(s-t)}|q(s)|\,ds+\int_t^\infty|q(s)|\,ds\right], \quad a\leqslant t<\infty, \quad \operatorname{Im}\mu\geqslant\delta.$$

Из (23) и (24) вытекает, что

$$(26)\qquad \begin{cases} f_\mu(t) \sim 1 \text{ при } t \to \infty \\ \qquad\qquad \text{равномерно по} \quad \mu \in P_\varepsilon^+, \ \operatorname{Im}\mu \geqslant \delta > 0, \\ \hat{g}_\mu(t) \sim e^{-i\mu t} \text{ при } t \to \infty \\ \qquad\qquad \text{равномерно по} \quad \mu \in P_\varepsilon^+, \ \operatorname{Im}\mu \geqslant \delta > 0. \end{cases}$$

Применяя равенства (23), (22) и теорему III.6.16, находим, что

$$(27)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} |f'_\mu(t)| \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_a^t e^{2\delta(s-t)} |f_\mu(s)| |q(s)| \, ds = 0$$

равномерно по $\mu \in P_\varepsilon^+$, $\operatorname{Im}\mu \geqslant \delta > 0$. Так как, согласно (24),

$$\hat{g}_\mu(t) = -i\mu e^{-i\mu t} f_\mu(t) + e^{-i\mu t} f'_\mu(t),$$

то из (26) и (27) вытекает, что

$$(28)\qquad \hat{g}'_\mu(t) \sim -i\mu e^{-i\mu t} \quad \text{при} \quad t \to \infty \text{ равномерно по } \mu \in P_\varepsilon^+, \ \operatorname{Im}\mu \geqslant \delta > 0.$$

Поскольку $|f_\mu(t)| \leqslant 2$, $a \leqslant t < \infty$, то $|e^{it\mu}\hat{g}_\mu(t)| \leqslant 2$, $\mu \in P_\varepsilon^+$, $a \leqslant t < \infty$. Из (23), (21) и упомянутой теоремы Лебега следует, что

$$(29)\qquad \lim_{t\to\infty} \left| f_\mu(t) - 1 - (2i\mu)^{-1} e^{2i\mu t} \int_a^\infty e^{-2i\mu s} q(s) f_\mu(s) \, ds \right| =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left| \frac{1}{2i\mu} \int_t^\infty [1 - e^{-2i\mu(s-t)}] \, q(s) f_\mu(s) \, ds \right| = 0$$

для любого $\mu \in P_\varepsilon^+$. Рассмотрим функцию

$$(30)\qquad c(\mu) = (2i\mu)^{-1} \int_a^\infty e^{-2i\mu s} q(s) f_\mu(s) \, ds, \quad \mu \ \text{ вещественно}, \quad \mu \in P_\varepsilon^+.$$

Так как f_μ непрерывна по μ при $\mu \in P_\varepsilon^+$, то $c(\mu)$ непрерывна для вещественных $\mu \in P_\varepsilon^+$ по теореме Лебега III.6.16. В силу (29) и (24)

$$(31)\qquad \lim_{t\to\infty} |\hat{g}_\mu(t) - e^{-it\mu} + c(\mu) e^{it\mu}| = 0$$

для вещественных $\mu \in P_\varepsilon^+$.

Пусть $\sigma_2(t, \mu)$ — такое единственное решение уравнения $\tau\sigma = \mu^2\sigma$ на $[0, \infty)$, что $\sigma_2(t, \mu) = \hat{g}_\mu(t)$, $a \leqslant t < \infty$. Используя следствие XIII.1.5, мы видим из доказанного выше, что $\sigma_2(t, \mu)$ удовлетворяет всем условиям леммы (см. соответствующее рассуждение в доказательстве леммы 1), ч. т. д.

Леммы 1 и 3 позволяют выяснить некоторые спектральные свойства оператора T.

4. Лемма. *Пусть выполнены предположения леммы* 1. *Пусть* $A(f)=0$ — *граничное условие типа* (2), *а* σ_1 — *функция, определенная в лемме* 1. *Для каждого комплексного* λ *обозначим через* $\mu=\mu(\lambda)$ — *единственный квадратный корень из* λ, *лежащий в* $P^+=\{\mu \mid \operatorname{Im}\mu \geqslant 0\}$ *и не лежащий на отрицательной вещественной оси. Положим* $A(\lambda)=A(\sigma_1(\cdot, \mu(\lambda)))$. *Тогда*

(i) $A(\lambda)$ *аналитична для ненулевых* λ, *лежащих в дополнении к положительной вещественной полуоси* $R=\{\lambda \mid 0<\lambda<\infty\}$, *и имеет непрерывные предельные значения* $A^+(\lambda)$, $A^-(\lambda)$, *когда* λ *стремится к* R *сверху и снизу;*

(ii) $A(\lambda)\sim 1$ *при* $|\lambda|\to\infty$, *если граничное условие имеет вид* (2a); $A(\lambda)\sim i\mu(\lambda)$ *при* $|\lambda|\to\infty$, *если граничное условие имеет вид* (2b);

(iii) *если* $\lambda_0\neq 0$, $\lambda_0\notin R$, *то* $\lambda_0\in\sigma(T)$ *тогда и только тогда, когда* $A(\lambda_0)=0$; *в этом случае* λ_0 *является изолированной точкой в* $\sigma(T)$, *принадлежит точечному спектру оператора* T *и является полюсом его резольвенты.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) вытекают из леммы 1 и формул (2a), (2b). Пусть $\lambda_0\notin R\cup\{0\}$. Если $A(\lambda_0)=0$, то $\sigma_1(\cdot, \mu(\lambda_0))$ есть собственный вектор T, соответствующий собственному значению λ_0, так что λ_0 принадлежит точечному спектру оператора T. С другой стороны, если $v(\cdot, \mu(\lambda_0))$ — собственный вектор оператора T, соответствующий собственному значению $\lambda_0\notin R\cup\{0\}$, то функция v отличается от $\sigma_1(\cdot, \mu(\lambda_0))$ скалярным множителем, так как по лемме 3 второе решение уравнения $(\tau-\lambda_0)\sigma=0$, линейно независимое с $\sigma_1(t, \mu(\lambda_0))$, растет экспоненциально при $t\to\infty$. Следовательно, $A(\lambda_0)=0$. Мы видим, что λ_0 принадлежит точечному спектру оператора T в том и только в том случае, если $A(\lambda_0)=0$. Осталось доказать, что та часть множества $\sigma(T)$, которая лежит в дополнении к множеству $R\cup\{0\}$, состоит из изолированных точек, каждая из которых является нулем функции $A(\lambda)$ и полюсом резольвенты.

Возьмем произвольное $\varepsilon\geqslant 0$ и такое λ, что $|\lambda|>\varepsilon^2$, $\lambda\notin R$, $A(\lambda)\neq 0$. Для краткости будем писать μ вместо $\mu(\lambda)$. Определим интегральный оператор

$$R(\lambda)f(s)=\int_0^\infty R(s, t; \lambda)f(t)\,dt, \quad f\in L_2(0, \infty),$$

где

(32) $\quad R(s, t, \lambda)=$

$$=\begin{cases}(2i\mu A(\lambda))^{-1}\{A(\lambda)\sigma_2(s, \mu)-B(\lambda)\sigma_1(s, \mu)\}\sigma_1(t, \mu), & s<t,\\ (2i\mu A(\lambda))^{-1}\{A(\lambda)\sigma_2(t, \mu)-B(\lambda)\sigma_1(t, \mu)\}\sigma_1(s, \mu), & s\geqslant t.\end{cases}$$

Здесь $B(\lambda)=A(\sigma_2(\cdot,\mu)$, а $\sigma_2(\cdot,\mu)$ — функция, указанная в лемме 3. Заметим, что $R(s, t; \mu)=R(t, s; \mu)$. Будем считать на время доказанным, что $\sup\limits_{0\leqslant s<\infty}\int\limits_0^\infty |R(s, t; \lambda)|\,dt<\infty$. Тогда для любой функции $f\in L_2(0, \infty)$ получаем

$$\begin{aligned}|R(\lambda)f|_2^2&\leqslant\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_0^\infty|R(s, t; \lambda)||f(t)|\,dt\right\}^2 ds\leqslant\\ &\leqslant\int\limits_0^\infty\left(\left\{\int\limits_0^\infty|R(s, t; \lambda)|\,dt\right\}\left\{\int\limits_0^\infty|R(s, t; \lambda)||f(t)|^2\,dt\right\}\right)ds\leqslant\\ &\leqslant\left\{\sup_{0\leqslant s<\infty}\int\limits_0^\infty|R(s, t; \lambda)|\,dt\right\}\left\{\int\limits_0^\infty|R(s, t; \lambda)|\,ds\right\}|f(t)|^2\,dt\leqslant\\ &\leqslant\sup_{0\leqslant s<\infty}\left\{\int\limits_0^\infty|R(s, t; \lambda)|\,dt\right\}^2|f|_2^2;\end{aligned}$$

здесь использованы неравенства Гёльдера, теорема Фубини и симметричность $R(s, t; \lambda)$. Отсюда следует, согласно теореме Фубини, что функция

$$\int\limits_0^\infty R(s, t; \lambda)f(t)\,dt$$

существует для почти всех s и принадлежит $L_2(0, \infty)$. Следовательно, интегральный оператор $R(\lambda)$, ядро которого определено формулой (32), отображает $L_2(0, \infty)$ в $L_2(0, \infty)$, и его норма оценивается неравенством

$$|R(\lambda)|\leqslant\sup_{0\leqslant s<\infty}\int\limits_0^\infty|R(s, t; \lambda)|\,dt. \tag{33}$$

Покажем, что эта верхняя грань конечна. Пусть Λ — ограниченное множество в области $\{\lambda\mid|\lambda|>\varepsilon^2\}$. По леммам 1 и 3 существует такая конечная постоянная K, что

$$|\sigma_1(t, \mu)|\leqslant Ke^{-t\operatorname{Im}\mu},\quad|\sigma_2(t, \mu)|\leqslant Ke^{t\operatorname{Im}\mu},\quad 0\leqslant t<\infty,\quad\lambda\in\Lambda. \tag{34}$$

Отсюда

$$|\sigma_1(t, \mu)|\int\limits_0^t|\sigma_2(s, \mu)|\,ds\leqslant K^2e^{-t\operatorname{Im}\mu}\int\limits_0^t e^{s\operatorname{Im}\mu}\,ds\leqslant\frac{K^2}{\operatorname{Im}\mu} \tag{35}$$

и, аналогично,

$$(36)\qquad |\sigma_2(t, \mu)| \int_t^\infty |\sigma_1(s, \mu)|\, ds \leqslant \frac{K^2}{\operatorname{Im}\mu}.$$

Положим

$$(37)\qquad C_1(\lambda) = \max\{|2\mu A(\lambda)|^{-1} |B(\lambda)|,\ |2\mu|^{-1}\},$$

а через $C_2(\lambda)$ обозначим наименьшую верхнюю границу функций

$$|\sigma_1(t, \mu)| \int_0^t |\sigma_2(s, \mu)|\, ds \ \text{ и } \ |\sigma_2(t, \mu)| \int_t^\infty |\sigma_1(s, \mu)|\, ds, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Из (35) и (36) следует, что функция $|\operatorname{Im}\mu|\, C_2(\lambda)$ равномерно ограничена на любом компактном множестве из P_ε^+ и, в частности, $C_2(\lambda)$ ограничена на любом компактном множестве, лежащем внутри P_ε^+. Отсюда и из (32), (33) сразу же вытекает, что норма $R(\lambda)$ ограничена числом $4C_1(\lambda)\, C_2(\lambda)$. Используя леммы 1 и 3, получаем, что резольвента $R(\lambda)$ определена и аналитична по λ на множестве $\{\lambda \mid \lambda \notin R,\ |\lambda| > \varepsilon^2,\ A(\lambda) \neq 0\}$. Кроме того, в любой точке $\lambda_0 \notin R$, $|\lambda_0| > \varepsilon^2$, в которой $A(\lambda_0) = 0$, $R(\lambda)$ имеет полюс, порядок которого не превосходит порядка нуля функции $A(\lambda)$ в точке λ_0. Наконец, если $0 < \lambda_1 < \infty$ и $A^+(\lambda_1) \neq 0$, $A^-(\lambda_1) \neq 0$, то функция $|\operatorname{Im}\lambda|\, |R(\lambda)|$ ограничена на достаточно коротком вертикальном отрезке прямой, проходящей через точку λ_1. Эти утверждения сразу же следуют из (32), (33), (34), а также лемм 1 и 3; подробное доказательство мы предоставляем читателю.

Покажем теперь, что если λ удовлетворяет условиям $\lambda \notin R$, $|\lambda| > \varepsilon^2$ и $A(\lambda) \neq 0$, то в точке λ резольвента $R(\lambda; T)$ оператора T существует и совпадает с $R(\lambda)$. Таким образом, будет доказано утверждение (iii) леммы, а потому и вся лемма.

Пусть функция f непрерывна на $[0, \infty)$ и равна нулю вне ограниченного множества. Поскольку функция $R(s, t; \lambda)$ непрерывна при $s = t$, имеет место равенство

$$(R(\lambda) f)'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} R(s, t; \lambda) f(t)\, dt.$$

Но так как функция $\partial/\partial s\,[R(s, t; \lambda)]$ имеет скачок при $s = t$, то

$$(R(\lambda) f)'' = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 R(s, t; \lambda) f(t)\, dt - \frac{1}{2i\mu} W(\mu, s) f(s),$$

где $-(1/2i\mu) W(\mu, s)$ есть скачок

$$(\partial R/\partial s)(s, s - 0) - (\partial R/\partial s)(s, s + 0)$$

первой частной производной $\partial R/\partial s$ функции R. Из (32) следует, что $W(\mu, s)$ есть вронскиан

$$W(\mu, s) = \sigma_1(s, \mu)\,\sigma_2'(s, \mu) - \sigma_2(s, \mu)\,\sigma_1'(s, \mu).$$

Вронскиан двух решений уравнения $\tau\sigma = \mu^2\sigma$ не зависит от s, и, согласно леммам 1 и 3,

$$\sigma_1(s, \mu) \sim e^{i\mu s}, \qquad \sigma_1'(s, \mu) \sim i\mu e^{i\mu s},$$
$$\sigma_2(s, \mu) \sim e^{-i\mu s}, \qquad \sigma_2'(s, \mu) \sim -i\mu e^{-i\mu s}.$$

Следовательно, $W(\mu) = -2i\mu$. Таким образом,

$$(R(\lambda) f)''(s) = \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 R(s, t; \lambda) f(t)\,dt + f(s), \tag{38}$$

так что $R(\lambda) f$ есть функция из $L_2(0, \infty)$, имеющая непрерывные производные первого и второго порядка. Используя (38) и определение $R(\lambda)$, находим

$$(\lambda - \tau)(R(\lambda) f)(s) = \int_0^\infty \left(\lambda - \frac{\partial^2}{\partial s^2} - q(s)\right) R(s, t; \lambda) f(t)\,dt + f(s).$$

Так как, согласно равенству (32), мы имеем

$$\left(\lambda - \frac{\partial^2}{\partial s^2} - q(s)\right) R(s, t; \lambda) = 0,$$

то $(\lambda - \tau)(R(\lambda) f)(s) = f(s)$. Поэтому $R(\lambda) f \in \mathfrak{D}(\lambda I - T_1(\tau)) = \mathfrak{D}(T_1(\tau))$. Кроме того, используя (32), получаем

$$(R(\lambda) f)(0) = \frac{1}{2i\mu A(\lambda)} \{A(\lambda)\,\sigma_2(0, \mu) - B(\lambda)\,\sigma_1(0, \mu)\} \int_0^\infty f(t)\,\sigma_1(t, \mu)\,dt$$

и

$$(R(\lambda) f)'(0) = \frac{1}{2i\mu A(\lambda)} \{A(\lambda)\,\sigma_2'(0, \mu) - B(\lambda)\,\sigma_1'(0, \mu)\} \int_0^\infty f(t)\,\sigma_1(t, \mu)\,dt,$$

так что

$$A(R(\lambda) f) = \\ = \frac{1}{2i\mu A(\lambda)} \{A(\lambda)\,A(\sigma_2(\cdot, \mu)) - B(\lambda)\,A(\sigma_1(\cdot, \mu))\} \int_0^\infty f(t)\,\sigma_1(t, \mu)\,dt = \\ = \frac{1}{2i\mu A(\lambda)} \{A(\lambda)\,B(\lambda) - B(\lambda)\,A(\lambda)\} \int_0^\infty f(t)\,\sigma_1(t, \mu)\,dt = 0.$$

Следовательно, $R(\lambda) f \in \mathfrak{D}(T)$ для всех непрерывных функций f, равных нулю вне ограниченного подмножества из $[0, \infty)$. Так как T замкнут, то $R(\lambda) f \in \mathfrak{D}(T)$ и $(\lambda I - T) R(\lambda) f = f$ для $f \in L_2(0, \infty)$.

Пусть теперь $f \in \mathfrak{D}(T)$, $A(\lambda) \neq 0$, $\lambda \notin R$. Рассмотрим функцию $g = R(\lambda)(\lambda I - T) f$. Тогда $g \in \mathfrak{D}(T)$ и

$$(\lambda I - T) g = (\lambda I - T) R(\lambda)(\lambda I - T) f = (\lambda I - T) f.$$

Так как $A(\lambda) \neq 0$, то λ не принадлежит точечному спектру оператора T. Следовательно, $f = g$. Таким образом, $f = R(\lambda)(\lambda I - T) f$ для любой функции $f \in \mathfrak{D}(T)$. Итак, если $\lambda \in R$, $|\lambda| > \varepsilon^2$ и $A(\lambda) \neq 0$, то оператор $(\lambda I - T)^{-1} = R(\lambda; T)$ существует и равен $R(\lambda)$. Тем самым доказательство леммы завершено, ч. т. д.

5. Следствие. *Пусть выполнены предположения леммы* 4 *и* $0 < \lambda_1 < \infty$. *Предположим, в обозначениях леммы* 4, *что* $A^+(\lambda_1) \neq 0$, $A^-(\lambda_1) \neq 0$. *Тогда для всех* $\lambda \neq \lambda_1$, *лежащих на достаточно коротком вертикальном отрезке, проходящем через точку* λ_1, *существует резольвента* $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ *и функция* $|\operatorname{Im} \lambda| \, |R(\lambda; T)|$ *ограничена.*

Напомним, что в лемме 4 мы построили ядро $R(s, t; \lambda)$ резольвенты $R(\lambda; T)$ с помощью двух решений $\sigma_1(t, \lambda)$ и $\sigma_2(t, \lambda)$. Заметим при этом, что указанное ранее «второе решение» $\sigma_2(t, \lambda)$, построенное в лемме 3, можно заменить любым решением с асимптотикой $\sim e^{-i\lambda t}$ при $t \to \infty$. Выбирая надлежащим образом это второе решение, мы сможем получить необходимые свойства резольвенты. В следующей лемме эти свойства сформулированы в удобном для последующего изложения виде.

6. Следствие. *Пусть* $A(\lambda)$ *и* $\mu(\lambda)$ — *функции, определенные в лемме* 4, *и пусть* $\lambda \notin R$, $\lambda \neq 0$, $A(\lambda) \neq 0$, *так что* $\lambda \notin \sigma(T)$. *Если* σ — *произвольное решение уравнения* $\tau\sigma = \lambda\sigma$, *удовлетворяющее асимптотическому соотношению* $\sigma(t, \mu(\lambda)) \sim e^{-i\mu(\lambda)t}$ *при* $t \to \infty$, *и* $B(\lambda) = A(\sigma(\cdot, \mu(\lambda)))$, *то* $R(\lambda; T)$ — *интегральный оператор с ядром*

$$R(s, t; \lambda) = \begin{cases} (2i\mu(\lambda) A(\lambda))^{-1} \{A(\lambda) \sigma(s, \mu(\lambda)) - \\ \qquad - B(\lambda) \sigma_1(s, \mu(\lambda))\} \sigma_1(t, \mu(\lambda)), & s < t, \\ (2i\mu(\lambda) A(\lambda))^{-1} \{A(\lambda) \sigma(t, \mu(\lambda)) - \\ \qquad - B(\lambda) \sigma_1(t, \mu(\lambda))\} \sigma_1(s, \mu(\lambda)), & s \geq t. \end{cases}$$

7. Лемма. *Пусть выполнены предположения следствия* 2 *и* $\sigma_1(t, \lambda)$, $A^+(\lambda)$ *и* $A^-(\lambda)$ — *функции, указанные в лемме* 1, *следствии* 2 *и лемме* 4. *Тогда*

(i) $A^+(\lambda)$ *и* $A^-(\lambda)$ *непрерывны при* $\lambda \in [0, \infty]$;

(ii) $A^+(\lambda) \sim +A^-(\lambda)$ *при* $\lambda \to \infty$, *если граничное условие имеет вид* (2a), *и* $A^+(\lambda) \sim -A^-(\lambda)$, *если граничное условие имеет вид* (2b).

Если, кроме того, $A^+(\lambda) \neq 0$ и $A^-(\lambda) \neq 0$ для всех $0 \leqslant \lambda < \infty$, то

(iii) $\sigma(T)$ *есть объединение множества* $\{\lambda \mid 0 \leqslant \lambda < \infty\}$ *и конечного множества точек* λ_0, *не принадлежащих этому множеству, каждая из которых является полюсом резольвенты* $R(\lambda; T)$, *а соответствующий ей проектор* $E(\lambda_0; T)$ *конечномерен*;

(iv) *для любой пары функций* $f, g \in C[0, \infty)$, *обращающихся в нуль вне ограниченного множества, и любого* $\lambda > 0$ *пределы*

$$B^+(f, g, \lambda) = \lim_{\delta \to 0+} (R(\lambda + i\delta; T) f, g)$$

и

$$B^-(f, g, \lambda) = \lim_{\delta \to 0-} (R(\lambda - i\delta; T) f, g)$$

существуют и могут быть выражены следующими формулами:

$$B^+(f, g, \lambda) = (2i\mu(\lambda) A^+(\lambda))^{-1} \iint\limits_{0<s<t<\infty} \{A^+(\lambda)\sigma_1(s, -\mu(\lambda)) -$$
$$- A^-(\lambda)\sigma_1(s, \mu(\lambda))\}\sigma_1(t, \mu(\lambda)) f(t) g(s)\, dt\, ds +$$
$$+ (2i\mu(\lambda) A^+(\lambda))^{-1} \iint\limits_{0<t<s<\infty} \{A^+(\lambda)\sigma_1(t, -\mu(\lambda)) -$$
$$- A^-(\lambda)\sigma_1(t, \mu(\lambda))\}\sigma_1(s, \mu(\lambda)) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds;$$
$$B^-(f, g, \lambda) = -(2i\mu(\lambda) A^-(\lambda))^{-1} \iint\limits_{0<s<t<\infty} \{A^-(\lambda)\sigma_1(s, \mu(\lambda)) -$$
$$- A^+(\lambda)\sigma_1(s, -\mu(\lambda))\}\sigma_1(t, -\mu(\lambda)) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds -$$
$$- (2i\mu(\lambda) A^-(\lambda))^{-1} \iint\limits_{0<t<s<\infty} \{A^-(\lambda)\sigma_1(t, \mu(\lambda)) -$$
$$- A^+(\lambda)\sigma_1(t, -\mu(\lambda))\}\sigma_1(s, -\mu(\lambda)) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds.$$

Доказательство. Из леммы 4 и следствия 2 видно, что $A^+(\lambda) = A(\sigma_1(\cdot, \mu(\lambda))$ и $A^-(\lambda) = A(\sigma_1(\cdot, -\mu(\lambda)))$ при $0 \leqslant \lambda < \infty$. Теперь утверждения (i) и (ii) сразу же вытекают из леммы 1(ii) и леммы 4(ii) (см. формулы (2a) и (2b)).

Предположим теперь дополнительно, что $A^+(\lambda) \neq 0$, $A^-(\lambda) \neq 0$ при $0 \leqslant \lambda < \infty$. Согласно леммам 1 и 3, уравнение $\tau\sigma = \lambda\sigma$ не имеет решений из $L_2(0, \infty)$ при $0 < \lambda < \infty$. Из леммы XIII.3.1 вытекает, что если $0 < \lambda < \infty$, то λ принадлежит спектру $\sigma(T)$. Следовательно, по лемме 4(iii) $\sigma(T)$ является объединением полуоси $[0, \infty)$ и множества Z изолированных точек, лежащих в дополнении к вещественной положительной полуоси. Более того, каждая точка из Z есть полюс резольвенты оператора T и нуль функции $A(\lambda)$. Так как $A(\lambda) \sim 1$ или $A(\lambda) \sim \mu(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$, то множество Z

ограничено. Кроме того, поскольку $A^+(\lambda) \neq 0$, $A^-(\lambda) \neq 0$ при $0 \leqslant \lambda < \infty$, множество Z не имеет предельных точек на вещественной оси. Следовательно, оно конечно. Возьмем точку $\lambda_0 \in Z$ и через ν_0 обозначим порядок λ_0 как полюса резольвенты. В силу теорем VII.3.18 и VIII.3.24, каждая функция $f \in E(\lambda_0; T) L_2(0, \infty)$ удовлетворяет уравнению $(T - \lambda_0 I)^{\nu_0} f = 0$. Согласно теореме XIII.1.3 и следствию XIII.1.4, область значений проектора $E(\lambda; T)$ имеет размерность, не превосходящую ν_0. (Замечание: нетрудно доказать, что эта размерность равна ν_0.)

Осталось проверить утверждение (iv). Пусть f и g — функции из $C[0, \infty)$, равные нулю вне ограниченного множества. При $|\operatorname{Im} \eta| > 0$ положим $B(\eta) = A(\sigma_2(\cdot, \mu(\eta)))$, где σ_2 — функция из леммы 3. Если $\lambda > 0$ и $\delta > 0$, то, согласно следствию 6,

$$
\begin{aligned}
(R(\lambda + i\delta) f, g) = \\
&= (2i\mu(\lambda + i\delta) A(\lambda + i\delta))^{-1} \iint\limits_{0<s<t<\infty} \{A(\lambda + i\delta)\sigma_2(s, \mu(\lambda + i\delta)) - \\
&\quad - B(\lambda + i\delta)\sigma_1(s, \mu(\lambda + i\delta))\} \sigma_1(t, \mu(\lambda + i\delta)) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds + \\
&\quad + (2i\mu(\lambda + i\delta) A(\lambda + i\delta)^{-1} \iint\limits_{0<t<s<\infty} \{A(\lambda + i\delta)\sigma_2(t, \mu(\lambda + i\delta)) - \\
&\quad - B(\lambda + i\delta)\sigma_1(t, \mu(\lambda + i\delta))\} \sigma_1(s, \mu(\lambda + i\delta)) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds.
\end{aligned}
$$

В силу леммы 3(ii), $B(\lambda + i\delta)$ имеет предел $B^+(\lambda)$ при $\delta \to 0$. Отсюда следует, что предел $B^+(f, g, \lambda)$, указанный в утверждении (iv) леммы, существует и имеет вид

$$
\begin{aligned}
(39) \quad B^+(f, g, \lambda) &= (2i\mu(\lambda) A^+(\lambda))^{-1} \iint\limits_{0<s<t<\infty} \{A^+(\lambda)\sigma_2(s, \mu(\lambda)) - \\
&\quad - B^+(\lambda)\sigma_1(s, \mu(\lambda))\} \sigma_1(t, \mu(\delta)) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds + \\
&\quad + (2i\mu(\lambda) A^+(\lambda))^{-1} \iint\limits_{0<t<s<\infty} \{A^+(\lambda)\sigma_2(t, \mu(\lambda)) - \\
&\quad - B^+(\lambda)\sigma_1(t, \mu(\lambda))\} \sigma_1(s, \mu(\lambda)) f(t) \overline{g(s)}\, dt\, ds.
\end{aligned}
$$

Согласно лемме 3, функция $\sigma_2 = \sigma_2(t, \mu(\lambda))$ имеет при вещественных λ такую же асимптотику, как и линейная комбинация $\sigma_1(t, -\mu(\lambda)) + c(\mu(\lambda))\sigma_1(t, \mu(\lambda))$ решений $\hat{\sigma}_1 = \sigma_1(t, -\mu(\lambda))$ и $\sigma_1 = \sigma_1(t, \mu(\lambda))$ уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$. С другой стороны, два эти решения линейно независимы, и, следовательно, $\sigma_2 = a\hat{\sigma}_1 + b\sigma_1$. Из леммы 1 видно, что последняя линейная комбинация может иметь указанную асимптотику, лишь если $a = 1$, $b = c(\mu(\lambda))$. Итак,

$$
\sigma_2(t, \mu(\lambda)) = \sigma_1(t, -\mu(\lambda)) + c(\mu(\lambda))\sigma_1(t, \mu(\lambda)).
$$

Таким образом, $B^+(\lambda) = A^-(\lambda) + c(\mu(\lambda)) A^+(\lambda)$ и

$$A^+(\lambda)\sigma_2(s, \mu(\lambda)) - B^+(\lambda)\sigma_1(s, \mu(\lambda)) = \\ = A^+(\lambda)\sigma_1(s, -\mu(\lambda)) - A^-(\lambda)\sigma_1(s, \mu(\lambda)).$$

Теперь утверждение (iv) относительно $B^+(f, g, \lambda)$ становится очевидным. Аналогично доказывается утверждение (iv) относительно $B^-(f, g, \lambda)$, ч. т. д.

8. Лемма. *Пусть выполнены предположения следствия* 2. *Тогда существует такое решение* $\sigma_3(t, \mu)$ *уравнения* $\tau\sigma = \mu^2\sigma$, *определенное при* $0 \leqslant t < \infty$ *и при всех достаточно малых* $\mu \in P^+$, *что* σ_3 *и* σ_3' *непрерывны по* t *и* μ *при* $0 \leqslant t < \infty$ *и достаточно малых* μ, *причем*

$$\sigma_3(t, \mu) \sim e^{-it\mu}, \qquad \sigma_3'(t, \mu) \sim -i\mu e^{-it\mu},$$

когда $t \to \infty$ *для всех достаточно малых* $|\mu|$, $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, $\mu \in P^+$.

Доказательство. Пусть σ_1 — функция из следствия 2. Тогда, согласно этому следствию, $\sigma_1(t, 0) \sim 1$ при $t \to \infty$. Выберем такое t_0, что $\sigma_1(t_0, 0) \neq 0$. Так как $\sigma_1(t, \mu)$ непрерывна по t и μ (следствие 2), то $\sigma_1(t_0, \mu) \neq 0$ для достаточно малых $\mu \in P^+$. Пусть $\hat{\sigma}_3(t, \mu)$ — единственное решение уравнения $\tau\sigma = \mu^2\sigma$, удовлетворяющее условиям $\hat{\sigma}_3(t_0, \mu) = 0$ и $\hat{\sigma}_3'(t_0, \mu) = \sigma_1(t_0, \mu)^{-1}$. Ясно, что вронскиан решений $\hat{\sigma}_3$ и σ_1 равен 1. В силу следствия XIII.1.5 $\hat{\sigma}_3(t, \mu)$ непрерывно по t и μ, если $0 \leqslant t < \infty$ и $\mu \in P^+$ достаточно мало. Ясно, что функции $\hat{\sigma}_3$ и σ_1 линейно независимы. Если $\mu > 0$, то по лемме 3 уравнение $\tau\sigma = \mu^2\sigma$ имеет такое решение $\sigma_2(t, \mu)$, что $\sigma_2(t, \mu) \sim e^{-it\mu}$ при $t \to \infty$, $\sigma_2'(t, \mu) \sim -i\mu e^{-it\mu}$ при $t \to \infty$. Тогда найдутся такие функции $a(\mu)$, $b(\mu)$, что $\hat{\sigma}_3(t, \mu) = a(\mu)\sigma_1(t, \mu) + b(\mu)\sigma_2(t, \mu)$. Пусть $\operatorname{Im}\mu > 0$; тогда из асимптотического поведения функции σ_2 и неравенства $b(\mu) \neq 0$ (напомним, что $\hat{\sigma}_3$ и σ_1 линейно независимы) следует, что $\hat{\sigma}_3(t, \mu) \sim b(\mu) e^{it\mu}$ и $\hat{\sigma}_3'(t, \mu) \sim -i\mu b(\mu) e^{-it\mu}$ при $t \to \infty$. Так как вронскиан

$$W(t, \mu) = \hat{\sigma}_3'(t, \mu)\sigma_1(t, \mu) - \hat{\sigma}_3(t, \mu)\sigma_1'(t, \mu)$$

не зависит от t и $W(t, \mu) \sim -2i\mu b(\mu)$, то

$$1 = W(t_0, \mu) = -2i\mu b(\mu),$$

откуда $b(\mu) = -(2i\mu)^{-1}$. Таким образом, функция $\sigma_3(t, \mu(\lambda)) = -2i\mu\hat{\sigma}_3(t, \mu(\lambda))$ удовлетворяет всем требованиям леммы, ч. т. д.

9. Следствие. *Пусть выполнены предположения леммы* 7 *и, в частности,* $A^+(\lambda) \neq 0$, $A^-(\lambda) \neq 0$ *при* $0 \leqslant \lambda < \infty$. *Пусть* f *и* g — *функции из* $C[0, \infty)$, *обращающиеся в нуль вне ограниченного мно-*

жества. Тогда функция $(R(\lambda; T) f, g)$ *допускает непрерывное продолжение на окрестность точки* $\lambda = 0$ *с разрезом вдоль полуоси* $[0, \infty)$, *и это продолжение удовлетворяет оценке*

$$|(R(\lambda; T) f, g)| = O(|\lambda|^{-1})$$

при $|\lambda| \to 0$.

Доказательство. Пусть σ_3 — функция из предыдущей леммы. Положим $A(\lambda) = A(\sigma_1(\cdot, \mu(\lambda)))$, $B(\lambda) = A(\sigma_3(\cdot, \mu(\lambda)))$ и представим $R(\lambda; T)$ в виде интегрального оператора с ядром, указанным в следствии 6, используя σ_3 в качестве функции σ из этого следствия. Тогда $A(\lambda)^{-1}$, $B(\lambda)^{-1}$ ограничены для невещественных λ из окрестности $\lambda = 0$, и нужная оценка вытекает из формулы для $(R(\lambda; T) f, g)$, ч. т. д.

10. Лемма. *Пусть выполнены предположения леммы 3. Тогда существует такое решение* $\sigma_4(t, \mu)$ *уравнения* $\tau\sigma = \mu^2\sigma$, *которое определено при* $0 \leqslant t < \infty$ *и всех таких* $\mu \in P^+$, *что модуль* $|\mu|$ *достаточно велик, и удовлетворяет асимптотическим соотношениям*

$$\sigma_4(t, \mu) \sim e^{-it\mu}, \qquad \sigma_4'(t, \mu) \sim -i\mu e^{-it\mu}$$

при $t \to \infty$, $\mu > 0$, *а также при* $|\mu| \to \infty$, $\mu \in P^+$, *равномерно по* $0 \leqslant t < \infty$.

Доказательство. Выберем столь большое ε, что

$$\varepsilon^{-1} \int_0^\infty |q(s)|\, ds < \frac{1}{2}.$$

Тогда при $|\mu| > \varepsilon$, $\operatorname{Im} \mu \geqslant 0$ функции f_μ и $\hat{g}_\mu$, введенные при доказательстве леммы 3, определены при $0 \leqslant t < \infty$. Положим $\sigma_4(t, \mu) = \hat{g}_\mu(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, $\mu \in P_\varepsilon^+$. Как и при доказательстве леммы 3, получаем $|\sigma_4(t, \mu)| \leqslant 2$, $0 \leqslant t < \infty$, $\mu \in P_\varepsilon^+$. Из равенств (21) и (23) (см. доказательство леммы 3) следует, что

$$|f_\mu(t) - 1| \leqslant |\mu|^{-1} \int_0^\infty |q(s)|\, ds.$$

Из равенств (22) и (23) того же доказательства вытекает неравенство

$$|f_\mu'(t)| \leqslant |\mu|^{-1} \left\{ \int_0^\infty |q(s)|\, ds \right\}^2 + \left| \int_0^t e^{-2i\mu(s-t)} q(s)\, ds \right|.$$

Отсюда, как и при доказательстве леммы 1 (см. рассуждение, следующее за формулой (14)), следует, что

$$\lim_{\substack{|\mu| \to \infty \\ \mu \in P^+}} |f_\mu'(t)| = 0 \quad \text{равномерно по } t, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Таким образом, согласно формуле (24) из доказательства леммы 3,

$$\hat{g}_\mu(t) \sim e^{-it\mu}, \qquad \hat{g}'_\mu(t) = -i\mu e^{-it\mu} f_\mu(t) + e^{it\mu} f'_\mu(t) \sim -i\mu e^{-it\mu}$$

при $|\mu| \to \infty$, $\mu \in P^+$, равномерно по $0 \leqslant t < \infty$. Остальные утверждения леммы следуют сразу же из леммы 3, ч. т. д.

11. Следствие. *Пусть* τ *и* T *имеют тот же смысл, что и выше, и пусть выполнены предположения леммы* 7. *Возьмем две функции* f *и* g *из* $C\,[0, \infty)$, *обращающиеся в нуль вне ограниченного множества. Тогда для достаточно больших по модулю невещественных* λ *функция* $(R(\lambda;\, T)\, f,\, g)$ *ограничена.*

Доказательство. Возьмем функцию σ_4, определенную в предыдущей лемме, и положим $A(\lambda) = A(\sigma_1(\cdot,\ \mu(\lambda)))$, $B(\lambda) = A(\sigma_4(\cdot,\ \mu(\lambda)))$ (определение $\mu(\lambda)$ см. в лемме 4). Согласно предыдущей лемме, лемме 1 и формулам (2a), (2b), $|B(\lambda)| \sim |A(\lambda)|$ при $|\lambda| \to \infty$. Теперь наше следствие получается из предыдущей леммы и следствия 6 так же, как и следствие 9, ч. т. д.

Закончив предварительное исследование асимптотических соотношений, мы сможем сформулировать и доказать основную теорему:

12. Теорема. *Пусть* τ — *формальный дифференциальный оператор*

$$-\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + q(t), \qquad 0 \leqslant t < \infty.$$

Предположим, что $q \in C^\infty[0, \infty)$ *и*

$$\int_0^\infty (1+t^2)\,|q(t)|\,dt < \infty.$$

Обозначим через T *оператор в* $L_2(0, \infty)$, *определенный как сужение оператора* $T_1(\tau)$ *на подпространство функций из* $\mathfrak{D}(T_1(\tau))$, *удовлетворяющих нетривиальному граничному условию* $A(f) = 0$ *в нуле.*

Пусть $\sigma_1(t,\ \mu)$ — *функция, определенная в следствии* 2. *Для каждого* λ *через* $\mu(\lambda)$ *обозначим квадратный корень из* λ, *лежащий в верхней полуплоскости, из которой удалена отрицательная вещественная полуось. Положим* $A^+(\lambda) = A(\sigma_1(\cdot,\ \mu(\lambda)))$ *и* $A^-(\lambda) = A(\sigma_1(\cdot,\ -\mu(\lambda)))$ *при* $0 \leqslant \lambda < \infty$. *Предположим, что* $A^+(\lambda) \neq 0$ *и* $A^-(\lambda) \neq 0$ *для всех* $0 \leqslant \lambda < \infty$.

Тогда T — *спектральный оператор, спектр которого представляет собой объединение множества* $\{\lambda \mid 0 \leqslant \lambda < \infty\}$ *и конечного множества точек, не лежащих на полуоси* $[0, \infty)$; *каждая из этих точек является полюсом резольвенты оператора* T, *а соответствующий проектор конечномерен. Сужение* T *на* $E((0, \infty);\, T)$ *является спектральным оператором скалярного типа.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что выполнены предположения теоремы XVIII.2.34. В обозначениях этой теоремы спектр $\sigma(T)$ есть объединение луча $[0, \infty)$ и конечного множества изолированных точек. Исключительной точкой, о которой говорится в теореме XVIII.2.34, является точка $\nu_0 = 0$. В качестве плотных подпространств $\mathfrak{X}_0$ и $\mathfrak{X}_0^*$ можно взять пространства тех функций $f \in C(0, \infty)$, которые равны нулю вне ограниченного множества. Предположение (i) теоремы XVIII.2.34 выполнено в силу следствий 9 и 11. Предположение (ii) установлено в лемме 7(iv). Осталось проверить предположение (iii) теоремы XVIII.2.34. Пусть $C_0[0, \infty)$ — множество всех функций из $C[0, \infty)$, обращающихся в нуль вне ограниченного множества. Используя п. (iv) леммы 7, получаем

$$
\begin{aligned}
(40)\quad C(f, g, \lambda) &= B^+(f, g, \lambda) - B^-(f, g, \lambda) = \\
&= -(2i\mu(\lambda)A^+(\lambda)A^-(\lambda))^{-1} \times \\
&\times \int_0^\infty \int_0^\infty \{A^-(\lambda)\sigma_1(s, \mu(\lambda)) - A^+(\lambda)\sigma_1(s, -\mu(\lambda))\} \times \\
&\times \{A^-(\lambda)\sigma_1(t, \mu(\lambda)) - A^+(\lambda)\sigma_1(t, -\mu(\lambda))\} f(t)\overline{g(s)}\,dt\,ds, \\
&\qquad\qquad f, g \in C_0[0, \infty).
\end{aligned}
$$

Осталось только доказать, что существует постоянная $K < \infty$, удовлетворяющая условию

$$
(41)\qquad \int_0^\infty |C(f, g, \lambda)|\,d\lambda \leqslant K|f|_2|g|_2, \qquad f, g \in C_0[0, \infty].
$$

Положим

$$
(42)\qquad
\begin{aligned}
(\Phi^+f)(\mu) &= \int_0^\infty \sigma_1(s, \mu) f(s)\,ds, \\
(\Phi^-f)(\mu) &= \int_0^\infty \sigma_1(s, -\mu) f(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

В силу соотношения (40), леммы 7(ii) и неравенства Гёльдера, для доказательства неравенства (41) достаточно найти такую конечную постоянную K_1, что

$$
(42a)\qquad \left\{\int_0^\infty |(\Phi^+f)(\mu)|^2\,d\mu\right\}^{1/2} \leqslant K_1\left\{\int_0^\infty |f(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}, \quad f \in C_0[0, \infty),
$$

и

$$
(42b)\qquad \left\{\int_0^\infty |(\Phi^-f)(\mu)|^2\,d\mu\right\}^{1/2} \leqslant K_1\left\{\int_0^\infty |f(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}, \quad f \in C_0[0, \infty).
$$

Мы докажем подробно только первое из этих неравенств; второе устанавливается аналогично. Пусть

$$(\Phi f)(\mu)=\int_0^\infty e^{i\mu s}f(s)\,ds.$$

По теореме Парсеваля — Планшереля (XV.11.3)

$$\left\{\int_0^\infty |\Phi f(\mu)|^2\,d\mu\right\}^{1/2}\leqslant(2\pi)^{1/2}|f|_2. \tag{43}$$

Согласно следствию 2, существует такая конечная постоянная K_2, что

(44)

$$|(\Phi f)(\mu)-(\Phi^+ f)(\mu)|\leqslant K_2(1+|\mu|)^{-1}\int_0^\infty\left\{\int_t^\infty(1+s)|q(s)|\,ds\right\}|f(t)|\,dt.$$

Далее,

$$L=\int_0^\infty\left\{\int_t^\infty(1+s)|q(s)|\,ds\right\}^2dt\leqslant$$

$$\leqslant Q\int_0^\infty\int_t^\infty(1+s)|q(s)|\,ds\,dt=$$

$$=Q\int_0^\infty s(1+s)|q(s)|\,ds\leqslant Q\int_0^\infty(1+s)^2|q(s)|ds<\infty,$$

где

$$Q=\int_0^\infty(1+t)|q(t)|\,dt.$$

Из неравенства (44) и неравенства Гёльдера вытекает, что

$$\left\{\int_0^\infty|(\Phi f)(\mu)-(\Phi^+ f)(\mu)|^2\,d\mu\right\}^{1/2}\leqslant K_2\left\{\int_0^\infty\frac{d\mu}{(1+\mu)^2}\right\}L^{1/2}|f|_2. \tag{45}$$

Неравенство (42a) сразу же следует из (43) и (45). Неравенство (42b) доказывается аналогично, и потому доказательство теоремы закончено, ч. т. д.

Мы закончим этот параграф одним замечанием о спектре оператора T.

13. Лемма. *Пусть выполнены предположения следствия* 2. *Тогда уравнение* $\tau\sigma = 0$ *имеет два решения* σ_1 *и* σ_2, *удовлетворяющие асимптотическим соотношениям*

$$\sigma_1(t) \sim 1, \quad \sigma_2(t) \sim t \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Мы видели в следствии 2, что функция $\sigma_1(t) = \sigma_1(t, 0)$ удовлетворяет первому из этих соотношений. Выберем столь большое a, что $\sigma_1(t) \neq 0$ при $a \leqslant t < \infty$. Положим

$$\hat{\sigma}_2(t) = \sigma_1(t) \int_a^t (\sigma_1(s))^{-2}\, ds.$$

Легко проверяется, что $\hat{\sigma}_2(t)$ удовлетворяет соотношению $\tau\sigma_2 = 0$, а также второму из указанных в лемме асимптотических соотношений. Следовательно, в качестве $\sigma_2(t)$ можно взять единственное решение уравнения $\tau\sigma_2 = 0$, удовлетворяющее условию $\sigma_2(t) = \hat{\sigma}_2(t)$ при $a \leqslant t < \infty$. Лемма доказана, ч. т. д.

14. Следствие. *Если выполнены предположения теоремы* 12, *то (в обозначениях этой теоремы) каждая точка полуоси* $0 \leqslant \lambda < \infty$ *принадлежит непрерывному спектру оператора* T *и удовлетворяет условию* $E(\{\lambda\};\ T) = 0$.

Доказательство. Если $\lambda \neq 0$, то наше утверждение вытекает из следствия XVIII.2.35. Так как, согласно предыдущей лемме, точка $\lambda = 0$ не принадлежит точечному спектру оператора T, то следствие XVIII.2.35 применимо также в точке $\lambda = 0$, ч. т. д.

2. Метод Фридрихса (метод подобных операторов)

В этом разделе мы начинаем изучение изящного метода К. О. Фридрихса, который во многих случаях позволяет доказать, что оператор является спектральным и даже несколько больше. Основная идея метода Фридрихса состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{X}$ есть B-пространство и T — линейный оператор в $\mathfrak{X}$. Пусть K — другой линейный оператор в $\mathfrak{X}$, который в некотором смысле (это мы уточним ниже) мал по сравнению с T. Естественно ожидать в этом случае, следуя Фридрихсу, что операторы T и $T + K$ подобны, т. е. существует такой ограниченный оператор U, обладающий ограниченным обратным, что $T + K = U^{-1}TU$. Чтобы проверить это предположение, мы должны найти решения *линейного* уравнения $U(T + K) = TU$ относительно «неизвестного» оператора U и затем показать, что U обладает ограниченным обратным. В следующей теореме мы опишем общий абстрактный случай, когда эта идея может быть с успехом осуществлена.

→ 1. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *есть* B*-пространство и* $T \in B(\mathfrak{X})$. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *—«вспомогательное»* B*-пространство с нормой* $\|A\|$, $A \in \mathfrak{A}$, *а* M_1 *и* M_2 *— положительные вещественные числа. Предположим, что заданы*

(a) *непрерывное линейное отображение* $\varphi: \mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$ *с нормой, не превосходящей* M_1;

(b) *такое непрерывное линейное отображение* $\Gamma: \mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$, *норма которого не превосходит* M_1, *что*

$$T\Gamma(A) - \Gamma(A)T = \varphi(A), \quad A \in \mathfrak{A};$$

(c) *такое непрерывное билинейное отображение* $\psi(A, A_1)$ *из* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{A}$, *что*

$$\text{(i)} \qquad \varphi(\psi(A, A_1)) = \Gamma(A)\varphi(A_1), \qquad A, A_1 \in \mathfrak{A},$$

$$\text{(ii)} \qquad \|\psi(A, A_1)\| \leqslant M_2 \|A\| \, \|A_1\|, \quad A, A_1 \in \mathfrak{A}.$$

Тогда для любого $A_1 \in \mathfrak{A}$, *удовлетворяющего неравенству* $\|A_1\| \leqslant \leqslant (M_1 + M_2)^{-1}$, *операторы* $T + \varphi(A_1)$ *и* T *подобны, т.е. существует такой оператор* $U \in B(\mathfrak{X})$, *обладающий ограниченным обратным, что* $T + \varphi(A_1) = U^{-1}TU$.

Доказательство. Будем искать оператор U, удовлетворяющий уравнению

$$(1) \qquad U(T + \varphi(A_1)) = TU,$$

предполагая, что U имеет вид $U = I + \Gamma(B)$, где $B \in \mathfrak{A}$. При этом предположении уравнение (1) равносильно уравнению

$$(2) \qquad (I + \Gamma(B))(T + \varphi(A_1)) = T(I + \Gamma(B)),$$

т. е. уравнению

$$(3) \qquad \Gamma(B)T - T\Gamma(B) = -\Gamma(B)\varphi(A_1) - \varphi(A_1).$$

Используя условие (b) теоремы, перепишем это уравнение в виде

$$(4) \qquad \varphi(B) - \Gamma(B)\varphi(A_1) = \varphi(A_1).$$

Согласно предположению (c), уравнение можно переписать так:

$$(5) \qquad \varphi(B - \psi(B, A_1)) = \varphi(A_1).$$

По предположению отображение $B \to \psi(B, A_1)$, действующее из в $\mathfrak{A}$, имеет норму, меньшую чем $M_2(M_1 + M_2)^{-1}$. Согласно лемме VII.3.4, уравнение

$$(6) \qquad B - \psi(B, A_1) = A_1$$

имеет решение $B \in \mathfrak{A}$, норма которого удовлетворяет неравенству

$$\| B \| < (M_1 + M_2)^{-1} (1 - M_2 (M_1 + M_2)^{-1})^{-1} = M_1^{-1}.$$

Следовательно, $| \Gamma (B) | < M_1^{-1} M_1 = 1$, и, снова согласно лемме VII.3.4, оператор $U = I + \Gamma (B)$ обладает ограниченным обратным. Как мы видели, равенство (6) влечет за собой равенство (1), так что $T + \varphi (A_1) = U^{-1} T U$, ч. т. д.

Теорема 1 приводит к понятию подобия операторов; сейчас мы дадим формальное определение.

2. Определение. Операторы S и T в B-пространстве $\mathfrak{Y}$ называются *подобными*, если существует такой ограниченный оператор U в $\mathfrak{Y}$, обладающий ограниченным обратным, что $S = U^{-1} T U$.

Заметим, что определение 2 применимо также к неограниченным операторам S и T.

3. Следствие. *Предположим, что выполнены условия* (a), (b) *и* (c) *теоремы* 1 *и, кроме того,*

(d) *оператор* $\Gamma (A)$ *квазинильпотентен для любого* $A \in \mathfrak{A}$;

(e) *для любого* $A_1 \in \mathfrak{A}$ *преобразование* $A \to \psi (A, A_1)$ *пространства* $\mathfrak{A}$ *квазинильпотентно.*

Тогда операторы T *и* $T + \varphi (A_1)$ *подобны.*

Доказательство. Используя предположение (e) и лемму VII.3.4, получаем, что уравнение (6) имеет решение B. Используя условие (d), мы убеждаемся в том, что оператор $U = I + \Gamma (B)$ обладает ограниченным обратным. Так как из равенства (6) следует равенство (1), мы видим, как и при доказательстве теоремы 1, что $T + \varphi (A) = U^{-1} T U$, ч. т. д.

Иногда оказывается полезным следующий несколько измененный вариант теоремы 1 и следствия 3.

4. Следствие. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *есть* B-*пространство и* $T \in B (\mathfrak{X})$. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *«вспомогательное»* B-*пространство с нормой* $\| A \|$, $A \in \mathfrak{A}$, *а* M_1 *и* M_2 — *положительные числа. Предположим, что заданы*

(a) *непрерывное линейное отображение* φ: $\mathfrak{A} \to B (\mathfrak{X})$, *норма которого не превосходит* M_1;

(b) *непрерывное линейное отображение* Γ: $\mathfrak{A} \to B (\mathfrak{X})$, *норма которого не превосходит* M_1, *причем*

$$T \Gamma (A) - \Gamma (A) T = \varphi (A), \qquad A \in \mathfrak{A};$$

(c) *непрерывное билинейное отображение* $\psi (A, A_1)$ *из* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{A}$, *удовлетворяющее следующим условиям*:

(i) $\qquad \varphi (\psi (A, A_1)) = \varphi (A) \Gamma (A_1), \qquad A, A_1 \in \mathfrak{A},$

(ii) $\qquad \| \psi (A, A_1) \| \leqslant M_2 \| A \| \, \| A_1 \|, \qquad A, A_1 \in \mathfrak{A}.$

Тогда для любого $A \in \mathfrak{A}$, *удовлетворяющего неравенству* $\|A\| < (M_1 + M_2)^{-1}$, *оператор* $T + \varphi(A)$ *подобен оператору* T.

Если, кроме условий (a) (b) *и* (c), *выполнены условия*

(d) *оператор* $\Gamma(A)$ *квазинильпотентен для любого* $A \in \mathfrak{A}$;

(e) *для любого* $A \in \mathfrak{A}$ *преобразование* $A_1 \to \psi(A, A_1)$ *пространства* $\mathfrak{A}$ *квазинильпотентно, то операторы* T *и* $T + \varphi(A)$ *подобны.*

Доказательство следствия 4 совершенно аналогично доказательствам теоремы 1 и следствия 3, и мы предоставляем его читателю.

Остальная часть этого параграфа посвящена различным применениям предыдущих теорем и следствий (а также их обобщений на неограниченные операторы; см. ниже теорему 8 и следствие 9) к конкретным операторам. Основная трудность, которую приходится преодолевать в приложениях, состоит в доказательстве специфических неравенств, соответствующих в каждой конкретной ситуации предположениям (а) и (с) теоремы 1. Наш план состоит в следующем. Сначала мы докажем эти неравенства для интегральных операторов (см. ниже лемму 5), что довольно просто, ибо здесь все сводится к оценкам норм ядер интегральных операторов. Затем, используя полученные неравенства, мы применим теорему 1 к поучительному, хотя и несколько искусственному случаю: к к операторам умножения на функции, спектральные меры которых абсолютно непрерывны относительно двумерной меры Лебега. Этот результат содержится в теореме 6. Простой, но значительно более общий результат получен в теореме 7, которая формулируется в в терминах, связанных с теоремой о спектральном представлении (XII.3.16) (см. также определение XII.3.15). Здесь возникают сингулярные интегралы, которые в двумерном случае, однако, лишь «слабо» сингулярны и могут быть изучены теми элементарными средствами, которые содержатся в лемме 5. Далее теорема 1 и теорема 7 обобщаются на неограниченные операторы; это делается в теоремах 8 и 10. Теоремой 10 заканчивается элементарная, иллюстративная часть этого параграфа.

Затем теоремы 1 и 8 применяются к самосопряженным операторам, спектральная мера которых абсолютно непрерывна относительно одномерной меры Лебега; этот случай наиболее важен для приложений. Здесь снова возникают сингулярные интегралы. Однако в отличие от упомянутых выше сингулярных интегралов они обладают более сильной особенностью. Их исследование основано на некоторых неэлементарных неравенствах для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Необходимая для этого техническая подготовка начинается в лемме 12, которая завершается теоремой 21; доказательству последней предшествует ряд лемм.

Следующая лемма служит технической основой для первой группы приложений теоремы 1. Ее доказательство сводится, если отвлечься от некоторых затруднений, связанных с теорией меры, к применению неравенства Гёльдера и теоремы выпуклости Рисса.

5. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *есть* B-*пространство и* (S, Σ, μ) — *пространство с* σ-*конечной мерой. Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant r \leqslant \infty$. *Предположим, что дана сильно* $(\mu \times \mu)$-*измеримая функция* $A(\cdot, \cdot)$ *со значениями в пространстве* $B(\mathfrak{X})$ *всех ограниченных операторов в пространстве* $\mathfrak{X}$, *причем функция* $|A(\cdot, \cdot)|$ *является* $(\mu \times \mu)$-*измеримой. Для любого* ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, *определим величину* ρ' *формулой* $(\rho')^{-1} + \rho^{-1} = 1$. *Положим*

$$\{A\}_\rho = \left\{ \int_S \left\{ \int_S |A(s, t)|^{\rho'} \mu(dt) \right\}^{\rho/\rho'} \mu(ds) \right\}^{1/\rho}, \qquad 2 \leqslant \rho < \infty, \tag{7}$$

и

$$\{A\}_\rho = \left\{ \int_S \left\{ \int_S |A(s, t)|^{\rho} \mu(ds) \right\}^{\rho'/\rho} \mu(dt) \right\}^{1/\rho'}, \qquad 1 < \rho \leqslant 2. \tag{8}$$

Кроме того, в случаях $\rho = 1$ *и* $\rho = \infty$ *положим*

$$\{A\}_1 = \mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_t \int_S |A(s, t)| \, \mu(ds), \tag{9}$$

$$\{A\}_\infty = \mu\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_s \int_S |A(s, t)| \, \mu(dt). \tag{10}$$

Предположим, что $\{A\}_p < \infty$ *и* $\{A\}_r < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_q(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *интеграл*

$$g(s) = \int_S A(s, t) f(t) \, \mu(dt) \tag{11}$$

существует для μ-*почти для всех* s *и определяет функцию* g, *принадлежащую классу* $L_q(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$. *Кроме того,*

$$f(\cdot) \to \int_S A(\cdot, t) f(t) \, \mu(dt) \tag{12}$$

является ограниченным линейным отображением в $L_q(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ *и его норма не превосходит* $\max[\{A\}_p, \{A\}_r]$.

Доказательство. Заметим сначала, что для любой μ-измеримой функции f функция $A(s, t) f(t)$ является $(\mu \times \mu)$-измеримой со значениями в $\mathfrak{X}$. Действительно, используя следствие III.3.8, теорему III.3.6, следствие III.6.3 и теорему III.6.12, а также σ-конечность S, получаем такую последовательность μ-измеримых μ-простых функций f_n со значениями в $\mathfrak{X}$, что $f_n(s) \to f(s)$ при $n \to \infty$ для μ-почти всех s. Из предположений теоремы сразу же следует ($\mu \times \mu$)-измеримость функции $A(s, t) f_n(t)$, а потому функция $A(s, t) f(t)$ также ($\mu \times \mu$)-измерима.

Возьмем теперь неотрицательную μ-измеримую функцию h, определенную на S. По неравенству Гёльдера

$$(13)\qquad \int_S \left| \int_S |A(s, t)| h(t) \mu(dt) \right|^r \mu(ds) \leqslant$$
$$\leqslant \int_S \left\{ \int_S |A(s, t)|^{r'} \mu(dt) \right\}^{r/r'} \left\{ \int_S |h(t)|^r \mu(dt) \right\} \mu(ds) =$$
$$= \{A\}_r^r \int_S |h(t)|^r \mu(dt).$$

Отсюда вытекает, что если $h \in L_r(S, \Sigma, \mu)$ и $2 \leqslant r < \infty$, то интеграл

$$(14)\qquad (\tilde{A}h)(s) = \int_S |A(s, t)| h(t) \mu(dt)$$

существует для μ-почти всех точек s и $|\tilde{A}h|_r \leqslant \{A\}_r |h|_r$, где через $|f|_\rho$ обозначена норма элемента $f \in L_\rho(S, \Sigma, \mu)$. Следовательно, если $2 \leqslant r < \infty$ и g — произвольная комплексная функция из $L_r(S, \Sigma, \mu)$, то по теореме III.2.22(a) интеграл

$$(15)\qquad (\tilde{A}g)(s) = \int_S |A(s, t)| g(t) \mu(dt)$$

существует для μ-почти всех s. Так как $|(\tilde{A}(g)(s)| \leqslant \leqslant \int_S |A(s, t)| |g(t)| \mu(dt)$, то $|\tilde{A}g|_r \leqslant \{A\}_r |g|_r$. То же самое заключение можно получить и в случае $r = \infty$; подробное доказательство предоставляется читателю.

Пусть теперь $1 \leqslant r \leqslant 2$ и h_1 — неотрицательная μ-измеримая функция, определенная на S. Как и выше, получаем, что интеграл

$$(16)\qquad (\tilde{A}h_1)(t) = \int_S |A(s, t)| h_1(s) \mu(ds)$$

существует для μ-почти всех $t \in S$, и если $h_1 \in L_{r'}(S, \Sigma, \mu)$, то $\hat{A}h_1 \in L_{r'}(S, \Sigma, \mu)$ и $|\hat{A}h_1|_{r'} \leqslant \{A\}_r |h_1|_{r'}$. Следовательно, если h — неотрицательная μ-измеримая функция из $L_r(\overline{S}, \Sigma, \mu)$, то по теореме Тонелли (III.11.14) и неравенству Гёльдера интеграл (14) существует для μ-почти всех s из множества $\{s \in S \mid h_1(s) > 0\}$ и

$$(17)\qquad \int_S (\tilde{A}h)(s) h_1(s) \mu(ds) \leqslant \{A\}_r |h|_r |h_1|_{r'}.$$

Так как можно найти функцию $h_1 \in L_r(S, \Sigma, \mu)$, которая всюду положительна, то интеграл (14) сходится почти всюду на S (по мере μ).

Если $r = 1$, то, используя функцию $h_1(s) \equiv 1$, мы приходим к неравенству $|\tilde{A}h|_1 \leqslant \{A\}_1 |h|_1$. Чтобы получить аналогичное утверждение при $1 < r \leqslant 2$, поступим следующим образом. Если в (17) мы возьмем в качестве h_1 характеристическую функцию некоторого множества с конечной μ-мерой, то функция $\tilde{A}h$ будет μ-интегрируемой на любом множестве $e \in \Sigma$ с конечной μ-мерой. По неравенству (17) и теореме IV.8.1 существует такая функция $\varphi \in L_r(S, \Sigma, \mu)$ с нормой, не превосходящей $\{A\}_r |h|_r$, что

$$\int_S (\tilde{A}h)(s) h_1(s) \mu(ds) = \int_S \varphi(s) h_1(s) \mu(ds), \tag{18}$$

$$h_1 \in L_{r'}(S, \Sigma, \mu), \quad h_1 \geqslant 0.$$

Но тогда

$$\int_e ((\tilde{A}h)(s) - \varphi(s)) \mu(ds) = 0 \tag{19}$$

для любого множества $e \in \Sigma$ конечной μ-меры, откуда по теореме III.2.20 и в силу σ-конечности S находим, что $(\tilde{A}h)(s) = \varphi(s)$ μ-почти всюду на S. Следовательно, $\tilde{A}h \in L_r(S, \Sigma, \mu)$ и $|\tilde{A}h|_r \leqslant \leqslant \{A\}_r |h|_r$. Используя теорему III.2.22 и теорему III.2.20(a) (см. лемму III.2.15), мы видим, что для всех $1 \leqslant r \leqslant \infty$ и для любой комплексной функции $g \in L_r(S, \Sigma, \mu)$ интеграл (15) существует для μ-почти всех s и $|\tilde{A}g|_r \leqslant \{A\}_r |g|_r$.

Такое же утверждение справедливо и для функций $g \in \in L_p(S, \Sigma, \mu)$. Отсюда, применяя теорему Рисса о выпуклости (VI.10.11) и полагая $M = \max[\{A\}_p, \{A\}_r]$, мы получаем такой ограниченный линейный оператор $\tilde{A}$ в $L_q(S, \Sigma, \mu)$, что его норма не превосходит M, и для любой μ-интегрируемой μ-простой функции $\hat{g}$ справедливо равенство (15) μ-почти всюду на S. Пусть $g \in \in L_q(S, \Sigma, \mu)$, причем g ограничена и обращается в нуль вне некоторого множества e конечной μ-меры. В силу следствий III.3.8, III.6.3 и теорем III.3.6, III.6.12, g является пределом почти всюду последовательности μ-измеримых μ-простых функций g_n. Несколько изменяя, если это необходимо, функции g_n, можно, очевидно, считать, что последовательность $\{g_n\}$ равномерно ограничена, а все g_n обращаются в нуль вне множества e. Согласно теореме Лебега III.6.16, $\lim_{n\to\infty} |g_n - g|_q = 0$, так что $\lim_{n\to\infty} |\tilde{A}g_n - \tilde{A}g|_q = 0$. В силу доказанного выше $\int_e |A(s, t)| \mu(dt) < \infty$ для μ-почти всех s.

Следовательно, еще раз применяя теорему Лебега, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\int_S |A(s, t)|\, g_n(t)\,\mu(dt)=\int_S |A(s, t)|\, g(t)\,\mu(dt) \tag{20}$$

для μ-почти всех s. Отсюда, используя следствия III.3.8, III.6.3 и теоремы III.3.6, III.6.12, получаем

$$(\widetilde{A}g)(s)=\int_S |A(s, t)|\, g(t)\,\mu(dt)$$

μ-почти всюду на S, так что (15) справедливо для любой ограниченной функции $g\in L_q(S, \Sigma, \mu)$, равной нулю вне некоторого множества конечной μ-меры. Возьмем теперь неотрицательную функцию $h\in L_q(S, \Sigma, \mu)$. Тогда h можно представить в виде предела монотонно возрастающей сходящейся почти всюду на S последовательности неотрицательных функций h_n, каждая из которых ограничена и обращается в нуль вне множества конечной μ-меры. В силу теоремы Лебега III.6.16, $\lim\limits_{n\to\infty}|h_n-h|_q=0$, так что $\lim\limits_{n\to\infty}|\widetilde{A}h_n-\widetilde{A}h|_q=0$. Согласно лемме Фату (III.6.17),

$$\lim_{n\to\infty}\int_S |A(s, t)|\, h_n(t)\,\mu(dt)=\int_S |A(s, t)|\, h(t)\,\mu(dt) \tag{21}$$

для любого $s\in S$, причем интеграл в правой части (14) существует μ-почти всюду. Рассуждая, как и выше, мы заключаем, что равенство (14) справедливо для любой неотрицательной функции $h\in L_q(S, \Sigma, \mu)$. Кроме того, как уже отмечалось, $|\widetilde{A}h|_q\leqslant M\,|h|_q$.

Отсюда, применяя теорему III.2.22 (см. также лемму III.2.15), мы видим, что интеграл (11) существует μ-почти всюду для любой функции $f\in L_q(S, \Sigma, \mu, \mathfrak{X})$ и норма отображения, определенного формулой (12), не превосходит M. Лемма доказана, ч. т. д.

Сейчас мы применим теорему 1 в одном частном случае. Пусть D — ограниченная область комплексной плоскости и $L_2(D)$ — гильбертово пространство всех комплекснозначных измеримых по Лебегу функций f, определенных на D и удовлетворяющих условию

$$\int_D |f(x, y)|^2\,dx\,dy=\int_D |f(z)|^2\,dx\,dy=|f|^2<\infty. \tag{22}$$

В качестве T из теоремы 1 возьмем оператор

$$(Tf)(x, y)=(x+iy)\,f(x, y),\ \text{ т. е. }\ (Tf)(z)=zf(z). \tag{23}$$

Без труда проверяется, что спектром оператора T является замыкание области D. В качестве пространства $\mathfrak{A}$, указанного в теореме 1, возьмем пространство всех ограниченных измеримых по Лебегу функций на $D \times D$, т. е. пространство всех измеримых по Лебегу функций $A(x, y;\ x', y') = A(z, z')$ с нормой

$$\|A\| = \sup_{z, z' \in D} |A(z, z')|. \tag{24}$$

Преобразование φ из теоремы 1 определим формулой

$$[\varphi(A) f](z) = \int_D A(z, z') f(z')\, dx'\, dy', \qquad f \in L_2(D), \tag{25}$$

а преобразование Γ — формулой

$$[\Gamma(A) f](z) = \int_D \frac{A(z, z')}{z - z'} f(z')\, dx'\, dy', \qquad f \in L_2(D). \tag{26}$$

Хотя ядро интегрального оператора $\Gamma(A)$ может быть неограниченным, сам оператор $\Gamma(A)$ ограничен в $L_2(D)$. Это вытекает из леммы 5 и двух следующих неравенств:

$$\int_D \frac{|A(z, z')|}{|z - z'|} dx'\, dy' \leqslant \|A\| \int_D \frac{1}{|z - z'|} dx'\, dy' \leqslant 2\pi \|A\| \operatorname{diam} D, \tag{27}$$

$$\int_D \frac{|A(z, z')|}{|z - z'|} dx\, dy \leqslant 2\pi \|A\| \operatorname{diam} D. \tag{28}$$

Из формулы 26 находим

$$\begin{aligned} \{T(\Gamma A) f\}(z) - \{(\Gamma A) T f\}(z) &= \\ = \int_D \frac{(zA(z, z') - A(z, z') z')}{z - z'} f(z')\, dx'\, dy' &= \\ = \int_D A(z, z') f(z')\, dx'\, dy' &= [\varphi(A) f](z), \qquad f \in L_2(D), \end{aligned} \tag{29}$$

так что выполнены предположения (a) и (b) теоремы 1.

Чтобы проверить предположение (c), положим

$$[\psi(A, A_1)](z, z') = \int_D \frac{A(z, z_1) A_1(z_1, z')}{z_1 - z'} dx_1\, dy_1 \tag{30}$$

и заметим, что по теореме Фубини

$$\begin{aligned} [\varphi(\psi(A, A_1)) f](z) &= \int_D \int_D \frac{A(z, z_1) A_1(z_1, z')}{z - z_1} f(z')\, dx_1 dy_1\, dx'\, dy' = \\ &= \int_D \frac{A(z, z_1)}{z - z_1} \left\{ \int_D A(z_1, z') f(z')\, dx' dy' \right\} dx_1\, dy_1 = \\ &= [\Gamma(A) \varphi(A) f](z), \end{aligned} \tag{31}$$

так что $\varphi(\psi(A, A_1)) = \Gamma(A)\varphi(A_1)$ при $A, A_1 \in \mathfrak{A}$. Кроме того,

$$\left| \int_D \frac{A(z, z_1) A_1(z_1, z')}{z - z_1} dx_1 dy_1 \right| \leqslant \| A \| \, \| A_1 \| \int_D \frac{1}{|z - z_1|} dx_1 dy_1 \leqslant \leqslant 2\pi \operatorname{diam}(D) \| A \| \, \| A_1 \|, \tag{32}$$

и потому условие (c) выполнено. Применяя теорему 1, мы видим, что если $A \in \mathfrak{A}$ и величина $\| A \|$ достаточно мала, то операторы T и $T + \varphi(A)$ подобны. Так как T, очевидно, является спектральным оператором скалярного типа, то и $T + \varphi(A)$ — спектральный оператор скалярного типа.

Сейчас мы сформулируем полученный результат в виде теоремы. Однако заметим сначала, что наши рассуждения могут быть обобщены двумя очевидными способами.

(a) Вместо пространства $L_2(D)$ комплекснозначных измеримых по Лебегу функций, определенных на D и удовлетворяющих соотношению (7), мы можем взять в качестве $\mathfrak{X}$ произвольное B-пространство и рассмотреть пространство $L_2(D, \mathfrak{X})$ всех $\mathfrak{X}$-значных функций на D, измеримых по Борелю — Лебегу.

(b) Вместо пространства $L_2(D, \mathfrak{X})$ мы можем рассмотреть пространства $L_p(D, \mathfrak{X})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Другими словами, вместо пространства $L_2(D)$ мы можем рассмотреть пространство $L_p(D, \mathfrak{X})$ всех $\mathfrak{X}$-значных функций на D, измеримых по Борелю — Лебегу и удовлетворяющих условию

$$\left\{ \int_D | f(x, y) |^p \, dx \, dy \right\}^{1/p} = \left\{ \int_D | f(z) |^p \, dx \, dy \right\}^{1/p} = | f |_p < \infty. \tag{33}$$

Так как лемма 5 применима не только к комплекснозначным, но к $\mathfrak{X}$-значным функциям, наши рассуждения остаются в силе (с очевидными изменениями в обозначениях). Итак, мы приходим к следующей теореме:

6. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное B-пространство, D — ограниченная область комплексной плоскости и $1 \leqslant p < \infty$. Обозначим через $L_p(D, \mathfrak{X})$ пространство всех $\mathfrak{X}$-значных измеримых по Лебегу функций, определенных на D и удовлетворяющих условию* (33). *Определим в $L_p(D, \mathfrak{X})$ оператор T формулой*

$$(Tf)(x, y) = (x + iy) f(x, y), \quad f \in L_p(D, \mathfrak{X}). \tag{34}$$

Пусть $A(z, z')$ — измеримая по Лебегу функция, определенная на $D \times D$ и принимающая значения в пространстве $B(\mathfrak{X})$ всех ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$. Предположим, что

$$\| A \| = \sup_{z, z' \in D} | A(z, z') | < \infty, \tag{35}$$

и определим оператор $\varphi(A)$ *формулой*

$$(36) \qquad (\varphi(A) f)(z) = \int\limits_D A(z, z') f(z') \, dx' \, dy', \qquad f \in L_p(D, \mathfrak{X}).$$

Тогда существует такое положительное число $\varepsilon = \varepsilon(p, D)$, *зависящее только от* p *и* D, *что если* $\| A \| < \varepsilon(p, D)$, *то операторы* T *и* $T + \varphi(A)$ *подобны и, следовательно,* $T + \varphi(A)$ *является спектральным оператором скалярного типа.*

Следующая теорема является полезным обобщением теоремы 6. Предположения этой теоремы сформулированы в таком виде, который обусловлен теоремой о спектральном представлении XII.3.16 (см. также определение XII.3.15).

7. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *комплексное* B-*пространство,* D — *ограниченная область комплексной плоскости и* $1 \leqslant p < \infty$. *Обозначим через* $L_p(D, \mathfrak{X})$ *пространство всех* $\mathfrak{X}$-*значных измеримых по Лебегу функций, определенных на* D *и удовлетворяющих условию* (33). *Положим* $1/p + 1/p' = 1$, *и пусть* $e_1, e_2, \ldots$ — *семейство попарно не пересекающихся борелевских множеств, объединением которых служит* D, *а* $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ — *семейство замкнутых подпространств из* $\mathfrak{X}$. *Обозначим через* $\hat{L}_p(D, \mathfrak{X})$ *подпространство всех таких функций* f *из* $L_p(D, \mathfrak{X})$, *что* $f(z) \in \mathfrak{X}_j$ *для всех* $z \in e_j$, $1 \leqslant j < \infty$. *Определим в* $\hat{L}_p(D, \mathfrak{X})$ *оператор* T *формулой*

$$(37) \qquad (Tf)(x, y) = (x + iy) f(x, y), \qquad f \in \hat{L}_p(D, \mathfrak{X}).$$

Пусть $A(z, z')$ — *измеримая по Лебегу функция, определенная на* $D \times D$ *и принимающая значения в пространстве* $B(\mathfrak{X})$ *всех ограниченных операторов в* $\mathfrak{X}$. *Предположим, что* $A(z, z') x \in \mathfrak{X}_j$ *для всех* $x \in \mathfrak{X}$ *и* $z \in e_j$, $1 \leqslant j < \infty$. *Пусть функция* $| A(\cdot, \cdot) |$ *измерима по Лебегу и для некоторого числа* c, $c > 4$, $c \geqslant p$, $c \geqslant p'$, *выполнено соотношение*

$$(38) \qquad \| A \| = \left\{ \int\limits_D \int\limits_D | A(z, z') |^c \, dx \, dy \, dx' \, dy' \right\}^{1/c} < \infty.$$

Определим в $\hat{L}_p(D, \mathfrak{X})$ *интегральный оператор* $\hat{\varphi}(A)$ *формулой*

$$(39) \qquad (\hat{\varphi}(A) f)(z) = \int\limits_D A(z, z') f(z') \, dx' \, dy', \qquad f \in \hat{L}_p(D, \mathfrak{X}).$$

Тогда существует такое положительное число $\varepsilon = \varepsilon(p, D, c)$, *зависящее только от* p, D *и* c, *что если* $\| A \| < \varepsilon$, *то оператор* $T + \hat{\varphi}(A)$ *подобен оператору* T *и, следовательно, является спектральным оператором скалярного типа.*

Замечание. Из теоремы XII.3.16 следует, что если T_0 — ограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве,

$E(e)$ — его спектральное разложение и $E(e_0)=0$ для любого борелевского множества e_0 с нулевой мерой Бореля — Лебега, то T_0 подобен оператору T в пространстве $\hat{L}_2(D, \mathfrak{X})$ такого типа, который описан в теореме 7. Таким образом, теорема 7 применима к довольно общему классу ограниченных нормальных операторов T_0 в гильбертовом пространстве, если только возмущающий оператор $\varphi(A)$ достаточно «гладок» и достаточно «мал» относительно T_0.

Доказательство теоремы 7. Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство всех измеримых по Лебегу функций A на $D\times D$, принимающих значения в пространстве $B(\mathfrak{X})$ всех ограниченных операторов в $\mathfrak{X}$ и удовлетворяющих условию (38). Положим $(c')^{-1}+(c)^{-1}=1$. Поскольку $c\geqslant p$, $c\geqslant p'$, мы имеем $c\geqslant 2$, так что $c\geqslant c'$; из ограниченности области D и неравенства Гёльдера следует существование такой конечной постоянной M, что

$$\left\{\int_D\left\{\int_D |A(z, z')|^{c'}\,dx\,dy\right\}^{c/c'}dx'\,dy'\right\}^{1/c}<M\,\|A\|, \tag{40}$$

$$\left\{\int_D\left\{\int_D |A(z, z')|^{c'}\,dx'\,dy'\right\}^{c/c'}dx\,dy\right\}^{1/c}<M\,\|A\|. \tag{41}$$

Следовательно, по лемме 5 интегральный оператор $\hat{\varphi}(A)$, определенный формулой (39), отображает $L_p(D, \mathfrak{X})$ в себя, а его норма не превосходит $M\,\|A\|$. Так как $A(z, z')\,x\in\mathfrak{X}_i$ при $x\in\mathfrak{X}_i$ и $z'\in e_i$, то $\hat{\varphi}(A)$ отображает подпространство $\hat{L}_p(D, \mathfrak{X})$ в себя.

Определим преобразование $\Gamma(A)$, $A\in\mathfrak{A}$, формулой

$$(\Gamma(A)f)(z)=\int_D \frac{A(z, z')}{z-z'}\,f(z')\,dx'\,dy', \quad f\in L_p(D, \mathfrak{X}). \tag{42}$$

По неравенству Гёльдера имеем

$$\int_D\left|\frac{A(z, z')}{z-z'}\right|^{c'}dx'\,dy'\leqslant\left\{\int_D |A(z, z')|^{c'c/c'}\,dx'\,dy'\right\}^{c'/c}\times \tag{43}$$
$$\times\left\{\int_D\left|\frac{1}{z-z'}\right|^{c'c/(c-c')}dx'\,dy'\right\}^{(c-c')/c}.$$

Поскольку $c>4$, величина $e=c'c/(c-c')=((c')^{-1}-c^{-1})^{-1}$ не превосходит $(3/4-1/4)^{-1}=2$. Следовательно, величина

$$N=\sup_{z\in D}\left\{\int_D \frac{1}{|z-z'|^{e}}\,dx'\,dy'\right\}^{(c-c')/c} \tag{44}$$

конечна. Из (43) следует, что

$$\left\{\int_D\left\{\int_D\left|\frac{A(z, z')}{z-z'}\right|^{c'}dx'\,dy'\right\}^{c/c'}dx\,dy\right\}^{1/c}\leqslant N^{1/c'}\,\|A\|. \tag{45}$$

Аналогично доказывается, что

$$(46)\qquad \left\{\int_D \left\{\int_D \left|\frac{A(z, z')}{z-z'}\right|^{c'} dx\,dy\right\}^{c/c'} dx'\,dy'\right\}^{1/c'} \leqslant N^{1/c'}\,\|A\|.$$

Таким образом, по лемме 5 интегральный оператор $\Gamma(A)$, определенный формулой (42), отображает $L_p(D, \mathfrak{X})$ в себя и его норма не превосходит $N^{1/c'}\,\|A\|$. Так как $A(z, z')\,x \in \mathfrak{X}_j$ для всех $x \in \mathfrak{X}$ и всех $z \in e_j$, то $\hat{\varphi}(A)$ отображает подпространство $\hat{L}_p(D, \mathfrak{X})$ в себя. Обозначим через $\hat{\Gamma}(A)$ сужение $\Gamma(A)$ на подпространство $\hat{L}_p(D, \mathfrak{X})$ пространства $L_p(D, \mathfrak{X})$.

В силу формулы (42)

$$(47)\qquad (T\hat{\Gamma}(A)\,f - \hat{\Gamma}(A)\,Tf)(z) = \int_D \frac{(zA(z, z') - A(z, z')\,z')}{z-z'} f(z')\,dx'\,dy' = \int_D A(z, z')\,f(z')\,dx'\,dy' = [\hat{\varphi}(A)\,f](z), \quad f \in \hat{L}_p(D, \mathfrak{X}).$$

Положим теперь

$$(48)\qquad [\psi(A, A_1)](z, z') = \int_D \frac{A(z, z_1)\,A_1(z_1, z')}{z_1 - z'}\,dx_1\,dy_1, \quad A,\ A_1 \in \mathfrak{A}.$$

Так как $A(z, z_1)\,x \in \mathfrak{X}_i$ для всех $x \in \mathfrak{X}$ и $z \in e_i$, то, очевидно, $[(\psi(A, A_1)](z, z')\,x \in \mathfrak{X}_i$ при $x \in \mathfrak{X}$ и $z \in e_i$. По неравенству Гёльдера и формуле (44) получаем (ср. (43))

$$(49)\qquad \int_D \left|\frac{A_1(z_1, z')}{z_1 - z'}\right|^{c'} dx_1\,dy_1 \leqslant N \left\{\int_D |A_1(z_1, z')|^c\,dx_1\,dy_1\right\}^{c'/c}.$$

Итак, согласно формуле (48) и неравенству Гёльдера,

$$(50)\qquad |\psi(A, A_1)(z, z')| \leqslant N^{1/c'} \left\{\int_D |A(z, z_1)|^c\,dx_1\,dy_1\right\}^{1/c} \times \left\{\int_D |A_1(z_1, z')|^c\,dx_1\,dy_1\right\}^{1/c},$$

откуда

$$(51)\qquad \|\psi(A, A_1)\| \leqslant N^{1/c'}\,\|A\|\,\|A_1\|, \qquad A,\ A_1 \in \mathfrak{A}.$$

Применяя теорему 1, получаем, что существует такое положительное число ε, зависящее только от p, D и c, что если $\|A\| < \varepsilon$, то операторы T и $T + \hat{\varphi}(A)$ подобны, ч. т. д.

Теорема 1 и ее следствия обобщаются на неограниченные операторы.

8. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — комплексное B-пространство, T — замкнутый оператор в $\mathfrak{X}$ с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{A}$ — «вспомогательное» B-пространство с нормой $\|A\|$. Пусть M_1, M_2 — конечные положительные вещественные числа. Предположим, что*

(a) *для любого $A \in \mathfrak{A}$ определен такой линейный оператор $\varphi(A)$ в $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{D}(\varphi(A)) \supseteq \mathfrak{D}(T)$;*

(b) *задано такое непрерывное линейное отображение Γ: $\mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$, что его норма не превосходит M_1, $\Gamma(A)\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T)$ и*

$$(T\Gamma(A) - \Gamma(A)T)x = \varphi(A)x, \quad A \in \mathfrak{A}, \quad x \in \mathfrak{D}(T);$$

(c) *задано непрерывное билинейное отображение $\psi(A, A_1)$ из $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $$\varphi(\psi(A, A_1)) = \varphi(A)\Gamma(A_1), \quad A, A_1 \in \mathfrak{A},$$

(ii) $$\|\psi(A, A_1)\| \leqslant M_2 \|A\| \|A_1\|.$$

Тогда для любого $A_1 \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющего неравенству $\|A_1\| < (M_1+M_2)^{-1}$, оператор $T+\varphi(A_1)$ обладает замкнутым сужением, которое подобно оператору T.

Доказательство. По лемме VII.3.4 уравнение

$$B - \psi(A_1, B) = A_1 \tag{52}$$

имеет решение $B \in \mathfrak{A}$, норма которого, согласно той же лемме, удовлетворяет неравенству

$$\|B\| < (M_1+M_2)^{-1}(1 - M_2(M_1+M_2)^{-1})^{-1} = M_1^{-1}.$$

Следовательно, $|\Gamma(B)| < M_1^{-1}M_1 = 1$ и, снова применяя лемму VII.3.4, мы видим, что оператор $U = I + \Gamma(B)$ обладает ограниченным обратным.

Пусть $x \in \mathfrak{D}(T)$. Из неравенства (52) и предположения (c) находим

$$\varphi(B)x - \Gamma(B)\varphi(A_1)x = \varphi(A_1)x, \tag{53}$$

откуда в силу предположения (b)

$$-T\Gamma(B)x + \Gamma(B)Tx - \varphi(A_1)\Gamma(B)x = \varphi(A_1)x. \tag{54}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$(T+\varphi(A_1))(I+\Gamma(B))x = (I+\Gamma(B))Tx, \tag{55}$$

или

$$(T+\varphi(A_1))x = (I+\Gamma(B))T(I+\Gamma(B))^{-1}x, \quad x \in (I+\Gamma(B))\mathfrak{D}(T). \tag{56}$$

Положим $U = I + \Gamma(B)$. Тогда оператор UTU^{-1} является искомым замкнутым сужением оператора $T+\varphi(A_1)$, ч. т. д.

9. Следствие. *Пусть выполнены предположения теоремы* 8 *и, кроме того, существует такое комплексное число* λ_0, *что оператор* $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ *определен всюду и ограничен, оператор* $\varphi(A_1)(\lambda_0 I - T)^{-1}$ *ограничен и для некоторого* $A_1 \in \mathfrak{A}$, *удовлетворяющего неравенству* $\| A_1 \| \leqslant (M_1 + M_2)^{-1}$, *оператор* $(I - \varphi(A_1)(\lambda_0 I - T)^{-1})^{-1}$ *определен всюду и ограничен. Тогда оператор* $T + \varphi(A_1)$ *замкнут и подобен оператору* T.

Доказательство. Пусть

$$B = (\lambda_0 I - T)^{-1} (I - \varphi(A_1)(\lambda_0 I - T)^{-1})^{-1}. \tag{57}$$

Тогда

$$(\lambda_0 I - T - \varphi(A_1)) B = \\ = (I - \varphi(A_1)(\lambda_0 I - T)^{-1})(I - \varphi(A_1)(\lambda_0 I - T)^{-1})^{-1} = I. \tag{58}$$

Кроме того, если $x \in \mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T + \varphi(A_1))$, то

$$\begin{aligned} B(\lambda_0 I - T - \varphi(A_1)) x &= \\ &= B(\lambda_0 I - T - \varphi(A_1))(\lambda_0 I - T)^{-1}(\lambda_0 I - T) x = \\ &= B(I - \varphi(A_1)(\lambda_0 I - T)^{-1})(\lambda_0 I - T) x = \\ &= (\lambda_0 I - T)^{-1}(\lambda_0 I - T) x = x. \end{aligned} \tag{59}$$

Следовательно, оператор $(\lambda_0 I - T - \varphi(A_1))^{-1} = B$ существует, ограничен и определен всюду. Пусть T_1 — то замкнутое сужение оператора $T + \varphi(A_1)$, о котором говорится в теореме 8. Так как T_1 и T подобны, то оператор $(\lambda_0 I - T_1)^{-1}$ существует, всюду определен и ограничен. Мы должны показать, что $T + \varphi(A_1) = T_1$. Допустим, что это не так, т. е. существует такой $x \in \mathfrak{D}(T + \varphi(A_1))$, что $x \notin \mathfrak{D}(T_1)$. Так как $\lambda_0 I - T_1$ отображает свою область определения на все гильбертово пространство, то существует такой $y \in \mathfrak{D}(T_1)$, что $(\lambda_0 I - T_1) y = (\lambda_0 I - T - \varphi(A_1)) x$. Но тогда $(\lambda_0 I - T - \varphi(A_1))(x - y) = 0$, что противоречит существованию оператора $(\lambda_0 I - T - \varphi(A_1))^{-1}$. Таким образом, $T + \varphi(A_1) = T_1$, и доказательство следствия закончено, ч. т. д.

Следующая теорема, тесно связанная с теоремой 7, получается в результате применения теоремы 8.

10. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{Y}$ — *комплексное* B-*пространство*, D — *подмножество комплексной плоскости, замыкание которого не совпадает со всей комплексной плоскостью. Обозначим через* $L_p(D, \mathfrak{Y})$, *где* $1 \leqslant p < \infty$, *пространство всех* $\mathfrak{Y}$-*значных измеримых по Борелю — Лебегу функций, определенных на* D *и удовлетворяющих условию*

$$\left\{ \int_D | f(x, y) |^p \, dx \, dy \right\}^{1/p} = \left\{ \int_D | f(z) |^p \, dx \, dy \right\}^{1/p} = | f | < \infty. \tag{60}$$

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — *семейство попарно не пересекающихся борелевских множеств из* D, *объединение которых совпадает с* D, *а* $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots$ — *семейство замкнутых подпространств из* $\mathfrak{Y}$. *Обозначим через* $\hat{L}_p(D, \mathfrak{Y})$ *подпространство всех таких функций из* $L_p(D, \mathfrak{Y})$, *что* $f(z) \in \mathfrak{Y}_j$ *для всех* $z \in e_j$, $1 \leqslant j < \infty$. *Определим оператор* T *в* $\hat{L}_p(D, \mathfrak{Y})$ *формулами*

$$\mathfrak{D}(T) = \left\{ f \in \hat{L}_p(D, \mathfrak{Y}) \,\Big|\, \left(\int_D |zf(z)|^p \, dx\, dy \right)^{1/p} < \infty \right\}, \tag{61}$$

$$(Tf)(z) = (x + iy) f(z), \quad f \in \hat{L}_p(D, \mathfrak{Y}). \tag{62}$$

Пусть $A(z, z')$ — *измеримая по Лебегу функция на* $D \times D$ *со значениями в пространстве* $B(\mathfrak{Y})$ *всех ограниченных операторов в* $\mathfrak{Y}$. *Предположим, что* $A(z, z')x \in \mathfrak{Y}_j$ *для всех* $x \in \mathfrak{Y}$ *и* $z \in e_j$, $1 \leqslant j < \infty$. *Предположим также, что функция* $|A(\cdot, \cdot)|$ *измерима по Лебегу и величина*

$$\|A\| = \sup_{z, z' \in D} |A(z, z')| + \sup_{z \in D} \int_D |A(z, z')| \, dx'\, dy' + \sup_{z' \in D} \int_D |A(z, z')| \, dx\, dy \tag{63}$$

конечна. Определим в $\hat{L}_p(D, \mathfrak{Y})$ *интегральный оператор* $\varphi(A)$ *формулой*

$$(\varphi(A) f)(z) = \int_D A(z, z') f(z') \, dx'\, dy', \qquad f \in \hat{L}_p(D, \mathfrak{Y}). \tag{64}$$

Тогда существует такое положительное число $\varepsilon = \varepsilon(p, D, c)$, *зависящее только от* p, D, c, *что если* $\|A\| < \varepsilon$, *то оператор* $T + \varphi(A)$ *подобен оператору* T *и, следовательно, является спектральным оператором скалярного типа.*

Доказательство. Применим теорему 8 и следствие 9. Возьмем в качестве B-пространства $\mathfrak{X}$, указанного в теореме 8, пространство $\hat{L}_p(D, \mathfrak{Y})$. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех ограниченных измеримых функций $A(\cdot, \cdot)$, определенных на $D \times D$ и принимающих значения в $B(\mathfrak{Y})$, для которых величина (63) конечна и $A(z, z')v \in \mathfrak{Y}_j$ при $v \in \mathfrak{Y}$ и $z \in e_j$. Для любого $A \in \mathfrak{A}$ определим оператор $\varphi(A)$ формулой (64); так как $A(z, z') f(z') \in \mathfrak{Y}_i$ для всех $z \in e_i$, то $\varphi(A) f \in \hat{L}_p(D, \mathfrak{Y})$. Согласно лемме 5, $\varphi(A)$ — ограниченное линейное преобразование пространства $\hat{L}_p(D, \mathfrak{Y})$ в себя, и его норма не превосходит $\|A\|$. Таким образом, выполнено предположение (a) теоремы 8.

Читатель без труда может проверить, что $\mathfrak{A}$ является B-пространством с нормой, определенной формулой (63). Положим

$$(65)\qquad (\Gamma(A)f)(z)=\int_D \frac{A(z,\ z')}{z-z'}f(z')\,dx'\,dy',\qquad A\in\mathfrak{A},\qquad f\in\hat{L}_p(D,\ \mathfrak{Y}).$$

Так как

$$(66)\qquad \int_D\left|\frac{A(z,\ z')}{z-z'}\right|dx'\,dy'\leqslant\int\limits_{\substack{z\in D\\ |z-z'|>1}}|A(z,\ z')|\,dx'\,dy'+$$
$$+\|A\|\int\limits_{\substack{z\in D\\ |z-z'|\leqslant 1}}\frac{1}{|z-z'|}\,dx'\,dy'\leqslant(2\pi+1)\,\|A|$$

и, аналогично,

$$(67)\qquad \int_D\left|\frac{A(z,\ z')}{z-z'}\right|dx\,dy\leqslant(2\pi+1)\,\|A\|,$$

то, в силу леммы 5, интеграл (65) существует для почти всех $z\in D$. Кроме того, из леммы 5 следует, что $\Gamma(A)$ есть отображение $\hat{L}_p(D,\ \mathfrak{Y})$ в $L_p(D,\mathfrak{Y})$, норма которого $<(2\pi+1)\|A\|$. Так как $A(z,\ z')f(z')\in\mathfrak{Y}_j$ для любого $z\in e_j$, то, очевидно, $\Gamma(A)f\in\hat{L}_p(D,\ \mathfrak{Y})$ для любой функции $f\in\hat{L}_p(D,\ \mathfrak{Y})$. Наконец, из (64) и (65) вытекает, что $T\Gamma(A)-\Gamma(A)T=\varphi(A)$, $A\in\mathfrak{A}$. Итак, выполнено предположение (b) теоремы 8.

Для любых A_1, A_2 из $\mathfrak{A}$ положим

$$(68)\qquad (\psi(A_1,\ A_2))(z_1,\ z_2)=\int_D\frac{A_1(z_1,\ z')\,A_2(z',\ z_2)}{z'-z_2}\,dx'\,dy'.$$

Поскольку

$$(69)\qquad \int_D\left|\frac{A_1(z_1,\ z')\,A_2(z',\ z_2)}{z'-z_2}\right|dx'\,dy'\leqslant$$
$$\leqslant\|A_1\|\int\limits_{\substack{z'\in D\\ |z'-z_2|>1}}|A_2(z',\ z_2)|\,dx'\,dy'+$$
$$+\|A_1\|\,\|A_2\|\int\limits_{\substack{z'\in D\\ |z'-z_2|\leqslant 1}}\frac{1}{|z'-z_2|}\,dx'\,dy',$$

интеграл (68) существует и

$$(70)\qquad |\psi(A_1,\ A_2)(z_1,\ z_2)|\leqslant(2\pi+1)\,\|A_1\|\,\|A_2\|.$$

По теореме Тонелли (III.11.14)

$$\int\limits_D |\psi(A_1, A_2)(z_1, z_2)|\,dx_1\,dy_1 \leqslant \tag{71}$$

$$\leqslant \int\limits_{\substack{z'\in D\\ |z'-z_2|>1}} \left\{ \int\limits_D |A(z_1, z')|\,dz_1 \right\} |A_2(z', z_2)|\,dx'\,dy' +$$

$$+ \|A_2\| \int\limits_{\substack{z'\in D\\ |z'-z_2|\leqslant 1}} \frac{1}{|z'-z_2|} \left\{ \int\limits_D |A(z_1, z')|\,dx_1\,dy_1 \right\} dx'\,dy' \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi+1)\,\|A_1\|\,\|A_2\|,$$

и, аналогично,

$$\int\limits_D |\psi(A_1, A_2)(z_1, z_2)|\,dx_2\,dy_2 \leqslant (2\pi+1)\,\|A_1\|\,\|A_2\|. \tag{72}$$

Так как $A_1(z_1, z')A_2(z', z_2)v \in \mathfrak{Y}_j$ для всех $v \in \mathfrak{Y}$ и $z_1 \in e_j$, то из (68) следует, что $[\psi(A_1, A_2)(z_1, z_2)]v \in \mathfrak{Y}_j$ для всех $v \in \mathfrak{Y}$ и $z_1 \in e_j$. Используя теперь соотношения (70), (71) и (72), мы видим, что $\psi(A_1, A_2) \in \mathfrak{A}$ и $|\psi(A_1, A_2)| \leqslant 3(2\pi+1)\,\|A_1\|\,\|A_2\|$. В силу леммы 5 интеграл

$$\int\limits_D \left| \frac{A_2(z, z')}{z-z'} \right| |f(z')|\,dx'\,dy' \tag{73}$$

существует почти всюду для любой функции $f \in \hat{L}_p(D, \mathfrak{Y})$, и, снова применяя эту лемму, мы видим, что интеграл

$$\int\limits_D |A_1(z'', z)| \left\{ \int\limits_D \left| \frac{A_2(z, z')}{z-z'} \right| |f(z')|\,dx'\,dy' \right\} dx\,dy \tag{74}$$

существует для почти всех $z'' \in D$. Следовательно, по теореме Тонелли (III.11.14) интеграл

$$\int\limits_D \int\limits_D |A_1(z'', z)| \frac{|A_2(z, z')|}{|z-z'|} |f(z')|\,dx'\,dy'\,dx\,dy \tag{75}$$

существует для почти всех $z'' \in D$. Из (65) и (68) и теоремы Фубини (III.11.9) вытекает, что $\varphi(A_1)\,\Gamma(A_2) = \varphi(\psi(A_1, A_2))$. Таким образом, выполнено предположение (c) теоремы 8.

Согласно предположению теоремы, замыкание множества D не совпадает со всей комплексной плоскостью. Поэтому существует такое комплексное λ_0, что расстояние от λ_0 до точек из D больше некоторого положительного числа K. Ясно, что оператор $\lambda_0 I - T$ обладает ограниченным и всюду определенным обратным оператором $f(s) \to (\lambda_0 - s)^{-1} f(s)$ и $|(\lambda_0 I - T)^{-1}| \leqslant K^{-1}$. Имеет место неравенство $|\varphi(A)(\lambda_0 I - T)^{-1}| \leqslant K^{-1}\,\|A\|$; следовательно, если $K^{-1} \| A \| < 1$, то, согласно лемме VII.3.4, оператор $(I - \varphi(A)(\lambda_0 I - T)^{-1})^{-1}$ существует, всюду определен и ограничен. Таким образом, если величина $K^{-1} \| A \|$ достаточно мала, то выполнены предположения следствия 9.

Применяя теперь теорему 8 и следствие 9, мы приходим к требуемому утверждению, ч. т. д.

Теоремы 1 и 8 могут быть применены, как, вероятно, догадывается читатель, также к оператору $(Tf)(s) = sf(s)$ в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Именно этот случай теорем 1 и 8 потребуется нам для изучения самосопряженных операторов с непрерывным спектром, а также операторов, возникших как возмущения таких самосопряженных операторов; теоремы 10 и 7 непригодны для этих целей. Однако в одномерном случае, в отличие от двумерного, интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{|s-\sigma|}\, d\sigma \tag{1}$$

расходится при $0 \leqslant s \leqslant 1$, так что для применения теоремы 1 надо привлечь *сингулярные* интегралы. Это обстоятельство вносит в нашу теорию ряд досадных, хотя и несущественных усложнений; в частности, прежде чем применить теорему 1, мы должны предварительно заняться некоторыми определениями и леммами из теории сингулярных интегралов.

11. Определение. Пусть γ и β — вещественные числа, $\gamma \geqslant 0$, $1 > \beta > 0$, и $\mathfrak{X}$ — банахово пространство. Через A обозначим $\mathfrak{X}$-значную функцию, определенную на вещественной прямой и положим

$$\| A \|_{\gamma, \beta} = \sup_{-\infty < s < \infty} (1 + |s|)^{\gamma} |A(s)| + \sup_{\substack{-\infty < s < \infty \\ h > 0}} h^{-\beta} |A(s+h) - A(s)|. \tag{2}$$

12. Лемма. *Пусть γ, β — вещественные числа, $\gamma \geqslant 0$, $1 > \beta > 0$, $\mathfrak{X}$ — банахово пространство и A — такая $\mathfrak{X}$-значная функция, определенная на вещественной оси, что $\| A \|_{\gamma, \beta} < \infty$. Тогда*

(a) *несобственный интеграл*

$$(TA)(s) = \mathscr{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\sigma)}{s-\sigma}\, d\sigma = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left\{ \int_{-\infty}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{\infty} \right\} \frac{A(\sigma)}{s-\sigma}\, d\sigma \tag{3}$$

существует;

(b) *найдется такая конечная постоянная $M_1(\gamma, \beta)$, зависящая только от γ и β, что*

$$\| TA \|_{0, \beta} \leqslant M_1(\gamma, \beta) \| A \|_{\gamma, \beta}. \tag{4}$$

Доказательство. Выберем число $\bar{\gamma}$ так, чтобы $0<\bar{\gamma}\leqslant\gamma$ и $\bar{\gamma}<2$. Положим $(\hat{\gamma})^{-1}+\bar{\gamma}/2=1$. Так как $(1+|\sigma|)^{\gamma}|A(\sigma)|\leqslant\|A\|_{\gamma,\beta}$, то по неравенству Гёльдера

$$(5)\qquad \int\limits_{|s-\sigma|>1}\left|\frac{A(\sigma)}{s-\sigma}\right|d\sigma\leqslant\|A\|_{\gamma,\beta}\Bigl(\int\limits_{|s-\sigma|>1}(1+|\sigma|^{-\bar{\gamma}})^{2/\bar{\gamma}}d\sigma\Bigr)^{\bar{\gamma}/2}\times$$
$$\times\Bigl(\int\limits_{|s-\sigma|>1}|s-\sigma|^{-\bar{\gamma}}d\sigma\Bigr)^{1/\hat{\gamma}}<\infty.$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_{|s-\sigma|>1}(A(\sigma))/(s-\sigma)\,d\sigma$ существует. Так как $|A(\sigma)-A(s)|\leqslant\|A\|_{\gamma,\beta}|\sigma-s|^{\beta}$ и

$$(6)\qquad \mathscr{P}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\sigma}{\sigma}=0,$$

то

$$(7)\qquad \Bigl\{\int\limits_{s-1}^{s-\varepsilon}+\int\limits_{s+\varepsilon}^{s+1}\Bigr\}\frac{A(\sigma)}{s-\sigma}d\sigma=\Bigl\{\int\limits_{s-1}^{s-\varepsilon}+\int\limits_{s+\varepsilon}^{s+1}\Bigr\}\frac{A(\sigma)-A(s)}{s-\sigma}d\sigma$$

и

$$(8)\qquad \int\limits_{s-1}^{s+1}\left|\frac{A(\sigma)-A(s)}{s-\sigma}\right|d\sigma\leqslant\|A\|_{\gamma,\beta}\int\limits_{s-1}^{s+1}|s-\sigma|^{\beta-1}d\sigma<\infty.$$

Поэтому существует предел

$$(9)\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\Bigl\{\int\limits_{s-1}^{s-\varepsilon}+\int\limits_{s+\varepsilon}^{s+1}\Bigr\}\frac{A(\sigma)}{s-\sigma}d\sigma=\int\limits_{s-1}^{s+1}\frac{A(\sigma)-A(s)}{s-\sigma}d\sigma.$$

Отсюда вытекает существование предела (3). Кроме того, используя соотношения (5) и (8), мы можем найти такую конечную постоянную $M_0(\gamma,\beta)$, зависящую только от γ и β, что

$$(10)\qquad \left|\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\sigma)}{s-\sigma}d\sigma\right|\leqslant M_0(\gamma,\beta)\|A\|_{\gamma,\beta},\qquad -\infty<s<+\infty.$$

Очевидно, что

$$(11)\qquad (TA)(s-h)-(TA)(s+h)=$$
$$=\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\sigma)}{s-h-\sigma}d\sigma-\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\sigma)}{s+h-\sigma}d\sigma=$$

$$= 2h\mathscr{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\sigma)}{(s+h-\sigma)(s-h-\sigma)}\,d\sigma = 2h\mathscr{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\sigma+s)}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma.$$

Поскольку $1/(\sigma+h)(\sigma-h)$ является четной функцией от σ, то

$$\mathscr{P} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma = \mathscr{P} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma\,, \tag{12}$$

так что

$$\mathscr{P} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma = \frac{1}{2}\mathscr{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma = \frac{1}{4h}\mathscr{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma-h} - \frac{1}{\sigma+h}\right) d\sigma = 0. \tag{13}$$

Из соотношения (11) следует, что если $h > 0$, то

$$\begin{aligned} &|(TA)(s+h)-(TA)(s-h)| \leqslant \\ &\leqslant 2h\left|\mathscr{P} \int_{0}^{\infty} \frac{A(\sigma+s)}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma - \mathscr{P}\int_{0}^{\infty} \frac{A(h+s)}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma\right| + \\ &+2h\left|\mathscr{P} \int_{-\infty}^{0} \frac{A(\sigma+s)}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma - \mathscr{P} \int_{-\infty}^{0} \frac{A(-h+s)}{(\sigma+h)(\sigma-h)}\,d\sigma\right| \leqslant \\ &\leqslant 2h \int_{0}^{\infty} \left|\frac{A(\sigma+s)-A(h+s)}{\sigma^2-h^2}\right| d\sigma + 2h \int_{-\infty}^{0} \left|\frac{A(\sigma+s)-A(-h+s)}{\sigma^2-h^2}\right| d\sigma \leqslant \\ &\leqslant 4h\,\|A\|_{\gamma,\,\beta} \int_{0}^{\infty} \frac{|\sigma-h|^{\beta}}{|\sigma^2-h^2|}\,d\sigma. \end{aligned} \tag{14}$$

Из неравенства (14) видно, что существует такая постоянная $M_\infty(\gamma, \beta)$, зависящая только от γ и β, что $|(TA)(s+h)-(TA)(s)| \leqslant \leqslant M_\infty(\gamma, \beta)h^{\beta}$ при $-\infty < s < +\infty$. Отсюда, используя неравенство (10), мы сразу же получаем утверждение (b) леммы, ч. т. д.

В следующем определении указывается класс функций двух вещественных переменных, близкий к тому классу функций одной переменной, который описан в определении 11.

13. Определение. Пусть γ, β — вещественные числа, $\gamma \geqslant 0$, $1 > \beta > 0$, и $\mathfrak{X}$ — банахово пространство. Пусть $A(\cdot, \cdot)$ есть $\mathfrak{X}$-значная функция двух вещественных переменных. Положим

$$(15)\qquad \begin{aligned} &(E_h^{(1)}A)(s_1, s_2) = A(s_1+h, s_2),\\ &(E_h^{(2)}A)(s_1, s_2) = A(s_1, s_2+h), \qquad -\infty < h < \infty; \end{aligned}$$

$$(16)\qquad O_h^{(1)}A = h^{-\beta}(E_h^{(1)}A - A), \quad O_h^{(2)}A = h^{-\beta}(E_h^{(2)}A - A), \quad \infty > h > 0;$$

$$(17)\qquad \begin{aligned} &(O_\infty^{(1)}A)(s_1, s_2) = (1+|s_1|^\gamma)A(s_1, s_2),\\ &(O_\infty^{(2)}A)(s_1, s_2) = (1+|s_2|^\gamma)A(s_1, s_2). \end{aligned}$$

Пусть

$$(18)\qquad \|A\|_{\gamma, \beta} = \sup_{\infty \geqslant h_1,\, h_2 > 0}\ \sup_{\infty > s_1,\, s_2 > -\infty} |(O_{h_1}^{(1)}O_{h_2}^{(2)}A)(s_1, s_2)|;$$

обозначим через $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$ множество всех $\mathfrak{X}$-значных функций A от двух переменных, для которых $\|A\|_{\gamma, \beta} < \infty$.

14. Лемма. *$\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$ есть B-пространство с нормой $\|A\|_{\gamma, \beta}$.*

Доказательство. Проверку того, что $\|A\|_{\gamma, \beta}$ является нормой в $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$, мы предоставляем читателю; докажем лишь полноту $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$. Пусть $\{A_m\}$ — последовательность Коши в $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$. Из формул (15) — (18) ясно, что для любой пары вещественных чисел $[s_1, s_2]$ последовательность $\{A_m(s_1, s_2)\}$ является последовательностью Коши в $\mathfrak{X}$. Следовательно, существует такая функция A двух вещественных переменных, что $\lim\limits_{m\to\infty} A_m(s_1, s_2) = A(s_1, s_2)$ для всех $-\infty < s_1, s_2 < \infty$. Согласно соотношениям (15) — (17),

$$(19)\qquad \lim_{m\to\infty} (O_{h_1}^{(1)}O_{h_2}^{(1)}A_m)(s_1, s_2) = \\ = (O_{h_1}^{(1)}O_{h_2}^{(1)}A)(s_1, s_2), \quad -\infty < s_1, s_2 < \infty, \quad \infty \geqslant h_1, h_2 > 0.$$

Следовательно,

$$(20)\qquad \sup_{\infty \geqslant h_1,\, h_2 > 0}\ \sup_{\infty > s_1,\, s_2 > -\infty} |\{O_{h_1}^{(1)}O_{h_2}^{(2)}(A - A_l)\}(s_1, s_2)| \leqslant \\ \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \|A_m - A_l\|_{\gamma, \beta}, \qquad l \geqslant 1.$$

Из (20) вытекает, что $A \in \mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$ и $\lim\limits_{l\to\infty} \|A - A_l\|_{\gamma, \beta} = 0$, так что пространство $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$ полно, ч. т. д.

Следующая лемма является «двумерным вариантом» леммы 12; она будет применена для проверки предположения c(ii) теоремы 8 в некоторых конкретных случаях, которые мы рассмотрим в дальнейшем.

15. Лемма. *Пусть γ и β — вещественные числа, причем $\gamma > 0$ и $\beta > 0$. Пусть $\mathfrak{X}$ есть B-алгебра и $A, B \in \mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$. Тогда несобственный интеграл*

$$(21)\qquad (\psi(A, B))(s_1, s_2) = \mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(s_1, \sigma)B(\sigma, s_2)}{\sigma - s_2}\,d\sigma$$

существует. Кроме того, $\psi(A, B)$ принадлежит $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$ и существует такая конечная постоянная $M_2(\gamma, \beta)$, что

$$\|\psi(A, B)\|_{\gamma, \beta} \leqslant M_2(\gamma, \beta)\|A\|_{\gamma, \beta}\|B\|_{\gamma, \beta}.$$

Доказательство. Пусть $-\infty < s_1, s_2 < \infty$, $\infty \geqslant h_1, h_2 > 0$. Ясно, что

$$|(O_{h_1}^{(1)}O_h^{(2)}A)(s_1, \sigma)| \leqslant \|A\|_{\gamma, \beta}$$

при $-\infty < \sigma < \infty$ и $\infty \geqslant h > 0$ и, кроме того, справедливо неравенство $|(O_h^{(1)}O_{h_2}^{(2)}B)(\sigma, s_2)| \leqslant \|B\|_{\gamma, \beta}$ при $-\infty < \sigma < \infty$ и $\infty \geqslant \geqslant n > 0$. Отсюда, применяя соотношения (15)—(17), находим

$$(22)\qquad |(1+|\sigma|^\gamma)(O_{h_1}^{(1)}A)(s_1, \sigma)(O_{h_2}^{(2)}B)(\sigma, s_2) \leqslant \|A\|_{\gamma, \beta}\|B\|_{\gamma, \beta}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}(23)\qquad & h^{-\beta}|(O_{h_1}^{(1)}A)(s_1, \sigma+h)(O_{h_2}^{(2)}B)(\sigma+h, s_2) - \\ & \qquad - (O_{h_1}^{(1)}A)(s_1, \sigma)(O_{h_2}^{(2)}B)(\sigma, s_2)| \leqslant \\ & \leqslant h^{-\beta}|(O_{h_1}^{(1)}A)(s_1, \sigma+h) - (O_{h_1}^{(1)}A)(s_1, \sigma)||(O_{h_2}^{(2)}B)(\sigma+h, s_2)| + \\ & \quad + h^{-\beta}|(O_{h_1}^{(1)}A)(s_1, \sigma)|\,|(O_{h_2}^{(2)}B)(\sigma+h, s_2) - (O_{h_2}^{(2)}B)(\sigma, s_2)| \leqslant \\ & \leqslant |(O_{h_1}^{(1)}O_h^{(2)}A)(s_1, \sigma)|\,\|B\|_{\gamma, \beta} + \|A\|_{\gamma, \beta}|(O_h^{(1)}O_{h_2}^{(2)}B)(\sigma+h, s_2)| \leqslant \\ & \leqslant 2\|A\|_{\gamma, \beta}\|B\|_{\gamma, \beta}.\end{aligned}$$

Таким образом, если $M_1(\gamma, \beta)$ — постоянная, указанная в лемме 12, и

$$(24)\qquad (C)_s(s_1, s_2) = \mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(s_1, \sigma)B(\sigma, s_2)}{\sigma - s}\,d\sigma,$$

то $(\psi(A, B))(s_1, s_2) = C_{s_2}(s_1, s_2)$, и по лемме 12

$$\begin{aligned}(25)\qquad & |O_{h_1}^{(1)}O_{h_2}^{(2)}C_s(s_1, s_2)| + h^{-\beta}|O_{h_1}^{(1)}O_{h_2}^{(2)}C_{s+h}(s_1, s_2) - \\ & \qquad - O_{h_1}^{(1)}O_{h_2}^{(2)}C_s(s_1, s_2)| \leqslant \\ & \leqslant 2M_1(\gamma, \beta)\|A\|_{\gamma, \beta}\|B\|_{\gamma, \beta}, \quad -\infty < s < \infty, \quad 0 < h < \infty.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(26)\qquad & |(1+|s_2|^\gamma)O_{h_1}^{(1)}C_{s_2}(s_1, s_2)| = |O_{h_1}^{(1)}O_\infty^{(2)}C_s(s_1, s_2)|_{s=s_2} \leqslant \\ & \qquad \leqslant 2M_1(\gamma, \beta)\|A\|_{\gamma, \beta}\|B\|_{\gamma, \beta}.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$(27)\quad h^{-\beta}|(O_{h_1}^{(1)}C_{s_2+h})(s_1,\ s_2+h)-(O_{h_1}^{(1)}C_{s_2})(s_1,\ s_2)|\leqslant$$
$$\leqslant h^{-\beta}|O_{h_1}^{(1)}C_{s_2+h}(s_1,\ s_2+h)-O_{h_1}^{(1)}C_{s_2}(s_1,\ s_2+h)|+$$
$$+|O_{h_1}^{(1)}O_h^{(2)}C_{s_2}(s_1,\ s_2)|\leqslant 4M_1(\gamma,\ \beta)\,\|A\|_{\gamma,\beta}\|B\|_{\gamma,\beta}.$$

Теперь из (18) вытекает, что $\|\psi(A, B)\|_{\gamma,\beta}\leqslant 4M_2(\gamma,\beta)\,\|A\|_{\gamma,\beta}\|B\|_{\gamma,\beta}$, и лемма доказана, ч. т. д.

Следующая лемма является обобщением неравенства Гильберта XI.7.8. В дальнейшем мы будем применять ее для проверки первой части предположения (b) теоремы 8.

16. Лемма. *Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а $B(\mathfrak{H})$ обозначает B-пространство всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$. Пусть γ и β — вещественные числа, $\gamma>0$, $1>\beta>0$. Возьмем элемент $A\in\mathfrak{A}_{\gamma,\beta}(B(\mathfrak{H}))$ и $\mathfrak{H}$-значную бесконечно дифференцируемую функцию f вещественного переменного, обращающуюся в нуль вне некоторого отрезка вещественной прямой. Тогда несобственный интеграл*

$$(28)\qquad (\Gamma(A)f)(s)=\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(s,\sigma)f(\sigma)}{s-\sigma}\,d\sigma$$

существует. Кроме того, существует такая постоянная $M_3(\gamma,\beta)$, зависящая только от γ и β, что

$$(29)\quad \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|(\Gamma(A)f)(s)|^2ds\right\}^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant M_3(\gamma,\beta)\,\|A\|_{\gamma,\beta}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|^2ds\right\}^{1/2}.$$

Доказательство. Так как функция f бесконечно дифференцируема, то существует такая конечная постоянная $K(s)$, что

$$|A(s,\sigma+h)f(\sigma+h)-A(s,\sigma)f(\sigma)|\leqslant K(s)\,|h|^{\beta}$$

для всех достаточно малых β. Поскольку функция $A(s,\sigma)f(\sigma)$ обращается в нуль вне некоторого отрезка вещественной σ-оси, то по лемме 12 несобственный интеграл (28) существует.

Пусть φ — характеристическая функция отрезка $[-1, 1]$ и

$$(30)\quad B(s,\sigma)=A(s,\sigma)-A(s,s)\varphi(s-\sigma),\qquad -\infty<s,\ \sigma<\infty.$$

Тогда, очевидно,

$$(31)\quad \left|\frac{B(s,\sigma)}{s-\sigma}\right|=\left|\frac{A(s,\sigma)-A(s,s)}{s-\sigma}\right|\leqslant\|A\|_{\gamma,\beta}|s-\sigma|^{\beta},\ |s-\sigma|\leqslant 1.$$

Далее, пусть число $\bar{\gamma}$ выбрано так, что $0<\bar{\gamma}\leqslant\gamma$, $\bar{\gamma}<2$; положим $(\hat{\gamma})^{-1}+\bar{\gamma}/2=1$. Тогда, согласно неравенству Гёльдера,

$$(32)\qquad \int\limits_{|s-\sigma|\geqslant 1}\left|\frac{B(s,\sigma)}{s-\sigma}\right|d\sigma+\int\limits_{|s-\sigma|\geqslant 1}\left|\frac{B(\sigma,s)}{\sigma-s}\right|d\sigma=$$

$$=\int\limits_{|s-\sigma|\geqslant 1}\left|\frac{A(s,\sigma)}{\sigma-s}\right|d\sigma+\int\limits_{|s-\sigma|\geqslant 1}\left|\frac{A(\sigma,s)}{s-\sigma}\right|d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant 2\,\|A\|_{\gamma,\beta}\int\limits_{|s-\sigma|\geqslant 1}\frac{(1+|\sigma|^{\gamma})^{-1}}{|s-\sigma|}\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant 2\,\|A\|_{\gamma,\beta}\Bigl(\int\limits_{|s-\sigma|\geqslant 1}((1+|\sigma|)^{-\gamma})^{2/\bar{\gamma}}d\sigma\Bigr)^{\bar{\gamma}/2}\Bigl(\int\limits_{|s-\sigma|>1}|s-\sigma|^{-\hat{\gamma}}d\sigma\Bigr)^{1/\hat{\gamma}}.$$

Положим

$$(33)\qquad (\Gamma(B)f)(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{B(s,\sigma)}{s-\sigma}f(\sigma)\,d\sigma;$$

из леммы 5 и соотношений (31), (32) следует существование такой конечной постоянной $N(\gamma,\beta)$, зависящей только от γ и β что

$$(34)\qquad \Bigl\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|(\Gamma(B)f)(s)|^2\,ds\Bigr\}^{1/2}\leqslant N(\gamma,\beta)\,\|A\|_{\gamma,\beta}\Bigl\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|^2\,ds\Bigr\}^{1/2}.$$

С другой стороны, согласно формуле (30),

$$(35)\qquad (\Gamma(A)f)(s)=(\Gamma(B)f)(s)+A(s,s)\,\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(s-\sigma)}{s-\sigma}f(\sigma)\,d\sigma.$$

Положим

$$(36)\qquad \mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(s-\sigma)}{s-\sigma}f(\sigma)\,d\sigma=g(s).$$

Мы докажем существование такой конечной постоянной N', не зависящей от γ, β и f, что

$$(37)\qquad \Bigl\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(s)|^2\,ds\Bigr\}^{1/2}\leqslant N'\Bigl\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|^2\,ds\Bigr\}^{1/2}.$$

Для этого возьмем полный ортонормированный базис $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ в $\mathfrak{H}$. Тогда

$$(38)\qquad (g(s), x_\alpha) = \left(\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int_{-\infty}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{\infty}\right\}\varphi(s-\sigma)\frac{f(\sigma)}{s-\sigma}d\sigma, x_\alpha\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int_{-\infty}^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{\infty}\right\}\varphi(s-\sigma)\frac{(f(\sigma), x_\alpha)}{s-\sigma}d\sigma =$$

$$= \mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(s-\sigma)}{(s-\sigma)}(f(\sigma), x_\alpha)\,d\sigma =$$

$$= \mathscr{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(f(\sigma), x_\alpha)}{s-\sigma}d\sigma - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\varphi(s-\sigma))}{s-\sigma}(f(\sigma), x_\alpha)\,d\sigma.$$

Применяя теорему XI.7.8 и лемму XI.7.9, мы находим такую конечную постоянную Λ, не зависящую от f и α, что

$$(39)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|(g(s), x_\alpha)|^2\,ds \leqslant \Lambda\int_{-\infty}^{+\infty}|(f(s), x_\alpha)|^2\,ds.$$

Положим $N' = \Lambda^{1/2}$. Суммируя неравенства (39) по всем $\alpha \in A$ и используя теорему IV.4.13, мы получаем неравенство (37). Так как $|A(s, s)| \leqslant \|A\|_{\gamma,\beta}$, то из (37) следует, что

$$(40)\qquad \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|A(s, s)\,g(s)|^2\,ds\right\}^{1/2} \leqslant N'\,\|A\|_{\gamma,\beta}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|^2\,ds\right\}^{1/2}.$$

Из соотношений (35), (36) и (40) мы получаем (29), ч. т. д.

В определении 17 и двух последующих леммах мы несколько модифицируем результаты лемм 15 и 16 с тем, чтобы затем воспользоваться ими в теореме 21, содержащей основное применение теоремы 8.

17. Определение. Пусть γ, β и α — вещественные числа, $\gamma \geqslant 0$, $1 > \beta > 0$ и $\mathfrak{X}$ — банахово пространство. Если A — некоторая $\mathfrak{X}$-значная функция двух вещественных переменных, то положим

$$(41)\qquad (V(\alpha)A)(s_1, s_2) = (1+|s_1|)^\alpha A(s_1, s_2)(1+|s_2|)^{-\alpha}$$

и

$$(42)\qquad \|A\|_{\gamma,\beta,\alpha} = \|A\|_{\gamma,\beta} + \|V(\alpha)A\|_{\gamma,\beta}.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_{\gamma,\beta,\alpha}(\mathfrak{X})$ множество всех $\mathfrak{X}$-значных функций A двух переменных, удовлетворяющих условию $\|A\|_{\gamma,\beta,\alpha} < \infty$.

18. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *банахово пространство и* γ, β, α — *вещественные числа*, $\gamma > 0$, $1 > \beta > 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(a) $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$ *и* $\| A \|_{\gamma, \beta, \alpha} \geqslant \| A \|_{\gamma, \beta}$ *при* $A \in \mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X})$.

(b) $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X})$ *является* B-*пространством с нормой* $\| A \|_{\gamma, \beta, \alpha}$.

(c) *Предположим, что* $\mathfrak{X}$ *есть* B-*алгебра и* A, $B \in \mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X})$. *Тогда несобственный интеграл*

$$(\psi(A, B))(s_1, s_2) = \mathscr{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(s_1, \sigma) B(\sigma, s_2)}{\sigma - s_2} d\sigma \tag{43}$$

существует. Кроме того, $\psi(A, B)$ *принадлежит* $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X})$, *и существует такая конечная постоянная* $M_2(\gamma, \beta)$, *зависящая только от* γ *и* β, *что* $\| \psi(A, B) \|_{\gamma, \beta, \alpha} \leqslant 2M_2(\gamma, \beta) \| A \|_{\gamma, \beta, \alpha} \| B \|_{\gamma, \beta, \alpha}$.

Доказательство. Утверждение (а) сразу следует из определения 17. Возьмем последовательность Коши $\{A_m\}$ в $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X})$. Тогда, в силу соотношения (42), $\{A_m\}$ и $\{V(\alpha) A_m\}$ являются последовательностями Коши в $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$. По лемме 14 существуют такие элементы A и $\hat{A}$ в $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(\mathfrak{X})$, что $\lim_{m \to \infty} \| A_m - A \|_{\gamma, \beta} = 0$ и $\lim_{m \to \infty} \| V(\alpha) A_m - \hat{A} \|_{\gamma, \beta} = 0$. Из формул (15) — (18) определения 13 следует, что $A(s_1, s_2) = \lim_{m \to \infty} A_m(s_1, s_2)$ и

$$\hat{A}(s_1, s_2) = \lim_{m \to \infty} (1 + |s_1|)^{\alpha} A_m(s_1, s_2)(1 + |s_2|)^{-\alpha}$$

при $-\infty < s_1$, $s_2 < \infty$. Значит, $\hat{A} = V(\alpha) A$, откуда $A \in \mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X})$ и $\lim_{m \to \infty} \| A_m - A \|_{\gamma, \beta, \alpha} = 0$. Этим доказано утверждение (b).

Из соотношений (41) и (43) вытекает, что $V(\alpha) \psi(A, B) = \psi(V(\alpha) A, V(\alpha) B)$. Следовательно, согласно лемме 15, $\psi(A, B) \in \mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X})$ и

$$\| \psi(A, B) \|_{\gamma, \beta} + \| V(\alpha) \psi(A, B) \|_{\gamma, \beta} \leqslant 2M_2(\gamma, \beta) \| A \|_{\gamma, \beta, \alpha} \| B \|_{\gamma, \beta, \alpha};$$

тем самым утверждение (с) доказано.

19. Лемма. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *банахово пространство и* $B(\mathfrak{X})$ — *банахово пространство всех ограниченных операторов в* $\mathfrak{X}$. *Пусть* γ, β *и* α — *вещественные числа, причем* $\gamma > 0$, $1 > \beta > 0$, $1/2 + \gamma > \alpha \geqslant 1/2$. *Возьмем элемент* $A_1 \in \mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(\mathfrak{X})$ *и такую функцию* $f \in L_2((-\infty, +\infty), \mathfrak{X})$, *что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma f(\sigma)|^2 d\sigma < \infty. \tag{44}$$

Тогда интеграл

$$(45)\qquad (\varphi_0(A_1)f)(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} A_1(s,\sigma)f(\sigma)\,d\sigma$$

существует для почти всех s. *Кроме того, существует такая конечная постоянная* $M_3(\gamma,\beta,\alpha)$, *зависящая только от* γ, β, α, *что*

$$(46)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_0(A_1)f(s)|^2\,ds\leqslant M_3(\gamma,\beta,\alpha)\int_{-\infty}^{+\infty}|\sigma f(\sigma)|^2\,d\sigma.$$

Доказательство. Согласно определению 17,

$$(47)\qquad |A_1(s,\sigma)|\leqslant\|A\|_{\gamma,\beta,\alpha}(1+|s|)^{-\alpha-\gamma}(1+|\sigma|)^{\alpha-\gamma};$$

следовательно,

$$(48)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|A_1(s,\sigma)|^2}{(1+|\sigma|)^2}\,ds\,d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant\|A_1\|^2_{\gamma,\beta,\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds\,d\sigma}{(1+|s|)^{2(\alpha+\gamma)}(1+|\sigma|)^{2(\gamma-\alpha)}(1+|\sigma|)^2}<\infty.$$

Теперь существование интеграла (45) для почти всех s, а также неравенство (46) сразу же вытекают из леммы 5, ч. т. д.

20. Следствие. *Пусть выполнены предположения предыдущей леммы, и пусть* T_1 — *неограниченный линейный оператор в* $L_2((-\infty,+\infty),\mathfrak{H})$, *определенный формулами*

$$(49)\qquad \mathfrak{D}(T_1)=\left\{f\in L_2((-\infty,\ +\infty),\ \mathfrak{H})\ \Big|\ \int_{-\infty}^{+\infty}|\sigma f(\sigma)|^2\,d\sigma<\infty\right\},$$

$$(50)\qquad (T_1f)(s)=sf(s),\qquad f\in\mathfrak{D}(T_1).$$

Пусть $\varphi_1(A_1)$ — *интегральный оператор, область определения которого* $\mathfrak{D}(\varphi(A_1))$ *совпадает с* $\mathfrak{D}(T_1)$, *удовлетворяющий равенству* $\varphi_1(A_1)f=\varphi_0(A_1)f$, $f\in\mathfrak{D}(T)$. *Тогда для любого вещественного числа* $K\neq 0$ *оператор* $\varphi_1(A_1)(iK-T_1)^{-1}$ *всюду определен и ограничен. Кроме того,* $\lim\limits_{|K|\to\infty}|\varphi_1(A_1)(iK-T_1)^{-1}|=0$.

Доказательство. Ясно, что оператор $\varphi_1(A_1)(iK-T_1)^{-1}$ определен всюду; его ограниченность следует из неравенства (46). Поскольку $((iK-T_1)^{-1}f)(s)=(iK-s)^{-1}f(s)$ для любой функции $f\in L_2((-\infty,\ +\infty),\ \mathfrak{H})$, мы имеем

$$(51)\qquad (\varphi_1(A_1)(iK-T_1)^{-1}f)(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_1(s,\sigma)}{iK-\sigma}f(\sigma)\,d\sigma.$$

Следовательно, по лемме 5 и неравенству 47

(52) $$|\varphi_1(A_1)(iK-T_1)^{-1}|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|A_1\|^2_{\gamma,\beta,\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|s|)^{2(\alpha+\gamma)}(1+|\sigma|)^{2+2\gamma-2\alpha}} \frac{(1+|\sigma|)^2}{K^2+|\sigma|^2}\, ds\, d\sigma.$$

Так как $\lim\limits_{|K|\to\infty}(1+|\sigma|^2)(K^2+|\sigma|^2)^{-1}=0$ для любого σ и функция $(1+|\sigma|)^2(K^2+|\sigma|^2)^{-1}$ ограничена в области $|K|\geqslant 1$, $-\infty<\sigma<+\infty$, то по теореме Лебега III.6.16 интеграл в правой части неравенства (52) сходится к нулю. Отсюда следует, что $\lim\limits_{|K|\to\infty}|\varphi_1(A_1)(iK-T_1)^{-1}|=0$, ч. т. д.

А теперь мы можем применить теорему 8.

21. Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $B(\mathfrak{H})$ — B-пространство всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$, D — отрезок вещественной оси и $L_2(D, \mathfrak{H})$ — пространство всех $\mathfrak{H}$-значных измеримых по Борелю — Лебегу функций, определенных на D и удовлетворяющих условию*

(53) $$\left\{\int_D |f(s)|^2\, ds\right\}^{1/2}=|f|<\infty.$$

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — семейство попарно не пересекающихся борелевских множеств, объединением которых является D, и $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_2, \ldots$ — семейство замкнутых подпространств из $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$ подпространство из $L_2(D, \mathfrak{H})$, состоящее из всех таких функций $f\in L_2(D, \mathfrak{H})$, что $f(s)\in\mathfrak{H}_i$ для всех $s\in e_i$. Определим в $\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$ оператор T следующим образом:

(54) $$\mathfrak{D}(T)=\left\{f\in \hat{L}_2(D, \mathfrak{H}) \,\middle|\, \int_D |sf(s)|^2\, ds<\infty\right\},$$

(55) $$(Tf)(s)=sf(s), \qquad f\in\mathfrak{D}(T).$$

Пусть $\gamma>0$, $1>\beta>0$, $1/2+\gamma>\alpha\geqslant 1/2$. Предположим, что дан элемент $A\in\mathfrak{A}_{\gamma,\beta,\alpha}(B(\mathfrak{H}))$, причем $A(s, s')v\in\mathfrak{H}_i$ для всех $v\in\mathfrak{H}$ и всех $s\in e_i$, $1\leqslant i<\infty$, и $A(s, s')=0$ при $s\notin D$. Рассмотрим в $\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$ интегральный оператор $\varphi(A)$, определенный на множестве $\mathfrak{D}(\varphi(A))=\mathfrak{D}(T)$ формулой

(56) $$(\varphi(A)f)(s)=\int_D A(s, \sigma)f(\sigma)\, d\sigma, \qquad f\in\mathfrak{D}(T).$$

Тогда существует такая конечная положительная постоянная $\varepsilon=\varepsilon(\gamma, \beta, \alpha)$, зависящая только от γ, β и α, что если $\|A\|_{\gamma,\beta,\alpha}<\varepsilon$, *то оператор $T+\varphi(A)$ подобен оператору T и, следовательно, является спектральным оператором скалярного типа (возможно, неограниченным).*

Доказательство. Пространство $\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)=\int_D (f(\sigma), g(\sigma))\,d\sigma, \quad f, g\in\hat{L}_2(D, \mathfrak{H}). \tag{57}$$

Из (54), (55) и (57) следует, что оператор T симметрический. Так как

$$((\lambda I-T)^{-1}f)(s)=(\lambda-s)^{-1}f(s), \quad f\in\hat{L}_2(D, \mathfrak{H}), \quad \operatorname{Im}\lambda\neq 0, \tag{58}$$

то по лемме XII.1.2 и следствию XII.4.13(b) оператор является самосопряженным. В частности, T — спектральный оператор скалярного типа.

Применим теперь теорему 8. В качестве пространства $\mathfrak{X}$ из теоремы 8 возьмем $\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$, а в качестве пространства $\mathfrak{A}$ подпространство $\hat{\mathfrak{A}}_{\gamma, \beta, \alpha}(B(\mathfrak{H}))$ из $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(B(\mathfrak{H}))$, состоящее из всех таких $B\in\mathfrak{A}_{\gamma, \beta, \alpha}(B(\mathfrak{H}))$, что $B(s, \sigma)v\in\mathfrak{H}_i$ для $v\in\mathfrak{H}$, $s\in e_i$ и $B(s, \sigma)=0$ для всех вещественных $s\notin D$. Пусть $A_1\in\mathfrak{A}$. Так как справедливо включение $A_1(s, \sigma)f(\sigma)\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{H}_i$ для всех $s\in e_i$, ясно, что $(\varphi_0(A_i)f)(s)$ из соотношения (45) леммы 19 принадлежит подпространству $\mathfrak{H}_i$ для почти всех $s\in e_i$, так что $\varphi_0(A_1)f\in\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})\subseteq L_2(D, \mathfrak{H})$ для всех $f\in\mathfrak{D}(T)$. Обозначим через $\varphi(A_1)$ сужение оператора $\varphi_0(A_1)$ на $\mathfrak{D}(T)$. По лемме 19 и следствию 20 $\varphi(A_1)$ является линейным отображением с областью определения $\mathfrak{D}(\varphi(A_1))\supseteq\mathfrak{D}(T)$, удовлетворяющим предположению (a) теоремы 8.

Для дальнейшего заметим также, что, согласно следствию 20,

$$\lim_{|K|\to\infty} |\varphi(A_1)(iK-T)^{-1}|=0. \tag{59}$$

Теперь для проверки предположения (b) теоремы 8 мы применим предыдущие леммы. Замыкание в топологии пространства $L_2((-\infty, +\infty), \mathfrak{H})$ множества $C_0^\infty(\mathfrak{H})$ всех бесконечно дифференцируемых функций f, обращающихся в нуль вне ограниченного отрезка, содержит, очевидно, функции, постоянные на данном отрезке $J\subset(-\infty, +\infty)$ и обращающиеся в нуль вне J. Следовательно, по лемме III.8.3, $C_0^\infty(\mathfrak{H})$ плотно в $L_2((-\infty, +\infty), \mathfrak{H})$. Согласно леммам 18(a) и 16, существует ограниченное линейное отображение Γ_1 пространства $\hat{\mathfrak{A}}_{\gamma, \beta, \alpha}(B(\mathfrak{H}))$ в $B(L_2(-\infty, +\infty), \mathfrak{H})$, такое, что

$$(\Gamma_1(A_1)f)(s)=\mathscr{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_1(s, \sigma)f(\sigma)}{s-\sigma}\,d\sigma, \quad B\in\mathfrak{A}, \quad f\in C_0^\infty(\mathfrak{H}). \tag{60}$$

Так как $A_1(s, \sigma)=0$ при $s \notin D$ и $A_1(s, \sigma) v \in \mathfrak{H}_i$ при $s \in e_i$ и $v \in \mathfrak{H}$, то из (60) вытекает, что $\Gamma_1(A_1)$ отображает $C_0^\infty(\mathfrak{H})$ в $\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$. Таким образом, $\Gamma_1(A_1)$ отображает $\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$ в себя. Для любого $A_1 \in \mathfrak{A}$ обозначим через $\Gamma(A_1)$ сужение $\Gamma_1(A_1) \mid \hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$ оператора $\Gamma_1(A_1)$ на $\hat{L}_2(D, \mathfrak{H})$.

Пусть T_1 — оператор в $L_2((-\infty, +\infty), \mathfrak{H})$, определенный формулами (49) и (50), так что T есть сужение T_1 на $\hat{L}_2(D_2, \mathfrak{H}) \supset \mathfrak{D}(T)$. Ясно, что $(iI-T_1)^{-1}$ — ограниченный оператор, определенный соотношением $((iI-T_1)^{-1} f)(s)=(i-s)^{-1} f(s)$. Поэтому, согласно лемме XII.1.2, T_1 — замкнутый оператор. Из (60) вытекает, что

$$(61)\quad ((T_1\Gamma_1(A_1)-\Gamma_1(A_1)T_1)f)(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} A_1(s, \sigma) f(\sigma)\, d\sigma, \qquad f \in C_0^\infty(\mathfrak{H}).$$

Пусть μ — борелевская мера на вещественной оси, определенная формулой $\mu(e)=\int_e (1+\sigma^2)\, d\sigma$, так что по теореме III.10.4

$$(62)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} g_0(s)\, \mu(ds)=\int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\sigma)(1+\sigma^2)\, d\sigma$$

для любой неотрицательной измеримой по Борелю функции g_0.

Замыкание (в топологии пространства $L_2(\mu, \mathfrak{H})$) множества $C_0^\infty(\mathfrak{H})$ всех бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне ограниченного интервала, очевидно, содержит все функции, постоянные на некотором ограниченном интервале $J \subseteq (-\infty, +\infty)$ и обращающиеся в нуль вне J. Следовательно, по лемме III.8.3 множество $C_0^\infty(\mathfrak{H})$ плотно в гильбертовом пространстве $L_2(\mu, \mathfrak{H})$. Значит, если $g \in \mathfrak{D}(T)=L_2(\mu, \mathfrak{H})$, то существует такая последовательность $\{g_n\}$ элементов из $C_0^\infty(\mathfrak{H})$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\sigma^2) \,| g_n(\sigma)-g(\sigma)|^2\, d\sigma=0.$$

Тогда $g_n \to g$ и $Tg_n \to Tg$ в топологии $L_2((-\infty, +\infty), \mathfrak{H})$ при $n \to \infty$. Равенство (61) справедливо для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathfrak{H})$, но так как оператор $\Gamma_1(A_1)$ ограничен, оператор T_1 замкнут, а оператор $\varphi_0(A_1)(iK-T)^{-1}$ ограничен для вещественных $K \neq 0$ (по следствию 20), то

$$(63)\quad ((T_1\Gamma_1(A_1)-\Gamma_1(A_1)T_1)g)(s)=\int_{-\infty}^{\infty} A_1(s, \sigma) g(\sigma)\, d\sigma, \qquad g \in \mathfrak{D}(T_1).$$

Взяв сужения всех операторов из равенства (63) на подмножество $\mathfrak{D}(T)$ из $\mathfrak{D}(T_1)$, получаем

$$(64)\qquad (T\Gamma(A_1)-\Gamma(A_1)T)f=\varphi(A_1)f,\quad A_1\in\mathfrak{A},\quad f\in\mathfrak{D}(T).$$

Итак, выполнено предположение (b) теоремы 8.

Возьмем теперь элементы A_1, $A_2\in\mathfrak{A}$ и функцию $f\in C_0^\infty(\mathfrak{H})$. Положим

$$(65)\qquad (\psi(A_1,\ A_2))(s_1,\ s_2)=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_1(s_1,\ \sigma)A_2(\sigma,\ s_2)}{\sigma-s_2}\,d\sigma.$$

Напомним, что, согласно лемме 18, несобственный интеграл в правой части этого равенства сходится. Так как $A_1(s_1,\ \sigma)A_2(\sigma,\ s_2)v\in\mathfrak{H}$ при $v\in\mathfrak{H}$ и $s_1\in e_i$ и $A_1(s_1,\ \sigma)A_2(\sigma,\ s_2)=0$ при $s\notin D$, то, очевидно, $\psi(A_1,\ A_2)\in\mathfrak{A}$.

Теперь мы покажем, что $\varphi(\psi(A_1,\ A_2))=\varphi(A_1)\Gamma(A_2)$ и проверим тем самым условие (i) п. (c) теоремы 8. Если действовать формально, то для этого достаточно применить к функции $f\in\hat{L}_2$ интегральный оператор с ядром (65) и в полученном двойном интеграле изменить порядок интегрирования. Но интеграл в соотношении (65) является несобственным, и поэтому осуществление этой простой идеи несколько усложняется. Мы поступим следующим образом. Пусть $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[-1,\ 1]$. Если $1>\varepsilon>0$, то в силу определений 13 и 17

$$(66)\qquad \left|\left\{\int_{-\infty}^{s-\varepsilon}+\int_{s+\varepsilon}^{\infty}\right\}\frac{A_2(s,\ \sigma)}{s-\sigma}f(\sigma)\,d\sigma\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|A_2(s,\ \sigma)-A_2(s,\ s)\chi(s-\sigma)|}{|s-\sigma|}\,|f(\sigma)|\,d\sigma\leqslant$$
$$\leqslant\|A_2\|_{\gamma,\beta}\int_{|s-\sigma|<1}|s-\sigma|^{\beta-1}|f(\sigma)|\,d\sigma+$$
$$+\|A_2\|_{\gamma,\beta,\alpha}(1+|s|)^{-\alpha-\gamma}\int_{|s-\sigma|>1}\frac{|f(\sigma)|}{|s-\sigma|}\,d\sigma.$$

Обозначим через $F(s)$ правую часть неравенства (66). Так как функция f ограничена и обращается в нуль вне некоторого отрезка, то, очевидно, функция $(1+s^2)|F(s)|^2$ не превосходит $\mathrm{const}\times\times(1+|s|)^{-2(\alpha+\gamma)}$. Поэтому $\int_{-\infty}^{+\infty}(1+s^2)|F(s)|^2\,ds<\infty$. Следовательно, если мы положим

$$(67)\qquad f_\varepsilon(s)=\left\{\int_{-\infty}^{s-\varepsilon}+\int_{s+\varepsilon}^{\infty}\right\}\frac{A^2(s,\ \sigma)}{s-\sigma}f(\sigma)\,d\sigma,$$

то из неравенства (66) и теоремы Лебега III.6.16 получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\sigma^2)\,|f_\varepsilon(\sigma)-(\Gamma(A_2)f)(\sigma)|^2\,d\sigma=0. \tag{68}$$

Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon=\Gamma(A_2)f$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_1 f_\varepsilon=T_1\Gamma(A_2)f$ в топологии пространства $L_2(D, \mathfrak{H})$. Так как оператор $\varphi_0(A_1)(iI-T_1)^{-1}$ ограничен, то

$$\begin{aligned}(\varphi_0(A_1)\Gamma(A_2)f)(s_1)&=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,(\varphi_0(A_1)f_\varepsilon)(s_1)=\\&=\underset{\varepsilon\to \infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{|s-\sigma|>\varepsilon}\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{\sigma-s}f(s)\,ds\right\}d\sigma.\end{aligned} \tag{69}$$

Для любого $\varepsilon>0$ и для всех s из произвольного отрезка существует такая конечная постоянная $K(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{\sigma-s}\right|<K(\varepsilon)(1+|\sigma|)^{-\gamma-1},\quad |s-\sigma|>\varepsilon. \tag{70}$$

Отсюда, применяя теорему Фубини, мы получаем из (69) соотношение

$$\begin{aligned}(\varphi_0(A_1)\Gamma(A_2)f)(s)&=\\&=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{|s-\sigma|>\varepsilon}\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{\sigma-s}\,d\sigma\right\}f(s)\,ds.\end{aligned} \tag{71}$$

С другой стороны, существует такая конечная постоянная K, что при $1>\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|s-\sigma|>\varepsilon}\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{\sigma-s}\,d\sigma\right|\leqslant\\&\leqslant\int_{|s-\sigma|>\varepsilon}\frac{|A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)-A_1(s_1,s)A_2(s,s)\chi(\sigma-s)|}{|\sigma-s|}\,d\sigma\leqslant\\&\leqslant K\int_{|s-\sigma|>1}\frac{1}{|\sigma-s|}\frac{1}{(1+|\sigma|^{\gamma})}\,d\sigma+K\int_{|s-\sigma|<1}|\sigma-s|^{\beta-1}\,d\sigma;\end{aligned} \tag{72}$$

следовательно, функция

$$\int_{|s-\sigma|>\varepsilon}\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{s-\sigma}\,d\sigma \tag{73}$$

равномерно ограничена. Из теоремы Лебега III.6.16 следует, что для любого $s_1 \in (-\infty, +\infty)$

$$(74)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{|s-\sigma|>\varepsilon}\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{\sigma-s}\,d\sigma\right\}f(s)\,ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\mathscr{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{\sigma-s}\,d\sigma\right\}f(s)\,ds.$$

Так как существуют предел «в среднем»

$$(75)\qquad \operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{|s-\sigma|>\varepsilon}\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{\sigma-s}\,d\sigma\right\}f(s)\,ds,$$

а также «поточечный» предел

$$(76)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{|s-\sigma|>\varepsilon}\frac{A_1(s_1,\sigma)A_2(\sigma,s)}{\sigma-s}\,d\sigma\right\}f(s)\,ds,\qquad -\infty<s_1<+\infty,$$

то в силу следствий III.3.8 и III.6.3 и теорем III.3.6 и III.6.12 эти пределы совпадают. Сравнивая теперь (69), (74) и (65), мы видим, что

$$(77)\qquad \varphi_0(\psi(A_1, A_2))f=\varphi_0(A_1)\Gamma_1(A_2)f,\qquad f\in C_0^\infty(\mathfrak{H}).$$

Возьмем элемент $g\in\mathfrak{D}(T_1)$. Как мы заметили выше, существует такая последовательность $\{g_n)$ элементов из $C_0^\infty(\mathfrak{H})$, что $g_n\to g$ и $T_1g_n\to T_1g$ в топологии пространства $L_2((-\infty, +\infty), \mathfrak{H})$ при $n\to\infty$. Используя доказанные выше равенство

$$(78)\qquad T_1\Gamma_1(A_2)=\Gamma_1(A_2)T_1+\varphi_0(A_2)$$

и ограниченность операторов $\Gamma_1(A_2)$ и $\varphi_0(A_2)(iI-T_1)^{-1}$, мы видим, что $\Gamma_1(A_2)g_n\to\Gamma_1(A_2)g$ и $T_1\Gamma_1(A_2)g_n\to T_1\Gamma_1(A_2)g$ при $n\to\infty$. Следовательно, в силу (77), $\varphi_0(\psi(A_1, A_2))g=\varphi_0(A_1)\Gamma_1(A_2)g$, $g\in\mathfrak{D}(T_1)$, откуда, сужая эти операторы на $\mathfrak{D}(T)\subseteq\mathfrak{D}(T_1)$, мы приходим к выводу, что $\varphi(\psi(A_1, A_2))f=\varphi(A_1)\Gamma(A_2)f$, $f\in\mathfrak{D}(T)$. Этим проверено предположение (c) теоремы 8.

Из леммы VII.3.4 и соотношения (59) следует, что оператор $(I-\varphi(A_1)(iK-T)^{-1})^{-1}$ существует, ограничен и определен всюду для достаточно больших вещественных K. Но тогда выполнены предположения следствия 9. Применяя теорему 8 и следствие 9, мы приходим к утверждению теоремы, ч. т. д.

Используя подходящие преобразования «диагонализации» (см. теорему XII.3.16), теорему 21 можно применить к широкому классу операторов. В следующей теореме мы покажем на примере применение этой теоремы к одному интересному классу дифференциальных операторов в частных производных.

22. Теорема. *Пусть n — целое число, $n \geqslant 3$, и E^n — вещественное n-мерное евклидово пространство.*

(a) *Пусть* ∇[1]) — *формальный дифференциальный оператор*:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \tag{1}$$

в E^n, а T_0 — неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(E^n)$, область определения которого состоит из функций f, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка и удовлетворяющих условию

$$|f(x)| + \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| + \sum_{i,\,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| = O(|x|^{-n-1}) \tag{2}$$

при $|x| \to \infty$, причем оператор T_0 действует по формуле

$$T_0 f = -\nabla f, \qquad f \in \mathfrak{D}(T_0). \tag{3}$$

Замыкание T_0 обозначим через T. Тогда T — самосопряженный оператор, спектр которого совпадает с положительной вещественной полуосью.

(b) *Существует такая положительная постоянная $\varepsilon = \varepsilon(n)$, зависящая только от n, что если комплекснозначная функция $V(\cdot) \in C^n(E^n)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{|J| \leqslant n+1} \int_{E^n} (1 + |x|^2) \, |\partial^J V(x)| \, dx < \varepsilon, \tag{4}$$

а через V обозначен ограниченный оператор в $L_2(E)^n$, определенный соотношением

$$(Vf)(x) = V(x) f(x), \qquad f \in L_2(E^n), \tag{5}$$

то оператор $T + V$ подобен оператору T; в частности, $T + V$ является неограниченным спектральным оператором в $L_2(E^n)$ скалярного типа.

Доказательство. Так как доказательство теоремы довольно-таки громоздко, мы предварительно укажем его основные этапы. Прежде всего мы представим невозмущенный оператор T_0 в виде оператора умножения на x в L_2-пространстве вектор-функций $f(x)$. Для этого воспользуемся сначала преобразованием Фурье, которое приведет оператор T_0 к оператору умножения на функцию, а затем, применяя элементарную замену переменной, мы получим из этого оператора оператор умножения на x. Необходимые для этого рассуждения несложны и связаны с теорией меры. После таких преобразова-

[1]) В отличие от обозначения, используемого в советской математической литературе, здесь символ ∇ обозначает оператор Лапласа.—*Прим. перев.*

ний, приводящих T_0 к диагональному виду, возмущающий оператор переходит в интегральный оператор. Из ограничений, налагаемых на функцию V, следует, что применима теорема 21, а это приводит нас к утверждению теоремы 22.

Перейдем к доказательству. Обозначим через $\hat{f}$ преобразование Фурье функции f, так что

$$\hat{f}(k)=(2\pi)^{-n/2}\operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty}\int\limits_{|x|\leqslant N} f(x)\,e^{ik\cdot x}\,dx; \tag{6}$$

тогда $W\colon f\to\hat{f}$ есть унитарное отображение $L_2(E^n)$ на себя. Если $f\in L_2(E^n)\cap L_1(E^n)$, то по теореме XV.11.3

$$\hat{f}(k)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{E^n} f(x)\,e^{ik\cdot x}\,dx. \tag{7}$$

Если $f\in\mathfrak{D}(T_0)$, то, дважды интегрируя по частям (что допускается условием (2)), находим

$$\widehat{T_0 f}(k)=-\int\limits_{E^n}(\nabla f)(x)\,e^{ik\cdot x}\,dx=
=|k|^2\int\limits_{E^n} f(x)\,e^{ik\cdot x}\,dx. \tag{8}$$

Определим в $L_2(E^n)$ оператор S формулами

$$\mathfrak{D}(S)=\left\{f\in L_2(E^n)\,\middle|\,\int\limits_{E^n}|k|^4|f(k)|^2\,dk<\infty\right\}, \tag{9}$$

$$(Sf)(k)=|k|^2 f(k),\qquad k\in E^n. \tag{10}$$

Из (8) вытекает, что $WT_0W^{-1}\subseteq S$.

Далее, обозначим через $C_0^\infty(E^n)$ пространство всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций с компактным носителем, определенных на E^n. Пусть $g\in C_0^\infty(E^n)$ и $g=\hat{f}$, $f\in L_2(E^n)$. Тогда по теореме Планшереля (XV.11.3)

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{E^n} g(k)\,e^{-ik\cdot x}\,dk. \tag{11}$$

Интегрируя (11) по частям, находим, что

$$(-1)^r|x|^{2r}f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{E^n}(\nabla^r g)(k)\,e^{-ik\cdot x}\,dk, \tag{12}$$

откуда $|f(x)|=O(|x|^{-2r})$ для любого целого r. Поскольку соотношение (11) можно дифференцировать по $x_1,\ldots,x_n$ любое число раз, применяя аналогичные рассуждения, мы получаем, что каждая частная производная $\partial^J f$ функции f удовлетворяет соотношению $|\partial^J f(x)| = O(|x|^{-2r})$ для любого целого r. Следовательно, $f \in \mathfrak{D}(T_0)$. Отсюда следует, что если S_0 — сужение S на подпространство $C_0^\infty(E^n)$ из $\mathfrak{D}(S)$, то $S_0 \subseteq WT_0W^{-1} \subseteq S$.

Пусть ν — мера в E^n, определенная формулой $\nu(e) = \int_e (1+|x|^4)\,dx$, так что по теореме III.10.4

$$(13) \qquad \int_{E^n} g_0(x)\,\nu(dx) = \int_{E^n} (1+|x|^4)\,g_0(x)\,dx$$

для любой неотрицательной измеримой по Борелю функции g_0. Легко видеть, что замыкание множества $C_0^\infty(E^n)$ в топологии пространства $L_2(E^n, \nu)$ содержит характеристическую функцию любого «прямоугольника»

$$(14) \qquad J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Отсюда, применяя лемму III.8.3, получаем, что множество $C_0^\infty(E^n)$ плотно в $L_2(E^n, \nu)$. Поэтому, если $g \in \mathfrak{D}(S) = L_2(E^n, \nu)$, то существует такая последовательность $\{g_m\}$ элементов из $C_0^\infty(E^n)$, что

$$(15) \qquad \lim_{m\to\infty} \int_{E^n} (1+|x|^4)\,|g_m(x) - g(x)|^2\,dx = 0.$$

Тогда $g_m \to g$ и $Sg_m \to Sg$ в топологии пространства $L_2(E^n)$ при $m \to \infty$. Отсюда следует (см. лемму XII.4.8(a)), что замыкание $\overline{S}_0$ оператора S_0 является расширением оператора S. С другой стороны, ясно, что для любого отличного от положительного вещественного числа k оператор $(kI - S)$ имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве формулой

$$(16) \qquad ((kI - S)^{-1} f)(x) = (k - |x|^2)^{-1} f(x), \qquad f \in L_2(E^n).$$

Поэтому по лемме XII.1.2 оператор S замкнут. Таким образом, $\overline{S}_0 = S$. Более того, очевидно что S симметрический и, следовательно, согласно следствию XII.4.13(b), самосопряженный.

Так как $S_0 \subseteq WT_0W^{-1} \subseteq S$ и $\overline{S}_0 = S$, то в силу леммы XII.4.8(a) и того факта, что W — изометрия пространства $L_2(E^n)$ на себя, мы имеем $WTW^{-1} = S$. Следовательно, оператор T самосопряжен.

Из выражения (16) для обратного оператора $(kI - S)^{-1}$ видно, что спектр $\sigma(S)$ совпадает с $[0, \infty)$. Из той же формулы ясно, что $|(kI - S)^{-1}| \to \infty$, когда k стремится к любой точке интервала $[0, \infty)$. Таким образом, согласно теореме XII.2.9(a), $\sigma(S) = [0, \infty)$. Так как $WTW^{-1} = S$, справедливо равенство $\sigma(T) = [0, \infty)$, и утверждение (a) теоремы доказано.

Из условия (4) видно, что функция $V(\cdot)$ принадлежит пространству $L_1(E^n)$. Положим

$$\hat{V}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{E^n} V(x)\, e^{ik \cdot x}\, dx. \tag{17}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$(-ik)^J \hat{V}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{E^n} (\partial^J V)(x)\, e^{ik \cdot x}\, dx, \qquad |J| \leqslant n+1 \tag{18}$$

по поводу используемых обозначений см. начало § XIV.2).

В частности, $|\hat{V}(k)| = O(|k|^{-n-1})$ при $|k| \to \infty$. Следовательно, функция $\hat{V}(k)$ интегрируема, откуда

$$V(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{E^n} \hat{V}(k)\, e^{-ik \cdot x}\, dk. \tag{19}$$

Определим в пространстве $L_2(E^n)$ оператор V_1 формулой

$$(V_1 f)(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{E^n} \hat{V}(k - k_1)\, f(k_1)\, dk_1, \qquad f \in L_2(E^n). \tag{20}$$

Применяя n-мерный аналог теоремы XI.3.21(d) (см. рассуждение, следующее за XI.3.22), находим

$$WVW^{-1}f = V_1 f, \qquad f \in L_2(E^n). \tag{21}$$

Для доказательства утверждения (b) нашей теоремы осталось показать, что если выполнено условие (4), то операторы S и $S + V_1$ подобны.

Для этого поступим следующим образом. Обозначим через μ, как и в § XI.7, такую меру на единичной сфере Σ пространства E^n, что

$$\int_{E^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_\Sigma \{f(r\omega)\, r^{n-1}\}\, \mu(d\omega)\, dr \tag{22}$$

для любой борелевской функции f, определенной на E^n, которая либо интегрируема на E^n, либо положительна. Любой борелевской функции f, определенной на E^n, поставим в соответствие вектор-функцию $[f]$, определенную на $[0, \infty]$ и принимающую значения в пространстве функций на единичной сфере Σ, полагая

$$\{[f](\rho)\}(\omega) = 2^{-1/2} \rho^{(n-2)/4} f(\rho^{1/2}\omega), \quad 0 \leqslant \rho < \infty, \quad \omega \in \Sigma. \tag{23}$$

Из формулы (22), используя теоремы III.11.17, III.11.14 и теорему Радона — Никодима (следствие III.10.6), находим, что преобразование Z: $f \to [f]$ изометрически отображает $L_2(E^n)$ на $\mathcal{L}_2 =$

$= L_2([0, \infty), L_2(\Sigma))$. Из (23) следует, что

(24) $$\{\rho [f](\rho)\}(\omega) = \{[g](\rho)\}(\omega),$$

где $g(k) = |k|^2 f(k)$; но тогда оператор $ZSZ^{-1} = \mathcal{S}$ в $\mathcal{L}_2$ имеет область определения

(25) $$\mathfrak{D}(\mathcal{S}) = \left\{ f \in \mathcal{L}_2 \,\middle|\, \int_0^\infty \rho^2 |f(\rho)|^2 \, d\rho < \infty \right\}$$

и действует по формуле

(26) $$(\mathcal{S} f)(\rho) = \rho f(\rho), \qquad f \in \mathcal{L}_2.$$

Теперь мы получим описание оператора $ZV_1Z^{-1} = \mathcal{V}$. Положим

(27) $$V_2(\rho, \rho'; \omega, \omega') = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n/2} (\rho\rho')^{(n-2)/4} \hat{V} (\rho^{1/2}\omega - (\rho')^{1/2} \omega').$$

Для любых $0 \leqslant \rho, \rho' < \infty$ определим в $L_2(\Sigma, \mu)$ интегральный оператор $V_3(\rho, \rho')$ формулой

(28) $$(V_3(\rho, \rho')\varphi)(\omega) = \int_\Sigma V_2(\rho, \rho'; \omega, \omega') \varphi(\omega') \mu(d\omega'), \quad \varphi \in L_2(\Sigma, \mu).$$

Тогда

(29) $$(\mathcal{V} f)(\rho) = \int_0^\infty V_3(\rho, \rho') f(\rho') \, d\rho', \qquad f \in L_2([0, \infty), L_2(\Sigma, \mu)).$$

Так как Z является изометрией пространства $L_2(E^n)$ на $\mathcal{L}_2$, для доказательства утверждения (b) теоремы осталось показать, что если выполнено условие (4), то операторы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S} + \mathcal{V}$ подобны.

В силу условия (4), равенство (18) допускает двукратное дифференцирование под знаком интеграла; следовательно, существует такая конечная постоянная M, не зависящая от ε, что

(30) $$|\hat{V}(k)| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \hat{V}}{\partial k_i}(k) \right| + \sum_{i, j=1}^n \left| \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial k_i \, \partial k_j}(k) \right| \leqslant M\varepsilon (1 + |k|^{n+1})^{-1}.$$

Заметим теперь, что существует постоянная c, для которой

(31) $$|\omega - \alpha\omega'| \geqslant c\, |\omega - \omega'|$$

при всех $0 < \alpha < 1$ и $\omega, \omega' \in \Sigma$. Действительно, если θ обозначает угол между ω и ω', то ясно, что $|\omega - \alpha\omega'| > 1$ при $\pi/2 \leqslant |\theta| \leqslant \pi$ и

(32) $$|\omega - \alpha\omega'| \geqslant |\sin\theta|, \qquad 0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi/2;$$

кроме того, $|\omega - \omega'| = 2\,|\sin(\theta/2)|$. Так как $|\sin\theta| \geqslant c_0\, |\sin(\theta/2)|$ при $0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi/2$ для некоторого $c_0 > 0$, то неравенство (31) доказано. Из (27), (30) и (31) вытекает существование такой конечной постоянной M', не зависящей от ε, что

$$(33)\qquad |\hat{V}(r\omega - r'\omega')| \leqslant M'\varepsilon(1+\max(r, r')|\omega-\omega'|)^{-n-1}.$$

Аналогично, дифференцируя (27) дважды и используя соотношения (30) и (31), мы видим, что

$$(34)\qquad \left|\frac{\partial\hat{V}}{\partial r}(r\omega - r'\omega')\right| + \left|\frac{\partial\hat{V}}{\partial r'}(r\omega - r'\omega')\right| + \left|\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial r\,\partial r'}(r\omega - r'\omega')\right| \leqslant \leqslant M'\varepsilon(1+\max(r, r')|\omega-\omega'|)^{-n-1}.$$

Определим для всех $0 \leqslant r, r' < \infty$ интегральный оператор $V_4(r, r')$ в $L_2(\Sigma, \mu)$ формулой

$$(35)\qquad (V_4(r, r')\varphi)(\omega) = \int_\Sigma \hat{V}(r\omega - r'\omega')\varphi(\omega')\mu(d\omega'),\qquad \varphi \in L_2(\Sigma, \mu),$$

так что

$$(36)\qquad V_3(\rho, \rho') = \frac{1}{2}(2\pi)^{-n/2}(\rho\rho')^{(n-2)/4}V_4(\rho^{1/2}, (\rho')^{1/2}).$$

Из соотношений (33) и (34), используя лемму 5, находим

$$(37)\qquad |V_4(r, r')| + \left|\frac{\partial V_4}{\partial r}(r, r')\right| + \left|\frac{\partial V_4}{\partial r'}(r, r')\right| + \left|\frac{\partial^2 V_4}{\partial r\,\partial r'}(r, r')\right| \leqslant \leqslant M'\varepsilon\int_\Sigma \frac{1}{(1+\max(r, r')|\omega-\omega_0|)^{n+1}}\mu(d\omega),$$

где $\omega_0 = [1, 0, \ldots, 0]$. Положим

$$(38)\qquad I(\alpha) = \int_\Sigma \frac{1}{(1+\alpha|\omega-\omega_0|)^{n+1}}\mu(d\omega),\qquad \alpha \geqslant 0.$$

Ясно, что функция $I(\alpha)$ ограничена на каждом отрезке. Обозначим через Σ_0 достаточно малую сферическую окрестность в Σ точки ω_0 и положим $\Sigma_1 = \Sigma - \Sigma_0$. Пусть

$$(39)\qquad I_0(\alpha) = \int_{\Sigma_0} \frac{1}{(1+\alpha|\omega-\omega_0|)^{n+1}}\mu(d\omega)$$

и

$$(40)\qquad I_1(\alpha) = \int_{\Sigma_1} \frac{1}{(1+\alpha|\omega-\omega_0|)^{n+1}}\mu(d\omega),$$

так что $I(\alpha) = I_0(\alpha) + I_1(\alpha)$. Очевидно, что $I_1(\alpha) = O(\alpha^{-(n+1)})$ при $\alpha \to \infty$. Кроме того, вводя в Σ_0 естественную систему координат и применяя обычную замену переменных в многомерном интеграле, мы можем записать функцию $I_0(\alpha)$ в виде

(41) $$I_0(\alpha)=\int\limits_{\substack{|y|\leqslant 1\\ y\in E^{n-1}}}\frac{D(y)}{(1+\alpha|y|)^{n+1}}\,dy,$$

где $D(y)$ — некоторая положительная бесконечно дифференцируемая функция «плотности» от y. Заменой переменной приведем интеграл (41) к виду

(42) $$I_0(\alpha)=\alpha^{-(n-1)}\int\limits_{\substack{|y|\leqslant\alpha\\ y\in E^{n-1}}}\frac{D(y/\alpha)}{(1+|y|)^{n+1}}\,dy.$$

Итак, $I_0(\alpha)=O(\alpha^{-(n-1)})$ при $\alpha\to\infty$. Следовательно, $I(\alpha)=O(\alpha^{-(n-1)})$ при $\alpha\to\infty$, т. е. существует такая абсолютная постоянная c', что $I(\alpha)\leqslant c'(1+|\alpha|)^{-n+1}$. Из этого неравенства и неравенства (37) вытекает существование такой конечной постоянной M'', не зависящей от ε, что

(43) $$|V_4(r,r')|+\left|\frac{\partial V_4}{\partial r}(r,r')\right|+\left|\frac{\partial V_4}{\partial r'}(r,r')\right|+\left|\frac{\partial^2 V_4}{\partial r\,\partial r'}(r,r')\right|\leqslant$$
$$\leqslant M''\varepsilon\,(1+\max(r,r'))^{-n+1}.$$

Положим $V_5(r,r')=(rr')^{(n-2)/2}V_4(r,r')$. Используя неравенство (43) и определения 13 и 17, мы можем найти такую конечную постоянную M''', не зависящую от ε, что

(44) $$|V_5(\cdot,\cdot)|_{1/2,\,1/2,\,1}\leqslant M'''\varepsilon.$$

Так как $(1/2)(2\pi)^{-n/2}V_5(\rho^{1/2},(\rho')^{1/2})=V_3(\rho,\rho')$ (см. (36)), то, еще раз применяя определения 13 и 17, получаем такую конечную постоянную M_0, не зависящую от ε, что

(45) $$|V_3(\cdot,\cdot)|_{1/4,\,1/4,\,1/2}\leqslant M_0\varepsilon.$$

Отсюда, используя теорему 21, приходим к выводу, что для достаточно малых $\varepsilon=\varepsilon(n)$ операторы $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}+\mathscr{V}$ подобны, ч. т. д.

Иногда оказываются полезными те промежуточные результаты, которые мы получили в ходе доказательства теоремы. Мы сейчас сформулируем их в виде следствия.

23. Следствие. *Пусть $n\geqslant 3$, а T, Σ и μ имеют тот же смысл, что и в предыдущей теореме. Пусть V — комплекснозначная функция, определенная на E^n, причем величина*

(46) $$|V|^{\vee}=\sum_{|J|\leqslant n+1}\int\limits_{\Sigma^n}(1+|x|^2)\,|\partial^J V(x)|\,dx$$

конечна. Тогда

(a) *если обозначать через* $\hat{f}$ *преобразование Фурье функции* $f \in L_2(E^n)$, *т. е.*

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \int\limits_{|x|\leqslant N} f(x)\, e^{ikx}\, dx, \tag{47}$$

и положить $(Z_1f)(\rho, \omega) = 2^{-1/2}\rho^{(n-2)/4} f(\rho^{1/2}\omega)$, $(Z_2f)(\rho) = (Z_1f)(\rho, \cdot)$ *для* $f \in L_2(E^n)$, *то* Z_2 *есть изометрия* $L_2(E^n)$ *на* $L_2([0, \infty), L_2(\Sigma, \mu)) = \mathscr{L}_2$;

(b) *оператор* $\mathscr{S} = Z_2TZ_2^{-1}$ *имеет область определения*

$$\mathfrak{D}(\mathscr{S}) = \left\{ f \in \mathscr{L}_2 \,\middle|\, \int\limits_0^\infty \rho^2 |f(\rho)|^2 d\rho < \infty \right\} \tag{48}$$

и действует по формуле

$$(\mathscr{S}f)(\rho) = \rho f(\rho), \qquad f \in \mathfrak{D}(\mathscr{S}); \tag{49}$$

(c) *если оператор* V_1 *определен в* $L_2(E)^n$ *формулой*

$$(V_1f)(x) = V(x) f(x), \tag{50}$$

то оператор $\mathscr{V} = Z_2V_1Z_2^{-1}$ *действует в* $\mathscr{L}_2$ *по формуле*

$$(\mathscr{V}f)(\rho) = \int\limits_0^\infty V_2(\rho, \sigma) f(\sigma)\, d\sigma, \qquad f \in \mathscr{L}_2, \tag{51}$$

где $V_2(\rho, \sigma)$ — *оператор в* $L_2(\Sigma, \mu)$ *вида*

$$(V_2(\rho, \sigma) g)(\omega) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n/2} (\rho\rho')^{(n-2)/4} \int\limits_\Sigma \hat{V}(\rho^{1/2}\omega - (\rho')^{1/2}\omega') \times \\ \times g(\omega')\, \mu(d\omega'), \qquad g \in L_2(\Sigma, \mu); \tag{52}$$

(d) *если* $V_3(r, r')$ — *оператор в* $L_2(\Sigma, \mu)$, *определенный соотношением*

$$(V_3(r, r') g)(\omega) = \int\limits_\Sigma \hat{V}(r\omega - r'\omega') g(\omega')\, \mu(d\omega'), \qquad g \in L_2(\Sigma, \mu), \tag{53}$$

то существует такая конечная постоянная M_n, *зависящая только от* n, *что*

$$|V_3(r, r')| + \left|\frac{\partial V_3}{\partial r}(r, r')\right| + \left|\frac{\partial V_3}{\partial r'}(r, r')\right| + \\ + \left|\frac{\partial^2 V_3}{\partial r\, \partial r'}(r, r')\right| \leqslant M_n |V|^{\check{}} (1 + \max(r, r'))^{-n+1}. \tag{54}$$

Мы закончим этот параграф теоремой, принадлежащей Дж. Фриману, в которой следствие 3 применяется к одному интересному классу квазинильпотентных операторов.

24. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, *а символом* $L_p\,[0, 1]$ *обозначено пространство всех измеримых по Борелю — Лебегу комплекснозначных функций на* $[0, 1]$, *удовлетворяющих условию*

$$(1)\qquad \left\{\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} = |f| < \infty.$$

Пусть $g(x, y)$ — *непрерывная функция, определенная в треугольнике* $D = \{[x, y] \mid 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$, *а* G — *интегральный оператор («вольтеррова типа»), определенный формулой*

$$(2)\qquad (Gf)(x) = \int_0^x g(x, y)\,f(y)\,dy, \qquad f \in L_p\,[0, 1].$$

Предположим, что

(i) g *имеет частные производные первого и второго порядка внутри области* D *и эти производные допускают непрерывные продолжения на весь треугольник* D;

(ii) $g(x, x) > 0$ *при* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *и* $\int_0^1 g(x, x)\,dx = c$.

Определим интегральный оператор J *формулой*

$$(3)\qquad (Jf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy, \qquad f \in L_p\,[0, 1].$$

Тогда операторы G *и* cJ *подобны.*

Доказательство. Сначала мы докажем теорему для случая, когда $g(x, x) = 1$, а затем покажем, что общий случай сводится к этому частному.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс функций A, определенных в треугольнике D и удовлетворяющих следующим условиям:

(a) A непрерывна в D и имеет внутри области D непрерывные частные производные первого и второго порядка по x, причем эти производные допускают непрерывные продолжения на весь треугольник D;

$$\text{(b)}\quad A(x, x) = \frac{\partial A}{\partial x}(x, x) = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Для каждой функции $A \in \mathfrak{A}$ положим

$$(4)\qquad |A| = \sup_{[x, y] \in D}\left\{|A(x, y)| + \left|\frac{\partial A}{\partial x}(x, y)\right| + \left|\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x, y)\right|\right\},$$

так что $\mathfrak{A}$ становится B-пространством. Для каждой функции $A \in \mathfrak{A}$ определим оператор

$$(5) \qquad (\varphi(A) f)(x) = \int_0^x A(x, y) f(y)\, dy, \qquad f \in L_p[0, 1].$$

Ясно, что $\varphi(A)$ — ограниченный оператор в $L_p[0, 1]$. Очевидно также, что $|\varphi(A)| \leqslant K_1 |A|$, где K_1 — некоторая конечная постоянная. Положим

$$(6) \qquad (\Gamma(A) f)(x) = \int_0^x \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_0^y A(\xi + x - y, \xi)\, d\xi \right\} f(y)\, dy, \qquad f \in L_p[0, 1].$$

Поскольку

$$(7) \quad \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int_0^y A_1(\xi + x - y, \xi)\, d\xi = \frac{\partial A_1}{\partial x}(x, y) - \int_0^y \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(\xi + x - y, \xi)\, d\xi$$

для всех $A_1 \in \mathfrak{A}$, правая часть равенства (6) является непрерывной функцией, а потому $\Gamma(A)$ — ограниченный линейный оператор в $L_p[0, 1]$ и $|\Gamma(A)| \leqslant K_2 |A|$, где K_2 — конечная постоянная.

Если $A \in \mathfrak{A}$ и $f \in L_p[0, 1]$, то интегрированием по частям находим

$$(8) \quad (\Gamma(A) Jf)(x) = \int_0^x \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial A}{\partial x}(\xi + x - y, \xi)\, d\xi \right\} \left\{ \int_0^y f(\eta)\, d\eta \right\} dy =$$
$$= -\int_0^x \left\{ \int_0^y \frac{\partial A}{\partial x}(\xi + x - y, \xi)\, d\xi \right\} f(y)\, dy +$$
$$+ \left\{ \int_0^x \frac{\partial A}{\partial x}(\xi, \xi)\, d\xi \right\} \left\{ \int_0^x f(y)\, dy \right\} =$$
$$= -\int_0^x \left\{ \int_0^y \frac{\partial A}{\partial x}(\xi + x - y, \xi)\, d\xi \right\} f(y)\, dy.$$

Кроме того, по теореме Фубини

$$(9) \quad (J\Gamma(A) f)(x) = \int_0^x \left\{ \int_0^\eta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta\, \partial y} \int_0^y A(\xi + \eta - y, \xi)\, d\xi \right\} f(y)\, dy \right\} d\eta =$$
$$= \int_0^x \left\{ \int_y^x \frac{\partial^2}{\partial \eta\, \partial y} \left\{ \int_0^y A(\xi + \eta - y, \xi)\, d\xi \right\} d\eta \right\} f(y)\, dy =$$

$$= \int_0^x \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^y A(\xi + x - y, \xi)\, d\xi - \int_0^y A(\xi, \xi)\, d\xi \right] \right\} f(y)\, dy =$$

$$= \int_0^x \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^y A(\xi + x - y, \xi)\, d\xi \right] \right\} f(y)\, dy =$$

$$= \int_0^x A(x, y) f(y)\, dy - \int_0^x \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} (\xi + x - y, \xi)\, d\xi \right\} f(y)\, dy.$$

Следовательно,

$$J\Gamma(A) - \Gamma(A) J = \varphi(A), \qquad A \in \mathfrak{A}. \tag{10}$$

Обозначим через $B_1(x, y)$ ядро оператора A_1, т. е. непрерывную функцию, записанную в правой части равенства (7). Тогда $\sup\limits_{[x, y] \in D} |B_1(x, y)| \leqslant |A_1|$, откуда

$$|(\Gamma(A_1) f)(x)| \leqslant |A_1| \int_0^x |f(y)|\, dy, \qquad f \in L_p[0, 1], \tag{11}$$

при $A_1 \in \mathfrak{A}$. А теперь по индукции получаем, что

$$|(\Gamma(A_1))^n f)(x)| \leqslant \frac{|A_1|^n}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} |f(y)|\, dy. \tag{12}$$

Значит,

$$|(\Gamma(A_1))^n| = O\left(\frac{|A_1|^n}{(n-1)!} \right),$$

а потому $\Gamma(A_1)$ — квазинильпотентный оператор для любого $A_1 \in \mathfrak{A}$.

Положим далее для любых A, $A_1 \in \mathfrak{A}$

$$(\psi(A, A_1))(x, y) = \int_y^x A(x, \eta) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta\, \partial y} \int_0^y A_1(\xi + \eta - y, \xi)\, d\xi \right\} d\eta. \tag{13}$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi(\psi(A, A_1)) = \varphi(A)\, \Gamma(A_1). \tag{14}$$

Обозначая через B_1 правую часть равенства (7), получаем

$$(\psi(A, A_1))(x, y) = \int_y^x A(x, \eta) B_1(\eta, y)\, d\eta. \tag{15}$$

Отсюда следует, что функция $(\psi(A, A_1))(x, y)$ непрерывна. Кроме того,

$$\frac{\partial\psi(A, A_1)}{\partial x}(x, y) = \int_y^x \frac{\partial A}{\partial x}(x, \eta) B_1(\eta, y)\, d\eta \tag{16}$$

и

$$\frac{\partial^2\psi(A, A_1)}{\partial x^2}(x, y) = \int_y^x \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(x, \eta) B_1(\eta, y)\, d\eta, \tag{17}$$

так что $\psi(A, A_1)(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядка по x. Кроме того, $\psi(A, A_1)(x, x) = (\partial\psi(A, A_1)/\partial x)(x, x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, и, следовательно, $\psi(A, A_1) \in \mathfrak{A}$. Учитывая соотношения (16) и (17), мы заключаем, что существует такая конечная постоянная K_3, для которой $|\psi(A, A_1)| \leqslant K_3 |A|\ |A_1|$.

Пусть $A \in \mathfrak{A}$ и σ_A — отображение $\mathfrak{A}$ в себя, определенное формулой $\sigma_A(A_1) = \psi(A, A_1)$. Покажем, что преобразование σ_A квазинильпотентно. Действительно, из (13), (16), (17) и неравенства, предшествующего формуле (11), мы видим, что

$$|\sigma_A(A_1)[x, y]| + \left|\frac{\partial\sigma_A(A_1)[x, y]}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial^2\sigma_A(A_1)[x, y]}{\partial x^2}\right| \leqslant \\ \leqslant |A|\,|A_1|\,|x-y|, \quad [x, y] \in D, \quad A, A_1 \in \mathfrak{A}. \tag{18}$$

Далее будем рассуждать по индукции. Предположим, что

$$|\sigma_A^n(A_1)[x, y]| + \left|\frac{\partial\sigma_A^n(A_1)}{\partial x}[x, y]\right| + \left|\frac{\partial^2\sigma_A^n(A_1)}{\partial x^2}[x, y]\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{|A|^n}{n!}|A_1|\,[2|x-y|]^n, \quad [x, y] \in D, \quad A, A_1 \in \mathfrak{A}. \tag{19}$$

Тогда, используя (13), (16), (17) и (7), находим

$$|\sigma_A^{n+1}(A_1)[x, y]| + \left|\frac{\partial\sigma_1^{n+1}(A_1)}{\partial x}[x, y]\right| + \left|\frac{\partial^2\sigma_A^{n+1}(A_1)}{\partial x^2}[x, y]\right| \leqslant \\ \leqslant |A| \int_y^x \left\{ \left|\frac{\partial\sigma_A^n(A_1)}{\partial\eta}(\eta, y)\right| + \int_0^y \left|\frac{\partial^2\sigma_A^n(A_1)}{\partial\eta^2}(\xi+\eta-y, \xi)\right| d\xi \right\} d\eta \leqslant \\ \leqslant \frac{|A|^{n+1}}{n!}|A_1|\,2^n(1+y)\int_y^x (\eta-y)^n\, d\eta \leqslant \\ \leqslant \frac{|A|^{n+1}}{(n+1)!}|A_1|\,[2(x-y)]^{n+1}. \tag{20}$$

Таким образом, неравенство (19) справедливо для всех n, так что

$$(21) \qquad |\sigma_A^n| = O\left(\frac{(2|A|)^n}{n!}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, преобразование σ_A квазинильпотентно для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Из следствия 4 вытекает, что операторы $J + A$ и J подобны. Этим доказана наша теорема при условии, когда $g(x, x) = 1$ и $(\partial g/\partial x)(x, x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Покажем, что общий случай сводится к рассмотренному. Пусть ψ — монотонно возрастающая функция, имеющая две непрерывные производные и отображающая отрезок $[0, 1]$ на себя. Через $\hat{\psi}$ обозначим обратное отображение. Возьмем комплекснозначную функцию $a(x)$, имеющую непрерывные производные первого и второго порядка в $[0, 1]$. Определим в пространстве $L_p[0, 1]$ оператор $(\overline{\psi} f)(x) = \exp(a(x)) f(\psi(x))$. Он ограничен и обладает ограниченным обратным, действующим по формуле $(\overline{\psi}^{-1} f)(x) = \exp(-a(\hat{\psi}(x))) f(\hat{\psi}(x))$. Из формулы (2), определяющей преобразование G, находим

$$(22) \qquad (\overline{\psi}^{-1} G \overline{\psi} f)(x) = \int_0^{\hat{\psi}(x)} g(\hat{\psi}(x), y) \exp(a(y) - a(\hat{\psi}(x))) f(\psi(y))\, dy =$$

$$= \int_0^x g(\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)) \exp(a(\hat{\psi}(y)) - a(\hat{\psi}(x))) \hat{\psi}'(y) f(y)\, dy.$$

Выберем функцию ψ так, чтобы

$$(23) \qquad \hat{\psi}'(x) = cg(\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x))^{-1},$$

т. е.

$$(24) \qquad \psi'(x) = c^{-1} g(x, x),$$

где $c = \int_0^1 g(x, x)\, dx$ (см. условие (ii) теоремы). Считая, что $\psi(0) = 0$, из равенства (24) получаем $\psi(1) = 1$, так что ψ имеет две непрерывные производные и отображает отрезок $[0, 1]$ на себя. Положим

$$g_1(x, y) = g(\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)) \hat{\psi}'(y) \exp(a(\hat{\psi}(y)) - a(\hat{\psi}(x)));$$

тогда $g_1(x, x) = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Определим функцию a следующим образом:

$$(25) \qquad \left\{\frac{\partial g}{\partial x}(\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x)) (\hat{\psi}'(x))^2\right\} \{g(\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x)) \hat{\psi}'(x)\}^{-1} = a(x);$$

тогда $(\partial g_1/\partial x)(x, x) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Кроме того, в силу соотношения (22)

$$(26) \qquad (\overline{\psi}^{-1}G\overline{\psi}f)(x) = \int_0^\infty g_1(x, y) f(y)\, dy.$$

Применяя к оператору $(1/c)\,\overline{\psi}^{-1}G\overline{\psi}$ рассмотренный выше частный случай теоремы 23, получаем, что оператор $(1/c)\,\overline{\psi}^{-1}G\overline{\psi}$ подобен J, так что G подобен cJ, ч. т. д.

3. Метод Фридрихса в случае дискретного спектра

Метод теории возмущений, изложенный в предыдущем параграфе, можно приспособить также и к операторам с дискретным спектром и даже к операторам со смешанным (дискретным и непрерывным) спектром. Теперь мы изложим некоторые результаты такого типа, принадлежащие Р. Тёрнеру, относительно спектрального характера некоторых классов компактных операторов.

Начнем с обобщения теоремы 2.1.

→ 1. Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство и $T \in B(\mathfrak{X})$. Пусть $\mathfrak{A}$ — «вспомогательное» B-пространство с нормой $|||A|||$, $A \in \mathfrak{A}$, а M_1, M_2 — положительные числа. Предположим, что даны*

(a) *непрерывное линейное отображение φ: $\mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$, норма которого не превосходит M_1;*

(b) *непрерывное линейное отображение η: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, норма которого не превосходит M_1;*

(c) *такое непрерывное линейное отображение Γ: $\mathfrak{A} \to B(\mathfrak{X})$ с нормой, не превосходящей M_1, что*

$$T\Gamma(A) - \Gamma(A)T = \varphi(A - \eta(A)), \qquad A \in \mathfrak{A};$$

(d) *непрерывное билинейное отображение $\psi(A, A_1)$ из $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, удовлетворяющее соотношениям*

$$\text{(i)} \qquad \varphi(\psi(A, A_1)) = \Gamma(A)\varphi(A_1), \qquad A, A_1 \in \mathfrak{A},$$

$$\text{(ii)} \qquad |||\psi(A, A_1)||| \leqslant M_2 |||A|||\, |||A_1|||, \qquad A, A_1 \in \mathfrak{A};$$

(e) *непрерывное билинейное отображение $\psi_0(A, A_1)$ из $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$, удовлетворяющее соотношениям*

$$\text{(i)} \qquad \varphi(\psi_0(A, A_1)) = \varphi(\eta(A))\Gamma(A_1), \qquad A, A_1 \in \mathfrak{A},$$

$$\text{(ii)} \qquad |||\psi_0(A, A_1)||| \leqslant M_2 |||A|||\, |||A_1|||, \qquad A, A_1 \in \mathfrak{A}.$$

Тогда для любого $A_1 \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющего неравенству $|||A_1||| < (6M_2)^{-1} + (2M_1)^{-1}$, существует такой оператор $A \in \mathfrak{A}$, что операторы $T + \varphi(A_1)$ и $T + \varphi(\eta(A))$ подобны.

Замечание. Теорема 2.1 является частным случаем этой теоремы при $\eta(A_0)=0$ для всех $A_0 \in \mathfrak{A}$. В приложениях к компактным операторам мы будем определять $\eta(A_0)$ так, что $\varphi(\eta(A_0))$ окажется «диагональной частью» оператора $\varphi(A_0)$ по отношению к тому базису в $\mathfrak{X}$, в котором оператор T диагонален.

Доказательство. Мы будем искать оператор U и элемент $A \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющие уравнению

$$(1)\qquad U(T+\varphi(A_1))=(T+\varphi(\eta(A)))U,$$

предполагая, что U имеет вид $U=I+\Gamma(A)$. При этом предположении уравнение (1) запишется в виде

$$(2)\qquad (I+\Gamma(A))(T+\varphi(A_1))=(T+\varphi(\eta(A)))(I+\Gamma(A)).$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$(3)\qquad \varphi(A-\eta(A))+\varphi(\eta(A))+\varphi(\eta(A))\Gamma(A)-\Gamma(A)\varphi(A_1)=\varphi(A_1).$$

В силу предположений (d) и (e) теоремы последнее уравнение удовлетворяется, если

$$(4)\qquad A+\psi_0(A, A)-\psi(A, A_1)=A_1.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию решений уравнения (4). Мы решим уравнение (4) относительно A методом итераций. Положим $A^{(1)}=A_1$, а затем определим $A^{(n)}$ по индукции, полагая

$$(5)\qquad A^{(n+1)}=A_1-\psi_0(A^{(n)}, A^{(n)})+\psi(A^{(n)}, A_1).$$

Пусть $t_n=|||A^n|||$; замечая, что $A^{(1)}=A_1$, находим из равенства (5)

$$(6)\qquad t_{n+1}\leqslant t_1+M_2t_n^2+M_2t_1t_n.$$

Докажем по индукции, что $t_n\leqslant 2t_1$. При $n=1$ это очевидно. Предполагая, что наше утверждение справедливо для n, получаем из (6), что $t_{n+1}\leqslant t_1+6M_2t_1^2$. Так как, по предположению теоремы, $6M_2t_1\leqslant 1$, то $t_{n+1}\leqslant 2t_1$, что и утверждалось. Из соотношения (5) и условий (d) и (e) следует также, что

$$(7)\qquad |||A^{(n+1)}-A^{(n)}|||\leqslant$$
$$\leqslant M_2(|||A^{(n)}|||+|||A^{(n-1)}|||+|||A_1|||)\,|||A^{(n)}-A^{(n-1)}|||.$$

Поскольку $|||A^{(n)}|||\leqslant 2t_1$, мы находим из (7), что

$$(8)\qquad |||A^{(n+1)}-A^{(n)}|||\leqslant 5M_2t_1|||A^{(n)}-A^{(n-1)}|||.$$

В силу сделанных нами предположений, $5M_2t_1<1$; поэтому из (8) следует, что последовательность $\{A^{(n)}\}$ сходится к некоторому элементу A, для которого $|||A|||\leqslant 2|||A_1|||$. Но тогда $|\Gamma(A)|\leqslant$ $\leqslant 2M_1|||A|||_1<1$, так что оператор $I+\Gamma(A)$ обладает ограниченным обратным (см. VII.6.1).

Мы доказали, что уравнение (4) имеет решение A, обладающее следующим свойством: оператор $U = I + \Gamma(A)$ имеет ограниченный обратный. Так как из (4) следует (1), то операторы $T + \varphi(A_1)$ и $T + \varphi(\eta(A))$ подобны, и теорема доказана, ч. т. д.

Теорему 1 можно применить следующим образом. Пусть $\mathfrak{X}$ — сепарабельное гильбертово пространство и T — нормальный компактный оператор. По теореме X.3.4 существует полный ортонормированный базис $\{x_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора T. Пусть $Tx_n = \lambda_n x_n$, причем все λ_n различны (т. е. в последовательности $\{\lambda_n\}$ нет повторяющихся элементов) и $\lambda_n \neq 0$ при $n \geqslant 1$. Согласно следствию X.3.5, $\lambda_n \to 0$. Обозначим через r_n расстояние от λ_n до остальных точек спектра T; ясно, что $r_n > 0$ и последовательность $\{r_n\}$ ограничена. Рассмотрим замкнутый неограниченный оператор R в $\mathfrak{X}$, область определения которого $\mathfrak{D}(R)$ плотна и состоит из всех $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ из $\mathfrak{X}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-2} |\alpha_n|^2 < \infty$, причем R действует по формуле

$$R\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1} \alpha_n x_n. \tag{9}$$

Из определения R и ограниченности последовательности $\{r_n\}$ ясно, что оператор R^{-1} ограничен. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех таких операторов $A \in B(\mathfrak{X})$, что $A\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}(R)$ и оператор RA принадлежит классу Гильберта — Шмидта HS. Положим $|||A||| = \|RA\|$, где $\|RA\|$ есть норма Гильберта — Шмидта оператора RA.

Если $A_n \in \mathfrak{A}$ и $\{A_n\}$ — последовательность Коши, то ввиду ограниченности R^{-1} и следствия XI.6.5

$$|(A_n - A_m)x| \leqslant \|A_n - A_m\| \, |x| \leqslant |R^{-1}| \, \|R(A_n - A_m)\| \, |x| \leqslant$$
$$\leqslant |R^{-1}| \, |||A_n - A_m||| \, |x|.$$

Таким образом, $\{A_n x\}$ является последовательностью Коши для любого $x \in \mathfrak{X}$. Более того, по определению нормы в $\mathfrak{A}$ последовательность $\{RA_n x\}$ также является последовательностью Коши. Если $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, то, поскольку оператор R замкнут, $Ax \in \mathfrak{D}(R)$ для любого $x \in \mathfrak{X}$ и $RAx = \lim_{n\to\infty} RA_n x$. Отсюда, используя теорему XI.6.4 и определение нормы в $\mathfrak{A}$, получаем, что $\lim_{n\to\infty} |||A_n - A||| = 0$, откуда следует, что $\mathfrak{A}$ — полное B-пространство.

Пусть φ — тождественное отображение из $\mathfrak{A}$ в $B(\mathfrak{X})$. Так как оператор R^{-1} ограничен, то, согласно следствию XI.5.6,

$$|A| = |\varphi(A)| \leqslant \|\varphi(A)\| \leqslant |R^{-1}| \, \|RA\| = |R^{-1}| \, |||A|||. \tag{10}$$

Следовательно, норма отображения φ не превосходит $|R^{-1}|$. Определим оператор $\eta(A)$ формулой

$$(11)\qquad \eta(A)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(Ax_n, x_n)x_n$$

для любого $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ из $\mathfrak{X}$. Тогда в силу следствия XI.6.3

$$(12)\qquad |||\eta(A)|||^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(Ax_n, x_n)|^2 r_n^{-2}=\sum_{n=1}^{\infty}|(RAx_n, x_n)|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|RA\|^2=|||A|||^2.$$

Положим

$$(13)\qquad \Gamma(A)x=\sum_{\substack{n,\,m=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{(x_m, A^*x_n)}{\lambda_n-\lambda_m}(x, x_m)x_n$$

при $x\in\mathfrak{X}$ и $A\in\mathfrak{A}$. Согласно неравенству Шварца, используя тот факт, что $\{x_n\}$ — ортонормированный базис, получаем

$$(14)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}\Big|\frac{(x_m, A^*x_n)}{\lambda_n-\lambda_m}\Big||(x, x_m)|\Big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}r_n^{-2}|(Ax_m, x_n)|^2\Big)\Big(\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{\infty}|(x, x_m)|^2\Big)\Big\}\leqslant$$
$$\leqslant|x|^2\sum_{n,\,m=1}^{\infty}r_n^{-2}|(Ax_m, x_n)|^2.$$

Отсюда следует, по лемме IV.4.9 и следствию XI.6.3, что ряд (13) сходится и $|\Gamma(A)|\leqslant\|RA\|=|||A|||$. Из (13) получаем

$$(15)\qquad (T\Gamma(A)-\Gamma(A)T)x=\sum_{\substack{n,\,m=1\\ n\neq m}}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_m)\frac{(x_m, A^*x_n)}{\lambda_n-\lambda_m}(x, x_m)x_n=$$
$$=\sum_{\substack{n,\,m=1\\ n\neq m}}^{\infty}(x_m, A^*x_n)(x, x_m)x_n=$$
$$=\sum_{n,\,m=1}^{\infty}(x_m, A^*x_n)(x, x_m)x_n-\sum_{n=1}^{\infty}(Ax_n, x_n)(x, x_n)x_n$$

при $x \in \mathfrak{X}$. Отсюда, поскольку $\{x_n\}$ — ортонормированный базис, из соотношения (11) получаем

$$(16)\qquad (T\Gamma(A) - \Gamma(A)T)\,x = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax, x_n)\,x_n - \eta(A)\,x = Ax - \eta(A)\,x.$$

Таким образом, выполнены предположения (a), (b) и (c) теоремы 1 при $M_1 = \max(1, |R^{-1}|)$.

Для любых $A, A_1 \in \mathfrak{A}$ положим $\psi(A, A_1) = \Gamma(A)A_1$ и $\psi_0(A, A_1) = \eta(A)\Gamma(A_1)$. Мы уже видели, что $\eta(A) \in \mathfrak{A}$, так что $\eta(A)\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}(R)$. Отсюда, используя неравенство $|\Gamma(A_1)| \leqslant |||A_1|||$, соотношение (12) и следствие XI.6.5, получаем, что $|||\eta(A)\Gamma(A_1)||| = |R\eta(A)\Gamma(A_1)| \leqslant |||\eta(A)|||\,|\Gamma(A_1)| \leqslant |||A|||\,|||A_1|||$.

Возьмем теперь элемент $x \in \mathfrak{X}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Так как $\{x_n\}$ — полный ортонормированный базис, то

$$(17)\qquad A_1 x = \sum_{n,\, m=1}^{\infty} \alpha_n (A_1 x_n, x_m)\,x_m,$$

а потому ввиду соотношения (13)

$$(18)\qquad \Gamma(A)A_1(x) = \sum_{\substack{n,\, m,\, l=1 \\ m \neq l}}^{\infty} \alpha_n (A_1 x_n, x_m)\,\frac{(Ax_m, x_l)}{\lambda_m - \lambda_l}\,x_l.$$

«Матричные элементы» $(\Gamma(A)A_1 x_n, x_l)$ выражаются формулой

$$(19)\qquad (\Gamma(A)A_1 x_n, x_l) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{\infty} \frac{(A_1 x_n, x_m)(Ax_m, x_l)}{\lambda_m - \lambda_l}.$$

Отсюда, используя неравенство Шварца и следствие XI.6.3, мы можем получить следующую оценку нормы $\|R\Gamma(A)A_1\|$:

$$(20)\qquad \|R\Gamma(A)A_1\| = \sum_{n,\, l=1}^{\infty} \left\{ r_l^{-2} \left| \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{\infty} (A_1 x_n, x_m)\,\frac{(Ax_m, x_l)}{\lambda_m - \lambda_l} \right| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n,\, l=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{\infty} r_l^{-1}\,|(A_1 x_n, x_m)|\,r_m^{-1}\,|(Ax_m, x_l)| \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n,\, l=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} |(RA_1x_n, x_m)|\,|(RAx_m, x_l)| \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n,\, l=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} |(RA_1x_n, x_m)|^2 \Big\} \Big\{ \sum_{m=1}^{\infty} |(RAx_m, x_l)|^2 \Big\} =$$

$$= \|RA_1\|\ \|RA\| = |||A|||\ |||A_1|||.$$

Из аналогичной оценки следует, что $\Gamma(A)\, A_1x \in \mathfrak{D}(R)$ для всех $x \in \mathfrak{X}$. Следовательно, выполнены предположения (d) и (e) теоремы 1 при $M_2 = 1$.

Применяя теорему 1, получаем следующий результат:

2. Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство и T — нормальный компактный оператор в $\mathfrak{H}$. Пусть $\{x_n\}$ — полный ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$ и $Tx_n = \lambda_n x_n$. Предположим, что в последовательности $\{\lambda_n\}$ не имеется повторений и все собственные значения λ_n отличны от нуля. Обозначим через R замкнутый неограниченный оператор с плотной областью определения $\mathfrak{D}(R)$, которая состоит из всех векторов $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-2} |\alpha_n|^2 < \infty$; оператор R действует по формуле $R\big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1}\alpha_n x_n$. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех таких операторов $A \in B(\mathfrak{H})$, что $A\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D}(R)$ и RA принадлежит классу Гильберта — Шмидта HS. Тогда существует такая положительная постоянная $\varepsilon(T)$, зависящая только от T, что если $A \in \mathfrak{A}$ и $\|RA\| < \varepsilon(T)$, то оператор $T+A$ подобен некоторому оператору T_1, коммутирующему с T.*

3. Следствие. *Если в предположениях теоремы 2 $\|RA\| < \varepsilon(T)$, то $T + A$ — спектральный оператор скалярного типа.*

Доказательство. Так как оператор T_1 коммутирует с T, то он отображает каждое собственное подпространство $\mathfrak{H}(\lambda_n)$ оператора T на себя. Следовательно, $T_1x_n = \mu_n x_n$, где μ_n — комплексное число. Тогда $(T_1^* x_n, x_m) = (x_n, T_1 x_m) = \bar{\mu}_m \delta_{n,m}$, так что $T_1^* x_n = \bar{\mu}_n x_n$. Следовательно, T_1 и T_1^* коммутируют, и потому T_1 — нормальный оператор. Поскольку $T + A$ подобен T_1, $T + A$ является спектральным оператором скалярного типа, ч. т. д.

Теперь мы переходим к применениям современных методов теории операторов в классической волновой теории.

4. Метод волновых операторов

Этот параграф мы посвятим развитию того круга идей, который играет важную роль в современной теоретической физике. Формальная сторона вопроса лучше всего выявляется при доказательстве следующей интересной (но, к сожалению, неверной) псевдотеоремы.

Псевдотеорема. *Два любых самосопряженных оператора в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентны.*

Псевдодоказательство. Пусть H_1 и H_2 — упомянутые операторы. Положим $U_t = e^{itH_1}e^{-itH_2}$ для всех вещественных t. По теореме XII.2.6, оператор U_t является произведением двух унитарных операторов и, следовательно, унитарен. Положим $U_\infty = \lim_{t\to\infty} U_t$; тогда U_∞ унитарен как предел унитарных операторов. Ясно, что $e^{isH_1}U_t e^{-isH_2} = U_{t+s}$, откуда $e^{isH_1}U_\infty e^{-isH_2} = U_\infty$, или $e^{isH_1}U_\infty = U_\infty e^{isH_2}$. Дифференцируя обе части последнего равенства по s и полагая затем $s=0$, получаем $H_1 U_\infty = U_\infty H_2$, так что $U_\infty^* H_1 U_\infty = H_2$, т. е. H_1 и H_2 унитарно эквивалентны, ч. т. д.

Ошибка доказательства заключается, разумеется, в допущении, что функция $U_t v$ имеет предел $U_\infty v$ для всех v. Однако, действуя более осмотрительно, мы сможем извлечь зерно истины из приведенного выше ошибочного доказательства. Итак, давайте повторим все этапы доказательства, тщательно прослеживая все детали.

Всюду в этом параграфе через $\mathfrak{H}$ в дальнейшем обозначается комплексное гильбертово пространство.

1. Определение. Пусть H_1 и H_2 — самосопряженные (возможно, неограниченные) операторы в $\mathfrak{H}$. Положим

$$\Sigma(H_1, H_2) = \{x \in \mathfrak{H} \mid \lim_{t\to\infty} e^{itH_1}e^{-itH_2}x \text{ существует}\} \tag{1}$$

и

$$\mathcal{U}(H_1, H_2)\,x = \lim_{t\to\infty} e^{itH_1}e^{-itH_2}x, \qquad x \in \Sigma(H_1, H_2). \tag{2}$$

2. Лемма. *Пусть H_1 и H_2 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$. Тогда $\Sigma(H_1, H_2)$ является замкнутым подпространством в $\mathfrak{H}$. Кроме того, $(\mathcal{U}(H_1, H_2)v, \mathcal{U}(H_1, H_2)w) = (v, w)$ для всех $v, w \in \Sigma(H_1, H_2)$.*

Доказательство. По теореме XII.2.6 оператор $\mathcal{U}_t = e^{itH_1}e^{-itH_2}$ унитарен, так что наше первое утверждение вытекает из теоремы II.3.6. Далее, очевидно, что $(\mathcal{U}_t v, \mathcal{U}_t w) = (v, w)$ при $v, w \in \Sigma(H_1, H_2)$. А теперь, полагая $t \to \infty$, получаем второе утверждение леммы, ч. т. д.

3. Лемма. *Пусть H_1, H_2, H_3 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$. Пусть $x \in \Sigma(H_2, H_1)$. Тогда $\mathcal{U}(H_2, H_1)x \in \Sigma(H_3, H_2)$ в том и только в том случае, если $x \in \Sigma(H_3, H_1)$; при этом мы имеем $\mathcal{U}(H_3, H_2)\mathcal{U}(H_2, H_1)x = \mathcal{U}(H_3, H_1)x$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{U}_t^{(2, 1)} = e^{itH_2}e^{-itH_1}$, $\mathcal{U}_t^{(3, 2)} = e^{itH_3}e^{-itH_2}$, $\mathcal{U}_t^{(3, 1)} = e^{itH_3}e^{-itH_1}$ для всех вещественных t. Оператор $\mathcal{U}_t^{(i, j)}$ унитарен по теореме XII.2.6, и потому $\mathcal{U}_t^{(3, 2)}\mathcal{U}_t^{(2, 1)} = \mathcal{U}_t^{(3, 1)}$. Если мы возьмем $x \in \Sigma(H_2, H_1)$ и положим $x' = \mathcal{U}(H_2, H_1)x$, то

$$\mathcal{U}_t^{(3, 1)}x = \mathcal{U}_t^{(3, 2)}\mathcal{U}_t^{(2, 1)}x = \mathcal{U}_t^{(3, 2)}x' + \mathcal{U}_t^{(3, 2)}(\mathcal{U}_t^{(2, 1)}x - x'). \tag{3}$$

Так как второе слагаемое в правой части последнего равенства стремится к нулю, то $\mathcal{U}_t^{(3, 1)}x$ имеет предел при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}_t^{(3, 2)}x'$ имеет предел при $t \to \infty$, а если эти пределы существует, то они равны, ч. т. д.

4. Следствие. *Пусть H_1 и H_2 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathcal{U}(H_1, H_2)\Sigma(H_1, H_2) = \Sigma(H_2, H_1)$, и если $x \in \Sigma(H_1, H_2)$, то $\mathcal{U}(H_2, H_1)\mathcal{U}(H_1, H_2)x = x$.*

Доказательство. Из определения 1 ясно, что $\Sigma(H_1, H_1) = \mathfrak{H}$ и $\mathcal{U}(H_1, H_1) = I$. Применяя предыдущую лемму к операторам H_2, H_1, H_1, приходим к требуемому утверждению, ч. т. д.

5. Следствие. *В предположениях предыдущего следствия оператор $\mathcal{U}(H_1, H_2)$ изометрично отображает $\Sigma(H_1, H_2)$ на $\Sigma(H_2, H_1)$.*

Доказательство. Согласно следствию 4, $\mathcal{U}(H_1, H_2)\Sigma(H_1, H_2) = \Sigma(H_2, H_1)$; изометричность $\mathcal{U}(H_1, H_2)$ доказана в лемме 2, ч. т. д.

6. Лемма. *Пусть H_1 и H_2 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$. Тогда*

(a) *Если $-\infty < s < +\infty$ и $x \in \Sigma(H_1, H_2)$, то $e^{isH_2}x \in \Sigma(H_1, H_2)$ и $\mathcal{U}(H_1, H_2)e^{isH_2}x = e^{isH_1}\mathcal{U}(H_1, H_2)x$.*

(b) *Если $F(\cdot)$ — ограниченная борелевская функция, определенная на вещественной прямой, то $F(H_2)\Sigma(H_1, H_2) \subseteq \Sigma(H_1, H_2)$ и*

$$\mathcal{U}(H_1, H_2)F(H_2)x = F(H_1)\mathcal{U}(H_1, H_2)x, \quad x \in \Sigma(H_1, H_2). \tag{4}$$

(c) *Обозначим через $\mathfrak{D}(H_i)$ область определения оператора H_i, $i = 1, 2$; тогда сужения $H_1 | \Sigma(H_2, H_1) \cap \mathfrak{D}(H_1))$ и $H_2 | (\Sigma(H_1, H_2) \cap \mathfrak{D}(H_2))$ являются самосопряженными операторами в $\Sigma(H_2, H_1)$ и $\Sigma(H_1, H_2)$ соответственно. Кроме того,*

$$H_1 | (\Sigma(H_2, H_1) \cap \mathfrak{D}(H_1)) = \mathcal{U}(H_1, H_2)\{H_2 | \Sigma(H_1, H_2) \cap \mathfrak{D}(H_2)\}\mathcal{U}(H_1, H_2)^{-1}. \tag{5}$$

Доказательство[1]. Пусть $x \in \Sigma(H_1, H_2)$ и s — вещественное число. Тогда $e^{-isH_1}e^{itH_1}e^{-itH_2}e^{isH_2}x = e^{i(t-s)H_1}e^{-i(t-s)H_2}x$, откуда $e^{isH_2}x \in \Sigma(H_1, H_2)$ и $\mathcal{U}(H_1, H_2)\, e^{isH_2}x = e^{isH_1}\mathcal{U}(H_1, H_2)\, x$, чем доказано утверждение (а).

Пусть теперь F — бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль вне компактного подмножества вещественной прямой; разложим ее в интеграл Фурье $F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{is\lambda}\, ds$. Тогда $F(H_j) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{isH_j}\, ds$ (интеграл сходится в сильном смысле); отсюда, применяя уже доказанное утверждение (а), получаем, что для рассматриваемой функции F соотношение (4) выполняется.

Пусть F — характеристическая функция отрезка вещественной оси. Используя теорему XII.2.6, находим такую последовательность F_n бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(H_i) \to F(H_i)$ в сильной операторной топологии, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что соотношение (4) справедливо для характеристической функции F любого отрезка вещественной оси.

Пусть теперь $F(\cdot)$ — произвольная ограниченная борелевская функция на вещественной прямой. Обозначим через $E_i(\cdot)$ спектральное разложение оператора H_i, $i = 1, 2$. Положим $x' = \mathcal{U}(H_1, H_2)\, x$. По лемме III.8.3 существует такая последовательность функций $\{F_n^{\vee}\}$, что каждая из них является конечной линейной комбинацией характеристических функций отрезков вещественной оси и

(6) $$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F_n^{\vee}(\lambda) - F(\lambda)|^2\, \nu(d\nu) = 0,$$

где мера ν определяется равенством

(7) $$\nu(e) = |E_1(e)\, x|^2 + |E_2(e)\, x'|^2$$

для любого борелевского множества e. Положим $F_n(\lambda) = F_n^{\vee}(\lambda)$, если $|F_n^{\vee}(\lambda)| \leqslant C = \sup\limits_{-\infty<\lambda<+\infty} |F(\lambda)|$, и $F_n(\lambda) = C$, если $|F_n^{\vee}(\lambda)| > C$. Тогда последовательность $\{F_n(\lambda)\}$ равномерно ограничена, и мы имеем

(8) $$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_n(\lambda) - F(\lambda)|^2\, \nu(d\lambda) = 0.$$

---

[1] Доказательство авторов содержало неточность, которая устранена при переводе. — *Прим. перев.*

Отсюда, согласно теореме XII.2.6, $\lim_{n\to\infty} F_n(H_1)x' = F(H_1)x'$ и $\lim_{n\to\infty} F_n(H_2)x = F(H_2)x$. Так как для каждой из функций $F_n(\lambda)$ справедлива формула (4), то, в силу леммы 2, $F(H_2)x \in \Sigma(H_1, H_2)$ и

$$F(H_1)\mathcal{U}(H_1, H_2)x = \lim_{n\to\infty} F_n(H_1)\mathcal{U}(H_1, H_2)x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}(H_1, H_2)F_n(H_2)x = \mathcal{U}(H_1, H_2)F(H_2)x; \tag{9}$$

тем самым доказано утверждение (b).

Докажем утверждение (c). Из (b) следует, что операторы $(\pm iI - H_2)^{-1}$ отображают $\Sigma(H_1, H_2)$ в себя. Если допустить, что $(iI - H_2)^{-1}\Sigma(H_1, H_2)$ не плотно в $\Sigma(H_1, H_2)$, то по теореме Хана — Банаха (см. следствие II.3.13) найдется такой элемент $x \in \Sigma(H_1, H_2)$, $x \neq 0$, что $(x, (iI - H_2)^{-1}y) = 0$ при $y \in \Sigma(H_1, H_2)$. Но тогда $((-iI - H_2)^{-1}x, y) = 0$ при $y \in \Sigma(H_1, H_2)$, так что $(-iI - H_2)^{-1}x = 0$, что невозможно. Таким образом, множество

$$(-iI - H_2)^{-1}\Sigma(H_1, H_2) \subseteq \Sigma(H_1, H_2) \cap \mathfrak{D}(H_2)$$

плотно в $\Sigma(H_1, H_2)$.

Возьмем вектор $x \in \Sigma(H_1, H_2) \cap \mathfrak{D}(H_2)$ и покажем, что $H_2x \in \Sigma(H_1, H_2)$. Для этого запишем H_2x в виде $H_2x = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \Sigma(H_1, H_2)$, $y_2 \in \mathfrak{H} \ominus \Sigma(H_1, H_2)$. Согласно следствию XII.2.7, $(I + H_2^2)^{-1} = (iI - H_2)^{-1}(-iI - H_2)^{-1}$, откуда, применяя утверждение (b), находим, что $(I + H_2^2)^{-1}H_2x = (iI - H_2)^{-1}(i(iI + H_2)^{-1}x - x) \in \Sigma(H_1, H_2)$. Следовательно, $(I + H_2^2)^{-1}y_1 + (I + H_2^2)^{-1}y_2 \in \Sigma(H_1, H_2)$, так что $(I + H_2^2)^{-1}y_2 \in \Sigma(H_1, H_2)$. Но так как $(I + H_2^2)\Sigma(H_1, H_2) \subseteq \Sigma(H_1, H_2)$, то $(I + H_2^2)^{-1}(\mathfrak{H} \ominus \Sigma(H_1, H_2)) \subseteq \mathfrak{H} \ominus \Sigma(H_1, H_2)$. Отсюда $(I + H_2^2)^{-1}y_2 = 0$. Но тогда $y_2 = 0$, и потому $H_2x \in \Sigma(H_1, H_2)$. Ясно, что оператор $\hat{H}_2 = H_2 | (\Sigma(H_1, H_2) \cap \mathfrak{D}(H_2))$ симметрический в $\Sigma(H_1, H_2)$ и что $\hat{H}_2$ замкнут. Поскольку

$$(\pm iI - \hat{H}_2)\{(\pm iI - H_2)^{-1} | \Sigma(H_1, H_2)\} = I, \tag{10}$$

в силу следствия XII.4.13(b), H_2 самосопряжен. Отсюда следует, что $(\pm iI - \hat{H}_2)^{-1} = (\pm iI - H_2)^{-1} | \Sigma(H_1, H_2)$. Аналогично доказывается, что оператор $\hat{H}_1 = H_1 | (\Sigma(H_2, H_1) \cap \mathfrak{D}(H_1))$ имеет плотную область определения в $\Sigma(H_2, H_1)$, является самосопряженным и $(iI - \hat{H}_1)^{-1} = (iI - H_1)^{-1} | \Sigma(H_2, H_1)$. Из утверждения (b) и следствий 4, 5 вытекает, что

$$(iI - \hat{H}_1)^{-1} = \mathcal{U}(H_1, H_2)(iI - \hat{H}_2)^{-1}\mathcal{U}(H_1, H_2)^{-1}, \tag{11}$$

откуда

$$\hat{H}_1 = \mathcal{U}(H_1, H_2)\hat{H}_2\mathcal{U}(H_1, H_2)^{-1}, \tag{12}$$

и утверждение (c) доказано. Тем самым доказана и лемма, ч. т. д.

Теперь мы рассмотрим некоторые разложения гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств, порождаемые данным самосопряженным оператором H. Эти разложения тесно связаны с теоремой о разложении мер в смысле Лебега (теорема III.4.14).

7. Определение. Пусть H — самосопряженный оператор (возможно, неограниченный) в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть $E(e)$ — его спектральное разложение. Через λ обозначим меру Лебега на вещественной прямой R. Положим

(13) $\Sigma_{ac}(H)=\{x\in\mathfrak{H} \mid |E(e)x|^2$ — счетно аддитивная λ-непрерывная мера$\}$;

(14) $\Sigma_{sing}(H)=\{x\in\mathfrak{H} \mid |E(e)x|^2$ — счетно аддитивная λ-сингулярная мера и $|E(e)x|^2=0$, если e состоит из одной-единственной точки$\}$;

(15) $\Sigma_p(H)=\{x\in\mathfrak{H} \mid |E(R-e_0)x|^2=0$, где $e_0=e_0(x)$ — некоторое счетное множество точек из $R\}$.

8. Лемма. *Пусть H — самосопряженный оператор (возможно, неограниченный) в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{D}(H)$ — его область определения. Тогда*

(a) *подпространства $\Sigma_{ac}(H)$, $\Sigma_{sing}(H)$ и $\Sigma_p(H)$ замкнуты, попарно ортогональны и $\mathfrak{H}=\Sigma_{ac}(H)\oplus\Sigma_{sing}(H)\oplus\Sigma_p(H)$;*

(b) *любой вектор $v\in\mathfrak{D}(H)$ однозначно разлагается в сумму $v=v_1+v_2+v_3$, где $v_1\in\Sigma_{ac}(H)\cap\mathfrak{D}(H)$, $v_2\in\Sigma_{sing}(H)\cap\mathfrak{D}(H)$, $v_3\in\in\Sigma_p(H)\cap\mathfrak{D}(H)$;*

(c) *сужения оператора H на подпространства $\Sigma_{ac}(H)$, $\Sigma_{sing}(H)$, $\Sigma_p(H)$ являются самосопряженными операторами в этих подпространствах;*

(d) *$\Sigma_p(H)$ есть замыкание линейной оболочки всех собственных векторов оператора H.*

Доказательство. Возьмем $x\in\mathfrak{H}$, обозначим через R вещественную прямую и положим $\nu(e)=|E(e)x|^2$. По теореме III.4.14 $\nu=\alpha+\beta$, где α является λ-непрерывной, и существует такое множество e_0, что его λ-мера равна нулю и $\beta(e\cap(R-e_0))=0$ для любого борелевского множества e. Но тогда очевидно, что $\alpha(e)=|E(e\cap(R-e_0))x|^2$ для любого борелевского множества e. Обозначим через e_1 множество всех таких точек $s\in R$, что $|E(\{s\})x|^2>0$. Так как $|E(R)x|^2=|x|^2<\infty$, то множество e_1 не более чем счетно. Положим $e_2=e_0-e_1$ и $x_1=E(R-e_0)x$, $x_2=E(e_2)x$, $x_3=E(e_1)x$. Тогда $x=x_1+x_2+x_3$, $|E(e)x_1|^2=|E(e\cap(R-e_0))x|^2$, $|E(e)x_2|^2=|E(ee_2)x|^2$ и $|E(e)x_3|^2=|E(ee_1)x|^2$. Отсюда видно, что $x_1\in\Sigma_{ac}(H)$, $x_2\in\Sigma_{sing}(H)$ и $x_3=\Sigma_p(H)$. Если $x\in\mathfrak{D}(H)$, то из теоремы XII.2.6 следует, что $x_i\in\mathfrak{D}(H)$, $i=1, 2, 3$.

Пусть теперь $v_1 \in \Sigma_{ac}(H)$, $v_2 \in \Sigma_{sing}(H)$ и $v_3 = \Sigma_p(H)$. Поскольку мера $|E(\cdot)v_2|^2$ является λ-сингулярной, существует такое множество e_0, что $\lambda(e_0) = 0$ и $|E(R - e_0)v_2|^2 = 0$, так что $E(e_0)v_2 = v_2$. Так как мера $|E(\cdot)v_1|^2$ является λ-непрерывной, то $E(e_0)v_1 = 0$, откуда

$$(v_1, v_2) = (v_1, E(e_0)v_2) = (E(e_0)v_1, v_2) = 0.$$

Аналогично доказывается, что $(v_1, v_3) = 0 = (v_2, v_3)$. Мы предоставляем это сделать читателю, а затем показать, что $\Sigma_{ac}(H)$, $\Sigma_{sing}(H)$ и $\Sigma_p(H)$ взаимно ортогональны. Отсюда сразу следует утверждение (b).

Пусть $x_n \in \Sigma_{ac}(H)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда, как уже доказано, мы можем записать, что $x = y_1 + y_2 + y_3$, где $y_1 \in \Sigma_{ac}(H)$, а y_2, y_3 ортогональны к $\Sigma_{ac}(H)$. Но так как $x_n \in \Sigma_{ac}(H)$, то $(x_n, y) = 0$ при $y \in \mathfrak{H} \ominus \Sigma_{ac}(H)$, а потому $(x, y) = 0$ при $y \in \mathfrak{H} \ominus \Sigma_{ac}(H)$. Отсюда следует, что $(y_2 + y_3, y) = 0$ при $y \in \mathfrak{H} \ominus \Sigma_{ac}(H)$, т. е. $y_2 + y_3 = 0$. Итак, $x = y_1 \in \Sigma_{ac}(H)$, и замкнутость подпространства $\Sigma_{ac}(H)$ доказана. Аналогично доказывается замкнутость $\Sigma_{sing}(H)$ и $\Sigma_p(H)$. Мы доказали утверждение (a).

Пусть F — ограниченная борелевская функция на вещественной прямой и $x \in \Sigma_{ac}(H)$. По теореме XII.2.6 и лемме III.4.13 мера, определенная формулой

$$(16) \qquad |E(e)F(H)x|^2 = \int_e |F(\lambda)|^2 |E(d\lambda)x|^2 \leqslant \sup_{s \in R} |F(s)|^2 |E(e)x|^2,$$

является λ-непрерывной. Следовательно, $F(H)\Sigma_{ac}(H) \subseteq \Sigma_{ac}(H)$. Аналогично доказывается, что $F(H)\Sigma_{sing}(H) \subseteq \Sigma_{sing}(H)$ и $F(H)\Sigma_p(H) \subseteq \Sigma_p(H)$; подробное доказательство предоставляется читателю.

Используя этот факт, нетрудно доказать утверждение (c) нашей леммы. Покажем, что $(iI - H)^{-1}\Sigma_{ac}(H)$ плотно в $\Sigma_{ac}(H)$. Допустим, что это не так. Тогда по теореме Хана — Банаха (см. следствие II.3.13) существует такой элемент $x \neq 0$ в $\Sigma_{ac}(H)$, что $(x, (iI - H)^{-1}y) = 0$ при $y \in \Sigma_{ac}(H)$. Но тогда $((-iI - H)^{-1}x, y) = 0$, $y \in \Sigma_{ac}(H)$ и потому $(-iI - H)^{-1}x = 0$, но это невозможно. Отсюда следует, что множество $(iI - H)^{-1}\Sigma_{ac}(H) \subseteq \Sigma_{ac}(H) \cap \mathfrak{D}(H)$ плотно в $\Sigma_{ac}(H)$.

Пусть $x \in \Sigma_{ac}(H) \cap \mathfrak{D}(H)$. Покажем, что $Hx \in \Sigma_{ac}(H)$. Для этого запишем Hx в виде $Hx = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \Sigma_{ac}(H)$, $y_2 \in \mathfrak{H} \ominus \Sigma_{ac}(H)$. По теореме XII.2.6 $(I + H^2)^{-1} = (iI - H)^{-1} \times (-iI - H)^{-1}$. Отсюда в силу уже доказанного $(I + H^2)^{-1}Hx = (iI - H_2)^{-1}(i(iI + H)^{-1}x - x) \in \Sigma_{ac}(H)$. Следовательно, $(I + H^2)^{-1}y_1 + (I + H^2)^{-1}y_2 \in \Sigma_{ac}(H)$, откуда $(I + H^2)^{-1}y_2 \in \Sigma_{ac}(H)$. Но так как $(I + H^2)\Sigma_{ac}(H) \subseteq \Sigma_{ac}(H)$, то мы имеем $(I + H^2)(\mathfrak{H} \ominus \Sigma_{ac}(H)) \subseteq \mathfrak{H} \ominus \Sigma_{ac}(H)$. Значит, $(I + H^2)^{-1}y_2 = 0$, так что $y_2 = 0$; мы доказали, что $Hx \in \Sigma_{ac}(H)$. Ясно, что оператор $\hat{H} = H \mid (\Sigma_{ac}(H) \cap \mathfrak{D}(H))$ симметрический и замкнутый. Так как

$$(17) \qquad (\pm iI - \hat{H})\{(\pm iI - H)^{-1} \mid \Sigma_{ac}(H)\} = I,$$

то, в силу следствия XII.4.13(b), оператор $\hat{H}$ самосопряженный. Аналогично доказывается, что $H \mid (\Sigma_{sing}(H) \cap \mathfrak{D}(H))$ и $H \mid (\Sigma_p(H) \cap \cap \mathfrak{D}(H))$ — самосопряженные операторы в $\Sigma_{sing}(H)$ и $\Sigma_p(H)$ с плотными областями определения. Отсюда сразу же вытекает утверждение (c) леммы.

Чтобы доказать утверждение (d), возьмем элемент $x \in \Sigma_p(H)$. В силу определения 7 существует такое счетное множество $e_0 = \{\lambda_j\} \subseteq R$, что $x = E(e_0)x$. Но тогда $x = \sum_{j=1}^{\infty} E(\lambda_j)x$, и по теореме XII.2.6 $HE(\lambda_j)x = \lambda_j E(\lambda_j)x$. Следовательно, любой вектор $x \in \Sigma_p(H)$ является суммой ряда из собственных векторов оператора H. Покажем, что верно и обратное. Пусть $y \in \mathfrak{D}(H)$ и $Hy = \lambda_0 y$, где λ_0 — вещественное число. По теореме XII.2.6

$$(18) \qquad 0 = |Hy - \lambda_0 y|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda - \lambda_0|^2 \, |E(d\lambda)y|^2.$$

Следовательно, $E(R - \{\lambda_0\})y = 0$, а потому $y \in \Sigma_p(H)$. Итак, любой собственный вектор оператора H принадлежит подпространству $\Sigma_p(H)$, откуда сразу же вытекает утверждение (d), ч. т. д.

Основной целью этого параграфа является следующая теорема, принадлежащая Като и Куроде. Она показывает, что доказанные нами результаты со второго по шестой включительно имеют нетривиальные применения к широкому классу самосопряженных операторов.

→ 9. Теорема. *Пусть H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(H)$ и $E(\cdot)$ — его разложение единицы. Пусть V — симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(V)$. Предположим, что $\mathfrak{D}(V) \supseteq \mathfrak{D}(H)$, оператор $V(iI - H)^{-1}$ компактный, а оператор $(iI - H)^{-1} V (iI - H)^{-1}$ ядерный*[1]. *Тогда*

(a) *$H_1 = H + V$ — самосопряженный оператор*;

(b) *$\Sigma(H_1, H_2) \supseteq \Sigma_{ac}(H)$*;

(c) *$\mathcal{U}(H_1, H)\Sigma_{ac}(H) = \Sigma_{ac}(H_1)$.*

Для доказательства теоремы 9 нам понадобится несколько лемм.

10. Лемма. *Пусть V — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ и $V = QR$ — его каноническое представление в виде произведения частич-*

[1]) То есть принадлежащий классу C_1 (см. определение XI.9.1). — *Прим. перев.*

но изометрического оператора Q и положительного эрмитова оператора R (теорема XII.7.7). *Тогда V принадлежит одному из классов C_p компактных операторов (определение* XI.9.1) *в том и только в том случае, если R принадлежит тому же классу C_p; кроме того, V и R имеют одинаковые нормы как элементы пространства C_p.*

11. Следствие. *Пусть V — оператор класса C_1. Тогда V можно представить в виде произведения $V = AB$, где A и B — операторы класса Гильберта — Шмидта $HS = C_2$, причем нормы Гильберта — Шмидта $\| A \|$ и $\| B \|$ операторов A и B равны квадратному корню $| V |_1^{1/2}$ из ядерной нормы $| V |_1$ оператора V (см. определение* XI.9.1 *и лемму* XI.9.9(e)). *Оператор V можно также представить в виде $V = CD$, где C — компактный, а D — ядерный операторы.*

Доказательство леммы 10. Согласно теореме XII.7.7, если $V = QR$ — каноническое разложение оператора V, то областью определения Q является замыкание области значений оператора R, а потому (определение XII.7.4) $V^*V = RQQ^*R = R^2$. Следовательно, в силу леммы XII.7.3, R — единственный положительный квадратный корень $(V^*V)^{1/2}$ из ограниченного самосопряженного оператора V^*V. Как отмечалось в § XI.9, $(V^*V)^{1/2}$ — компактный оператор. Теперь лемма следует из определения XI.9.1, ч. т. д.

Доказательство следствия 11. Пусть Q и R определены так же, как в лемме 10, и $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — собственные значения оператора R, расположенные в порядке убывания, причем каждое собственное значение повторено столько раз, какова его кратность. Тогда собственными значениями оператора $R^{1/2}$ будут $\mu_1^{1/2}, \mu_2^{1/2}, \ldots$. Из определения XI.9.1 вытекает, что $| R |_1 = | R^{1/2} |_2^2$. Положим $A = QR^{1/2}$, $B = R$. Так как Q — частично изометрический оператор, то $| Q | \leqslant 1$; отсюда, согласно леммам 10 и XI.9.9, $| A |_2 \leqslant \leqslant | V |_1^{1/2}$ и $| B_2 | = | V |_1^{1/2}$. Но тогда в силу леммы XI.9.14 $| A |_2 \geqslant | V |^{1/2}$. Поскольку $| A_2 | = \| A \|$ и $| B |_2 = \| B \|$, то первое утверждение следствия 11 доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, возьмем собственный вектор x_i оператора R с собственным значением μ_i. Так как $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = = | R |_1 < \infty$, то существует такая возрастающая последовательность целых чисел $\{n_j\}$, что $\sum_{n=n_j}^{\infty} \mu_n < 2^{-j}$. Положим $c_i = 2^{j/2}$ при $n_j \leqslant i \leqslant n_{j+1}$; тогда $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu_i < \infty$ и $\lim_{i \to \infty} c_i = \infty$. Определим операторы R_1 и R_2, полагая $R_1 x_i = c_i^{-1} x_i$, $R_2 x_i = c_i \mu_i x_i$ и $R_1 x = R_2 x = 0$, если вектор $x \in \mathfrak{H}$ ортогонален ко всем векторам x_i. Ясно, что $R_1 R_2 = R$

и $R_2 \in C_1$. Если E_i — проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором x_i, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i E_i = R_1$$

в равномерной операторной топологии. Из следствия VI.5.5 вытекает, что оператор R_1 компактен. Положим $C = QR_1$, $D = R_2$, так что $V = CD$. Согласно следствию VI.5.5, оператор C компактен. Тем самым следствие 11 доказано, ч. т. д.

12. Лемма. *Пусть C — компактный оператор в $\mathfrak{H}$ и $\{T_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность операторов в $\mathfrak{H}$, сильно сходящаяся к нулю. Тогда последовательности $\{T_nC\}$ и $\{CT_n^*\}$ стремятся к нулю по ядерной норме.*

Доказательство. Множество $K = C(\{x \in \mathfrak{H} \mid |x| < 1\})$ относительно компактно; следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество таких элементов $x_1, \ldots, x_m$ из K, что любой элемент $x \in K$ удовлетворяет неравенству $|x - x_i| < \varepsilon$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant m$. Положим $M = \sup_n |T_n|$ и выберем столь большое n_0, что $|T_nx_i| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$ и $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $|T_nx| \leqslant |T_nx_i| + |T_n(x - x_i)| \leqslant \varepsilon + M\varepsilon$ при $x \in K$ и $n \geqslant n_0$. Следовательно, $|T_nC| \leqslant \varepsilon(M + 1)$ для $n \geqslant n_0$. Этим доказано, что $|T_nC| \to 0$ при $n \to \infty$.

По теореме VI.5.2 оператор C^* компактен. Согласно доказанному выше, $|T_nC^*| \to 0$ при $n \to \infty$. Но так как $|CT_n^*| = |(T_nC^*)^*| = |T_nC^*|$, то $|CT_n^*| \to 0$ при $n \to \infty$.

Мы доказали первое утверждение леммы, а теперь докажем второе. Согласно следствию 11, $C = AB$, где A — компактный, а B — ядерный операторы. Выше уже было доказано, что T_nA стремится к нулю по норме, а тогда по лемме XI.9.9 последовательность $T_nC = (T_nA)B$ стремится к нулю по ядерной норме.

Согласно лемме XI.9.6(с) и определению XI.9.1, оператор C^* является ядерным. По доказанному T_nC^* стремится к нулю по ядерной норме. Еще раз применяя лемму XI.9.6 (с) и определение XI.9.1, мы видим, что последовательность $CT_n^* = (T_nC^*)^*$ стремится к нулю по ядерной норме, ч. т. д.

13. Лемма. *Пусть H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(H)$ и V — симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(V)$. Предположим, что $\mathfrak{D}(V) \supseteq \mathfrak{D}(H)$ и оператор $V(iI - H)^{-1}$ компактен. Тогда*

(a) *оператор $H+V$ самосопряженный;*

(b) *$|V(\lambda_0 I - H)^{-1}| < 1/2$, если $\operatorname{Im}\lambda_0$ достаточно велика;*

(c) *если $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$ и оператор $I - V(\lambda_0 I - H)^{-1}$ обладает ограниченным обратным, то*

$$(\lambda_0 I - H - V)^{-1} = (\lambda_0 I - H)^{-1}(I - V(\lambda_0 I - H)^{-1})^{-1}.$$

Доказательство. Мы можем записать, что

$$(19)\qquad V(\lambda_0 I-H)^{-1}=V(iI-H)^{-1}(iI-H)(\lambda_0 I-H)^{-1}= \\ =V(iI-H)^{-1}(I+(i-\lambda_0)(\lambda_0 I-H)^{-1}).$$

Положим $\varphi_{\lambda_0}(\lambda)=-(i+\lambda)(\lambda_0-\lambda)^{-1}$; тогда $\varphi_{\lambda_0}(H)=$ $=\{I+(i-\lambda_0)(\lambda_0 I-H)^{-1}\}^*$. Из теоремы XII.2.6 видно, что $\lim\limits_{|\operatorname{Im}\lambda_0|\to\infty}\{I+(i-\lambda_0)(\lambda_0 I-H)^{-1}\}^* g=0$ для любого $g\in\mathfrak{H}$. Теперь утверждение (b) следует из леммы 12.

Если $|V(\lambda_0 I-H)^{-1}|<1$, то, согласно лемме VII.3.4, оператор $I-V(\lambda_0 I-H)^{-1}$ обладает ограниченным обратным. Предположим, теперь, что $\operatorname{Im}\lambda_0\neq 0$ и что $I-V(\lambda_0 I-H)^{-1}$ обладает ограниченным обратным. Положим $R(\lambda_0;\ H)=(\lambda_0 I-H)^{-1}$. Тогда для любого $x\in\mathfrak{H}$ имеем

$$(20)\qquad (\lambda_0 I-H-V)[R(\lambda_0;\ H)(I-VR(\lambda_0;\ H))^{-1}]x= \\ =(I-VR(\lambda_0;\ H))(I-VR(\lambda_0;\ H))^{-1}x=x.$$

Кроме того, если $x\in\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{D}(H+V)$, то

$$(21)\qquad [R(\lambda_0;\ H)(I-VR(\lambda_0;\ H))^{-1}](\lambda_0 I-H-V)x= \\ =R(\lambda_0;\ H)(I-VR(\lambda_0;\ H))^{-1}(\lambda_0 I-H-V)R(\lambda_0;\ H)(\lambda_0 I-H)x= \\ =R(\lambda_0;\ H)(I-VR(\lambda_0;\ H))^{-1}(I-VR(\lambda_0;\ H))(\lambda_0 I-H)x= \\ =R(\lambda_0;\ H)(\lambda_0 I-H)x=x.$$

Отсюда вытекает, что оператор $(\lambda_0 I-H-V)^{-1}$ определен всюду и ограничен, чем доказано утверждение (c) леммы. По лемме XII.1.2 оператор $H+V$ замкнут. По теореме XII.4.19 индексы дефекта оператора $H+V$ равны нулю. Поэтому, согласно следствию XII.4.13(b), $H+V$ самосопряжен, и утверждение (a) нашей леммы доказано.

14. Лемма. *Пусть H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(H)$, а V и V_n, $n\geqslant 1$, — симметрические операторы в $\mathfrak{H}$ с областями определения $\mathfrak{D}(V)$ и $\mathfrak{D}(V_n)$. Предположим, что $\mathfrak{D}(V)\supseteq\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{D}(V_n)\supseteq\mathfrak{D}(H)$ и операторы $V(iI-H)^{-1}$ и $V_n(iI-H)^{-1}$ компактны. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}V_n(iI-H)^{-1}=$ $=V(iI-H)^{-1}$ в равномерной операторной топологии. Тогда для любого вещественного t справедливо соотношение*

$$(22)\qquad \lim_{n\to\infty}e^{it(H+V_n)}=e^{it(H+V)}$$

в сильной операторной топологии.

Доказательство. Для любого самосопряженного оператора T и невещественного λ положим $R(\lambda;\ T)=(\lambda I-T)^{-1}$. По лемме 13 существует такая конечная постоянная $M\geqslant 1$, что $|VR(\lambda;\ H)|<1/2$

при $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$. Согласно теореме XII.2.6,

$$(23)\quad |(V-V_n)R(\lambda;\ H)|=|(V-V_n)R(i;\ H)(iI-H)R(\lambda;\ H)|\leqslant$$
$$\leqslant|(V-V_n)R(i;\ H)|\sup_{-\infty<\mu<+\infty}\left|\frac{i-\mu}{\lambda-\mu}\right|\leqslant$$
$$\leqslant|(V-V_n)R(i;\ H)|,$$

если $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M\geqslant 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} V_nR(\lambda;\ H)=VR(\lambda;\ H)$ (по норме) равномерно по λ при $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$. Отсюда, применяя лемму VII.3.4, мы видим, что при $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$ и достаточно больших n оператор $I-V_nR(\lambda;\ H)$ обратим. Согласно лемме 13, имеем

$$(24)\quad R(\lambda;\ H+V)=R(\lambda;\ H)(I-VR(\lambda;\ H))^{-1},\qquad |\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M,$$

и

$$(25)\quad R(\lambda;\ H+V_n)=R(\lambda;\ H)(I-V_nR(\lambda;\ H))^{-1},\qquad |\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M,$$

для достаточно больших n. Используя лемму VII.3.4, находим

$$|(I-VR(\lambda;\ H))^{-1}|\leqslant 2,\qquad |\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M.$$

Отсюда в силу следствия VII.6.2 и соотношения (23)

$$(26)\quad |(I-VR(\lambda;\ H))^{-1}-(I-V_nR(\lambda;\ H))^{-1}|\leqslant$$
$$\leqslant 2(1-|(V-V_n)R(i;\ H)|)^{-1},\qquad |\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M,$$

для достаточно больших n. Из соотношений (24) и (25) получаем

$$(27)\quad \lim_{n\to\infty} R(\lambda;\ H+V_n)=R(\lambda;\ H+V)$$

равномерно при $|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant M$.

Используя лемму VII.2.7, мы можем написать, используя интегральную формулу Коши,

$$(28)\quad \exp(it(H+V))\,x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_M}\frac{e^{it\lambda}R(\lambda:\ H+V)}{(\lambda-\alpha)^2}(\alpha I-H-V)^2x\,d\lambda,$$

где контур интегрирования Γ_M состоит из прямой $s-iM$ (s вещественное), пробегаемой от $s=-\infty$ к $s=+\infty$, и прямой $s+iM$ (s — вещественное), пробегаемой от $s=+\infty$ к $s=-\infty$; α — произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $|\operatorname{Im}\alpha|\geqslant M$, и $x\in\mathfrak{D}((H+V)^2)$. Формулу (28) можно переписать в виде

$$(29)\quad \exp(it(H+V))(R(\alpha;\ H+V))^2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_M}\frac{e^{it\lambda}R(\lambda;\ H+V)}{(\lambda-\alpha)^2}\,d\lambda.$$

Аналогично,

$$(30)\quad \exp(it(H+V_n))(R(\alpha;\ H+V_n))^2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_M}\frac{e^{it\lambda}R(\lambda;\ H+V_n)}{(\lambda-\alpha)^2}\,d\lambda$$

для всех n. Используя (27), мы получаем из (29) и (30), что

$$\lim_{n\to\infty} \exp(it(H+V_n))(R(\alpha;\ H+V_n))^2 = \\ = \exp(it(H+V))(R(\alpha;\ H+V))^2 \tag{31}$$

в равномерной операторной топологии. Но так как $|\exp(it(H+V_n))|\leqslant 1$ и

$$|\exp(it(H+V_n))(R(\alpha;\ H+V_n))^2 - \\ -\exp(it(H+V))(R(\alpha;\ H+V))^2| \leqslant \\ \leqslant |\exp(it(H+V_n))\{R(\alpha;\ H+V))^2-(R(\alpha;\ H+V_n))^2\}| + \\ + |\exp(it(H+V_n))(R(\alpha;\ H+V_n))^2 - \\ -\exp(it(H+V))(R(\alpha;\ H+V))^2|, \tag{32}$$

то из (31) и (27) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}(\exp(it(H+V_n))-\exp(it(H+V)))(R(\alpha;\ H+V))^2=0.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\exp(it(H+V_n))x=\exp(it(H+V))x, \qquad x\in\mathfrak{D}((H+V)^2).$$

Поскольку множество $\mathfrak{D}((H+V)^2)$ плотно в $\mathfrak{H}$, из теоремы II.3.6 вытекает, что $\lim_{n\to\infty}\exp(it(H+V_n))x=\exp(it(H+V))x$ для всех $x\in\mathfrak{H}$, и лемма доказана, ч. т. д.

А теперь мы можем перейти к основной части доказательства теоремы 9. Наш метод состоит в следующем. Сначала мы установим теорему 9 для того частного случая, когда H — оператор умножения на независимую переменную, а V — интегральный оператор. Затем, используя спектральную теорию из § XII.3 (см., в частности, теорему XII.3.16), покажем, что общий случай сводится к указанному частному.

Чтобы доказать теорему 9 в упомянутом частном случае, введем некоторые обозначения. Пусть R — вещественная прямая, λ — мера Лебега на R и ν — неотрицательная λ-сингулярная мера на R. Таким образом, существует такое множество e_ν нулевой λ-меры, что $\nu(R-e_\nu)=0$. Положим $\mu=\nu+\lambda$. Обозначим через $\mathfrak{H}'$ множество всех последовательностей $\widetilde{f}=\{f_i(\cdot)\}$ μ-измеримых функций на R, удовлетворяющих условию

$$|\widetilde{f}|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\int|f_i(a)|^2\mu(da)<\infty. \tag{33}$$

Пространство $\mathfrak{H}'$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(34)\qquad (\tilde{f}, \tilde{g}) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_R f_i(a) \overline{g_i(a)} \mu(da).$$

Пусть H — неограниченный оператор в $\mathfrak{H}'$, определенный формулами

$$(35)\qquad \mathfrak{D}(H) = \left\{ \tilde{f} \in \mathfrak{H}' \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} \int_R a^2 |f_i(a)|^2 \mu(da) < \infty \right\};$$

$$(36)\qquad H\tilde{f} = \tilde{g}, \quad \text{где} \quad g_i(a) = af_i(a).$$

Ясно, что оператор H симметрический и при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ оператор $\lambda I - H$ обладает ограниченным обратным, действующим по формуле

$$(37)\qquad (\lambda I - H)^{-1}\tilde{f} = \tilde{h}, \quad \text{где} \quad h_i(a) = (\lambda - a)^{-1} f_i(a).$$

По лемме XII.1.2 H замкнут и, согласно п. (b) леммы XII.4.13, самосопряжен. Представляем читателю доказать, что спектральное разложение $E(\cdot)$ оператора H задается формулой

$$(38)\qquad E(e)\tilde{f} = \tilde{g}, \quad g_i(a) = \chi_e(a) f_i(a),$$

где χ_e — характеристическая функция борелевского множества e, а кроме того, если F — ограниченная борелевская функция, то оператор $F(H)$ действует по формуле

$$(39)\qquad F(H)\tilde{f} = \tilde{g}, \quad \text{где} \quad g_i(a) = F(a) f_i(a).$$

Обозначим через $\mathscr{V}_0$ множество всех таких симметрических операторов V в $\mathfrak{H}'$, что оператор $V(iI - H)^{-1}$ компактен и для любого конечного интервала e из R оператор $(iI - H)^{-1} VE(e)$ является ядерным. Введем в множестве $\mathscr{V}$ норму

$$(40)\qquad |V|^* = |V(iI - H)^{-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|(iI - H)^{-1} VE([-n, n])|_1}{1 + |(iI - H)^{-1} VE([-n, n])|_1},$$

где, как и раньше, символом $|S|_1$ обозначена ядерная норма оператора S (определение XI.9.1).

Используя указанные обозначения, мы докажем лемму, которая содержит частный случай теоремы 9; к нему легко сводится общий случай.

15. Лемма. *Пусть H, $\mathfrak{H}'$ и $\mathscr{V}_0$ имеют тот же смысл, что и выше. Возьмем оператор $V \in \mathscr{V}_0$. Тогда*

(a) *оператор $H + V$ является самосопряженным;*

(b) *если $\tilde{f} = \{f_i(\cdot)\} \in \mathfrak{H}'$, $f_i(a) = 0$ при $i \geqslant 1$ и $a \in e_\nu$, то $\tilde{f} \in \Sigma(H + V, H)$.*

Мы разобьем доказательство леммы 15 на несколько этапов. Сначала мы покажем, что любой элемент $V \in \mathscr{V}_0$ можно приблизить элементом $V' \in \mathscr{V}_0$ довольно специального вида. Далее мы докажем одно важное неравенство сначала для оператора $H + V'$, где V' имеет упомянутый специальный вид, а затем путем предельного перехода и для общего случая. Как только это неравенство будет установлено, сразу же можно будет получить требуемый результат.

В следующей лемме показано, как приблизить элемент $V \in \mathscr{V}_0$ элементом специального вида.

16. Лемма. *Элемент $V_0 \in \mathscr{V}_0$ назовем гладким и финитным, если*

(i) *существуют такое целое n и такие функции $K_{ij}(\cdot,\cdot) \in L_2(\mu \times \mu)$, обращающиеся в нуль при $i > n$ и $j > n$, а также обращающиеся в нуль вне квадрата $[-n, n] \times [-n, n]$, что*

$$(41) \qquad V_0\tilde{f} = \tilde{g}, \quad \text{где} \quad g_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \int_R K_{ij}(a, b) f_j(b)\,\mu(db)$$

и

(ii) *при $b \notin e_\nu$ функции K_{ij} совпадают с функциями $\mathring{K}_{ij}$, которые бесконечно дифференцируемы по b и таковы, что их производные $\partial^m \mathring{K}_{ij}/\partial b^m$ принадлежат $L_2(\mu \times \lambda)$ для всех m, i, j.*

Тогда для любого $V \in \mathscr{V}_0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $V^{(\varepsilon)} \in \mathscr{V}_0$, что $|V^{(\varepsilon)}|^* \leqslant \varepsilon$, а элемент $V + V^{(\varepsilon)}$ является гладким и финитным.

Доказательство. Определим в $\mathfrak{H}'$ проектор P_n следующим образом:

$$(42) \qquad P_n\tilde{f} = \tilde{g}, \quad \text{где} \quad g_i(a) = \begin{cases} f_i(a), & i \leqslant i \leqslant n, \\ 0 & i > n. \end{cases}$$

Ясно, что $P_n\tilde{f} \to \tilde{f}$ при $n \to \infty$ для любого $\tilde{f} \in \mathfrak{H}'$. Ясно также, что P_n коммутирует с любой ограниченной борелевской функцией от H. Следовательно, если положить $V_{(n)} = P_n E([-n, n]) \times VE([-n, n]) P_n$ для любого $V \in \mathscr{V}_0$, то оператор $V_{(n)}$ будет всюду определенным, ограниченным и ядерным. По лемме 12 $\lim\limits_{n\to\infty} | V_{(n)} - V |^* = 0$.

Так как оператор $V_{(n)}$ принадлежит классу C_1, то (см. лемму XI.9.9(a) и (e)) он принадлежит классу Гильберта — Шмидта $C_2 = HS$. Отсюда, используя лемму XI.10.5 и замечая, что $V_{(n)} = P_n V_{(n)} P_n = E([-n, n]) V_n E([-n, n])$, мы заключаем, что существуют такие функции $K_{ij}^{(n)}(\cdot,\cdot) \in L_2(\mu \times \mu)$, обращающиеся в нуль при $i > n$ и $j > n$, а также вне множества $[-n, n] \times [-n, n]$

для всех i, j, что

$$(43)\qquad V_{(n)}\tilde{f}=\tilde{g}, \quad \text{где} \quad g_i(a)=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_R K_{ij}^{(n)}(a, b) f_i(b)\,\mu(db), \qquad \tilde{f}\in\mathfrak{H}'.$$

Пусть φ — неотрицательная функция из $C^\infty(R)$, обращающаяся в нуль вне $[-1, +1]$ и удовлетворяющая условиям $\varphi(x)=\varphi(-x)$, $\int\limits_R \varphi(a)\,da=1$. Для любых $\varepsilon>0$ и $\tilde{f}\in\mathfrak{H}'$ определим $\Phi_\varepsilon\tilde{f}$ формулами

$$(44)\qquad \Phi_\varepsilon\tilde{f}=\tilde{g}, \quad \text{где} \quad g_i(a)=\begin{cases} f_i(a), & a\in e_\nu, \\ \varepsilon^{-1}\int\limits_R \varphi(\varepsilon^{-1}(a-b))\, f_i(b)\,db, & a\notin e_\nu. \end{cases}$$

Из леммы XI.3.1 вытекает, что Φ_ε есть отображение из $\mathfrak{H}'$ в $\mathfrak{H}'$ и его норма не превосходит 1. Если элемент $\tilde{f}$ таков, что $f_i(a)=0$ для всех $i\neq i_0$, и $f_{i_0}(a)$ совпадает при $a\notin\varepsilon_\nu$ с непрерывной функцией h, сосредоточенной в конечном интервале вещественной оси, то $\Phi_\varepsilon\tilde{f}-\tilde{f}=\tilde{g}^\varepsilon$, где $g_i^\varepsilon(a)=0$ при $i\neq i_0$, $g_{i_0}(a)=0$ при $a\in e_\nu$ и

$$(45)\qquad g_{i_0}^\varepsilon(a)=\varepsilon^{-1}\int\limits_R \varphi(\varepsilon^{-1}(a-b))\,(h(b)-h(a))\,da, \quad a\notin e_\nu.$$

Ясно, что $\int\limits_R |g_{i_0}^\varepsilon(a)|^2\,\mu(da)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Применяя теорему II.3.6, заключаем, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Phi_\varepsilon=I$ в сильной операторной топологии.

Отсюда, полагая $V_{(n,\,\varepsilon)}=\Phi_\varepsilon V_{(n)}\Phi_\varepsilon$, находим, согласно лемме 12, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}|V_{(n,\,\varepsilon)}-V_{(n)}|^*=0$. Определим теперь, используя (43) и (44), функцию $K_{ij}^{(n,\,\varepsilon)}(\cdot,\,\cdot)\in L_2(\mu\times\mu)$ следующим образом:

$$(46)\qquad K_{ij}^{(n,\,\varepsilon)}(a, b)=$$

$$=\begin{cases} K_{ij}^{(n)}(a, b), & a\in e_\nu,\ b\in e_\nu, \\ \varepsilon^{-1}\int\limits_R \varphi(\varepsilon^{-1}(a-a'))\,K_{ij}^{(n)}(a', b)\,da', & a\in R-e_\nu,\ b\in e_\nu, \\ \varepsilon^{-1}\int\limits_R \varphi(\varepsilon^{-1}(b-b'))\,K_{ij}^{(n)}(a, b')\,db', & a\in e_\nu,\ b\in R-e_\nu, \\ \varepsilon^{-2}\int\limits_R\int\limits_R \varphi(\varepsilon^{-1}(a-a'))\,\varphi(\varepsilon^{-1}(b-b'))\,K_{ij}^{(n)}(a', b')\,da'\,db', & \\ \qquad a\in R-e_\nu,\ b\in R-e_\nu. & \end{cases}$$

Тогда $V_{(n,\varepsilon)}\tilde{g}=\tilde{h}$ для каждого $\tilde{g}\in\mathfrak{H}'$, где

$$h_i(a)=\sum_{j=1}^{n}\int_R K_{ij}^{(n,\varepsilon)}(a, b)\, g(b)\,\mu(db).$$

Из (45) следует, что для любого $a\in R$ функция $K_{ij}^{(n,\varepsilon)}(a, b)$ совпадает при $b\notin e_\nu$ с некоторой функцией $\mathring{K}_{ij}^{(n,\varepsilon)}(a, b)$, которая бесконечно дифференцируема по b и такова, что $\partial^m\mathring{K}_{ij}^{(n,\varepsilon)}/\partial b^m$ принадлежит $L_2(\mu\times\lambda)$ для всех m, i, j. Следовательно, для любого $n\geqslant 1$ и любого $\varepsilon>0$ оператор $V_{(n,\varepsilon)}$ является гладким и финитным. Если мы теперь выберем число $n=n(\varepsilon)$ так, чтобы $|V_{(n)}-V|^*<\varepsilon/2$, а затем выберем число $\delta=\delta(\varepsilon)$ так, чтобы $|V_{(n,\delta)}-V_{(n)}|^*<\varepsilon/2$, и положим $V^{(\varepsilon)}=V_{(n,\delta)}-V$, то оператор $V+V^{(\varepsilon)}$ будет гладким и финитным и будет выполняться неравенство $|V^{(\varepsilon)}|^*<\varepsilon$. Тем самым лемма доказана.

Теперь мы получим важное неравенство.

17. Лемма. *Назовем элемент $\tilde{f}\in\mathfrak{H}'$ гладким и финитным, если*

(i) *существует такое целое число n, что $f_i(a)=0$ при $i>n$;*

(ii) *$f_i(a)=0$ при $a\in e_\nu$, $1\leqslant i\leqslant n$; кроме того, существует такая функция $\mathring{f}_i$, определенная на R, бесконечно дифференцируемая и обращающаяся в нуль вне конечного интервала из R, что $f_i(a)=\mathring{f}_i(a)$ при $a\notin e_\nu$.*

Тогда для любого гладкого и фититного элемента $\tilde{f}\in\mathfrak{H}'$ существует такая конечная постоянная $C(\tilde{f})$, зависящая только от $\tilde{f}$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|Te^{itH}\tilde{f}|^2\,dt\leqslant\|T\|^2 C(\tilde{f}) \tag{47}$$

для любого оператора T из $\mathfrak{H}'$, принадлежащего классу Гильберта — Шмидта HS (здесь, как и раньше, $\|T\|$ означает норму Гильберта — Шмидта оператора T).

Доказательство. Пусть $\tilde{f}$, f_i, $\mathring{f}_i$ и T имеют тот же смысл, что и выше. По лемме XI.10.6 существуют такие элементы $L_{ij}(\cdot\,,\cdot)$ из $L_2(\mu\times\mu)$, $1\leqslant i, j<\infty$, что

$$Te^{itH}\tilde{f}=\tilde{g}^{(t)},\quad\text{где}\quad g_i^{(t)}(a)=\sum_{j=1}^{n}\int_R L_{ij}(a, b)\,e^{itb}f_j(b)\,\mu(db). \tag{48}$$

Согласно той же лемме,

$$(49) \qquad \| T \|^2 = \sum_{i,\, j=1}^{\infty} \iint\limits_{R} | L_{ij}(a,\, b) |^2 \mu(da)\, \mu(db).$$

Из соотношения (48) и равенства $\mathring{f}_i(a) = 0$ при $a \in e_\nu$ находим

$$(50) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} | T e^{itH} \tilde{f} |^2 \, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{R} \left| \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{R} L_{ij}(a,\, b) \mathring{f}_j(b)\, e^{itb}\, db \right|^2 \mu(da)\, dt.$$

Отсюда по теореме Планшереля (XV.11.3) и теореме Фубини

$$(51) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} | T e^{itH} \tilde{f} |^2 \, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{R} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \int\limits_{R} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(a,\, b) \mathring{f}_j(b)\, e^{itb}\, db \right|^2 dt\, \mu(da) =$$

$$= 2\pi \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{R} \int\limits_{R} \left| \sum_{j=1}^{n} L_{ij}(a,\, b) \mathring{f}_j(b) \right|^2 db\, \mu(da) \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sup_{b \in R} \left\{ \sum_{j=1}^{n} | \mathring{f}_j(b) |^2 \right\} \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{R} \int\limits_{R} | L_{ij}(a,\, b) |^2 \mu(da)\, \mu(db) \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sup_{b \in R} \left\{ \sum_{j=1}^{n} | \mathring{f}_j(b) |^2 \right\} \| T \|^2,$$

и лемма доказана, ч. т. д.

Теперь мы можем доказать основной результат — лемму 15.

Доказательство леммы 15. Так как доказательство достаточно длинно, мы предварительно изложим его общий план. Сначала мы докажем, что для любого $V_0 \in \mathscr{V}$ справедливо тождество

$$\frac{d}{dt} e^{it(H+V_0)} e^{-itH} g = i e^{it(H+V_0)} V_0 e^{-itH} g, \qquad g \in \mathfrak{D}(H);$$

это тождество без труда выводится из функционального исчисления для самосопряженных операторов. Интегрируя его, мы получим, что если f и V_0 удовлетворяют некоторым условиям гладкости, то $f \in \Sigma\ (H + V,\ H)$. Кроме того, преобразуя проинтегрированное тождество, мы выведем априорную оценку скорости сходимости вектор-функции

$$e^{it(H+V_0)}e^{-itH}f$$

к ее пределу (неравенство Розенблюма). Эта оценка (формула (74) ниже) выражается только через интеграл, для которого в лемме 17 найдены достаточно хорошие границы. Несложный предельный переход покажет, что оценка (74), полученная первоначально для гладких V_0 и f, справедлива для всех V_0 и f, удовлетворяющих предположениям леммы 15. Отсюда сразу же получится утверждение леммы 15.

Перейдем к подробному доказательству.

Из леммы 13 сразу следует, что оператор $H+V$ самосопряженный. Тем самым доказано утверждение (а) леммы 15.

Возьмем гладкую и финитную функцию $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}'$; тогда существуют такое целое n и такие функции $\mathring{f}_1, \ldots, \mathring{f}_n \in C^\infty(R)$, обращающиеся в нуль вне отрезка $[-n, n]$, что $f_i(a)=0$, если $i>n$ или $a\in e_\nu$, и $f_i(a)=\mathring{f}_i(a)$, если $a\notin e_\nu$, $1\leqslant i\leqslant n$. Возьмем элемент $V\in\mathscr{V}_0$. Через $V^{(\varepsilon)}$ обозначим элемент из $\mathscr{V}_0$, построенный в лемме 16. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ существуют такое целое число $n(\varepsilon)$, такие функции $K_{ij}^{(\varepsilon)}(\cdot,\cdot)\in L_2(\mu\times\mu)$ и такие функции $\mathring{K}_{ij}^{(\varepsilon)}\in L_2(\mu\times\lambda)$, что $K_{ij}^{(\varepsilon)}(a, b)=0$, если $i>n$, $j>n$, $|a|>n$ или $|b|>n$, причем

(i) $(V+V^{(\varepsilon)})\widetilde{g}=\widetilde{h}$, где $h_i(a)=\sum\limits_{j=1}^{n(\varepsilon)}\int\limits_R K_{ij}^{(\varepsilon)}(a, b)g_j(b)\,\mu(db)$, $\widetilde{g}\in\mathfrak{H}'$;

(ii) $K_{ij}^{(\varepsilon)}(a, b)=\mathring{K}_{ij}^{(\varepsilon)}(a, b)$ при $b\notin e_\nu$; $\mathring{K}_{ij}^{(\varepsilon)}$ бесконечно дифференцируема по b и $\partial^m\mathring{K}_{ij}^{(\varepsilon)}/\partial b^m\in L_2(\mu\times\lambda)$ для всех m, i и j.

Если $\widetilde{g}\in\mathfrak{D}(H)$, то по теореме XII.2.6 и теореме Лебега III.6.16

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{e^{ihH}\widetilde{g}-\widetilde{g}}{h}-iH\widetilde{g}\right|^2= \tag{52}$$

$$=\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{e^{ih\lambda}-1-ih\lambda}{h\lambda}\right|^2|\lambda|^2|E(d\lambda)\widetilde{g}|^2=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{h\to 0}((e^{ihH}-I)/h-iH)(iI-H)^{-1}=0$ в сильной топологии. Аналогично, если $V_0\in\mathscr{V}$, то, поскольку $\mathfrak{D}(H)=\mathfrak{D}(H+V_0)$,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{ih(H+V_0)}-I}{h}-i(H+V_0)\right)(iI-H)^{-1}=0 \tag{53}$$

в сильной топологии. Следовательно,

$$(54)\quad \lim_{h\to 0}\frac{e^{i(t+h)(H+V_0)}e^{-i(t+h)H}-e^{it(H+V_0)}e^{-itH}}{h}\tilde{g}=$$

$$=\lim_{h\to 0}e^{it(H+V_0)}\left(\frac{e^{ih(H+V_0)}e^{-ihH}-I}{h}\right)e^{-itH}\tilde{g}=$$

$$=\lim_{h\to 0}e^{it(H+V_0)}\left(\frac{(e^{ih(H+V_0)}-I)\,e^{-ihH}+e^{-ihH}-I}{h}\right)e^{-itH}\tilde{g}=$$

$$=\lim_{h\to 0}e^{it(H+V_0)}\left(\frac{(e^{ih(H+V_0)}-I)\,(iI-H)^{-1}}{h}\right)e^{-ihH}e^{-itH}(iI-H)\,\tilde{g}+$$

$$+\lim_{h\to 0}e^{it(H+V_0)}\left(\frac{e^{-ihH}-I}{h}\right)e^{-itH}\tilde{g}=$$

$$=e^{it(H+V_0)}\left(i\,(H+V_0)\,(iI-H)^{-1}\right)e^{-itH}\,(iI-H)\tilde{g}-$$

$$-e^{it(H+V_0)}\,(iH)e^{-itH}\tilde{g}=$$

$$=e^{it(H+V_0)}\left(i\,(H+V_0)-iH\right)e^{-itH}\tilde{g}=$$

$$=ie^{it(H+V_0)}V_0e^{-itH}\tilde{g}.$$

Итак,

$$(55)\qquad \frac{d}{dt}\,e^{it(H+V_0)}e^{-itH}\tilde{g}=ie^{it(H+V_0)}V_0e^{-itH}\tilde{g},\qquad \tilde{g}\in\mathfrak{D}(H).$$

Мы предоставляем читателю провести аналогичное (и даже более простое) доказательство того, что правая часть этого равенства непрерывна по t. Следовательно, мы можем проинтегрировать обе части равенства (55), а тогда мы получим, что

$$(56)\quad (e^{it(H+V_0)}e^{-itH}-e^{is(H+V_0)}e^{-isH})\,\tilde{g}=$$

$$=i\int_s^t e^{iu(H+V_0)}\,V_0e^{-iuH}\tilde{g}\,du,\qquad \tilde{g}\in\mathfrak{D}(H).$$

В частности,

$$(57)\quad \exp\left(it\,(H+V+V^{(\varepsilon)})\right)\exp\left(-itH\right)\tilde{f}-$$

$$-\exp\left(is\,(H+V+V^{(\varepsilon)})\right)\exp\left(-isH\right)\tilde{f}=$$

$$=i\int_s^t\exp\left(iu\,(H+V+V^{(\varepsilon)})\right)(V+V^{(\varepsilon)})\exp\left(-iuH\right)\tilde{f}\,du.$$

С другой стороны,

$$(58)\qquad (V+V^{(\varepsilon)})\exp\left(-iuH\right)\tilde{f}=\tilde{g}^{(u)},$$

где

$$g_i^{(u)}(a)=\sum_{j=1}^{n(\varepsilon)}\int_R \mathring{K}_{ij}^{(\varepsilon)}(a,\,b)\,e^{-iub}\mathring{f}(b)\,db.$$

Дважды интегрируя по частям, находим

(59) $g_i^{(u)}(a)=$

$$=\begin{cases} -u^{-2}\sum_{j=1}^{n(\varepsilon)}\int\limits_R \left\{\frac{\partial^2}{\partial b^2}[\mathring{K}_{ij}^{(\varepsilon)}(a, b)\tilde{f}(b)]\right\} e^{-iub}\,db, & 1\leqslant i\leqslant n,\\ 0, \quad i>n, \end{cases}$$

откуда следует существование такой конечной постоянной C, что $|\tilde{g}^{(u)}|\leqslant C(1+|u|^2)$. Поэтому

(60) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|(V+V^{(\varepsilon)})\exp(-iuH)\tilde{f}|\,du<\infty.$$

Из равенства (57) вытекает, что

(61) $$|\exp(it(H+V+V^{(\varepsilon)}))\exp(-itH)\tilde{f}-$$
$$-\exp(is(H+V+V^{(\varepsilon)}))\exp(-isH)\tilde{f}|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_s^t|(V+V^{(\varepsilon)})(\exp(-iuH))\tilde{f}|\,du;$$

следовательно, $\tilde{f}\in\Sigma(H+V+V^{(\varepsilon)}, H)$. Положим

(62) $$\mathcal{U}_t=\exp(it(H+V))\exp(-itH),$$

(63) $$\mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}=\exp(it(H+V+V^{(\varepsilon)}))\exp(-itH).$$

Тогда

(64) $$|(\mathcal{U}_t-\mathcal{U}_s)\tilde{f}|^2=2|\tilde{f}|^2-2\,\mathrm{Re}\,(\mathcal{U}_t\tilde{f},\ \mathcal{U}_s\tilde{f})=2\,\mathrm{Re}\,((\mathcal{U}_t-\mathcal{U}_s)\tilde{f},\ \mathcal{U}_t\tilde{f}).$$

Аналогично,

(65) $$|(\mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}-\mathcal{U}_s^{(\varepsilon)})\tilde{f}|^2=2\,\mathrm{Re}\,((\mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}-\mathcal{U}_s^{(\varepsilon)})\tilde{f},\ \mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}\tilde{f}).$$

Положим $\mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}=\mathcal{U}(H+V+V^{(\varepsilon)}, H)$. Умножая скалярно обе части равенства (57) на $\mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}\tilde{f}$ и полагая затем $t\to\infty$, находим

(66) $$|(\mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}-\mathcal{U}_s^{(\varepsilon)})\tilde{f}|^2=$$
$$=-2\,\mathrm{Im}\int\limits_s^\infty(\exp(iu(H+V+V^{(\varepsilon)}))(V+V^{(\varepsilon)})\exp(-iuH)\tilde{f},\ \mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}\tilde{f})\,du\leqslant$$
$$\leqslant 2\int\limits_s^\infty|\exp(iu(H+V+V^{(\varepsilon)}))(V+V^{(\varepsilon)})\exp(-iuH)\tilde{f},\ \mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}\tilde{f})|\,du.$$

Используя лемму 6(b), мы можем переписать это неравенство в виде

$$(67)\qquad |(\mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}-\mathcal{U}_s^{(\varepsilon)})\tilde{f}|^2\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_s^\infty |((V+V^{(\varepsilon)})\exp(-iuH)\tilde{f},\ \mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}\exp(-iuH)\tilde{f})|\,du.$$

Поскольку элемент $\tilde{f}$ является гладким и финитным, существует такой ограниченный интервал e из R, что $E(e)\tilde{f}=\tilde{f}$. Обозначим через $E^{(\varepsilon)}(\cdot)$ разложение единицы самосопряженного оператора $H^{(\varepsilon)}=H+V+V^{(\varepsilon)}$. Из (67) находим, применяя еще раз лемму 6(b),

$$(68)\quad |(\mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}-\mathcal{U}_s^{(\varepsilon)})\tilde{f}|^2\leqslant$$
$$\leqslant 8\int_{\min(t,\,s)}^\infty |E^{(\varepsilon)}(e)(V+V^{(\varepsilon)})E(e)\exp(-iuH)\tilde{f},\ \mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}\exp(-iuH)\tilde{f})|\,du.$$

Используя лемму 13, выберем такое λ_0, что $\operatorname{Im}\lambda_0\neq 0$ и $|VR(\lambda_0;\ H)|<1/2$. Так как $|V^{(\varepsilon)}|^*\leqslant\varepsilon$, то $|(V+V^{(\varepsilon)})R(\lambda_0;\ H)|<1/2$ для всех достаточно малых ε. Следовательно, по лемме 13

$$(69)\qquad R(\lambda_0;\ H^{(\varepsilon)})=R(\lambda_0;\ H)(I-(V+V^{(\varepsilon)})R(\lambda_0;\ H))^{-1}$$

для достаточно малых ε. Переходя к сопряженным операторам, получаем также

$$(70)\qquad R(\bar{\lambda}_0;\ H^{(\varepsilon)})=(I-((V+V^{(\varepsilon)})R(\lambda_0;\ H))^*)^{-1}R(\lambda_0;\ H).$$

Заметим, что, согласно лемме VII.2.4, норма оператора $(I-((V+V^{(\varepsilon)})R(\lambda_0;\ H))^*)^{-1}$ не превосходит 2 при достаточно малых ε.

В силу теоремы XII.2.8, очевидно, можем записать, что $E^{(\varepsilon)}(e)=M^{(\varepsilon)}R(\bar{\lambda}_0;\ H^{(\varepsilon)})$, где $M^{(\varepsilon)}$ — ограниченный оператор, удовлетворяющий неравенству $|M^{(\varepsilon)}|\leqslant C(e,\lambda_0)$, причем $C(e,\lambda_0)$ зависит только от ограниченного интервала e и числа λ_0, но не зависит от ε. Обозначим через $P_\infty^{(\varepsilon)}$ ортогональный проектор на подпространство $\Sigma(H+V+V^{(\varepsilon)},\ H)$, которое является областью определения оператора $\mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}$, и положим

$$(71)\qquad \hat{M}^{(\varepsilon)}=(M^{(\varepsilon)}(I-((V+V^{(\varepsilon)})R(\lambda_0;\ H))^*)^{-1})^*\,\mathcal{U}_\infty^{(\varepsilon)}P_\infty^{(\varepsilon)}.$$

Тогда $|\hat{M}^{(\varepsilon)}|\leqslant 2C(e,\lambda_0)$ для достаточно малых ε. Используя равенство (70), мы можем переписать неравенство (68) в виде

$$(72)\qquad |(\mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}-\mathcal{U}_s^{(\varepsilon)})\tilde{f}|^2\leqslant$$
$$\leqslant 8\int_{\min(t,\,s)}^\infty |(R(\bar{\lambda}_0;\ H)(V+V^{(\varepsilon)})E(e)\exp(-iuH)\tilde{f},$$
$$\hat{M}^{(\varepsilon)}\exp(-iuH)\tilde{f})|\,du.$$

Из следствия 11 вытекает, что оператор $R(\bar{\lambda}_0; H)VE(e)$ можно записать в виде $R(\bar{\lambda}_0; H)VE(e)=BA$, где A и B — операторы Гильберта — Шмидта. Аналогично, $R(\bar{\lambda}_0; H)V^{(\varepsilon)}E(e)=B^{(\varepsilon)}A^{(\varepsilon)}$, где $A^{(\varepsilon)}$ и $B^{(\varepsilon)}$ — операторы Гильберта — Шмидта, причем $\|A^{(\varepsilon)}\|\to 0$ и $\|B^{(\varepsilon)}\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Положим $\hat{B}^{(\varepsilon)}=B^*\hat{M}^{(\varepsilon)}$ и $\widetilde{B}^{(\varepsilon)}=(B^{(\varepsilon)})^*\hat{M}^{(\varepsilon)}$. Тогда по лемме XI.9.9(d) имеем $\|\hat{B}^{(\varepsilon)}\|\leqslant 2C(e, \lambda_0)\|B\|$ для достаточно малых ε. По тем же соображениям $\|\widetilde{B}^{(\varepsilon)}\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Из (72) находим, что

$$(73)\qquad |(\mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}-\mathcal{U}_s^{(\varepsilon)})\tilde{f}|^2\leqslant$$
$$\leqslant 8\int\limits_{\min(t,s)}|A\exp(-iuH)\tilde{f},\ \hat{B}^{(\varepsilon)}\exp(-iuH)\tilde{f})|\,du+$$
$$+8\int\limits_{\min(t,s)}|A^{(\varepsilon)}\exp(-iuH)\tilde{f},\ \widetilde{B}^{(\varepsilon)}\exp(-iuH)\tilde{f}|\,du.$$

Следовательно, согласно лемме 17 и неравенству Шварца,

$$(74)\qquad |(\mathcal{U}_t^{(\varepsilon)}-\mathcal{U}_s^{(\varepsilon)})\tilde{f}|^2\leqslant$$
$$\leqslant 16C(e, \lambda_0)\|B\|C(\tilde{f})\left\{\int\limits_{\min(t,s)}|A\exp(-iuH)\tilde{f}|^2\,du\right\}^{1/2}+$$
$$+8\|A^{(\varepsilon)}\|\,\|\widetilde{B}^{(\varepsilon)}\|C^2(\tilde{f}).$$

Отсюда, полагая $\varepsilon\to 0$ и используя лемму 14, получаем

$$(75)\qquad |(\mathcal{U}_t-\mathcal{U}_s)\tilde{f}|^2\leqslant$$
$$\leqslant 16C(e, \lambda_0)\|B\|C(f)\left\{\int\limits_{\min(t,s)}^{\infty}|A(\exp(-iuH))\tilde{f}|^2\,du\right\}^{1/2}.$$

Теперь из леммы 17 сразу же вытекает, что $\lim\limits_{t,s\to\infty}|(\mathcal{U}_t-\mathcal{U}_s)\tilde{f}|=0$. Следовательно, $\tilde{f}\in\Sigma(H+V, H)$. Так как $\tilde{f}$ — произвольный гладкий финитный элемент пространства $\mathfrak{H}'$, то мы видим, что подпространство $\Sigma(H+V, H)$ содержит любой гладкий финитный элемент из $\mathfrak{H}'$.

Заметим, далее, что если $\tilde{g}$ — произвольный элемент из $\mathfrak{H}'$, причем $g_i(a)=0$ для всех $a\in e_\nu$, то

(76) существует такая последовательность гладких финитных элементов $\{\tilde{f}^{(n)}\}$ из $\mathfrak{H}'$, что $\lim\limits_{n\to\infty}|\tilde{f}^{(n)}-\tilde{g}|=0$.

Для доказательства этого утверждения возьмем сначала такую функцию $\tilde{g}$, что $g_i(a)=0$ для всех i, кроме некоторого i_0, а $g_{i_0}(a)=$

$=\chi_{[c,\,d]-e_\nu}(a)$, где $[c, d]$ — некоторый замкнутый ограниченный отрезок, а χ_e — характеристическая функция множества e. Возьмем такую последовательность функций $\{f^{(n)}\}$ из $C^\infty(R)$, обращающихся в нуль вне некоторого ограниченного отрезка из R, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_R |f^{(n)}(a)-\chi_{[c,\,d]}(a)|^2\,da=0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_R |f^{(n)}(a)\,\chi_{R-e_\nu}(a)-\chi_{[c,\,d]-e_\nu}(a)|^2\,\mu(da)=0, \tag{77}$$

чем доказано утверждение (76) для элементов $\tilde{g}$ указанного выше вида. Пусть теперь $\tilde{g}$ — произвольный элемент из $\mathfrak{H}'$, удовлетворяющий условию $g_i(a)=0$ для всех $a\in e_\nu$. Применяя лемму III.8.3, мы получаем такую последовательность $\tilde{g}^{(n)}$ элементов из $\mathfrak{H}'$, что каждый из них является линейной комбинацией элементов указанного выше вида, и $\lim\limits_{n\to\infty}|\tilde{g}-\tilde{g}^{(n)}|=0$. Следовательно, утверждение (76) справедливо для любого элемента $\tilde{g}\in\mathfrak{H}'$, удовлетворяющего условию $g_i(a)=0$ для всех $a\in e_\nu$.

Поскольку $\Sigma(H+V, H)$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}'$ (см. лемму 2), любой элемент $\tilde{g}\in\mathfrak{H}'$, удовлетворяющий условию $g_i(a)=0$ для всех $a\in e_\nu$, принадлежит $\Sigma(H+V, H)$. Этим доказано утверждение (b) леммы 15, ч. т. д.

Покажем теперь, что утверждение леммы 15, сформулированное для всего пространства $\mathfrak{H}'$, переносится также без особого труда на некоторые подпространства этого пространства.

18. Лемма. *Пусть $\mathfrak{H}'$, H, $\mathscr{V}_0$ и т. д. имеют тот же смысл, что в лемме* 15 *и формулах, предшествующих этой лемме. Пусть $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots$ — борелевские подмножества из R и $\mathfrak{H}_1$ — множество всех таких $\tilde{f}\in\mathfrak{H}'$, что $f_i(a)=0$ для всех $a\notin\hat{e}_i$. Возьмем оператор $V\in\mathscr{V}_0$, удовлетворяющий условию $V(\mathfrak{D}(V)\cap\mathfrak{H}_1)\subseteq\mathfrak{H}_1$. Тогда*

(a) *$\mathfrak{H}_1$ — замкнутое подпространство из $\mathfrak{H}$;*

(b) *сужение $H_2=H\,|\,(\mathfrak{D}(H)\cap\mathfrak{H}_1)$ является самосопряженным оператором в $\mathfrak{H}_1$;*

(c) *сужение $H_3=(H+V)\,|\,(\mathfrak{D}(H)\cap\mathfrak{H}_1)$ является самосопряженным оператором в $\mathfrak{H}_1$;*

(d) *если элемент $f\in\mathfrak{H}_1$ принадлежит подпространству $\Sigma_{ac}(H_2)$, то $\tilde{f}\in\Sigma(H_3, H_2)$.*

Доказательство. Доказательство утверждения (a) несложно, и читатель проведет его самостоятельно.

Очевидно, что $H_2\mathfrak{D}(H_2)\subseteq\mathfrak{H}_1$. Ясно, что H_2 — симметрический оператор и что при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ оператор $\lambda I-H_2$ обладает ограниченным обратным, который имеет вид $(\lambda I-H_2)^{-1}=(\lambda I-H)^{-1}\,|\,\mathfrak{H}_1$.

Согласно лемме XII.1.2, H_2 замкнут, а в силу следствия XII.4.13(b), H_2 самосопряжен. Этим доказано утверждение (b). Предоставляем читателю доказать, что если F — ограниченная борелевская функция, то $F(H_2)=F(H)\,|\,\mathfrak{H}_1$.

Предположим, что $V\in\mathcal{V}_0$ и $V(\mathfrak{D}(V)\cap\mathfrak{H}_1)\subseteq\mathfrak{H}_1$. По лемме 13 существует такая конечная постоянная M, что $|V(\lambda_0 I-H)^{-1}|<1/2$ и

$$(78)\qquad (\lambda_0 I-H-V)^{-1}=(\lambda_0 I-H)^{-1}(I-V(\lambda_0 I-H)^{-1})^{-1},$$

если $|\operatorname{Im}\lambda_0|\geqslant M$. Следовательно, если $|\operatorname{Im}\lambda_0|\geqslant M$, то оператор $(\lambda_0 I-H-V)^{-1}$ отображает $\mathfrak{H}_1$ в себя. Положим $H_3=(H+V)\,|\,(\mathfrak{D}(H)\cap\mathfrak{H}_1)$. Тогда, если число $|\operatorname{Im}\lambda_0|$ достаточно велико, оператор $\lambda_0 I-H_3$ обладает ограниченным обратным, определенным формулой $(\lambda_0 I-H_3)^{-1}=(\lambda I-H-V)^{-1}\,|\,\mathfrak{H}_1$. Таким образом, по лемме XII.1.2 оператор H_3 замкнут, а по теореме XII.4.19 и следствию XII.4.13(b) он самосопряжен. Этим доказано утверждение (c). Согласно теореме Стоуна — Вейерштрасса (IV.6.16), любую непрерывную функцию F, определенную на R и обращающуюся в нуль на $\pm\infty$, можно приблизить равномерно линейными комбинациями произведений функций вида $G(\lambda)=(\lambda_0-\lambda)^{-1}$, где $|\operatorname{Im}\lambda_0|\geqslant M$. Следовательно, по теореме XII.2.6 оператор $F(H+V)$ можно приблизить с любой точностью (в равномерной операторной топологии) линейными комбинациями произведений операторов $(\lambda_0 I-H-V)^{-1}$ и, аналогично, $F(H_3)$ можно приблизить с любой точностью в той же топологии линейными комбинациями произведений операторов $(\lambda_0 I-H_3)^{-1}$. Следовательно,

$$(79)\qquad F(H+V)\,\mathfrak{H}_1\subseteq\mathfrak{H}_1 \quad\text{и}\quad F(H_3)=F(H+V)\,|\,\mathfrak{H}_1$$

для любой непрерывной функции F, определенной на R и обращающейся в нуль на $\pm\infty$. Так как любая ограниченная непрерывная функция F, определенная на R, является пределом равномерно ограниченной последовательности непрерывных функций F_n, равных нулю на $\pm\infty$, то по теореме XII.2.6 и теореме Лебега III.6.16 соотношение (79) справедливо для любой такой функции F, и в частности для функции $F(\lambda)=\exp(it\lambda)$. Отсюда $\exp(itH_3)\exp(-itH_2)=\exp(it(H+V))\exp(-itH)\,|\,\mathfrak{H}_1$. Таким образом, в силу доказанного выше, любая функция $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}_1$, удовлетворяющая условию $f_i(a)=0$ для всех $a\in e_\nu$, принадлежит подпространству $\Sigma(H_3, H_2)$. Заметим, что если элемент $\widetilde{f}\in\mathfrak{H}_1$ принадлежит $\Sigma_{ac}(H_2)$, то, поскольку $\lambda(e_\nu)=0$, мы имеем $E(e_\nu)\widetilde{f}=0$, так что $f_i(a)=0$ для μ-почти всех точек из e_ν при $i\geqslant 1$. Поэтому $\Sigma_{ac}(H_2)\subseteq\Sigma(H_3, H_2)$, и утверждение (d) доказано, ч. т. д.

В следующей лемме утверждение леммы 15, сформулированное относительно пары конкретно заданных операторов H_2, H_3, переносится на пару абстрактно заданных операторов H_4 и H_5.

19. Лемма. *Пусть H_4 — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}(H_4)$ и $E_4(\cdot)$ — его разложение единицы. Пусть V_4 — симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, причем $\mathfrak{D}(V_4) \supseteq \mathfrak{D}(H_4)$, оператор $V_4(iI - H_4)^{-1}$ компактен и для любого ограниченного отрезка e вещественной оси оператор $(iI - H_4)^{-1} V_4 E_4(e)$ является ядерным. Тогда*

(a) *оператор $H_5 = H_4 + V_4$ самосопряженный;*

(b) $\Sigma(H_5, H_4) \supseteq \Sigma_{ac}(H_4)$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой XII.3.16. По этой теореме $\mathfrak{H}$ допускает упорядоченное представление относительно самосопряженного оператора H_4. Пусть μ_1 — мера этого упорядоченного представления, и пусть $e_1, e_2, \ldots$ — множества кратности. По теореме III.4.14 можно записать равенство $\mu_1 = \nu + \lambda_1$, где мера ν является λ-сингулярной, а λ_1 — λ-непрерывной. Пусть, как и раньше, e_ν — такое множество нулевой λ-меры, что $\nu(R - e_\nu) = 0$. По теореме Радона — Никодима III.10.2 существует такая λ-интегрируемая функция ψ, что $\lambda_1(e) = \int_e \psi(a)\, \lambda(da)$ для любого борелевского множества e. Так как мера λ_1 неотрицательна, то, очевидно, и функция ψ неотрицательна. Положим $\tilde{e} = \{a \mid \psi(a) > 0\}$, и пусть $\lambda_2(e) = \lambda(\tilde{e} \cap e)$ для любого борелевского множества e. Тогда ясно, что $\lambda_2(e) > 0$ в том и только в том случае, если $\lambda_1(e) > 0$, и потому $\lambda_1 \cong \lambda_2$, т. е. меры λ_1 и λ_2 эквивалентны. Следовательно, если положить $\mu = \nu + \lambda_2$, то $\mu \cong \mu_1$. Положим $\hat{e}_i = e_i \cap R$, $i = 1, 2, \ldots$, и обозначим через $\mathfrak{H}_1$ пространство всех таких последовательностей $\tilde{f}$ из μ_2-измеримых функций f_i, определенных на R, что $f_i(a) = 0$ при $a \notin \hat{e}_i$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_R |f_i(a)|^2 \mu(da) < \infty. \tag{80}$$

Рассмотрим самосопряженный оператор H_2 в $\mathfrak{H}_1$, определенный формулами

$$\mathfrak{D}(H_2) = \left\{ \tilde{f} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} \int_R a^2 |f_i(a)|^2 \mu_2(da) < \infty \right\}, \tag{81}$$

$$H_2 \tilde{f} = \tilde{g}, \quad \text{где} \quad g_i(a) = a f_i(a). \tag{82}$$

Тогда H_4 и H_2 имеют спектральные представления с эквивалентными мерами и одними и теми же множествами кратности, так что по теореме XII.3.16 существует такое изометрическое отображение U пространства $\mathfrak{H}$ на себя, что $U^{-1} H_2 U = H_4$.

Положим $V_2 = UV_4U^{-1}$; тогда V_2 — симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$, причем $\mathfrak{D}(V_2) \supseteq \mathfrak{D}(H_2)$, оператор $V_2(iI - H_2)^{-1}$ компактен, а оператор $(iI - H_2)^{-1} V_2(E(e) \mid \mathfrak{H}_1)$ является ядерным для любого ограниченного отрезка e вещественной оси (через $E(\cdot)$ обозначено спектральное разложение оператора H_2). Ясно, что построенное сейчас пространство $\mathfrak{H}_1$ совпадает с пространством $\mathfrak{H}_1$, указанным в лемме 18, и мы можем рассматривать его как подпространство более широкого пространства $\mathfrak{H}'$ из леммы 15, при этом оператор H_2 будет сужением на $\mathfrak{H}_1$ оператора H из леммы 15 (см. выше формулы (33) — (36)). Обозначим через Q оператор проектирования из $\mathfrak{H}'$ на подпространство $\mathfrak{H}_1$ и положим $V = V_2Q$. Ясно, что V симметрический. По следствию VI.5.5 оператор $V(iI - H_2)^{-1} = V_2Q(iI - H_2)^{-1} = V_2(iI - H_2)^{-1} Q$ компактен, а по лемме XI.9.9(d) оператор $(iI - H)^{-1} VE(e) = (iI - H)^{-1} \times V_2QE(e) = (iI - H_2)^{-1} V_2(E(e) \mid \mathfrak{H}_1) Q$ является ядерным. Заметим, наконец, что $V_2 = V \mid (\mathfrak{D}(V) \cap \mathfrak{H}_1)$. Следовательно, согласно лемме 18, $\Sigma(H_1 + V_1, H_1) \supseteq \Sigma_{ac}(H_1)$. Используя изометрическую эквивалентность операторов $U^{-1}H_2U = H_4$ и $U^{-1}V_2U = V_4$, мы видим, что оператор $H_4 + V_4$ самосопряжен и $\Sigma(H_4 + V_4, H_4) \supseteq \Sigma_{ac}(H_4)$, ч. т. д.

Применяя лемму 19, нетрудно закончить доказательство теоремы 9.

Доказательство теоремы 9. Пусть e — ограниченный интервал вещественной оси. По теореме XII.2.6, $E(e) = (iI - H)^{-1}F(H)$, где F — ограниченная борелевская функция. Отсюда следует, что если выполнены предположения теоремы 9, то выполнены также и предположения леммы 19. Используя последнюю лемму, мы сразу получаем утверждения (a) и (b) теоремы 9.

Заметим, что в условия теоремы 9 операторы H и $H_1 = H + V$ входят симметрично (т. е. если пара H, $H + V$ удовлетворяет предположениям этой теоремы, то и пара $H + V$, H удовлетворяет им). Действительно, из леммы 13 вытекает, что если величина $|\operatorname{Im} \lambda_0|$ достаточно велика, то

$$(83) \qquad (\lambda_0 I - H_1)^{-1} = (\lambda_0 I - H)^{-1}(I - V(\lambda_0 I - H)^{-1})^{-1},$$

откуда, переходя к сопряженным операторам, мы получаем равенство

$$(84) \qquad (\bar{\lambda}_0 I - H_1)^{-1} = (I - (V(\bar{\lambda}_0 I - H)^{-1})^*)^{-1}(\bar{\lambda}_0 I - H)^{-1}.$$

Тогда, согласно следствию VI.5.5, оператор $V(\lambda_0 I - H_1)^{-1}$ компактен, а, согласно лемме XI.9.9(d), оператор $(\lambda_0 I - H_1)^{-1} V(\lambda_0 I - H_1)^{-1}$ является ядерным. Из теоремы XII.2.6 следует, что $(\lambda_0 I - H)^{-1} = (iI - H)^{-1} G(H) = G(H)(iI - H)^{-1}$, где G — ограниченная борелевская функция. Отсюда, еще раз применяя следствие VI.5.5

и лемму XI.9.9(d), мы видим, что оператор $V(iI - H_1)^{-1}$ компактен, а оператор $(iI - H_1)^{-1} V (iI - H_1)^{-1}$ является ядерным; этим доказано требуемое утверждение.

Используя лемму 19, мы получаем, что $\Sigma(H, H_1) \supseteq \Sigma_{ac}(H_1)$, Обозначим теперь через $E_1(\cdot)$ разложение единицы оператора H_1 и возьмем элемент $x \in \Sigma_{ac}(H)$. Если e_0 — борелевское множество, мера Лебега которого равна нулю, то $E(e_0)x = 0$, откуда, по лемме 6, $0 = \mathcal{U}(H_1, H) E(e_0) x = E_1(e_0) \mathcal{U}(H_1, H) x$. Таким образом, $\mathcal{U}(H_1, H) \Sigma_{ac}(H) \subseteq \Sigma_{ac}(H_1)$. Аналогично, $\mathcal{U}(H, H_1) \Sigma_{ac}(H_1) \subseteq \Sigma_{ac}(H)$. Используя следствие 4, находим, что $\mathcal{U}(H_1, H) \Sigma_{ac}(H) = \Sigma_{ac}(H_1)$, и теорема 9 доказана, ч. т. д.

Теорема 9 имеет многочисленные интересные применения к спектральной теории ряда специальных операторов (некоторые из этих применений указаны в § 6 «Примечания и дополнения» этой главы). Эта теорема допускает также интересные обобщения; некоторые из них приведены в § 6, а другие изложены в виде задач в § 5.

5. Упражнения

1. Пусть H_1 и H_2 — неограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$; предположим, что пересечение $\mathfrak{D}$ областей определения операторов H_1 и H_2 плотно в $\mathfrak{X}$. Показать, что для любого вектора $x \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющего условию

$$\int_0^\infty |(H_2 - H_1) e^{-itH_1} x| \, dt < \infty,$$

существует сильный предел $\lim\limits_{t \to \infty} e^{itH_2} e^{-itH_1} x$.

2. Пусть H_1 — оператор $f(x) \to xf(x)$ в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$, а V — интегральный оператор

$$(Vf)(x) = \int_0^1 V(x, y) f(y) \, dy$$

с измеримым ядром $V(x, y)$, удовлетворяющим условиям $V(x, y) = \overline{V(y, x)}$ и

$$\int_0^1 \int_0^1 |V(x, y)|^2 \, dx \, dy < \infty.$$

Положим $H_2 = H_1 + V$. Показать, что если V абсолютно непрерывен по y для каждого x и если

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) \right|^2 dx \, dy < \infty,$$

то существует сильный предел $\lim\limits_{t\to\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}$. [Указание: применить результат упр. 1.]

3. Мы будем пользоваться следующим обозначением: если τ — формальный дифференциальный оператор в частных производных, определенный в евклидовом пространстве E^n, то $T_1(\tau)$ будет обозначать замкнутый оператор в гильбертовом пространстве, описанный в предпоследнем абзаце § XIV.3.

(a) Рассмотрим лапласиан $\nabla = \partial^2/\partial x^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_n^2$ в E^n. Показать, что $T_1(\nabla)$ — самосопряженный оператор, и если $f \in \mathfrak{D}(T_1(\nabla))$, то функции $\partial f/\partial x_i$ и $\partial^2 f/\partial x_i\, \partial x_j$ квадратично интегрируемы для всех $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$.

(b) Предположим, что функции a_{ij}, a_i и a определены в E^n, ограничены и стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ в E^n. Положим

$$\tau_1 = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a(x).$$

Показать, что если $\lambda < 0$, то оператор $T_1(\tau_1)(T_1(\nabla) + \lambda I)^{-1}$ компактен и что $T_1(\tau_1)(T_1(\nabla) + \lambda I)^{-1}$ стремится к нулю по норме при $\lambda \to -\infty$.

(c) Показать, что если выполнены предположения п. (b) и τ_1 формально самосопряжен, то $T_1(\nabla + \tau_1)$ — самосопряженный оператор в $L_2(E^n)$.

(d) Положим $f_{a,k}(x) = \exp(-|x-a|^2/2k)$. Показать, что линейная оболочка функций $f_{a,k}$ плотна в $L_2(E^n)$ и

$$\exp(-itT_1(\nabla)) f_{a,k} = (1+4ikt)^{-n/2} \exp(-k\,|x-a|^2/(1+4ikt)).$$

(e) Доказать, что если выполнены предположения п. (b) и, кроме того,

$$\int\limits_{E^n} \left\{ |x|^4 \sum_{i,\, j=1}^{n} |a_{ij}(x)|^2 + |x|^2 \sum_{i=1}^{n} |a_i(x)|^2 + |a(x)|^2 \right\} dx < \infty,$$

то при $n \geqslant 3$ существует сильный предел $\lim\limits_{t\to\infty} \exp(itT_1(\nabla + \tau_1)) \times \exp(-itT_1(\nabla))$; отсюда следует, что сужение оператора $T_1(\nabla+\tau_1)$ на некоторое замкнутое инвариантное подпространство унитарно эквивалентно оператору $T_1(\nabla)$. [Указание: воспользоваться п. (d) и упр. 1.]

4. (Путнам.) Пусть τ — формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор в интервале (a, b) и H_1, H_2 — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$, порожденные оператором τ и двумя различными множествами линейных граничных условий. Пусть λ — вещественное число, не принадлежащее спектру оператора H_1.

(a) Показать, что существует вещественное число μ, не лежащее в спектре обоих операторов H_1 и H_2.

(b) Показать, что если μ — указанное в п. (a) число, то

$$(\mu I - H_1)^{-1} - (\mu I - H_2)^{-1}$$

является самосопряженным оператором с конечномерной областью значений.

(c) Показать, что операторы $H_1 \mid \Sigma_{ac}(H_1)$ и $H_2 \mid \Sigma_{ac}(H_2)$ изометрически эквивалентны.

5. Обозначим через l_p банахово пространство последовательностей $z = [z_0, z_1, \ldots]$ с нормой $|z| = \left\{\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|^p\right\}^{1/p}$, а через $\mathfrak{A}$ — банахово пространство бесконечных матриц $a = \{a_{ij},\ i,\ j \geqslant 0\}$ с нормой

$$\| a \| = \sum_{i,\, j=0}^{\infty} |a_{ij}| < \infty.$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство таких бесконечных матриц $b = \{b_{ij},\ i,\ j \geqslant 0\}$, что

$$|b| = \max\left(\max_{i \geqslant 0} \sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}|,\quad \max_{j \geqslant 0} \sum_{i=0}^{\infty} |b_{ij}|\right) < \infty.$$

Показать, что

(a) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и $|a| \leqslant \|a\|$, $a \in \mathfrak{A}$;

(b) если $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{B}$, то произведения ab и ba принадлежат $\mathfrak{B}$ и

$$|ab| \leqslant \|a\|\,|b|, \qquad |ba| \leqslant \|a\|\,|b|;$$

(c) если $b \in \mathfrak{B}$, то соответствие $z \to bz$ определяет ограниченный линейный оператор в пространстве l_p; точнее, $|bz| \leqslant |b|\,|z|$.

6. (Фриман.) Пусть S — оператор одностороннего левого сдвига

$$z \to Sz = [z_1, z_2, \ldots]$$

в пространстве l_p (см. предыдущее упр.), а $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и т. д. имеют тот же смысл, что и выше. Пусть $a \in \mathfrak{A}$, а $b = \Gamma a$ есть матрица, элементы которой определены формулами

$$b_{ij} = a_{i-1,\, j} + a_{i-2,\, j-1} + \ldots$$

(здесь мы полагаем $a_{ij} = 0$, если хотя бы один из индексов i, j отрицателен). Показать, что

(a) $S(\Gamma a) - (\Gamma a) S = a, \qquad a \in \mathfrak{A}$;

(b) $|\Gamma a| \leqslant \|a\|$;

(c) если $\|a\| < 1/2$, то оператор $z \to Sz + az$ в l_p подобен оператору S в l_p.

7. (Фриман.) Пусть S, $\mathfrak{A}$, l_p и т. д. имеют такой же смысл, как в упр. 5 и 6. Показать, что

(a) Если a_n, $a \in \mathfrak{A}$ и $\| a_n - a \| \to 0$, то последовательность преобразований $b \to \Gamma(b) a_n$ в банаховом пространстве $\mathfrak{A}$ сходится по норме к преобразованию $b \to \Gamma(b) a$.

(b) Если матрица $a \in \mathfrak{A}$ является верхней треугольной, т. е. элементы $a_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$, то преобразование $b \to \Gamma(b) a$ пространства $\mathfrak{A}$ квазинильпотентно.

[Указание: используя п. (a), приблизить a конечными верхними треугольными матрицами и доказать, что в этом случае преобразование $b \to \Gamma(b) a$ нильпотентно.]

(c) Если матрица $a \in \mathfrak{A}$ является верхней треугольной, то уравнение $b - \Gamma(b) a = a$ имеет единственное решение $b \in \mathfrak{A}$, которое является верхней треугольной матрицей; элементы $b_{i-1,\, i}$ этой матрицы определяются по индукции из равенств

$$b_{0,1} = a_{0,1}; \quad b_{1,2} = a_{1,2}(1 + b_{0,1}); \quad b_{2,3} = a_{2,3}(1 + b_{0,1} + b_{1,2}), \; \ldots .$$

(d) Если матрица $a \in \mathfrak{A}$ является верхней треугольной и $a_{n,\, n+1} \neq -1$ при $n \geqslant 1$, то преобразование $z \to Sz + az$ пространства l_p подобно преобразованию S.

8. Пусть S, $\mathfrak{A}$, l_p и т. д. имеют тот же смысл, что и в упр. 5, 6 и 7. Показать следующее:

(a) Если матрица $a \in \mathfrak{A}$ является нижней треугольной, т. е. ее элементы a_{ij} равны 0 при $j \geqslant i$, то преобразование $b \to a\Gamma(b)$ пространства $\mathfrak{A}$ квазинильпотентно.

[Указание: использовать рассуждения, примененные в упр. 7.]

(b) Если матрица $a \in \mathfrak{A}$ нижняя треугольная, то преобразование $z \to Sz + az$ пространства l_p подобно преобразованию S.

9. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2 = L_2(0, 1)$ и оператор T_0, определенный формулой $(T_0 f)(x) = x f(x)$, $f \in L_2(0, 1)$. Пусть $\varphi \in L_2$ — функция с непрерывной первой производной, c — вещественное число, а T — самосопряженный оператор, определенный формулой $Tf = T_0 f + c\varphi(f, \varphi)$.

(a) Доказать, что собственные значения оператора T, лежащие в отрезке $[0, 1]$, совпадают с теми числами λ, для которых $\varphi(\lambda) = 0$ и

$$c \int_0^1 \frac{|\varphi(x)|^2}{x - \lambda}\, dx = 1.$$

Показать, что непрерывный спектр оператора T есть множество $[0, 1] - \sigma_p(T)$, где $\sigma_p(T)$ — точечный спектр T.

(b) Построить такую функцию φ, принадлежащую L_2 и имеющую непрерывную первую производную внутри отрезка $[0, 1]$, что оператор T из п. (a) имеет бесконечно много собственных значений в отрезке $[0, 1]$.

10. Пусть дано B-пространство $\mathfrak{X}$. Пусть $A(s)$ — функция со значениями в $\mathfrak{X}$, определенная на вещественной оси R. Предположим, что $\gamma > 0$, $1 > \beta > 0$ и $\|A\|_{\gamma, \beta} < \infty$, где норма описана в определении 2.11.

(a) Показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\sigma)}{s-\sigma+i\varepsilon} d\sigma = \mathscr{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\sigma)}{s-\sigma} d\sigma - i\pi A(s).$$

(b) Показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\sigma)}{s-\sigma-i\varepsilon} d\sigma = \mathscr{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\sigma)}{s-\sigma} d\sigma + i\pi A(s).$$

Пусть $B(s, t)$ есть $\mathfrak{X}$-значная функция, определенная для вещественных s и t, и $\|B\|_{\gamma, \beta} < \infty$, где норма описана в определении 2.13.

(c) Показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(s, \sigma)}{s-\sigma \pm i\varepsilon} d\sigma = \mathscr{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(s, \sigma)}{s-\sigma} d\sigma \mp i\pi A(s, s).$$

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и $B(\mathfrak{H})$ — банахово пространство всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$. Возьмем $B(\mathfrak{H})$-значную функцию $C(s, t)$, определенную для всех вещественных s и t, и элемент $f \in L_2(R, \mathfrak{H})$. Предположим, что $\|C\|_{\gamma, \beta} < \infty$, где норма описана в определении 2.13.

(d) Показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(s, \sigma) f(\sigma)}{s-\sigma \pm i\varepsilon} d\sigma = \mathscr{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(s, \sigma) f(\sigma)}{s-\sigma} d\sigma \mp i\pi C(s, s) f(s)$$

почти всюду, причем предел в левой части и несобственный интеграл в правой части существует почти всюду.

11. (*Соотношение Фридрихса.*) Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $B(\mathfrak{H})$ — банахово пространство всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$. Возьмем вещественные числа $\gamma > 0$, $1 > \beta > 0$ и рассмотрим пространство $\mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(B(\mathfrak{H}))$, указанное в определении 2.13. Для каждого $A \in \mathfrak{A}_{\gamma, \beta}(B(\mathfrak{H}))$ обозначим через $\Gamma_+(A)$ ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(R, \mathfrak{H})$, определенный формулой

$$(\Gamma_+(A) f)(s) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(s, \sigma)}{s-\sigma+i\varepsilon} f(\sigma) d\sigma, \qquad f \in L_2(R, \mathfrak{H})$$

(см. п. (d) предыдущего упражнения). Показать, что если A, $B \in \mathfrak{A}_{\gamma,\beta}(B(\mathfrak{H}))$, то

$$\Gamma_+(A)\,\Gamma_+(B) = \Gamma_+(A\Gamma_+(B) + \Gamma_+(A)\,B).$$

Здесь $A\Gamma_+(B)$ определяется как предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} A(s, \sigma)\,\frac{B(\sigma, t)}{\sigma - t + i\varepsilon}\,d\sigma,$$

а $\Gamma_+(A)\,B$ — как предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(s, \sigma)}{s - \sigma + i\varepsilon}\,B(\sigma, t)\,d\sigma.$$

12. (Фридрихс.) Пусть $\mathfrak{H}$, $B(\mathfrak{H})$, γ, β, $\mathfrak{A}_{\gamma,\beta}$ и A имеют такой же смысл, как в предыдущем упражнении. Пусть r и l — такие элементы из $\mathfrak{A}_{\gamma,\beta}(B(\mathfrak{H}))$, что

$$A + \Gamma_+(l)\,A - l = 0, \qquad A + A\Gamma_+(r) + r = 0.$$

(a) Показать, что

$$(I + \Gamma_+(l))\,r = -l\,(I + \Gamma_+(r)).$$

(b) Показать, что

$$(I + \Gamma_+(l))\,(I + \Gamma_+(r)) = I.$$

(c) Показать, что оператор

$$P = (I + \Gamma_+(r))\,(I + \Gamma_+(l))$$

является проектором.

(d) Показать, что если пространство $\mathfrak{H}$ одномерно, то дополнительный проектор $I - P$ имеет конечномерную область значений.

13. Пусть $\mathfrak{H}$, $B(\mathfrak{H})$, γ, β, $\mathfrak{A}_{\gamma,\beta}$ и A имеют такой же смысл, как и в упр. 11.

(a) Показать, что если определить A^* равенством

$$A^*(s, t) = (A(t, s))^*,$$

то

$$\Gamma_+(A^*) = -\Gamma_+(A)^*.$$

(b) Доказать, что если элемент $l \in \mathfrak{A}_{\gamma,\beta}(B(\mathfrak{H}))$ является решением уравнения

$$A + \Gamma_+(l)\,A - l = 0,$$

то элемент $r = -l^*$ является решением уравнения

$$A^* + A^*\Gamma_+(r) + r = 0.$$

(c) Показать, что если $A=A^*$ и уравнение

$$A+\Gamma_+(l)A-l=0$$

имеет решение $l\in\mathfrak{A}_{\gamma,\beta}(B(\mathfrak{H}))$, то $I+\Gamma(l)$ есть частично изометрический оператор; если, кроме того, пространство $\mathfrak{H}$ одномерно, то ортогональное дополнение к области значений оператора $I+\Gamma(l)$ конечномерно.

14. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и R — вещественная прямая. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L_2=L_2(R, \mathfrak{H})$ самосопряженный оператор H, определенный формулой $(Hf)(x)=xf(x)$. Для любого $\varphi\in L_2$ обозначим через T_φ одномерный самосопряженный оператор, определенный формулой $T_\varphi f=\varphi(f, \varphi)$. Пусть c — вещественное число.

(a) Показать, что уравнение $W(H+cT_\varphi)=HW$ имеет формальное решение $W=I+\Gamma_+(A)$, где A — интегральный оператор, ядро которого определено формулой

$$A(x, y)v=a(x)(v, \varphi(y)), \qquad v\in\mathfrak{H}, \qquad x,\ y\in R,$$

и

$$a(x)=\frac{c\varphi(x)}{1-c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\varphi(t)|^2}{x-t+i0}\,dt}.$$

(b) Показать, что если $\gamma>0$, $1>\beta>0$ и $\|\varphi\|_{\gamma,\beta}<\infty$, где $\|\varphi\|_{\gamma,\beta}$ — норма, описанная в определении 2.13, то $W(H+cT_\varphi)f=HWf$ для всех f из области определения оператора H.

(c) Показать, что знаменатель выражения, определяющего функцию $a(x)$, может обратиться в нуль лишь в тех точках x_0, в которых $\varphi(x_0)=0$, и что этот знаменатель стремится к 1 при $x\to\pm\infty$.

(d) Показать, что если функция φ обладает первой производной, удовлетворяющей условию Гёльдера, то производная в точке x_0 знаменателя выражения, определяющего функцию $a(x)$, равна

$$c\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\varphi(t)|^2}{(x_0-t)^2}\,dt,$$

если x_0 является нулем этого знаменателя, так что любой такой нуль является простым.

(e) Показать, что если φ обладает первой производной, удовлетворяющей условию Гёльдера, то вектор-функция $a(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера, так что уравнение $W(H+cT_\varphi)=HW$ обладает решением W, которое является изометрическим оператором в гильбертовом пространстве L_2.

(f) Показать, что если W — построенный выше изометрический оператор, то проектор $I - P$, где $P = WW^*$, компактен, так что ортогональное дополнение к области значений оператора W конечномерно.

15. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, R — вещественная прямая и H — самосопряженный оператор в пространстве $L_2 = L_2(R, \mathfrak{H})$, определенный формулой $(Hf)(x) = xf(x)$. Пусть $\varphi_i \in L_2(R, \mathfrak{H})$, $i = 1, \ldots, n$; рассмотрим эрмитову матрицу $\{k_{ij}, i, j = 1, \ldots, n\}$ и самосопряженный оператор L_2, определенный соотношением

$$Tf = \sum_{i, j=1}^{n} k_{ij}\varphi_i (f, \varphi_j).$$

Предположим, что для некоторого β, $1 > \beta > 0$, функция $(1+|x|)^{\beta}\varphi_j(x)$ ограничена при $1 \leqslant j \leqslant n$ и $\varphi_j \in C^{\infty}(R)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

(a) Показать, что существует изометрический оператор W в $L_2(R, \mathfrak{H})$, область значений которого имеет конечную коразмерность. Доказать, что он удовлетворяет равенству $W(H+T)f = HWf$ для всех f из области определения оператора H. [Указание: использовать упр. 14 и индукцию по размерности области значений оператора H.]

(b) Показать, что подпространство $\Sigma_{ac}(H+T)$ обладает конечномерным ортогональным дополнением, так что оператор $H+T$ является прямой суммой оператора, эквивалентного H, и конечномерного самосопряженного оператора.

16. (a) Пусть H — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{Y}$ — вспомогательное гильбертово пространство, λ — мера Лебега на вещественной прямой R. Показать, что существуют такая положительная λ-сингулярная борелевская мера ν на R и такое изометрическое вложение $\mathfrak{X}$ в гильбертово пространство $L_2(\mu, \mathfrak{Y})$ вектор-функций, что $H = H_0 \mid \mathfrak{X}$, где H_0 — оператор умножения $f(x) \to xf(x)$; здесь $\mu = \lambda + \nu$.

(b) Пусть H, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — те же, что в п. (a), и $E(\cdot)$ — спектральное разложение оператора H. Для любого $w \in \mathfrak{X}$ положим

$$\frac{d(E(\cdot)w, w)}{d\lambda} = d_w(\cdot)$$

(т. е. $d_w(\cdot)$ — производная Радона — Никодима меры $(E(e)w, w)$ относительно меры Лебега λ). Пусть

$$\|w\|_H = \lambda\text{-}\operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<x<+\infty} |d_w(x)|^{1/2}.$$

Используя описанное выше вложение $\mathfrak{X}$ в $L_2(\mu, \mathfrak{Y})$, мы видим, что w можно считать векторнозначной функцией, определенной на вещественной прямой R; показать, что $\| w \|_H$ совпадает с λ-существенной верхней гранью функции $|w(x)|$.

(c) Доказать, что $\| w \|_H < \infty$ для всех w из некоторого плотного подпространства пространства $\Sigma_{ac}(H)$.

(d) Доказать, что если $w \in \Sigma_{ac}(H)$ и $\| w \|_H < \infty$, а v — произвольный вектор гильбертова пространства, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(e^{itH} w, v)|^2 \, dt \leqslant 2\pi \| w \|_H^2 \| v \|^2.$$

(e) Доказать, что если A — оператор Гильберта — Шмидта, $w \in \Sigma_{ac}(H)$ и $\| w \|_H < \infty$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | A e^{itH} w |^2 \, dt \leqslant 2\pi \| A \|_2^2 \| w \|_H^2.$$

[Указание: сначала рассмотреть случай самосопряженного оператора A и воспользоваться разложением по собственным векторам оператора A.]

17. (a) Пусть f — непрерывная функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, а $V(f)$ — ее полная вариация. Показать, что

$$\left| \int_a^b e^{ix} f(x) \, dx \right| \leqslant 2 \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| + V(f).$$

[Указание: проинтегрировать по частям.]

(b) Пусть f — строго возрастающая функция на отрезке $[a, b]$. Предположим, что ее производная f' положительна, непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Через $V((f')^{-1})$ обозначим полную вариацию функции $(f')^{-1}$. Показать, что

$$\left| \int_a^b e^{if(x)} \, dx \right| \leqslant 2 \max_{a \leqslant x \leqslant b} (|f'(x)|^{-1}) + V((f')^{-1}).$$

[Указание: сделать замену переменной $y = f(x)$.]

(c) Пусть f — строго возрастающая функция на отрезке $[a, b]$. Предположим, что ее производная положительна, непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Показать, что

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^\infty \left| \int_a^b e^{i(tx + sf(x))} \, dx \right|^2 dt = 0.$$

[Указание: использовать п. (b).]

(d) Пусть A — оператор Гильберта — Шмидта. Показать, что если выполнены предположения из п. (c) настоящего упражнения, то в случае, если H — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, выполняется соотношение

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty |A\exp(i(tH+sf(H)))w|^2\,dt=0$$

для всех $w\in\Sigma_{ac}(H)$, удовлетворяющих условию $\|w\|_H<\infty$ (см. упр. 16, п. (b) и (c)).

18. Пусть $\mathfrak{Y}$ — гильбертово пространство и λ — мера Лебега на вещественной прямой R. Пусть ν — положительная λ-сингулярная борелевская мера на R; положим $\mu=\lambda+\nu$. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\mu,\mathfrak{Y})$ векторнозначных функций и оператор умножения H_1, действующий в этом пространстве по формуле $f(x)\to xf(x)$. Пусть V — самосопряженный ядерный оператор и $H_2=H_1+V$, $U_t=\exp(itH_2)\exp(-itH_1)$.

(a) Показать, что

$$|(U_t-U_s)w|^2=2\operatorname{Re}((U_t-U_s)w,\ U_tw),\quad w\in L_2(\mu,\mathfrak{Y}).$$

(b) Показать, что если $w\in L_2(\mu,\mathfrak{Y})$ и обращается в нуль вне ограниченного подмножества из R, то

$$|(U_t-U_s)w|^2=\int_s^t(\exp(ixH_2)V\exp(-ixH_1)w,\ U_tw)\,dx.$$

(c) Указать такое плотное подмножество D в подпространстве $\Sigma_{ac}(H_1)$, что если $w\in D$, то существует предел $W_+w=\lim\limits_{t\to\infty}U_tw$ и

$$|(W_+-U_s)w|^2=\int_s^\infty(V\exp(-ixH_1)w,\ W_+\exp(-ixH_1)w)\,dx.$$

[Указание: использовать теорему 4.9.]

(d) (Неравенство Розенблюма.) Показать, что существуют такие операторы Гильберта-Шмидта A и B, зависящие только от V и μ, что если $w\in\Sigma_{ac}(H_1)$ и $\|w\|_{H_1}<\infty$, то

$$|(W_+-U_s)w|^2\leqslant\left(\int_s^\infty|A\exp(-ixH_1)w|^2\,dx\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\int_s^\infty|B\exp(-ixH_1)w|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

[Указание: использовать п. (c) и (e) предыдущего упражнения.]

19. Пусть H — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, V — ядерный оператор и $H_1=H+V$. Положим $U_t=\exp(itH_1)\exp(-itH)$. Пусть $w\in\Sigma_{ac}(H)$ и $\|w\|_H<\infty$ (см. упр. 17).

(a) Показать, что существуют предел $W_+w = \lim_{t\to\infty} U_t w$ и такие операторы Гильберта — Шмидта A и B, зависящие только от V и H, что

$$|(W_+ - U_s)w|^2 \leqslant \left(\int_s^\infty |A\exp(-ixH)w|^2\,dx\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int_s^\infty |B\exp(-ixH)w|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

(b) Показать, что если f — строго возрастающая функция на вещественной прямой, имеющая положительную непрерывную производную с ограниченной вариацией, то

$$\lim_{s\to\infty}(W_+ - I)\exp(-isf(H))w = 0$$

для всех $w \in \Sigma_{ac}(H)$, удовлетворяющих условию $\|w\|_H < \infty$. [Указание: воспользоваться упр. 17.]

(c) (Теорема об инвариантности волновых операторов.) Показать, что если выполнены перечисленные выше условия, то

$$\lim_{s\to\infty}\exp(isf(H_1))\exp(-isf(H))w = w = W_+w$$

для всех $w \in \Sigma_{ac}(H)$.

20. Пусть H_1 и H_2 — строго положительные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Предположим, что для некоторого положительного числа x оператор $H_1^{-x} - H_2^{-x}$ является ядерным. Тогда

(a) существует $\lim_{t\to\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}w$ для всех $w \in \Sigma_{ac}(H_1)$;

(b) операторы $H_1 | \Sigma_{ac}(H_1)$ и $H_2 | \Sigma_{ac}(H_2)$ изометрически эквивалентны.

21. Пусть H_1 и H_2 — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, V_1 и V_2 — ядерные операторы, а $\|V_1\|_1$, $\|V_2\|_1$ — их ядерные нормы. Положим

$$W_+(H_2+V_2, H_1+V_1)w = \lim_{t\to\infty}\exp(it(H_2+V_2))\exp(-it(H_1+V_1))w$$

в предположении, что предел, написанный в правой части, существует. Тогда

(a) если существует $W_+(H_2, H_1)w$, то существует также $W_+(H_2, H_1+V)w$ и

$$\lim_{\|V\|_1\to 0} W_+(H_2, H_1+V)w = W_+(H_2, H_1)w$$

в слабой топологии;

(b) если существует $W_+(H_2, H_1)\,w$, то существует также $W_+(H_2+V_1, H_1)\,w$ и

$$\lim_{\|V\|_1\to 0} W_+(H_2+V, H_1)\,w = W_+(H_2, H_1)\,w$$

в сильной топологии.

6. Примечания и дополнения

Метод, использованный в § 1 для спектрального анализа оператора второго порядка, в основном принадлежит М. А. Наймарку [10—12]. Разумеется, он является просто распространением на несамосопряженный случай идеи, хорошо известной в теории самосопряженных операторов (см. Вейль [5]); однако в несамосопряженном случае необходимо так видоизменить рассуждения, чтобы совершенно избежать какой-либо зависимости от теоремы о спектральном разложении, а это приводит к существенному усложнению теории. Наймарк заметил, что его метод можно обобщить также на операторы более высокого порядка. Такое обобщение осуществил Хьюиг [1]. См. также работы Балслева и Гамелина [1], Балслева [1] и Лянце [4]. Хьюиг использует, в частности, «метод факторизации», который мы опишем ниже.

К теории, развитой в § 1, близка работа Мозера [1]. Мозер рассматривает формально самосопряженный формальный дифференциальный оператор вида

$$\tau_\varepsilon = -\frac{d}{dt}\,p(t)\,\frac{d}{dt} + q_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i q_i(t),$$

где p и q_i — вещественные функции, причем зависимость от параметра ε аналитична «равномерно по t» в смысле, который мы уточним ниже. Предполагается, что операторы τ_ε определены в интервале (a, b), имеют два граничных значения в точке a и не имеют граничных значений в точке b. В точке a налагается граничное условие $A(f) = 0$ для всех операторов τ_ε. Таким образом определяется семейство самосопряженных операторов T_ε. Затем устанавливаются следующие результаты:

(1) при некоторых простых условиях спектральное разложение $E(T_\varepsilon; \Lambda)$, где Λ — некоторый интервал из $\sigma(T_\varepsilon)$, аналитически зависит от ε (при малых вещественных ε);

(2) при некоторых более жестких аналитических условиях существует такое семейство U_ε унитарных операторов, аналитически зависящее от ε, что $T_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1} T_0 U_\varepsilon$ для малых ε.

Приведем точную формулировку результата Мозера для того специального случая, когда τ_ε определен на полуинтервале $[a, b)$.

Теорема. *Пусть T_ε — оператор, определенный формальным дифференциальным оператором*

$$\tau_\varepsilon = -\frac{d}{dt} p(t) \frac{d}{dt} + q_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j q_j(t)$$

и граничным условием

$$f(a) + kf'(a) = 0, \qquad -\infty < k \leqslant +\infty,$$

где p и q_j — вещественные функции в полуинтервале $[a, b)$. Пусть Δ — некоторый интервал, принадлежащий $\sigma(T_0)$. Предположим, что

(a) *существуют неотрицательная непрерывная функция Φ, определенная для $t \in [a, b)$, и постоянные K и α, удовлетворяющие условию*

$$\int_a^b \Phi^2(t) \, |q_j(t)| \, dt < \gamma K^{j-1}, \qquad j \geqslant 1,$$

а также условию

[*] $$|\varphi(t, \lambda)|^2 + |\psi(t, \lambda)|^2 \leqslant \Phi(t), \qquad t \in [a, b), \quad \lambda \in \Delta,$$

где φ и ψ — решения уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, подчиненные граничным условиям $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) = 1$ и $\psi(a) = 1$, $\psi'(a) = 0$ соответственно;

(b) *существуют две такие постоянные $C \geqslant 1$ и $\delta > 0$, что решение χ уравнения $\tau\sigma = \lambda\sigma$, определенное граничными условиями*

$$\chi(a) + k\chi'(a) = 0,$$
$$k\chi(a) - \chi'(a) = 1,$$

удовлетворяет неравенству

[**] $$|\chi(t, \lambda + i\delta)| \leqslant C\Phi(t), \quad 0 < \delta < \delta_0, \quad t \in [a, b), \ \lambda \in \Delta.$$

Тогда для любого интервала Λ из Δ проектор $E(T_\varepsilon, \Lambda)$ зависит от ε аналитически при малых вещественных ε.

Теорема. *Пусть выполнены предположения предыдущей теоремы, причем условия [*] и [**] справедливы для всех $\lambda \in \sigma(T_0)$, а не только для всех $\lambda \in \Delta$. Тогда существует такое семейство унитарных операторов, аналитически зависящее от ε при достаточно малых вещественных ε, что $T_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1} T_0 U_\varepsilon$.*

Хотя в теоремах Мозера речь идет о формально самосопряженных формальных дифференциальных операторах, однако аналитическая зависимость операторов $E(\tau_\varepsilon, \Lambda)$ и U_ε от ε дает возможность перенести его результаты на комплексные значения ε, а это в свою очередь позволяет получить результаты, применимые к несамосопряженным операторам. Этим методом Мозер получил следующую теорему, являющуюся частным случаем построенной им более общей теории.

Теорема. *Пусть* τ_ε — *формальный дифференциальный оператор* $-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+\varepsilon q(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, q — *вещественная функция. Предположим, что*

$$\int_0^\infty (1+t^2)\,|q(t)|\,dt < \infty.$$

Пусть T_ε — *оператор, порожденный оператором* τ_ε *и граничным условием*

$$f(0)+kf'(0)=0, \qquad -\infty < k \leqslant +\infty.$$

Тогда для достаточно малых $|\varepsilon|$ *оператор* T_ε *подобен самосопряженному оператору* T_0; *точнее, существует такое аналитически зависящее от* ε *семейство* U_ε *ограниченных операторов, обладающих ограниченными обратными, что* $T_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1}T_0U_\varepsilon$.

Эта теорема по существу содержит результат основной теоремы из § 1. В этой связи см. также Филлипс [13]. В работе [2] Мозер перенес свой результат из [1] на операторы вида $\tau + \varepsilon q(x)$, где τ — самосопряженный обыкновенный дифференциальный оператор четного порядка. Подобные же обобщения результатов Мозера [1] получил Батлер [2, 3].

В работе Дж. Т. Шварца [4] развит следующий общий принцип, позволяющий применить теорему XVIII.2.34 к широкому классу операторов. Пусть $H_1 = H + V$, где H — самосопряженный оператор (это условие мы примем ради простоты изложения). Тогда, как обычно, резольвента $R_1(\lambda) = (\lambda I - H_1)^{-1}$ разлагается в ряд, члены которого выражаются через резольвенту $R(\lambda) = (\lambda I - H)^{-1}$,

$$R_1(\lambda) = R(\lambda) + R(\lambda)VR(\lambda) + R(\lambda)VR(\lambda)VR(\lambda) + \dots$$

Если предположить, что V есть произведение AB, то этот ряд можно переписать в следующем виде:

$$R_1(\lambda) = R(\lambda)A(I + BR(\lambda)A + BR(\lambda)ABR(\lambda)A + \dots)BR(\lambda) = \\ = R(\lambda) + R(\lambda)(I - BR(\lambda)A)^{-1}BR(\lambda).$$

Может случиться, что оператор $BR(\lambda)A$ зависит от λ непрерывно, даже если λ приближается к непрерывному спектру оператора H. Рассмотрим, например, случай, когда наше гильбертово пространство есть пространство $L_2[a, b]$ (состоящее из скалярных либо векторнозначных функций) и $Hf(x) = xf(x)$. Предположим также, что A и B — интегральные операторы с ядрами $a(x, y)$ и $b(x, y)$, удовлетворяющими условию Гёльдера. Тогда $BR(\lambda)A$ — интегральный оператор с ядром

$$\int_a^b \frac{b(x, t)\, a(t, y)}{\lambda - t}\, dt,$$

и это ядро удовлетворяет условию Гёльдера по всем трем переменным λ, x, y.

Пусть $\delta(\lambda) = \det_2(I - BR(\lambda)A)$ есть определитель Гильберта — Фредгольма (см. определение XI.9.21) оператора $I - BR(\lambda)A$ (заметим, что в рассматриваемом случае $BR(\lambda)A$ является оператором класса Гильберта — Шмидта). Далее, положим $C(\lambda) = \delta(\lambda)(I - BR(\lambda)A)^{-1}$. Тогда по теореме XI.9.26 (см. также лемму XI.9.23) $C(\lambda)$ и $\delta(\lambda)$ обладают такими же свойствами непрерывности по λ, что и $BR(\lambda)A$, и потому в нашем случае удовлетворяют условию Гёльдера по λ. Поскольку

$$R_1(\lambda) = R(\lambda) + (\delta(\lambda))^{-1} R(\lambda) AC(\lambda) BR(\lambda),$$

то применима теорема XVIII.2.34, которая приводит к спектральному анализу оператора H_1, если только $\delta(\lambda)$ не обращается в нуль на непрерывном спектре оператора H. Эта идея подробно развита в упомянутой работе Дж. Т. Шварца.

Описанный в § 2 «метод Фридрихса» развит К. О. Фридрихсом в [1]; подробный обзор этой работы и некоторые обобщения содержатся в работе Фридрихса [2].

Применение метода Фридрихса к квазинильпотентным интегральным операторам, которому мы посвятили конец § 2, осуществил Дж. М. Фриман. Результат Фримана был затем обобщен Дюпра [1], который рассмотрел интегральные операторы вида

$$f(x) \to g(x) = \int_0^x (x-y)^\alpha A(x, y) f(y)\, dy, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $A(x, x) \neq 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и нашел условия, при которых этот оператор эквивалентен оператору дробного интегрирования

$$f(x) \to g(x) = \int_0^x (x-y)^\alpha f(y)\, dy.$$

Дальнейшие результаты по теории подобия вольтерровых операторов получил Ошер [1]. Ошер рассмотрел вольтерровы операторы вида $\int_0^x A(x, y) f(y)\, dy$, в которых функция $A(x, x)$ имеет единственный нуль в отрезке $[0, 1]$, и нашел инварианты относительно подобия в классе таких операторов; эти инварианты зависят от положения изолированного нуля функции $A(x, x)$. См. также работы Калиша [2, 3]. Дж. Фриман [2] применил свой «квазинильпотентный» вариант метода Фридрихса к операторам в гильбертовом пространстве l_2, полученным возмущением оператора одностороннего сдвига

$$S\colon\quad (x_0, x_1, \ldots) \to (x_1, x_2, \ldots),$$

путем добавления оператора, заданного бесконечной верхней треугольной матрицей.

Фридрихс и другие авторы применили метод Фридрихса к различным задачам теории возмущений спектра; см. Фридрихс и Рейто [1]. Фридрихс и Рейто рассмотрели задачу о возмущении для семейства операторов $f(x) \to \varphi(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi(y)\, dy + \varepsilon x f(x)$. Эта задача, разумеется, равносильна асимптотической задаче теории возмущений, связанной с семейством операторов

$$f(x) \to x f(x) + \lambda \varphi(x) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \varphi(y)\, dy$$

при больших λ. Для описания явлений, связанных с этой задачей, Фридрихс и Рейто предложили выразительный термин «спектральная концентрация»; более общие случаи рассмотрели Конлей и Рейто [1]. См. также Дж. Т. Шварц [8]. Сингулярные интегральные операторы, изученные в последней статье, были исследованы также другими методами: некоторые из них привели к более точным результатам в случае самосопряженных операторов. См. Коппельман и Пинкус [1], Коппельман [2], Пинкус [1—4], Пинкус и Ровняк [1].

Фридрихс [1] предложил важное обобщение своего общего метода на случай возмущений, которые, вообще говоря, не предполагаются «малыми» (в смысле, указанном в § 2). Назовем элемент $K \in F_2$ *финитным*, если K имеет вид

$$K(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x_1)\, b_i(x_2), \tag{1}$$

где a_i и b_i удовлетворяют условию Гёльдера и $a_i(x) = b_i(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, или, более общо, K можно приблизить с произвольной точностью в некоторой гёльдеровской норме элементами вида (1). Если элемент K' финитен, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент K_0 вида (1), что

$$\| K_0 - K' \| < \varepsilon. \tag{2}$$

Положим $K_0 - K' = K_1$, так что $K' = K_0 + K_1$. Если T — оператор умножения на x в пространстве $L_2(-1, 1)$ и ε — достаточно малое число, то по теореме Фридрихса, доказанной в § 2, существует такой оператор U, что

$$T + K_1 = UTU^{-1}.$$

Более того, исследование метода доказательства указанной теоремы Фридрихса показывает, что оператор U, а также его обратный оператор U^{-1} имеют вид $I + \Gamma$, где Γ — (сингулярный) интегральный оператор. Если K_0 определяется ядром вида (1), то и $U^{-1}K_0U$ определяется, очевидно, ядром такого же вида. Следовательно, оператор $T + K'$ эквивалентен оператору вида $T + K$, где K имеет вид (1); ясно, что функции a_i в формуле (1) можно считать линейно независимыми.

Чтобы изучить оператор $T + K$, мы будем искать решения U и V уравнений

$$\begin{aligned} (T + K)\, U &= UT, \\ V(T + K) &= TV. \end{aligned} \tag{3}$$

Оператор U будем искать в виде

$$I = U + \Gamma R, \tag{4}$$

где R — интегральный оператор с ядром

$$R(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x_1)\, r_i(x_2). \tag{5}$$

Тогда первое из уравнений (3), как легко видеть, окажется эквивалентным следующей системе уравнений относительно функций r_i:

$$r_i(x) - \sum_{j=1}^{N} \left(\int \frac{b_i(y)\, a_j(y)}{x-y}\, r_j(x)\, dy \right) = b_i(x). \tag{6}$$

Ясно, что эта система имеет решение, если для любого y_0 из отрезка $[-1, 1]$ система

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{N} \left(\int \frac{b_i(y)\, a_j(y)}{y_0 - y}\, dy \right) \rho_j \tag{7}$$

не имеет ненулевого решения. Если числа ρ_i, $i=1, \ldots, N$, удовлетворяют системе (7), то, очевидно, функция

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\, \rho_j \tag{8}$$

удовлетворяет условию

$$\alpha(x) = \int \frac{K(x, y)}{y_0 - y}\, \alpha(y)\, dy \tag{9}$$

или, если положить $\alpha(x)=(x-y_0)\beta_{y_0}(x)$, условию

$$x\beta_{y_0}(x)+\int K(x, y)\beta_{y_0}(y)\,dy=y_0\beta_{y_0}(x). \tag{10}$$

Итак, пусть выполнено следующее

Предположение А. Если оператор $T+K$ не имеет сингулярных собственных функций вида

$$\beta(x)=\frac{\alpha(x)}{x-y_0},$$

удовлетворяющих условию $(T+K)\beta=y_0\beta$ при $-1\leqslant y_0\leqslant+1$, то первое из уравнений (3) имеет решение U.

Предположение А означает, грубо говоря, что непрерывный спектр оператора T не содержит собственных значений оператора $T+K$.

Легко видеть, что если выполнено предположение А, то и второе из уравнений (3) имеет решение. В статье [1] Фридрихс продолжил это исследование; с помощью некоторых тождеств он показал, что разность между операторами UV и VU является компактным оператором и что оператор VU (коммутирующий с оператором умножения T) совпадает с тождественным оператором I. Используя этот факт, Фридрихс [1] показал, что пространство $L_2(I)$ разлагается в прямую сумму $H_1\oplus H_2$ подпространств H_1 и H_2, инвариантных относительно оператора $T+K$. При этом подпространство H_2 конечномерно, а сужение оператора $T+K$ на H_1 эквивалентно оператору T, действующему в пространстве $L_2(I)$. Таким образом, если выполнено предположение А, то финитное возмущение (которое мы не считаем малым) может добавить к непрерывному спектру оператора T конечное число собственных значений, но не может изменить спектр более существенным образом.

Развернутое изложение этих рассуждений содержится в цитированной работе Фридрихса.

Подобного рода соображения были применены также Ладыженской и Фаддеевым [1]. Эти авторы не налагали ограничений на «величину» возмущения, однако рассматривали лишь самосопряженный случай. В указанной работе метод Фридрихса был впервые успешно применен к спектральному анализу оператора вида $-\nabla+V(x)$.

В работе Рейто [1, I] развит довольно близкий абстрактный вариант этих рассуждений.

Ограничения, которые мы налагали на потенциал V в теореме 2.22, могут быть существенно ослаблены с помощью различных дополнительных соображений; особенно это относится к случаю вещественного потенциала V, к которому применим метод волновых операторов. Подобного рода улучшения изложенных результатов, а также более глубокие усовершенствования методов, благодаря которым были достигнуты эти улучшения, содержатся в работах Браунела [1], Като [12], Яуха и Циннеса [1]. Икебэ [1] нашел явное выражение спектрального разложения оператора $-\nabla + V(x)$ в виде модифицированного n-мерного интеграла Фурье $f(k) = \int \psi_k(y) f(y)\, dy$, где $\psi_k(y)$ — решение уравнения $(-\nabla + V(x)) \times \psi_k(x) = k^2 \psi_k(x)$, имеющее асимптотику «свободной волны» e^{ikx} при $|x| \to \infty$. Несколько ранее близкий результат получил Повзнер [1, 9]. Икебэ [2] провел подробное исследование оператора рассеяния S, связанного с возмущенным лапласианом $-\nabla + V(x)$. Грейнер [1] установил аналогичный результат для оператора более общего вида $P(D) + V(x)$, где D — эллиптический оператор, определенный во всем n-мерном евклидовом пространстве, а P — многочлен.

Икебэ [3, 4] и Сидзута [1] получили аналогичные результаты для возмущений свободного оператора Лапласа $-\nabla$. В их работах возмущение производится не путем добавления потенциала, а «вырезанием» некоторой ограниченной области из n-мерного евклидова пространства. Бирман [5] рассмотрел аналогичную задачу для более общего класса эллиптических дифференциальных операторов в частных производных во внешности ограниченной области; см. также Бирман [6] и [1]. Бирман использовал то обстоятельство, что если S_1 и S_2 — два самосопряженных оператора в гильбертовом пространстве, определенные вне некоторой области одним и тем же эллиптическим формальным дифференциальным оператором, но различными граничными условиями, то для некоторого вещественного λ оператор $(\lambda I + S_1)^{-1} - (\lambda I + S_2)^{-1}$ будет компактным. Оценивая собственные значения этого оператора, Бирману удалось показать, что в некоторых случаях этот оператор не только компактен, но и является ядерным, а тогда применима теорема Като — Куроды для сравнения спектров операторов S_1 и S_2.

Идеи, описанные в § 4, первоначально возникли у физиков-теоретиков; см. Мёллер [1], а также Яух [1]. Основное неравенство, доказанное в лемме 4.17, принадлежит Розенблюму [2]. Като [9, 10] применил это неравенство для доказательства общей теоремы 4.9. Обобщение этих результатов на возмущения неограниченных операторов получил Курода [3,I]. Курода [3,II] развил также теорию волновых операторов, выраженную в терминах квадратичных форм, а не в терминах неограниченных операторов.

Если существуют волновые операторы $W_\pm = \lim\limits_{t \to \pm\infty} e^{itH_2} e^{-itH_1}$, то они определяются из асимптотических соотношений

$$e^{itH_1} x_+ = e^{itH_2} y + o(1) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$
$$e^{itH_1} x_- = e^{itH_2} y + o(1) \quad \text{при} \quad t \to -\infty.$$

Первое из этих соотношений определяет $y = W_- x_+$, а второе $y = W_+ x_-$. Если операторы W_+ и W_- имеют одинаковые области значений, то эта пара асимптотических соотношений определяет унитарное соответствие между x_+ и x_-: $x_+ = W_-^* W_+ x_-$. Оператор $S = W_-^* W_+$ играет важную роль в квантовой механике и других приложениях и называется *оператором рассеяния*. Роль оператора S можно эвристически пояснить следующим образом: если x — волновая функция, распространяющаяся согласно «уравнению свободной частицы» $(d/dt)\, x = iH_1 x$, то оператор S преобразует ее в некоторый момент времени между $t = -\infty$ и $t = +\infty$ в функцию Sx, которая обладает той же асимптотикой при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, что и волновая функция y, распространяющаяся согласно «уравнению взаимодействующих частиц» $(d/dt)\, y = iH_2 y$. Таким образом, оператор рассеяния S служит «промежуточным» преобразованием, учитывающим разность между двумя волновыми уравнениями. Как показано в начале § 4, $H_2 W_\pm = W_\pm H_1$, откуда $W_-^* H_2 = H_1 W_-^*$; поэтому $SH_1 = W_-^* W_+ H_1 = W_-^* H_2 W_+ = H_1 W_-^* W_+ = H_1 S$. Другими словами, оператор рассеяния коммутирует с «невозмущенным гамильтонианом» H_1.

Чтобы дать представление об основных свойствах оператора рассеяния (в простейшем случае), рассмотрим тот специальный случай, когда H_1 — оператор умножения $f(x) \to xf(x)$ в пространстве вектор-функций, а $H_2 = H_1 + V$, где V — интегральный оператор с гладким ядром $V(x, y)$; предположим, кроме того, что к этим операторам можно применить метод Фридрихса, описанный в § 2. Тогда, как показано в § 2, $e^{itH_2} = (I + \Gamma)^{-1} e^{itH_1} (I + \Gamma)$, где Γ — сингулярный интегральный оператор

$$(\Gamma f)(x) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x, y)}{x-y} f(y)\, dy,$$

причем ядро G является гладким. Таким образом,

$$W_\pm = (I + \Gamma)^{-1} (I + \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_1} \Gamma e^{-itH_1}).$$

Полагая $G_0(x, y) = (G(x, y) - G(x, x))(x-y)^{-1}$, находим, что

$$(\Gamma f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, y) f(y)\, dy + G(x, x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y}\, dy,$$

и так как из двух последних интегралов только второй является сингулярным, то

$$\lim_{t \to \pm\infty} (e^{itH_1} \Gamma e^{-itH_1} f)(x) = G(x, x) \lim_{t \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it(x-y)}}{x-y} f(y)\, dy.$$

Интеграл, написанный в правой части этой формулы, легко вычислить (например, при помощи преобразования Фурье), и мы получим

$$\lim_{t\to\pm\infty} (e^{itH_1}\Gamma e^{-itH_1}f)(x) = \pm i\pi G(x, x) f(x).$$

Итак,

$$W_{\pm} = (I+\Gamma)^{-1}(I \pm i\pi G),$$

где $(Gf)(x) = G(x, x) f(x)$, так что

$$S = (W_-)^{-1} W_+ = (I - i\pi G)^{-1}(I + i\pi G).$$

Из этого выражения видно, что оператор рассеяния S коммутирует с оператором умножения $x \to x f(x)$. Ясно, что S полностью определяется характером особенности на диагонали ядра оператора подобия Γ. Если H_1 реализован как оператор умножения на независимую переменную, то S представляется в виде оператора умножения на операторнозначную функцию $I + T(x)$, где $T(x)$ — ядерный оператор для всех x.

Результаты относительно операторов рассеяния, близкие к описанным выше, были строго доказаны Бирманом и Крейном [1] при гораздо более общих предположениях. В этой работе изучается оператор рассеяния S для пары эрмитовых операторов H_2 и H_1 при условии, что оператор $H_2^{-1} - H_1^{-1}$ является ядерным. Переходя к упорядоченному представлению (относительно H_1) гильбертова пространства $\mathfrak{X}$, в котором действуют эти операторы, мы можем реализовать $\mathfrak{X}$ как пространство векторнозначных функций $f(\lambda)$, при этом оператор H_1 перейдет в оператор умножения $f(\lambda) \to \lambda f(\lambda)$. Так как S коммутирует с оператором H_1, то он должен иметь вид $f(\lambda) \to S(\lambda) f(\lambda)$, где $S(\lambda)$ — измеримая операторнозначная функция. Бирман и Крейн показали, что $S(\lambda)$ имеет вид $S(\lambda) = I + T(\lambda)$, где $T(\lambda)$ является ядерным для всех λ, и что $S(\lambda)$ также можно представить в виде $S(\lambda) = \exp(-2\pi i K(\lambda))$, где $K(\lambda)$ — ядерный эрмитов оператор для всех λ, причем $K(\lambda)$ положителен для почти всех λ, если оператор $H_2 - H_1$ положителен, или, более общо, если существует эрмитов конечномерный оператор T_0, такой, что $H_2 - H_1 + T_0$ положителен. Аналогичные результаты получены Бирманом и Крейном для пары унитарных операторов U_2, U_1 в предположении, что $U_2 - U_1$ является ядерным оператором.

Бирман [4] доказал один вариант основной теоремы 4.9, который можно назвать «локальным» в том смысле, что в нем речь идет о некоторых частях спектров пары операторов, а не о спектрах в целом. Результат Бирмана можно сформулировать следующим образом. Пусть H_1 и H_2 — два эрмитовых оператора со спектральными разложениями $E_2(\cdot)$ и $E_1(\cdot)$ соответственно. Пусть G — борелевское подмножество вещественной оси R и G_n — такая возрастающая последовательность подмножеств из G, что $\bigcup_{n\geq 1} G_n = G$.

Предположим, что

(i) разность $H_2E_2(G)E_1(G)-E_2(G)H_1E_1(G)$ является ядерным оператором;

(ii) все операторы $E(R-G)E_0(G_n)$ компактны. Тогда существуют сильные пределы $\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}E_1(G)$.

В качестве следствия из этого результата вытекает, что если H_1 и H_2 — два эрмитовых оператора и для некоторых чисел $j\geqslant 0$, $k\geqslant 0$, $j+k>0$ оператор $(\lambda I-H_1)^{-j}(H_1-H_2)(\lambda I-H_2)^{-k}$ является ядерным, то волновые операторы $W_\pm=\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}$ существуют и определяют унитарную эквивалентность между абсолютно непрерывными частями операторов H_1 и H_2.

Бирман исследовал также свойства частичного оператора рассеяния $S=(\lim\limits_{t\to-\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}E(G))(\lim\limits_{t\to+\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}E_1(G))$ при указанных выше предположениях (i) и (ii). Этот оператор коммутирует с H_1. Если дано упорядоченное представление подпространства $E_1(G)\mathfrak{X}$ гильбертова пространства $\mathfrak{X}$ относительно H_1, в котором действуют H_1 и H_2, то, как и выше, сужение S на подпространство $E_1(G)\mathfrak{X}$ имеет вид $f(\lambda)\to S(\lambda)f(\lambda)$, где $S(\lambda)$ — измеримая операторнозначная функция. Бирман показал, что в предположениях (i) и (ii) оператор $S(\lambda)$ имеет вид $I+T(\lambda)$, где $T(\lambda)$ — ядерный оператор для почти всех $\lambda\in G$.

Существование пределов $W_\pm=\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}$ налагает весьма жесткие ограничения на пару эрмитовых операторов H_2 и H_1. В частности, если «возмущение» $V=H_2-H_1$ не является ядерным, то наблюдаются всевозможные интересные новые явления, относящиеся к этим пределам. В простейшем случае, когда H_1 имеет абсолютно непрерывный спектр, пределы $W_\pm$ могут существовать, но ортогональное дополнение к области значений операторов $W_\pm$ скорее всего будет бесконечномерным. Эта ситуация имеет место в квантовомеханической задаче трех тел, изученной Фаддеевым в указанной далее статье. В других случаях, когда пределы $W_\pm$ не существуют, могут существовать несколько измененные пределы $\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itH_2}e^{-it\varphi(H_1)}$. Такое положение имеет место в задачах квантовой теории поля, рассмотренных в книге Фридрихса [17]. В этих случаях H_2 подобен оператору $\varphi(H_1)$, а не оператору H_1; в необходимости введения функции φ в этом случае проявляется важное в квантовой теории поля явление «перенормировки». В работе Дж. Т. Шварца [8] изучен случай, когда H_1 — оператор умножения, а V — сингулярный интегральный оператор. Тогда существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} e^{itH_2}e^{-it\varphi_+(H_1)}$ и $\lim\limits_{t\to\infty} e^{itH_2}e^{-it\varphi_-(H_1)}$, но функции φ_+ и φ_- различны. В таких случаях возникает весьма любопытная «несимметричная перенормировка».

Крейн [8, 24] рассмотрел бесконечный определитель

$$\Delta(z) = \det((H_2 - zI)(H_1 - zI)^{-1})$$

при условии, что $H_2 - H_1$ является ядерным оператором. Крейн показал, что функция $\log\Delta(z)$ допускает интегральное представление

$$\log\Delta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda,$$

где ядро δ удовлетворяет интегральному неравенству

$$\int |\delta(\lambda)|\,d\lambda \leqslant \| H_2 - H_1 \|,$$

причем написанная справа норма является ядерной нормой, описанной в гл. XI. Кроме того, Крейн установил формулу

$$\operatorname{tr}(\varphi(H_2) - \varphi(H_1)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda)\,\varphi'(\lambda)\,d\lambda$$

для широкого класса функций φ, из которой как частный случай вытекает формула

$$\operatorname{tr}(H_2 - H_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda)\,d\lambda.$$

Соответствующие результаты получены и для пары U_2, U_1 унитарных операторов, разность которых $U_2 - U_1$ является ядерным оператором. Аналогичные результаты содержатся также в упомянутой выше более ранней работе Крейна, где можно найти подробные доказательства.

Снова рассмотрим пару самосопряженных операторов H_2, H_1, где H_1 — оператор умножения $f(x) \to xf(x)$ в пространстве векторнозначных функций, а $H_2 = H_1 + V$, где V — интегральный оператор с гладким ядром, к которому применим метод Фридрихса, описанный в § 2. Тогда, как показано в § 2, $H_2 = (I + \Gamma)^{-1} \times \times H(I + \Gamma)$, где, как мы видели выше, Γ является сингулярным интегральным оператором вида

$$(\Gamma f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x, y)}{x - y} f(y)\,dy.$$

Если φ — произвольная борелевская функция, то

$$e^{it\varphi(H_2)} e^{-it\varphi(H_1)} = (I + \Gamma)^{-1} (I + e^{it\varphi(H_1)} \Gamma e^{-it\varphi(H_1)}).$$

Ясно, что

$$(e^{it\varphi(H_1)} \Gamma e^{-it\varphi(H_1)} f)(x) = \mathscr{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(x, y)}{x - y} e^{it(\varphi(x) - \varphi(y))} f(y)\,dy.$$

Если функция φ является гладкой и монотонно возрастающей, то мы можем записать, что

$$(e^{it\varphi(H_1)}\Gamma e^{-it\varphi(H_1)}f)(\varphi^{-1}(x))=$$
$$=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\varphi^{-1}(x),\ \varphi^{-1}(y))}{\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)}\,e^{it(x-y)}f(\varphi^{-1}(y))(\varphi'(\varphi^{-1}(y)))^{-1}\,dy=$$
$$=\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\varphi^{-1}(x),\ \varphi^{-1}(y))}{x-y}\cdot\frac{x-y}{\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)}\times$$
$$\times(\varphi'(\varphi^{-1}(y)))^{-1}e^{it(x-y)}f(\varphi^{-1}(y))\,dy.$$

Повторяя рассуждения, которые мы применили выше для вычисления оператора рассеяния, находим

$$\lim_{t\to\pm\infty}(e^{it\varphi(H_1)}\Gamma e^{-it\varphi(H_1)}f)(\varphi^{-1}(x))=$$
$$=\pm i\pi G(\varphi^{-1}(x),\ \varphi^{-1}(x))((\varphi^{-1}(x))')^{-1}(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^{-1}f(\varphi^{-1}(x)).$$

Так как $\varphi(\varphi^{-1}(x))=x$, то $\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))'=1$; отсюда следует, что предел

$$\lim_{t\to\pm\infty}(e^{it\varphi(H_1)}\Gamma e^{-it\varphi(H_1)}f)(x)=\pm i\pi G(x,\ x)f(x)$$

не зависит от функции φ. Отсюда мы заключаем, что следующие видоизмененные «волновые операторы»

$$\lim_{t\to\pm\infty}e^{it\varphi(H_2)}e^{-it\varphi(H_1)}=W_\pm$$

также не зависят от φ. Этот интересный и важный результат называется *теоремой Като об инвариантности волновых операторов*. В статье Като [14] этот результат получен при более общих предположениях. Близкий результат установил Бирман [3]. В этой статье теоремы типа теорем об инвариантности волновых операторов применяются для доказательства существования пределов $\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}$ при условии вида $\varphi(H_2)-\varphi(H_1)\in C_1$, где C_1 означает класс ядерных операторов. Другие результаты такого рода см. в работе Бирмана [2].

В цитированной выше статье Бирмана и Крейна [1] получены интересные варианты теорем Като — Куроды о волновых операторах, которые могут быть применены непосредственно к паре унитарных операторов. В частности, они доказали следующие теоремы.

Теорема. *Пусть* U_1 *и* U_2 — *два унитарных оператора, причем* $U_2 - U_1$ *является ядерным. Тогда предел* $W_\infty(U_1, U_2)\,x = \lim\limits_{n\to\infty} U_1^n U_2^{-n} x$ *существует для всех* x, *удовлетворяющих условию* $E_2(e)\,x = 0$ *для любого подмножества* e *единичной окружности, мера Лебега которого равна нулю; здесь* $E_2(\cdot)$ — *спектральная мера оператора* U_2.

Теорема. *Пусть* H_1 *и* H_2 — *обратимые эрмитовы операторы, причем оператор* $H_1^{-1} - H_2^{-1}$ *ядерный. Пусть* x — *такой элемент гильбертова пространства, что* $E_2(e)\,x = 0$ *для любого множества* e, *мера Лебега которого равна нулю; через* $E_2(\cdot)$ *обозначена спектральная мера оператора* H_2. *Положим* $U_1 = (iI - H_1) \times (iI + H_1)^{-1}$ *и* $U_2 = (iI - H_2)(iI + H_2)^{-1}$. *Тогда пределы*

$$\lim_{n\to\infty} U_1^n U_2^{-n} x, \qquad \lim_{t\to\infty} e^{itH_1} e^{-itH_2} x \qquad и \qquad \lim_{t\to\infty} e^{itH_1^{-1}} e^{-itH_2^{-1}} x$$

существуют и равны между собой.

Курода [5, 6] развил «стационарный подход» к определению волнового оператора W, который мы определили в § 4 формулой $W = \lim\limits_{t\to\infty} e^{itH_1} e^{-itH_2}$, т. е. в терминах, связанных с «эволюцией по времени».

Формальную основу этого подхода можно пояснить (конечно, на нестрогом уровне) следующим образом. Пусть H_1 и H_2 — два самосопряженных оператора, и пусть $H_2 = H_1 + V$, так что $H_1 = H_2 - V$. Рассмотрим функции

$$W_1(z) = (H_2 - zI)(H_1 - zI)^{-1} = I + V(H_1 - zI)^{-1}$$

и

$$W_2(z) = (H_1 - zI)(H_2 - zI)^{-1} = I - V(H_2 - zI)^{-1},$$

которые, очевидно, взаимно обратны. При некоторых предположениях в гильбертовом пространстве существует такое плотное подмножество S, что 1) $W_j(z)\colon S \to S$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$, $j = 1, 2$; 2) если $z \to x + i0$ или $z \to x - i0$, то $W_j(z)$ стремится к пределу $W_j(x \pm i0)\colon S \to S$, $j = 1, 2$. Если, например, H_1 — оператор умножения $f(x) \to xf(x)$, а V — интегральный оператор $f(x) \to \to \int V(x, y) f(y)\,dy$ с дифференцируемым ядром или даже с ядром, удовлетворяющим условию Гёльдера, а S — пространство всех функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, то для любого вещественного t соответствие

$$f(x) \to \int \frac{V(x, y)}{t \pm i0 - y} f(y)\,dy$$

определяет отображение S в себя. Этот факт лежит в основе следующих вычислений. Во-первых, из равенства $W_1(z) = (W_2(z))^{-1}$

вытекает, что $W_1(x \pm i0) = (W_2(x \pm i0))^{-1}$. Следовательно,

$$W_2(x+i0) - W_2(x-i0) = (W_1(x+i0))^{-1} - (W_1(x-i0))^{-1} =$$
$$= (W_1(x+i0))^{-1}(W_1(x-i0) - W_1(x+i0))(W_1(x-i0))^{-1} =$$
$$= W_2(x+i0)(W_1(x-i0) - W_1(x+i0))W_2(x-i0).$$

Пусть $E_1(\cdot)$ и $E_2(\cdot)$ — спектральные разложения операторов H_1 и H_2 соответственно. Согласно теореме X.6.1, $VE_j(e) = \pm(2\pi i)^{-1}\int_e (W_j(x+i0) - W_j(x-i0))\,dx$. Если мы обозначим через $\mathscr{R}(T)$ и $\mathscr{L}(T)$ соответственно операторы правого и левого умножения на оператор T, то получим

$$-2\pi i VE_2(e) = \int_e W_2(x+i0)(W_1(x-i0) - W_1(x+i0))W_2(x-i0)\,dx =$$
$$= \int_e \mathscr{L}(W_2(x+i0))\,\mathscr{R}(W_2(x-i0))(W_1(x-i0) - W_1(x+i0))\,dx.$$

Отсюда по предыдущей формуле и теореме Радона — Никодима находим (по крайней мере, формально)

$$VE_2(e) = \int_e \mathscr{L}(W_2(x+i0))\,\mathscr{R}(W_2(x-i0))\,VE_1(dx) =$$
$$= \int_e \mathscr{L}(W_2(x+i0)V)\,\mathscr{R}(W_2(x-i0))\,E_1(dx).$$

Для любого объединения попарно не пересекающихся множеств имеем

$$\Big(\sum_j \mathscr{L}(W_2(x_j+i0))\,VE_1(e_j)\Big)\Big(\sum_j \mathscr{R}(W_2(x-i0))\,E_1(e_j)\Big) =$$
$$= \sum_j \mathscr{L}(W_2(x_j+i0)V)\,\mathscr{R}(W_2(x-i0))\,E_1(e_j)$$

в силу того, что проекторы спектрального разложения ортогональны, а операторы правого и левого умножения коммутируют. Отсюда, переходя к пределу в интегральных суммах, получаем

$$\Big(\int_e \mathscr{L}(W_2(x+i0)V)\,E_1(dx)\Big)\Big(\int_e \mathscr{R}(W_2(x-i0))\,E_1(dx)\Big) =$$
$$= \int_e \mathscr{L}(W_2(x+i0)V)\,\mathscr{R}(W_2(x-i0))\,E_1(dx).$$

Из аналогичных соображений находим

$$\int_e \mathscr{L}(W_2(x+i0)V)\,E_1(dx) = \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{L}(W_2(x+i0)V)\,E_1(dx)\Big)\,E_1(e)$$

и

$$\int_e \mathcal{R}(W_2(x-i0))\,E_1(dx)=\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{R}(W_2(x-i0))\,E_1(dx)\Big)\,E_1(e).$$

Объединяя эти формулы, мы можем записать, что

$$VE_2(e)=\Big(\int_{-\infty}^{\infty}W_2(x+i0)\,VE_1(dx)\Big)\,E_1(e)\Big(\int_e E_1(dx)\,W_2(x-i0)\Big).$$

Поскольку $W_2(z)\,V=V-V(H_2-zI)^{-1}V$, имеет место соотношение $W_2(z)\,V=V(W_2(\bar{z}))^*$, и, переходя к пределу, когда z стремится сверху к оси x, мы получаем $W_2(x+i0)\,V=V(W(x-i0))^*$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать так:

$$E_2(e)=\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}E_1(dx)\,W_2(x-i0)\Big)^*E_1(e)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}E_1(dx)\,W_2(x-i0)\Big),$$

или

(1) $$E_2(e)=W^*E_1(e)\,W,$$

где

(2) $$W=\int_{-\infty}^{+\infty}E_1(dx)\,W_2(x-i0).$$

Полагая $e=(-\infty,+\infty)$, находим, что $W^*W=I$. Таким образом, формула (1) показывает, что формула (2) определяет волновой оператор, устанавливающий унитарную эквивалентность между операторами H_2 и H_1. Используя аналитичность оператора $W_2(z)$ в нижней комплексной полуплоскости, можно показать при некоторых предположениях, что оператор W совпадает с оператором, который был получен в § 4 путем предельного перехода при $t\to\infty$.

Бирман и Энтина [1] получили формулы подобного рода для волновых операторов и операторов рассеяния.

Другой подход к этим вопросам содержится в работе де Бранджеса [1]. Преимущество стационарной теории волновых операторов состоит в том, что она дает более явные формулы для волновых операторов, чем теория, связанная с предельным переходом по времени, изложенная в § 4.

Формальный прием разложения «возмущения» $V=H_2-H_1$ в произведение двух операторов, описанный выше в связи с работами Дж. Т. Шварца [4, 5], использован в очень интересной работе Като [12]. Като предположил, что оператор H_2-H_1 можно записать в виде произведения AB и что операторная функция $B(\lambda I-H_1)^{-1}A$ равномерно ограничена по норме некоторой постоянной K в окрестности спектра оператора H, а интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A((\lambda \pm i\varepsilon) I - H_1)^{-1} v|^2 \, d\lambda$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B^*(\lambda \pm i\varepsilon) I - H_1)^{-1} v|^2 \, d\lambda$$

ограничены при $\varepsilon \to 0$. В этом случае, считая постоянную достаточно малой, Като применял модифицированные методы стационарной теории волновых операторов и построил операторы $W_\pm$, удовлетворяющие условиям $H_2 = W_\pm H_1 (W_\pm)^{-1}$. Волновые операторы $W_\pm$ выражаются формулой

$$(W_\pm x, y) = (x, y) \mp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} (BR(\lambda \pm i0) x, \quad A^* R(\lambda \pm 0) y) \, d\lambda,$$

где $R(\lambda) = (\lambda I - H_1)^{-1}$, а x и y — произвольные векторы гильбертова пространства.

Если H — самосопряженный оператор, а возмущающий самосопряженный оператор V не является малым относительно H (в смысле теоремы 4.9), то спектр оператора $H + V$ может существенно отличаться от спектра H. В частности, «абсолютно непрерывный спектр» $\sigma(H \mid \Sigma_{ac}(H))$ (см. определение 4.7) может исчезнуть, может расшириться или изменить свое расположение. Изучение этих явлений представляет большой интерес в связи с задачами квантовой теории поля и вопросом о «перенормировках»; см. книгу Фридрихса [17]. Подобные же явления возникают в квантовомеханической задаче трех тел, рассмотренной Фаддеевым [2—4]. Фаддеев доказал, что если H — шестимерный лапласиан, а V — сумма трех операторов умножения на функцию (каждая из которых соответствует взаимодействию двух тел в системе трех тел), то спектр оператора $H + V$ состоит из чисто непрерывного спектра, соответствующего спектру оператора H, из точечного спектра, соответствующего «связанным состояниям» системы трех тел, и трех дополнительных ветвей непрерывного спектра, соответствующих тем состояниям системы трех тел, в которых две частицы «связаны» друг с другом, а третья «ионизирована».

Физики обычно рассматривают спектральную теорию таких операторов и даже операторов более широкого класса на основании полуформальных эвристических принципов, полученных из иллюстративных примеров. В качестве типичного примера таких исследований, включающих также анализ квантовомеханической задачи трех тел, укажем работы Хека [1] и Яуха [2].

Из соотношения

$$\frac{d}{dt}\left(e^{itH_2}e^{-itH_1}\right)=ie^{itH_2}\left(H_2-H_1\right)e^{-itH_1}$$

сразу же следует, что условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(H_2-H_1\right)e^{-itH_1}x\right|dt<\infty$$

достаточно для существования предела $\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}x$. Если, в частности, написанный выше интеграл конечен для плотного множества векторов x, то волновые операторы $W_\pm = \lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itH_2}e^{-itH_1}$ существуют в сильном смысле. Если оператор H_1 имеет достаточно простой вид и известно его спектральное разложение, то конечность этого интеграла для подходящих векторов x часто можно проверить прямым вычислением. Этот подход, предложенный Куком [1], часто называется методом Кука; нередко он оказывается наиболее простым способом доказательства существования волновых операторов $W_\pm$. Заметим, однако, что сам по себе этот метод не позволяет указать области значений операторов $W_\pm$ и потому не дает полной информации о спектре оператора H_2. Некоторые задачи, связанные с квантовомеханической задачей n тел, в которых используется метод Кука, содержатся в работе Куроды [2].

В связи с теоремой о волновых операторах из § 4 следует упомянуть также раннюю работу фон Неймана [6]. Фон Нейман показал, что если H — ограниченный самосопряженный оператор, причем $\Sigma_p(H) = \Sigma_{sing}(H) = \{0\}$ (см. определение (4.7)), то можно найти такой самосопряженный оператор Гильберта — Шмидта V, что $\Sigma_{ac}(H + V) = 0$. Таким образом, то обстоятельство, что в теореме 4.9 мы имели дело с классом ядерных операторов, является существенным.

Исследованию условий существования и свойств волновых операторов посвящена серия интересных работ К. Р. Путнама. В работе [27] Путнам доказал, что при достаточно общих предположениях два самосопряженных оператора, порожденных одним и тем же обыкновенным дифференциальным оператором второго порядка на полуоси и двумя различными граничными условиями, унитарно эквивалентны. В статье [28] Путнам рассмотрел пару самосопряженных операторов H и V, причем V ограничен и положителен и существует такой унитарный оператор U, что $UHU^* = H + V$, и получил ряд интересных соотношений между нормами и спектрами операторов U, H и V. В статьях [24, 29] Путнам установил, что волновые операторы, соответствующие паре дифференциальных операторов $-(d/dx)^2$ и $-(d/dx)^2 + V(x)$, где функция V интегрируема, неотрицательна и ограничена, имеют непрерывный спектр, покрывающий всю единичную окружность, а при несколько более жестких ограничениях этот спектр оказывается абсолютно непрерывным. Во второй из указанных работ получен следующий более общий результат:

Теорема. *Пусть H и V — самосопряженные операторы, причем V ограничен и положителен. Предположим, что пересечение области определения оператора H с областью значений оператора $V^{1/2}$ является плотным множеством в гильбертовом пространстве. Тогда, если U — унитарный оператор и $UHU^* = H + V$, то спектр оператора U абсолютно непрерывен.*

Другое направление исследований, тесно связанных с тематикой последней главы, было предложено Лорхом [2] и продолжено Уэрмером [1, 2], Вульфом [4] и, наконец, Фойашем в ряде его статей и монографии, написанной совместно с Коложоарой (см. Коложоара — Фойаш [4]). Основная идея этого направления исследований состоит в следующем. Пусть T — такой оператор в B-пространстве, что для некоторых чисел A и $k > 0$ выполняются неравенства

$$(*) \qquad |T^n| < A(1+|n|)^k, \qquad -\infty < n < \infty.$$

Тогда легко показать, что спектр $\sigma(T)$ является подмножеством единичной окружности комплексной плоскости. Нетрудно видеть, применяя обычное интегрирование по частям в формуле Коши для $f(T)$, что если f аналитична на единичной окружности, то

$$|f(T)| \leqslant B \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \sup_{0\leqslant j<k+1} |f^{(j)}(e^{i\theta})|$$

для некоторой постоянной B. Следовательно, мы можем строить функции от оператора T не только для функций f, аналитических на единичной окружности, но и для функций, имеющих $k+1$ непрерывных производных на этой окружности. Отсюда, используя известное описание пространства, сопряженного к C^{k+1}, получаем интегральную формулу

$$f(T) = A_0 f(1) + \ldots + A_k f^{(k)}(1) + \int_0^{2\pi} f^{(k+1)}(e^{i\theta}) A(d\theta),$$

где $A(e)$ — сильно счетно аддитивная операторозначная мера. Функциональное исчисление, построенное для T на основании этой формулы, позволяет доказать ряд интересных свойств оператора T.

Эта простая идея была мастерски развита в работах Фойаша [9, 10, 12]. Во второй из указанных статей Фойаш рассмотрел связь построенной им теории с общей теорией спектральных операторов. Эти вопросы систематически изучены в книге Коложоары и Фойаша [4].

Ряд более или менее связанных с этой тематикой результатов о существовании инвариантных подпространств оператора T установил Уэрмер [1, 2].

Секефальви-Надь показал, что если постоянная k в указанной выше формуле (*) равна 0 и оператор T действует в гильбертовом пространстве, то T эквивалентен унитарному оператору. Доказательство этой и ряда близких теорем приведено в приложении к книге Рисса и Секефальви-Надя [1].

Многие идеи теории возмущений, прямо или косвенно упомянутые в настоящей главе, были систематически развиты в книге Като [13], содержащей также обширную библиографию по этой теории. Весьма ясный и живой обзор теории возмущений спектра написан самим Фридрихсом [17]. В монографии Фридрихса, помимо многих других результатов, излагаются интересные проблемы теории возмущений спектра в квантовой теории поля, а также связанные с ними вопросы перенормировок. В монографии Лакса и Филлипса [2] изучен целый ряд вопросов, относящихся к методу волновых операторов, который мы рассмотрели в § 4, в связи с анализом различных классов гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. В этой книге изложена также работа Моравец о волновых уравнениях во внешности области. Исследование Лакса и Филлипса основано отчасти на гармоническом анализе полугруппы сжатий в гильбертовом пространстве, чему посвящена также монография Секефальви-Надя и Фойаша. Дольф [1] дал обзор теории несамосопряженных задач, в частности теории возмущений и теории рассеяния, обращая особое внимание на физические применения этих теорий. Другой обзор смежных областей с упором на теорию возмущений содержится в статье Наймарка [15]. См. также работы Хёэг-Крона [1] и книгу Березина [1], в которых обсуждаются вопросы математического обоснования этого интересного круга вопросов.

Теория возмущений. Укажем еще ряд статей, где рассматриваются возмущения операторов: Апостол [13], Балабанов [1], Балслев [1], Балслев и Гамелин [1], Баумгертель [1—5], Билс [1], Бирман [5, 6], Бисхоп [1], де Бранджес [2], Браунел [1], Батлер [1—3], Кобёрн [1], Конлей [1], Конлей и Рейто [1], Дейвис [2, 3], Доногю [3], Дюпра [1], Фаддеев [1], Фогель [4, 6], Дж. Фриман [1, 2], Фридрихс [2, 17, 18], Фридрихс и Рейто [1], Гехтман и Станкевич [1], Гилберт и Крамер [1], Гольдберг [2], Гольдман и Крачковский [1—4], Грейнер [1], Густафсон [1], Хаделер [2], Хасегава [1], Хьюиг [1], Яврян [1], Кашук [1, 2], Като [9—14], Конно и Курода [1], Крейн [24, 27], Курода [1, 3—9], Ладыженская и Фаддеев [1], Лангер [4], Логинов [1], Маркус [1], Мартиросян [3, 4], Миядера [2], Мотидзуки [1], Мозер [1, 2], Ньюбург [1, 2], Нижник [1], Осборн [1], Ошер [1], Параска [1], Порат [1], Пшеворска-Ролевич [1], Путнам [22, 31, 32], Рейто [1—3], Розенблюм [1, 2], Сахнович [2, 3], Шехтер [1, 2], Дж.Т.Шварц [2, 3, 9], Сигалов [1, 2], Симпсон [3], Стемпфли [5], Станкевич [1], Тёрнер [1, 2], Цафрири [3], Визитей [1], Иосида [13] и Заанен [10].

Волновые операторы и операторы рассеяния. В следующих работах рассматривались волновые операторы и операторы рассеяния: Адамян и Аров [1, 2], Бирман [1—4], Бирман и Энтина [1], Бирман и Крейн [1, 2], Браунел [1], Кук [1], Дольф и Пенцлин [1], Фаддеев [2—4], Грейнер [1], Хек [1], Икебэ [1—3], Яух [1, 2], Яух и Циннес [1], Като [12—14], Крейн [27], Курода [2, 5—9], Лакс и Филлипс [1—3], Путнам [24, 29, 31], Станкевич [1, 2], Тоу [1].

Библиография

Адамар (Hadamard J.)

2. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Yale University Press, 1923, Dover edition, 1952.

Адамян В. М. и Аров Д. З.

1. Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функций сжатий, *ДАН СССР*, **160**:1 (1965), 9—12.
2. Об операторах рассеяния и полугруппах сжатий в гильбертовом пространстве, *ДАН СССР*, **165**:1 (1965), 9—12.

Александрян Р. А.

1. О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, *ДАН СССР*, **162**:1 (1965), 11—14.

Александрян Р. А. и Мкртчян Р. З.

1. Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, *ИАН АрмССР*, Математика, **1**:1 (1966), 25—34.

Аллан (Allan G. R.)

1. A spectral theory for locally convex algebras, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 15 (1965), 399—421.
2. On a class of locally convex algebras, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 17 (1967), 91—114.

Аллахвердиев Д. Э.

1. О полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, близких к нормальным, *ДАН СССР*, **115** (1957), 207—210.
2. О полноте систем собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, *ДАН АзССР*, **18**:7 (1962), 3—7.
3. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, являющихся рациональными функциями параметра, *ДАН СССР*, **159**:5 (1964), 951—954.
4. О полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **160**:3 (1965), 503—506.
5. О полноте системы собственных и присоединенных элементов одного класса несамосопряженных операторов, зависящих от параметра, *ДАН СССР*, **160**:6 (1965), 1231—1234.

Альтман (Altman M.)

6. К теории Рисса — Шаудера линейных операторных уравнений в пространствах типа (B_0), *Studia Math.*, **15** (1956), 136—143.

Андерсен (Andersen E. Sparre)

1. On the fluctuations of sums of random variables, *Math. Scand.*, **1** (1954), 263—265.
2. Remarks to the paper: On the fluctuations of sums of random variables, *Math. Scand.*, **2** (1954), 193—223.

Андо (Andô T.)

1. Positive linear operators in semi-ordered spaces, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, Ser. I., **13** (1957), 214—228.
2. On a pair of commutative contractions, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), 88—90.

3. Matrices of normal extensions of subnormal operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), 91—96.
4. Note on invariant subspaces of a compact normal operator, *Arch. Math.*, **14** (1963), 337—340.

Апостол (Apostol C.)
1. Propriétés de certains opérateurs bornés des espaces de Hilbert, I, II. I. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **10** (1965), 643—644. II. ibid., **12** (1967), 759—762.
2. Sur la partie normale d'un ensemble d'opérateurs de l'espace de Hilbert, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*, **17** (1966), 1—4.
3. Sur les opérateurs scalaires généralisés, *Bull. Sci. Math.*, **91** (1967), 57—61.
4. Restrictions and quotients of decomposable operators in a Banach space, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13** (1968), 147—150.
5. Roots of decomposable operator-valued functions, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13** (1968), 433—438.
6. On the roots of spectral operator-valued analytic functions, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13** (1968), 587—589.
7. Roots of scalar operator-valued analytic functions and their functional calculus, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A-I, **32** (1968), 173—180.
8. On the roots of spectral operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 811—814.
9. On the roots of generalized spectral operator-valued analytic functions, *Glasnik Mat.*, **3** (23) (1968), 247—252.
10. Teorie spectrală și calcul functional, *Stud. Cerc. Mat.*, **20** (1968), 635—668.
11. Spectral decompositions and functional calculus, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13** (1968), 1481—1528.
12. A theorem on invariant subspaces, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **16** (1968), 181—183.
13. Remarks on the perturbation and a topology of operators, *J. Funct. Anal.*, **2** (1968), 395—408.
14. Sur l'équivalence asymptotique des opérateurs, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 601—606.
15. Some properties of spectral maximal spaces and decomposable operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 607—610.
16. Some properties of a couple of operators on a Banach space, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 1005—1010.
17. On some multiplication operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13** (1968), 911—913.

Арвесон и Фельдман (Arveson W. B. and Feldman J.)
1. A note on invariant subspaces, *Michigan Math. J.*, **15** (1968), 61—64.

Аров Д. З., см. Адамян В. М.

Аронштайн и Смит (Aronszajn N. and Smith K. T.)
1. Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math.*, (2) **60** (1954), 345—350. (Русский перевод: сб. *Математика*, **2** : 1 (1958), 97—102.)

Аскеров Н. К., Крейн С. Г. и Лаптев Г. И.
1. Об одном классе несамосопряженных краевых задач, *ДАН СССР*, **155**:3 (1964), 499—502.

Аткинсон (Atkinson F. V.)
2. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, *Матем. сб.*, **28**, вып. 1 (70) (1951), 3—14.
4. On relatively regular operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 38—56.
6. Some aspects of Baxter's functional equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **7** (1963), 1—30.

Бакстер (Baxter G.)
1. An operator identity, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 649—663.
2. An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 731—742.

Балабанов В. А.
1. К вопросу об устойчивости собственных элементов нелинейных операторов, Научн. докл. высш. школы, Физ.-матем., **4** (1958), 3—7.

Балслев (Balslev E.)
1. Perturbation of ordinary diferential operators, *Math. Scand.*, **11** (1962), 131—148.

Балслев и Гамелин (Balslev E. and Gamelin T. W.)
1. The essential spectrum of a class of ordinary differential operators, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 755—776.

Барри (Barry J. Y.)
1. On the convergence of ordered sets of projections, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 313—314.

Бартл (Bartle R. G.)
1. Spectral localization of operators in Banach spaces, *Math. Ann.*, **153** (1964), 261—269.
7. Spectral decomposition of operators in Banach spaces, *Proc. London. Math. Soc.*, (3) **20** (1970).
8. The elements of real analysis, John Wiley & Sons, New Vork, 1964.

Батлер (Butler J. B.)
1. Perturbation series for eigenvalues of analytic non-symmetric operators, *Arch. Math.*, **10** (1959), 21—27.
2. Perturbation of the continuous spectrum of even order differential operators, *Canadian J. Math.*, **12** (1960), 304—323.
3. Perturbation of the continuous spectrum of systems of ordinary differential operators, *Canadian J. Math.*, **14** (1962), 359—379.

Баумгертель (Baumgärtel H.)
1. Zur Störungstheorie beschränkter linearer Operatoren eines Banachschen Raumes, *Math. Nachr.*, **26** (1963/64), 361—379.
2. Eindimensionale Störung eines selbstadjungierten Operators mit reinen Punktspektrum, *Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin*,**7** (1965).
3. Analytische Störung isolierter Eigenwerte endlicher algebraischer Vielfachheit von nichtselbstadjungierten Operatoren, *Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin*, **10** (1968), 250—258.
4. Jordansche Normalform holomorpher Matrizen, *Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin*, **11** (1969), 23—24.
5. Ein Reduktionsprozess für analytische Störungen nichthalbeinfacher Eigenwerte, *Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin*, **11** (1969), 81—88.

Бахтин И. А.
1. О существовании собственных векторов у линейных положительных не вполне непрерывных операторов, *Матем. сб.*, **64**:1 (1964), 102—114.
2. О положительных линейных операторах и гиперкомплексных системах, *УМЖ*, **17**:4 (1965), 3—11.

Бахтин И. А., Красносельский М. А. и Стеценко В. Я.
1. О непрерывности линейных положительных операторов, *Сиб. матем. ж.*, **3**:1 (1962), 156—160.

Бейд (Bade W. G.)
2. Unbounded spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 373—392.
3. Weak and strong limits of spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 393—413.
4. On Boolean algebras of projections and algebras of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 345—360.
5. A multiplicity theory for Boolean algebras of projections in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **92** (1959), 508—530.

Бейд и Кёртис (Bade W. G. and Curtis P. C., Jr.)
1. The Wedderburn decomposition of commutative Banach algebras, *Amer. J. Math.*, **82**, (1960), 851—866.
2. Embedding theorems for commutative Banach algebras, *Pacific J. Math.*, **18** (1966), 391—409.
3. Banach algebras on F-spaces. Function algebras, Scott-Foresman, Chicago, 1966.

Берберян (Berberian S. K.)
1. The numerical range of a normal operator, *Duke Math. J.*, **31** (1964), 479—483.
2. The spectral mapping theorem for a Hermitian operator, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 1049—1051.
3. A note on operators whose spectrum is a spectral set, *Acta Sci. Math. Szeged*, **27** (1966), 201—203.
4. Notes on spectral theory, Van Nostrand Math. Studies, **5**, Princeton, 1966.
5. Neĭmark's moment theorem, *Michigan Math. J.*, **13** (1966), 171—184.

Берберян и Орланд (Berberian S. K. and Orland G. H.)
1. On the closure of the numerical range of an operator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 499—503.

Березанский Ю. М.
3. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, *УМЖ*, **11**:1 (1959), 16—24.
4. Some questions of spectral theory of self-adjoint partial differential operators. Некоторые вопросы спектральной теории самосопряженных дифференциальных операторов в частных производных. Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963, стр. 3—11.
5. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965, стр. 1—798.

Березин Ф. А.
1. Метод вторичного квантования, М., 1965, стр. 1—235.

Берксон (Berkson E.)
1. Seuqel to a paper of A. E. Taylor, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 767—776.
2. A characterization of scalar type operators on reflexive Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 365—373.
3. Some types of Banach spaces, Hermitian operators and Bade functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **116** (1965), 376—385.
4. Some characterizations of C^*-algebras, *Illinois J. Math.*, **10** (1966), 1—8.
5. Semi-groups of scalar type operators and a theorem of Stone, *Illinois J. Math.*, **10** (1966), 345—352.

Берксон и Доусон (Berkson E. and Dowson H. R.)
1. Prespectral operators, *Illinois J. Math.*, **13** (1969), 291—315.
2. On uniquely decomposable well-bounded operators, *Proc. London Math. Soc.* , ser. 3, **22** (1971), 339—358.

Бернау (Bernau S. J.)
1. The spectral theorem for normal operators, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 478—486.
2. The spectral theorem for unbounded normal operators, *Pacific J. Math.*, **19** (1966), 391—406.
3. Extreme eigenvectors of a normal operator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 127—128.

Бернау и Смитис (Bernau S. J. and Smithies F.)
1. A note on normal operators, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **59** (1963), 727—729.

Бернштейн и Робинсон (Bernstein A. R. and Robinson A.)

1. Solution of a invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 421—432.

Билс (Beals R. W.)

1. A note on the adjoint of a perturbed operator, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 314—315.

Биркгоф Г. (Birkhoff G.)

9. Note on positive linear operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 14—16.

Биркгоф Дж. (Birkhoff G. D.)

3. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 373—395.
6. Note on the expansion of the Green's function, *Math. Ann.*, **72** (1912), 292—294.
7. Note on the expansion problems of ordinary linear differential equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **36** (1913), 115—126.

Биркгоф Дж. и Лангер (Birkhoff G. D. and Langer R. E.)

1. The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order, *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.*, (2) **58** (1923), 51—128.

Бирман М. Ш.

1. Об условиях существования волновых операторов, *ДАН СССР*, **143**:3 (1962), 506—509.
2. Об одном признаке существования волновых операторов, *ДАН СССР*, **147**:5 (1962), 1008—1009.
3. Об условиях существования волновых операторов, *ИАН СССР*, сер. матем., **27**:4 (1963), 883—906.
4. Локальный признак существования волновых операторов, *ДАН СССР* **159**:3 (1964), 485—488.
5. О возмущении спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий, *ДАН СССР*, **137**:4 (1961), 761—763.
6. Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий, Вестник Ленинградского ун-та, сер. матем., **1** (1962), 22—25.

Бирман М. Ш. и Энтина С. Б.

1. О стационарном подходе в абстрактной теории рассеяния, *ДАН СССР*, **155**:3 (1964), 506—508.

Бирман М. Ш. и Крейн М. Г.

1. К теории волновых операторов и операторов рассеяния, *ДАН СССР*, **144**:3 (1962), 475—478.
2. Some topics on the theory of the wave and scattering operators. Некоторые вопросы теории волновых операторов и операторов рассеяния. Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963, стр. 3—11.

Бирюк и Коддингтон (Biriuk G. and Coddington E. A.)

1. Normal extensions of unbounded formally normal operators, *J. Math. Mech.*, **13** (1964), 617—634. (Русский перевод: сб. *Математика*, **10**:2 (1966), 117—135.)

Бишоп (Bishop E.)

1. Spectral theory for operators on a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86** (1957), 414—445.
2. A duality theorem for an arbitrary operator, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 379—397.

Б и с х о п (B i s s h o p p F. E.)
1. A note on regular perturbation theories, *J. Math. Anal. Appl.*, **12** (1965), 71—86..

Б о г н а р (B o g n á r J.)
1. О существовании квадратного корня из оператора,самосопряженного относительно индефинитной метрики, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl*, **6** (1961), 351—363.
2. О некоторых соотношениях неотрицательности операторов в пространствах с индефинитной метрикой, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl*, **8** (1963), 201—212.
3. Non-negativity properties of operators in spaces with indefinite metric, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. AI, No. 336/10 (1963).

Б о н с о л (B o n s a l l F. F.)
2. Endomorphisms of partially ordered vector spaces, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 133—144.
3. Endomorphisms of a partially ordered vector space without order unit, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 144—153.
4. Linear operators in complete positive cones, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **8** (1958), 53—75.
5. The iteration of operators mapping a positive cone into itself, *J. London Math. Soc.*, **34** (1959), 364—366.
6. A formula for the spectral family of an operator, *J. London Math. Soc.*, **35** (1960), 321—333.
7. Positive operators compact in an auxiliary topology, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1131—1138.
8. A polynomial iteration for the spectral family of an operator, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **6** (1963), 65—69.
9. Compact linear operators from an algebraic viewpoint, *Galsgow Math. J.*, **8** (1967), 47—49.

Б о н с о л и Д у н к а н (B o n s a l l F. F. and D u n c a n J.)
1. Numerical range, London Math. Soc. Lecture Note Series, No. 2, 1971.

Б о н с о л, Л и н д е н ш т р а у с и Ф е л п с (B o n s a l l F. F., L i n d e n s t r a u s s J. and P h e l p s R. R.)
1. Extreme positive operators on algebras of functions, *Math. Scand.*, **18** (1966), 161—182.

Б о н с о л и Т о м ю к (B o n s l a l l F. F. and T o m i u k B. J.)
1. The semi-algebra generated by a compact linear operator, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (2) **14** (1964/65), 177—196.

Б о с (B o s W.)
1. Zur Abschätzung der Eigenwerte einer beschränkten linearen Transformation mit Hilfe der singularen Werte, *Math. Ann.*, **157** (1964), 276—277.

д е Б р а н д ж е с (d e B r a n g e s L.)
1. Some Hilbert spaces of entire functions, I—IV.
   I. *Trans Amer. Math. Soc.*, **96** (1960), 259—295.
   II. Ibid., **99** (1961), 118—152.
   III. Ibid., **100** (1961), 73—115.
   IV. Ibid., **105** (1962), 43—83.
2. Pertubations of self-adjoint transformations, *Amer. J. Math.*, **84** (1962), 543—560.
3. Invariant subspaces of non-adjoint transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 587—590.
4. Some Hilbert spaces of analytic functions.
   I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **106** (1963), 445—468.

д е Б р а н д ж е с и Р о в н я к (de B r a n g e s L. and R o v n y a k J.)
1. The existence of invariant subspaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964). 718—721.

2. Correction to «The existence of invariant subspaces», *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 396.

Браудер (Browder F. E.)

6. On the eigenfunctions and eigenvalues of the general linear elliptic differential operator, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **39** (1953), 433—439.

Браун А. (Brown A.)

1. On the adjoint of a closed transformation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 239—240.

Браун А. и Пирс (Brown A. and Pearcy C.)

1. Spectra of tensor products of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 162—166.

Браун К. (Brown C. C.)

1. Über schwach-kompakte Operatoren im Banachraum, *Math. Scand.*, **14** (1964), 45—64.

Браунел (Brownell F. H.)

1. A note on Cook's wave-matrix theorem, *Pacific. J. Math.*, **12** (1962), 47—52.

де Брёйн (de Bruijn N. G.)

1. On unitary equivalence of unitary dilations of contractions in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **23** (1963), 100—105.

Брейнер (Brainerd B.)

1. Averaging operators on the ring of continuous functions on a compact space, *J. Austral. Math. Soc.*, **4** (1964), 293—298.

Брем (Bram J.)

2. Subnormal operators, *Duke Math. J.*, **22** (1955), 75—94.

Бремер (Brehmer S.)

1. Über vertauschbare Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged*, **22** (1961), 106—111.

Бродский В. М.

1. О собственных векторах линейных вполне непрерывных операторов, определенных в полуупорядоченных ненормированных пространствах, *Сиб. матем. ж.*, **5**:2 (1964), 468—471.

Бродский М. С.

1. Об интегральном представлении ограниченных несамосопряженных операторов с вещественным спектром, *ДАН СССР*, **126**:6 (1959), 1166—1169.
2. О треугольном представлении некоторых операторов с вполне непрерывной мнимой частью, *ДАН СССР*, **133**:6 (1960), 1271—1274.
3. Критерий одноклеточности вольтерровых операторов, *ДАН СССР*, **138**:3 (1961), 512—514.
4. Об одноклеточности вещественных вольтерровых операторов, *ДАН СССР*, **147**:5 (1962), 1010—1012.
5. Об операторах с ядерными мнимыми компонентами, *Acta Sci. Math. Szeged*, **27** (1966), 147—155.
6. О треугольном представлении вполне непрерывных операторов с одной точкой спектра, *УМН*, **16**:1 (1961), 135—141.

Бродский М. С., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. и Мацаев В. И.

1. О некоторых новых исследованиях по теории несамосопряженных операторов, Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда, **2** (1964), 261—271.

Бродский М. С. и Кисилевский Г. Э.

1. Критерий одноклеточности диссипативных вольтерровых операторов с ядерными мнимыми компонентами, *ИАН СССР*, Сер. матем., **30** : 6 (1966), 1213—1228.

Бродский М. С. и Лившиц М. С.

2. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *УМН*, **13**:1 (1958), 3—85.

Бродский М. С. и Шмульян Ю. Л.
1. Инвариантные подпространства линейного оператора и делители его характеристической функции, *УМН*, **19**:1 (1964), 143—149.

Бройер (Breuer M.)
1. Banachalgebren mit Anwendungen auf Frendholmoperatoren und singuläre Integralgleichungen, Bonn. Math. Schr., No. 24, 1965.

Бройер и Кордес (Breuer M. and Cordes H.-O.)
1. On Banach algebras with σ-symbol, I, II.
   I. *J. Math. Mech.*, **13** (1964), 313—323.
   II. Ibid., **14** (1965), 299—313.

Бруадо (Broido M. M.)
1. Spectral representations for families of self-adjoint operators, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **62** (1966), 209—213.

Бурачевский (Buraczewski A.)
1. Determinant systems for generalized Fredholm operators, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **9** (1961), 435—440.
2. The determinant theory of generalized Fredholm operators, *Studia Math.*, **22** (1963), 265—307.

Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Éléments de mathématique, Fasc. 32, Théories spectrales. Chapitre I: Algèbres normées; Chapitre II: Groupes localement compacts commutatifs. Hermann et Cie., Act. Sci. et Ind., no. 1332, Paris, 1967. (Русский перевод: Бурбаки Н., Спектральная теория, изд-во «Мир», М., 1972.)

Бьянки и Фавелла (Bianchi L. and Favella L.)
1. A convolution integral for the resolvent of the sum of two commuting operators, *Nuovo Cimento*, **34** (10) (1964), 1825—1828.

Вайдман (Weidmann J.)
1. Ein Satz über nukleare Operatoren im Hilbertraum, *Math. Ann.*, **158** (1965), 69—78.
2. Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren, *Math. Zeit.*, **98** (1967), 268—302.

Валицкий Ю. Н., см. Фишман К. М.

Вальбрук (Waelbroeck L.)
1. Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives, *J. Math. Pures Appl.* (9) **33** (1954), 147—186.
2. Étude spectrale des algèbres complètes, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll.*, 8° (2) **31**, No. 7 (1960).
3. Études spectrale de certaines algèbres complètes, Colloque sur l'analyse fonctionnelle, Louvain, 1960, pp. 29—38, Librairie Universitaire, Louvain, 1961.
4. Le calcul symbolique liè à la croissance de la rèsolvente, *Rend. Sem. Math. Univ. Milano*, **34** (1964), 51—72.

Василеску (Vasilescu F. H.)
1. Spectral algebras of a generalized scalar operator, *Rev. Roumaine Math. Pures. Appl.*, **10** (1966), 1241—1243.
2. On an asymptotic behavior of operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 353—358.
3. Spectal distance of two operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 733—736.
4. On a class of scalar generalized operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 865—867.
5. Some properties of the commutator of two operators, *J. Math. Appl.*, **23** (1968), 440—446.
6. Asymptotic properties of the commutators of decomposable operators, *J. Math. Anal. Appl.* (to appear).

7. Residually decomposable operators in Banach spaces, *Tôhoku Math. J.*, **21** (1969), 504—522.
8. Residual properties for closed operators on Fréchet spaces, *Illinois J. Math.* (to appear).

Вейль (Weyl H.)
5. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269.

Веккен (Wecken F. J.)
2. Unitärinvarianten sebstadjungierter Operatoren, *Math. Ann.*, **116** (1939), 422—455.

Вест (West T. T.), см. также Джиллеспи и Олагунжи
1. The spectra of compact operators in Hilbert spaces, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **7** (1965), 34—38.
2. Operators with a single spectrum, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2) **15** (1966), 11—18.
3. Riesz operators in Banach spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3) **16** (1966), 131—140.
4. The decomposition of Riesz operators, *Proc. London Math. Soc.* (3) **16** (1966), 737—752.

Видав (Vidav I.)
2. Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren, *Math. Zeit.*, **66** (1956), 121—128.

Визитей В. Н.
1. О разложении по корневым векторам слабо возмущенного нормального оператора, *ИАН МолдССР*, **6** (1964), 19—26.
2. О разложении по собственным и корневым векторам ограниченного оператора, *ИАН МолдССР*, **7** (1965), 33—39.

Визитей В. Н. и Маркус А. С.
3. О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка, *Матем. сб.*, **66**:2 (1965), 287—320.

де Вилд (de Wilde M.)
1. Opérateurs semi-compacts, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, **34** (1965), 194—208.
2. Sur les opérateurs prénucleaires et intégraux, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*, **35** (1966), 22—39.

Вильямс (Williams J. P.)
1. Spectra of products and numerical ranges, *J. Math. Anal. Appl.*, **17** (1967), 214—220.

Вильямсон (Williamson J. H.)
3. Compact linear operators in linear topological spaces, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 149—156. (Русский перевод: сб. *Математика*, **4**:5 (1960), 85—91.)

Винер (Wiener N.)
4. The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933. (Русский перевод: Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения, Физматгиз, М., 1963.)
5. Tauberian theorems, *Ann. of Math.*, **33** (2) (1932), 1—100.

Винер и Хопф (Wiener N. and Hopf E.)
1. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Phys.-Math. Kl. 30/32 (1931), 696—706.

Волк В. Я.
1. О спектральном разложении для одного класса несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **152**:2 (1963), 259—261.

Вульф (Wolf F.)
2. Simplicity of spectra in general operators (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60** (1954), 345.

3. On majorants of subharmonic and analytic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 925—932.
4. Operators in Banach space which admit a generalized spectral decomposition, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. A**60** (1957), 302—311.
5. Spectral decomposition of operators in Banach space and the analytic character of their resolvent, Seminars on Analytic Functions, Institute for Advanced Study, vol. 2, 1960, pp. 312—320.

Галиндо (Galindo A.)
1. On the existence of J-selfadjoint extensions of J-symmetric operators with adjoint, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 423—425.

Гальперин (Halperin I.)
6. The unitary dilation of a contraction operator, *Duke Math. J.*, **28** (1961), 563—571.
7. Unitary dilations which are orthogonal bilateral shift operators, *Duke Math. J.*, **29** (1962), 573—580.
8. Sz.-Nagy-Brehmer dilations, *Acta Sci. Math. Szeged*, **23** (1962), 279—289.
9. Intrinsic description of the Sz.-Nagy-Brehmer unitary dilation, *Studia Math.*, **22** (1962/63), 212—219.
10. Interlocking dilations, *Duke Math. J.*, **30** (1963), 475—484.
11. The spectral theorem, *Amer. Math. Monthly*, **71** (1964), 408—410.

Гамбургер (Hamburger H. L.)
1. Five notes on a generalization of quasi-nilpotent transformations in Hilbert space, *Proc. London Math. Soc.* (3) **1** (1951), 494—512.

Гамелин (Gamelin T. W.), см. также Балслев
1. Decomposition theorems for Fredholm operators, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 97—106.

Гамлен и Миллер (Gamlen J. L. B. and Miller J. B.)
1. Averaging and Reynolds operators on Banach algebras, II, Spectral properties of averaging operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **23** (1968), 183—197.

Гартогс и Розенталь (Hartogs F. and Rosenthal A.)
1. Über Folgen analytischer Funktionen, *Math. Ann.*, **104** (1931), 606—610.

Геер (Gehér L.), см. Фойаш

Гельфанд И. М. и Наймарк М. А.
3. Унитарные представления классических групп, Труды МИАН, **36** (1950), 1—288.

Гельфанд И. М. и Райков Д. А.
1. К теории характеров коммутативных топологических групп, *ДАН СССР*, **28** (1940), 195—198.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.
2. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, Физматгиз, М., 1958.

Генен и Мизра (Guenin M. and Misra B.)
1. De la permutabilité des operateurs non bornés (English summary), *Helv. Phys. Acta*, **37** (1964), 233—240.

Герлах (Gerlach E.)
1. On spectral representation for selfadjoint operators. Expansion in generalized eigenelements, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **15**, fasc. 2 (1965), 537—574.

Гехтман М. М. и Станкевич И. В.
1. О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **158**:1 (1964), 29—32.

Гика (Ghika A.)
1. Décompositions spectrales généralisées des transformations linéaires d'un espace hilbertien dans un autre, *Rev. Math. Pures Appl.*, **2** (1957), 61—109.

Гилберт (Gilbert R. C.), см. также Коддингтон
1. Extremal spectral functions of a symmetric operator, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 75—84.

Гилберт и Крамер В. (Gilbert R. C. and Kramer V. A.)
1. Trace formulas for powers of a Sturm-Liouville operator, *Canadian J. Math.*, **16** (1964), 412—422.

Гильдебрандт (Hildebrandt S.)
1. The closure of the numerical range of an operator as spectral set, *Comm. Pure Appl. Math.*, **17** (1964), 415—421.
2. Über den numerischen Wertebereich eines Operators, *Math. Ann.*, **163** (1966), 230—247.

Гильдерман Ю. И. и Коротков В. Б.
1. Об общем виде вполне непрерывных операторов, действующих из L_p в B-пространство X, *Сиб. матем. ж.*, **4**:6 (1963), 1426—1430.

Гиндлер (Gindler H. A.)
1. An operational calculus for meromorphic functions, *Nagoya Math. J.*, **26** (1966), 31—38.

Гиндлер и Тейлор А. (Gindler H. A. and Taylor A. E.)
1. The minimum modulus of a linear operator and its use in spectral theory, *Studia Math.*, **22** (1962/63), 15—41.

Гинзбург Ю. П.
1. О мультипликативных представлениях ограниченных аналитических оператор-функций, *ДАН СССР*, **170**:1 (1966), 23—26.

Гинзбург Ю. П. и Иохвидов И. С.
1. Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой, *УМН*, **17**:4 (1962), 3—56.

Гирц (Giertz M.)
1. On the expansion of certain generalized functions in series of orthogonal functions, *Proc. London Math. Soc.* (3) **14** (1964), 45—52.

Глазман И. М.
5. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, «Наука», М., 1963.

Гликфилд (Glikfield B. W.)
1. A metric characterisation of $C(X)$ and its generalisation to C^*-algebras, *Illinois J. Math.*, **10** (1966), 547—556.

Годич В. И.
1. Об инвариантных подпространствах вполне непрерывных бисимметричных операторов, *УМЖ*, **18**:3 (1966), 103—107.

Гольдберг (Goldberg S.)
1. Closed linear operators and associated continuous linear operators, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 183—186.
2. Unbounded linear operators: Theory and applications, McGraw-Hill, New York, 1966.

Гольдберг и Шуберт (Goldberg S. and Schubert C.)
1. Some applications of the theory of unbounded operators to ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **19** (1967), 78—92.

Гольдберг и Торп (Goldberg S. and Thorp E. O.)
1. The range as range space for compact operators, *J. Reine Angew. Math.*, **211** (1962), 113—115.
2. On some open questions concerning strictly singular operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 334—336.

Гольденгершель Э. И.
1. О спектре одного класса несамосопряженных операторов, *Сиб. матем. ж.*, **6**:6 (1965), 1420—1422.
2. О резольвенте вольтеррова оператора с ядром, зависящим от разности, *Сиб. матем. ж.*, **6**:6 (1965), 1423—1434.

Гольдман М. А.

1. Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений, *ДАН СССР*, **100** (1955), 201—204.

Гольдман М. А. и Крачковский С. Н.

1. Инвариантность некоторых пространств, связанных с оператором $A - \lambda I$, *ДАН СССР*, **154**:3 (1964), 500—502.
2. О некоторых возмущениях замкнутого линейного оператора, *ДАН СССР*, **158**:3 (1964), 507—509.
3. О d-характеристике линейного оператора, *ДАН СССР*, **165**:3 (1965), 476—478.
4. О возмущении гомоморфизмов операторами конечного ранга, *ДАН СССР*, **174**:4 (1967), 743—746.

Гольдман М. А. и Левич Е. М.

1. Об инвариантной дополняемости некоторых подпространств, порождаемых линейным оператором, *ДАН СССР*, **166**:2 (1966), 267—270.

Гоншор (Gonshor H.)

1. Spectral theory for a class of non-normal operators, I, II.
   I. *Canadian J. Math.*, **8** (1956), 449—461.
   II. Ibid., **10** (1958), 97—102.

Гофман (Hoffman S. P., Jr.)

1. Second order linear differential operators defined by irregular boundary conditions, Dissertation, Yale University, 1957.

Гохберг И. Ц., см. также Бродский М. С.

4. Об индексе неограниченного оператора, *Матем. сб.*, **33** (75) (1953), 193—198.
5. Признаки односторонней обратимости элементов нормированных колец и их приложения, *ДАН СССР*, **145**:5 (1962), 971—974.
6. Задача факторизации оператор-функций, *ИАН СССР*, Сер. матем., **28**:5 (1964), 1055—1082.
7. О линейных уравнениях в нормированных пространствах, *ДАН СССР*, **76** (1951), 477—480.

Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г.

1. О вполне непрерывных операторах со спектром, сосредоточенным в нуле, *ДАН СССР*, **128**:2 (1959), 227—230.
2. Основные положения о числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *УМН*, **12**:2 (74) (1957), 43—118.
3. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, *УМН*, **13**:2 (1958), 3—72.
4. К теории треугольных представлений несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **137**:5 (1961), 1034—1037.
5. О вольтерровых операторах с мнимой компонентой того или иного класса, *ДАН СССР*, **139**:4 (1961), 779—782.
6. Критерий полноты системы корневых векторов сжатия, *УМЖ*, **16**:1 (1964), 78—82.
7. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, изд-во «Наука», М., 1965.
8. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., 1967.
9. О треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций, *ДАН СССР*, **175**:2 (1967), 272—275.
10. О факторизации оператора в гильбертовом пространстве, *Acta Sci. Math. Szeged.*, **25** (1964), 90—123.

Гохберг И. Ц. и Маркус А. С.

1. Некоторые соотношения между собственными числами и матричными элементами линейных операторов, *Матем. сб.*, **64**:4 (1964), 481—496.

Грамш (Gramsch B.)
1. σ-Transformationen in localbeschränkten Vectorräumen, *Math. Ann.*, **165** (1966), 135—151.
2. Ein Schema zur Theorie Fredholmscher Endomorfismen und eine Anwendung auf die Idealkette der Hilberträume, *Math. Ann.*, **171** (1967), 263—272.

Грей (Gray J. D.)
1. Local analytic extensions of the resolvent, *Pacific J. Math.*, **27** (1968), 305—324.

Грейвс (Graves L. M.)
6. A generalization of the Riesz theory of completely continuous transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 141—149.

Грейнер (Greiner P. C.)
1. Eigenfunction expansions and scattering theory for perturbed elliptic partial differential operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 517—521.

Гротендик (Grothendieck A.)
3. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc., no. 16, 1955.
8. The trace of certain operators, *Studia Math.*, **20** (1961), 141—143.

Густафсон (Gustafson K.)
1. A perturbation lemma, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 334—338.

Данфорд (Dunford N.)
2. Direct decompositions of Banach spaces, *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, **3** (1946), 1—12.
6. Spectral theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1940), 639—661.
7. Spectral theory, I. Convergence to projections, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 185—217.
14. Spectral theory in abstract spaces and Banach algebras, Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems (1951), Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater, Oklahoma, pp. 1—65.
15. Spectral theory, Proc. Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, 1951, pp. 203—208.
16. The reduction problem in spectral theory, Proc. International Congress Math., Cambridge, Mass., 1950, vol. 2, pp. 115—122.
17. Spectral theory. II. Resolutions of the identity, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 559—614.
18. Spectral operators, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 321—354.
20. A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64** (1958), 217—274. (Русский перевод: сб. *Математика*, **4** : 1 (1960), 53—100.)
21. Spectral operators in a direct sum of Hilbert spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **50** (1963), 1041—1043.
22. A spectral theory for certain operators on a direct sum of Hilbert spaces, *Math. Ann.*, **162** (1966), 294—330.

Дейвис (Davis C.)
1. Various averaging operators onto subalgebras, *Illinois J. Math.*, **3** (1959), 538—553.
2. The rotation of eigenvectors by a perturbation, *J. Math. Anal. Appl.*, **6** (1963), 159—173.
3. The rotation of eigenvectors by a perturbation, I, II.
I. *J. Math. Anal. Appl.*, **6** (1963), 159—173.
II. Ibid., **11** (1965), 20—27.

Дейвис и Райдер (Davis C. and Rider D. G.)
1. Spectral sets and numerical range, *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.*, **10** (1965), 125—131.

Д е к а р и П и р с (D e c k a r d D. and P e a r c y C.)
1. On unitary equivalence of Hilbert-Schmidt operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 671—675.
2. On rootless operators and operators without logatithms, *Acta Sci. Math. Szeged*, **28** (1967), 1—7.

Д е п р и (D e p r i t A.)
1. Endomorphismes de Riesz, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, Ser. I, **70** (1956), 165—183.
2. Contribution à l'étude de l'algèbre des applications linéaires continues d'un espece localement convexe séparé: Théorie de Riesz-théorie spectrale, *Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. Mém. Coll.* in 8° 31, No. 2 (1959).

Д е р р и Т е й л о р А. (D e r r J. and T a y l o r A. E.)
1. Operators of meromorphic type with multiple poles of resolvent, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 85—111.

Д ж и л л е с п и и В е с т (G i l l e s p i e T. A. and W e s t T. T.)
1. A characterisation and two examples of Riesz operators, *Glasgow Math. J.*, **9** (1968), 106—110.

Д ж о р д ж (G e o r g e M. D.)
1. The spectrum of an operator in Banach space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 980—982.

Д и к с м ь е (D i x m i e r J.)
1. Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Pars A (1950), 213—227.

Д и л (D e a l E. R.)
1. Quasi-spectral theory, *Math. Scand.*, **13** (1963), 188—198.
2. A quasi-spectral operator, *Math. Scand.*, **16** (1965), 29—32.

Д и н (D e a n D. W.)
1. Schauder decompositions in (*m*), *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 619—623.

Д о л л и н г е р (D o l l i n g e r M. B.)
1. Some aspects of spectral theory on Banach spaces, Dissertation, Univ. Illinois, 1968.
2. A type of spectral decomposition for a class of operators, *J. Math. Mech.*, **18** (1969), 1059—1066.

Д о л л и н г е р и О б е р е й (D o l l i n g e r M. B. and O b e r a i K. K.)
1. Variation of local spectra, *J. Math. Anal. Appl*, **32**, no. 2 (1972), 324—337.

Д о л ь ф (D o l p h C. L.)
1. Recent developments in some non-self-adjoint problems of mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 1—69. (Русский перевод: сб. *Математика*, **7** : 1 (1963).)
2. Positive real resolvents and linear passive Hilbert systems, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A. I, No. 336 (1963).

Д о л ь ф и П е н ц л и н (D o l p h C. L. and P e n z l i n F.)
1. On the theory of a class of non-self-adjoint operators and its applications to quantum scattering theory, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A.I, No. 263 (1959).

Д о н о г ю (D o n o g h u e W. F., Jr.)
1. The lattice of invariant subspaces of a completely quasinilpotent transformation, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 1031—1035.
2. On a problem of Nieminen, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 16 (1963), 31—33.
3. On the perturbation of spectra, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 559—579.

Д о у м а р (D o m a r Y.)
1. Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras, *Acta Math.*, **9** (1956), 1—66.

Доусон (Dawson H. R.)
1. Restrictions of spectral operators, *Proc. London Math. Soc.* (3) **15** (1965), 437—457.
2. On some algebras of operators generated by a scalar-type spectral operator, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 589—593.
3. Operators induced on quotient spaces by spectral operators, *J. London Math. Soc.*, **42** (1967), 666—671.
4. On the commutant of a complete Boolean algebra of projections, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 1448—1452.
5. Restrictions of prespectral operators, *J. London Math. Soc.* (2) **1** (1969), 633—642.
6. On a Boolean algebra of projections constructed by Dieudonné, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **16** (2) (1969), 259—262.

Дункан (Duncan J.), см. Бонсол

Дурст (Durszt E.)
1. On the numerical range of normal operators, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **25** (1964), 262—265.
2. On unitary ρ-dilations of operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **27** (1966), 247—250.

Дьёдонне (Dieudonné J.)
19. Sur la bicommutante d'un algebre d'opérateurs, *Portugaliae Math.*, **14** (1955), 35—38.
20. Sur la théorie spectrale, *J. Math. Pures Appl.* (9) **35** (1956), 175—187.
21. Champs de vecteurs non localement triviaux, *Archiv des Math.*, **7** (1956), 6—10.
22. Sur les homomorphismes d'espaces normés, *Bull. Sci. Math.* (2) **67** (1943), 72—84.

Дэй (Day M. M.)
8. Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **69** (1950), 276—291.
10. Ergodic theorems for abelian semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51** (1942), 399—412.
12. Normed linear spaces, Ergebnisse der Math., N. F., Heft 21, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958. (Русский перевод: Дэй М., Линейные нормированные пространства, ИЛ, М., 1961).

Дюпра (Dupras A.)
1. Similarity of certain Volterra operators, Dissertation, New York Univ., 1965.

Дюрен (Duren P. L.)
1. Invariant subspaces of tridiagonal operators, *Duke Math. J.*, **30** (1963), 239—248.

Есаян А. Р. и Стеценко В. Я.
1. Оценки спектра интегральных операторов и бесконечных матриц, *ДАН СССР*, **157**:2 (1964), 254—257.

Заанен (Zaanen A. C.), см. также Люксембург
10. A note on perturbation theory, *Nieuw Arch. Wisk.* (3) **7** (1959), 61—65.

Забрейко П. П., Красносельский М. А. и Стеценко В. Я.
1. Об оценках спектрального радиуса линейных положительных операторов, *Матем. заметки*, **1**:4 (1967), 461—468.

Зигмунд (Zygmund A.)
1. Trigonometical Series, Monografje Matematyczne, Warsaw, 1935, reprinted Dover and Chelsea Pub. Co., New York. (Русский перевод: Зигмунд А., Тригонометрические ряды, «Мир», М., 1965.)

Зильберштейн (Silberstein J. P. O.)
2. Symmetrisable operators, I—III.
I. *J. Austral. Math. Soc.*, **2** (1961/62), 381—402.

II. Ibid., **4** (1964), 15—30.
III. Ibid., **4** (1964), 31—48.

Икебэ (Ikebe T.)

1. Eingenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1960), 1—34.
2. On the phase-shift formula for the scattering operator, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 511—523.
3. Orthogonality of the eigenfunctions for the exterior problem connected with —Δ, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **19** (1965), 71—73.
4. On the eigenfunction expansion connected with the exterior problem for the Schrödinger equation, *Japanese J. Math.*, **36** (1967), 33—55.

Инуэ (Inoue S.)

1. On the distribution of the spectra of normal operators in Hilbert spaces, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 464—468.
2. Simplification of the canonical spectral representation of a normal operator in Hilbert space and its applications, *Mem. Fac. Educ. Kumamoto Univ.*, **3**, Supplement 1 (1955), 1—50.
3. Some analytical properties of the spectra of normal operators in Hilbert spaces, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 566—570.
4. Functional-representations of normal operators in Hilbert spaces and their applications, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 614—618.
5. On the functional-representations of normal operators in Hilbert spaces, *Proc. Japan Acad.*, **38** (1962), 18—22.
6. Some applications of the functional-representations of normal operators in Hilbert spaces, I—XXIV.

I. *Proc. Japan Acad.*, **38** (1962), 263—268.
II. Ibid., **38** (1962), 452—456.
III. Ibid., **38** (1962), 641—645.
IV. Ibid., **38** (1962), 646—650.
V. Ibid., **38** (1962), 706—710.
VI. Ibid., **39** (1963), 109—113.
VII. Ibid., **39** (1963), 338—341.
VIII. Ibid., **39** (1963), 455—460.
IX. Ibid., **39** (1963), 566—568.
X. Ibid., **40** (1964), 317—322.
XI. Ibid., **40** (1964), 391—395.
XII. Ibid., **40** (1964), 487—491.
XIII. Ibid., **40** (1964), 492—497.
XIV. Ibid., **40** (1964), 654—659.
XV. Ibid., **41** (1965), 150—154.
XVI. Ibid., **41** (1965), 541—546.
XVII. Ibid., **41** (1965), 702—705.
XVIII. Ibid., **41** (1965), 911—914.
XIX. Ibid., **41** (1965), 915—918.
XX. Ibid., **42** (1966), 364—369.
XXI. Ibid., **42** (1966), 583—588.
XXII. Ibid., **42** (1966), 743—748.
XXIII. Ibid., **42** (1966), 749—754.
XXIV. Ibid., **42** (1966), 901—906.

Ионеску (Ionescu Tulcea C. T.), см. также Эдвардс

1. Spaţii Hilberti, Editura Acad. Rep. Populare Romane, 1956.
2. Spectral representations of certain semi-groups of operators, *J. Math. Mech.*, **8** (1959), 95—110.
3. Spectral operators on locally convex spaces, *Bull. Amer. Math.* Soc., **67** (1961), 125—128.

4. Scalar dilations and scalar extensions of operators on Banach spaces (I), *J. Math. Mech.*, **14** (1965), 841—856.
5. Notes on spectral theory, Technical report, U.S. Army Research Office (Durham), 1964.

Ионеску и Плафкер (Ionescu Tulcea C. and Plafker S.)
1. Dilations et extensions scalaires sur les espaces de Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **265** (1967), 734—735.

Ионеску и Саймон (Ionescu Tulcea C. and Simon A. B.)
1. Spectral representations and unbounded convolution operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45** (1959), 1765—1767.

Иосида К. (Yosida K.)
13. A perturbation theorem for semi-groups of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **41** (1965), 645—647.
14. Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1965. (Русский перевод: Иосида К., Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.)

Иосида М. (Yoshida M.), см. Накамура

Иосино (Yoshino T.), см. также Сайто
1. On the spectrum of a hyponormal operator, *Tôhoku Math. J.*, (2) **17** (1965), 305—309. Errata ibid., (2) **19** (1967), 101.
2. Spectral resolution of a hyponormal operator with the spectrum on a curve, *Tôhoku Math. J.*, **19** (1967), 86—97.

Иохвидов И. С.
1. Сингулярные линеалы в пространствах с произвольной эрмитово-билинейной метрикой, *УМН*, **17**:4 (1962), 127—133.
2. Об операторах с вполне непрерывными итерациями, *ДАН СССР*, **153**:2 (1963), 258—261.
3. О сингулярных линеалах в пространстве Π_k, *УМЖ*, **16**:3 (1964), 300—308.

Иохвидов И. С. и Крейн М. Г.
1. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, I, II.
   I. Труды Моск. матем. об-ва, **5** (1956), 367—432.
   II. Там же, **8** (1959), 413—496.

Истратеску (Istrăteşcu V.)
1. On some hyponormal operators, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 413—417.

Ито (Itô T.)
1. On the commutative family of subnormal operators, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I*, **14** (1958), 1—15.

Йен (Yen T.), см. Сильверман

Какутани (Kakutani S.)
1. An example concerning uniform boudedness of spectral measures, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 363—372.

Калиш (Kalisch G. K.)
1. On similarity, reducing manifolds, and unitary equivalence of certain Volterra operators, *Ann. of Math.* (2) **66** (1957), 481—494.
2. On similarity invariants of certain operators in L_p, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 247—252.
3. On isometric equivalence of certain Volterra operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 93—98.
4. Théorème de Titchmarsh sur la convolution et opérateurs de Volterra, Séminare d'Analyse, dirigé par P. Lelong 1962/63, Paris, 1963.
5. Direct proofs of spectral representation theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **8** (1964), 351—363.
6. Characterizations of direct sums and commuting sets of Volterra operators, *Pacific J. Math.*, **18** (1966), 545—552.
7. On fractional integrals of pure imaginary order in L_p, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 136—139.

Кальмушевский И. И.
1. О линейной эквивалентности вольтерровых операторов, *УМН*, **20**:6 (1965), 93—97.
Каниэль (Kaniel S.)
1. Unbounded normal operators in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **113** (1964), 488—511.
Каниэль и Шехтер (Kaniel S. and Schechter M.)
1. Spectral theory for Frendholm operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 423—448.
Камович (Kamovitz H.)
1. On operators whose spectrum lies on a circle or a line, *Pacific J. Math.*, **20** (1967), 65—68.
Канторович (Kantorovitz Sh.)
1. An operational calculus and spectral operators, Dissertation, University of Minnesota, 1962.
2. Operational calculus in Banach algebras for algebra-values functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **110** (1964), 519—537.
3. Classification of operators by means of the operational calculus, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 316—320.
4. On the characterization of spectral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **111** (1964), 152—181.
5. Classification of operators by means of their operational calculus, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **115** (1965), 194—224.
6. A Jordan decomposition for operators in Banach space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 891—893.
7. A Jordan decomposition for operators in Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120** (1965), 526—550.
8. The semi-simplicity manifold of arbitrary operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123** (1966), 241—252.
9. The C^k-classification on certain operators on L_p, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 323—333.
10. Local C^n-operational calculus, *J. Math. Mech.*, **17** (1967), 181—188.
Капланский (Kaplansky I.)
1. A theorem on rings of operators, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 227—232.
Карадус (Caradus S. R.)
1. Operators of Riesz type, *Pacific J. Math.*, **18** (1966), 61—71.
2. Operators with finite ascend and descent, *Pacific J. Math.*, **18** (1966), 437—449.
3. On meromorphic operators, I, II.
I. *Canadian J. Math.*, **19** (1967), 723—736.
II. Ibid., **19** (1967), 737—748.
Кариотис (Kariotis C. A.)
1. Spectral properties of certain classes of operators, Dissertation, Univ. of Illinois, 1966.
Карлин (Karlin S.)
1. Positive operators, *J. Math. Mech.*, **8** (1959), 907—937.
Картан (Cartan H.)
1. Théorie spectrale des C-algèbres commutatives, Séminaire Bourbaki, Exposé 125, 1955/56.
Като (Kato T.)
9. Perturbation of contunuous spectra by trace class operators, *Proc. Japan Acad.*, **33** (1957), 260—264.
10. On finite-dimensional perturbations of self-adjoint operators, *J. Math. Soc. Japan*, **9** (1957), 239—249.
11. Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, *J. Analyse Math.*, **6** (1958), 261—322.

12. Wave operators and similarity for non-selfadjoint operators, *Math Ann.*, **162** (1966), 258—279.
13. Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, New York, 1966. (Русский перевод: Теория возмущений линейных операторов «Мир», М., 1972.)
14. Wave operators and unitary equivalence, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 171—180.

Кац Г. И.
1. Спектральные разложения самосопряженных операторов по обобщенным элементам гильбертова пространства, *УМЖ*, **13**:4 (1961), 13—33.

Кац И. С.
1. Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка по собственным функциям, *ИАН СССР*, Сер. матем., **27**:5 (1963), 1081—1112; **28**:4 (1964), 951—952.

Кацнельсон В. Э.
1. Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов, *Функц. анализ и его приложения*, **1**:2 (1967), 39—51.

Кацнельсон В. Э. и Мацаев В. И.
1. О спектральных множествах операторов в банаховом пространстве и оценках функций от конечномерных операторов, *Теория функций, анализ и их прилож.*, **3** (1966), 3—10.

Кашук (Kaashoek M. A.)
1. Closed linear operators on Banach spaces, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. A, **68** (1965), 405—414.
2. Stability theorems for closed linear operators, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. A, **68** (1965), 452—466.

Кашук и Лей (Kaashoek M. A. and Lay D. C.)
1. On operators whose Fredholm set is the complex plane, *Pacific J. Math.*, **21** (1967), 275—278.

Келдыш М. В.
1. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, *ДАН СССР*, **77** (1951), 11—14.

Келдыш М. В. и Лидский В. Б.
1. Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов, Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда, **1**, 1963, стр. 101—120.

Келли и Намиока (Kelley J. L., Namioka I. et al.)
1. Linear topological spaces, D. van Nostrand Inc., Princeton, 1963.

Кемп (Kemp R. R. D.)
1. On a class of singular differential operators, *Canadian J. Math.*, **13** (1961), 316—330.

Кесельман Г. М.
1. Об однозначной аналитической продолжимости резольвенты линейного органиченного оператора, *УМН*, **17**, № 4 (1962), 135—139.
2. О структуре несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси, *ДАН УССР*, **5** (1963), 588—591 (на укр. яз.).

Кёртис (Curtis P. C., Jr.), см. Бейд

Кёте (Köthe G.)
12. Topologische lineare Räume, I, Springer-Verlag, Berlin, 1960.
13. General linear transformations of locally convex spaces, *Math. Ann.*, **159** (1965), 309—328.

Килпи (Kilpi Y.)
2. Über die Anzahl der hypermaximalen normalen Fortsetzungen normaler Transformationen, *Ann. Univ. Turku.*, Ser. AI, No. 65 (1963).

Кисилевский Г. Э., см. также Бродский М. С.
1. Условия одноклеточности диссипативных вольтерровых операторов с конечномерной мнимой компонентой, *ДАН СССР*, **159** : 3 (1964), 505—508.

2. Об упорядоченности характеристических матриц-функций диссипативных вольтерровых операторов, *ДАН СССР*, **159**:4 (1964), 730—733.

Кларк (Clark C.)

1. On relatively bounded perturbations of ordinary differential operators, *Pacific J. Math.*, **25** (1968), 59—70.

Клейнекке (Kleinecke D. C.)

4. On operator commutators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 535—536.
5. Almost-finite, compact, and inessential operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 863—868.

Клуванек (Kluvánek I.)

1. Characterization of scalar-type spectral operators, *Arch. Math.* (Brno), **2** (1966), 153—156.
2. Characterization of Fourier-Stieltjes transformations of vector and operator valued measures, *Czech. Math. J.*, **17** (92) (1967), 261—277.

Клуванек и Коважикова (Kluvánek I. and Kovářiková M.)

1. Product of spectral operators, *Czech. Math. J.*, **17**(92) (1967), 248—256.

Кобёрн (Coburn L. A.)

1. Weyl's theorem for non-normal operators, *Michigan Math. J.*, **13** (1966), 285—288.

Кобёрн и Лебоу (Coburn L. A. and Lebow A.)

1. Algebraic theory of Fredholm operators, *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 577—584.
2. Approximation by Fredholm operators in the metric space of closed operators, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **36** (1966), 217—222.

Коважикова (Kovářiková M.), см. также Клуванек

1. On the polar decomposition of scalar-type operators, *Czech. Math. J.*, **17** (92) (1967), 313—316.

Коддингтон (Coddington E. A.), см. также Бирюк

5. Formally normal operators having no normal extensions, *Canadian J. Math.*, **17** (1965), 1030—1040.

Коддингтон и Гилберт (Coddington E. A. and Gilbert R. C.)

1. Generalised resolvents of ordinary differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), 216—241.

Коддингтон и Левинсон (Coddington E. A. and Levinson N.)

1. Theory of differential equations, McGraw-Hill, New York, 1955. (Русский перевод· Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.)

Кокан (Kocan D.)

1. Spectral manifolds for a class of operators, *Illinois J. Math.*, **10** (1966), 605—622.

Коложоара (Colojoară I.)

1. Generalized spectral operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **7** (1962), 459—465.
2. Operatori spectrali generalisaţi, II, *Com. Acad. R. P. Romine*, **12** (1962), 973—977.
3. Operatori spectrali generalizaţi, *Stud. Cerc. Math.*, **15** (1964), 499—536.
4. Logarithms of generalized spectral operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **10** (1965), 319—322.
5. Elemente de teorie spectralǎ (Roumanian), Editura Academiei Rep. Soc. România, Bucarest, 1968.

Коложоара и Фойаш (Colojoară I. and Foiaş C.)

1. Quasi-nilpotent equivalence of not necessarily commuting operators, *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 521—540.
2. The Riesz-Dunford functional calculus with decomposable operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 627—641.

3. Spectral distribution of finite multiplicity, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 1039—1042.
4. Theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach, New York, 1968.
5. Commutators of decomposable operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **12** (1967), 807—815.

Комацу (Komatsu H.)
1. Semi-groups operators in locally convex spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **16** (1964), 230—262.

Конлей (Conley C. C.)
1. A note on perturbations which create new point eigenvalues, *J. Math. Anal. Appl.*, **15** (1966), 421—433.

Конлей и Рейто (Conley C. C. and Rejto P. A.)
1. On spectral concentration, Technical Report IMM-NYU 293, New York Univ., 1962.

Конно и Курода (Konno R. and Kuroda S.-T.)
1. On the finiteness of perturbed eigenvalues, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I, **13** (1966), 55—63.

Коппельман (Koppelman W.)
1. Spectral multiplicity theory for a class of singular integral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **113** (1964), 87—100.
2. On the spectral theory of singular integral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 35—63.

Коппельман и Пинкус (Koppelman W. and Pincus J. D.)
1. Spectral representation for finite Hilbert transforms, *Math. Zeit.*, **71** (1959), 399—407.

Кордес (Cordes H.-O.), см. также Бройер
3. The algebra of singular integral operators in R^n, *J. Math. Mech.*, **14** (1965), 1007—1032.
4. Über eine nicht algebraische Characterisierung von $\mathcal{J}$-Fredholm-Operatoren, *Math. Ann.*, **163** (1966), 212—229.

Кордес и Лабрус (Cordes H.-O. and Labrousse J. P.)
1. The invariance of the index in the metric of closed operators, *J. Math. Mech.*, **12** (1963), 693—719.

Коротков В. Б., см. также Гильдерман Ю. И.
1. Абстрактные функции множеств и теоремы вложения, *ДАН СССР*, **146**:3 (1962), 531—534.

Краббе (Krabbe G. L.)
1. On the logarithm of a uniformly bounded operator, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 155—166.
2. On the spectra of certain Laurent matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 894—897.
3. Convolution operators which are not of scalar type, *Math. Zeit.*, **69** (1958), 346—350.
4. Spectral invariance of convolution operators on $L^p(-\infty, \infty)$, *Duke Math. J.*, **25** (1958), 131—141.
5. Spectral isomorphisms for some rings of infinite matrices on Banach space, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 42—50.
6. Convolution operators that satisfy the spectral theorem, *Math. Zeit.*, **70** (1959), 446—462.
7. Vaguely normal operators on a Banach space, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **3** (1959), 51—59.
8. Normal operators on the Banach spaces $L^p(-\infty, \infty)$, I, II.
   I. Bounded operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959), 270—272.
   II. Unbounded transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 86—90.

9. Normal operators on the Banach space L^p $(-\infty, \infty)$, I, II.
I. *Canadian J. Math.*, **13** (1961), 505—518.
II. Unbounded operators, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 111—113.
10. Integration with respect to operator-valued functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 214—218.
11. Réfractions non-hilbertiennes d'une transformation symétrique bornée, *Studia Math.*, **20** (1961), 347—357.
12. Sur la permanence spectrale, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **255** (1962), 1326—1328.
13. Spectrale permanence of scalar operators, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 1289—1303.
14. Generalized measures whose values are operators into an intermediate space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 42—46.
15. Generalized measures whose values are operators into an intermediate space, *Math. Ann.*, **151** (1963), 219—238.
16. Stieltjes integration, spectral analysis and the locally-convex algebra *(BV)*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 184—189.

Крамер Г. (Kramer H. P.)
1. Peturbation of differential operators, Dissertation, Univ. of California, Berkeley, 1954.
2. Perturbation of differential operators, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 1405—1435.

Крамер В., см. Гилберт

Красносельский М. А., см. также Бахтин И. А., Крейн М. Г. и Забрейко П. П.
5. Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, М., 1962.

Крачковский С. Н., см. также Гольдман М. А.

Крейн М. Г., см. также Бирман М. Ш., Бродский М. С., Гохберг И. Ц. и Иохвидов И. С.
8. О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сб.*, **33** (75) (1953), 597—626.
22. О признаках полноты системы корневых векторов диссипативного оператора, *УМН*, **14**:3 (1959), 145—152.
23. К теории линейных несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **130**:2 (1960), 254—256.
24. Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **144**:2 (1962), 268—271.
25. Об одном новом применении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, *ДАН СССР*, **154**:5 (1964), 1023—1026.
26. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, *УМН*, **13**:5 (1958), 3—120.
27. О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов. В сб. «Первая летняя матем. школа», 1, Киев, 1964, стр. 103—187.
28. Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах. В сб. «Вторая летняя матем. школа», 1, Киев, 1965, стр. 15—92.

Крейн М. Г. и Красносельский М. А.
1. Устойчивость индекса неограниченного оператора, *Матем. сб.*, **30** (72) (1952), 219—224.

Крейн М. Г. и Лангер Г. (Langer G. K. [Heinz])
1. О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой, *ДАН СССР*, **152**:1 (1963), 39—42.
2. К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **154**:6 (1964), 1258—1261.

К р е й н М. Г. и Р у т м а н М. А.
1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, *УМН*, **3**:1 (23) (1948), 3—95.
К р е й н М. Г. и Ш м у л ь я н Ю. Л.
1. Об одном классе операторов в пространстве с индефинитной метрикой, *ДАН СССР*, **170**:1 (1966), 34—37.
К р е й н С. Г. (под редакцией), см. также А с к е р о в Н. Г.
1. Функциональный анализ, «Наука», М., 1964.
К р и м м и н с и Р о з е н т а л ь П. (C r i m m i n s T. and R o s e n t h a l P.)
1. On the decomposition of invariant subspaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 97—99.
К у ж е л ь А. В.
1. Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **125**:1 (1959), 36—37.
2. Спектральное разложение квазиунитарных операторов произвольного ранга в пространстве с индефинитной метрикой, *ДАН УССР*, **4** (1963), 430—433 (на укр. языке).
3. Спектральный анализ ограниченных несамосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой, *ДАН СССР*, **151**:4 (1963), 772—774.
К у к (C o o k J. M.)
1. Convergence to the Møller wave-matrix, *J. Math. Phys.*, **36** (1957), 82—87.
К у к у л е с к у и Ф о й а ш (C u c u l e s c u I. and F o i a ş C.)
1. An individual ergodic theorem for positive operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **11** (1966), 581—594.
К у л ь ц е Р. (K u l t z e R.)
1. Zur Theorie Fredholmscher Endomorphismen in nuklearen topologischen Vektorräumen, *J. Reine Angew. Math.*, **200** (1958), 112—124.
К у р е п а (K u r e p a S.)
1. A note on logarithms of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 307—311.
2. On n-th roots of normal operators, *Math. Zeit.*, **78** (1962), 285—292.
3. On roots of an element of a Banach algebra, *Publ. Inst. Math.* (Beograd) (N. S.), **1** (15) (1962), 5—10.
4. Logarithms of spectral type operators, *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom., Ser.* II, **18** (1963), 53—57.
5. A theorem about similarity of operators, *Arch. Math.*, **14** (1963), 411—414.
6. On operator-roots of an analytic function, *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom.*, Ser. II, **18** (1963), 49—51.
К у р о д а (K u r o d a S.-T.), см. также К о н н о
1. On a theorem of Weyl-von Neumann, *Proc. Japan Acad.*, **34** (1958), 11—15.
2. On the existence and unitary properties of the scattering operator, II, *Nuovo Cimento*, **12** (1959), 431—454.
3. Perturbation of continuous spectra by unbounded operators, I, II.
I. *J. Math. Soc. Japan*, **11** (1959), 246—262.
II. Ibid., **12** (1960), 243—257.
4. On a generalization of the Weinstein-Aronzajn formula and the infinite determinant, *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, **11** (1961), 1—12.
5. Finite-dimensional perturbation and a representation of the scattering operator, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 1305—1318.
6. On a stationary approach to scattering problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 556—560.
7. Stationary methods in the theory of scattering, Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics, Wiley, New York, 1966, pp. 185—214.

8. Perturbation of eigenfunction expansions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **57** (1967), 1213—1217.
9. An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, *J. Analyse Math.*, **20** (1967), 57—117.

Лабрус (Labrousse J. P.), см. Кордес

Лаврентьев М. А.
1. Sur les fonctions d'une variable complexe représentable par des séries de polynomes, *Act. Sci. Ind.*, **441** (1936), 1—62.

Ладыженская О. А. и Фаддеев Л. Д.
1. К теории возмущений непрерывного спектра, *ДАН СССР*, **120**:6 (1958), 1187—1190.

Лакс и Филлипс (Lax P. D. and Phillips R. S.)
1. Scattering theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 130—142.
2. Scattering theory, Academic Press, New York, 1967. (Русский перевод: Теория рассеяния, «Мир», М., 1971.)
3. Analytic properties of the Schrödinger scattering matrix, Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics, Wiley, New York, 1966, pp. 243—253.

Лангер Г. (Langer G. K.), см. также Крейн М. Г.
1. Sur Spectraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren, *Math. Ann.*, **146** (1962), 60—85.
2. О J-эрмитовых операторах, *ДАН СССР*, **134** (1960), 263—266.
3. Eine Verallgemeinerung eines Satzes von L. S. Pontrjagin, *Math. Ann.*, **152** (1963), 434—436.
4. Eine Erweiterung der Spurformel der Störungstheorie, *Math. Nachr.*, **30** (1965), 123—135.
5. Spectralfunktionen einer Klasse J-selbstadjungierter Operatoren, *Math. Nachr.*, **33** (1967), 107—120.

Лангер Р. (Langer R.), см. Биркгоф Дж.

Ланье (Lanier L. H., Jr.)
1. Semi-groups of spectral operators, Dissertation, University of Illinois, Urbana, 1963.

Лаптев Г. И., см. Аскеров Н. Г.

Лебоу (Lebow A.), см. также Кобёрн
1. On von Neumann's theory of spectral sets, *J. Math. Anal. Appl.*, **7** (1963), 64—90.
2. A note of normal dilations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 995—998.

Левин Б. Я.
1. Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, *ДАН СССР*, **106** (1956), 187—190.

Левинсон (Levinson N.), см. Коддингтон

Левич Е. М., см. Гольдман М. А.

Лежаньский (Leżański T.)
1. The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **13** (1953), 244—276.

Лей (Lay D. C.), см. Кашук

Лившиц М. С.
6. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **34** (76) (1954), 144—199.
7. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **19** (61) (1946), 239—262.

Лидский В. Б.
1. Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром, Труды моск. матем. о-ва, **8** (1959), 83—120.

2. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов, Труды Матем. моск. о-ва, **11** (1962), 3—35.

Линденштраусс (Lindenstrauss J.), см. также Бонсол

1. Extension of compact operators, Memoirs Amer. Math. Soc., **48**, 1964.

Линденштраусс и Пелчинский (Lindenstrauss J. and Pełczyński A.)

1. Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications, *Studia Math.*, **29** (1968), 275—326.

Лионс (Lions J. L.), см. Фойаш

Литтман, Маккарти и Ривьер (Littman W., McCarthy C. and Riviere N.)

1. L^p-multiplier theorems, *Studia Math.*, **30** (1969), 197—221.

Лиф (Leaf G. K.)

1. A spectral theory for a class of linear operators, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 141—155.
2. An approximation theorem for a class of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 991—995. Errata ibid., **18** (1967), 1141—1142.

Ллойд (Lloyd S. P.)

1. On extreme averaging operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 305—310.

Логинов Б. В.

1. Об оценке точности метода возмущений в случае ограниченного невозмущенного оператора, *ИАН УзССР*, Сер. физ.-мат., **5** (1963), 21—25.

Лорх (Lorch E. R.)

1. Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 564—569.
2. On a calculus of operators in reflexive vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45** (1939), 217—234.
7. The integral representation of weakly almost-periodic transformations in reflexive vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **49** (1941), 18—40.
15. Spectral theory, Oxford Univ. Press, New York, 1962.

Лоуденслагер (Lowdenslager D.), см. Хельсон

Лоц (Lotz H. P.)

1. Über das Spectrum positiver Operatoren, *Math. Zeit.*, **108** (1968), 15—32.

Лоц и Шефер (Lotz H. P. and Schaefer H. H.)

1. Über einen Satz von F. Niiro und I. Sawashima, *Math. Zeit.*, **108** (1968), 33—36.

Любич Ю. И.

1. Почти-периодические функции в спектральном анализе операторов, *ДАН СССР*, **132**:3 (1960), 518—520.
2. Об одном классе операторов в банаховом пространстве, *УМН*, **20**:6 (1965), 131—133.
3. Консервативные операторы, *УМН*, **20**:5 (1965), 221—225.

Любич Ю. И. и Мацаев В. И.

1. К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве, *ДАН СССР*, **131**:1 (1960), 21—23.
2. Об операторах с отделимым спектром, *Матем. сб.*, **56**: 4 (1962), 433—468; **71**:2 (1966), 287—288.

Люксембург и Заанен (Luxemburg W. A. J. and Zaanen A. C.)

1. Compactness of integral operators in Banach function spaces, *Math. Ann.*, **149** (1962/63), 150—180.

Люмер (Lumer G.), см. также Халмош

1. Semi-inner product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 29—43.
2. Spectral operators, Hermitian operators, and bounded groups, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25** (1964), 75—85.

3. Remarks on n-th roots of operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25** (1964) 72—74.

Л я н ц е В. Э.

1. Кольца линейных неограниченных операторов с разложением единицы и их представления, *ДАН СССР*, **121** : 5 (1958), 801—804.
2. Об одном обобщении понятия спектральной меры, *Матем. сб.*, **61**:1 (1963), 80—120.
3. Неограниченные операторы, перестановочные с разложением единицы, *УМЖ*, **15**:4 (1963), 376—384.
4. О дифференциальном операторе со спектральными особенностями, I,II.
   I. *Матем. сб.*, **64**:4 (1964), 521—561.
   II. *Матем. сб.*, **65**:1 (1964), 47—103.
5. Некоторые свойства идемпотентных операторов, *Теорет. и прикл. матем., Львов*, **1** (1958), 16—22.
6. О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора со спектральными особенностями, *ДАН СССР*, **149**:2 (1963), 256—259.
7. Обратная задача для несамосопряженного оператора, *ДАН СССР*, **166**:1 (1966), 30—33.
8. Разложение по главным функциям оператора со спектральными особенностями, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, **11**:8 (1966), 921—950; **11**:10 (1966), 1187—1224.
9. Несамосопряженное одномерное возмущение оператора умножения на независимое переменное, *ДАН СССР*, **182** (1968), 1010—1013.
10. О возмущении непрерывного спектра, *ДАН СССР*, **187** (1969), 514—517.

М а е д а (M a e d a F.-Y.)

1. Spectral theory on locally convex spaces, Dissertation, Vale Univ., 1961.
2. A characterization of spectral operators on locally convex spaces, *Math. Ann.*, **143** (1961), 59—74.
3. Remarks on spectra of operators on a locally convex space, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **47** (1961), 1052—1055.
4. Generalized spectral operators on locally convex spaces, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 177—192.
5. Function of generalised scalar operators, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A-I, **26** (1962), 71—76.
6. On spectral representations of generalized spectral operators, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A-I, **27** (1963), 137—149.
7. Generalized unitary operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 631—633.
8. Generalized scalar operators whose spectra are contained in a Jordan curve, *Illinois J. Math.*, **10** (1966), 431—459.

М а к г а р в е й (M c G a r v e y D. C.)

1. Operators commuting with translation by one, I—III.
   I. Representation theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **4** (1962), 366—410.
   II. Differential operators with periodic coefficients in L_p $(-\infty, \infty)$, ibid., **11** (1965), 564—569.
   III. Perturbation results for periodic differential operators, ibid., **12** (1965), 187—234.

М а к к а р т и (M c C a r t h y C. A.), см. также Л и т т м а н

1. The nilpotent part of a spectral operator, I, II.
   I. *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 1223—1231.
   II. Ibid., **15** (1965), 557—559.
2. Commuting Boolean algebras of projections, I,II.
   I. *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 295—307.
   II. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 781—787.
3. c_p, *Israel J. Math.*, **5** (1967), 249—271.

Маккарти и Стемпфли (McCarthy C. A. and Stampfli J. C.)

1. On one-parameter groups and semi-groups of operators in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25** (1964), 6—11.

Маккарти и Цафрири (McCarthy C. A. and Tzafriri L.)

1. Projections in $\mathscr{L}_1$ and $\mathscr{L}_\infty$-spaces, *Pacific J. Math.*, **26** (1968), 529—546.

Маккарти и Шварц Дж. (McCarthy C. A. and Schwartz J.)

1. On the norm of a finite Boolean algebra of projections, and applications to theorems of Kreiss and Morton, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 191—201.

Маккелви (McKelvey R.)

1. The spectra of minimal self-adjoint extensions of a symmetric operator, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1003—1022.
2. Spectral measures, generalized resolvents, and functions of positive type, *J. Math. Anal. Appl.*, **11** (1965), 447—477.

Макки (Mackey G. W.)

1. Commutative Banach algebras, Mimeographed lecture notes, Harvard Univ., 1952.

Мак-Клюер (MacCluer C. R.)

1. On extreme points of the numerical range of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 1183—1184.

Маклафлин (McLaughlin J. E.), см. Халмош

Марек (Marek I.)

1. On some spectral properties of Radon-Nicolski operators and their generalizations, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **3** (1962), 20—30.
2. A note on K-positive operators, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **4** (1963), 137—146.
3. On the minimax principle for K-positive operators, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **7** (1966), 109—112.

Маркус А. С., см. также Визитей, Гохберг

1. О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора, *ДАН СССР*, **142**:3 (1962), 538—541.
2. Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов, *УМН*, **19**:4 (1964), 93—123.
3. О некоторых признаках полноты системы корневых векторов линейного оператора и суммируемости рядов по этой системе, *ДАН СССР*, **155**:4 (1964), 753—756.
4. Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве, *Матем. сб.*, **70**:4 (1966), 526—561.

Мартиросян Р. М.

1. Об индексах дефекта и спектре некоторых операторов, *ДАН АрмССР* **34**:2 (1962), 49—55.
2. Об инвариантности спектра малых возмущений полигармонического оператора, *ИАН СССР*, сер. матем., **28**:1 (1964), 79—90.
3. Об одном методе исследования спектра возмущений самосопряженных дифференциальных операторов, *ДАН АрмССР*, **41**:5 (1965), 257—263.
4. О спектре некоторых несамосопряженных возмущений самосопряженных дифференциальных операторов, *ИАН АрмССР*, сер. матем., **1**:3 (1966), 192—216.
5. О спектре некоторых несамосопряженных операторов, *ИАН СССР*, сер. матем., **27**:3 (1963), 677—700.

Марченко В. А.

3. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, *Матем. сб.*, **52**:2 (1960), 739—788.

Марченко В. А. и Рофе-Бекетов Ф. С.
1. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **120**:5 (1958), 963—966.

Мацаев В. И., см. также Бродский, Кацнельсон и Любич
1. Об одном классе вполне непрерывных операторов, *ДАН СССР*, **139**:3 (1961), 548—551.
2. Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **154**:5 (1964), 1034—1037.
3. Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполне непрерывных операторов, *ДАН СССР*, **155**:2 (1964), 273—276.

Мейлбо (Mejlbo L. C.)
1. On the solution of the commutation relation $PQ - QP = -iI$, *Math. Scand.*, **13** (1963), 129—139.

Мелтиз (Maltese G.)
1. Spectral representations for solutions of certain abstract functional equations, *Compositio Math.*, **15** (1961), 1—22.
2. Spectral representations for some unbounded normal operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **110** (1964), 79—87.

Мергелян С. Н.
1. О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах, *ДАН СССР*, **78** (1951), 405—408.

Меррей (Murray F. J.)
3. The analysis of linear transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (1942), 79—93.

Мёллер (Møller C.)
1. General properties of the characteristic matrix in the theory of elementary particles, I, II.
I. *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **21**, no. 1 (1945).
II. Ibid., **22**, no. 19 (1946).

Мизра (Misra B.), см. Генен и Яух

Миллер (Miller J. B.), см. также Гамлен
1. Some properties of Baxter operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **17** (1966), 387—400.
2. Averaging and Reynolds operators on Banach algebras. I. Representation by derivations and antiderivations, *J. Math. Anal. Appl.*, **14** (1966), 527—548.

Милн (Milne W. E.)
2. On the degree of convergence of expansions in an infinite integral, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31** (1929), 906—918.

Мимура (Mimura Y.)
1. Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 119—128.

Митягин Б. С. и Пелчинский (Pełczyński A.)
1. Nuclear operators and approximative dimension, Труды международного конгресса математиков, Москва — 1966, «Мир», М., 1968, стр. 366—372.

Мишоу и Форд (Mishoe L. I. and Ford G. C.), см. также Фридман
1. Studies in the eigenfunction series associated with a non-self-adjoint differential system, Tech. Report, Nat. Sci. Foundation, 1955.

Миядера (Miyadera I.)
2. On perturbation theory for semi-groups of operators, *Tôhoku Math. J.*, (2) **18** (1966), 299—310.

Мкртчян Р. З., см. Александрян Р. А.

Мляк (Mlak W.), см. также Фойаш
1. Characterization of completely non-unitary contractions in Hilbert space, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **11** (1963), 111—113.

2. Note on the unitary dilation of a contraction operator, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **11** (1963), 463—467.
3. Some prediction theoretical properties of unitary dilations, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **12** (1964), 37—42.
4. Unitary dilations of contraction operators, *Rozprawy Mat.*, **46** (1965).
5. On semi-groups of contractions in Hilbert space, *Studia Math.*, **26** (1966), 263—272.

Мозер (Moser J.)
1. Störungstheorie des kontinuerlichen Spectrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, **125** (1953), 366—393.
2. Singular perturbation of eigenvalue problems for linear differential equations of even order, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 251—278.

Мой (Moy S.-T. C.)
1. Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 47—63.

Мойал (Moyal J. E.)
1. The theory of spectral and scalar algebras (to appear).

Морен К. (Maurin K.)
1. Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen. Spekraldarstellungs abstrakter Kerne. Eine Verallgemeinerung der Distributionen auf Lie'schen Gruppen, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7** (1959), 471—479.
2. Eine Bemerkung zur allgemeinen Eigenfunktionsentwicklungen für vertauschbare Operatorensysteme beliebiger Mächtigkeit, *Bull. Acad. Polon Sci.*, **8** (1960), 381—384. (Russian summary.)
3. Spectraldarstellung der Kerne. Eine Verallgemeinerung der Sätz von Källén-Lehmann und Herglotz-Bochner u.a., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7** (1959), 461—470.
4. Abbildungen vom Hilbert-Schmidtschen Typus und ihre Anwendungen, *Math. Scand.*, **9** (1961), 359—371.
5. Mappings of Hilbert-Schmidt-type. Their application to eigenfunction expansions and elliptic boundary problems, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **9** (1961), 7—11. (Russian summary.)
6. General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups, Deuxième Colloq. d'Anal. Fonct., Louvian, 1964, pp. 49—55.
7. Methods of Hilbert spaces, Monografie Matematyczne, 45, Warszawa, 1967. (Русский перевод: Методы гильбертова пространства, «Мир», М., 1965.)

Морен Л. и Морен К. (Maurin Lidia and Maurin Krzysztof)
1. Spectraltheorie separierbarer Operatoren, *Studia Math.*, **23** (1963), 1—29.
2. Nuclearität gewisser Rellich-Sobolevschen Einbettungen. Anwendung auf Spectraltheorie der Differentialoperatoren, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **8** (1960), 621—624. (Russian summary.)

Мотидзуки (Mochizuki K.)
1. On the large perturbation by a class of non-selfadjoint operators, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 123—158.

Мусхелишвили Н. И.
1. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике, М.—Л., 1946.

Мьюборн (Mewborn A. C.)
1. Generalizations of some theorems on positive matrices to completely continuous linear transformations on a normal linear space, *Duke Math. J.*, **27** (1960), 273—281.

Наймарк М. А., см. также Гельфанд И. М.
5. Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, М., 1954.

10. Исследование спектра и разложение по собственным функциям сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка, *УМН*, **8**:4 (56) (1953), 174—175.
11. О разложении по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, *ДАН СССР*, **89** (1953), 213—216.
12. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси, Труды моск. матем. о-ва, **3** (1954), 181—270.
13. Нормированные кольца, «Наука», М., 1968.
14. Линейные представления группы Лоренца, *УМН*, **9**:4 (62) (1954), 19—93.
15. Спектральный анализ несамосопряженных операторов, *УМН*, **11**:6 (72) (1956), 183—202.
16. On commuting unitary operators in spaces with indefinite metric, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), 177—189.

Накамура и Иосида (Nakamura M. and Yoshida M.)
1. On Bückner's inclusion theorems for Hermitean operators, *Proc. Japan Acad.*, **40** (1964), 180—182.

Накано (Nakano H.)
8. Über Abelsche Ringe von Projektionsoperatoren, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, (3) **21** (1939), 357—375.
9. Unitärinvariante hypermaximale normale Operatoren, *Ann. of Math.*, (2) **42** (1941), 657—664.
12. Modern spectral theory, Maruzen Co., Tokyo, 1950.
13. Spectral theory in the Hilbert space, Japan Soc. for Promotion of Sci., Tokyo, 1953.
19. On unitary dilations of bounded operators, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **22** (1961), 286—288.

Намиока (Namioka I.), см. Келли

Неванлинна и Ньеминен (Nevanlinna F. and Nieminen T.)
1. Das Poisson-Stieltjes'sche Integral und seine Anwendung in der Spectral theorie des Hilbert'schen Raumes, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. AI, no. 207 (1955), 1—38.

Нел (Nel L. D.)
1. A characterization of unbounded spectral operators, *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 317—319.

Нельсон (Nelson E.)
1. Kernel functions and eigenfunction expansions, *Duke Math. J.*, **25** (1958), 15—27, ibid., **26** (1959), 697—698.

Нейбауер (Neubauer G.)
1. Zur Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren, I, II.
   I. *Math. Ann.*, **142** (1960/61), 131—164.
   II. Ibid., **143** (1961), 251—263.
2. Zu einem Satz von N. Dunford, *Arch. Math.*, **11** (1960), 366—367.
3. Über den Index abgeschlossener Operatoren in Banachräumen, I, II.
   I. *Math. Ann.*, **160** (1965), 93—130.
   II. Ibid., **162** (1965/66), 92—119.

Нейман Дж. (von Neumann J.)
6. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators, *Act. Sci. et Ind.*, **229**, Paris, 1935.
24. Approximative properties of matrices of high finite order, *Portugaliae Math.*, **3** (1942), 1—62.

Нижник Л. П.
1. Структура спектра и самосопряженность возмущений дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, *УМЖ*, **15**:4 (1963), 385—399.

Н и и р о (N i i r o F.)
1. On indecomposable operators in l_p ($1 < p < \infty$) and a problem of H. Schaefer, *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo*, **14** (1964), 165—179.
Н и и р о и С а в а с и м а (N i i r o F. and S a w a s h i m a I.)
1. On the spectral properties of positive irreducible operators in an arbitrary Banach lattice and problems of H. H. Schaefer, *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo*, **16** (1966), 145—183.
Н и к о л ь с к и й Н. К.
1. Об инвариантных подпространствах унитарных операторов, *Вестн. Ленингр. ун-та*, сер. матем., **19**, 4 (1966), 36—43.
Н о в о с е л ь с к и й И. А.
1. О некоторых признаках полноты системы корневых векторов вполне непрерывного оператора, *ИАН МолдССР*, **7** (1965), 47—54.
Н ь е м и н е н (N i e m i n e n T.), см. также Н е в а н л и н н а
1. A condition for the self-adjointness of a linear operator, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. AI, no. **316** (1962).
Н ь ю б е р г е р (N e w b e r g e r S. M.)
1. The σ-symbol of the singular integral operators of Calderón and Zygmund, *Illinois J. Math.*, **9** (1965), 428—443.
Н ь ю б у р г (N e w b u r g h J. D.)
1. The variation of spectra, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 165—176.
2. A topology for closed operators, *Ann. of Math.* (2) **53** (1957), 250—255.
О б е р е й (O b e r a i K. K.)
1. Sum and product of commuting spectral operators, *Pacific J. Math.*, **25** (1968), 129—146.
2. Spectrum of a spectral operator, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 325—331.
3. Spectral interpolation in L_p spaces, *Math. Zeit.*, **103** (1968), 122—128.
4. Nilpotency and the rate of growth condition, *Math. Ann.*, **184** (1970), 233—287.
5. On spectral permanence, *J. Math., Mech.*, **18** (1968), 553—558.
О л а г у н ж и и В е с т (O l a g u n j u P. and W e s t T. T.)
1. The spectra of Fredholm operators in locally convex space, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60** (1964), 801—806.
О р л а н д (O r l a n d G. H.)
1. On a class of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 75—79.
2. On some theorems of Bram for subnormal operators, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 377—378.
О с б о р н (O s b o r n J. E.)
1. Approximation of the eigenvalues of nonself-adjoint operators, *J. Math. and Phys.*, **45** (1966), 391—401.
О ш е р (O s h e r S. J.)
1. Two papers on the similarity of certain Volterra integral operators, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **73** (1967).
П а в л о в Б. С.
1. О несамосопряженном операторе $-y'' + q(x)y$ на полуоси, *ДАН СССР*, **141**:4 (1961), 807—810.
2. К спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, *ДАН СССР*, **146**:6 (1962), 1267—1270.
П а л а н т Ю. А.
1. Об одном признаке полноты системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка операторов, *ДАН СССР*, **141**:3 (1961), 558—560.
П а н ч а п а г е с а н (P a n c h a p a g e s a n T. V.)
1. Unitary operators in Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 465—475.

П а р а с к а В. И.
1. Одна метрика в пространстве линейных замкнутых операторов и ее применение в теории возмущений, *Матем. исследования*, **2**:1, Кишинев (1967), 45—66.

П е д е р с е н (P e d e r s e n N. W.)
1. The resolutions of the identity for sums and products of commuting spectral operators, *Math. Scand.*, **11** (1962), 123—130.

П е л ч и н с к и й (P e ł c z y ń s k i A.), см. также Л и н д е н ш т р а у с с и М и т я г и н
1. A characterization of Hilbert-Schmidt operators, *Studia Math.*, **28** (1967), 355—360.
2. Proof of Grothendieck's theorem on the characterization of nuclear spaces, *Prace Mat.*, **7** (1962), 155—167.
3. On strictly singular and strictly cosingular operators, I, II.
   I. Strictly singular and strictly cosingular operators in $C(S)$-spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **13** (1965), 31—36.
   II. Strictly singular and strictly cosingular operators in $L(\nu)$-spaces, ibid., **13** (1965), 37—41.

П е н ц л и н (P e n z l i n F.), см. Д о л ь ф

П е р е с с и н и (P e r e s s i n i A. L.)
1. Ordered topological vector spaces, Harper and Row, New York, 1967.

П е р е с с и н и и Ш ё б е р т (P e r e s s i n i A. L. and S h e r b e r t D. B.)
1. Multiplicative operators and substochastic matrices, *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 605—611.
2. Order properties of linear mappings on sequence spaces, *Math. Ann.*, **165** (1966), 318—332.
3. Ordered topological tensor products, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **19** (1969), 177—190.

П е т т и н е о (P e t t i n e o B.)
1. Equazioni funzionali negli spazi di Hilbert e teoria fredholmiana, *Atti. Accad. Sci. Lett. Arti Palermo*, Parte I (4) **20** (1959/60) (1961), 117—185.
2. Teoreme dell'alternative e teoria fredholmiana per talune equazioni negli spazi hilbertiani, Celebrazioni Archimedee del Sec. XX (Siracusa, 1961), Vol. II, Edizioni "Oderisi", Gubbio, 1962, pp. 91—105.

П и н к у с (P i n c u s J. D.), см. также К о п п е л ь м а н
1. On the spectral theory of singular integral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **113** (1964), 101—128.
2. Commutators, generalized eigenfunction expansions and singular integral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121** (1966), 358—377.
3. On the explicit construction on generalized eigenfunction expansions, Brookhaven Nat. Lab., Appl. Math. Report 343, April 1964.
4. Commutators and systems of singular integral equations, I, Brookhaven Nat. Lab., Appl. Math. Report 499, April 1967.
5. The spectral theory for self-adjoint Wiener-Hopf operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 882—887.

П и н к у с и Р о в н я к (P i n c u s J. D. and R o v n y a k J.)
1. A spectral theory for some unbounded self-adjoint singular integral operators, Brookhaven Nat. Lab., Appl. Math. Report 509, 1967.

П и р с (P e a r c y C.), см. Б р а у н и Д е к а р

П и ч (P i e t s c h A.)
1. Zur Theorie der σ-Transformationen in lokalkonvexen Vektorräumen, *Math. Nachr.*, **21** (1960), 347—369.
2. Homomorphismen in lokalkonvexen Vektorräumen, *Math. Nachr.*, **22** (1960), 162—174.
3. Unstetige lineare Abbildungen in lokalkonvexen Vektorräumen, *Math. Ann.*, **140** (1960), 153—164.

4. Ein verallgemeinertes Spektralproblem für kompakte lineare Abbildungen in lokalkonvexen Vektorräumen, *Math. Ann.*, **140** (1960), 147—152.
5. Quasi-präkompakte Endomorphismen und ein Ergodensatz in lokalkonvexen Vektorräumen, *J. Reine Angew. Math.*, **207** (1961), 16—30.
6. Zur Fredholmschen Theorie in lokalkonvexen Räumen, *Studia Math.*, **22** (1962/63), 161—179.
7. Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen, *Rev. Roumaine Math. Pure Appl.*, **8** (1963), 427—447.
8. Eine neue Charakterisierung der nuklearen lokalkonvexen Räume, I, II. (Русский перевод: сб. *Математика*, **7**:5(1963), I, 105—110; II,111—120.)
 I. *Math. Nachr.*, **25** (1963), 31—36.
 II. Ibid., **25** (1963), 49—58.
9. Absolut summierende Abbildungen in lokalkonvexen Räumen, *Math., Nachr.*, **27** (1963), 77—103. (Русский перевод: сб. *Математика*, 8:2 (1964), 77—102.)
10. Nukleare lokalkonvexe Räume, Akad.-Verlag, Berlin, 1965. (Русский перевод: Пич А., Ядерные локально выпуклые пространства, «Мир», М., 1967.)
11. Über die Erzeugung von (F)-Räumen durch selbstadjungierte Operatoren, *Math. Ann.*, **164** (1966), 219—224.
12. Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen., *Studia Math.*, **28** (1967), 333—353.

Плафкер (Plafker S.), см. также Ионеску
1. Spectral representations for a general class of operators on a locally convex space, *Illinois J. Math.*, **13** (1969), 573—582.
2. Generalized subscalar operators on Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **24** (1968), 345—361.

Плеснер А. И.
3. Спектральная теория линейных операторов, «Наука», М., 1965.

Повзнер А. Я.
1. О некоторых приложениях одного класса гильбертовых пространств функций, *ДАН СССР*, **74** (1950), 13—16.
2. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора — $\Delta u + cu$, *Матем. сб.*, **32** (74) (1953), 109—156.

Порат (Porath G.)
1. Störungstheorie für abgeschlossene lineare Transformationen im Banachschen Raum, *Math. Nachr.*, **17** (1958), 62—72.

Пуанкаре (Poincaré H.)
2. Sur les équations de la physique mathématique, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **8** (1894), 57—156.

Пустыльник Е. И.
1. О сходимости рядов по собственным функциям вполне непрерывного оператора в банаховых пространствах, *Сиб. матем. ж.*, **4**:3 (1963), 705—708.

Путнам (Putnam C. R.)
19. On square roots of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 768—769.
20. On bounded matrices with non-negative elements, *Canadian J. Math.*, **10** (1958), 587—591.
21. On square roots and logarithms of self-adjoint operators, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **4** (1958), 1—2.
22. Commutators, perturbations, and unitary spectra, *Acta Math.*, **106** (1961), 215—232.
23. A note on non-negative matrices, *Canadian J. Math.*, **13** (1961), 59—62.
24. Absolute continuity of certain unitary and half-scattering operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 844—846.
25. Positive matrices and eigenvectors, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **6** (1963).

26. On the structure of semi-normal operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 818—819.
27. Continuous spectra and unitary equivalence, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 993—995.
28. On differences of unitarily equivalent self-adjoint operators, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **4** (1960), 103—107.
29. On the spectra of unitary half-scattering operators, *Quart. Appl. Math.*, **20** (1962/63), 85—88.
30. On the spectra of semi-normal operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **119** (1965), 509—523.
31. Commutation properties of Hilbert space operators and related topics, Ergebnisse der Math., Band 36, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
32. Perturbations of bounded operators, *Nieuw Arch. Wisk.*, **15** (3) (1967), 146—152.
33. Wiener-Hopf operators and absolutely continuous spectra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 659—662.

Пфлюгер (Pflüger A.)
1. Verallgemeinerte Poisson-Stiltjes'sche Integraldarstellung und kontraktive Operatoren, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. AI, No. 336/13 (1963).

Пшеворска-Ролевич и Ролевич (Przeworska-Rolewicz D. and Rolewicz S.)
1. On operators with a finite *d*-characteristic, *Studia Math.*, **24** (1964), 258—270.
2. On operators preserving a conjugate space, *Studia Math.*, **25** (1964/65), 245—249.
3. Remarks on Φ-operators in linear topological spaces, *Prace Mat.*, **9** (1965), 91—94.
4. On quasi-Fredholm ideals, *Studia Math.*, **26** (1965), 67—71.
5. Equations in linear spaces, Monografie Matematyczne, **47**, Warszawa, 1968.

Райдер (Rider D. G.), см. Дейвис

Райков Д. А., см. Гельфанд И. М.

Растон (Ruston A. F.)
2. On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class on a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.*, **53** (2) (1951), 109—124.
3. Direct products of Banach spaces and linear functional equations, *Proc. London Math. Soc.*, **1** (3) (1951), 327—384.
5. Formulae of Fredholm type for compact linear operations on a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.*, **3** (3) (1953), 368—377.
6. Operators with a Fredholm theory, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 318—326.

Рейто (Rejto P. A.), см. также Конлей и Фридрихс
1. On gentle perturbations, I, II.
   I. *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 279—303.
   II. Ibid., **17** (1964), 257—292.
2. On gentle perturbations. Perturbation theory and its application in quantum mechanics, Wiley, New York, 1966, pp. 57—95.
3. On partly gentle perturbations, I—III.
   I. *J. Math. Anal. Appl.*, **17** (1967), 435—462.
   II. Ibid., **20** (1967), 145—187.
   III. Ibid., **27** (1969), 21—67.

Реллих (Rellich F.)
2. Störungstheorie der Spectralzerlegung, I—V.
   I. *Math. Ann.*, **113** (1936), 600—619.
   II. Ibid., **113** (1936), 677—685.
   III. Ibid., **116** (1939), 555—570.
   IV. Ibid., **117** (1940—1941), 356—382.
   V. Ibid., **118** (1941—1943), 462—484.

Ривьер (Riviere N.), см. Литтман

Ридл (Riedl J.)

1. Partially ordered locally convex vector spaces and expensions of positive continuous linear mappings, *Math. Ann.*, **157** (1964), 95—124.

Рингроуз (Ringrose J. R.)

1. Precompact linear operators in locally convex spaces, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53** (1957), 581—591.
2. Operators of Volterra type, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 418—424.
3. On well-bounded operators, I, II.
   I. *J. Austral. Math. Soc.*, **1** (1959/60), 334—343.
   II. *Proc. London Math. Soc.*, **13** (3) (1963), 613—638.
4. Super-diagonal forms for compact linear operators, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (3) (1962), 367—384.
5. On the triangular representation of integral operators, *Proc. London Math. Soc.*, **12** (3) (1962), 385—399.
6. On the resolvent and the principal vectors of a compact linear operator, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60** (1964), 525—531.

Рисс (Riesz F.)

21. Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. Szeged*, **7** (1935), 147—159.

Рисс и Секефальви-Надь (Riesz F. and Sz.-Nagy B.)

1. Leçons d'analyse fonctionelle, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. (Русский перевод: Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.)

Робертсон А. и Робертсон В. (Robertson A. P. and Robertson W. J.)

1. Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, London, 1963. (Русский перевод: Робертсон А. и Робертсон В. Дж., Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1967.)

Робинсон (Robinson A.), см. Бернштейн

Ровняк (Rovnyak J.), см. де Бранджес и Пинкус

Розенблюм (Rosenblum M.)

1. On the operator equation $BX - XA = Q$, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 263—270.
2. Perturbations of the continuous spectrum and unitary equivalence, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 997—1010. (Русский перевод: сб. *Математика*, 3:3 (1959), 57—68.)
3. On a theorem of Fuglede and Putmam, *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 376—377.
4. A spectral theory for self-adjoint singular integral operators, *Amer. J. Math.*, **88** (1966), 314—328.

Розенталь А. (Rosenthal A.), см. Гартогс

Розенталь П. (Rosenthal P.), см. Криммине

Ролевич (Rolewicz S.), см. Пшеворска-Ролевич

Рота (Rota G.-C.)

1. Note on the invariant subspaces of linear operators, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **8** (2) (1959), 182—184.
2. Spectral theory of smoothing operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **46** (1960), 863—868.
3. On the representation of averaging operators, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **30** (1960), 52—64.
4. On models for linear operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 469—472.
5. On the eigenvalues of positive operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 556—558; addend., **68** (1962), 49.
6. Reynolds operators, Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. XVI, Amer. Math. Soc., 1964, pp. 70—83.

7. Baxter algebras and combinatorial identities, I, II.
I. *Bull. Amer. Math. Sci.*, **75** (1969), 325—329.
II. Ibid. (1969), 330—334.

Рота и Стренг (Rota G.-C. and Strang W. G.)
1. A note on the spectral radius, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. **A63** (1960), 379—381.

Рофе-Бекетов Ф. С., см. также Марченко
1. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях, *Матем. сб.*, **51**:3 (1960), 293—342.

Рутман М. А., см. Крейн М. Г.

Савасима (Sawashima I.), см. также Нииро
1. Some counterexamples in the theory of positive operators, *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo*, **14** (1964), 181—182.
2. On spectral properties of some positive operators, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **15** (1964), 53—64.
3. On spectral properties of positive irreducible operators in $C(X)$ and a problem of H. H. Schaefer, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **17** (1966), 1—15.

Саймон (Simon A. B.), см. Ионеску

Сайн (Sine R. C.)
1. Spectral decomposition of a class of operators, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 333—352.

Сайто и Иосино (Saitô T. and Yoshino T.)
1. Note on the canonical decompositions of contraction, *Tôhoku Math. J.*, **16** (2) (1964), 309—312.
2. On a conjecture of Berberian, *Tôhoku Math. J.*, **17** (2) (1965), 147—149.

Салехи (Salehi H.)
1. A transformation theorem on spectral measures, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 610—613.

Сассер (Sasser D. W.)
1. Quasi-positive operators, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 1029—1037.

Сафар (Saphar P.)
1. Sur les sous-espaces invariants d'un opérateur linéaire continu dans un espace vectoriel topologique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **250** (1960), 1165—1166.
2. Sur le spectre d'un opérateur linéaire continu dans un espace de Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **255** (1962), 3107—3108.
3. Sur quelques propriétés d'un opérateur linéaire continu dans un espace vectoriel topologique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **254** (1962), 3946—3948.
4. Calcul fonctionnel et sous-espaces stables pour une applications linéaire continue dans un espace de Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 6055—6057.
5. Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 363—384.
6. Sur les applications linéaires dans un espace de Banach, I, II.
I. *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964), 363—384.
II. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **82** (3) (1965), 205—240.
7. Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **261** (1965), 867—870.
8. Applications à puissance nucléaire et applications de Hilbert-Schmidt dans les espaces de Banach, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **83** (3) (1966), 113—151.

Сафферн (Saffern W. W.)
1. Subscalar operators, Dissertation, Columbia Univ., 1962.

Сахнович Л. А.
1. О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду и обратных задачах, *ИАН СССР*, сер. матем., **21** (1957), 235—262.
2. Приведение одного несамосопряженного оператора с непрерывным спектром к диагональному виду, *УМН*, **13**:4 (1958), 193—196.
3. Приведение несамосопряженных операторов с непрерывным спектром к диагональному виду, *Матем. сб.*, **44**:4 (1958), 509—548.
4. О приведении несамосопряженных операторов к треугольному виду, *Изв. вузов*, Математика, **1** (1959), 180—186.
5. Исследование «треугольной модели» несамосопряженных операторов, *Изв. вузов*, Математика, **4** (1959), 141—149.
6. Спектральный анализ вольтерровских операторов, заданных в пространстве вектор-функции $L_m^2[0, l]$, *УМЖ*, **16**:2 (1964), 259—268.

Себаштьян-и-Сильва (Sebastião e Silva J.)
5. La définition de spectre d'un opérateur et les opérateurs à spectre élémentaire non borné, Colloque sur l'Analyse Fonctionelle, Louvain, 1960, Librairie Universitaire, Louvain, 1961, pp. 47—50.
6. Sur le calcul symbolic d'opérateurs permutable, à spectre vide ou non borné, *Ann. Math. Pure Appl.*, **58** (4) (1962), 219—275. (Русский перевод: сб. *Математика*, **8**:3 (1964), 36—79.)

Сейрасон (Sarason D.)
1. On spectral sets having connected complement, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **26** (1965), 289—299.
2. A remark on the Volterra operator, *J. Math. Anal. Appl.*, **12** (1965), 244—246.
3. Invariant subspaces and unstarred operator algebras, *Pacific J. Math.*, **17** (1966), 511—517.

Секефальви-Надь (Sz.-Nagy B.), см. также Рисс Ф.
3. Spectraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Räumes, Ergebnisse der Math., V 5, J. Springer, Berlin, 1942. Reprinted Edwards Bros., Ann. Arbor, Mich., 1947.
7. On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **11** (1947), 152—157.
13. On the stability of the index of unbounded linear transformations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **3** (1952), 49—52. (Russian summary.)
16. Contributions en Hongrie à la théorie spectrale des transformations linéaires, *Czech. Math. J.*, **6** (81) (1956), 166—176.
17. Spectral sets and normal dilations of operators, Proc. Internat. Congress Math., 1958, Cambridge Univ. Press, New York, 1960, pp. 412—422.
18. On Schäffer's construction of unitary dilations, *Ann. Univ. Sci. Budapest*, Eötvös Sect. Math., **3—4** (1960/61), 343—346.
19. Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn S. Brehmer, *Acta Sci. Math. Szeged*, **22** (1961), 112—114.
20. Un calcul fonctionnel pour les opérateurs linéaires de l'espace hilbertien et certaines de applications, *Studia Math.* (Ser. Specjalna) Zeszyt., (1963), 119—127.
21. Sur les contractions de l'espace de Hilbert, I, II.
   I. *Acta Math. Szeged*, **15** (1953), 87—92.
   II. Ibid., **18** (1957), 1—14.
22. The «outer functions» and their role in functional calculus, Proc Internat. Congress Mathematicians, Stockholm, 1962, Inst. Mittag Leffler, Djursholm, 1963, pp. 421—425.

Секефальви-Надь и Фойаш (Sz.-Nagy B. and Foiaş C)
1. Sur les contractions de l'espace de Hilbert, III—XII.
   III. *Acta Sci. Math. Szeged*, **19** (1958), 26—45.
   IV. Ibid., **21** (1960), 251—259.
   V. Translations bilatérales, ibid., **23** (1962), 106—129.

VI. Calcul fonctionnel, ibid., **23** (1962), 130—167.
VII. Triangulations canoniques. Fonction minimum, ibid., **25** (1964), 12—37.
VIII. Fonction caractéristiques. Modèles fonctionnels, ibid., **25** (1964), 38—71.
IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, ibid., **25** (1964), 283—316.
X. Contractions similaires à des transformations unitaires, ibid., **26** (1965), 79—91.
XI. Transformations unicellulaires, ibid., **26** (1965), 301—324. Errata, ibid., **27** (1966), 265.
XII. ibid., **27** (1966), 27—33.
2. Remark to the preceding paper of J. Feldman, *Acta Sci. Math. Szeged*, **23** (1962), 272—273.
3. Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3236—3238.
4. Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3413—3415.
5. Une caractérisation des sous-espaces invariantes pour une contraction de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 3426—3429.
6. Quasi-similitude des opérateurs et sous-espaces invariants, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **261** (1965), 3938—3940.
7. Décomposition spectrale des contractions presque unitaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **262** (1966), 440—442.
8. Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de la fonction caractéristique, *Acta Sci. Math. Szeged*, **28** (1967), 201—212.
9. Echelles continues de sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math. Szeged*, **28** (1967), 213—220.
10. Analyse harmoniques des opérateurs de l'espace de Hilbert, Akad. Kaidó, Budapest, 1967.
11. Commutants de certains opérateurs, *Acta Sci. Math. Szeged*, **29** (1968), 1—17.
12. On certain classes of power bounded operators in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **27** (1966), 17—25.

Сибуя (Sibuya Y.), см. Фукухара

Сигал (Segal I. E.)
1. Decompositions of operator algebras, I, II, Memoirs Amer. Math. Soc., no. 9, 1951.

Сигалов А. Г.
1. Новый алгоритм в теории возмущений непрерывного спектра, *ДАН СССР*, **158**:1 (1964), 49—52.
2. Интегральные возмущения, *Сиб. матем. ж.*, **7**:2 (1966), 373—408.

Сидзута (Shizuta Y.)
1. Eigenfunction expansions associated with the operator $-\Delta$ in the exterior domain, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 656—660.

Сикорский (Sikorski R.)
1. On multiplication of determinants in Banach spaces, *Bull. Acad. Polon Sci. Cl.* III, **1** (1953), 219—221.
2. On Leżański's determinants of linear equations in Banach spaces, *Studia Math.*, **14** (1953), 24—48.
3. On determinants of Leżański and Ruston, *Studia Math.*, **16** (1957), 99—112.
4. Determinant systems, *Studia Math.*, **18** (1959), 187—189.
5. On Leżański endomorphisms, *Studia Math.*, **18** (1959), 187—189.
6. Remarks on Leżanscki's determinants, *Studia Math.*, **20** (1961), 145—161.
7. On the Carleman determinants, *Studia Math.*, **20** (1961), 327—346.

8. The determinant theory in Banach spaces, *Colloq. Math.*, **8** (1961). 141—198.
9. Determinants in Banach spaces, *Studia Math.* (Ser. Specjalna), Zeszyt., **1** (1963), 111—116.

Сили (Seeley R. T.)
1. The index of elliptic systems of singular integral operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **7** (1963), 289—309.

Силлс (Sills W. H.)
1. On absolutely continuous functions and the well-bounded operator, *Pacific J. Math.*, **17** (1966), 349—366.

Сильверман и Йен (Silverman R. J. and Yen T.)
1. Characteristic functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 471—477.

Симпсон (Simpson J. E.)
1. On spectral measures and spectral operators, Dissertation, Yale Univ., 1961.
2. Nilpotency and spectral operators, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 665—672.
3. On limits of scalar operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **122** (1966), 163—176.

Сингбал-Ведак (Singbal-Vedak K.)
1. A note on semigroups of operators on a locally convex space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 696—702.

Сираиси (Shiraishi R.), см. Торо

Скрогс (Scroggs J. E.)
1. Invariant subspaces of a normal operator, *Duke Math. J.*, **26** (1959), 95—111.

Смарт (Smart D. R.)
1. Eigenfunction expansions in L^p and C, *Illinois J. Math.*, **3** (1959), 82—97.
2. Conditionally convergent spectral expansions, *J. Austral. Math. Soc.*, **1** (1959/60), 319—333.
3. Some examples of spectral operators, *Illinois J. Math.*, **11** (1967), 603—607.

Смит (Smith K. T.), см. Ароншайн

Смитис (Smithies F.), см. также Бернау
1. The Fredholm theory of integral equations, *Duke Math. J.*, **8** (1941), 107—130.

Спитцер (Spitzer F.)
1. A combinatorial lemma and its applications to probability, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), 323—337.

Сринивасан (Srinivasan T. P.), см. также Хасуми
1. Simply invariant subspaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 706—709.
2. Doubly invariant subspaces, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 701—707.

Станкевич И. В., см. также Гехтман
1. К теории возмущения непрерывного спектра, *ДАН СССР*, **144**:2 (1962), 279—282.
2. О линейном подобии некоторых несамосопряженных операторов и об асимптотике при $t \to \infty$ решения нестационарного уравнения Шредингера, *Матем. сб.*, **69**:2 (1966), 161—207.

Стеклов В. А.
1. Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions définies par des équations différentielles linéaires du deuxième ordre, et leurs applications au problème du développement d'une function arbitraire en séries procédant suivant les dites fonctions, Харьков, Сообщения матем. об-ва (2), **10** (2—6) (1907—1909), 97—199.

Стемпфли (Stampfli J. G.), см. также Маккарти
1. Roots of scalar operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 796—798.
2. Hyponormal operators, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1435—1458.

3. Sums of projections, *Duke Math. J.*, **31** (1964), 455—461.
4. Hyponormal operators and spectral density, *Trans. Amer. Math. Soc*, **117** (1965), 469—476. Errata, ibid., **115** (sic) (1965), 550.
5. Perturbations of the shift, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 345—347.
6. Extreme points of the numerical range of a hyponormal operator, *Michigan Math. J.*, **13** (1966), 87—89.
7. Analytic extensions and spectral localization, *J. Math. Mech.*, **16** (1966), 287—296.
8. Normality and the numerical range of an operator, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 1021—1022.
9. Minimal range theorems for operators with thin spectra, *Pacific J. Math.*, **23** (1967), 601—612.
10. A local spectral theory for operators, *J. Func. Anal.*, **4** (1969), 1—10.
11. Adjoint abelian operators on Banach space, *Canadian J. Math.*, **21** (1969), 505—512.
12. A local spectral theory for operators, III, Resolvents, spectral sets, and similarity (unpublished).

Стеценко В. Я., см. также Бахтин, Есаян и Забрейко
1. Об оценке спектра некоторых классов линейных операторов, *ДАН СССР*, **157**:5 (1964), 1054—1057.

Стренг (Strang W. G.), см. также Рота

Судзуки (Suzuki N.)
1. On the spectral decomposition of dissipative operators, *Proc. Japan Acad.*, **42** (1966), 577—582.
2. The algebraic structure of non self-adjoint operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **27** (1966), 173—184.

Сюкью (Suciu I.), см. также Фойаш
1. Dilatable spectral representations of a commutative Banach algebra, *Stud. Cerc. Mat.*, **16** (1964), 1211—1220.

Тамаркин (Tamarkin J. D.)
2. Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **24** (1912), 345—382.
3. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in a series of fundamental functions, *Math. Zeit.*, **27** (1927), 1—54.

Тейлор А. (Taylor A. E.), см. также Дерр, Гиндлер и Хальберг
10. Analysis in complex Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 652—669.
11. Spectral theory of closed distributive operators, *Acta Math.*, **84** (1951), 189—224.
15. Mittag-Leffler expansions and spectral theory, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1049—1066.
16. Spectral theory and Mittag-Leffler type expansions of the resolvent, Proc. Int. Symposium on Linear Spaces, Jerusalem, 1960, pp. 426—440.
17. The minimum modulus of a linear operator, and its use for estimates in spectral theory, *Studia Math.* (Ser. Specjalna), Zeszyt I (1963), 131—132.
18. Theorems on ascent, descent, nullity and defect of linear operators, *Math. Ann.*, **163** (1966), 18—49.

Телеман (Teleman S.)
1. On the relativization of set functions, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13** (1968), 683—689.

Тёрнер (Turner R. E. L.)
1. Perturbation of compact spectral operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 519—541.

2. Perturbation of ordinary differential operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **13** (1966), 447—457.

Тильман (Tillman H. G.)

1. Vector-valued distributions and the spectral theorem for self-adjoint operators in Hilbert space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 67—71.
2. Eine Erweiterung des Funktionalkalküls für lineare Operatoren, *Math. Ann.*, **151** (1963), 424—430.
3. Darstellung vektorwertigen Distributionen durch holomorphe Funktionen, *Math. Ann.*, **151** (1963), 286—295.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.)

16. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Oxford Univ. Press, London, 1946. (Русский перевод: Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями 2-го порядка, ч. I, ИЛ, М., 1960; ч. II, ИЛ, М., 1961.)

Того и Сираиси (Tôgô S. and Shiraishi R.)

1. Note on F-operators in locally convex spaces, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A-I Math., **29** (1965), 243—251.

Томпсон (Thompson A. C.)

1. A spectral theorem for positive operators, *J. London Math. Soc.*, **44** (1969), 485—495.

Томюк (Tomiuk B. J.), см. Бонсол

Торп (Thorp E. O.), см. Гольдберг

Тоу (Thoe D.)

1. Spectral theory for the wave equation with a potential term, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **22** (1966), 364—406.

Трев (Treves F.)

1. Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, New York, 1967.

Тремпас (Trampus A.)

1. A spectral mapping theorem for functions of two commuting linear operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 893—895.

Уайлдер (Wilder C. E.)

1. Expansion problems of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **18** (1917), 415—442.
2. Problems in the theory of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **19** (1918), 157—186.

Уайтли (Whitley R. J.)

1. Strictly singular operators and their conjugates, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **113** (1964), 252—261.
2. The spectral theorem for a normal operator, *Amer. Math. Monthly*, **75** (1968), 856—861.

Уолш (Walsh B. J.), см. Шефер

1. Banach algebras of scalar type elements, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 1167—1170.
2. Structure of spectral measures on locally convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120** (1965), 295—326.
3. Spectral decomposition of quasi-Montel spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 1267—1271.

Уэрмер (Wermer J.)

1. The existence of invariant subspaces, *Duke Math. J.*, **19** (1952), 615—622.
2. Invariant subspaces of bounded operators, Proc. XII Scand Math. Congress Lund, 1953.
3. Commuting spectral operators on Hilbert space, *Pacific J. Math*, **4** (1954), 355—361.

4. On invariant subspaces of normal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 270—277.
7. On a class of normal rings, *Arkiv. för Mat.*, **2** (1953), 537—551.

Фавелла (Favella L.), см. Бьянки

Фаддеев Л. Д., см. также Ладыженская
1. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра, Тр. МИАН СССР им. Стеклова, **73** (1964), 292—313.
2. Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием, *ДАН СССР*, **138**:3 (1961), 565—567.
3. Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц и задача рассеяния, *ДАН СССР*, **145**:2 (1962), 301—304.
4. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, Тр. МИАН СССР им. Стеклова, **69** (1963), 1—122.

Фань Ку (Fan Ky)
6. Invariant subspaces of certain linear operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 773—777. (Русский перевод: сб. *Математика*, **9**:4 (1965), 128—132.)

Фельдзамен (Feldzamen A. N.)
1. A generalized Weyl characteristic, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959), 79—83.
2. Semi-similarity invariants for spectral operators on Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 277—324.

Фельдман (Feldman J.)
1. On the functional calculus of an operator measure, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **23** (1962), 268—271.

Фелпс (Phelps R. R.), см. также Бонсол
1. Extreme positive operators and homomorphisms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 265—274.

Фиксман (Fixman U.)
1. Problems in spectral operators, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 1029—1051.

Филлипс (Phillips R. S.), см. Хилле и Лакс

Фишман К. М. и Валицкий Ю. Н.
1. О применимости теории Фредгольма к некоторым линейным топологическим пространствам, *ДАН СССР*, **117** (1957), 943—946.

Фогель (Foguel S. R.)
1. Sums and products of commuting spectral operators, *Ark. Mat.*, **3** (1958), 449—461.
2. The relations between a spectral operator and its scalar part, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 51—65.
3. Normal operators of finite multiplicity, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 297-313.
4. A perturbation theorem for scalar operators, *Comm. 'Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 293-295.
5. Boolean algebras of projections of finite multiplicity, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 681—693.
6. Finite dimensional perturbations in Banach spaces, *Amer. J. Math.*, **82** (1960), 260—270.
7. Computations of the multiplicity function, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 539—546.
8. On a paper of A. Feldzamen, *Israel J. Math.*, **1** (1963), 133—138.
9. Powers of a contraction in Hilbert space, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 551—562.
10. A counterexample to a problem of Sz.-Nagy, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 788—790.
11. Weak limits of powers of a contraction in Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 659—661.

12. On spectrality criterion for operators on a direct sum of Hilbert spaces, *Israel J. Math.*, **3** (1965), 248—250.

Фойаш (Foiaş C.), см. также Коложоара, Кукулеску и Секефальви-Надь

1. La mesure harmonique-spectrale et théorie spectrale des opérateurs généraux d'un espace de Hilbert, *Bull. Soc. Math. France*, **85** (1957), 263—282.
2. Sur certains théorèmes de J. von Neumann concernant les ensembles spectraux, *Acta Sci. Math. Szeged*, **18** (1957), 15—20.
3. On strongly continuous semigroups of spectral operators in Hilbert space, *Acta Sci. Math. Szeged*, **19** (1958), 188—191.
4. Décompositions intégrales des familles spectrales et semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien, *Acta Sci. Math. Szeged*, **20** (1959), 117—155.
5. Sur la décomposition intégrale des familles semi-spectrales en opérateure qui sortent de l'espace de Hilbert, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 904—906.
6. Sur la décomposition spectrale en opérateurs propres des opérateurs linéaires dans les espaces nucléaires, *C. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 1105—1108.
7. Certaines applications des ensembles spectraux. I. Mesure harmonique-spectrale, *Acad. R. P. Romîne Stud. Cerc. Mat.*, **10** (1959), 365—401.
8. On Hille's spectral theory and operational calculus for semi-groups of operators in Hilbert space, *Compositio Math.*, **14** (1959), 71—73.
9. Une application des distributions vectorielles à la théorie spectrale, *Bull. Sci. Math.*, **84** (2) (1960), 147—158.
10. Relation entre opérateurs spectraux et scalaires généralisés, *Com. Acad. R. P. Romîne*, **11** (1961), 1427—1429.
11. Relaţia dintre operatori spectrali şi scalari generalizaţi, *Com. Acad. R.P. Romîne*, **11** (1961), 1427—1430.
12. Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach space, *Arch. Math.*, **14** (1963), 341—349.
13. Asupra unei probleme de teorie spectrală, *Stud. Cerc. Mat.*, **17** (1965), 921—923.
14. Modèles fonctionells, liason entre les théories de la prédiction, de la fonction caractéristique et de la dilation unitaire, Deuxième Colloq. l'Analyse Fonctionnelle, Liège, 1964, pp. 63—76.
15. Sur les mesures spectrales qui interviennent dans la théorie ergodique, *J. Math. Mech.*, **13** (1964), 639—658.
16. Măsuri spectrale şi semispectrale, *Stud. Cerc. Mat.*, **18** (1966), 7—56.
17. Spectral capacities and decomposable operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **13** (1968), 1539—1545.
18. Décompositions en opérateurs et vecteurs propres, I, II.
   I. Études de ces décompositions et leurs rapports avec les prolonge ments des opérateurs, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **7** (1962), 241—282 [errata ibid., **9** (1964), 805—809].
   II. Éléments de théorie spectrale dans les espaces nucléaires, ibid., **7** (1962), 571—602.

Фойаш и Геер (Foiaş C. and Gehér L.)

1. Über die Weylsche Vertauschungsrelation, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), 97—102.

Фойаш и Лионс (Foiaş C. and Lions J. L.)

1. Sur certains théorèmes d'interpolation, *Acta Sci. Math. Szeged*, **22** (1961), 269—282.

Фойаш и Мляк (Foiaş C. and Mlak W.)

1. The extended spectrum of completely non-unitary contractions and the spectral mapping theorem, *Studia Math.*, **26** (1966), 239—245.

Ф о й а ш и С ю к ь ю (F o i a ş C. and S u c i u I.)
1. Szegö-measures and spectral theory in Hilbert spaces, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **11** (1966), 147—159.
2. On operator representation of log-modular algebras, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **16** (1968), 505—509.

Ф о р д (F o r d G. C.), см. М и ш о у

Ф р и д м а н и М и ш о у (F r i e d m a n B. and M i s h o e L. I.)
1. Eigenfunction expansions associated with a non-self adjoint differential equation, *Pacific J. Math.*, **5** (1956), 249—270.

Ф р и д р и х с (F r i e d r i c h s K. O.)
2. On the perturbation of continuous spectra, *Comm. Pure Appl. Math.*, **1** (1948), 361—406.
17. Perturbation of spectra in Hilbert space, Lectures in Applied Math., vol. III, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.
18. Spectral perturbation phenomena, Perturbation Theory and its Applications in Quantum Mechanics, Wiley, New York, 1966.

Ф р и д р и х с и Р е й т о (F r i e d r i c h s K. O. and R e j t o P. A.)
1. On a perturbation through which a descrete spectrum becomes continuous, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 219—235.

Ф р и м а н Дж. (F r e e m a n J. M.)
1. The perturbation of some Volterra operators, Dissertation, Mass. Inst. of Tech., 1963.
2. Perturbations of the shift operator, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114** (1965), 251—260.
3. Volterra operators similar to $J\colon f \to \int_0^x f(t)\,dt$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **116** (1965), 181—192.

Ф р и м а н Р. (F r e e m a n R. S.)
1. Closed operators and their adjoints associated with elliptic differential operators, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 71—97.

Ф у г л и д (F u g l e d e B.)
1. A commutativity theorem for normal operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **36** (1950), 35—40.

Ф у к у х а р а и С и б у я (H u k u h a r a M. and S i b u y a Y.)
1. Sur l'endomorphisme complètement continu, *Proc. Japan Acad.*, **31** (1955), 595—599.
2. Théorie des endomorphismes complètement continus, I, II.
   I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I, **7** (1957), 391—405.
   II. Ibid., **7** (1958), 511—525.

Х а а р (H a a r A.)
3. Zur Theorie der orthogonalen Funktionsysteme, I, II.
   I. *Math. Ann.*, **69** (1910), 331—371.
   II. Ibid., **71** (1911), 38—53.

Х а а т и (H a a h t i H.)
1. Zur Verallgemeinerung des Spur-Operators, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. AI, No. 369 (1965).

Х а д е л е р (H a d e l e r K.-P.)
1. Оценка для спектра нормальных операторов, *ДАН СССР*, **157**, № 2 (1964), 284—287.
2. О спектре нормальных операторов и их возмущений, *ДАН СССР*, **158**, № 5 (1964), 1042—1043.

Х а л м о ш (H a l m o s P. R.)
3. Commutativity and spectral properties of normal operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12**, Part B (1950), 153—156.
6. Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

11. Shifts on Hilbert spaces, *J. Reine Angew. Math.*, **208** (1961), 102—112.
12. What does the spectral theorem say? *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 241—247.
13. A glimpse into Hilbert space, Lectures on Modern Mathematics, Vol. 1, Wiley, New York, 1963, pp. 1—22.
14. Numerical ranges and normal dilations, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25** (1964), 1—5.
15. On Foguel's answer to Nagy's question, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 791—793.
16. Invariant subspaces of polynomially compact operators, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 433—438.
17. A Hilbert space problem book, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1967. (Русский перевод: Гильбертово пространство в задачах, «Мир», М., 1970.)

Халмош и Люмер (Halmos P. R. and Lumer G.)
1. Square roots of operators, II, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 589—595.

Халмош, Люмер и Шеффер (Halmos P. R., Lumer G. and Schäffer J. J.)
1. Square roots of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 142—149.

Халмош и Маклафлин (Halmos P. R. and McLaughlin J. E.)
1. Partial isometries, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 585—596.

Хальберг (Halberg C. J. A., Jr.)
1. The spectra of bounded linear operators on the sequence spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 728—732.
2. Semigroups of matrices defining linked oprerators with different spectra, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 1187—1191.

Хальберг и Тейлор А. (Halberg C. J. A., Jr., and Taylor A. E.)
1. On the spectra of linked operators, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 283—290.

Харазов Д. Ф.
4. К спектральной теории полуограниченных операторов, Тр. Матем. ин-та АН ГрузССР, **26** (1959), 153—170.
5. Спектральная теория некоторых линейных операторов, мероморфно зависящих от параметра, *Studia Math.*, **20**:1 (1961), 19—45.
6. О спектре вполне непрерывных операторов, аналитически зависящих от параметра, в линейных топологических пространствах, *Acta Sci. Math. Szeged*, **23**:1 — 2 (1962), 38—45.
7. К вопросу об отделимости собственных значений операторов с дискретным спектром, *Mathematica* (Cluj), **4**:2 (1964), 253—260.
8. О теоремах типа сравнения для собственных значений некоторых операторов с дискретным спектром, Тр. Матем. ин-та АН ГрузССР, **29** (1964), 219—227.

Хасегава (Hasegawa M.)
1. On the convergence of resolvents of operators, *Pacific J. Math.*, **21** (1967), 35—47.

Хасуми и Сринивасан (Hasumi M. and Srinivasan T. P.)
1. Doubly invariant subspaces, II, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 525—535.
2. Invariant subspaces of continuous functions, *Canadian J. Math.*, **17** (1965), 643—651.

Хейн (Heyn E.)
1. Die Differentialgleihung $dT/dt = P(t)T$ für Operatorfunktionen, *Math. Nachrichten*, **24** (1962), 281—330.
2. Skalare Spektraloperatoren im reflexive Banachraum, *Math. Nachrichten*, **31** (1966), 169—177.

Хек (Hack M. N.)
1. Wave operators in multichannel scattering, *Nuovo Cimento*, **13** (1959), 231—236.

Хельвиг (Hellwig G.)
1. Differentialoperatoren der mathematischen Physik. Eine Einführung, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

Хельсон (Helson H.)
1. Lectures on invariant subspaces, Academic Press, New York-London, 1964.

Хельсон и Лоуденслагер (Helson H. and Lowdenslager D.)
1. Invariant subspaces, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem, 1960, pp. 251—262.

Хемпель (Hempel P.)
1. Einschliessungsaussagen für das Spectrum selbstadjungierter und normaler Transformationen im Hilbert-Raum durch Abschätzung der Norm der Resolvente, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **13** (1963), 147—156.

Хёрмандер (Hörmander L.)
1. Translation invariant operators, *Acta Math.*, **104** (1960), 93—139. (Русский перевод: Хёрмандер Л., Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, ИЛ, М., 1962.)
2. Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin, 1963. (Русский перевод: Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.)

Хестенес (Hestenes M. R.)
1. Relative self-adjoint operators in Hilbert space, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1315—1357.

Хёэг-Крон (Høegh-Krohn J. B.)
1. Partly gentle perturbation with application to perturbation by annihilation-creation operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **56** (1967), 2187—2192.

Хилле (Hille E.)
6. On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra, *Math. Ann.*, **136** (1958), 46—57.
7. Some aspects of Cauchy's problem, Proc. Intern. Cong. Math. 1954, Amsterdam, **3** (1956), 109—116.

Хилле и Филлипс (Hille E. and Phillips R. S.)
1. Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **31**, 1957. (Русский перевод: Хилле Э. и Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.)

Хиршфельд (Hirschfeld R. A.)
1. Expansion in eigenfunctionals, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, Ser. **A68** (1965), 513—520.

Хойзер (Heuser H.)
1. Über die Iteration Rieszscher Operatoren, *Arch. Math.*, **9** (1958), 202—210.
2. Zür Eigenwerttheorie einer Klasse Rieszscher Operatoren, *Arch. Math.*, **14** (1963), 39—46.
3. Über Eigenwerte and Eigenlösungen symmetrisierbarer finiter Operatoren, *Arch. Math.*, **10** (1959), 12—20.

Хопф (Hopf E.)
1. Ergodentheorie, Ergebnisse der Math., vol. 2, J. Springer, Berlin, 1937. Reprinted by Chersea Publ. Co., New York, 1948. (Русский перевод: Хопф Е., Эргодическая теория, *УМН*, **4**, вып. 1 (1949).)
4. Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Univ. Press, 1934.

Хьюиг (Huige G. E.)
1. The spectral theory of some non-selfadjoint differential operators, *Comm. Pure Appl. Math*, **21** (1968), 25—49.

Цафрири (Tzafriri L.), см. также Маккарти
1. The connection between normalizable and spectral operators, *Israel J. Math.*, **3** (1965), 75—80.
2. On multiplicity theory for Boolean algebras of projections, *Israel J. Math.*, **4** (1966), 217—224.
3. On perturbation theory for spectral operators, *Israel J. Math.*, **4** (1966), 62—64.
4. Operators commuting with Boolean algebras of projections of finite multiplicity, *Pacific J. Math.*, **20** (1967), 571—587.
5. Operators commuting with Boolean algebras of projections of infinite multiplicity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **128** (1967), 164—175.
6. Quasi-similarity for spectral operators on Banach spaces, *Pacific J. Math.*, **25** (1968), 197—217.

Цекановский Э. Р.
1. О модельных элементах несамосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **142**:5 (1962), 1043—1046.

Циннес (Zinnes I. I.), см. Яух

Чжун Кай-Лай (Chun Kai Lai)
1. On the exponential formulas of semi-group theory, *Math. Scand.*, **10** (1962), 153—162.

Чиорэнеску (Ciorănescu I.)
1. Sous-espaces invariants dans les espaces localement convexes, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **16** (1968), 721—725.

Чоу (Chow T. R.)
1. A spectral theory for direct integrals of operators, *Math. Ann.*, **188** (1970), 285—303.

Чумакин М. Е.
1. Об обобщенных резольвентах изометрического оператора, *ДАН СССР*, **154**:4 (1964), 791—794.

Шаттен (Schatten R.)
2. Norm ideals of completely continuous operators, Ergebnisse der Math. N.F., Heft 27, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1960.

Шварц А. С.
1. К гомотопической топологии банаховых пространств, *ДАН СССР*, **154**:1 (1964), 61—63.

Шварц Дж. Т. (Schwartz J. T.), см. также Маккарти
2. Perturbation of spectral operators, and applications, I, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 415—458.
3. Two perturbation formulae, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 371—376.
4. Some non-selfadjoint operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 609—639.
5. Compact positive mappings in Lebesgue spaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 639—705.
6. Subdiagonalization of operators in Hilbert spaces with compact imaginary part, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 159—172.
7. On spectral operators in Hilbert space with compact imaginary part, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 95—97.
8. Some results on the spectra and spectral resolutions of a class of singular integral operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 75—90.
9. Some non-selfadjoint operators, II, A family of operators yielding to Friedrichs' method, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 619—626.

10. *W**-algebras, Gordon and Breach, New York, 1967.

Шварц Л. (Schwartz L.)

6. Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier*, **7** (1957), 1—141.

Шёберт (Sherbert D. B.), см. Перессини

Шет (Sheth I. H.)

1. On hyponormal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 998—1000.

Шефер (Schaefer H. H.), см. также Лоц

1. Positive Transformationen in lokalkonvexen halbgeordneten Vektorräumen, *Math. Ann.*, **129** (1955), 323—329.
2. Über singulare Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen, *Math. Zeit.*, **66** (1956), 147—163.
3. Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume, I — III.
   I. *Math. Ann.*, **135** (1958), 135—141.
   II. Ibid., **138** (1959), 259—286.
   III. Ibid., **141** (1960), 113—142.
4. On nonlinear positive operators, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 847—860.
5. On the Fredholm alternative in locally convex linear spaces, *Studia Math.*, **18** (1959), 229—245.
6. Some spectral properties of positive linear operators, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1009—1019.
7. A new class of spectral operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 154—155.
8. A generalized moment problem, *Math. Ann.*, **146** (1962), 326—330.
9. Über die Additivität von Spectralmassen, *Math. Zeit.*, **79** (1962), 456—459.
10. Spectral measures in locally convex algebras, *Acta Math.*, **107** (1962), 125—173.
11. Convex cones and spectral theory, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, 1963, pp. 451—471.
12. Spektraleigenschaften positiver linearer Operatoren, *Math. Zeit.*, **82** (1963), 303—313.
13. Eine Bemerkung zur Existenz invarianter Teilräume linearer Abbildungen, *Math. Zeit.*, **82** (1963), 90.
14. On the point spectrum of positive operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 56—60.
15. On the role of order structures in spectral theory, Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, Louvain-Paris, 1964.
16. Über das Randspektrum positiver Operatoren, *Math. Ann.*, **162** (1965/66), 289—293.
17. Eine Klasse irreduzibler positiver Operatoren, *Math. Ann.*, **165** (1966), 26—30.
18. Topological vector spaces, Macmillan, New York, 1966. (Русский перевод: Шефер X., Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1971.)
19. Invariant ideals of positive operators in $C(X)$, I, II.
    I. *Illinois J. Math.*, **11** (1967), 703—715.
    II. Ibid., **12** (1968), 525—538.
20. Banach lattices and positive operators, Springer-Verlag (to appear).

Шефер и Уолш (Schaefer H. H. and Walsh B. J.)

1. Spectral operators in spaces of distributions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **68** (1962), 509—511.

Шеффер (Schäffer J. J.), см. также Халмош

3. More about invertible operators without roots, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 213—219.

Шехтер (Schechter M.), см. также Эрколано и Каниэль
1. Invariance of the essential spectrum, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 365—366.
2. On the essential spectrum of an arbitrary operator, I, *J. Math. Anal. Appl.*, **13** (1966), 205—215.

Шмульян Ю. Л., см. Бродский

Шрейбер (Schreiber M.)
2. Unitary dilations of operators, *Duke Math. J.*, **23** (1956), 579—594.
3. A functional calculus for general operators in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 108—118.
4. On the spectrum of a contraction, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 709—713.
5. Absolutely continuous operators, *Duke Math. J.*, **29** (1962), 175—190.
6. Numerical range and spectral sets, *Michigan Math. J.*, **10** (1963), 283—288.
7. Semi-Carleman operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **24** (1963), 82—87.
8. Remark on a paper of Kalisch, *J. Math. Anal. Appl.*, **7** (1963), 62—63.

Штраус А. В.
6. О кратности спектра самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора, *ДАН СССР*, **155:4** (1964), 771—774.

Шуберт (Schubert C.), см. Гольдберг

Эберли (Eberly W. S.)
1. A convergence theorem for bounded operators, *J. London Math. Soc.*, **40** (1965), 533—539.

Эдвардс и Ионеску (Edwards D. A. and Ionescu Tulsea C.)
1. Some remarks on commutative algebras of operators on Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), 541—551.

Эллиот (Elliott J.)
1. The boundary value problems and semi-groups associated with certain integro-differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 300—331.
2. Eigenfunction expansions associated with singular differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 406—425.

Эллис А. (Ellis A. J.)
1. Extreme positive operators, *Quart. J. Math.*, Oxford, Ser. (2), **15** (1964), 342—344.

Эллис Р. (Ellis R. J.)
1. The Fredholm alternative for non-Archimedean fields, *J. London Math. Soc.*, **42** (1967), 701—705.

Эмбри (Embry M. R.)
1. Condition implying normality in Hilbert space, *Pacific J. Math.*, **18** (1966), 457—460.

Энтина С. Б., см. Бирман М. Ш.

Эрколано и Шехтер (Ercolano J. and Schechter M.)
1. Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problem with eigenvalue parameter in boundary conditions, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 83—105.

Этьен Ж. (Etienne J.)
1. Opérateurs scalaires dans un espace linéaire semi-norme, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 325—326 (supplement) (1963), 419—429.

Юд (Yood B.)
2. Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 599—612.

Вврян В. А.
1. О некоторых возмущениях самосопряженных операторов, *ДАН СССР*, **38**:1 (1964), 3—7.

Якубов С. Я.
1. Теория Гильберта — Шмидта для J-симметризуемых операторов, действующих в банаховом пространстве, *ИАН АзССР*, Сер. физ.-матем. и техн. наук, **1** (1961), 39—48.

Яух (Jauch J. M.)
1. Theory of the scattering operator, *Helv. Phys. Acta*, **31** (1958), 127—158.
2. Theory of the scattering operator, II, Multichannel scattering, *Helv. Phys. Acta*, **31** (1958), 661—684.

Яух и Мизра (Jauch J. M. and Misra B.)
1. The spectral representation, *Helv. Phys. Acta*, **38** (1965), 30—52.

Яух и Циннес (Jauch J. M. and Zinnes I. I.)
1. The asymptotic condition for simple scattering systems, *Nuovo Cimento*, **11** (1959), 553—567.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Оглавление

ЧАСТЬ III. **СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и др. просим присылать по адресу: 129820, Москва И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Спектральные операторы

Редактор *Д. Ф. Борисова*
Художник *В. В. Ашмаров*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Н. А. Иовлева*

Сдано в набор 26/XII 1973 г.
Подписано к печати 15/VII 1974 г.
Бумага $60 \times 90^1/_{16}$=20,75 бум. л. 41,50 печ. л.
Уч. изд. л. 42,55 Изд. № 1/7424
Цена 3 р. 19 к. Заказ 040

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Союзполиграфпрома при Государственном
комитете Совета Министров СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9