

POTENTIAL SCATTERING

V. DE ALFARO

and

T. REGGE

University of Turin, Italy

1965

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY

AMSTERDAM

В. ДЕ АЛЬФАРО, Т. РЕДЖЕ

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ

Перевод с английского

А. М. БРОДСКОГО и В. В. ТОЛМАЧЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

Москва, 1966

Настоящая книга, написанная известными итальянскими физиками Витторио де Альфаро и Туллио Редже, посвящена одной из важнейших проблем нерелятивистской квантовой механики — теории потенциального рассеяния, которая лежит в основе описания и интерпретации процессов рассеяния элементарных частиц, ядер, атомов и молекул при высоких и низких энергиях.

В книге подробно изложен метод комплексных угловых моментов, одним из создателей которого является Редже. Изложение теории рассеяния с точки зрения комплексного углового момента, являясь математически наиболее полным и строгим, оказывается в то же время логически наиболее простым из известных в настоящее время.

Книга рассчитана на научных работников — теоретиков и экспериментаторов, занимающихся исследованиями в области физики ядра и элементарных частиц, а также физики атомов и молекул. Она может быть рекомендована также аспирантам и студентам старших курсов университетов и физико-технических вузов, специализирующимся в области теоретической физики, а также всем, кто изучает квантовую механику и ее приложения.

Предисловие переводчиков

Предлагаемая вниманию читателей книга де Альфаро и Редже посвящена главным образом последовательному изложению результатов имевшего место в последние годы быстрого развития формальной нерелятивистской квантовой теории рассеяния. При этом формальной названа та область теории рассеяния, в которой не ищутся количественные решения конкретных физических задач с определенными потенциалами взаимодействия, а лишь устанавливаются основные общие характеристики амплитуд, следующие в основном из их аналитических свойств. К числу таких общих характеристик относятся, в частности, асимптотическое поведение при больших энергиях и больших передаваемых импульсах, пороговое поведение, дисперсионные соотношения и представление Мандельштама, соотношение между связанными состояниями и резонансами; сюда можно также добавить обратную задачу восстановления потенциала по фазам рассеяния.

В последние годы формальная нерелятивистская теория рассеяния привлекла к себе особое внимание в связи с проблемами квантовой теории сильных взаимодействий, где до настоящего времени не удалось найти строгого замкнутого метода расчета, позволяющего хотя бы в принципе полностью описать процесс рассеяния. Даже приближенные подходы теории сильных взаимодействий, не имеющие, как правило, сколь-нибудь строгого обоснования, приводят к таким сложным уравнениям, что общее исследование их наталкивается на почти непреодолимые математические трудности. В то же время в рамках нерелятивистской теории по крайней мере двухчастичное рассеяние можно рассмотреть вполне строго, используя хорошо развитый математический аппарат

теории простых дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа и т. д. В связи с этим были высказаны надежды, что нерелятивистское рассеяние можно рассматривать как некую весьма удобную простейшую модель, позволяющую исследовать существующие методы решения проблем теории поля и найти в ней новые пути. Как и всякий предельный случай, нерелятивистское рассеяние может, конечно, служить для проверки правильности тех или иных гипотез, рассматриваемых в теории сильных взаимодействий, но, однако, сейчас нельзя сказать, в какой степени оправданы неоднократно высказывавшиеся предположения о том, что при этом можно со значительной достоверностью найти новые пути развития теории поля. В частности, в существующей теории нерелятивистского рассеяния никак не учитываются такие важнейшие свойства, как перекрестная симметрия и связь между амплитудами рассеяния с участием различного числа частиц. В этой связи можно понять позицию авторов книги, стремящихся всюду к возможно большей строгости; они не только не касаются собственно релятивистских проблем, но даже стараются не высказывать своего отношения к ставшим уже широко известными идеям о возможности переноса полученных строгих результатов нерелятивистской теории в область высоких энергий, хотя все изложение приспособлено для потребностей указанной области¹⁾). Следует подчеркнуть, что результаты излагаемой в книге теории могут оказаться весьма существенными также для понимания явлений физики низких энергий, в частности для двухчастичных задач, в которых не известен точно вид потенциала взаимодействия, и в задачах, к которым неприменима теория возмущений. Особенно полезным является, например, доказательство существования соотношения между положениями связанных

¹⁾ Различные предположения об использовании теории комплексных угловых моментов в релятивистских задачах в период наибольших надежд на эту теорию изложены в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях» (ИЛ, 1963).

состояний и резонансов, следующее из рассмотрения траекторий полюсов в плоскости комплексного углового момента, получивших название полюсов Редже. При выводе этого соотношения Редже воспользовался математическим аппаратом, применявшимся задолго до него в работах Никольсона, Ватсона, Зоммерфельда и др.

Содержание книги можно разбить на две в известной степени независимые части. В первой из них (гл. 1—9) после изложения используемого математического аппарата и формулировки фундаментального метода Юста подробно исследуется уравнение для парциальных амплитуд и излагаются физические выводы для парциальных и полных амплитуд. При этом авторы применяют методы, близкие к тем, которые применялись в их собственных оригинальных работах, хотя возможны (а подчас и более просты) другие подходы, использованные, например, в цитируемых работах Барута и Цванцигера, Ньютона, Грибова, Брауна, Фивеля, Ли и Сойера и ряда других. Во второй части (гл. 10—13) более конспективно приводятся результаты, получающиеся без применения разложения по парциальным волнам (в их числе дисперсионные соотношения), а также кратко рассматриваются обобщения на случай многоканальных задач и так называемых сингулярных потенциалов. Относительно подробно излагается обратная задача восстановления потенциала.

Основная часть книги посвящена сравнительно простой двухчастичной задаче, важнейшие аспекты которой в результате усилий многочисленных исследователей (почти все они перечислены в историческом обзоре в гл. 1) можно считать достаточно полно понятыми.

Следует отметить, что последовательное и математически строгое изложение современного развития формальной теории нерелятивистского рассеяния в книге де Альфаро и Редже выгодно отличается от других имеющихся в мировой литературе немногочисленных монографий и обзоров, посвященных данному вопросу. Из числа этих монографий следует выделить

книгу Р. Ньютона¹⁾, в которой суммируются в основном работы самого автора. Во многих отношениях близкий круг вопросов рассмотрен также в книге Онеса и Фруассара²⁾, изложение в которой носит, однако, значительно менее строгий характер и рассчитано главным образом на экспериментаторов. Нужно указать также на компилятивный обзор Сасакавы³⁾.

Из сказанного ясно, что перевод книги де Альфаро и Редже вполне целесообразен; основное содержание ее носит по существу классический характер и несомненно должно войти в учебники нерелятивистской квантовой механики.

Можно надеяться, что книга де Альфаро и Редже, которые внесли значительный вклад в развитие нерелятивистской теории рассеяния в последние годы, будет полезной для всех занимающихся теорией рассеяния как при низких, так и высоких энергиях. Особо следует подчеркнуть математическую строгость всех приводимых в книге доказательств как результатов, полученных недавно, так и известных сравнительно давно.

В книге по причинам, разъясненным в предисловии авторов, практически не затрагиваются вопросы, относящиеся к многочастичным задачам с бесконечным числом каналов, таким, как, например, рассеяние частицы на связанном состоянии из двух частиц. В то же время обобщение полученных выводов на многочастичные задачи особенно важно, поскольку даже в нерелятивистской теории, как только мы выходим за рамки двухчастичных проблем, имеющиеся строгие результаты становятся крайне ограниченными, хотя соответствующие эксперименты весьма многочисленны. Целый ряд развитых приближенных методов (импульсное приближение, оптическая модель,

¹⁾ R. G. Newton, *The Complex j -Plane, Complex Angular Momentum*, in *Nonrelativistic Quantum Scattering Theory*, New York — Amsterdam, 1964.

²⁾ R. Omnes, M. Froissart, *Mandelstam Theory and Redge Poles*, New York — Amsterdam, 1962.

³⁾ T. Sasaki, *Progr. Theor. Phys., Suppl. No. 27* (1963).

метод искаженных волн, метод квазичастиц, метод промежуточного состояния и т. п.) дают в ряде случаев хорошие результаты, но границы их применимости остаются еще не вполне ясными, и они не могут служить основой вычислительной схемы, которая позволила бы в общем случае при существовании связанных состояний и резонансов и при возможности процессов обмена частицами последовательно и неограниченно приближаться к истинному решению.

В связи с этим было сочтено целесообразным включить в книгу составленное переводчиками специальное дополнение, где изложены новые математические результаты аналитического исследования многочастичных задач рассеяния. В основу изложения положены весьма содержательные исследования Вейнберга, во многих отношениях аналогичные работам Л. Д. Фаддеева.

При переводе, выполненном с любезно присланной авторами рукописи, были исправлены все замеченные погрешности в формулах. Переводчики считают своим приятным долгом выразить благодарность авторам, которые предоставили возможность ознакомиться с корректурами их книги и прислали для русского издания ряд полезных замечаний.

А. М. Бродский
В. В. Толмачев

Предисловие авторов к русскому изданию

Развитие теории потенциального рассеяния существенным образом опирается на основополагающие исследования советской математической школы, среди которых следует особенно отметить работы Л. Д. Фаддеева, И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана, В. А. Марченко и многих других.

Как нам кажется, рассматриваемая теория является положительным примером творческого сотрудничества физиков и математиков — примером, которому следует чаще подражать в современных научных исследованиях.

Мы считаем большой честью перевод нашей книги на русский язык и надеемся, что дальнейшие переводы научной литературы будут содействовать расширению сотрудничества и углублению взаимопонимания между учеными различных стран.

*В. де Альфаро
Т. Редже*

Предисловие

В основу настоящей книги положены лекции, которые один из авторов впервые прочел в Югославии в Летней школе в Герцеговине еще в 1961 г.; в 1962 г. эти лекции были изданы Летним институтом в Триесте. При написании книги материал этих записей был существенно переработан и дополнен; изменился даже первоначальный план изложения, так что окончательный текст имеет лишь небольшое сходство с первоначальным вариантом. Сохранилась только общая идея книги.

Предлагаемая книга посвящена изложению теории двухчастичного потенциального рассеяния. В ней авторы постарались изложить все наиболее существенные достижения в этом вопросе, начиная от S -матрицы и кончая дисперсионной теорией. В книге совсем не рассматривается рассеяние трех и более частиц. Теория этих вопросов далека от своего завершения, она довольно быстро развивается именно в настоящее время, так что авторы не рискнули излагать ее, ибо книга могла бы тогда устареть в этой части еще до выхода в свет. Особенно много внимания уделено рассмотрению простейшего случая бесспиновых частиц при наличии одного канала, ибо уже здесь, по мнению авторов, проявляются все характерные черты процесса потенциального рассеяния. Приводимые в книге математические доказательства не всегда совпадают с теми, которые были первыми опубликованы для того или иного результата; были отобраны самые простые и строгие доказательства. При этом авторы, конечно, отдавали предпочтение тем методам, которые им самим лучше известны. Правда, иногда оказывалось, что в литературе отсутствует простое и строгое доказательство того или иного ре-

зультата теории. Тогда предпочтение отдавалось лучшему из опубликованных доказательств.

Основные результаты книги относятся к описанию асимптотического поведения амплитуды рассеяния при больших угловых моментах, которое необходимо знать для проведения преобразования Ватсона — Зоммерфельда. Имеющийся у авторов опыт свидетельствует, что прекрасное первоначальное исследование этого вопроса квазиклассическим методом ВКБ неполно и к тому же трудно для понимания. Поэтому в книге приводится изложение более поздних исследований Брауна и др., Жакшича и Лимича, Мартина, Скадрона и др.; изложение других исследований выходит за рамки настоящей книги. Используемый в них математический аппарат существенно отличен от принятого нами.

В последние годы много внимания уделялось приложениям излагаемой теории комплексного углового момента к физике высоких энергий. В этом направлении появились интересные работы. Большинство из них либо изложено, либо по крайней мере резюмировано в предлагаемой книге. Теория явлений при высоких энергиях заслуживает, конечно, специального изложения. В настоящей книге авторы лишь слегка касаются этой теории, ибо материал ее посвящен потенциальному рассеянию и может служить только полезным дополнением к теории сильных взаимодействий.

В заключение авторы хотели бы выразить свою признательность д-ру Унцикеру за предоставление большого количества неопубликованных материалов, д-ру Жакшичу, д-ру Мартину, д-ру Рюэлю и проф. Верде за многочисленные обсуждения и предложения.

Книга написана частично в Институте перспективных исследований (Принстон) при поддержке Национального научного фонда. Авторы благодарны за содействие также руководству и сотрудникам Палмеровской физической лаборатории Принстонского университета.

*В. де Альфаро
Т. Редже*

§ 1. Уравнение Шредингера

Мы будем рассматривать квантовомеханическое описание нерелятивистского потенциального рассеяния двух частиц в случае, когда потенциалы взаимодействия зависят только от расстояния между частицами. При этом мы будем считать частицы бесспиновыми, а потенциалы изотропными. Попытки перехода к описанию более общих случаев не вызвали, как мы считаем, появления каких-либо существенно новых идей.

При сделанных предположениях движение частиц в системе их центра тяжести может быть описано следующим уравнением Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi(\mathbf{x}) + U(x) \Psi(\mathbf{x}) = \mathcal{E} \Psi(\mathbf{x}), \quad (1.1)$$

где \hbar — постоянная Планка, $M = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса, m_1 и m_2 — массы частиц, $U(x)$ — потенциал, \mathbf{x} — относительное расстояние между частицами ($x = |\mathbf{x}|$) и \mathcal{E} — энергия системы. В дальнейшем мы будем использовать величины

$$E = \frac{2M\mathcal{E}}{\hbar^2}, \quad V(x) = \frac{2MU(x)}{\hbar^2} \quad \text{и} \quad k^2 = E.$$

После перехода к этим величинам уравнение (1.1) принимает вид

$$\Delta \Psi(\mathbf{x}) + k^2 \Psi(\mathbf{x}) - V(x) \Psi(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.2)$$

В последнем уравнении можно произвести разделение переменных, если искать решение в виде

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{\psi(x)}{x} Y_l^m(\vartheta, \varphi), \quad (1.3)$$

где $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ — сферическая гармоника. Как известно, функция $\psi(x)$ удовлетворяет обыкновенному диффе-

ренциальному уравнению, называемому радиальным уравнением, или уравнением для парциальных волн:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) - \frac{l(l+1)}{x^2}\psi(x) - V(x)\psi(x) = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4), содержащее одну независимую переменную, значительно проще полного уравнения (1.2). Основной задачей данной книги является извлечение из уравнений (1.2) и (1.4) возможно большей информации о характере движения исследуемой системы.

С точки зрения современной теории элементарных частиц уравнения (1.2) и (1.4) недостаточны в следующем отношении:

1. Они являются нерелятивистскими. Для исключения этого недостатка можно было бы перейти к уравнению Бете — Солпитера; однако целесообразнее провести вначале подробный анализ уравнения (1.4), а потом уже перейти к рассмотрению более сложных задач.

2. Предположение о том, что частицы являются бесспиновыми и не имеют внутренней структуры, конечно, нереалистично. Мы можем обобщить наш формализм на случай частиц со спином или систем, обладающих некоторыми дискретными внутренними степенями свободы. Такое обобщение сделано уже многими способами, но, хотя при этом появились некоторые интересные новые соображения, все же основные выводы могут быть сделаны и из рассмотрения принятой простой модели. Значительно большие трудности возникают при описании взаимодействия связанной системы из двух частиц с третьей частицей. В этом случае мы имеем дело с трехчастичной задачей, которая существенно сложнее задачи многоканального рассеяния.

3. Хотя сама идея о введении потенциала является весьма полезной, в действительности он может оказаться зависящим от скоростей или даже нелокальным. В простейших случаях потенциалов, зависящих от скоростей, могут быть сохранены методы рассмот-

рения, развитые в настоящей книге. В случае же существенно нелокальных потенциалов, когда дифференциальное уравнение (1.4) заменяется на интегродифференциальное, большая часть принципиальных результатов стандартной теории (дисперсионные соотношения, аналитические свойства и т. д.) теряет, по-видимому, свою силу. Наша точка зрения относительно таких потенциалов заключается в следующем: вполне возможно, что они в действительности реализуются, но если это так, то не известно, что с ними делать. Больше к данному вопросу мы возвращаться не будем.

Перечислив недостатки обычной потенциальной теории рассеяния, естественно отметить ее достоинства.

В настоящей книге мы не пытаемся получить какие-либо численные результаты, поскольку, как уже подчеркивалось, нашей задачей не является выяснение феноменологии явления. Изучение поведения рассматриваемой системы будет основываться на общих идеях дисперсионной теории. Другими словами, мы ставим перед собой задачу изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния и нахождения тех ее свойств, которые не зависят от потенциала или, точнее, не требуют для своего определения детального знания $V(x)$. Таким образом, мы будем выделять результаты, относящиеся не к каким-либо конкретным потенциалам, а к определенным классам потенциалов. Эти результаты должны во всяком случае воспроизводить соотношения, следующие в нерелятивистском пределе из моделей теории поля. Современное состояние теории, несомненно, позволяет осуществить эту ограниченную программу. Значительно менее очевидна возможность нахождения при этом новых идей, которые в свою очередь могут дать толчок к развитию теории поля.

Такая возможность кажется в особенности удивительной, если учесть крайнюю простоту задачи о потенциальном рассеянии по сравнению с обычной теорией поля. После появления понятия S -матрицы эта простота привлекла к данной задаче внимание

многих авторов, в результате чего исследование двух-частичного потенциального рассеяния может считаться сейчас в основных чертах почти полностью завершенным.

§ 2. Исторические замечания

Мы считаем, что статья Иоста [52], опубликованная в 1947 г., явилась первым серьезным исследованием, в котором ставилась цель не проведения конкретных численных расчетов для ядерной физики, а изучения общей теории матрицы рассеяния. В этой статье впервые были введены так называемые функции Иоста, сыгравшие основную роль во всем дальнейшем развитии теории.

Хотя исследование Иоста ограничивалось S -волнами, тем не менее оно содержало уже весь основной математический аппарат, необходимый для перехода к более общему случаю. В частности, было дано полное обсуждение проблемы так называемых ложных полюсов S -матрицы.

Дальнейшие свойства функций Иоста обсуждались в работах Баргмана [2, 3] (1949 г.), где также никак не использовался конкретный вид потенциалов. Рассмотрение в цитированных статьях специальных потенциалов, позволяющих получить окончательное решение, оказалось полезным для проверки целого ряда гипотез об аналитических свойствах функций Иоста и парциальных амплитуд. Следует подчеркнуть, что во всех работах последнего направления рассматривалась не полная амплитуда рассеяния, а лишь отдельные члены разложения ее по парциальным волнам.

После появления указанных выше статей начался быстрый рост числа работ, посвященных рассматриваемой проблеме. При этом аналитические свойства изучались также для таких классов потенциалов, которые подобно гауссовской или прямоугольной яме не имеют теоретико-полевого обоснования. Тем не менее соответствующие результаты представляют интерес для физики низких энергий.

Параллельно происходил непрерывный прогресс в теории поля, причем был установлен ряд аналитических свойств и дисперсионных соотношений для полной амплитуды рассеяния. Как это ни удивительно, но некоторое время никто не чувствовал необходимости проверки этих свойств на примере потенциального рассеяния. Это было впервые сделано в 1957 г. Кури [58], который установил аналитические свойства полной амплитуды рассеяния.

Результаты Кури были затем вновь получены в 1958—1959 гг. более изящными способами рядом других авторов [39, 57]. Во всех этих работах доказательства основывались непосредственно на трехмерном уравнении Шредингера, а ссылки на уравнение для парциальных амплитуд носили лишь частный характер. В то время стало общепринятым утверждение о том, что парциальные волны совершенно непригодны при рассмотрении дисперсионных соотношений для полных амплитуд и, следовательно, развитие теории поля не может идти по пути, намеченному Иостом.

Подобные общие соображения разделялись большинством исследователей, когда появились работы Мандельстама [65], в которых были предложены его знаменитые двойные дисперсионные соотношения. Из представления Мандельстама вытекают определенные предсказания относительно аналитических свойств парциальных амплитуд рассеяния. Использование этих предсказаний явилось толчком к широкому применению так называемого N/D -метода построения амплитуд, в котором исходят из задания разреза на левой полуоси, соответствующего «силам». Как показал Мартин [69, 70], указанные аналитические свойства действительно имеют место для юкавских потенциалов. При этом, хотя данные свойства и следуют из двойных дисперсионных соотношений, обратное утверждение не имеет места: подтверждение этих свойств не является доказательством справедливости представления Мандельстама.

Сейчас мы знаем, что предположение Мандельстама оправдано для потенциалов, представимых в виде суперпозиции потенциалов Юкавы (так

называемые южавские потенциалы). Как показали Шарап и Фубини [23, 24], этот класс потенциалов наиболее согласуется с теорией поля.

Приведенное в начале предыдущего абзаца утверждение было независимо высказано почти одновременно целым рядом исследователей, работавших в теории поля с помощью различных методов. Это, несомненно, сильно продвинуло общее понимание теории. Доказательства представления Мандельстама опираются на следующие два существенно различные подхода.

Первый из них был намечен в 1959 г. Боукоком и Мартином [17] и был впоследствии завершен Бланкенбеклером и др. [10]. В основе этого подхода лежит использование преобразования Фурье трехмерной волновой функции, удовлетворяющего так называемому уравнению Липпмана — Швингера в импульсном пространстве. Из последнего уравнения ими было получено итерационное разложение полной амплитуды рассеяния. Оказалось, что каждый член этого разложения удовлетворяет представлению Мандельстама без вычитаний с сингулярностями, монотонно удаляющимися от физической области с повышением порядка членов. Бланкенбеклер и др. показали, как обойти трудность, связанную с равномерной сходимостью разложения, не обращаясь к громоздкому формализму Фредгольма, который использовался на более ранних стадиях исследования. Появление техники определения сингулярностей разложения теории возмущений, разработанной Ландау, существенно упростило аппарат, используемый при рассматриваемом подходе.

Метод Ландау [60] был применен также к релятивистскому разложению Фейнмана — Дайсона в теории поля [31, 85] для доказательства правильности представления Мандельстама в общем случае. Детальное обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей книги; мы ограничимся только замечанием, что обширный класс диаграмм, включая лестничное приближение, оказывается удовлетворяющим представлению Мандельстама.

В результате Бланкенбеклер и др. [10] пришли к интересному заключению, что дисперсионные соотношения и унитарность позволяют восстановить полную амплитуду рассеяния по ее второму борновскому приближению без обращения к уравнению Шредингера, вместо которого используются нелинейные уравнения для спектральной функции двойного дисперсионного представления. Обобщение такой процедуры на релятивистский случай пригодно лишь до порога неупругих процессов.

В рассмотренном подходе никак не учитывались вычитания по передаваемому импульсу. В этом отношении предпочтительнее другой метод, предложенный в 1959 г. Редже [89]. Он основан на единственности аналитического продолжения парциальных амплитуд рассеяния на комплексные значения углового момента.

Основной особенностью этого второго подхода является использование взаимной связи между угловым моментом и передаваемым импульсом (или, лучше сказать, углом рассеяния). Эти переменные являются, очевидно, сопряженными и их можно для наглядности сравнить с обычными координатой и импульсом частицы. Как известно, волновая функция представляет в импульсном пространстве преобразование Фурье от координатной волновой функции и наоборот. Далее из анализа хорошо известен также тот факт, что особенности функции определяют асимптотическое поведение ее преобразования Фурье. Из взаимнообратимого характера преобразования Фурье непосредственно следует, что сингулярности последнего в свою очередь определяют асимптотическое поведение исходной функции. Качественно можно сказать, что сингулярность в преобразовании Фурье (асимптотическое поведение) представляет асимптотическое поведение (сингулярность). Аналогичная интерпретация оказывается возможной также в случае угловых переменных с тем только отличием, что в этом случае мы имеем дело с разложением по сферическим функциям и тесно связанным с ним преоб-

разованием Меллера, использующим функции Лежандра с комплексным индексом.

Соответственно сказанному следует ожидать (и детальный анализ это подтверждает), что сингулярности в сдвиге фаз по угловому моменту определяют асимптотическое поведение полной амплитуды относительно передаваемого импульса. В то же время в зависимости от области определения подобные сингулярности могут интерпретироваться как резонансы или связанные состояния. Положительной особенностью подобного подхода является то, что мы можем связать асимптотическое поведение с угловым моментом системы. Было предложено обобщить эту связь на случай релятивистской теории, причем сейчас делается много попыток дать строгое обоснование этого обобщения ввиду важных следствий, вытекающих из него для рассеяния при высоких энергиях.

Верно также обратное утверждение, что сингулярности амплитуды рассеяния по передаваемому импульсу определяют асимптотическое поведение сдвигов фаз. В этом состоит смысл известного соотношения между размером эллипса Лемана [61] (наибольший эллипс на плоскости $\cos \theta$ с фокусами в точках ± 1 , в котором амплитуда рассеяния является аналитической) и поведением сдвига фаз при больших угловых моментах.

Рассматриваемая теория двухчастичных систем сейчас в значительной мере завершена. Было бы крайне желательно обобщить полученные результаты на трехчастичные (многочастичные) системы. Однако, несмотря на значительные усилия, успехи в этом направлении остаются пока весьма скромными.

§ 1. Предварительные замечания

Изучение потенциального рассеяния значительно упрощается ввиду того, что в математике выполнено огромное количество исследований по линейным дифференциальным уравнениям, преобразованию Фурье, аналитическим функциям и интегральным уравнениям. Задачей настоящей главы является ознакомление читателя с рядом математических теорем, используемых в дальнейшем.

§ 2. Некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений второго порядка

Запишем общее линейное однородное уравнение второго порядка в виде

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + p(x) \frac{df(x)}{dx} + q(x) f(x) = 0. \quad (2.1)$$

Простыми результатами теории таких уравнений являются следующие теоремы.

Теорема 1. Общее решение уравнения (2.1) представляет собой линейную комбинацию любых двух линейно независимых решений.

Теорема 2. Всякое уравнение вида (2.1) может быть представлено в форме [103]

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + J(x) \varphi(x) = 0, \quad (2.2)$$

где

$$f(x) = \varphi(x) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_b^x p(y) dy \right]$$

и

$$J(x) = q(x) - \frac{1}{2} \frac{dp(x)}{dx} - \frac{1}{4} p^2(x).$$

Рассматриваемое в книге уравнение Шредингера имеет, очевидно, вид (2.2). Непосредственным следствием (2.2) является теорема 3.

Теорема 3. Для любых двух решений φ и ψ уравнения (2.2) имеет место формула

$$W(\varphi, \psi) = \varphi \frac{d\psi(x)}{dx} - \psi \frac{d\varphi(x)}{dx} = c,$$

где c — некоторая постоянная; $W(\varphi, \psi)$ обычно называют вронскианом от функций φ и ψ .

Физически последняя теорема связана с уравнением непрерывности, поскольку вронскиан $W(\psi, \psi^*)$, где ψ — некоторое комплексное решение (1.4), представляет собой (с точностью до фазового множителя) просто радиальный ток. Этот ток действительно сохраняется, если уравнение одинаково для ψ и ψ^* , т. е. если $V(x)$ вещественно, что означает отсутствие поглощения частиц.

Теорема 4. Каждое решение (2.1) может быть определено заданием соответствующих граничных условий. Так, если в (2.1) функции $p(x)$ и $q(x)$ ограничены и непрерывны в некоторой точке P , называемой неособой точкой, то наиболее удобный способ задания граничных условий состоит в задании значений решения и его первой производной в точке P . Таким образом, решение будет определено однозначно, причем, согласно общим свойствам $p(x)$ и $q(x)$, мы можем продолжить его в определенном интервале изменения x .

В дальнейшем $p(x)$ оказывается равным нулю, и нам будет достаточно рассмотреть только свойства $q(x) = J(x)$. Эта величина зависит от потенциала и энергии, и мы будем предполагать, что она является кусочно-непрерывной и ограниченной функцией x во всем интервале от 0 до ∞ , за исключением, быть может, точки $x=0$. Следовательно, мы будем иметь возможность продолжать решение во всем интервале $0, \infty$. Граничные условия указанного вида оказываются, однако, недостаточными, если точка P совпадает с началом или бесконечностью. Поскольку вы-

бор P при $x=0$ или $x=\infty$ физически естествен, мы должны обратиться к более общей формулировке граничных условий.

Теорема 5. Пусть в точке $P(x=c)$ функции $p(x)$ и $q(x)$ не обязательно ограничены, но пределы

$$\lim_{x \rightarrow c} (x-c) p(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow c} (x-c)^2 q(x)$$

существуют. В таком случае точка P называется регулярной. При этом если

$$\lim_{x \rightarrow c} (x-c) p(x) = p_0,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (x-c)^2 q(x) = q_0,$$

то, кроме указанного ниже особого случая, каждое решение представляет собой суперпозицию двух фундаментальных решений вида

$$\Psi_1 = (x-c)^{\rho_1} \Phi_1(x),$$

$$\Psi_2 = (x-c)^{\rho_2} \Phi_2(x),$$

где Φ_1 и Φ_2 — функции, конечные в точке P . Показатели ρ_1 и ρ_2 являются решениями уравнения

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0.$$

Упомянутый выше особый случай возникает, когда разность $\rho_1 - \rho_2$ является целым числом. Тогда обычный метод построения фундаментальных решений становится непригодным; специальное исследование показывает, что может быть построено независимое решение, содержащее $\ln(x-c)$. Детальное обсуждение данного вопроса содержится в книге Уиттекера и Ватсона [103]. Перейдем далее к новой переменной $u=1/x$, так что $x=\infty$ будет соответствовать теперь $u=0$. Точка $u=0$ будет регулярной точкой получающегося дифференциального уравнения, если существуют оба предела $\lim_{x \rightarrow \infty} xp(x)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2q(x)$. Такое требо-

вание является естественным определением условия регулярности точки $x=\infty$.

Теорема 6. Если $p(x)$ и $q(x)$ могут быть одновременно продолжены в комплексную плоскость своего аргумента и являются голоморфными в некоторой односвязной области, то решение тоже может быть продолжено в эту область и будет в ней голоморфным.

Полное обсуждение данного вопроса содержится, например, в книге Уиттекера и Ватсона [103].

Указанное обстоятельство очень важно при обсуждении юкавских потенциалов, поскольку эти потенциалы являются, очевидно, аналитическими в верхней полуплоскости.

Теорема 7. Основная теорема, используемая в теории потенциального рассеяния, принадлежит Пуанкаре [83]. Она относится к дифференциальным уравнениям, содержащим параметр. Предположим, что $J(x, \eta)$ в (2.2) зависит не только от координаты, но и является также целой аналитической функцией некоторого параметра η . Возьмем решение $\psi(x)$, определенное граничным условием, не зависящим от η , в регулярной точке $P(x=c)$ [например, $\psi(c)=0$, $\psi'(c)=1$]. Теорема Пуанкаре утверждает, что $\psi(x, \eta)$ при фиксированном x также является целой функцией η . Требование регулярности точки P может быть ослаблено, если граничные условия остаются независимыми от η . Большинство теорем, установленных ниже, являются, по существу, обобщениями теоремы Пуанкаре.

В нашем случае $J(x, \eta) = J_0(x) + \eta^2 J_1(x)$, где η — или k или $l + 1/2$.

§ 3. Интегралы Фурье

Особенно важной является знаменитая теорема Римана — Лебега.

Теорема 8. Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Тогда интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx$$

стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ [104].

Приведем далее три теоремы, следующие из теории аналитических функций.

Теорема 9 (теорема Палея — Винера). Пусть $F(k)$ — целая аналитическая функция k , которая $\in L_2(-\infty, \infty)$ на вещественной оси. Пусть далее $F(k)$ — функция экспоненциального порядка¹⁾ и типа x . В этом случае

$$F(k) = \int_{-x}^x f(t) e^{ikt} dt,$$

где $f(t) \in L_2(-x, x)$ [12].

Теорема 10 (теорема Титчмарша). Необходимым и достаточным условием того, чтобы функция $F(x)$, представляющая собой предел при $y \rightarrow 0$ некоторой функции $F(z)$ ($z = x + iy$), аналитической при $y > 0$ и такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|^2 dx = O(e^{-2ay}),$$

входила в $L_2(-\infty, \infty)$, является равенство

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx = 0, \quad t < a$$

(см. [99]).

Теорема 11 (теорема Винера — Леви). Пусть функция $\Phi(z)$ является аналитической в области D , и пусть функция $F(\lambda)$ выбрана так, что кривая $z =$

¹⁾ Порядок ρ и тип τ целой функции $f(z)$ определяются следующим образом:

$$\rho = \sup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r},$$

$$\tau = \sup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln M(r),$$

где $M(r)$ означает максимум модуля $f(z)$ при $|z|=r$. При $\rho=1$ говорят, что функция экспоненциального порядка.

$=F(\lambda)$, $-\infty \leq \lambda \leq \infty$, лежит внутри D . Если функция $F(\lambda)$ может быть представлена в виде

$$F(\lambda) = F(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt,$$

где $f(t) \in L(-\infty, \infty)$, то тем же свойством обладает и $\Phi[F(\lambda)]$ [32, 82].

§ 4. Аналитические функции

Перечислим несколько теорем, полезных при исследовании функций экспоненциального порядка внутри сектора.

Введем индикаторную функцию $h(\varphi)$ следующим образом:

$$h(\varphi) = \sup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \ln |f(re^{i\varphi})|.$$

Теорема 12. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в секторе $|\varphi| \leq \sigma$. Тогда, если $h(\varphi)$ существует, то $h(\varphi_1) \sin(\varphi_2 - \varphi_3) + h(\varphi_2) \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + h(\varphi_3) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$,

где $|\varphi_1|, |\varphi_2|, |\varphi_3| \leq \sigma$, $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ (см. [12]).

Теорема 13 (теорема Карлсона). Пусть $f(z)$ — аналитическая функция при $|\arg z| < \pi/2$, и пусть

$$h(\varphi) < B|\sin \varphi|, \quad B < \pi, \\ f(N) = 0, \quad N = 1, 2, 3, \dots,$$

тогда $f(z) = 0$. При $B = \pi$ теорема перестает выполняться [например, для $f(z) = \sin \pi z$] [12].

Теорема 14 (теорема Монтеля). Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, ограниченная в секторе $-\delta < \arg z < \sigma + \delta$, и пусть

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(re^{i\sigma}) = a, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = b,$$

тогда

$$a = b \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(z) = a$$

при стремлении к пределу вдоль любой линии внутри сектора [12].

Теорема 15 (теорема Хартога). Пусть функция $f(z_1, z_2)$ определена в области D двух комплексных переменных z_1 и z_2 , и пусть $f(z_1, z_2)$ обладает тем свойством, что в каждой точке (z_1, z_2) из D функция $f(z_1, \bar{z}_2)$ является аналитической относительно z_1 в окрестности \bar{z}_1 и функция $f(\bar{z}_1, z_2)$ является аналитической относительно z_2 в окрестности \bar{z}_2 . В этом случае $f(z_1, z_2)$ является аналитической функцией относительно z_1, z_2 в D [14].

Теорема 16. Если функция $f(z_1, z_2)$ является аналитической функцией z_1 и z_2 вблизи точки \bar{z}_1, \bar{z}_2 и $f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0$ и если $\partial f / \partial z \neq 0$ при $z_1 = \bar{z}_1$ и $z_2 = \bar{z}_2$, то уравнение $f(z_1, z_2) = 0$ имеет единственное решение $z_1 = \omega(z_2)$, принимающее значение \bar{z}_1 , при $z_2 = \bar{z}_2$ и аналитическое в окрестности \bar{z}_1, \bar{z}_2 [14].

§ 5. Интегральные уравнения

Мы рассмотрим здесь главным образом уравнения типа Фредгольма, оставив обсуждение уравнений Вольтерра в основном тексте. Обычное уравнение Фредгольма

$$f(x) = g(x) + \Lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad (2.3)$$

можно записать в операторной форме

$$(1 - \Lambda K) f = g,$$

где f, g — векторы, а K — оператор в банаховом пространстве \mathcal{B} . Оператор K называется вполне непрерывным, если он переводит каждую ограниченную последовательность векторов в компактную последовательность, т. е. если бесконечная последовательность $f_n \in \mathcal{B}, n = 1, \dots, \infty$, при $|f_n| < c$ отображается в последовательность g_n , содержащую сильно

сходящуюся бесконечную подпоследовательность g_n , $n \in Q$ (Q — подпоследовательность целых чисел). Это означает, что существует такое g , что

$$\inf_{n \rightarrow \infty} |g - g_n| = 0.$$

Основное содержание так называемой альтернативы Фредгольма состоит в следующем [90]:

Теорема 17. Если K — вполне непрерывный оператор, то либо однородное уравнение $\Lambda K f = f$ имеет решение, либо неоднородное уравнение $\Lambda K f = f - g$ имеет единственное решение и, в частности, $f = 0$ при $g = 0$.

Частными случаями вполне непрерывных операторов являются:

а) Ядра конечного ранга

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \varphi_i(y), \quad \psi_i \in \mathcal{B}, \quad \varphi_i \in \mathcal{B}^*,$$

где \mathcal{B}^* — пространство, дуальное \mathcal{B} .

б) Ядра Гильберта — Шмидта, т. е. ядра, для которых

$$\|K\| = \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Такие ядра рассматриваются только в гильбертовых пространствах.

в) Ядра K , представляющие собой предел сильно сходящейся последовательности вполне непрерывных операторов K_n , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K - K_n\| = 0.$$

Формальное решение Фредгольма уравнения (2.3) задается равенством

$$f(x) = g(x) + \Lambda \int_a^b K_\Lambda(x, y) g(y) dy,$$

где

$$d(\Lambda) K_{\Lambda}(x, y) = K\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Lambda^n}{n!} \times \\ \times \int_a^b d\xi_1 \dots \int_a^b d\xi_n K\left(\begin{matrix} x, \xi_1, \dots, \xi_n \\ y, \xi_1, \dots, \xi_n \end{matrix}\right),$$

$$d(\Lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Lambda^n}{n!} \times \\ \times \int_a^b d\xi_1 \dots \int_a^b d\xi_n K\left(\begin{matrix} \xi_1, \dots, \xi_n \\ \xi_1, \dots, \xi_n \end{matrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n d_n, \\ K\left(\begin{matrix} x_1, \dots, x_n \\ y_1, \dots, y_n \end{matrix}\right) = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & \dots & K(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, y_1) & \dots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

Если K — ядро Гильберта — Шмидта, то указанное решение сходится при любом конечном комплексном Λ . Это утверждение очевидно, если (a, b) — конечный интервал и $|K(x, y)| < H$ (H — постоянная), так как

$$|d_n| < \frac{n^{n/2}}{n!} H^n (b-a)^n.$$

В общем случае Смифис [95] нашел оценку сверху для детерминанта $d(\Lambda)$ в виде некоторой функции $\|K\|$. Вводя след

$$\tau(K) = \int_a^b K(x, x) dx,$$

получаем формулы

$$d(\Lambda) = e^{-\Lambda \tau(K)} \delta(\Lambda), \\ \delta(\Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \delta_n, \quad \delta_0 = 1, \quad (2.4)$$

где δ_n формально получается из d_n при замене всех диагональных элементов в соответствующих детерми-

нантах нулями. При этом мы имеем весьма полезную оценку

$$|\delta_n| \leq \frac{e^{n/2} \|K\|^n}{n^{n/2}}. \quad (2.5)$$

Аналогичную факторизацию можно выполнить и для ядра резольвенты $K_\Lambda(x, y)$, но она нам в дальнейшем не потребуется.

Из оценки (2.5) вытекает, что итерационное разложение $\delta(\Lambda)$ всюду сходится и что при $\|K\| \rightarrow 0$

$$\delta = 1 + O(\|K\|).$$

Детерминант $d(\Lambda)$ инвариантен относительно преобразования подобия

$$d(\Lambda, [K]) = d(\Lambda, [A^{-1}KA]).$$

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ $x=0$

§ 1. Интегральное уравнение для регулярного решения

Применим теперь идеи и методы, кратко изложенные в предыдущей главе, к уравнению Шредингера ¹⁾

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{x^2} - V(x) \right] \psi(x) = 0. \quad (3.1)$$

Будем задавать граничные условия при $x=0$ и $x=\infty$, которые однозначно определяют стандартные решения (3.1). Для этого, помимо требования, чтобы $V(x)$ была вещественной функцией, обращающейся в нуль на бесконечности, необходимо наложить на нее некоторые дополнительные ограничения ²⁾. Возьмем $V(x)$ такой, чтобы

а) $V(x)$ была почти всюду непрерывной,

$$\text{б) } \int_c^\infty |V(x)| dx = M(c) < \infty, \quad (3.2)$$

$$\text{в) } \int_0^{c'} x|V(x)| dx = N(c') < \infty.$$

При этом c и c' могут принимать произвольные значения ($c', c > 0$).

¹⁾ Очевидно, что при $J(x) = k^2 - V(x) - [l(l+1)/x^2]$ точка $x = \infty$ не будет регулярной; это ведет к тому, что решения (3.1) имеют на бесконечности осциллирующее или экспоненциальное поведение.

²⁾ В дальнейшем мы ослабим эти ограничения и рассмотрим случай сингулярных потенциалов, но вначале для облегчения понимания эти ограничения целесообразно ввести. Отметим, что центробежный барьер нарушает одно, а кулоновский потенциал — другое из условий (3.2).

Перейдем теперь непосредственно к граничному условию при $x=0$. Если x мало, то центробежный член много больше $k^2 - V(x)$ и в предварительном исследовании можно пренебречь этими слагаемыми в (3.1). В результате получаем укороченное уравнение

$$\psi''(x) - \frac{l(l+1)}{x^2} \psi(x) = 0. \quad (3.3)$$

Для этого уравнения точка $x=0$ является регулярной; точное решение (3.3) имеет вид

$$\psi(x) = \alpha x^{l+1} + \beta x^{-l}. \quad (3.4)$$

Из рассмотрения (3.4) следует, что целесообразно ввести два фундаментальных решения полного уравнения (3.1), ведущих себя при $x \rightarrow 0$ как

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x^{l+1} [1 + O(x)] \quad \text{и} \\ \varphi_1(x) &= x^{-l} [1 + O(x)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

соответственно. Далее вместо l удобно ввести $\lambda = l + 1/2$, после чего уравнение (3.1) переходит в уравнение

$$\psi''(x) + \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} - V(x) \right] \psi(x) = 0, \quad (3.6)$$

четное относительно λ . При замене λ на $-\lambda$ решения φ и φ_1 меняются местами. При этом вместо $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ формально более удобно обозначить фундаментальные решения через $\varphi(\lambda, k, x)$ и $\varphi(-\lambda, k, x)$; в дальнейшем будет считаться, что величина λ принимает произвольные комплексные значения.

Пока мы еще не привели доказательства существования решения $\varphi(\lambda, k, x)$. Для этого нужно записать (3.6) вместе с граничным условием (3.5) в виде интегрального уравнения. Положим

$$\varphi(\lambda, k, x) = \alpha(x) x^{\lambda+1/2} + \beta(x) x^{-\lambda+1/2}, \quad (3.7)$$

где α и β уже не являются постоянными. Наложим, далее, дополнительное условие

$$\alpha'(x) x^{\lambda+1/2} + \beta'(x) x^{-\lambda+1/2} = 0, \quad (3.8)$$

так что

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda, k, x) &= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \alpha(x) x^{\lambda-1/2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \beta(x) x^{-\lambda-1/2}, \\ \varphi''(\lambda, k, x) &= \frac{1}{x^2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) \varphi(\lambda, k, x) + \\ &+ \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \alpha'(x) x^{\lambda-1/2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \beta'(x) x^{-\lambda-1/2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

и подставим (3.7) и (3.9) в (3.6):

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \alpha'(x) x^{\lambda-1/2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \beta'(x) x^{-\lambda-1/2} = \\ = [V(x) - k^2] \varphi(\lambda, k, x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Неизвестные функции $\alpha'(x)$ и $\beta'(x)$ определяются из системы уравнений (3.8) и (3.10),

$$\begin{aligned} \alpha'(x) &= \frac{1}{2\lambda} [V(x) - k^2] \varphi(\lambda, k, x) x^{-\lambda+1/2}, \\ \beta'(x) &= \frac{1}{2\lambda} [k^2 - V(x)] \varphi(\lambda, k, x) x^{\lambda+1/2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Условия (3.5) эквивалентны требованию, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \beta(x) = 0. \quad (3.12)$$

Из соотношений (3.12) и (3.11) получаем

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= 1 + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x [V(\xi) - k^2] \varphi(\lambda, k, \xi) \xi^{-\lambda+1/2} d\xi, \\ \beta(x) &= -\frac{1}{2\lambda} \int_0^x [V(\xi) - k^2] \varphi(\lambda, k, \xi) \xi^{\lambda+1/2} d\xi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Комбинируя (3.7) и (3.13), находим искомое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, k, x) &= x^{\lambda+1/2} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x \left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^\lambda - \left(\frac{x}{\xi}\right)^\lambda \right] \times \\ &\times \sqrt{x\xi} [k^2 - V(\xi)] \varphi(\lambda, k, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Это уравнение Вольтерра [103], и его изучение не представляет затруднений. Пользуясь стандартным подходом, можно доказать равномерную сходимость итерационного решения (3.14). При этом нужно отдельно рассмотреть случаи $\mu \geq 0$ и $\mu < 0$ ($\lambda = \mu + i\sigma$).

а) В случае $\mu \geq 0$, $\sigma \neq 0$ имеем

$$|x^{\lambda+1/2}| = x^{\mu+1/2}.$$

Далее, так как под интегралом $\xi < x$, для рассматриваемого случая получаем

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\xi}{x} \right)^\lambda \right| &= \left| \frac{\xi}{x} \right|^\mu < \left(\frac{x}{\xi} \right)^\mu, \\ \left| \left(\frac{\xi}{x} \right)^\lambda - \left(\frac{x}{\xi} \right)^\lambda \right| &< 2 \left(\frac{x}{\xi} \right)^\mu. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Введем формальное итерационное разложение

$$\varphi(\lambda, k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(\lambda, k, x), \quad (3.16)$$

для которого $\varphi^{(0)}(\lambda, k, x) = x^{\lambda+1/2}$ и

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(\lambda, k, x) &= \frac{1}{2\lambda} \int_0^x \left[\left(\frac{\xi}{x} \right)^\lambda - \left(\frac{x}{\xi} \right)^\lambda \right] V \sqrt{x\xi} \times \\ &\times [k^2 - V(\xi)] \varphi^{(n)}(\lambda, k, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

С помощью (3.15) без труда находим

$$\begin{aligned} |\varphi^{(1)}(\lambda, k, x)| &\leq \frac{x^{\mu+1/2}}{|\lambda|} \int_0^x \xi |k^2 - V(\xi)| d\xi = \\ &= \frac{x^{\mu+1/2}}{|\lambda|} P(x), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $P(x)$ — положительная неубывающая функция x , являющаяся также конечной, поскольку в силу (3.2)

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_0^x \xi |k^2 - V(\xi)| d\xi \leq \int_0^x \xi |k^2| d\xi + \\ &+ \int_0^x \xi |V(\xi)| d\xi = \frac{1}{2} |k^2| x^2 + N(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставляя (3.18) в (3.17), находим

$$\begin{aligned}
 |\varphi^{(2)}(\lambda, k, x)| &\leq \frac{x^{\mu+1/2}}{|\lambda|^2} \int_0^x \xi |k^2 - V(\xi)| P(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{x^{\mu+1/2}}{|\lambda|^2} \int_0^x P'(\xi) P(\xi) d\xi = \frac{x^{\mu+1/2}}{|\lambda|^2} \frac{[P(x)]^2}{2}. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Из (3.18) и (3.20) можно сделать заключение, что общий член итерационного разложения должен удовлетворять неравенству

$$|\varphi^{(n)}(\lambda, k, x)| \leq \frac{x^{\mu+1/2}}{n! |\lambda|^n} [P(x)]^n. \quad (3.21)$$

Это заключение можно проверить по индукции. Считая, что (3.21) верно для некоторого n , имеем

$$\begin{aligned}
 |\varphi^{(n+1)}(\lambda, k, x)| &\leq \frac{x^{\mu+1/2}}{n! |\lambda|^{n+1}} \int_0^x \xi |k^2 - V(\xi)| [P(\xi)]^n d\xi = \\
 &= \frac{x^{\mu+1/2}}{n! |\lambda|^{n+1}} \int_0^x P'(\xi) [P(\xi)]^n d\xi = \frac{x^{\mu+1/2}}{(n+1)! |\lambda|^{n+1}} [P(x)]^{n+1}, \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

откуда следует искомый результат.

Используем теперь (3.16) и (3.21) для нахождения оценки сверху для всего разложения

$$\begin{aligned}
 |\varphi(\lambda, k, x)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi^{(n)}(\lambda, k, x)| \leq \\
 &\leq x^{\mu+1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[P(x)]^n}{n! |\lambda|^n} = x^{\mu+1/2} e^{P(x)/|\lambda|}. \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что каждый член итерационного разложения меньше соответствующего члена разложения экспоненты и, следовательно, разложение (3.16) всюду сходится. Таким образом мы доказали существование решения уравнения (3.14) или, что то же, уравнения (3.6) с принятыми граничными условиями (3.5).

Более того, поскольку каждый член итерационного разложения является полиномом относительно k^2 , полное решение представляет собой равномерно сходящийся ряд полиномов относительно k^2 и, следовательно, в соответствии с теоремой Пуанкаре является целой функцией k^2 в каждой ограниченной области комплексной k^2 -плоскости [мы не можем включить точку $k^2 = \infty$, поскольку $P(x)$ не будет при этом конечной, см. (3.19)]. Несколько более трудоемкой является проверка того, что каждый член разложения при $\mu > 0$ является также аналитической функцией λ .

Из сказанного следует, что $\varphi(\lambda, k, x)$ — аналитическая функция в прямом произведении конечной области в k^2 -плоскости и области $\operatorname{Re} \lambda = \mu \geq 0$ в λ -плоскости.

б) В случае $\mu < 0$ начнем с того, что рассмотрим по отдельности составляющие

$$\varphi^{(1)}(\lambda, k, x) = I_1 - I_2 - I_3 + I_4, \quad (3.24)$$

где

$$I_1 = \frac{x^{\lambda+5/2}}{2\lambda(2\lambda+2)} k^2, \quad I_2 = \frac{x^{\lambda+5/2}}{4\lambda} k^2, \quad (3.25)$$

$$I_3 = \frac{x^{1/2-\lambda}}{2\lambda} \int_0^x V(\xi) \xi^{2\lambda+1} d\xi, \quad I_4 = \frac{x^{\lambda+1/2}}{2\lambda} \int_0^x \xi V(\xi) d\xi.$$

Функция $\varphi^{(1)}(\lambda, k, x)$ и члены итерационного разложения при $n \geq 2$ являются полиномами относительно k^2 . Вид зависимости составляющих I_1 , I_2 и I_4 от λ очевиден, чего нельзя сказать об I_3 , так как мы не можем более использовать (3.15), а следовательно, и технику случая «а». Составляющую $I_3(\lambda)$ можно представить как преобразование Лапласа некоторой функции, положив $\xi = e^{-\rho}$:

$$I_3(\lambda) = \frac{x^{1/2-\lambda}}{2\lambda} \int_{-\ln x}^{\infty} e^{-2\rho} V(e^{-\rho}) e^{-2\lambda\rho} d\rho. \quad (3.26)$$

Интеграл (3.26) будет сходиться в λ -плоскости справа от вертикальной линии $\mu = \mu_0$. В соответствии с (3.2) величина μ_0 отрицательна; это, к сожалению,

все, что в общем случае (не конкретизируя далее вид потенциала) можно о ней сказать. Такая конкретизация делалась в работах многих авторов [9, 38, 63, 66, 77, 86], которые, задаваясь детальной структурой $V(x)$ при малых x , расширяли область аналитичности в отрицательную μ -плоскость. Необходимость конкретизации связана с тем, что любое малое изменение $V(x)$ вызывает резкое изменение $I_3(\lambda)$, а следовательно, и $\varphi(\lambda, k, x)$ при отрицательных λ . Можно сказать, что функция $\varphi(\lambda, k, x)$ неустойчива относительно варьирования $V(x)$ при отрицательных μ . Пока еще не ясно, играет ли область $\mu < 0$ какую-либо роль, поскольку нет оснований считать, что в теории поля потенциалы сохраняют смысл при малых расстояниях.

До сих пор мы оставляли в стороне точку $\lambda=0$, где (3.23) обладает на первый взгляд сильной особенностью. Не представляет труда проследить, что происхождение этой особенности обязано наличию множителя 2λ в знаменателе (3.14) и связано с видом использованного неравенства (3.15), очень грубого вблизи $\lambda=0$. Действительно, оценка сверху для ядра уравнения (3.19) обращается в бесконечность, при $\lambda=0$, в то время как ядро уравнения стремится к конечному пределу. В гл. 4, § 4, мы покажем, как обойти эту трудность и включить точку $\lambda=0$ в область сходимости. В последующем мы будем считать $\mu_0 = -\varepsilon/2$ отрицательным и не равным нулю. Это соответствует, грубо говоря, предположению, что $V(x)$ при малых $x \rightarrow 0$ возрастает медленнее $C/x^{2-\varepsilon}$. Такое предположение необходимо для того, чтобы пересечение областей аналитичности $\varphi(\lambda, k, x)$ и $\varphi(-\lambda, k, x)$ не было пустым. Подобное пересечение будет по меньшей мере занимать полосу $|\mu| < \varepsilon/2$.

Приведем далее следующие формулы:

$$\begin{aligned} W[\varphi(\lambda, k, x), \varphi(-\lambda, k, x)] &= \\ &= \varphi(\lambda, k, x) \varphi'(-\lambda, k, x) - \\ &- \varphi'(\lambda, k, x) \varphi(-\lambda, k, x) = -2\lambda, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$[\varphi(\lambda, k, x)]^* = \varphi(\lambda^*, k^*, x). \quad (3.28)$$

Формула (3.28) имеет место для потенциала, вещественного при $x \geq 0$. Для подтверждения (3.27) достаточно проверить эту формулу при малых x , заменив $\varphi(\lambda, k, x)$ на $x^{\lambda+1/2}$, поскольку, согласно теореме 3 гл. 2, вронскиан не зависит от x .

§ 2. Дальнейшее исследование интегральных уравнений

Другое определение функции $\varphi(\lambda, k, x)$ состоит в следующем. Положим вместо (3.7)

$$\varphi(\lambda, k, x) = \alpha(x) \varphi_0(\lambda, k, x) + \beta(x) \varphi_0(-\lambda, k, x).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_0(\lambda, k, x) &= [\varphi(\lambda, k, x)]_{V(x)=0} = \\ &= 2^\lambda k^{-\lambda} \Gamma(\lambda + 1) x^{1/2} J_\lambda(kx) \end{aligned}$$

есть решение (3.6) при отсутствии потенциала, удовлетворяющее тем же граничным условиям, что и ранее,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\lambda-1/2} \varphi_0(\lambda, k, x) = 1;$$

здесь $J_\lambda(kx)$ — функция Бесселя первого рода [7].

С помощью процедуры, подобной использованной при выводе (3.14), приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, k, x) &= \varphi_0(\lambda, k, x) + \\ &+ \int_0^x G(\lambda, k, x, y) V(y) \varphi(\lambda, k, y) dy, \quad (3.29) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G(\lambda, k, x, y) &= \frac{1}{2\lambda} [\varphi_0(\lambda, k, x) \varphi_0(-\lambda, k, y) - \\ &- \varphi_0(-\lambda, k, x) \varphi_0(\lambda, k, y)]. \end{aligned}$$

В приложении I для ядра $G(\lambda, k, x, y)$ при $x > y$, $b = \text{Im } k$, $\mu = \text{Re } \lambda$ получено следующее неравенство:

$$|G(\lambda, k, x, y)| < \\ < C e^{b|x-y|} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{|\mu|+1/2} \left(\frac{y}{1+|k|y} \right)^{-|\mu|+1/2},$$

причем C , вообще говоря, зависит от λ . Из приведенного неравенства следует оценка сверху для суммы итерационного разложения $\varphi(\lambda, k, x)$ при $\mu > 0$:

$$\varphi(\lambda, k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\lambda, k, x),$$

$$\varphi_n(\lambda, k, x) = \int_0^x G(\lambda, k, x, y) V(y) \varphi_{n-1}(\lambda, k, y) dy.$$

Действительно, не представляет труда доказать по индукции, что

$$|\varphi_n(\lambda, k, x)| < A \frac{[CP_1(x)]^n}{n!} e^{b|x|} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{\mu+1/2},$$

$$P_1(x) = \int_0^x \frac{y|V(y)|dy}{1+|k|y}.$$

Соответственно

$$|\varphi(\lambda, k, x) - \varphi_0(\lambda, k, x)| < \\ < A e^{b|x|} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{\mu+1/2} [e^{CP_1(x)} - 1].$$

В пределе при $|k| \rightarrow \infty$ имеем

$$|\varphi(\lambda, k, x) - \varphi_0(\lambda, k, x)| = o(e^{b|x|}). \quad (3.30)$$

Действительно,

$$P_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{y|V(y)|}{1+|k|y} dy < \int_0^a y|V(y)| dy + \frac{1}{|k|} \int_a^{\infty} |V(y)| dy.$$

Второй интеграл стремится к нулю, когда $|k| \rightarrow \infty$, и мы можем записать, что

$$P_1(x) < \int_0^a y |V(y)| dy + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Интеграл в последнем неравенстве может быть сделан сколь угодно малым; поэтому

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} P_1(x) = 0,$$

откуда непосредственно вытекает равенство (3.30).

**РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН
С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ**

§ 1. Интегральные уравнения для решения Иоста

При обсуждении решений при больших x будем исходить из укороченного уравнения

$$\psi'' + k^2\psi = 0.$$

Это уравнение получается из (3.6) при пренебрежении потенциалом и центробежным барьером. Его решения имеют вид

$$\psi = \alpha e^{-ikx} + \beta e^{ikx}.$$

Так же, как и в предыдущей главе, использование укороченного уравнения оказывается полезным для предварительного исследования свойств решений полного уравнения. Будем искать решение $f(\lambda, k, x)$ уравнения (3.6) (называемое в дальнейшем решением Иоста) со следующим асимптотическим поведением:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{ikx} f(\lambda, k, x) = 1. \quad (4.1)$$

При $V(x) = 0$ такое решение (3.6) имеет вид

$$\begin{aligned} [f(\lambda, k, x)]_{V(x)=0} &= f_0(\lambda, k, x) = \\ &= \left(\frac{\pi k x}{2}\right)^{1/2} e^{-(i\pi/2)(\lambda + 1/2)} H_{\lambda}^{(2)}(kx), \end{aligned} \quad (4.2)$$

де $H_{\lambda}^{(2)}(kx)$ — функция Ганкеля второго рода [7]. Так же, как и в гл. 3, используем метод вариации постоянных, исходя из выражения

$$f(\lambda, k, x) = \alpha(x) f_0(\lambda, k, x) + \beta(x) f_0(\lambda, -k, x).$$

При этом получаем

$$f(\lambda, k, x) = f_0(\lambda, k, x) + \int_x^{\infty} B(\lambda, k, x, y) V(y) f(\lambda, k, y) dy, \quad (4.3)$$

$$B(\lambda, k, x, y) = \frac{i}{2k} [f_0(\lambda, k, y) f_0(\lambda, -k, x) - f_0(\lambda, k, x) f_0(\lambda, -k, y)].$$

Нам нужно получить достаточно удобную оценку для ядра $B(\lambda, k, x, y)$. Как показано в приложении I, если $k \neq 0$, то при всяком $\lambda = \mu + i\sigma$ имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |f_0(\lambda, k, x)| &< \left(\frac{C|k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} e^{bx}, \\ |B(\lambda, k, x, y)| &< \\ &< C e^{(b|y|+bx)} \left(\frac{y}{1+|k|y} \right)^{|\mu|+1/2} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $y > x$, $b = \text{Im } k$ и C — по-прежнему постоянная, зависящая от λ . С помощью (4.4) оказывается возможным установить оценку сверху членов итерационного разложения

$$f(\lambda, k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\lambda, k, x),$$

где

$$f_n(\lambda, k, x) = \int_x^{\infty} B(\lambda, k, x, y) V(y) f_{n-1}(\lambda, k, y) dy.$$

Нетрудно проверить по индукции, что

$$\begin{aligned} |f_n(\lambda, k, x)| &< \frac{[CQ(x)]^n}{n!} \left(\frac{|k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2} e^{bx}, \\ Q(x) &= \int_x^{\infty} e^{(b|y|+bx)} \frac{y|V(y)|}{1+|k|y} dy. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Пусть

$$\int_0^{\infty} x |V(x)| dx < M < \infty.$$

Из (4.5) следует, что члены итерационного ряда мажорируются соответствующими членами разложения экспоненты и, следовательно, этот ряд сходится всюду, где $Q(x)$ конечно. Величина $Q(x)$ заведомо конечна, если $b < 0$, поскольку тогда экспонента $\exp[(|b| + b)y]$ не дает вклада в подынтегральное выражение (4.5) и $Q(x) < M$. Если $b > 0$ и существует такое m , что при $\nu < m$

$$\int_0^{\infty} x |V(x)| e^{\nu x} dx < \infty, \quad (4.6)$$

то $Q(x)$ будет, очевидно, конечной при $b < m/2$.

Для доказательства аналитичности $f(\lambda, k, x)$ относительно k достаточно показать, что каждый член $f_n(\lambda, k, x)$ является аналитической функцией k (поскольку соответствующий ряд сходится равномерно), или же что последовательность производных по k также сходится равномерно и непрерывна по k . Мы не будем приводить здесь детального доказательства, а лишь приведем его результат: $f(\lambda, k, x)$ является аналитической функцией k при $b < m/2$, за исключением точки $k=0$. Если $m=0$, то функция $f(\lambda, k, x)$ непрерывна на вещественной оси. Если условие (4.6) имеет место при любом ν , то единственной конечной сингулярностью будет сингулярность в точке $k=0$ (см. [91] и гл. 5, § 7, настоящей книги).

Из приведенного рассмотрения следует далее, что при $|k| \rightarrow \infty$

$$|f(\lambda, k, x) - f_0(\lambda, k, x)| = o(e^{bx}). \quad (4.7)$$

Если исходить из подстановки

$$f(\lambda, k, x) = \alpha(x) e^{-ikx} + \beta(x) e^{ikx},$$

то соответствующее интегральное уравнение примет вид

$$f(\lambda, k, x) = e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(y-x) \left[V(y) + \frac{\lambda^2 - 1/4}{y^2} \right] f(\lambda, k, y) dy. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) можно исследовать так же, как уравнение (4.3). При этом вместо (4.5) получаем¹⁾

$$f(\lambda, k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\lambda, k, x), \quad g_0(\lambda, k, x) = e^{-ikx}, \\ g_n(\lambda, k, x) = \frac{1}{k} \int_x^{\infty} \sin k(y-x) \left[V(y) + \frac{\lambda^2 - 1/4}{y^2} \right] g_{n-1}(\lambda, k, y) dy, \quad (4.9)$$

$$|g_n(\lambda, k, x)| < e^{bx} \frac{[CQ_1(x)]^n}{n!},$$

$$Q_1(x) = \int_x^{\infty} \left| V(y) + \frac{\lambda^2 - 1/4}{y^2} \right| \frac{y}{1 + |k|y} e^{(1+b|k|+b)y} dy.$$

По сравнению с предыдущим последний способ рассмотрения позволяет получить меньшую информацию относительно зависимости от переменной k , однако выяснение области аналитичности относительно λ оказывается с его помощью более простым. Действительно, из (4.9) видно, что $f(\lambda, k, x)$ представляется в виде равномерно сходящегося ряда полиномов относительно λ^2 и, следовательно, является целой функцией λ , причем $f(\lambda, k, x) = f(-\lambda, k, x)$.

Легко далее проверить, что

$$[f(\lambda, k, x)]^* = f(\lambda^*, -k^*, x), \quad (4.10)$$

если при вещественных $x > 0$ $V(x)$ вещественно.

¹⁾ Оценка (4.9) основывается на неравенстве

$$\frac{1}{|k|} |\sin k(y-x)| < C \frac{y}{1 + |k|y} e^{b|y+bx|},$$

имеющем место при $y > x$ (ср. приложение I). — Прим. перев.

§ 2. Природа сингулярности при $k=0$

Приведем две теоремы, позволяющие разъяснить источник возникновения сингулярности в точке $k=0$.

Теорема 1. Если $V(x)$ удовлетворяет (4.6) и $\lambda = l + 1/2$, где l — целое число, то $f(\lambda, k, x)$ — аналитическая функция k в области $\text{Im } k < m/2$, исключая кратный полюс порядка $|\lambda| - 1/2$ в точке $k=0$.

Теорема 2. Если $V(x)$ удовлетворяет условию (4.6) и $\lambda \neq l + 1/2$, то $f(\lambda, k, x)$ не имеет никаких сингулярностей в области $\text{Im } k < m/2$, кроме точки ветвления при $k=0$.

Приведенные теоремы можно проверить уже на примере функции

$$f_0(\lambda, k, x) = \left(\frac{\pi k x}{2}\right)^{1/2} e^{-l(\pi/2)(\lambda+1/2)} H_{\lambda}^{(2)}(kx).$$

Для однозначного определения $f(\lambda, k, x)$ введем разрез вдоль верхней мнимой полуоси от $k=0$ до $k=im/2$. В получившейся области $\text{Im } k < m/2$, $k \neq i\xi$, $0 \leq \xi < m/2$, функция $f(\lambda, k, x)$ однозначно определяется итерационным разложением. Соответствующее значение будем называть главным значением $f(\lambda, k, x)$.

Для выяснения характера сингулярности при $k=0$ мы должны обойти вокруг $k=0$ с переходом на другой лист римановой поверхности функции $f(\lambda, k, x)$. Пусть γ — путь, соединяющий k и $-k$, и пусть $\arg k = \varphi$ и $\arg(-k) = \varphi + \pi$, т. е. обход $k=0$ производится против часовой стрелки. Потребуем также, чтобы для всех $k' \in \gamma$ имело место $\text{Im } k' < m/2$. Если $f(\lambda, k, x)$ — главное значение функции от k , то ее значение при $-k$, полученное аналитическим продолжением вдоль γ , мы обозначим $f(\lambda, k \exp i\pi, x)$.

Приведенное обозначение может быть очевидным образом обобщено, если определить $f(\lambda, k \exp i\pi, x)$ как аналитическое продолжение $f(\lambda, k, x)$ вдоль пути, лежащего в области $\text{Im } k' < m/2$ и окружающего точку $k=0$ против часовой стрелки с непрерывным изменением аргумента от φ до $\varphi + \pi$. После введения обозначений мы можем сформулировать следующую основную теорему.

Теорема 3. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} f(\lambda, ke^{2i\pi}, x) &= f(\lambda, k, x) + 2i \cos \pi\lambda f(\lambda, ke^{i\pi}, x), \\ f(\lambda, ke^{in\pi}, x) &= f(\lambda, ke^{i(n-2)\pi}, x) + \\ &+ 2i \cos \pi\lambda f(\lambda, ke^{i(n-1)\pi}, x). \end{aligned}$$

Второе соотношение является очевидным следствием первого и может быть из него формально получено заменой k на $k \exp i(n-2)\pi$. Смысл теоремы состоит в том, что характер точки ветвления при $k=0$ и, следовательно, разрез от 0 до $im/2$ не зависят от потенциала. Как легко проверить, невозмущенное решение $f_0(\lambda, k, x)$ (4.2) удовлетворяет этой теореме.

Для доказательства положим в интегральном уравнении (4.3) $k=ib$, $0 < b < m/2$. Как было отмечено, $f_0(\lambda, k, x)$ удовлетворяет теореме 3. Рассмотрим $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_0(\lambda, ib-\varepsilon, x)$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_0(\lambda, ib+\varepsilon, x)$; при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место

$$\begin{aligned} h_0(\lambda, ib, x) &= f_0(\lambda, ib-\varepsilon, x) - f_0(\lambda, ib+\varepsilon, x) + \\ &+ 2i \cos \pi\lambda f_0(\lambda, -ib, x) = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, используя очевидные обозначения, получаем

$$\begin{aligned} f(\lambda, ib \pm \varepsilon, x) &= f_0(\lambda, ib \pm \varepsilon, x) + \\ &+ \int_x^\infty B(\lambda, ib, x, y) V(y) f(\lambda, ib \pm \varepsilon, y) dy, \\ f(\lambda, -ib, x) &= f_0(\lambda, -ib, x) + \\ &+ \int_x^\infty B(\lambda, ib, x, y) V(y) f(\lambda, -ib, y) dy. \end{aligned}$$

Ядро $B(\lambda, k, x, y)$ является однозначной функцией k^2 и одинаково в обоих приведенных уравнениях. Составив функцию

$$\begin{aligned} h(\lambda, ib, x) &= f(\lambda, ib-\varepsilon, x) - f(\lambda, ib+\varepsilon, x) + \\ &+ 2i \cos \pi\lambda f(\lambda, -ib, x), \end{aligned}$$

видим, что она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} h(\lambda, ib, x) &= h_0(\lambda, ib, x) + \\ &+ \int_x^{\infty} B(\lambda, ib, x, y) V(y) h(\lambda, ib, y) dy = \\ &= \int_x^{\infty} B(\lambda, ib, x, y) V(y) h(\lambda, ib, y) dy. \end{aligned}$$

Получившееся однородное интегральное уравнение Вольтерра имеет единственное решение $h(\lambda, ib, x) = 0$, что и доказывает теорему 3.

§ 3. Поведение общего решения при больших x

Если одновременно существуют $f(\lambda, k, x)$ и $f(\lambda, -k, x)$, то общее решение волнового уравнения может быть представлено в виде

$$\Phi(x) = \alpha f(\lambda, k, x) + \beta f(\lambda, -k, x). \quad (4.11)$$

Следует соответственно ожидать, что функция $\Phi(x)$ ограничена экспонентой $\exp|b|x$. Однако (4.11) верно, только если $f(\lambda, \pm k, x)$ существуют одновременно, т. е. в области $|b| < m/2$. Доказательство указанного неравенства вне этой области может быть дано, если учесть независимость вронскиана

$$f(\lambda, k, x)\Phi'(x) - f'(\lambda, k, x)\Phi(x) = 2ik\beta = C \quad (4.12)$$

от x . Соотношение (4.12) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для Φ с решением

$$\Phi(x) = Cf(\lambda, k, x) \int_H^x \frac{dy}{[f(\lambda, k, y)]^2}.$$

При этом мы считаем, что $b < 0$, т. е. $f(\lambda, k, x)$ всегда существует. Частный выбор значения H не изменяет асимптотического поведения Φ , поскольку он только определяет долю, которую $f(\lambda, k, x)$ составляет в Φ . При $b < 0$ функция $f(\lambda, k, x)$ убывает в соответствии с (4.7) экспоненциально. Если взять H настолько

большим, что

$$\left| \frac{1}{[g(\lambda, k, y)]^2} - 1 \right| < \frac{A}{y}, \quad y > H, \quad (4.13)$$

$$g(\lambda, k, y) = f(\lambda, k, y) e^{iky},$$

то в пределе можно получить

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) e^{-ikx} = \frac{C}{2ik} = \beta. \quad (4.14)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) e^{-ikx} &= \\ &= C \lim_{x \rightarrow \infty} [1 + o(1)] \int_H^x e^{2ik(y-x)} [1 + O(y)] dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим входящий в предыдущую формулу интеграл

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_H^x e^{2ik(y-x)} [1 + o(1)] dy &= \frac{1}{2ik} + \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon, \\ \varepsilon &= \int_H^x e^{2ik(y-x)} o(1) dy. \end{aligned}$$

Возьмем теперь H настолько большим, чтобы $o(1) < \eta = \text{const}$. Тогда

$$\sup_{x \rightarrow \infty} |\varepsilon| < \eta \lim_{x \rightarrow \infty} \int_H^x e^{-2b(y-x)} dy = \frac{\eta}{2|b|}, \quad b < 0.$$

Однако η может быть сделано сколь угодно малым, что и подтверждает (4.14).

§ 4. Аналогия между граничными условиями при $x=0$ и $x=\infty$

Имеет место интересная аналогия между свойствами $f(\lambda, k, x)$, рассматриваемыми соответственно как функции λ, k и k, λ . Эта аналогия отражена в табл. 1,

Таблица 1

Свойства решения	$\varphi(\lambda, k, x)$ граничное условие при $x=0$	$f(\lambda, k, x)$ граничное условие при $x=\infty$
Целая функция относительно	k^2	λ^2
Область аналитичности	$\operatorname{Re} \lambda > 0$, в общем случае $\operatorname{Re} \lambda > -\frac{\varepsilon}{2}$ при $ V(x) < Cx^{-2+\varepsilon}$	$\operatorname{Im} k < 0$, в общем случае $\operatorname{Im} k < \frac{m}{2}$ при $ V(x) < Ce^{-mx}$
Вронскиан	$W[\varphi(\lambda, k, x), \varphi(-\lambda, k, x)] = -2\lambda$	$W[f(\lambda, k, x), f(\lambda, -k, x)] = 2ik$
Эрмитовость [при вещественном $V(x)$]	$[\varphi(\lambda, k, x)]^* = \varphi(\lambda^*, k^*, x)$	$[f(\lambda, k, x)]^* = f(\lambda^*, -k^*, x)$

То, что указанный параллелизм не является случайным, сразу видно, если ввести в (3.6) новые переменные, определенные следующим образом:

$$x = e^{-\rho}, \quad \Phi = \psi e^{\rho/2}.$$

При этом (3.6) принимает вид

$$\frac{d^2\Phi}{d\rho^2} - \lambda^2\Phi = e^{-2\rho}(V - k^2)\Phi. \quad (4.15)$$

Если приравнять $\psi = \varphi(\lambda, k, x)$, то граничным условием для Φ будет

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{\lambda\rho}\Phi(\rho) = 1.$$

Очевидно, что это условие совпадает с граничным условием для $f(1/2, -i\lambda, \rho)$ при потенциале

$$e^{-2\rho}[V(e^{-\rho}) - k^2],$$

т. е. для S -волн ¹⁾. Следовательно,

$$\Phi(\rho) = f\left(\frac{1}{2}, -i\lambda, \rho\right)$$

и

$$\begin{aligned} \Phi[\lambda, k, e^{-\rho}; V(e^{-\rho})] &= \\ &= e^{-\rho/2} f\left(\frac{1}{2}, -i\lambda, \rho; e^{-2\rho}[V(e^{-\rho}) - k^2]\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

В формуле (4.16) мы явно выписали в аргументе зависимость от потенциала. Приведенная формула позволяет быстро выводить свойства $\Phi(\lambda, x)$ из свойств $f(k, \rho)$ (в частности, аналитичность при $\lambda=0$ сразу следует из аналитических свойств относительно k). Можно, очевидно, вывести свойства $f(\lambda, k, x)$ как функции k или λ , исходя из свойств $\Phi(\lambda, k, x)$ как функции λ и k , не рассматривая еще одно интегральное уравнение. Мы не воспользовались таким более кратким выводом, поскольку при этом пришлось бы отказаться от физической интерпретации аналитических свойств.

§ 5. Качественное обсуждение

Проведем дополнительное обсуждение аналитических свойств $\Phi(\lambda, k, x)$ и $f(\lambda, k, x)$, основываясь на более интуитивных соображениях. Для краткости мы будем говорить здесь только о $f(\lambda, k, x)$, но все сказанное полностью применимо и для $\Phi(\lambda, k, x)$.

Рассмотрим асимптотическое поведение некоторого решения (3.6) при больших x ; оно имеет вид

$$\psi \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \alpha e^{-ikx} + \beta e^{ikx}. \quad (4.17)$$

При вещественном k формула (4.17) имеет простой физический смысл: она представляет собой суперпозицию сходящихся и расходящихся сферических волн с амплитудами α и β . При не слишком больших x потенциал изменяет эти волны, но его воздей-

¹⁾ То обстоятельство, что переменная ρ в (4.16) изменяется в интервале $-\infty < \rho < \infty$, несущественно, поскольку значение $\Phi(\lambda, k, x)$ при $x=c$ зависит только от значений потенциала в интервале $0 \leq x \leq c$, или $-\ln c \leq \rho \leq \infty$.

ствии экспоненциально убывает как $\exp(-mx)$, где m определяется (4.6). Мы можем, конечно, отойти настолько далеко, что изменение $\exp(-ikx)$ [в частности, $\exp(-ikx - mx)$] будет значительно меньше $\exp(ikx)$. При этом условии можно говорить о функции $f(\lambda, k, x)$ как о решении, представляющем при $k > 0$ только сходящиеся волны ($\beta = 0$). Если, однако, k комплексно и, например, $\text{Im } k = b < 0$, то сходящиеся волны при $x \rightarrow \infty$ экспоненциально затухают, а член с расходящимися волнами неограниченно возрастает. Тем не менее можно определить функцию $f(\lambda, k, x)$ как затухающую волну, поскольку включение в нее любой сколь угодно малой расходящейся волны может быть установлено при достаточно больших x . Нельзя, однако, определить таким образом чисто расходящуюся волну, поскольку к ней, не изменяя асимптотического поведения, всегда можно добавить затухающую волну. Это соответствует тому обстоятельству, что при $b < 0$ просто построить $f(\lambda, k, x)$, но не $f(\lambda, -k, x)$. Если $b > 0$, то ситуация становится, естественно, обратной. Указанную трудность можно преодолеть следующим образом. Определим $f(\lambda, -k, x)$ при $b < 0$ так, чтобы можно было пренебречь $[f(\lambda, -k, x) - \exp(ikx)]$ по сравнению с $f(\lambda, k, x)$ или $\exp(-ikx)$. Это имеет смысл, если изменение $f(\lambda, -k, x)$, вызываемое влиянием $V(x)$, меньше $f(\lambda, k, x)$, что равносильно тому, что $V(x)f(\lambda, -k, x)$ ведет себя как экспонента, убывающая быстрее, чем $f(\lambda, k, x)$. Сравнивая соответствующие экспоненты, видим, что это имеет место при $|b| < m/2$; полученное неравенство в точности совпадает с результатом строгого рассмотрения¹⁾.

¹⁾ Указанный вывод, например при $\text{Im } k = b < 0$, можно пояснить следующим образом. Чтобы иметь возможность отделить с помощью асимптотического предела добавок сходящейся волны к расходящейся волне, необходимо выполнение следующего неравенства, вытекающего из вида уравнения Шредингера:

$$|k^2 \beta \exp[i(\text{Re } k)x - bx]| > |V(x) \alpha \exp[-i(\text{Re } k)x + bx]|.$$

Оно должно иметь место при достаточно больших $x(\beta)$ и произвольном β . Это неравенство справедливо при выполнении (4.6), если $|b| < m/2$. При $b > 0$ в указанном рассуждении сходящиеся и расходящиеся волны меняются местами. — Прим. перев.

Мартин [69, 70] показал, что в случае юкавских потенциалов при целом l функция $f(\lambda, k, x)$ аналитическая во всей k -плоскости с разрезом вдоль мнимой оси. Соответствующие результаты будут обсуждаться в гл. 6.

§ 6. S -волны

Перечислим ряд полезных лемм, которые непосредственно следуют из (4.5) и (4.9) при $\lambda = 1/2$ (для S -волн). Эти леммы могут быть также весьма просто выведены независимо [32].

Лемма 1. Пусть

$$\int_0^{\infty} x |V(x)| dx < M.$$

Тогда при $x \geq 0$ функция $f(1/2, k, x) \equiv f(k, x)$ является аналитической функцией k при $b < 0$ и непрерывной вдоль вещественной оси $b = 0$. Более того,

$$|f(k, x)| \leq Ke^{-|b|x},$$

где K — положительная постоянная, а $b < 0$.

Лемма 2. При условиях леммы 1 имеем

$$|f(k, x) - e^{-ikx}| \leq K \frac{e^{-|b|x}}{|k|} \int_x^{\infty} |V(y)| dy,$$

$$|f(k, x) - e^{-ikx}| \leq Ke^{-|b|x} \int_x^{\infty} |V(y)| y dy,$$

$$\left| \frac{d}{dx} f(k, x) + ike^{-ikx} \right| \leq Ke^{-|b|x} \int_x^{\infty} |V(y)| dy,$$

$$\left| \frac{d}{dk} f(k, x) + ixe^{-ikx} \right| \leq K \frac{e^{-|b|x}}{|k|}.$$

Приведем также аналогичные леммы для $\varphi(1/2, k, x) = \varphi(k, x)$, хотя они и относятся скорее к гл. 3.

Лемма 3. При условиях леммы 1 и при $x \geq 0$ функция $\varphi(k, x)$ является целой четной функцией k , удовлетворяющей неравенству

$$|\varphi(k, x)| < A \frac{x}{1 + |k|x} e^{|b|x},$$

где A — положительная постоянная.

Лемма 4. Если

$$\int_0^x |V(y)| dy = R(x) < \infty, \quad x \geq 0,$$

то

$$\left| \varphi(k, x) - \frac{\sin kx}{k} \right| \leq A \frac{e^{|b|x}}{|k|} [e^{R(x)/|k|} - 1],$$

где $b = \text{Im } k$.

Лемма 5. При условиях леммы 1 и больших $|k|$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \varphi(k, x) &= \frac{\sin kx}{k} + o\left(\frac{e^{|b|x}}{|k|}\right), \\ f(k, x) &= e^{-ikx} + o(e^{-|b|x}), \\ &b < 0, \end{aligned}$$

причем эти асимптотические оценки равномерны при всех $x > 0$.

Возможность выяснения аналитических свойств $f(\lambda, k, x)$ вне области $\text{Im } k < m/2$ для специальных классов потенциалов, в частности юкавских потенциалов, будет обсуждаться в гл. 6. Следующая глава будет посвящена основной для нашего изложения задаче определения асимптотических амплитуд при потенциальном рассеянии. До сих пор мы не касались этого очень важного для всего изложения вопроса, ограничиваясь исследованием волновых функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям, вне всякой связи с их физическим смыслом.

ФУНКЦИЯ ИОСТА И S-МАТРИЦА

§ 1. Определение и формальные свойства функции Иоста

В предыдущих главах мы получили ряд решений уравнения (3.6)

$$\psi'' + k^2\psi - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2}\psi - V(x)\psi = 0. \quad (5.1)$$

Эти решения, обозначенные $\varphi(\pm\lambda, k, x)$, $f(\lambda, \pm k, x)$, не обязательно одновременно существуют при любом выборе λ , k . Область существования определяется в общем случае следующими условиями:

$$\begin{aligned} \pm \operatorname{Re} \lambda \geq 0 & \text{ для } \varphi(\pm\lambda, k, x), \quad k \text{ конечно,} \\ \pm \operatorname{Im} k < 0 & \text{ для } f(\lambda, \pm k, x), \quad \lambda \text{ конечно,} \end{aligned}$$

а при выполнении неравенства (4.6) — условиями

$$\begin{aligned} \pm \operatorname{Re} \lambda \geq 0 & \text{ для } \varphi(\pm\lambda, k, x), \quad k \text{ конечно,} \\ \operatorname{Im} k \leq \pm \frac{m}{2} & \text{ для } f(\lambda, \pm k, x), \quad \lambda \text{ конечно.} \end{aligned}$$

Указанные области могут быть расширены при наложении дальнейших ограничений на потенциалы. Из приведенных результатов ясно, что все четыре решения могут быть определены одновременно, по крайней мере тогда, когда k вещественно, а λ чисто мнимо. Условие для k может быть значительно ослаблено, если $V(x)$ — юкавский потенциал. Более того, в последнем случае эти решения определяются однозначно, если ввести кинематический разрез.

Из теоремы 1 гл. 2 вытекает, что в области совместного существования имеется линейное однород-

ное соотношение между каждыми тремя решениями (5.1):

$$\begin{aligned} f(\lambda, k, x) &= A\varphi(\lambda, k, x) + B\varphi(-\lambda, k, x), \\ f(\lambda, -k, x) &= C\varphi(\lambda, k, x) + D\varphi(-\lambda, k, x), \\ \varphi(\lambda, k, x) &= Ef(\lambda, k, x) + Gf(\lambda, -k, x), \\ \varphi(-\lambda, k, x) &= Hf(\lambda, k, x) + Kf(\lambda, -k, x). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь A, B и т. д. — коэффициенты, зависящие от λ, k , но не зависящие от x . Для дальнейшего особенно важно развить достаточно удобный формализм определения этих коэффициентов. Такой формализм следует из теоремы 3 гл. 2, согласно которой вронскиан каждой пары решений (5.1) не зависит от x . В соответствии со сказанным введем функцию

$$f(\lambda, k) \equiv W(f, \varphi) = f(\lambda, k, x)\varphi'(\lambda, k, x) - f'(\lambda, k, x)\varphi(\lambda, k, x); \quad (5.3)$$

она называется функцией Иоста, поскольку незначительно отличается от соответствующей функции, введенной им для S -волн [52]. Функция Иоста может быть явно вычислена при $V(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f(\lambda, k)|_{V(x)=0} &\equiv f_0(\lambda, k) = \\ &= 2^\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(\lambda + 1) k^{-(\lambda-1/2)} e^{-i(\pi/2)(\lambda-1/2)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для дальнейшего удобно ввести нормированную функцию Иоста

$$F(\lambda, k) = \frac{f(\lambda, k)}{f_0(\lambda, k)}, \quad (5.5)$$

которая равна единице при $V(x) = 0$.

Можно было бы ввести также вронскиан от решений $f(\lambda, k, x)$ и $f(\lambda, -k, x)$, но его значение (см. табл. 1) тривиально,

$$W[f(\lambda, k, x), f(\lambda, -k, x)] = 2ik. \quad (5.6)$$

Поскольку вронскиан не зависит от x , вычисление (5.6) можно легко произвести, подставив вместо функций $f(\lambda, \pm k, x)$ их асимптотические значения $\exp(\mp ikx)$ при $x \rightarrow \infty$.

Учитывая (5.3), (5.6) и (3.27), можно найти теперь все неизвестные коэффициенты в уравнениях (5.2). Взяв, например, вронсиан от первого из выражений (5.2) и функции $\varphi(-\lambda, k, x)$, с помощью (5.3) и (3.27) получаем

$$-2\lambda A = f(-\lambda, k). \quad (5.7)$$

Аналогичным образом находим

$$\begin{aligned} 2\lambda B &= f(\lambda, k), & -2ikE &= f(\lambda, -k), \\ -2\lambda C &= f(-\lambda, -k), & 2ikG &= f(\lambda, k), \\ 2\lambda D &= f(\lambda, -k), & -2ikH &= f(-\lambda, -k), \\ & & 2ikK &= f(-\lambda, k). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Подставляя теперь соотношение (5.7) и (5.8) обратно в (5.2), получаем

$$\begin{aligned} f(\lambda, k, x) &= \\ &= \frac{1}{2\lambda} [f(\lambda, k)\varphi(-\lambda, k, x) - f(-\lambda, k)\varphi(\lambda, k, x)], \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} f(\lambda, -k, x) &= \frac{1}{2\lambda} [f(\lambda, -k)\varphi(-\lambda, k, x) - \\ & - f(-\lambda, -k)\varphi(\lambda, k, x)], \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, k, x) &= \\ &= \frac{1}{2ik} [f(\lambda, k)f(\lambda, -k, x) - f(\lambda, -k)f(\lambda, k, x)], \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi(-\lambda, k, x) &= \\ &= \frac{1}{2ik} [f(-\lambda, k)f(\lambda, -k, x) - f(-\lambda, -k)f(\lambda, k, x)]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Изменение знака k (или λ) приводит лишь к перестановке (5.9) и (5.10) [или (5.11) и (5.12)]. Следовательно, функции $f(\pm\lambda, \pm k)$ полностью определяют связь между решениями с граничными условиями при $x=0$ и решениями с граничными условиями при $x=\infty$.

Значения функций Иоста $f(\pm\lambda, \pm k)$ не независимы, поскольку они удовлетворяют тождеству

$$\begin{vmatrix} f(\lambda, -k) & f(-\lambda, -k) \\ f(\lambda, k) & f(-\lambda, k) \end{vmatrix} = 4i\lambda. \quad (5.13)$$

Этот результат получается, если подставить в (5.6) функции $f(\lambda, \pm k, z)$, выраженные через $\varphi(\pm\lambda, k, z)$ соответственно (5.9) и (5.10), при учете (3.27). Эквивалентное тождество для $F(\lambda, k)$ имеет вид

$$e^{i\pi\lambda} F(\lambda, -k) F(-\lambda, k) - \\ - e^{-i\pi\lambda} F(\lambda, k) F(-\lambda, -k) = 2i \sin \pi\lambda. \quad (5.14)$$

Напомним, что в соотношениях (5.13) и (5.14) величина λ обязана быть чисто мнимой, поскольку в противном случае какая-либо из функций $f(\pm\lambda, \pm k)$ может оказаться неопределенной. Тождества (5.13) и (5.14) сохраняются, если заменить $-k$ на $k \exp[i(2n+1)\pi]$, где n — произвольное целое число.

§ 2. Аналитические свойства $f(\lambda, k)$

Трудно переоценить значение детального исследования аналитических свойств функции $f(\lambda, k)$ для теории потенциального рассеяния. Некоторые из этих свойств непосредственно вытекают из соответствующих свойств $f(\lambda, k, x)$ и $\varphi(\lambda, k, x)$, установленных в предыдущих главах.

Перепишем еще раз (5.3)

$$f(\lambda, k) = f(\lambda, k, x) \varphi'(\lambda, k, x) - \\ - f'(\lambda, k, x) \varphi(\lambda, k, x). \quad (5.15)$$

Известно, что $f(\lambda, k, x)$ и $df(\lambda, k, x)/dx$ являются целыми функциями λ и что $\varphi(\lambda, k, x)$ и $d\varphi(\lambda, k, x)/dx$ — аналитические функции λ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Отсюда следует теорема.

Теорема 1. Функция $f(\lambda, k)$ является аналитической при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и фиксированном k .

Аналогичным образом, поскольку $\varphi(\lambda, k, x)$ и $d\varphi(\lambda, k, x)/dx$ — целые функции k , а $f(\lambda, k, x)$ и $df(\lambda, k, x)/dx$ — аналитические функции k в полуплоскости $\operatorname{Im} k < 0$, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Функция $f(\lambda, k)$ является аналитической функцией k в полуплоскости $\operatorname{Im} k < 0$ при фиксированном λ . Если выполняется (4.6), то

$f(\lambda, k)$ — аналитическая функция k при $\text{Im } k < m/2$ и фиксированном λ .

При помощи теоремы 15 гл. 2 приведенные результаты можно объединить следующим образом.

Теорема 3. Функция $f(\lambda, k)$, рассматриваемая как функция двух переменных λ и k , является аналитической в прямом произведении областей $\text{Im } k < 0$ и $\text{Re } \lambda > 0$. Если же выполняется условие (4.6), то $f(\lambda, k)$ является аналитической функцией в прямом произведении областей $\text{Im } k < m/2$ и $\text{Re } \lambda > 0$. Аналогичные теоремы, очевидно, имеют место при переходе от $f(\lambda, k)$ к $F(\lambda, k)$.

Поскольку в (5.15) не возникает точек ветвления по k , обусловленных $\varphi(\lambda, k, z)$, приходим к формуле

$$f(\lambda, ke^{2i\pi}) = f(\lambda, k) + 2i \cos \pi\lambda f(\lambda, k, e^{i\pi}), \quad (5.16)$$

которая идентична по форме теореме 3 гл. 4 при опущенном x . Формулу (5.16) можно вообще рассматривать как предельную форму этой теоремы, поскольку

$$f(\lambda, k) = 2\lambda \lim_{x \rightarrow 0} x^{\lambda-1/2} f(\lambda, k, x). \quad (5.17)$$

Именно этот предел был использован Иостом [52] для определения функции $f(\lambda, k)$.

При переходе к $F(\lambda, k)$ формула (5.16) принимает вид

$$F(\lambda, ke^{2i\pi}) = -e^{2i\pi\lambda} F(\lambda, k) + \\ + 2 \cos \pi\lambda e^{i\pi\lambda} F(\lambda, ke^{i\pi}). \quad (5.18)$$

Для проверки (5.18) можно положить $F(\lambda, k) = 1$ [т. е. взять $V(x) = 0$], при этом (5.18) превращается в тождество.

Из (3.28) и (4.10) формально получаем

$$[f(\lambda, k)]^* = f(\lambda^*, k^* e^{-i\pi}), \quad (5.19)$$

если $V(x)$ веществен при вещественных $x > 0$.

В заключение данного параграфа приведем ряд

интегральных соотношений для функции Иоста. Из уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_0''(\lambda, k, x) + k^2 \varphi_0(\lambda, k, x) - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \varphi_0(\lambda, k, x) &= 0, \\ f''(\lambda, \pm k, x) + k^2 f(\lambda, \pm k, x) - \\ &- \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} f(\lambda, \pm k, x) = V(x) f(\lambda, \pm k, x) \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} [f(\lambda, \pm k, x) \varphi_0'(\lambda, k, x) - f'(\lambda, \pm k, x) \varphi_0(\lambda, k, x)]_0^\infty &= \\ &= - \int_0^\infty V(x) f(\lambda, \pm k, x) \varphi_0(\lambda, k, x) dx. \end{aligned}$$

Вспоминая, что при $x \rightarrow \infty$ $f(\lambda, \pm k, x) \sim f_0(\lambda, \pm k, x)$, а при $x \rightarrow 0$ $\varphi_0(\lambda, k, x) \sim \varphi(\lambda, k, x)$, с помощью (5.3) получаем

$$\begin{aligned} f(\lambda, \pm k) &= f_0(\lambda, \pm k) + \\ &+ \int_0^\infty V(x) f(\lambda, \pm k, x) \varphi_0(\lambda, k, x) dx. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно установить соотношение

$$\begin{aligned} f(\lambda, \pm k) &= f_0(\lambda, \pm k) + \\ &+ \int_0^\infty V(x) f_0(\lambda, \pm k, x) \varphi(\lambda, k, x) dx. \end{aligned}$$

§ 3. Отыскание сдвигов фаз

Важность функций $f(\lambda, \pm k)$ обусловлена тем, что они непосредственно связаны с измеряемыми в физическом эксперименте величинами — сдвигами фаз.

Понятие сдвига фаз возникает из рассмотрения асимптотического поведения функции $\varphi(\lambda, k, x)$ при больших x . Это поведение можно найти непосредственно из (5.11) при замене функций $f(\lambda, \pm k, x)$ на

их асимптотические значения $\exp(\mp ikx)$. В результате имеем

$$\varphi(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2ik} [f(\lambda, k) e^{ikx} - f(\lambda, -k) e^{-ikx}]. \quad (5.20)$$

В связи с выражением (5.20) по причинам, которые станут вскоре ясными, удобно ввести функцию

$$S(\lambda, k) = \frac{f(\lambda, k)}{f(\lambda, -k)} e^{i\pi(\lambda - 1/2)} = \frac{F(\lambda, k)}{F(\lambda, -k)} = e^{2i\delta(\lambda, k)}, \quad (5.21)$$

где $\delta(\lambda, k)$ называется сдвигом фазы. Представим функцию Иоста, входящую в (5.20), следующим образом:

$$\begin{aligned} f(\lambda, k) &= \tau(\lambda, k) \exp\left[i\delta(\lambda, k) - i\frac{\pi}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right], \\ f(\lambda, -k) &= \tau(\lambda, k) \exp\left[-i\delta(\lambda, k) + i\frac{\pi}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

После подстановки (5.22) в (5.20) получаем

$$\varphi(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{k} \tau(\lambda, k) \sin\left[kx + \delta(\lambda, k) - \frac{\pi}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (5.23)$$

Множитель $\exp\left[\mp i\frac{\pi}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]$ в (5.22) выделен для того, чтобы $\delta(\lambda, k)$ обращалось в нуль при $V(x) = 0$. Таким образом, величина $\delta(\lambda, k)$ является мерой возмущения, вызванного действием потенциала на регулярную волновую функцию.

Свойства $S(\lambda, k)$ непосредственно следуют из свойств $f(\lambda, k)$ и могут быть сформулированы в виде следующих двух основных теорем.

Теорема 4. Если выполняется (4.6), то $S(\lambda, k)$ является мероморфной функцией λ и k в прямом произведении областей $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и $|\operatorname{Im} k| < m/2$, исключая точку ветвления при $k = 0$.

Теорема 5. При условии (4.6) имеет место соотношение

$$S(\lambda, ke^{i\pi}) = \frac{e^{i\pi(\lambda - 1/2)} + 2i \cos \pi \lambda S(\lambda, k)}{S(\lambda, k)} e^{i\pi(\lambda - 1/2)}, \quad (5.24)$$

где $S(\lambda, ke^{i\pi})$ определяется согласно правилам, принятым в гл. 4. Также имеет место соотношение

$$S(\lambda, ke^{2i\pi}) = \frac{S(\lambda, k)(1 - 4 \cos^2 \pi\lambda) + 2 \cos \pi\lambda e^{i\pi\lambda}}{1 - 2 \cos \pi\lambda e^{-i\pi\lambda} S(\lambda, k)}. \quad (5.25)$$

Эти соотношения непосредственно следуют из (5.16) и (5.18).

Наконец, из условия эрмитовости (5.19) для $f(\lambda, k)$ получаем так называемое свойство унитарности $S(\lambda, k)$:

$$[S(\lambda, k)]^* = [S(\lambda^*, k^*)]^{-1}, \quad (5.26)$$

которое выполняется, если только $V(x)$ веществен при вещественном положительном x .

Из сказанного ясно, что свойства $S(\lambda, k)$ в k -плоскости достаточно сложны. Если, однако, ввести функцию

$$Z(\lambda, k^2) = ik^{2\lambda} \frac{S(\lambda, k) - e^{2i\pi\lambda}}{S(\lambda, k) - 1}, \quad (5.27)$$

то она будет однозначной функцией k^2 (при $|\operatorname{Im} k| < m/2$). Введение такой функции значительно упрощает описание аналитических свойств функции $S(\lambda, k)$, равной

$$S(\lambda, k) = \frac{Z(\lambda, k^2) - ik^{2\lambda} e^{2i\pi\lambda}}{Z(\lambda, k^2) - ik^{2\lambda}}. \quad (5.28)$$

В связи с (5.28) сделаем ряд дополнительных разъяснений. Придадим сначала λ физическое, т. е. полуцелое значение. Ясно, что $S(\lambda, k)$ становится при этом однозначной функцией k , и при малых k^2 имеем $k^{2\lambda} \operatorname{ctg} \delta(\lambda, k) = Z(\lambda, k^2) = Z_0 + Z_1 k^2 + \dots$, $|k| < \frac{m}{2}$.

То обстоятельство, что выражение $k^{2\lambda} \operatorname{ctg} \delta(\lambda, k)$ может быть разложено в ряд вблизи $k=0$, содержащий только четные степени k , хорошо известно в связи с так называемой теорией эффективного радиуса.

Пусть далее λ равно целому числу. При этом можно, казалось бы, прийти к парадоксальному выводу, что $S(\lambda, k) = 1$ вне зависимости от наличия

потенциала. Однако такое заключение из соотношения (5.28) является ошибочным. Дело в том, что в этом случае, согласно (5.27), $Z(\lambda, k^2) = ik^{2\lambda}$ и (5.28) превращается в неопределенность вида $0/0$, так что из этой формулы нельзя сделать даже вывод о четности $S(\lambda, k)$. В связи с этим следует применить правило Лопиталья, которое при целых λ дает

$$S(\lambda, k) = \frac{\partial Z/\partial \lambda - ik^{2\lambda} e^{2i\pi\lambda} (2i\pi + 2 \ln k)}{\partial Z/\partial \lambda - 2ik^{2\lambda} \ln k}.$$

Легко проверить, что, согласно (5.24), $S(\lambda, k)$ имеет логарифмическую особенность.

Установим теперь интегральное соотношение для величины

$$a(\lambda, k) = \frac{S(\lambda, k) - 1}{2ik} = \frac{1}{k} e^{i\delta(\lambda, k)} \sin \delta(\lambda, k).$$

Рассмотрим два уравнения

$$\varphi'' + k^2\varphi - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \varphi = V\varphi,$$

$$\varphi_0'' + k^2\varphi_0 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \varphi_0 = 0$$

для регулярных решений возмущенного и невозмущенного радиальных уравнений Шредингера. Вычтем второе уравнение, умноженное на φ , из первого, умноженного на φ_0 , и проинтегрируем полученную разность в пределах от 0 до ∞ . С помощью (5.22) и (5.23) получаем формулу

$$a(\lambda, k) = - \frac{e^{i\pi(\lambda-1/2)}}{f(\lambda, -k) f_0(\lambda, -k)} \int_0^\infty \varphi(\lambda, k, x) \varphi_0(\lambda, k, x) V(x) dx. \quad (5.29)$$

§ 4. Связь между сдвигом фазы и амплитудой рассеяния

Хотя понятие сдвига фазы хорошо знакомо большинству физиков, будет не лишним кратко повторить здесь широко известный смысл использования этой величины.

Напомним, что исходным пунктом нашей теории было трехмерное уравнение Шредингера (1.2)

$$\Delta\Psi(\mathbf{x}) + k^2\Psi(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) = 0.$$

Согласно стандартной теории (см. гл. 10), решение (1.2), описывающее процесс рассеяния, имеет при больших x в направлении ϑ , $\cos\vartheta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}/kx$, следующее асимптотическое поведение:

$$\Psi(\mathbf{x}) \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{ikx}}{x} F(k, \cos\vartheta), \quad (5.30)$$

где \mathbf{k} — вектор относительного импульса и $|\mathbf{k}| = k$. Первое слагаемое (5.30) соответствует падающей плоской волне, второе слагаемое — расходящейся или рассеянной волне. Функция $F(k, \cos\vartheta)$ представляет собой так называемую амплитуду рассеяния, причем важность ее определяется тем, что она непосредственно связана с дифференциальным сечением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(k, \cos\vartheta)|^2.$$

Величина $d\sigma/d\Omega$ непосредственно измеряется в экспериментах по рассеянию. Важность введения понятия сдвига фазы определяется простой связью сдвига фазы с амплитудой рассеяния и, следовательно, с дифференциальным сечением.

При установлении этой связи главную роль играет равенство

$$e^{ikx \cos\vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kx) P_l(\cos\vartheta), \quad (5.31)$$

где

$$\begin{aligned} j_l(kx) &= \left(\frac{\pi}{2kx}\right)^{1/2} J_\lambda(kx) = \\ &= \pi^{1/2} 2^{-\lambda-1/2} k^{\lambda-1/2} [\Gamma(\lambda+1)]^{-1} x^{-1} \varphi_0(\lambda, k, x), \quad \lambda = l + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Асимптотическое поведение $j_l(z)$ характеризуется

$$j_l(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{-1} \sin \left[z - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]. \quad (5.32)$$

Рассмотрим теперь разложение

$$\Psi(x) = \frac{1}{x} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) \frac{P_l(\cos \vartheta)}{f(l+1/2, -k)} \varphi\left(l + \frac{1}{2}, k, x\right).$$

Это разложение представляет решение уравнения (1.2), переходящее при $V(x)=0$ в (5.31). При больших x функция $\Psi(x)$ имеет следующее асимптотическое поведение [см. (5.23)]:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\sim \frac{1}{kx} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) \frac{P_l(\cos \vartheta)}{f(l+1/2, -k)} \times \\ &\quad \times \tau(\lambda, k) \sin\left(kx + \delta - l \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{kx} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \vartheta) e^{i\delta(\lambda, k)} \sin\left(kx + \delta - l \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} e^{i\delta} \sin\left(kx + \delta - l \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(kx - l \frac{\pi}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2i} e^{i\left(kx - l \frac{\pi}{2}\right)} (e^{2i\delta} - 1), \end{aligned}$$

с помощью (5.32) получаем, что при $x \rightarrow \infty$

$$\Psi(x) \sim e^{ik \cdot x} + \frac{e^{ikx}}{2ikx} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) [e^{2i\delta(\lambda, k)} - 1].$$

Сравнение с (5.29) показывает, что

$$\begin{aligned} F(k, \cos \vartheta) &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [e^{2i\delta(\lambda, k)} - 1] P_l(\cos \vartheta) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a(\lambda, k) P_l(\cos \vartheta). \quad (5.33) \end{aligned}$$

Эта классическая формула особенно важна потому, что с ее помощью трехмерная задача сводится к одномерной. Выражение вида (5.33) было впервые

использовано Релеем [87] (см. также [33]). В дальнейшем мы будем называть (5.33) разложением амплитуды рассеяния по парциальным волнам.

§ 5. Асимптотическое поведение $f(\lambda, k)$ для заданного λ при больших энергиях. Теорема Левинсона

Ответ на вопрос об асимптотическом поведении $f(\lambda, k)$ при больших энергиях непосредственно следует для S -волн при $\text{Im } k \leq 0$ из (4.5) [для краткости полагаем $f(1/2, k, x) = f(k, x)$]:

$$|f_n(k, x)| \leq C_1 \frac{C^n Q^n(x)}{n!} e^{bx},$$

где

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{\xi |V(\xi)|}{1 + |k| \xi} d\xi < \int_x^\infty \xi |V(\xi)| d\xi < \infty.$$

Полагая $x = 0$, находим [для краткости $f(1/2, k) = f(k)$]

$$|f(k) - 1| < C_1 |e^{CQ(0)} - 1|,$$

причем $Q(0)$ стремится к нулю при больших $|k|$. Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(-k) = 1, \quad 0 \leq \arg k \leq \pi. \quad (5.34)$$

Предположим теперь, что $f(-k)$ не имеет нулей при $\text{Im } k > 0$. Тогда $\ln f(-k) = \mu(k)$ является аналитической функцией при $\text{Im } k > 0$, непрерывной на вещественной оси и обращающейся в нуль при стремлении к бесконечности вдоль любого направления $0 \leq \arg k \leq \pi$. Из (5.22) имеем

$$\begin{aligned} \mu(k) &= \ln \tau(k) - i\delta(k) + 2i\pi n, \\ \tau(k) &= \tau(-k), \quad \delta(k) = -\delta(-k). \end{aligned}$$

При этом n мы выбрали таким, чтобы $\delta(\infty) = 0$.

Согласно приведенным свойствам $\mu(k)$, имеет место дисперсионное соотношение между вещественной и мнимой частями $\mu(k)$, т. е. между $\ln \tau(k)$ и $\delta(k)$. Это соотношение можно получить посредством

применения к $\mu(k')/(k' - k)$ теоремы Коши, причем в качестве контура интегрирования возьмем стремящуюся к бесконечности полуокружность в верхней полуплоскости. В результате имеем соотношения, позволяющие найти $f(k)$, зная только $\delta(k)$ ($E = k^2$, а P — символ главного значения),

$$\ln \tau(k) = -\frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\delta(\sqrt{E'})}{E' - E} dE', \quad (5.35)$$

$$\delta(k) = \frac{1}{\pi} \sqrt{E} P \int_0^{\infty} \frac{\ln \tau(\sqrt{E'})}{E' - E} \frac{dE'}{\sqrt{E'}}.$$

Если $f(-k)$ имеет нули при $\text{Im } k > 0$, то вместо (5.35) следует написать

$$\ln \tau(k) = -\frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\delta(\sqrt{E'})}{E' - E} dE' + \sum_{m=1}^p \ln \frac{E - k_m^2}{E}, \quad (5.36)$$

$$\delta(k) = \frac{1}{\pi} \sqrt{E} P \int_0^{\infty} \frac{\ln \tau(\sqrt{E'})}{E' - E} \frac{dE'}{\sqrt{E'}} - \frac{1}{i} \sum_{m=1}^p \ln \frac{k - k_m}{k + k_m},$$

где k_m ($m = 1, \dots, p$) — нули функции $f(-k)$ при $\text{Im } k > 0$.

В этом случае функция $\delta(k)$ не останется более непрерывной при $\text{Im } k = 0$, если по-прежнему $\delta(\pm \infty) = 0$. Действительно, из (5.36) получаем

$$\lim_{k \rightarrow 0+} \delta(k) = p\pi,$$

откуда следует теорема.

Теорема 6 (теорема Левинсона) [62] (см. также [51])

$$\delta(0+) - \delta(\infty) = p\pi. \quad (5.37)$$

Полезность этой теоремы станет ясной после прочтения гл. 7, где будет показано, что каждый нуль $f(-k)$ при $\text{Im } k > 0$ соответствует связанному состоянию.

При $f(0) = 0$ формула (5.37) модифицируется [76],

$$\delta(0) - \delta(\infty) = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

При $\lambda \neq 1/2$ из (4.5), (5.5), (5.17) аналогичным образом имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(\lambda, -k) = 1, \quad 0 \leq \arg k \leq \pi, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Однако в общем случае фаза $\delta(k)$, определенная соотношением (5.21), не будет вещественной. Для физических значений λ формулы (5.35), (5.36) сохраняются при замене $f(k)$ на $F(\lambda, k)$ и имеет место обобщение (5.37)

$$\delta_l(0+) - \delta_l(\infty) = p\pi.$$

Если $l \geq 1$ и $F_l(0) = 0$, то в предыдущей формуле p заменяется на $p+1$ [76].

§ 6. Потенциалы, убывающие быстрее экспоненты

К числу таких потенциалов мы относим те потенциалы, для которых функция $Q(x)$ из (4.5)

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{y |V(y)|}{1 + |k|y} e^{(b+|b|)y} dy$$

существует при любом b . В этом случае решения Иоста и функция Иоста имеют только один кинематический разрез, начинающийся при $k=0$. Ограничимся здесь рассмотрением только S -волн, так как для этого случая у нас уже получены все необходимые соотношения.

Из изложенного выше следует, что $f(k, x)$ и $f(k)$ являются целыми функциями k . Можно различать следующие два случая:

- существует такое R , что $V(x) = 0$ при $x > R$;
- такого R не существует.

В случае «а» можно ввести функцию $\tilde{g}(k, x) = \exp(ikx)f(k, x)$, удовлетворяющую уравнению, которое вытекает из (5.3):

$$g(k, x) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^R [1 - e^{2ik(x-y)}] V(y) g(k, y) dy.$$

Разложим g следующим образом:

$$g(k, x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(k, x),$$

где $g_0(k, x) = 1$ и

$$g_n(k, x) = \frac{1}{2ik} \int_x^R [1 - e^{2ik(x-y)}] V(y) g_{n-1}(k, y) dy.$$

Имеем далее оценку

$$|g_n(k, x)| \leq \frac{1}{|k|} e^{2b|R-x|} \int_x^R |V(y)| |g_{n-1}(k, y)| e^{2b(y-R)} dy,$$

$$|g_1(k, x)| \leq \frac{1}{|k|} e^{2b|R-x|} N_R(x),$$

где

$$N_R(x) = \theta(R-x) \int_x^R |V(y)| dy.$$

Нетрудно доказать последовательно, что

$$|g_n(k, x)| \leq \frac{1}{|k|^n} e^{2b|R-x|} \frac{N_R^n(x)}{n!}.$$

Следовательно,

$$|g(k, x) - 1| < e^{2b|R-x|} [e^{N_R(x)/|k|} - 1].$$

Если теперь $|k| \rightarrow \infty$, то легко видеть, что при $R > x$ функция $g(k, x)$ имеет экспоненциальный порядок (см. примечание к стр. 25) и относится к типу $2(R-x)$; если же $x > R$, то $g(k, x)$ обращается в единицу. Так как $f(k) = g(k, 0)$, то $f(k)$ относится к типу $2R$, что легко проверить для функции Иоста в случае прямоугольной потенциальной ямы $V(x) = V_0 \theta(R-x)$:

$$f(k) = \frac{1}{2} e^{-ikR} \left[\left(1 - \frac{k}{k'}\right) e^{-ik'R} + \left(1 + \frac{k}{k'}\right) e^{ik'R} \right],$$

$$k'^2 = k^2 - V_0.$$

Интересным следствием приведенного положения является то обстоятельство, что $f(k)$ имеет бесконеч-

ное число нулей. Действительно, $G(E) = f(k)f(-k)$ является целой функцией E порядка $1/2$ и заведомо имеет, согласно общим теоремам [12], бесконечное число нулей. Поскольку связанным состояниям соответствует только конечное число нулей, соответствующая система должна обладать бесконечным числом антисвязанных состояний и резонансов (см. гл. 7). В действительности во всех подробно изученных случаях число антисвязанных состояний также оказалось конечным. Можно дать весьма подробное описание асимптотического распределения указанных нулей [88], однако такое исследование носит в значительной мере академический характер, так как ясно, что при больших $|k|$ и $\text{Im } k > 0$ даже малое изменение потенциала вызывает качественное изменение членов разложения $f(k)$.

Все, что нам известно о случае «б», ограничивается исследованием Сартори [91], который показал, что если при больших x

$$|V(x)| < A \exp \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^{1+B} \right],$$

где $B > 1$, то $f(k)$ имеет порядок $1 + 1/B$. Аналогичным образом можно вывести заключения о существовании и распределении нулей $f(k)$.

ЮКАВСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

§ 1. Определение

В предыдущих главах мы ограничились обсуждением тех свойств $f(\lambda, k, x)$ и $\varphi(\lambda, k, x)$, которые непосредственно следуют из условий (3.2) на потенциалы. Однако теория поля весьма определенно указывает на то, что класс потенциалов, представляющих реальный интерес, в действительности много уже [23, 24].

Сейчас большинством признается, что потенциальное рассеяние может рассматриваться как нерелятивистский предел теории поля только тогда, когда $V(x)$ может быть записано в следующем виде:

$$V(x) = \int_m^{\infty} C(\mu) e^{-\mu x} d\mu, \quad (6.1)$$

где $C(\mu)$ — вообще говоря, обобщенная функция. Потенциалы указанного вида называются юкавскими потенциалами. Специфической особенностью таких потенциалов является то, что они могут быть определены для комплексных x . Условие (6.1) означает, что $V(x)$ является преобразованием Лапласа некоторой (обобщенной) функции.

Для большей ясности мы будем в дальнейшем использовать x только для обозначения вещественной переменной, а через z будем обозначать комплексную переменную:

$$z = x + iy, \quad \operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y.$$

Формула

$$V(z) = \int_m^{\infty} C(\mu) e^{-\mu z} d\mu \quad (6.2)$$

обычным образом определяет $V(z)$ при $\operatorname{Re} z = x > x_0$, где x_0 зависит от конкретного вида $C(\mu)$. Опреде-

ленная таким образом функция $V(z)$ является аналитической в области $\text{Re}z > x_0$. При $x < x_0$ интеграл в правой части уравнения (6.2) расходится. Для теории потенциального рассеяния требуется, чтобы $V(x)$ было определено при всех положительных x , т. е. обязательно должно быть $x_0 \leq 0$ (ниже это всегда предполагается).

Кроме (6.1), мы по-прежнему сохраняем условия (3.2). Для этого достаточно, чтобы

$$\int_0^{\infty} x |V(x)| dx \leq \int_m^{\infty} |C(\mu)| d\mu \int_0^{\infty} x e^{-\mu x} dx = \\ = \int_m^{\infty} |C(\mu)| \frac{d\mu}{\mu^2} < \infty. \quad (6.3)$$

Если $C(\mu)$ представляет собой функцию ограниченного изменения, то соотношение (6.1) можно записать в виде интеграла Стильтеса

$$V(z) = \int_m^{\infty} \frac{e^{-\mu z}}{z} dC(\mu). \quad (6.4)$$

При вполне непрерывной $C(\mu)$ можно написать

$$V(z) = \int_m^{\infty} \frac{e^{-\mu z}}{z} \sigma(\mu) d\mu, \quad (6.5)$$

где $\sigma(\mu) = C'(\mu)$. Полагая $C(\mu) = A = \text{const}$, находим

$$V(z) = A \frac{e^{-mz}}{z}.$$

Это знаменитый потенциал Юкавы, по имени которого назван весь рассматриваемый класс потенциалов.

§ 2. Аналитические свойства волновых функций

Если $V(z)$ — юкавский потенциал, то из теоремы 6 гл. 2 сразу следует, что $\phi(\lambda, k, z)$ и $f(\lambda, k, z)$ могут быть продолжены в комплексную плоскость z при $x > 0$. Из этого вывода вытекают очень важные

следствия, касающиеся аналитических свойств $f(\lambda, k, z)$ как функции k при фиксированных z и λ .

Чтобы показать это, воспользуемся методом [16], основы которого были изложены Дейчем [30] при описании свойств преобразования Лапласа. Запишем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + k^2\psi - \frac{\lambda^2 - 1/4}{z^2}\psi - V(z)\psi = 0$$

вдоль фиксированного луча $\arg z = \varphi$ или $z = \rho e^{i\varphi}$, где φ — фиксированный параметр, а ρ играет роль x . В этом случае

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + e^{2i\varphi} [k^2 - V(\rho e^{i\varphi})] \psi - \frac{\lambda^2 - 1/4}{\rho^2} \psi = 0. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) может быть представлено в виде нового уравнения для парциальных волн

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + h^2\psi - \frac{\lambda^2 - 1/4}{\rho^2}\psi - W\psi = 0, \quad (6.7)$$

где

$$h = k e^{i\varphi}, \quad W(\rho) = V(\rho e^{i\varphi}) e^{2i\varphi}.$$

Для этого нового уравнения можно определить свое решение Иоста $f_1(\lambda, h, \rho)$. Чтобы избежать путаницы на данном этапе вычислений, мы будем явно указывать вид потенциала в аргументе функции Иоста:

$$\begin{aligned} f(\lambda, k, z) &= f[\lambda, k, z; V(z)], \\ f_1(\lambda, h, \rho) &= f[\lambda, h, \rho; W(\rho)]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Согласно предыдущему, как $f_1(\lambda, h, \rho)$, так и $f_1(\lambda, -h, \rho)$ могут быть продолжены в область комплексных значений h и ρ . В частности, $f_1(\lambda, h, \rho)$ будет аналитической функцией h при $\text{Im } h < 0$. Продолжение по ρ достигнет в конце концов области $x > 0$, соответствующей области существования $f(\lambda, k, z)$. В свою очередь $f(\lambda, k, z)$ может быть продолжено до вещественной оси ρ и будет удовлетворять там уравнению (6.7).

Будем считать теперь ρ в функциях $f(\lambda, k, z)$ и $f_1(\lambda, h, \rho)$, определяемых соответственно (6.8), веще-

ственным. Обе функции будут при этом решениями уравнения (6.7) и, следовательно,

$$f(\lambda, k, z) = \alpha f_1(\lambda, h, \rho) + \beta f_1(\lambda, -h, \rho). \quad (6.9)$$

Коэффициенты α и β не зависят от ρ и, следовательно, можно считать, что соотношение (6.9) справедливо во всей z - или ρ -плоскости. Однако эти коэффициенты зависят, вообще говоря, от φ и k , причем очевидно, что $\alpha(\varphi)$ и $\beta(\varphi)$ удовлетворяют условиям $\alpha(0) = 1$ и $\beta(0) = 0$. Более того, можно вообще показать, что в действительности всегда $\beta(\varphi) = 0$ и $\alpha(\varphi) = 1$, т. е. что

$$f(\lambda, k, z) = f_1(\lambda, h, \rho). \quad (6.10)$$

Для доказательства выберем такую область D комплексной k -плоскости, в которой $\text{Im } k < 0$, $\text{Im } h < 0$. В области D обе функции $f(\lambda, k, z)$ и $f_1(\lambda, h, \rho)$ определены и экспоненциально убывают вдоль вещественных осей z и ρ соответственно. Нельзя, однако, пока утверждать, что функция $f(\lambda, k, z)$ всегда экспоненциально убывает вдоль вещественной оси ρ , поскольку не доказано еще равенство $\beta = 0$. Однако из гл. 4 известно следующее [напоминаем, что $\exp(-ikz) = \exp(-ih\rho)$]:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} e^{-ikz} f(\lambda, k, z) = \beta(\varphi).$$

Используем теперь теорему Монтеля (теорема 14 гл. 2). Полагая

$$f(z) = f(\lambda, k, z) e^{-ikz}, \quad \sigma = \varphi - \delta,$$

видим, что из этой теоремы следует равенство $\beta(\sigma) = \beta(0) = 0$. Подобным образом мы доказали только первую часть высказанного утверждения. Окончательно высказанное положение можно доказать, рассмотрев также случай

$$f(z) = f(\lambda, k, z) e^{ikz}.$$

Так как уже известно, что $\beta = 0$, достаточно лишь отождествить в теореме Монтеля b с $\alpha(0)$ и a с $\alpha(\sigma)$, чтобы сразу получить $\alpha(0) = \alpha(\sigma) = 1$. Таким образом, равенство (6.10) доказано.

Из сказанного выше ясна эффективность метода Дейча. Функции, стоящие в левой и правой частях равенства (6.10), являются аналитическими функциями k , но аналитичность каждой из них доказана в различных областях. Соотношение (6.10) показывает, что эти функции являются частями одной аналитической функции, регулярной в обеих областях. Следовательно, можно заключить, что функция $f(\lambda, k, z)$ может быть продолжена во все области этого вида с $\text{Im } h < 0$, где $h = ke^{i\varphi}$ и $|\varphi| < \pi/2$. Сумма всех этих областей составляет всю k -плоскость с разрезом вдоль верхней мнимой полуоси. Указанный вывод справедлив, естественно, при любом конечном λ , поскольку, как было показано в гл. 5, $f(\lambda, k, z)$ — четная целая функция λ .

Полученный выше результат доказан, очевидно, только для юкавских потенциалов. Не идущие столь далеко выводы могут быть получены при менее сильных, чем это было принято ранее, предположениях о виде $V(z)$, в частности для потенциалов аналитических и ограниченных внутри сектора $|\arg z| < \sigma$. Окончательная область аналитичности по k будет в последнем случае суммой областей вида $\text{Im}(ke^{i\varphi}) < 0$, где теперь $|\varphi| < \sigma$. При этом без дополнительных рассуждений ясно, что $df(\lambda, k, z)/dz$ является аналитической функцией k в той же области, что и $f(\lambda, k, z)$.

§ 3. Рассмотрение S -волн по Мартину

Причина возникновения разреза вдоль верхней мнимой полуоси не может быть разъяснена без дальнейшей специализации вида юкавского потенциала. Рассматривая эту проблему, Мартин [69, 70], а также де Альфаро и Розетти [26] получили интересное интегральное представление для $f(\lambda, k, z)$, устанавливающее тесную связь между видом функций $C(\mu)$ или $\sigma(\mu)$, определяемых уравнениями (6.1) и (6.5), и особенностями функции $f(\lambda, k)$ на верхней мнимой полуоси. Указанные работы существенно разъясняют общую ситуацию и заслуживают детального изложения.

Остановимся сначала на методе Мартина для S-волн. Рассмотрим функцию

$$g(k, x) = e^{-ikxf} \left(\frac{1}{2}, k, x \right).$$

Подставляя эту функцию в уравнение Шредингера для S-волн [уравнение (3.6) при $\lambda = 1/2$], находим, что $g(k, x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$g''(k, x) - 2ikg'(k, x) - V(x)g(k, x) = 0. \quad (6.11)$$

Исходным пунктом излагаемого метода является следующая подстановка:

$$g(k, x) = 1 + \int_m^{\infty} \rho(k, \alpha) e^{-\alpha x} d\alpha. \quad (6.12)$$

Подставляя (6.12) в (6.11) и используя теорему о произведении двух преобразований Лапласа, получаем следующее интегральное уравнение для $\rho(k, \alpha)$:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha + 2ik)\rho(k, \alpha) = \\ = C(\alpha) + \theta(\alpha - 2m) \int_m^{\alpha-m} C(\alpha - \beta)\rho(k, \beta) d\beta, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$. При установлении пределов интегрирования использовано то обстоятельство, что $C(\alpha) = 0$ и $\rho(k, \alpha) = 0$ при $\alpha < m$.

Уравнение (6.13) имеет крайне интересную структуру, так как оно может быть решено точно посредством конечного числа итераций. В самом деле, определим итерационное разложение $\rho(k, \alpha)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(k, \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n(k, \alpha), \\ \rho_n(k, \alpha) &= \frac{1}{\alpha(\alpha + 2ik)} \int_m^{\alpha-m} C(\alpha - \beta)\rho_{n-1}(k, \beta) d\beta, \\ \rho_0(k, \alpha) &= C(\alpha). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Докажем теперь, что $\rho_n(k, \alpha) = 0$ при $\alpha < (n+1)m$. Предположим вначале, что теорема верна для $\rho_{n-1}(k, \alpha)$. Из (6.14) видно, что для получения ненулевого результата необходимо, чтобы

$$\alpha - \beta > m, \quad \beta > nm.$$

Следовательно, $\alpha > (n+1)m$ и теорема имеет место для любого n , поскольку она верна при $n=0$.

Если теперь определять с помощью итерационного разложения $\rho(k, \alpha)$ в некоторой точке, например $\alpha = A$, то всегда $A < (n+1)m$, если n достаточно велико. Начиная с этого значения, каждый дальнейший член итерационного разложения обращается в нуль и бесконечный ряд в действительности обрывается. При этом точка, где он обрывается, зависит, однако, от величины A . Данное обстоятельство несколько охлаждает первоначальный энтузиазм, поскольку при вычислении $g(k, x)$ необходимы все значения $\rho(k, \alpha)$ в области $m \leq \alpha \leq \infty$. Тем не менее установленное обстоятельство оказывается полезным при выяснении свойств $f(k)$, где $f(k) = f(\lambda, k)$ при $\lambda = 1/2$ или $l=0$.

Из (6.11) следует, что

$$f(k) = \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{2}, k, x\right) = \lim_{x \rightarrow 0} g(k, x).$$

Отсюда вытекает равенство

$$f(k) = 1 + \int_m^{\infty} \rho(k, \alpha) d\alpha. \quad (6.15)$$

Формула (6.15) представляет $f(k)$ в виде суперпозиции рациональных функций k , каждая из которых имеет особенности на верхней мнимой полуоси в соответствии с рассуждениями настоящей главы и гл. 4. Мартин усилил приведенный результат, показав равномерную и абсолютную сходимость интеграла в уравнении (6.15) при условии

$$\int_m^{\infty} \frac{d\mu}{\mu^2} \int_m^{\mu} |dC(\alpha)| = \int_m^{\infty} \frac{|\sigma(\mu)|}{\mu} d\mu < \infty,$$

которое включает в себя (6.3) и условие

$$|x^2 V(x)| < e \int_m^{\infty} \frac{|\sigma(\mu)|}{\mu} d\mu = \text{const},$$

так как

$$xe^{-\mu x} \leq \frac{1}{e\mu}.$$

Из анализа Мартина следует также¹⁾:

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} f(k) = 1, \quad (6.16)$$

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} g(k, x) = 1 \quad \text{при} \quad -\frac{3\pi}{2} < \arg k < \frac{\pi}{2}.$$

Смысл (6.16) состоит в том, что при высоких энергиях можно пренебречь влиянием потенциала. Хотя это утверждение имеет определенный математический смысл, его физическое содержание весьма условно, так как используемые нами нерелятивистская кинематика и не зависящий от энергии потенциал — предположения, никак не оправданные при высоких энергиях. Таким образом, нельзя считать (6.16) очень важным результатом.

§ 4. Методы рассмотрения в случае угловых моментов $l \geq 1$

Центробежный член в уравнении Шредингера для l -й волны (3.1) затрудняет распространение анализа § 1 настоящей главы на случай волн с $l \geq 1$. Анализ этого случая был проделан двумя различными способами Мартином [70] и де Альфаро и Розетти [26].

При этом Мартин сохранил интегральное представление вида (6.12), просто добавив к потенциалу

¹⁾ Приводимый результат не ограничивается в отличие от (5.34) случаем $-\pi \leq \arg k \leq 0$; он сохраняет силу только для юкавских потенциалов,

центробежный член

$$V(x) + \frac{l(l+1)}{x^2} = \int_m^\infty C(\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha + l(l+1) \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx. \quad (6.17)$$

После этого сразу приходим к формуле (6.13), в которой $C(\alpha)$ заменено на $\bar{C}(\alpha) = C(\alpha) + l(l+1)\alpha$. Однако, вообще говоря, $\bar{C}(\alpha)$ не обращается более в нуль при $\alpha < m$, и простой анализ § 3 становится невозможным. Трудность состоит в том, что центробежный член является дальнедействующим, и так как область действия потенциала характеризуется величиной $1/m$, то вклад этого члена в $\bar{C}(\alpha)$ начинается от нуля ($\alpha=0$).

Мартин обошел эту трудность, рассмотрев сначала отдельно влияние центробежного барьера [т. е. он положил вначале $C(\alpha)=0$]. Если обозначить через $\rho^0(k, \alpha)$ соответствующее решение, то

$$\alpha(\alpha + 2ik)\rho^0(k, \alpha) = l(l+1) \left[\alpha + \int_0^\alpha (\alpha - \beta)\rho^0(k, \beta) d\beta \right]. \quad (6.18)$$

Дифференцируя обе части (6.18), получаем уравнение

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\alpha(\alpha + 2ik) \frac{d}{d\alpha} y^0(k, \alpha) \right] = l(l+1) y^0(k, \alpha), \quad (6.19)$$

где

$$y^0(k, \alpha) = 1 + \int_0^\alpha \rho^0(k, \beta) d\beta. \quad (6.20)$$

Уравнение (6.19) просто преобразуется в уравнение Лежандра

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{du}{dz} \right] + l(l+1)u = 0.$$

Действительно, легко проверить, что

$$y^0(k, \alpha) = P_l \left(1 + \frac{\alpha}{ik} \right)$$

и, следовательно,

$$\rho^0(k, \alpha) = \frac{d}{d\alpha} P_l \left(1 + \frac{\alpha}{ik} \right).$$

Приведенное соотношение учитывает граничное условие $y^0(k, 0) = 1$, вытекающее из (6.20).

Вернемся теперь к полному уравнению и рассмотрим случай $C(\alpha) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha + 2ik)\rho(k, \alpha) - l(l+1) \left[\alpha + \int_0^\alpha (\alpha - \beta)\rho(k, \beta) d\beta \right] = \\ = C(\alpha) + \int_m^{\alpha-m} C(\alpha - \beta)\rho(k, \beta) d\beta. \quad (6.21) \end{aligned}$$

Как и раньше, положим

$$y(k, \alpha) = 1 + \int_0^\alpha \rho(k, \beta) d\beta.$$

Дифференцирование (6.21) дает

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\alpha(\alpha + 2ik) \frac{dy}{d\alpha} \right] = l(l+1)y(k, \alpha) + \frac{d\chi(k, \alpha)}{d\alpha}, \quad (6.22)$$

где

$$\chi(k, \alpha) = C(\alpha) + \int_m^{\alpha-m} C(\alpha - \beta)\rho(k, \beta) d\beta. \quad (6.23)$$

Рассматривая (6.22) как неоднородное дифференциальное уравнение и применяя стандартные приемы, получаем

$$\begin{aligned} y(k, \alpha) = P_l \left(1 + \frac{\alpha}{2ik} \right) - \\ - \frac{i}{k} \int_0^\alpha \left[P_l \left(1 + \frac{\alpha}{ik} \right) Q_l \left(1 + \frac{\beta}{ik} \right) - \right. \\ \left. - P_l \left(1 + \frac{\beta}{ik} \right) Q_l \left(1 + \frac{\alpha}{ik} \right) \right] \frac{d\chi(k, \beta)}{d\beta} d\beta. \quad (6.24) \end{aligned}$$

Основываясь на формулах (6.23) и (6.24), можно получить итерационную схему решения. Действитель-

но, если величина $y(k, \alpha)$ построена до значения $\alpha = nm$, то после подстановки в (6.23), (6.24) она определяется далее до значения $(n+1)m$.

Другую итерационную схему предложили де Альфаро и Розетти. Исходным пунктом ее является подстановка ($\lambda = l + 1/2$):

$$f(\lambda, -k, x) = \\ = kx e^{i(\pi/2)(l+1)} \int_0^{\infty} \left(\frac{k+i\sigma}{k}\right)^{l+1} \rho_l(k, \sigma) h_l^{(1)}[(k+i\sigma)x] d\sigma. \quad (6.25)$$

Здесь через $h_l^{(1)}[(k+i\sigma)x]$ обозначена так называемая сферическая функция Ганкеля первого рода, определяемая равенством

$$h_l^{(1)}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} H_{l+1/2}^{(1)}(x).$$

Смысл подстановки (6.25) состоит в том, чтобы с самого начала включить центробежный барьер в волновую функцию и только $V(x)$ рассматривать как возмущение. В этом случае центробежный барьер не должен создавать трудностей, так как волновая функция представлена в (6.25) в виде суперпозиции расходящихся волн, являющихся решениями полного свободного уравнения. Сначала установим существование такой функции $K_l(k; \beta, \sigma)$, что

$$x^{-1} e^{-mx} (k+i\sigma)^{l+1} h_l^{(1)}[(k+i\sigma)x] = \\ = \int_0^{\infty} (k+i\beta)^{l+1} h_l^{(1)}[(k+i\beta)x] K_l(k; \beta, \sigma) d\beta.$$

Явная форма $K_l(k; \beta, \sigma)$ оказывается следующей:

$$K_l(k; \beta, \alpha) = \left(\frac{k+i\sigma}{k+i\beta}\right)^l \theta(\beta - \sigma - m) \left[P_l\left(\frac{k+i\beta - im}{k+i\sigma}\right) - \right. \\ \left. - \frac{i}{k+i\beta} \int_0^{\beta-m} P_l\left(\frac{k+i\gamma}{k+i\sigma}\right) P_l'\left(\frac{k+i\gamma+im}{k+i\beta}\right) d\gamma \right] = \\ = \left(\frac{k+i\sigma}{k+i\beta}\right)^l \theta(\beta - \sigma - m) P_l\left[\frac{(k+i\sigma)^2 + (k+i\beta)^2 + m^2}{2(k+i\sigma)(k+i\beta)}\right].$$

Важным моментом рассмотрения является то, что $K_l(k; \beta, \sigma) = 0$ при $\sigma > \beta - m$. Следовательно, возникает ситуация, полностью аналогичная случаю рассмотрения S -волн по Мартину. Спектральная функция $\rho_l(k, \sigma)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению [для простоты в него подставлен потенциал Юкавы $V(x) = Ae^{-mx}/x$]:

$$\rho_l(k, \sigma) = \delta(\sigma) + \frac{A}{\sigma(\sigma - 2ik)} \int_0^{\sigma - m} \rho_l(k, \beta) K_l(k; \sigma, \beta) d\beta.$$

Для конечного σ это уравнение также может быть точно решено конечным числом итерации. Нормированная функция Иоста $F(\lambda, k)$ равна

$$F(\lambda, k) = \int_0^{\infty} \rho_l(-k, \sigma) d\sigma. \quad (6.26)$$

Соответственно приведенной формуле $F(\lambda, k)$ представляет, как и ожидалось, суперпозицию рациональных функций k с особенностями вдоль верхней мнимой полуоси. Равномерная сходимость (6.26) может быть доказана так же, как и ранее.

§ 5. N/D -метод

Рассмотрим амплитуду перехода для S -волны в случае юкавского потенциала как функцию энергии E :

$$a(E) = \frac{1}{2ik} \left[S\left(\frac{1}{2}, k\right) - 1 \right].$$

Каждому E мы сопоставим такое $k = \sqrt{E}$, что $\text{Im } k > 0$. В этом случае $a(E)$ — аналитическая функция E в комплексной плоскости E имеет следующие особенности:

1) левый разрез $-\infty \leq E \leq -m^2/4$, соответствующий разрезу в k -плоскости для $S(1/2, k)$ по верхней мнимой полуоси;

2) полюсы при $E = E_n < 0$, сопоставляемые, как будет показано в гл. 7, связанным состояниям;

3) правый разрез вдоль $0 \leq E \leq \infty$, возникающий из-за двузначности функции $k = \sqrt{E}$. Действительно, если $k = |\sqrt{E}|$ при $E > 0$, то

$$a(E + i\epsilon) = \frac{1}{2ik} \left[S\left(\frac{1}{2}, k\right) - 1 \right],$$

$$a(E - i\epsilon) = -\frac{1}{2ik} \left[S\left(\frac{1}{2}, -k\right) - 1 \right].$$

Из (5.26) для вещественных $E > 0$ имеем

$$\text{Im } a = k |a|^2. \quad (6.27)$$

Постараемся теперь, основываясь на (6.27) и знании скачка на левом разрезе, найти величину $a(E)$ при стремлении E к вещественным положительным значениям со стороны верхней полуплоскости $\text{Im } E > 0$ (т. е. при физических значениях E). Ясно, что задание скачка на левом разрезе в значительной степени эквивалентно заданию спектральной функции $\sigma(\mu)$ в соотношении (6.5), т. е. задание левого разреза можно рассматривать как некоторый способ представления действующих в системе сил.

Решения поставленной проблемы [80, 10] найдем путем представления $a(E)$ в виде

$$a(E) = \frac{N(E)}{D(E)}.$$

При этом на функции $N(E)$ и $D(E)$ налагаются следующие условия:

- 1) $N(E)$ имеет только левый разрез,
- 2) $D(E)$ имеет только правый разрез и простые нули в полюсах $a(E)$,
- 3) $N(E) = o(1/k)$ при $|E| \rightarrow \infty$,
- 4) $D(E) \rightarrow 1$ при $|E| \rightarrow \infty$,
- 5) $D(E)$ вещественна при $E < 0$,
- 6) $N(E)$ вещественна при $E > -\frac{m^2}{4}$.

Условия 3 и 4 вытекают из сказанного в гл. 4 и 5. При изучении конкретных физических задач, выходящих за рамки потенциального рассеяния, эти условия могут быть ослаблены или видоизменены.

Соответственно сказанному имеем

$$N(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2/4} \frac{\operatorname{Im} N(E')}{E' - E - i\varepsilon} dE',$$

$$D(E) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} D(E')}{E' - E - i\varepsilon} dE',$$

где $\varepsilon > 0$.

Зададим далее скачок $2iq(-E)$ на разрезе $-\infty < E < -m^2/4$:

$$\begin{aligned} 2iq(-E) &\equiv a(E + i\varepsilon) - a(E - i\varepsilon) = \\ &= 2i \operatorname{Im} a(E) = 2i \frac{\operatorname{Im} N(E)}{D(E)}, \quad E < -\frac{m^2}{4}, \end{aligned}$$

так что

$$\operatorname{Im} N(E) = q(-E) D(E) \quad \text{при} \quad E < -\frac{m^2}{4}.$$

Если $E > 0$, то имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} a(E) &= \operatorname{Im} \frac{N(E)}{D(E)} = -\frac{N(E)}{|D(E)|^2} \operatorname{Im} D(E) = \\ &= k |a|^2 = k \frac{N^2(E)}{|D(E)|^2} \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{Im} D(E) = \sqrt{E} N(E) \quad \text{при} \quad E > 0.$$

Следовательно, получаем два связанных интегральных уравнения: для $D(-E)$ при $m^2/4 \leq E \leq \infty$ и для $N(E)$ при $E > 0$,

$$D(-E) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{N(E')}{E' + E} \sqrt{E'} dE',$$

$$N(E) = -\frac{1}{\pi} \int_{m^2/4}^{\infty} \frac{q(E') D(-E')}{E' + E} dE'.$$

Приведенные интегральные уравнения составляют основу так называемого обычного N/D -метода. Исключив N или D , можно получить одно линейное

несингулярное интегральное уравнение, которое решается стандартными способами. После определения $D(E)$ нахождение полюсов не представляет затруднений.

Можно показать [10], что для $N(E)$ и $D(E)$ справедливы следующие соотношения:

$$N(E) = \frac{1}{2ik} [f(k) - f(-k)],$$

$$D(E) = f(-k).$$

Все вычисления можно вести также с помощью более простого метода [71], в котором единственной искомой величиной является функция Иоста. Этот метод был впервые использован для восстановления потенциала по $q(-E)$. Пусть $k = i\xi$; напомним, что $S(k)$ имеет скачок $2iv(\xi)$ вдоль верхней мнимой полуоси, причем $v(\xi) = -2\xi q(\xi^2)$. С другой стороны, пусть $S(k) = f(i\xi)/f(-i\xi)$ и $f(k)$ допускает интегральное представление

$$f(k) = 1 - \frac{1}{i\pi} \int_{m/2}^{\infty} \frac{\varphi(i\xi')}{k - i\xi'} d\xi'.$$

Положим $f(i\xi) = A(\xi)$; тогда скачок $v(\xi)$ будет равен

$$v(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{A(-\xi)},$$

так что

$$A(\xi) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{m/2}^{\infty} \frac{v(\xi') A(-\xi')}{\xi' - \xi} d\xi'. \quad (6.28)$$

Соотношение (6.28) можно рассматривать как интегральное уравнение типа Фредгольма относительно $A(\xi)$ [27] и решать его соответственно.

После того как величина $A(\xi)$ становится известной при $\xi < -m/2$, то же уравнение (6.28) позволяет продолжить ее на комплексные ξ , т. е. на вещественные k , и таким образом амплитуда рассеяния может быть полностью восстановлена. Детальный анализ показывает, что достаточным условием существования

решения (6.28) является выполнение неравенства

$$\int_{m/2}^{\infty} \frac{|v(\xi)|}{\xi} d\xi < 2\pi \ln 2. \quad (6.29)$$

Приведенное выше рассмотрение ограничено случаем потенциального рассеяния в том отношении, что предполагается $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} A(\xi) = 0$. Аналогичные по существу уравнения могут быть записаны также в случае, когда необходимы вычитания, причем получаются амплитуды, зависящие, вообще говоря, от констант вычитания. Соответствующие неоднозначности связаны с полюсами Кастильехо — Далица — Дайсона [21], которые в настоящей книге не рассматриваются.

§ 6. Соотношение между $v(\xi)$ и потенциалом

Мартин [71] доказал следующее интересное соотношение:

$$-\frac{2\xi}{\pi} v(\xi) = C(2\xi) + \int_m^{2\xi-m} C(2\xi - \alpha) \rho(i\xi, \alpha) d\alpha. \quad (6.30)$$

С помощью (6.13) и (6.30) ему удалось восстановить $C(\mu)$ по виду $v(\xi)$. Действительно, предположим, что функция $v(\xi)$ известна в интервале $m/2 \leq \xi \leq nm/2$; тогда известна также и функция $C(\mu)$ при $m < \mu < nm$. Из формулы (6.13) в этом случае получаем $\rho(i\xi, \alpha)$ до значений $\alpha < (n+1)m$. После этого формула (6.30) позволяет вычислить $C(2\xi)$ при $\xi < (n+1)m/2$ и $2\xi - \alpha < nm$, если известна $v(\xi)$. Так как $\alpha > m$, то достаточно, чтобы

$$2\xi < (n+1)m < nm + \alpha.$$

Таким образом, приведенное свойство может быть доказано по индукции, так что достаточно доказать его при $n=2$. В самом деле, при $\xi < m$

$$\frac{2\xi}{\pi} v(\xi) = -C(2\xi).$$

Приведенная схема последовательных приближений позволяет восстановить потенциал по $v(\xi)$, т. е. зная только сдвиги фаз. При этом потенциал, очевидно, однозначен, благодаря чему возникает кажущийся парадокс, связанный с тем, что, согласно гл. 12, должна существовать целая группа потенциалов с эквивалентными сдвигами фаз по числу произвольных параметров, характеризующих связанные состояния системы (см. гл. 7).

Предположим для простоты, что существует только одно связанное состояние. Объяснение парадокса заключается в том, что метод Мартина всегда воспроизводит потенциал с наименьшим радиусом действия $1/m$ [22], в то время как все остальные потенциалы, соответствующие тем же фазам, имеют больший радиус $1/2\kappa$, если $2\kappa < m$ ($-\kappa^2$ — энергия связанного состояния). Эти потенциалы могут получиться, если нуль знаменателя $f(-k)$ включить в разрез верхней полуплоскости переменной k (см. также гл. 11, § 8).

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛЮСОВ $S(\lambda, k)$ ПРИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЯХ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ

§ 1. Связанные состояния

Выдающимся достижением теории S -матрицы явилось единое описание рассеяния и связанных состояний, основанное на использовании аналитических свойств $S(\lambda, k)$.

Связанные состояния рассматриваемой системы определяются как стационарные состояния с целочисленным угловым моментом l , описываемые квадратично интегрируемыми решениями уравнения Шредингера (1.2). Эти решения должны удовлетворять определенным граничным условиям как при $x=0$, так и при $x=\infty$. Если $E > 0$ или k вещественно, связанные состояния невозможны, поскольку все решения при больших x осциллируют и, следовательно, все интегралы вида [см. (1.3)]

$$\int d\Omega \int_0^{\infty} x^2 |\Psi(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |\varphi(\lambda, k, x)|^2 dx$$

расходятся. Как известно, из рассмотрения угловой части волновой функции вытекает, что для связанных состояний l должно быть положительным целым числом или нулем. Если считать λ лишь вещественным, то математическое рассмотрение останется, по существу, тем же.

Если E не является вещественным положительным числом, то асимптотический вид решения $\varphi(\lambda, k, x)$ при больших x (имеющего, согласно гл. 3, правильное поведение при $x=0$) будет следующим:

$$\varphi(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2ik} [f(\lambda, k) e^{ikx} - f(\lambda, -k) e^{-ikx}]. \quad (7.1)$$

Отсюда видно, что при $\text{Im } k \neq 0$ функция $\varphi(\lambda, k, x)$ ведет себя асимптотически как сумма двух экспонент,

одна из которых всегда возрастает, а другая стремится к нулю при больших x . Связанное состояние возникает только тогда, когда обращается в нуль коэффициент перед расходящимся слагаемым. Пусть $\varphi = \varphi(\lambda, k_0, x)$ — решение, соответствующее связанному состоянию и экспоненциально убывающее при больших x . В то же время φ подчиняется уравнению Шредингера

$$\varphi'' + \left[k_0^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} - V(x) \right] \varphi = 0. \quad (7.2)$$

При этом для случая потенциалов $V(x)$, вещественных при $x > 0$ (что будет предполагаться во всей главе), можно также записать

$$\varphi^{*''} + \left[k_0^{*2} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} - V(x) \right] \varphi^* = 0. \quad (7.3)$$

Из (7.2) и (7.3) получается уравнение непрерывности

$$\frac{d}{dx} [\varphi^* \varphi' - \varphi'^* \varphi] = 2i \operatorname{Im} k_0^2 \varphi^* \varphi,$$

следовательно,

$$\operatorname{Im} k_0^2 \int_0^{\infty} |\varphi|^2 dx = 0. \quad (7.4)$$

Согласно предыдущему рассмотрению, величина $\int_0^{\infty} |\varphi|^2 dx$ конечна и положительна; отсюда ясно, что

$$\operatorname{Im} k_0^2 = 2 \operatorname{Im} k_0 \operatorname{Re} k_0 = 0.$$

Так как мы уже исключили случай $\operatorname{Im} k_0 = 0$, то $\operatorname{Re} k_0 = 0$, т. е. величина k_0 чисто мнима, а E_0 вещественна и отрицательна.

Пусть $k = ib$, где b вещественно. Напомним, что $\varphi(\lambda, k, x)$ — четная функция k ; следовательно, если имеется связанное состояние при некотором k , то такое же связанное состояние будет существовать и при $-k$. Таким образом, без потери общности можно все-

гда считать, что $b > 0$. Формулу (7.1) можно переписать теперь в виде

$$\varphi(\lambda, ib, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2b} [f(\lambda, ib) e^{-bx} - f(\lambda, -ib) e^{bx}]. \quad (7.5)$$

Условием существования связанного состояния является равенство $f(\lambda, -ib) = 0$. Наоборот, если $f(\lambda, -k) = 0$, $\text{Im } k > 0$, то получаем связанное состояние, поскольку тогда

$$\varphi(\lambda, k, x) = \frac{1}{2ik} f(\lambda, k) f(\lambda, -k, x).$$

При этом функция $\varphi(\lambda, k, x)$ имеет асимптотическое поведение вида

$$\varphi(\lambda, k, x) = \text{const } e^{ikx}, \quad (7.6)$$

из которого следует, что $\varphi \in L_2(0, \infty)$ при $\text{Im } k > 0$. Из сказанного вытекает, что те нули $f(\lambda, -k)$, которые появляются в области $\text{Im } k > 0$, обязательно соответствуют чисто мнимому $k = ib$, $b > 0$. Вследствие условия эрмитовости величина φ будет при этом вещественной.

§ 2. Нормировка связанных состояний

Для многих приложений представляет интерес определение нормировочной постоянной C волновой функции связанного состояния (при $k = ib$), определяемой соотношением

$$C^{-1} = \int_0^{\infty} \varphi^2(\lambda, k, x) dx.$$

Исходным пунктом опять будет уравнение (7.2) для парциальных волн и уравнение, получающееся из него дифференцированием обеих частей по k . Используя обозначение

$$\dot{\varphi} = \left[\frac{\partial \varphi(\lambda, k, x)}{\partial k} \right]_{k=ib},$$

имеем

$$\begin{aligned}\varphi'' + \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} - V(x) \right] \varphi &= 0, \\ \dot{\varphi}'' + \left[k^2 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} - V(x) \right] \dot{\varphi} + 2k\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $\dot{\varphi}$, второе на φ и вычитая одно из другого, приходим к уравнению

$$\varphi\dot{\varphi}'' - \varphi''\dot{\varphi} + 2k\varphi^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}2k \int_0^\infty \varphi^2 dx &= [\varphi'\dot{\varphi} - \dot{\varphi}'\varphi]_0^\infty = \\ &= -\frac{1}{2ik} f(\lambda, k) \left. \frac{df(\lambda, -k)}{dk} \right|_{k=ib}.\end{aligned}$$

Окончательный результат можно представить двояко:

$$\begin{aligned}C &= -\frac{4ik^2}{f(\lambda, k) [df(\lambda, -k)/dk]} \Big|_{k=ib}, \\ C^{-1} &= -\frac{[f(\lambda, k)]^2}{2ik} e^{i\pi(\lambda-1/2)} \left. \frac{d[S(\lambda, k)]^{-1}}{dE} \right|_{k=ib}.\end{aligned}\tag{7.7}$$

§ 3. Связанные состояния и ложные полюсы

Пусть $\lambda = l + 1/2$, где l — целое положительное число или нуль, и $f(l + 1/2, k) = f_l(k)$, $S(l + 1/2, k) = S_l(k)$. Из соотношения (5.21)

$$S_l(k) = (-1)^l \frac{f_l(k)}{f_l(-k)}\tag{7.8}$$

следует, что нули $f_l(-k)$ являются в то же время полюсами $S_l(k)$. В случае юкавского потенциала $V(x)$ функция $S_l(k)$ имеет два типа особенностей: динамический разрез (при целом l кинематического разреза нет) и простые полюсы (в нулях знаменателя), в том числе полюсы, соответствующие связанным состояниям. Согласно предыдущему анализу, связанные состояния проявляются как такие полюсы $S_l(k)$, для которых $k = ib$, где b — положительное вещественное число.

Следовательно, при $\text{Im } k > 0$ функция $S_l(k)$ имеет в случае юкавских потенциалов особенности только на верхней мнимой полуоси. В прошлом это обстоятельство рассматривали как известное затруднение, поскольку возникали некоторые неясности при попытке определения связанных состояний не как нулей $f_l(-k)$, а как особенностей $S_l(k)$. Действительно, возможны случаи, когда динамический разрез вырождается в ряд полюсов (ложных полюсов); ниже мы специально рассмотрим примеры, когда полюсы не обязательно отвечают связанным состояниям [64, 52].

Указанная трудность была значительно преувеличена, и было выполнено значительное число исследований с целью исключить так называемые «ложные полюсы». Прямоугольная яма и гауссовский потенциал не дают ложных полюсов, поскольку не имеют динамического разреза; поэтому они считались предпочтительными по сравнению с полевыми потенциалами.

По современным воззрениям эти полюсы возникли случайно в силу весьма специальной природы обсуждавшегося частного примера: экспоненциальный потенциал $V(x) = A \exp(-mx)$ и S -волны. В свою очередь экспоненциальный потенциал был взят потому, что он дает точное решение уравнения для S -волн в виде функций Бесселя. Действительно, уравнение Шредингера имеет вид

$$\psi'' + (k^2 - Ae^{-mx})\psi = 0. \quad (7.9)$$

Если ввести переменную $\xi = (2\sqrt{-A/m}) \exp(-mx/2)$, то это уравнение может быть сведено к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \left[1 + \left(\frac{2k}{m} \right)^2 \frac{1}{\xi^2} \right] \psi = 0. \quad (7.10)$$

с общим интегралом

$$\psi = \alpha J_{2l/k/m}(\xi) + \beta J_{-2l/k/m}(\xi).$$

Учитывая соответствующие граничные условия, получаем

$$f(k, x) = f\left(\frac{1}{2}, k, x\right) = \\ = \left(\frac{\sqrt{-A}}{m}\right)^{-2ik/m} \Gamma\left(\frac{2ik}{m} + 1\right) J_{2ik/m}\left(\frac{2\sqrt{-A}}{m} e^{-mx/2}\right). \quad (7.11)$$

Из рассмотрения обычного степенного разложения функции Бесселя

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \quad (7.12)$$

видно, что особенностями $f(k, x)$ являются простые полюсы, расположенные в точках $k = inm/2$, $n = 1, 2, \dots$. Из уравнений (7.12) и (7.11) следует, что $f(k, x)$ имеет вид

$$f(k, x) = e^{-ikx} + e^{-ikx} \int_m^{\infty} \rho(k, \alpha) e^{-\alpha x} d\alpha,$$

где

$$\rho(k, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(\alpha - mn) \left(\frac{A}{m^2}\right)^n \frac{\Gamma[(2ik/m) + 1]}{\Gamma[(2ik/m) + n + 1] n!}.$$

В приведенной форме настоящий результат очень похож на выражение, использованное в методе Мартина (см. гл. 6). По существу, метод Мартина представляет собой далеко идущее обобщение рассмотренного примера в том смысле, что он использует возможность разложения по нецелым степеням величины $\exp(-mx/2)$. Из только что приведенного обсуждения ясно, что ложные полюсы возникают тогда, когда $S(\alpha)$ является дираковской δ -функцией или суперпозицией δ -функций. По этой причине сразу исключаются как стандартный потенциал Юкавы, так и все потенциалы, следующие из теории поля. Во всяком случае, если раньше, когда поставленная проблема ложных полюсов считалась существенной, внимание было сосредоточено на парциальных волнах, то теперь

в основном рассматривается полная амплитуда рассеяния, которой не соответствует верхний динамический разрез; сейчас вообще не встает вопрос о том, являются ли все полюсы связанными состояниями.

Для сравнения с (7.11) приведем здесь функции Иоста S -волн для случая прямоугольной ямы $V(x) = V_0 \theta(a-x)$ и одного из потенциалов Баргмана (см. гл. 12):

а) для $V(x) = V_0 \theta(a-x)$

$$f(k) = \frac{1}{2} e^{-ika} \left[\left(1 - \frac{k}{k'}\right) e^{-ik'a} + \left(1 + \frac{k}{k'}\right) e^{ik'a} \right],$$

где $k'^2 = k^2 - V_0$;

б) для потенциала Эккарта

$$V(x) = -2Am^2 \frac{\exp(-mx)}{[A \exp(-mx) + 1]^2}$$

имеем

$$f(k) = \frac{2k + iv}{2k - im},$$

где $v = m(A - 1)/(A + 1)$.

§ 4. Резонансы

Как мы только что видели, связанным состояниям соответствуют нули $f_l(-k)$ в области $\text{Im } k > 0$ при целочисленном l . Естественно поставить вопрос, как интерпретировать подобные нули при произвольных значениях k . В случае связанных состояний математические свойства волновой функции (в отличие от их физической интерпретации) остаются неизменными при любых вещественных λ . При произвольных k (при $\text{Im } k > 0$ или $\text{Im } k < 0$) вывод § 1, сформулированный в виде равенства (7.4), более не сохраняет силы, поскольку (7.6) показывает, что соответствующая волновая функция не будет, вообще говоря, входить в $L_2(0, \infty)$. Полученное выше для связанных состояний заключение о том, что $\text{Re } k = 0$, перестает быть верным. Следовательно, если $\text{Im } k < 0$, то на положение нулей не накладывается никаких априорных ограничений, не зависящих от конкретного вида потенциала.

Предположим, что подобный нуль существует при $k = h + ib$, где $b < 0$. Вспоминая свойство эрмитовости

$$[f_l(k)]^* = f_l(-k^*),$$

приходим к заключению, что $-h + ib$ также будет нулем. Новый нуль будет, вообще говоря, отличаться от старого, если только $h \neq 0$. Пары нулей с $h \neq 0$ обычно называются резонансами, а при $h = 0$ — нулями, соответствующими антисвязанным или виртуальным состояниям.

Резонансы обладают весьма интересными свойствами, которые впервые стали понятными из известной теории Брейта — Вигнера. Мы дадим здесь краткое резюме этой теории, делая ударение на ее математической стороне.

Прежде всего для резонансов b никогда не равно нулю. В противном случае при $k = h$ должны были бы обращаться в нуль одновременно $f_l(k)$ и $f_l(-k)$, а следовательно, в силу (7.5) и φ при всех значениях x ; это приводит к противоречию, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-l-1} \varphi = 1.$$

Нельзя, однако, исключить возможность того, что для некоторых нулей величина $|b|$ окажется малой. Фактическая величина b определяется потенциалом. Предположим теперь, что для одной из S -волновых резонансных пар величина $|b|$ действительно мала по сравнению с h . Рассмотрим воображаемый эксперимент по рассеянию при энергии, весьма близкой к h^2 , т. е. при k , близком по величине к $\pm h$. Для подсчета сечения необходимо определить сначала сдвиг фазы, используя (7.8) [$S(k) = S(1/2, k)$]:

$$S(k) = \frac{f(k)}{f(-k)}. \quad (7.13)$$

Как числитель, так и знаменатель (7.13) определяются вблизи одного из нулей резонансной пары. В качестве первого приближения можно попытаться разложить $f(k)$ и $f(-k)$ по степеням $k - h + ib$ и $k - h - ib$ соответственно ($b < 0$). С учетом свойства эрмитово-

сти такое разложение должно иметь вид

$$\begin{aligned} f(k) &\approx C(k - h + ib), \\ f(-k) &= [f(k^*)]^* \approx C^*(k - h - ib), \end{aligned}$$

где C — некоторая константа. Отсюда следует, что вблизи резонанса функция $S(k)$ допускает представление

$$S(k) = e^{2i\delta(k)} \approx e^{2i \arg C} \frac{k - h + ib}{k - h - ib}. \quad (7.14)$$

Для простоты будем считать $\arg C = 0$. В этом случае после простых вычислений имеем

$$\sin^2 \delta(k) \approx \frac{b^2}{(k - h)^2 + b^2}. \quad (7.15)$$

Переходя к энергетической переменной, соотношение (7.15) можно переписать в виде

$$\sin^2 \delta(k) \approx \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}, \quad E_0 = h^2, \quad \Gamma = 4|b|h.$$

Из (7.15) видно, что вклад S -волны в полное сечение имеет острый максимум при $k = h$. Если величина $k - h$ велика по сравнению с b , то формула (7.15) перестает быть справедливой и сечение нужно определять по-другому, а именно непосредственно решая волновое уравнение. Можно, однако, ожидать, что $\sin^2 \delta(k)$, а следовательно, и полное сечение будут медленно меняющимися функциями, когда k лежит далеко от h , и обладать острым пиком при k вблизи h . Согласно (7.15), ширина пика по переменной k равна $2|b|$, а по переменной $E = k^2$ равна $4|b|h$.

Более детальное рассмотрение (7.14) показывает, что при переходе от $k \ll h$ к $k \gg h$ сдвиг фазы изменяется на величину π . Если ниже резонанса величина $\delta(k)$ близка к нулю, то при энергии, большей энергии резонанса, она достигает π . При этом в самой точке резонанса $\delta(k)$ составляет $\pi/2$, так как, согласно (7.15), при $k = h$ $\sin^2 \delta = 1$. Если C комплексно, то $\delta(k)$ будет изменяться от некоторого исходного значения $\arg C$ до $\arg C + \pi$, но в любом случае пройдет через некоторое полуцелое значение фазы, кратное π .

в точке резкого максимума сечения, где $\sin^2 \delta = 1$. Сказанное разъясняет, почему часто говорят, что резонанс возникает при фазе, равной $\pi/2$, хотя более строгим является требование выполнения формулы Брейта — Вигнера, следующей из (7.14):

$$\sin^2 \delta \approx \frac{[(k-h) \sin \psi + b \cos \psi]^2}{(k-h)^2 + b^2}, \quad \psi = \arg C.$$

Все сказанное может быть обобщено на волны с $l \geq 1$, многоканальные задачи и задачи со спином [11].

Другое интересное свойство резонансов следует из (5.11)

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, k, x) &= \\ &= \frac{1}{2ik} [f(\lambda, k) f(\lambda, -k, x) - f(\lambda, -k) f(\lambda, k, x)]. \end{aligned}$$

Если k близко к h , то $f(\lambda, k)$ и $f(\lambda, -k)$ малы по сравнению со своими невозмущенными значениями $f_0(\lambda, k)$ и $f_0(\lambda, -k)$. Это означает, что влияние потенциала при резонансе состоит в «концентрировании» волновой функции, которая асимптотически становится очень малой при больших x , оставаясь в то же время нормированной на малых расстояниях, согласно соотношению

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\lambda - 1/2} \varphi = 1.$$

Следовательно, в процессе рассеяния частица проводит намного больше времени вблизи рассеивающего центра, чем она проводила бы при отсутствии взаимодействия. Именно в этом состоит качественное объяснение резкого возрастания сечения при резонансе.

Рассмотрим в заключение резонансы с точки зрения уравнения Шредингера, содержащего время

$$\Delta \Psi - V(x) \Psi = \frac{2M}{i\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \Psi.$$

Формальное решение этого уравнения равно

$$\Psi = \frac{\varphi}{x} e^{-i\mathcal{E}t/\hbar} Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{2M} E, \quad E \approx (h + ib)^2 = E_0 - i \frac{\Gamma}{2}, \quad \Gamma > 0.$$

На больших расстояниях радиальный поток вероятности будет в данном случае задаваться выражением

$$\Phi = \frac{\hbar}{2iM} [\varphi^* \varphi' - \varphi'^* \varphi] \approx \frac{\hbar}{4M} |f_l(k)|^2 \frac{\hbar}{\hbar^2 + b^2} e^{-2bx} > 0.$$

Этот ток является расходящимся, и изменение вероятности в единицу времени мало по сравнению с $|\Psi|^2$, если величина $|b|$ и, следовательно, $\Gamma = 4|b|\hbar$ мала. Вероятность непрерывно вытекает из области взаимодействия. Согласно уравнению непрерывности, вероятность обнаружения рассеиваемой частицы внутри заданной сферы должна убывать со временем. Такое убывание обусловливается наличием мнимой части у E : $\text{Im } E = -\Gamma/2$, в силу чего

$$|\Psi|^2 = \left| \frac{\varphi}{r} \right|^2 e^{-\hbar\Gamma/2M}.$$

При этом среднее время жизни τ , равное $\tau = 2M/\hbar\Gamma$, велико, если скорость изменения вероятности мала. Рассеянная волна модулируется экспонентой, возрастающей с расстоянием. Это понятно, так как дальше расположенные части волны были испущены раньше, когда источник был более интенсивным [11]. Наоборот, сопряженное решение представляет процесс, в котором вероятности возрастают, поскольку направление тока в этом случае обратно.

§ 5. Антисвязанные состояния

Нули $f(\lambda, -k)$ при $\text{Im } k < 0$ и $\text{Re } k = 0$ называются антисвязанными состояниями. Как и в случае резонансов, соответствующие волновые функции не входят в $L_2(0, \infty)$, поэтому антисвязанные состояния нельзя считать истинными состояниями в обычном квантовомеханическом смысле. Они оказывают влияние на поведение сечений при низких энергиях, если энергия $B = b^2$ (где $k = ib$) антисвязанного состояния достаточно мала. Действительно, при малых k $S(k)$

можно разложить так же, как и в § 4:

$$\begin{aligned}
 f(k) &\approx C(b + ik), \quad C \text{ вещественно}^1), \\
 f(-k) &\approx C(b - ik), \\
 S(k) &\approx \frac{b + ik}{b - ik}, \\
 \sin^2 \delta(k) &\approx \frac{k^2}{b^2 + k^2}, \\
 \sigma(E) &\approx \frac{4\pi}{b^2 + E}, \\
 \sigma(0) &\approx \frac{4\pi}{b^2}.
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Если величина b очень мала, то сечение при низких энергиях становится необычно большим. Так как вторая половина формул (7.16) четна относительно b , то связанные и антисвязанные состояния не различаются в этом отношении между собой. Только при отсутствии связанных состояний, способных объяснить особое поведение сечения при низких энергиях, можно с определенностью говорить о наличии антисвязанных состояний.

Волновая функция антисвязанного состояния удовлетворяет условиям, полностью противоположным тем, которым обычно подчиняются «приличные» волновые функции; она экспоненциально возрастает при больших x ; равенство $f(k) = 0$ только исключает затухающую экспоненту из асимптотики, где эта экспонента и без того несущественна.

Антисвязанным состояниям очень трудно дать физическую интерпретацию, как это было сделано для связанных состояний или же резонансов с малой шириной. Причина этой трудности состоит в том, что нижняя полуплоскость переменной k для функции $f(-k)$ является нефизической и недоступна для прямого эксперимента в области низких энергий. Напомним, что в нерелятивистской области, описываемой теорией потенциального рассеяния, мы фактиче-

¹⁾ См. (5.18). При $k=0$ и вещественных λ функция Иоста $f(\lambda, k)$ вещественна. — Прим. перев.

ски можем мерить лишь значения на континууме вещественных k , а также связанные состояния [нули $f(k)$ при $\text{Im } k < 0$]. Как было установлено в гл. 5, с помощью этих данных можно построить $f(k)$ при $\text{Im } k < 0$, используя дисперсионную технику или, попросту говоря, теорему Коши для аналитических функций. Для области $\text{Im } k > 0$ подобной возможности нет. Значения $f(k)$ в этой области могут быть получены только аналитическим продолжением из области $\text{Im } k < 0$ с помощью техники Вейерштрасса, однако любая подобная процедура дает результат, неустойчивый относительно малых вариаций исходных данных. Действительно, произведем такую вариацию $\delta f(k)$ функции $f(k)$ на вещественной оси k и положений связанных состояний. Аналитическое продолжение $\delta f(k)$ будет аналитической функцией при $\text{Im } k < 0$, равномерно ограниченной в этой области постоянной. Отсюда сразу следует, что функция δf либо не является аналитической, либо она не ограничена постоянной при $\text{Im } k > 0$; в противном случае по теореме Лиувилля она сама была бы константой. Таким образом, даже малая вариация исходных данных радикально меняет аналитические свойства $f(k)$ при $\text{Im } k > 0$.

По аналогичным соображениям функция $f(k)$ при $\text{Im } k > 0$ нестабильна относительно изменения потенциала. Следовательно, если мы хотим аналитически продолжить $f(k)$, исходя из экспериментальных данных, то для перехода в нефизическую область понадобится экстраординарная точность опытов.

§ 6. Неравенство Баргмана

Теорема Левинсона (5.37) связывает число ρ_λ связанных состояний, обладающих заданным (физическим) угловым моментом $l = \lambda - 1/2$, со сдвигом фазы при нулевой энергии. Следовательно, значение ρ_λ можно найти из рассмотрения уравнения для парциальных волн при $k=0$.

Пусть $\Phi_\lambda = \Phi(\lambda, 0, x)$; если x очень велико и если нет связанных состояний с нулевой энергией [т. е.

$f(\lambda, 0) \neq 0$], то следует ожидать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\lambda-1/2} \Phi_\lambda = C_\lambda,$$

где C_λ — не равная нулю постоянная. Случай $f(\lambda, 0) = 0$ требует особого рассмотрения, за которым отсылаем читателя к оригинальной статье Баргмана [4].

Покажем, что

$$p_\lambda < \frac{1}{2\lambda} \int_0^\infty x |V(x)| dx. \quad (7.17)$$

Это так называемое неравенство Баргмана.

Прежде всего отметим, что достаточно установить справедливость неравенства (7.17) для чистого притяжения. Действительно, любой потенциал $V(x)$ можно заменить потенциалом $-W(x)$ с большим притяжением, определяемым следующим образом:

$$\begin{aligned} W(x) &= -V(x) & \text{при } V(x) < 0, \\ W(x) &= 0 & \text{при } V(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Это объясняется тем, что число возможных связанных состояний может при этом только увеличиться. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. Пусть p_λ — число связанных состояний с угловым моментом $l = \lambda - 1/2$, генерируемых потенциалом $-W(x) \leq 0$. Тогда p_λ будет также числом узлов волновой функции с нулевой энергией в интервале $0 < x \leq \infty$. Значение $C_\lambda = 0$ будем интерпретировать как узел на бесконечности и одновременно как связанное состояние системы с нулевой энергией связи. Заменим $W(x)$ на $\eta W(x)$, где $0 \leq \eta \leq 1$, и обозначим через $p_\lambda(\eta)$ соответствующее число связанных состояний. Функция $p_\lambda(\eta)$ будет, очевидно, возрастающей функцией η , причем $p_\lambda(0) = 0$ и $p_\lambda(1) = p_\lambda$. Энергия связи $-E_n$ n -го связанного состояния — также возрастающая функция η , что легко усмотреть из тождества $[\varphi = \varphi(\lambda, k_n, x)]$

$$\left(\varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} \right)' = - \frac{\partial E_n}{\partial \eta} \varphi^2 - W \varphi^2,$$

интегрирование которого от нуля до бесконечности дает

$$\frac{\partial E_n}{\partial \eta} = - \frac{\int_0^{\infty} W \varphi^2 dx}{\int_0^{\infty} \varphi^2 dx} < 0.$$

При уменьшении η энергия связи связанного состояния убывает до нуля, где $C_\lambda = 0$. Дальнейшее уменьшение λ приводит к исчезновению данного связанного состояния с уменьшением $p_\lambda(\eta)$ на единицу. Обозначим через $q_\lambda(\eta)$ число узлов функции $\Phi_\lambda(x, \eta)$, являющейся регулярным решением уравнения

$$\Phi_\lambda''(x, \eta) - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \Phi_\lambda(x, \eta) = -\eta W \Phi_\lambda(x, \eta). \quad (7.18)$$

Пусть $a(\eta)$ и $b(\eta)$ — положения смежных узлов $\Phi_\lambda(x, \eta)$. Так как $\Phi_\lambda[a(\eta), \eta] = \Phi_\lambda[b(\eta), \eta] = 0$, то

$$\left. \frac{\partial \Phi_\lambda(x, \eta)}{\partial x} \right|_{x=a} \frac{da}{d\eta} = - \left. \frac{\partial \Phi_\lambda(x, \eta)}{\partial \eta} \right|_{x=a}. \quad (7.19)$$

Аналогичное равенство справедливо и при $x = b$.

Из (7.18) и тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\lambda''(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \frac{\partial \Phi_\lambda(x, \eta)}{\partial \eta} &= \\ &= -\eta W \frac{\partial \Phi_\lambda(x, \eta)}{\partial \eta} - W \Phi_\lambda(x, \eta) \end{aligned}$$

получаем

$$\Phi_\lambda''(x, \eta) \frac{\partial \Phi_\lambda(x, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \Phi_\lambda''(x, \eta)}{\partial \eta} \Phi_\lambda(x, \eta) = W [\Phi_\lambda(x, \eta)]^2. \quad (7.20)$$

Проинтегрируем далее (7.20) в интервале $a \leq x \leq b$. Используя (7.19), находим

$$\begin{aligned} [\Phi_\lambda'(a, \eta)]^2 \frac{da}{d\eta} - [\Phi_\lambda'(b, \eta)]^2 \frac{db}{d\eta} &= \\ &= \int_a^b W(x) [\Phi_\lambda(x, \eta)]^2 dx > 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Пусть узлы пронумерованы как v_1, \dots, v_q в возрастающем порядке и $v_0=0$. Аналогично, кроме неравенства (7.21), имеем

$$[\Phi'_\lambda(v_1, \eta)]^2 \frac{dv_1}{d\eta} = - \int_0^{v_1} W(x) [\Phi_\lambda(x, \eta)]^2 < 0. \quad (7.22)$$

Следовательно, $dv_1/d\eta < 0$. Полагая $a=v_i$, $b=v_{i+1}$, из (7.21) легко находим, что если $dv_i/d\eta < 0$, то и $dv_{i+1}/d\eta < 0$, откуда для всех узлов $dv_i/d\eta < 0$. При убывании величины η функция $q_\lambda(\eta)$ может только убывать, причем такое поведение имеет место при v_q , стремящемся к бесконечности, и, конечно, $C_\lambda=0$. Разность $q_\lambda(\eta) - p_\lambda(\eta)$ будет, следовательно, постоянной, так как обе функции ступенчато убывают на единицу при одних и тех же значениях η . Положив $\eta=0$, находим, что величина этой постоянной равна нулю, что доказывает теорему 1.

Аналогичная техника доказательства неравенства Баргмана была применена Швингером [93]. Исходным пунктом у него было то, что связанное состояние при $E=0$ с потенциалом $-\eta W(x)$ удовлетворяет уравнению типа Фредгольма

$$\varphi(\lambda, 0, x) = \eta \int_0^\infty L_\lambda(x, y) W(y) \varphi(\lambda, 0, y) dy,$$

где

$$2\lambda L_\lambda(x, y) = \begin{cases} x^{\lambda+1/2} y^{-\lambda+1/2} & \text{при } x < y, \\ x^{-\lambda+1/2} y^{\lambda+1/2} & \text{при } y < x \end{cases}$$

и

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \right) L_\lambda(x, y) = \delta(x - y).$$

Число связанных состояний p_λ совпадает с полным числом связанных состояний с нулевой энергией, получающихся при изменении η в (7.23) в интервале $0 \leq \eta \leq 1$, и, следовательно, равно числу собственных значений η_q , $q=1, \dots, p_\lambda$, при $0 \leq \eta \leq 1$.

Так как $W(x) > 0$, можно ввести

$$M_\lambda(x, y) = \sqrt{W(x)} \sqrt{W(y)} L_\lambda(x, y),$$

$$\psi(x) = \sqrt{W(x)} \varphi(\lambda, 0, x),$$

$$\eta_q^{-1} \psi(x) = \int_0^\infty M_\lambda(x, y) \psi(y) dy.$$

Обратные величины собственных значений симметрического вещественного неотрицательного ядра M являются характеристиками значений «силы потенциала», при которых появляются новые связанные состояния. Следовательно,

$$\sum_{q=1}^\infty \eta_q^{-1} = \text{Sp } M_\lambda = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\infty x W(x) dx.$$

Однако $\eta_q^{-1} \leq 1$, если $q \leq p_\lambda(\eta)$ и $\eta_q > 1$, если $q > p_\lambda(\eta)$, откуда

$$p_\lambda \leq \sum_{q=1}^{p_\lambda} \eta_q^{-1} \leq \sum_{q=1}^\infty \eta_q^{-1} = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\infty x W(x) dx.$$

Ньютон [77] получил при $\lambda = 0$ более сильный результат

$$p_0 \leq 1 + \frac{\int_0^\infty x W(x) dx \int_0^x y W(y) \ln(x/y) dy}{\int_0^\infty x W(x) dx}.$$

Важным следствием результата Баргмана является то, что если интеграл

$$\int_0^\infty x |V(x)| dx$$

конечен, то система заведомо имеет конечное число связанных состояний, так как все p_λ конечны и $p_\lambda = 0$ при

$$2\lambda > \int_0^\infty x |V(x)| dx.$$

Баргман также показал, что оценка (7.17) является наилучшей в том смысле, что можно найти потенциалы, для которых $\int_0^\infty x W(x) dx$ при физических λ сколь угодно близко к $2\lambda p_\lambda$.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА $S(\lambda, k)$ ПРИ БОЛЬШИХ λ И ФИКСИРОВАННОМ k

§ 1. Предварительные замечания

До сих пор мы рассматривали особенности $S(\lambda, k)$ при полуцелых, т. е. физических значениях λ . В последнее время значительный интерес вызвали особенности амплитуды рассеяния в ситуации, в известном смысле обратной, а именно при физических значениях энергии и комплексных значениях λ .

Хотя, очевидно, невозможно придать обычным образом простой физической смысл трехмерной волновой функции с неположительным λ , идея введения комплексных моментов оказалась все же весьма полезной при рассмотрении целого ряда проблем, в особенности связанных с явлениями при высоких энергиях.

Ограничимся рассмотрением радиальной волновой функции. При комплексном λ центробежный барьер будет эквивалентен отталкивающему потенциалу, если только $\text{Re } \lambda^2 > 1/4$, и будет притягивающим, если $\text{Re } \lambda^2 < 1/4$. Мнимая же часть барьера в зависимости от знака $\text{Im } \lambda^2$ будет вести себя либо как абсорбтивный, либо как порождающий потенциал.

При обсуждении особенностей $S(\lambda, k)$ как функции λ при фиксированном k мы должны ограничиться областью $\text{Re } \lambda \geq 0$, в которой обе функции Йоста, входящие в формулу

$$S(\lambda, k) = \frac{f(\lambda, k)}{f(\lambda, -k)} e^{i\pi(\lambda - 1/2)},$$

являются, как было доказано, аналитическими. Поскольку при $\text{Re } \lambda > 0$ обе функции $f(\lambda, \pm k)$ аналитические, $S(\lambda, k)$ в этой области будет мероморфной функцией λ .

§ 2. Предварительные ограничения на положение полюсов при вещественных k

В случае потенциалов, вещественных при вещественных положительных x (что будет предполагаться во всей настоящей главе), из условия эрмитовости (5.19) следует так называемое соотношение комплексной унитарности:

$$[S(\lambda, k)]^* = S^{-1}(\lambda^*, k). \quad (8.1)$$

Соотношение (8.1) при вещественных λ позволило ранее записать $S(\lambda, k)$ в виде

$$S(\lambda, k) = e^{i\delta},$$

где величина δ вещественна. Другим следствием этого соотношения является то, что если функция $S(\lambda, k)$ имеет полюс при $\lambda = \lambda_0$, то она имеет также нуль при $\lambda = \lambda_0^*$.

Важные свойства полюсов вытекают из теоремы.

Теорема 1.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \delta &\geq \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} \lambda \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda \leq 0, \quad k > 0, \\ \frac{d\delta}{d\lambda} - \frac{\pi}{2} &< 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda = 0, \quad k > 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Доказательство. Пусть

$$\lambda^2 - \frac{1}{4} = A + iB,$$

и пусть уравнения Шредингера для $\varphi = \varphi(\lambda, k, x)$ и сопряженной функции φ^* имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi'' + k^2\varphi - \frac{A + iB}{x^2}\varphi - V\varphi &= 0, \\ \varphi^{*''} + k^2\varphi^* - \frac{A - iB}{x^2}\varphi^* - V\varphi^* &= 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Обычным образом из (8.3) получаем тождество

$$\frac{d}{dx} (\varphi^* \varphi' - \varphi^{*'} \varphi) = 2iB \frac{|\varphi|^2}{x^2},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi^* \varphi' - \varphi'^* \varphi) &= 2iB \int_0^{\infty} \frac{|\varphi|^2}{x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2ik} [f(\lambda, -k) f(\lambda^*, k) - f(\lambda, k) f(\lambda^*, -k)]. \end{aligned}$$

Вспоминая теперь соотношения (5.22)

$$\begin{aligned} f(\lambda, k) &= \tau(\lambda, k) e^{i\delta(\lambda, k) - (i\pi/2)(\lambda - 1/2)}, \\ f(\lambda, -k) &= \tau(\lambda, k) e^{-i\delta(\lambda, k) + (i\pi/2)(\lambda - 1/2)}, \end{aligned}$$

находим

$$B \int_0^{\infty} \frac{|\varphi|^2}{x^2} dx = -\frac{1}{2k} |\tau(\lambda, k)|^2 \operatorname{sh} \left[2 \left(\operatorname{Im} \delta - \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} \lambda \right) \right]. \quad (8.4)$$

Отсюда при вещественных положительных k

$$\operatorname{Im} \delta \geq \frac{\pi}{2} \operatorname{Im} \lambda, \quad B \leq 0.$$

Устремляя $\lambda \rightarrow \lambda_0$, где λ_0 вещественно, с помощью условия аналитичности Коши — Римана находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\operatorname{Im} \delta(\lambda) - \operatorname{Im} \delta(\lambda_0)}{\operatorname{Im} \lambda - \operatorname{Im} \lambda_0} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\operatorname{Im} \delta(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda} = \frac{d\delta(\lambda)}{d\lambda}. \quad (8.5)$$

Из соотношений (8.4) и (8.5) получаем¹⁾

$$\operatorname{Re} \lambda \int_0^{\infty} \frac{|\varphi|^2}{x^2} dx = -\frac{1}{2k} |\tau(\lambda, k)|^2 \left(\frac{d\delta}{d\lambda} - \frac{\pi}{2} \right),$$

так что

$$\frac{d\delta(\lambda)}{d\lambda} < \frac{\pi}{2}.$$

Теорема 1 показывает, что мнимая часть δ ограничена снизу при $\operatorname{Im} \lambda < 0$, и, следовательно, функция $S(\lambda, k) = \exp 2i\delta$ ограничена сверху. Таким образом,

¹⁾ Из (8.4) можно также получить

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \operatorname{Im} \delta(\lambda) / \operatorname{Re}(\lambda - \lambda_0) = 0,$$

что подтверждает последнее равенство в (8.5). — Прим. перев.

в указанной области не может возникать полюсов. По аналогичным соображениям при $\text{Im } \lambda > 0$ не существует нулей.

Поскольку при выводе (8.2) никак не использовался вид потенциала, они должны иметь чисто кинематическую природу. Проиллюстрируем причину отсутствия полюсов при $\text{Im } \lambda < 0$, $k > 0$. Пусть φ — регулярная волновая функция, соответствующая полюсу; в этом случае $f(\lambda, -k) = 0$ и асимптотика φ имеет вид

$$\varphi \sim \frac{f(\lambda, k)}{2ik} e^{ikx}.$$

Такое поведение отвечает расходящейся волне. Поскольку волновая функция регулярна в начале, единственная возможность компенсации потерь вероятности (так как E вещественно, то состояние стационарно) состоит во введении какого-либо источника. Такой источник может быть здесь обусловлен только комплексным центробежным барьером, а условие того, что он является испускающим, как раз и состоит в выполнении неравенства $B > 0$ или $\text{Im } \lambda > 0$. Подобные рассуждения оправданы только тогда, когда потенциал (как это здесь предполагается) не зависит от скорости. Если бы потенциал $V(x)$ являлся также функцией λ [например, при комплексных λ потенциал $V(x, \lambda)$ становился бы комплексным и в зависимости от конкретного выбора его сам действовал как положительный или отрицательный источник], предыдущий анализ оказался бы невозможным.

§ 3. Дальнейшие ограничения на полюсы для юкавских потенциалов при вещественных k

Выводы § 2 сохраняют силу для широкого класса потенциалов. Если же $V(z)$ является юкавским потенциалом и удовлетворяет еще некоторым дополнительным условиям, то можно получить значительно более сильные результаты. Поскольку поведение полюсов является определяющим во всех проблемах, связанных с передаваемым импульсом, рассмотрим подробно характер их распределения.

Наложим на $V(z)$ одно из двух условий:

$$|V(iy)| < \frac{M}{y^2} \quad (8.6)$$

или

$$|V(iy)| < \frac{N}{y}. \quad (8.7)$$

Предположим далее, что k вещественно и $f(\lambda, -k) = 0$, т. е. что $S(\lambda, k)$ имеет полюс. При выполнении неравенства (8.6) запишем волновое уравнение в виде (в качестве переменной служит y)

$$\ddot{\varphi} - k^2\varphi - \frac{\lambda^2 - 1/4}{y^2}\varphi + V(iy)\varphi = 0, \quad (8.8)$$

где точки обозначают дифференцирование по y . Имеем также

$$(\varphi^*)'' - k^2\varphi^* - \frac{\lambda^{*2} - 1/4}{y^2}\varphi^* + V^*(iy)\varphi^* = 0. \quad (8.9)$$

Умножая уравнение (8.8) на φ^* и вычитая потом из него уравнение (8.9), умноженное на φ , получаем

$$\varphi^*\ddot{\varphi} - (\varphi^*)''\varphi = 2i \left[\frac{\text{Im } \lambda^2}{y^2} - \text{Im } V(iy) \right] |\varphi|^2. \quad (8.10)$$

Обе стороны (8.10) мы проинтегрируем ниже по y в интервале $0 \leq y \leq \infty$. В пределе при больших y как φ , так и φ^* экспоненциально убывают, так как в силу равенства $f(\lambda, -k) = 0$,

$$\varphi(\lambda, k, z) = \frac{1}{2ik} f(\lambda, k) f(\lambda, -k, z).$$

Следовательно, асимптотическое поведение φ при $z = iy$ и больших y имеет вид

$$\varphi \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2ik} f(\lambda, k) e^{-ky}.$$

Таким образом, интегрирование левой части уравнения (8.10) дает нулевой результат, и мы приходим к тождеству

$$\text{Im } \lambda^2 \int_0^\infty \frac{|\varphi|^2}{y^2} dy = \int_0^\infty \text{Im } V(iy) |\varphi|^2 dy. \quad (8.11)$$

С другой стороны, из условия (8.6) следует, что

$$\left| \int_0^{\infty} \operatorname{Im} V(iy) |\varphi|^2 dy \right| \leq \leq \int_0^{\infty} |\operatorname{Im} V(iy)| |\varphi|^2 dy < M \int_0^{\infty} \frac{|\varphi|^2}{y^2} dy. \quad (8.12)$$

Комбинируя соотношения (8.11) и (8.12), приходим к искомому ограничению для полюсов

$$\operatorname{Im} \lambda^2 < M. \quad (8.13)$$

Если вместо условия (8.6) имеет силу условие (8.7), то приходится использовать несколько более пространные рассуждения. В этом случае уравнения (8.8) и (8.9), умноженные соответственно на φ^* и φ , складываются. Результат интегрируем в интервале $0 \leq y \leq \infty$ и после несложных вычислений вместо (8.11) получаем

$$\int_0^{\infty} \left\{ \left| \dot{\varphi} - \frac{\varphi}{2y} \right|^2 + \left[k^2 + \frac{\operatorname{Re} \lambda^2}{y^2} - \operatorname{Re} V(iy) \right] |\varphi|^2 \right\} dy = 0. \quad (8.14)$$

Пусть η — угол, лежащий в интервале $0 < \eta < \pi/2$. Умножим (8.11) на $\sin \eta$, (8.14) на $\cos \eta$ и сложим их:

$$\int_0^{\infty} dy \left\{ \left| \dot{\varphi} - \frac{\varphi}{2y} \right|^2 \cos \eta + + \left[k^2 \cos \eta + \frac{1}{y^2} (\cos \eta \operatorname{Re} \lambda^2 + \sin \eta \operatorname{Im} \lambda^2) - - \cos \eta \operatorname{Re} V(iy) - \sin \eta \operatorname{Im} V(iy) \right] |\varphi|^2 \right\} = 0. \quad (8.15)$$

Если

$$\operatorname{Re}(\lambda^2 e^{-i\eta}) = \cos \eta \operatorname{Re} \lambda^2 + \sin \eta \operatorname{Im} \lambda^2 > 0,$$

то из (8.15) непосредственно следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[k^2 \cos \eta + \frac{1}{y^2} \operatorname{Re} (\lambda^2 e^{-i\eta}) \right] |\varphi|^2 dy &< \\ &< \int_0^{\infty} dy \left\{ \left| \dot{\varphi} - \frac{\varphi}{2y} \right|^2 \cos \eta + \right. \\ &\quad \left. + \left[k^2 \cos \eta + \frac{1}{y^2} \operatorname{Re} (\lambda^2 e^{-i\eta}) \right] |\varphi|^2 \right\} = \\ &= \int_0^{\infty} \operatorname{Re} [V(iy) e^{-i\eta}] |\varphi|^2 dy \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} |V(iy) e^{-i\eta}| |\varphi|^2 dy \leq N \int_0^{\infty} \frac{|\varphi|^2}{y} dy. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу неравенства Шварца при $\operatorname{Re} [\lambda^2 \exp(-i\eta)] > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[k^2 \cos \eta + \frac{1}{y^2} \operatorname{Re} (\lambda^2 e^{-i\eta}) \right] |\varphi|^2 dy &\geq \\ &\geq 2k [\cos \eta \operatorname{Re} (\lambda^2 e^{-i\eta})]^{1/2} \int_0^{\infty} \frac{|\varphi|^2}{y} dy, \end{aligned}$$

и во всяком случае

$$\cos \eta \operatorname{Re} (\lambda^2 e^{-i\eta}) \leq \frac{N^2}{k^2}. \quad (8.16)$$

В случае реализации равенства соотношение (8.16) представляет семейство прямых в комплексной λ^2 -плоскости. Огибающей этих прямых будет парабола, отображением которой в λ -плоскости будет просто прямая $\operatorname{Re} \lambda = N/k$. Действительно,

$$(\operatorname{Re} \lambda)^2 = \max [\cos \eta \operatorname{Re} (\lambda^2 e^{-i\eta})] \leq \frac{N^2}{k^2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно условие принимает вид

$$\operatorname{Re} \lambda < \frac{N}{k}. \quad (8.17)$$

Интересным следствием неравенства (8.17) является то, что существует линия, справа от которой нет полюсов. Тот же вывод, хотя и не столь непосредственно, следует и из неравенства (8.13), но мы пока не будем касаться этого вопроса.

Физическая интерпретация относящихся к полюсам результатов дана в гл. 9.

§ 4. Асимптотическое поведение $S(\lambda, k)$ при больших вещественных λ и фиксированных вещественных k

Несколько обескураживающей особенностью асимптотических свойств в λ -плоскости является трудность нахождения строгих и в то же время несложных доказательств внешне сравнительно простых утверждений.

Типичным примером может служить поведение $S(\lambda, k)$ при больших вещественных λ и фиксированных вещественных k . Естественно предположить, что основная часть радиальной волновой функции располагается на расстояниях порядка параметра соударения λ/k . При $\lambda/k \gg 1/m$ большая часть волновой функции оказывается вне сферы действия потенциала и почти не возмущается взаимодействием. В результате реализуются идеальные условия пригодности борновского приближения.

Из рассмотрения формулы (5.29)

$$a(\lambda, k) = -e^{i\pi(\lambda-1/2)} \frac{\int_0^{\infty} \varphi(\lambda, k, x) V(x) \varphi_0(\lambda, k, x) dx}{f(\lambda, -k) f_0(\lambda, -k)}$$

вытекает, что разумное приближение можно получить при замене φ/f на φ_0/f_0 ,

$$e^{i\delta} \sin \delta \sim \delta \sim -\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} x |J_{\lambda}(kx)|^2 V(x) dx.$$

Если к тому же

$$|V(x)| < C \frac{e^{-mx}}{x},$$

то получаем, что

$$|\delta(\lambda, k)| < \frac{C}{2k} Q_{\lambda-1/2} \left(1 + \frac{m^2}{2k^2}\right), \quad (8.18)$$

где $Q_{\lambda-1/2}(z)$ — функция Лежандра второго рода [7].

Асимптотический предел (8.18) при больших λ следует из следующего выражения для $Q_{\lambda-1/2}$ [7]:

$$\begin{aligned} Q_{\lambda-1/2}(\cos \vartheta) &= \\ &= \pi^{1/2} \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)}{\Gamma(\lambda + 1)} e^{-i\vartheta(\lambda+1/2)} F\left(\frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + 1; e^{-2i\vartheta}\right), \end{aligned}$$

где F — гипергеометрическая функция. С помощью обобщенного неравенства Гобсона [18]

$$\begin{aligned} \left|F\left(\frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + 1; \zeta\right)\right| &\leq |1 - \zeta|^{-1/2}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq -\frac{3}{4}, \\ &|\zeta| < 1, \end{aligned}$$

находим

$$|\delta(\lambda, k)| = O(\lambda^{-1/2} e^{-\alpha\lambda}),$$

где

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{m^2}{2k^2}.$$

Этот результат следует также из теории поля и тесно связан с существованием эллипса Лемана.

Приведенное доказательство для внутренне замкнутой теории потенциального рассеяния является, конечно, недостаточным. Мартину [73] удалось придать строгость предыдущим рассуждениям. Исходным пунктом его рассуждений послужило интегральное уравнение типа Фредгольма (см. приложение II)

$$\begin{aligned} \psi^+(\lambda, k, x) &= \psi_0^+(\lambda, k, x) + \\ &+ \int_0^\infty K^+(\lambda, k, x, x') V(x') \psi^+(\lambda, k, x') dx', \quad (8.19) \end{aligned}$$

где

$$\psi_0^+(\lambda, k, x) = e^{i(\pi/2)(\lambda-1/2)} k \frac{\varphi_0(\lambda, k, x)}{f_0(\lambda, -k)} = \left(\frac{\pi k x}{2}\right)^{1/2} J_\lambda(kx),$$

$$K^+(\lambda, k, x, x') = -i \frac{\pi}{2} (xx')^{1/2} J_\lambda(kx_<) H_\lambda^{(1)}(kx_>),$$

$$x_< = \frac{1}{2}(x+x') - \frac{1}{2}|x-x'|,$$

$$x_> = \frac{1}{2}(x+x') + \frac{1}{2}|x-x'|.$$

Нетрудно найти связь $\psi^+(\lambda, k, x)$ с $\varphi(\lambda, k, x)$. Действительно (см. приложение III),

$$\psi^+(\lambda, k, x) = e^{i(\pi/2)(\lambda-1/2)} k \frac{\varphi(\lambda, k, x)}{f(\lambda, -k)},$$

причем имеет место формула

$$a(\lambda, k) = -\left(\frac{\pi}{2k}\right)^{1/2} \frac{1}{k} \int_0^\infty x^{1/2} J_\lambda(kx) \psi^+(\lambda, k, x) V(x) dx. \quad (8.20)$$

Доказательство Мартина опирается на неравенство

$$|K^+(\lambda, k, x, x')| \leq \frac{\pi}{2} (xx')^{1/2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4}. \quad (8.21)$$

справедливое при достаточно больших положительных λ . Доказательство этого неравенства дано в приложении IV. Опуская для простоты в соотношении (8.19) зависимость ψ^+ от λ и k , получаем

$$\begin{aligned} |\psi^+(x)| &\leq \left(\frac{\pi k x}{2}\right)^{1/2} |J_\lambda(kx)| + \\ &+ \frac{\pi}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4} \int_0^\infty (xx')^{1/2} |V(x')| |\psi^+(x')| dx'. \end{aligned}$$

Умножим это соотношение на $x^{1/2} |V(x)|$ и проинтегрируем по x ; вводя обозначение

$$I = \int_0^\infty x^{1/2} |\Psi^+(x)| |V(x)| dx,$$

получаем

$$I \leq \left(\frac{\pi k}{2}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} x |J_{\lambda}(kx)| |V(x)| dx + \\ + \frac{\pi}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4} I \int_0^{\infty} x |V(x)| dx.$$

Отсюда ясно, что

$$I \leq \left(\frac{\pi k}{2}\right)^{1/2} \frac{\int_0^{\infty} x |J_{\lambda}(kx)| |V(x)| dx}{1 - \frac{\pi}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4} \int_0^{\infty} x |V(x)| dx}$$

при условии, что

$$\frac{\pi}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4} \int_0^{\infty} x |V(x)| dx < 1.$$

С другой стороны,

$$a(\lambda, k) \leq \left(\frac{\pi}{2k}\right)^{1/2} \frac{1}{k} \int_0^{\infty} x^{1/2} |J_{\lambda}(kx)| |\psi^+(x)| |V(x)| dx \leq \\ \leq \frac{\pi}{2k} \int_0^{\infty} x [J_{\lambda}(kx)]^2 |V(x)| dx + \\ + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{k} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4} \frac{\left[\int_0^{\infty} x |J_{\lambda}(kx)| |V(x)| dx\right]^2}{1 - \frac{\pi}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4} \int_0^{\infty} x |V(x)| dx}.$$

В силу неравенства Шварца

$$\left[\int_0^{\infty} x |J_{\lambda}(kx)| |V(x)| dx\right]^2 \leq \int_0^{\infty} x [J_{\lambda}(kx)]^2 \times \\ \times |V(x)| dx \int_0^{\infty} x' |V(x')| dx'.$$

Отсюда следует

$$|a(\lambda, k)| \leq \frac{\pi}{2k} \frac{\int_0^{\infty} x |V(x)| [J_{\lambda}(kx)]^2 dx}{1 - \frac{\pi}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4} \int_0^{\infty} x |V(x)| dx}.$$

Числитель этого выражения в точности совпадает с борновским приближением. При конечном $\int_0^{\infty} x |V(x)| dx$ приведенная формула дает верхнюю границу для $|a(\lambda, k)|$, которая совпадает с указанной в начале настоящего параграфа.

В работе [50] было показано, что истинное асимптотическое поведение сдвига фазы определяется первым борновским приближением.

§ 5. Асимптотическое поведение при больших комплексных λ и вещественных k

В § 6 будет показано, как следует модифицировать аргументы в соотношениях § 4, когда λ стремится к бесконечности вдоль мнимой оси. При $|\arg \lambda| < \pi/2$ можно установить теорему, которая действительна в случае юкавских потенциалов, удовлетворяющих условию (8.6) или (8.7) и обладающих соответственно верхней гранью для вещественной части координат полюсов. Пусть $S(\lambda, k)$ — аналитическая функция λ со следующими свойствами при вещественных k :

а) $[S(\lambda, k)]^* = [S(\lambda^*, k)]^{-1}$ (унитарность),

б) $S(\lambda, k) - 1 < Ce^{-\alpha\lambda}$ (λ вещественно и положительно; см. § 4; C — некоторая положительная постоянная),

в) $|S(\lambda, k)| < e^{-\pi \operatorname{Im} \lambda} = e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}$ при $\operatorname{Im} \lambda < 0$ (см. теорему 1 гл. 8),

г) $S(\lambda, k)$ не имеет ни полюсов, ни нулей при $\operatorname{Re} \lambda > H$. (8.22)

Рассмотрим теперь $S(\lambda, k) - 1 = A(\lambda)$ внутри сектора W :

$$0 > \arg(\lambda - H) > -\frac{\pi}{2}.$$

Введем функцию $h(\varphi)$

$$\sup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|} \ln |A(\lambda)| = h(\varphi),$$

где $\varphi = \arg(\lambda - H)$. В силу «б» и «в» функция $h(\varphi)$ существует и, следовательно,

$$h(\varphi) < \pi |\sin \varphi|, \quad h(0) < -\alpha.$$

Из теоремы 12 гл. 2 следует

$$h(\varphi) \leq \pi |\sin \varphi| - \alpha \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0. \quad (8.23)$$

В силу неравенства (8.23) функция $A(\lambda)$ в пределе при $|\lambda| \rightarrow \infty$ обращается в нуль всюду, где $h(\varphi)$ отрицательно, и в том числе в секторе $0 > \varphi > -\arctg \frac{\alpha}{\pi}$. Вследствие пункта «а» (8.22) последний вывод остается верным и при $|\varphi| < \arctg(\alpha/\pi)$. Хотя полученный результат интересен и сам по себе, он все же слабее, чем этого можно было ожидать.

Для учета свойства «г» используем простой прием, основанный на том обстоятельстве, что если $S(\lambda, k)$ не имеет ни нулей, ни полюсов, то $[S(\lambda, k)]^{1/N}$, где N — любое сколь угодно большое положительное число, также обладает этим свойством. Пусть

$$A(\lambda, N) = [S(\lambda, k)]^{1/N} - 1$$

и

$$h(\varphi, N) = \sup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda|} \ln |A(\lambda, N)|.$$

Используя те же соображения, что и в случае $h(\varphi)$, находим

$$h(\varphi, N) < \frac{\pi}{N} |\sin \varphi| - \alpha \cos \varphi.$$

Очевидно, что величина $h(\varphi, N)$ отрицательна в области

$$0 > \varphi > -\arctg \frac{\alpha N}{\pi}.$$

Следовательно

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} A(\lambda, N) = 0, \quad |\varphi| < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha N}{\pi}.$$

Откуда при $|\varphi| < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha N}{\pi}$

$$\lim [S(\lambda, k)]^{1/N} = 1,$$

$$\lim S(\lambda, k) = 1.$$

Выбирая N достаточно большим, величину $\operatorname{arc} \operatorname{tg} (\alpha N/\pi)$ можно сделать сколь угодно близкой к $\pi/2$. Таким образом получаем следующую теорему:

Теорема 2. Если $V(x)$ — юкавский потенциал, удовлетворяющий неравенству (8.6) или (8.7), то

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} S(\lambda, k) = 1, \quad |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2},$$

$$h(\varphi) \leq -\alpha |\cos \varphi|, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

(равенство $|\varphi| = \pi/2$ не допускается).

Нам осталось рассмотреть случай условия (8.7), когда, как мы уже установили, существует некоторая полуплоскость, свободная от нулей и полюсов. Из неравенства (8.13) ясно, что полюсы возможны в области, ограниченной гиперболой

$$\operatorname{Im} \lambda^2 = 2 \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Re} \lambda = M$$

и ее асимптотами $\operatorname{Im} \lambda = 0$ и $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Применяя соотношение (8.23) в свободном от сингулярностей секторе $0 > \arg \lambda > -\pi/2$, находим, что

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} S(\lambda, k) = 1, \quad |\arg \lambda| < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\pi}.$$

Можно выделить не содержащую полюсов область

$$|\arg \lambda| < \frac{\alpha}{\pi}, \quad |\lambda| > R,$$

если только R достаточно велико. Сумма областей $\operatorname{Im} \lambda \operatorname{Re} \lambda > M/2$ и D заведомо содержит полуплоскость вида $\operatorname{Re} \lambda > H$; таким образом, теорема 2 доказана.

§ 6. Асимптотическое поведение при больших комплексных λ и произвольных k

Преыдуший анализ недостаточен для установления какого-либо критерия об асимптотическом поведении парциальной амплитуды рассеяния вдоль мнимой оси в комплексной λ -плоскости. К сожалению, именно поведение на этой оси определяет соответствие аналитических свойств $S(\lambda, k)$ и свойств $f(k, \cos \theta)$.

Первое обсуждение данной проблемы [89] ограничивалось случаем вещественных k и в значительной мере опиралось на квазиклассическое приближение (ВКБ-метод), которое непригодно при мнимых λ/k . Во второй попытке [16] λ и k уже не ограничивались, причем применялось обобщение ВКБ-метода. Жакшич и Лимич [50] показали, что подобный подход с некоторыми дополнениями и уточнениями дает точное асимптотическое поведение сдвига фаз, а именно борновское приближение. Барут и Дилли [5] отметили возможность применения в этом случае метода Лангера. Поскольку обоснование этого метода в оригинальной работе весьма утомительно, мы его не приводим.

Еще одно доказательство было дано в работе [19], однако, поскольку оно опирается на существенно иной подход, чем в настоящей книге, мы его касаться не будем. Мартин [73] обобщил свое рассмотрение, изложенное в § 4, на мнимые λ , но в его доказательстве используются весьма сложные неравенства для функций Бесселя.

Мы изложим здесь доказательство, основанное на идеях работ [18, 73]. Такая трактовка довольно проста, но не дает наиболее полных результатов; в частности, потенциал Юкавы требует отдельного рассмотрения.

Будем исходить из интегрального уравнения Фредгольма для $f(\lambda, -k, iy)$ и предположим сначала, что k вещественно и положительно. В этом случае функция $f(\lambda, -k, iy)$ имеет при больших y следующее

асимптотическое поведение:

$$f(\lambda, -k, iy) \sim e^{-ky} [1 + o(1)]$$

и, следовательно, регулярна на бесконечности.

Соответственно сказанному определим

$$Q_0(\lambda, k, y) = \frac{f_0(\lambda, -k, iy)}{f_0(\lambda, -k)}, \quad Q(\lambda, k, y) = \frac{f(\lambda, -k, -iy)}{f(\lambda, -k)}, \quad (8.24)$$

$$N(\lambda, k, y, t) = N(\lambda, k, t, y) = \sqrt{ty} K_\lambda(ky_>) I_\lambda(ky_<),$$

где

$$y_> = \frac{t+y}{2} + \frac{|t-y|}{2}, \quad y_< = \frac{t+y}{2} - \frac{|t-y|}{2}.$$

Функция Q удовлетворяет (см. приложение II) интегральному уравнению фредгольмовского типа

$$Q(y) = Q_0(y) + \int_0^\infty N(y, t) V(it) Q(t) dt. \quad (8.25)$$

Запишем теперь функцию Иоста $F(\lambda, k)$ в виде детерминанта Фредгольма (8.25) (полное рассмотрение см. в приложении III)

$$F(\lambda, -k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int V(iy_1) \dots V(iy_n) \times \\ \times \begin{vmatrix} N(y_1, y_1) & \dots & N(y_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ N(y_1, y_n) & \dots & N(y_n, y_n) \end{vmatrix} dy_1 \dots dy_n. \quad (8.26)$$

Чтобы использовать (8.26), нужно найти соответствующую оценку для величины $N(y, t)$. Как показано в приложении IV, при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ имеет место

$$|N(y, t)| < \gamma(y) \gamma(t), \quad (8.27)$$

где

$$\gamma(y) = C \frac{|\lambda|^{1/4}}{k^{1/2}} \left(\frac{ky}{|\lambda|} \right)^{1/4}, \quad y > \frac{|\lambda|}{k}, \quad (8.28)$$

$$\gamma(y) = C \frac{|\lambda|^{1/4}}{k^{1/2}} \left(\frac{ky}{|\lambda|} \right)^{1/2}, \quad y < \frac{|\lambda|}{k}.$$

Запишем $\det_{i, j \geq n} |N(y_i, y_j)|$ в следующей форме:

$$\det_{i, j < n} |N(y_i, y_j)| = \gamma^2(y_1) \dots \gamma^2(y_n) \det_{i, j < n} |\Gamma_{ij}|,$$

где

$$\Gamma_{ij} = \frac{N(y_i, y_j)}{\gamma(y_i) \gamma(y_j)}.$$

Поскольку $\Gamma_{ij} < 1$, в силу неравенства Адамара имеем

$$|\det_{i, j < n} |\Gamma_{ij}| | < n^{n/2}.$$

Следовательно, оценка сверху для (8.26) задается неравенством

$$|F(\lambda, -k) - 1| \leq I \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I^{n-1} n^{n/2}}{n!}, \quad (8.29)$$

где

$$I = \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \int_0^{|\lambda|^{1/k}} t |V(it)| dt + \frac{C}{k^{1/2}} \int_{|\lambda|^{1/k}}^{\infty} t^{1/2} |V(it)| dt.$$

Пусть $3/2 < \alpha < 2$. Если $|V(iy)| < N_\alpha / y^\alpha$, то при больших λ получаем, что $I = O(\lambda^{3/2-\alpha})$. Разложение (8.29) равномерно сходится в каждой конечной области I и правая сторона (8.29) непрерывна по I , так что приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть $V(z)$ — юкавский потенциал, $|V(iy)| < N_\alpha / y^\alpha$, $3/2 < \alpha < 2$. Тогда при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F(\lambda, k) - 1 &= O(\lambda^{3/2-\alpha}), \\ S(\lambda, k) - 1 &= O(\lambda^{3/2-\alpha}). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Теорема 3 может быть, очевидно, усилена. Это было сделано рядом авторов [18, 19, 50, 73, 92], которые использовали более сложные формальные схемы доказательства, позволяющие, в частности, включить собственно потенциал Юкавы. В работах [18, 92] была использована весьма эффективная теория уравнений Фредгольма (2.4), (2.5), развитая Смифисом [95]. Под-

ставляя в эти формулы $K(y, t) = N(y, t)V(it)$, находим

$$\tau(K) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq}{q^2 - (k + i\varepsilon)^2} \int_0^{\infty} Q_{\lambda-1/2} \left(1 + \frac{\mu^2}{2q^2}\right) \sigma(\mu) d\mu$$

и далее

$$F(\lambda, -k) = e^{-\tau(K)} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n, \quad \delta_n \leq \frac{e^{n/2} \|K\|^2}{n^{n/2}}.$$

По существу, нет единого подхода к определению $\|K\|$. Так как функция F инвариантна относительно преобразования подобия, то вместо K может быть взято любое ядро вида $A^{-1}KA$, причем лучше всего выбирать такое ядро с наименьшей нормой $\|A^{-1}KA\|$. Выбирая симметризованное ядро

$$K_S(t, y) = [V(iy)V(it)]^{1/2} N(y, t),$$

получаем норму

$$\|K_S\| = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |N(t, y)|^2 |V(it)| |V(iy)| dt dy.$$

В общем случае эту норму подсчитать довольно трудно, но Браун и др. [18] показали, что для потенциала Юкавы, $V(z) = Ae^{-mz}/z$, она сводится к выражению

$$\|K_S\| = \frac{A^2}{4k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \operatorname{Re} l + 1)^2}.$$

Данный результат содержит весьма ограниченную информацию о том, что делается при больших $\operatorname{Im} \lambda$. Однако функция Юста может быть также найдена с помощью уравнения Липпмана — Швингера для парциальных волн (см. приложение III)

$$T^+(\lambda, p, k) =$$

$$= T_0^+(\lambda, p, k) + \int_0^{\infty} H^+(\lambda, k; p, q) T^+(\lambda, q, k) dq,$$

где

$$H^+(\lambda, k; p, q) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(k + i\varepsilon)^2 - q^2} \times \\ \times \int_m^\infty Q_{\lambda-1/2} \left(\frac{p^2 + q^2 + \mu^2}{2pq} \right) \sigma(\mu) d\mu.$$

Браун и др. [18] взяли в своем расчете симметризованное выражение для ядра

$$H_S^+(\lambda, k; p, q) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{[q^2 - (k + i\varepsilon)^2]^{1/2}} \frac{1}{[p^2 - (k + i\varepsilon)^2]^{1/2}} \times \\ \times \int_m^\infty Q_{\lambda-1/2} \left(\frac{p^2 + q^2 + \mu^2}{2pq} \right) \sigma(\mu) d\mu$$

и получили для потенциалов Юкавы оценку сверху

$$\|H_S^+\| = \frac{A^2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{|p^2 - E|} \frac{1}{|q^2 - E^*|} \times \\ \times \left| Q_{\lambda-1/2} \left(\frac{p^2 + q^2 + m^2}{2pq} \right) \right|^2 dp dq,$$

которая перестает быть конечной при вещественных E . Скадрон и др. [92] показали, что эту величину в свою очередь можно заменить на

$$Y = \frac{A^2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{p^2 - E} \frac{1}{q^2 - E^*} \left| Q_{\lambda-1/2} \left(\frac{p^2 + q^2 + m^2}{2pq} \right) \right|^2 dp dq.$$

С помощью неравенства Гобсона (см. § 4) для функций Q нетрудно показать, что при больших λ $Y = O(\lambda^{-1})$. Вследствие указанного неравенства $\tau(K) = \tau(H) = O(\lambda^{-1/2})$. Таким образом, асимптотическое поведение задается первым борновским приближением.

Анализ Фредгольма — Смифиса не применим ко всему классу юкавских потенциалов; точное соотношение между величиной α и поведением $F(\lambda, k)$ на мнимой оси до сих пор остается невыясненным. Как показал Мартин [73], для $1 < \alpha < 2$ и вещественных k формула (8.30) может быть заменена на

$$S(\lambda, k) - 1 = O(\lambda^{1-\alpha}). \quad (8.31)$$

Если k комплексно, но $\text{Im } k > 0$, предыдущий анализ, основанный на соотношениях (8.26) и (8.27), может быть повторен и при рассмотрении $f[\lambda, -k; iy, \exp(-i\sigma)]$, где $k = |k|e^{i\sigma}$. Ядро $N(y, t)$ остается при этом неизменным, но $V(iy)$ заменяется на $V[iy \exp(-i\sigma)]$, определенную только при $0 \leq \sigma \leq \pi$, что и заставляет ограничиться случаем $\text{Im } k \geq 0$. Таким образом, приходим к теореме.

Теорема 4. Пусть $V(z)$ — юкавский потенциал, удовлетворяющий условию

$$V(iye^{-i\sigma}) < \frac{N_\alpha(\sigma)}{y^\alpha}$$

при $3/2 < \alpha < 2$ и $0 \leq \sigma \leq \pi$. Тогда

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F(\lambda, -k) = 1$$

при $\text{Re } \lambda \geq 0, \text{Im } k \geq 0$.

Отдельное рассмотрение собственно потенциала Юкавы позволяет без труда включить его также в эту теорему при $\text{Im } k \geq 0$. Хотя общее доказательство отсутствует, естественно предположить, что теорема 4 верна до $\alpha = 1$.

Теорема 4 не гарантирует, что $\lim S(\lambda, k) = 1$ во всей рассматриваемой в ней области λ и k , так как в $S(\lambda, k)$ входят оба значения $\pm k$. Однако для доказательства с ее помощью представления Мандельстама достаточен в действительности соответствующий вывод только при вещественных k .

Метод ВКБ [16] при $\eta = \arg \frac{\lambda}{k} - \frac{\pi}{2}$ дает

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F(\lambda, k) = 1.$$

Причем для достаточно больших λ

$$|F(\lambda, k)| \leq C e^{2\eta' |\text{Im } \lambda|}, \quad \eta' > |\eta| - \pi.$$

Аналогично, если приравнять теперь $\eta = \pi/2 + \arg \lambda/k < 0$, то

$$|F(\lambda, ke^{-i\pi})| < C e^{2\eta' |\text{Im } \lambda|}, \quad \eta' > |\eta| - \pi.$$

Из сказанного следует, что при $|\arg \lambda| < \pi/2$,
 $|\arg(\lambda/k)| < \pi/2$

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} S(\lambda, k) = 1.$$

Сделаем несколько замечаний о потенциалах, аналитических в секторе $|\arg z| < \sigma < \pi/2$ [89]. Для них имеет место

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F(\lambda, k) = 1 \quad \text{при} \quad \left| \arg k + \frac{\pi}{2} \right| < \sigma,$$

если неравенства

$$|V(\rho e^{i\sigma'})| < \frac{N_\alpha}{\rho^\alpha}, \quad \frac{3}{2} < \alpha < 2,$$

выполняются для $\sigma' \leq \sigma$. Изложенную выше теорию можно перенести, конечно, и на эти потенциалы. Теория таких потенциалов не разработана подробно, за исключением, пожалуй, прямоугольной ямы ($\sigma=0$) и гауссовского потенциала ($\sigma=\pi/4$). Разумно предположить, что для больших λ

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} F(\lambda, k) = 1$$

при $|\eta| < 2\sigma$, где $\eta = \arg(\lambda/k) - \pi/2$.

Из всего сказанного следует, что σ является столь же определяющим параметром для асимптотического поведения при мнимых λ , как $1/m$ для поведения при вещественных λ .

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ПОЛНОЙ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ
В t -ПЛОСКОСТИ ПРИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ

§ 1. Функции $f(E, t)$ и $S(\lambda, k)$

Рассмотрим амплитуду рассеяния как функцию энергии $E=k^2$ и передаваемого импульса $t=2k^2(1 - \cos \vartheta)$ с учетом формулы (5.33):

$$f(E, t) = F(k, \cos \vartheta) = \\ = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [S(\lambda, k) - 1] P_l \left(1 - \frac{t}{2k^2}\right). \quad (9.1)$$

Для построения амплитуды достаточно знать, очевидно, $S(\lambda, k)$ при физических значениях углового момента. Наоборот, если известна амплитуда $f(E, t)$, значение $S(\lambda, k)$ для физических λ можно найти с помощью формулы

$$S\left(l + \frac{1}{2}, k\right) = \\ = 1 + ik \int_{-1}^1 P_l(\cos \vartheta) f[E, 2k^2(1 - \cos \vartheta)] d \cos \vartheta. \quad (9.2)$$

При выводе (9.2) используется нормировка

$$\int_{-1}^1 P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) d \cos \vartheta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (9.3)$$

Опустим временно в $S(\lambda, k)$ и $f(E, t)$ зависимость от энергии и будем пользоваться записью $S(\lambda)$ и $f(t)$. Формула (9.1) показывает, что задание последовательности $S_l = S(l + 1/2)$ при целых $l \geq 0$ полностью эквивалентно заданию функции $f(t)$ в интервале $0 \leq t \leq 4k^2$. При этом квадратичная интегрируемость обеспечивается экспоненциальным убыванием S_l при больших l . Отсюда следует, что функция $f(t)$ квадратично интегрируема в интервале $0 \leq t \leq 4k^2$.

Если накладывать дополнительные ограничения на S_l [или $f(t)$], то соответствующие ограничения будут иметь место и для $f(t)$ [или S_l]. Выяснение смысла подобной взаимосвязи будет основным содержанием настоящей главы. Первым важным свойством является унитарность.

§ 2. Унитарность

Как было показано, вследствие эрмитовости взаимодействия сдвиги фаз при вещественных k вещественны и

$$S_l = e^{2i\delta_l(k)}. \quad (9.4)$$

Парциальная амплитуда перехода была определена как

$$a\left(l + \frac{1}{2}, k\right) = a_l = \frac{1}{2ik} (S_l - 1). \quad (9.5)$$

Из (9.1), (9.4) и (9.5) имеем

$$f(t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \vartheta), \quad (9.6)$$

$$a_l^* a_l = \frac{1}{k} \operatorname{Im} a_l. \quad (9.7)$$

Установим теперь, что следует из равенства (9.7) относительно свойств функции $f(t)$. Для этого нужно получить вначале некоторые тождества для полиномов Лежандра. Из сферической тригонометрии известно, что если ϑ, φ и ϑ', φ' — полярные координаты некоторых двух направлений в пространстве и ϑ'' — угол между этими двумя направлениями, то

$$\cos \vartheta'' = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Фиксируем ϑ', φ' и рассмотрим функции

$$\mathcal{A}_l(\vartheta, \varphi) = P_l(\cos \vartheta), \quad \mathcal{B}_{l'}(\vartheta, \varphi) = P_{l'}(\cos \vartheta''),$$

каждая из которых является сферической гармоникой переменных ϑ, φ . При $l \neq l'$ эти гармоники представляют собственные функции полного углового момента

(L)², соответствующие различным собственным значениям $l(l+1)$ и $l'(l'+1)$. Следовательно, они ортогональны

$$\int \mathcal{A}_l(\vartheta, \varphi) \mathcal{B}_{l'}(\vartheta, \varphi) d\Omega = 0, \quad l \neq l'. \quad (9.8)$$

Если же $l=l'$, то интеграл в равенстве (9.8) не обращается в нуль и его можно подсчитать с помощью теоремы сложения для сферических функций [7]

$$\begin{aligned} P_l(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi) &= \\ &= P_l(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta') + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^l (-1)^m P_l^{-m}(\cos \vartheta) P_l^m(\cos \vartheta') \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Разлагая $\mathcal{B}_l(\vartheta, \varphi)$ по формуле (9.9) и подставляя результат в левую часть (9.8), получаем

$$\begin{aligned} \int \mathcal{A}_l(\vartheta, \varphi) \mathcal{B}_l(\vartheta, \varphi) d\Omega &= \\ &= P_l(\cos \vartheta') \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 P_l^2(\cos \vartheta) d \cos \vartheta + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^l (-1)^m P_l^m(\cos \vartheta') \int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi \times \\ &\quad \times \int_{-1}^1 P_l^{-m}(\cos \vartheta) P_l(\cos \vartheta) d \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Все интегралы вида $\int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi$ равны нулю, если только $m \neq 0$, и, следовательно,

$$\int \mathcal{A}_l(\vartheta, \varphi) \mathcal{B}_{l'}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\cos \vartheta'). \quad (9.10)$$

При выводе соотношения (9.10) была использована также нормировка (9.3).

Выделим явно в $f(t)$ зависимость от $\cos \vartheta$ [$f(t) = F(\cos \vartheta)$] и рассмотрим интеграл

$$I = \int F(\cos \vartheta) F^* \times \\ \times [\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi')] d\Omega. \quad (9.11)$$

В силу (9.6) имеем

$$F(\cos \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l \mathcal{A}_l(\vartheta, \varphi); \quad (9.12)$$

$$F^*(\cos \vartheta') = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l^* P_l(\cos \vartheta') = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l^* \mathcal{B}_l(\vartheta, \varphi).$$

Подставляя (9.12) в (9.11) и используя (9.10), легко находим, что

$$I = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2 P_l(\cos \vartheta') \frac{4\pi}{k} \text{Im } F(\cos \vartheta'). \quad (9.13)$$

Полученное интегральное соотношение, полностью эквивалентное соотношению (9.7), часто называют условием унитарности для полной амплитуды рассеяния. Это соотношение можно представить в более симметричной форме, если в качестве независимых переменных вместо ϑ и φ взять величины $\eta = \cos \vartheta$ и

$$\zeta = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

После несложных вычислений находим якобиан

$$\frac{\partial(\vartheta, \varphi)}{\partial(\eta, \zeta)} = (1 - \eta^2)^{-1/2} (1 - \eta^2 - \xi^2 - \zeta^2 + 2\xi\eta\zeta)^{-1/2},$$

где $\xi = \cos \vartheta'$.

Теперь необходимо найти границы области интегрирования по переменным η и ζ . В этой области полином

$$A = 1 - \eta^2 - \xi^2 - \zeta^2 + 2\xi\eta\zeta$$

всегда положителен или равен нулю, так как

$$\sin(\varphi - \varphi') = (1 - \xi^2)^{-1/2} (1 - \eta^2)^{-1/2} A^{1/2}. \quad (9.14)$$

Далее при $A > 0$ точкам в области интегрирования η , ζ всегда можно сопоставить ϑ и φ , причем, согласно (9.14), получаются два значения $\sin(\varphi - \varphi')$. Следовательно, двойной интеграл должен быть распространен на область $A \geq 0$ и взят с коэффициентом 2, так как при изменении φ в (9.14) от 0 до 2π величина $A^{1/2}$ должна соответствовать обоим значениям.

Соотношение (9.13) можно записать теперь в виде

$$\int \frac{\theta(A)}{A^{1/2}} F(\eta) F^*(\zeta) d\eta d\zeta = \frac{2\pi}{k} \operatorname{Im} F(\xi).$$

Полагая

$$\eta = 1 - \frac{t_1}{2k^2}, \quad \zeta = 1 - \frac{t_2}{2k^2}, \quad \xi = 1 - \frac{t}{2k^2}$$

и

$$A' = k^2(2t_1 t_2 + 2t_1 t + 2t_2 t - t_1^2 - t_2^2 - t^2) - t_1 t_2 t,$$

приходим к соотношению

$$\int \frac{\theta(A')}{(A')^{1/2}} f(t_1) f^*(t_2) dt_1 dt_2 = 4\pi \operatorname{Im} f(t), \quad (9.15)$$

представляющему искомую форму условия унитарности, выраженного через переменные передаваемого импульса.

§ 3. Асимптотические свойства в λ -плоскости и аналитичность относительно переменной передаваемого импульса в t -плоскости

Основываясь на установленных аналитических свойствах $S(\lambda, k)$ как функции λ , можно получить крайне важную форму записи формулы (9.1). Рассмотрим с этой целью функцию

$$Q(\lambda) = \frac{\lambda}{2k} \frac{S(\lambda, k) - 1}{\cos \pi \lambda} P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta).$$

Согласно интегральному представлению

$$P_{\lambda-1/2}(\operatorname{ch} \vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{\operatorname{ch} \lambda v}{(\operatorname{ch} \vartheta - \operatorname{ch} v)^{1/2}} dv,$$

$P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta)$ при фиксированном $\cos \vartheta$ — целая функция λ^2 , так что

$$P_{-\lambda-1/2}(-\cos \vartheta) = P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta)$$

и $P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta)$ имеет только существенно особую точку при $\lambda = \infty$. Согласно предыдущему, $Q(\lambda)$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ — мероморфная функция λ , обладающая простыми полюсами в нулях $\cos \pi \lambda$ (т. е. при физических значениях λ), а также в полюсах $S(\lambda, k)$, если последние существуют.

Вычет $Q(\lambda)$ в физической точке $\lambda = l + 1/2$ равен

$$-\frac{1}{4\pi k} (2l + 1)(S_l - 1)P_l(\cos \vartheta).$$

Рассмотрим интеграл

$$Y = -\frac{1}{2k} \int_C \frac{S(\lambda, k) - 1}{\cos \pi \lambda} P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta) \lambda d\lambda, \quad (9.16)$$

где C — некоторый замкнутый контур, который окружает (по часовой стрелке) все физические точки λ , оставляя снаружи полюсы $S(\lambda, k)$. На этом контуре интеграл (9.16) сходится и равен

$$Y = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)(S_l - 1)P_l(\cos \vartheta) = f(t). \quad (9.17)$$

Для эффективного использования (9.16) необходима оценка асимптотического поведения $P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta)$ при больших λ , без чего нельзя исследовать сходимость этого интеграла. Вспоминая, что

$$\begin{aligned} Q_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta) &= Q_{\lambda-1/2}[\cos(\vartheta - \pi)] = \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\lambda + 1/2)}{\Gamma(\lambda + 1)} e^{-i(\pi - \vartheta)(\lambda + 1/2)} F\left(\frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + 1; e^{2i\vartheta}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{ctg} \pi \lambda [Q_{-\lambda-1/2}(-\cos \vartheta) - Q_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta)], \end{aligned}$$

и используя снова обобщенное неравенство Гобсона [18]

$$\left| F\left(\frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + 1; \zeta\right) \right| \leq |1 - \zeta|^{-1/2}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq -\frac{3}{4},$$

$$|\zeta| = e^{-2 \operatorname{Im} \vartheta} < 1,$$

находим для больших λ , $\operatorname{Re} \lambda > 0$,

$$\begin{aligned} |P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta)| &\leq \\ &\leq C |\sin \vartheta|^{-1/2} |\lambda|^{-1/2} e^{|\pi - \operatorname{Re} \vartheta| |\operatorname{Im} \lambda| + \operatorname{Im} \vartheta \operatorname{Re} \lambda}. \end{aligned}$$

Вдоль луча $\arg \lambda = \sigma$ полученная оценка дает

$$\left| \frac{\lambda P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta)}{\cos \pi \lambda} \right| \leq$$

$$\leq C |\sin \vartheta|^{-1/2} |\lambda|^{1/2} e^{-|\operatorname{Re} \vartheta \operatorname{Im} \lambda| + \operatorname{Im} \vartheta \operatorname{Re} \lambda}. \quad (9.18)$$

Для юкавских потенциалов при достаточно больших λ и $|\arg \lambda| \neq \pi/2$ в силу теоремы 2 гл. 8 имеем

$$|S(\lambda, k) - 1| \leq C e^{-\alpha \operatorname{Re} \lambda}, \quad \operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{m^2}{2k^2}.$$

Согласно вышесказанному, подынтегральное выражение в (9.16) меньше, чем

$$C |\lambda|^{1/2} e^{-|\operatorname{Re} \vartheta \operatorname{Im} \lambda| + \operatorname{Im} \vartheta \operatorname{Re} \lambda - \alpha \operatorname{Re} \lambda}.$$

При условии, что $\operatorname{Im} \vartheta < \alpha$, путь интегрирования можно деформировать в любой луч в λ -плоскости, учитывая только, что этот луч должен по-прежнему отделять полюсы $S(\lambda, k)$ от полюсов $(\cos \pi \lambda)^{-1}$. Примем для простоты, что $S(\lambda, k)$ вообще не имеет полюсов. Возьмем тогда путь C , проходящий по мнимой оси λ . В соответствии с формулой (8.31), при $|V(iy)| < N/y^\beta$ подынтегральное выражение будет асимптотически ограничено величиной

$$C e^{-|\operatorname{Re} \vartheta \operatorname{Im} \lambda|} |\lambda|^{1-\beta}$$

и при $\operatorname{Re} \vartheta > 0$ рассматриваемый интеграл будет аналитической функцией $\cos \vartheta$.

Разберем отдельно случай $\operatorname{Re} \vartheta = 0$. При $\beta > 1$ интеграл может сходиться, но не всегда абсолютно и не всегда представляет собой аналитическую функцию ϑ .

При $\beta=1$ (потенциал Юкавы) имеет место сходимость в смысле Чезаро [100]. Такое поведение не удивительно, если учесть, что линия $\operatorname{Re} \theta=0$ является для амплитуды разрезом и, следовательно, рассматриваемый интеграл можно определить вдоль этого разреза лишь как обобщенную функцию.

Форма записи амплитуды рассеяния в виде

$$f(t) = -\frac{1}{2k} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{S(\lambda, k) - 1}{\cos \pi \lambda} P_{\lambda-1/2}(-\cos \theta) \lambda d\lambda \quad (9.19)$$

заимствована, по существу, из работ Пуанкаре [84] и Никольсона [79]. Поскольку она многократно использовалась Ватсоном и Зоммерфельдом [96], ее часто называют преобразованием Ватсона — Зоммерфельда. Мы будем называть (9.19) W -преобразованием. С помощью формулы обращения Меллера [7] можно записать интеграл от $f [2E(1-\cos \theta)]$ аналогично соотношению (9.2)

$$S(\lambda, k) = 1 - ik \sin \pi \lambda \int_1^{\infty} f [2E(1+x)] P_{\lambda-1/2}(x) dx.$$

Аналитические свойства $f(t)$ для юкавских потенциалов выводятся из формулы (9.19) при подстановке в нее тождества

$$\frac{P_{\lambda-1/2}(-\cos \theta)}{\cos \pi \lambda} = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{P_{\lambda-1/2}(q)}{q - \cos \theta} dq.$$

В результате имеем

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega(t')}{t+t'},$$

где

$$\begin{aligned} \omega(t) = & -\frac{k^2}{\sqrt{t(1+t/2k^2)}} \int_{-i\infty}^{i\infty} [S(\lambda, k) - 1] \frac{\lambda}{\lambda + 1/2} \times \\ & \times \left[\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) P_{\lambda-1/2}\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) - P_{\lambda-1/2}\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) \right] d\lambda. \end{aligned}$$

Вообще весьма интересно сопоставить свойства сходимости разложения по парциальным волнам (9.1) или (9.6) с соответствующими свойствами W -преобразования.

а) Разложение по парциальным волнам является разложением по полиномам Лежандра. Согласно известным теоремам анализа [13], разложение по полиномам Лежандра сходится внутри эллипса на плоскости $\cos \vartheta$. Действительно, из неравенства (9.18) имеем

$$|P_l(\cos \vartheta)| < C \frac{\exp[(l + 1/2)|\operatorname{Im} \vartheta|]}{|\sin \vartheta|^{1/2} |l + 1/2|^{1/2}}.$$

Далее, вспоминая результаты гл. 8, получаем, что если $|a_1| < De^{-\alpha l}$, $\operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{m^2}{2k^2}$,

то разложение по парциальным волнам сходится при $|\operatorname{Im} \vartheta| < \alpha$. Границей области сходимости являются прямые $\operatorname{Im} \vartheta = \pm \alpha$; в плоскости $\cos \vartheta$ эта область представляет эллипс с фокусами ± 1 . Действительно, положим $z = x + iy = \cos(\vartheta_1 + i\vartheta_2)$, $0 \leq \vartheta_1 \leq \pi$, т. е.

$$x = \cos \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_2, \quad y = -\sin \vartheta_1 \operatorname{sh} \vartheta_2.$$

На линии $\vartheta_2 = \operatorname{const}$ имеет место соотношение

$$\frac{x^2}{(\operatorname{ch} \vartheta_2)^2} + \frac{y^2}{(\operatorname{sh} \vartheta_2)^2} = 1,$$

представляющее собой в точности эллипс Лемана, образ которого на t -плоскости также является эллипсом. Кроме того, условию $\cos \vartheta = 1 + m^2/2k^2$ соответствует $t = -m^2$.

б) Как мы видели, в случае юкавских потенциалов W -преобразование сходится абсолютно при условии $\operatorname{Re} \vartheta > 0$, т. е. во всей плоскости $\cos \vartheta$ с разрезом вдоль $1 \leq \cos \vartheta \leq \infty$. Если $S(\lambda) - 1$ возрастает экспоненциально и удовлетворяет ограничению

$$|S(ip) - 1| < Ce^{|\rho|\beta}, \quad 0 < \beta < \pi,$$

то область сходимости $\operatorname{Re} \vartheta > \beta$ лежит слева от гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2 \vartheta_1} - \frac{y^2}{\sin^2 \vartheta_1} = 1,$$

соответствующей $\operatorname{Re} \vartheta = \beta$.

З а к л ю ч е н и е. Если полная амплитуда рассеяния соответствует юкавскому потенциалу с радиусом действия $1/m$ и $\beta=0$, то $f(t)$ будет аналитической функцией на t -плоскости с разрезом вдоль полуоси $-\infty \leq t \leq 0$ и в эллипсе Лемана. Это означает, что разрез ограничивается в действительности интервалом $-\infty \leq t \leq -m^2$. Данный результат предполагался Мандельштамом [65] при записи двойных дисперсионных соотношений.

Интересно, что область аналитичности мы определили здесь по переменной t , исходя из асимптотических свойств относительно переменной λ . Еще более интересной с точки зрения использования в физике высоких энергий является теорема § 4, развивающая далее указанную связь.

§ 4. Асимптотическое поведение в t -плоскости и особенности в λ -плоскости

Свойства функции $f(t)$ при больших t не могут быть выведены с помощью разложения (9.6), которое, согласно § 3, сходится лишь внутри эллипса Лемана и теряет силу при больших t . В то же время W -преобразование оказывается для этой цели весьма удобным.

Предположим, что $S(\lambda, k)$ имеет только один полюс при $\lambda = \alpha(k) + 1/2$ в правой полуплоскости, причем $\alpha(k)$ — некоторая комплексная функция k . В этом случае вместо (9.19) имеем

$$f(t) = -\frac{1}{2k} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{S(\lambda, k) - 1}{\cos \pi\lambda} P_{\lambda-1/2}(-\cos \vartheta) \lambda d\lambda + \frac{\beta(k)}{\sin \pi\alpha} P_{\alpha}(-\cos \vartheta). \quad (9.20)$$

Формула (9.20) представляет $f(t)$ в виде суммы двух членов: непрерывной суперпозиции функций $P_{i\rho-1/2}(-\cos \vartheta)$ (функций конуса) и слагаемого, появляющегося из-за наличия полюса. Рассмотрим эти члены по отдельности в пределе при $\text{Im } \vartheta \rightarrow \infty$, а $\text{Re } \vartheta = \text{const}$.

С помощью неравенства Гобсона (см. § 3) можно получить, что при больших t функции конуса убывают и имеют порядок $O(t^{-1/2})$. При $\text{Re } \vartheta > 0$ можно в пределе от $f(t)$ (9.20) поменять местами переход к пределу и интегрирование, так что составляющая $f(t)$, обязанная интегралу, будет стремиться к нулю.

Функции Лежандра обладают следующим асимптотическим поведением [7]:

$$P_{\lambda-1/2}(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2^{\lambda-1/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+1/2)} z^{\lambda-1/2}, \quad |\arg z| < \pi.$$

т. е. член с $P_{\alpha}(-\cos \vartheta)$ ведет себя асимптотически как t^{α} . При $\text{Re } \alpha > -1/2$ такой член становится при больших t основным. В случае наличия более чем одного полюса в (9.20) появляются дополнительные слагаемые. Главным из них при больших t будет слагаемое, соответствующее наибольшему значению $\text{Re } \alpha$. Если число полюсов бесконечно, то приведенные аргументы становятся, вообще говоря, недостаточными и необходим специальный анализ, так как нет оснований априори считать, что ряд вычетов в этом случае сходится и однополюсная асимптотика сохраняет силу. Из сказанного следует, что асимптотическое поведение $f(E, t)$ при больших t имеет вид

$$f(E, t) \underset{|t| \rightarrow \infty}{\sim} C(k) t^{\alpha(k)}, \quad (9.21)$$

где $C(k)$ и $\alpha(k)$ — комплексные функции k . Таким образом, получено важное соотношение между асимптотическим поведением $f(E, t)$ при больших t и особенностями $S(\lambda, k)$ в комплексной λ -плоскости.

Было высказано предположение, что формула (9.21) сохраняется и в релятивистской теории, где она позволяет сделать интересные предсказания о рассеянии при высоких энергиях. Хотя такое предположение оправдывается в целом ряде моделей, включая приближенные формы уравнения Бете — Сольпи-

тера, есть серьезные основания считать, что в релятивистской теории, кроме простых полюсов, существенный вклад дают также движущиеся разрезы¹⁾.

§ 5. Интерпретация полюсов в λ -плоскости

После представления амплитуды рассеяния с помощью W -преобразования можно рассмотреть физический смысл полюсов в λ -плоскости. Как было показано, составляющая амплитуды рассеяния, обязанная такому полюсу, имеет вид

$$\frac{\beta(k)}{\sin \pi \alpha(k)} P_{\alpha(k)}(-\cos \theta),$$

где $\beta(k)$ — множитель, зависящий от энергии. По определению $\alpha(k)$

$$F\left[\alpha(k) + \frac{1}{2}, -k\right] = 0.$$

Предположим, что при $E = H = h^2$ величина $\eta = \text{Im } \alpha$ мала, а величина $\text{Re } \alpha$ близка к целому числу L ,

$$\alpha = L + \mu + i\eta, \quad \mu, \eta \ll 1.$$

Функция $F(\lambda, -k)$ является локально аналитической по обоим переменным, и в общем случае $\partial F / \partial \lambda \neq 0$. Отсюда в силу теоремы 16 гл. 2 следует, что функция $\lambda(E)$, определяемая равенством $F[\lambda(E), -k] = 0$, будет локально аналитической функцией E . Разложим ее по степеням $E - H$ и оставим только линейные члены

$$\begin{aligned} \lambda(E) = \alpha(k) + \frac{1}{2} &= L + \mu(E) + i\eta(E) + \frac{1}{2} \approx \\ &\approx L + \mu_0 + i\eta_0 + A(E - H) + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где

$$\mu_0 = \mu(H), \quad \eta_0 = \eta(H), \quad A = \left(\frac{d\lambda}{dE}\right)_{E=H}.$$

¹⁾ Недостаточность учета в общем случае только одних простых полюсов следует, по-видимому, также из рассмотрения ряда экспериментов по рассеянию при высоких энергиях. — *Прим. перев.*

Рассмотрим далее уравнение $\alpha(E) = L$, приближенное решение которого равно

$$E = H - \frac{\mu_0 + i\eta_0}{A} = E_0 - i \frac{\Gamma}{2}.$$

При $E = E_0 - i\Gamma/2$ система имеет резонанс с угловым моментом L и средним временем жизни $\tau = 2M/\hbar\Gamma$. Действительно, величина $\sin[\pi\alpha(k)]$ при $k = \hbar$ мала и имеет порядок μ и η , вследствие чего вклад полюса в $f(E, t)$ велик. Следует ожидать, что A будет почти вещественным в силу соотношения (справедливого при $\text{Im } k > 0$)

$$\frac{d\lambda^2(E)}{dE} = \frac{\int_0^{\infty} \varphi^2 dx}{\int_0^{\infty} (\varphi^2/x^2) dx}. \quad (9.22)$$

Последнее соотношение получается из уравнения Шредингера для $\varphi = \varphi[\lambda(E), k, x]$ и уравнения для $\partial\varphi/\partial E = (\partial/\partial E)\varphi[\lambda(E), k, x]$:

$$\varphi'' + E\varphi - \frac{\lambda^2(E) - 1/4}{x^2}\varphi - V\varphi = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial E}\right)'' + E\frac{\partial\varphi}{\partial E} - \frac{\lambda^2(E) - 1/4}{x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial E} - V\frac{\partial\varphi}{\partial E} = \\ = -\varphi + \frac{1}{x^2}\frac{d\lambda^2(E)}{dE}\varphi. \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на $\partial\varphi/\partial E$ и вычитая из результата второе уравнение, умноженное на φ , приходим к тождеству

$$\left[\varphi' \frac{\partial\varphi}{\partial E} - \varphi \left(\frac{\partial\varphi}{\partial E}\right)'\right]' = \varphi^2 - \frac{d\lambda^2(E)}{dE} \frac{\varphi^2}{x^2}.$$

Интегрирование этого тождества по x от нуля до бесконечности дает (9.22). Если E и λ почти вещественны, то следует ожидать, что φ^2 , а следовательно, и $d\lambda^2(E)/dE$ будут также почти вещественными и положительными, причем последняя величина будет

иметь порядок квадрата радиуса R классической орбиты системы. В соответствии со сказанным

$$\frac{d\lambda}{dE} \approx A \approx \frac{R^2}{2\lambda}, \quad \frac{\Gamma}{2} \approx \frac{\eta_0}{A} \approx \frac{2\lambda\eta_0}{R^2} \quad \text{или} \quad \eta_0 \approx \frac{\Gamma R^2}{4\lambda}.$$

Если v — соответствующая орбите классическая скорость, то $\hbar\lambda = MvR$, поскольку $\hbar\lambda$ — угловой момент и M — приведенная масса. Следовательно,

$$\eta_0 \approx \frac{\hbar R \Gamma}{4Mv}.$$

В то же время $2\pi R/v$ равно времени обращения системы по орбите Δt , откуда с учетом выражения для среднего времени жизни $\tau = 2M/\hbar\Gamma$ получаем

$$\frac{1}{2\eta_0} = 2\pi \frac{\tau}{\Delta t} = \Delta\theta.$$

Величину $\Delta\theta$ можно назвать угловым временем жизни системы; оно тем больше, чем меньше η_0 .

Мы получаем резонанс всюду, где «траектория» $\alpha(k)$ близко подходит к целому числу. Таким образом, одна и та же функция $\alpha(k)$ может быть источником нескольких резонансов, если при вещественных E она близка к нескольким целым числам. Следовательно, резонансы могут появляться целыми семействами, каждое из которых относится к одной и той же функции $\alpha(k)$. Это соображение о семействах резонансов является весьма существенным для понимания явлений при высоких и низких энергиях.

В заключение остановимся кратко на угловой части волновой функции. При нецелочисленном $\alpha(k)$ сферические гармоники $Y_l^m(\theta, \varphi)$ перестают быть однозначными или регулярными решениями волнового уравнения для угловой части

$$\left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) Y(\theta, \varphi) = -\alpha(\alpha+1)Y(\theta, \varphi). \quad (9.23)$$

Введем тем не менее дополнительное порождающее взаимодействие с резонансными частицами

$$W = \frac{\Omega(\theta, \varphi)}{x^2},$$

не меняющее вида радиального уравнения, но модифицирующее уравнение (9.23) так, что оно переходит в

$$\left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y(\vartheta, \varphi) = \\ = [\Omega - \alpha(\alpha + 1)] Y(\vartheta, \varphi). \quad (9.24)$$

При комплексном $\Omega(\vartheta, \varphi)$ собственные значения уравнения (9.24) могут быть комплексными и можно подобрать такую функцию Ω , что собственным значением будет $\alpha(k)$. Аналогично можно провести мысленный эксперимент с введением порождающего сектора W , который непрерывно восстанавливает вероятность, «утекающую» на бесконечность в процессе распада резонансов. При определенном выборе W время жизни резонанса становится бесконечным и соответственно энергия E — вещественной. Подобным образом получена связь между обычной интерпретацией резонансов по Брейту — Вигнеру и их представлением с помощью комплексных угловых моментов. В дальнейшем, поскольку W не изотропно, угловой момент не остается постоянной движения и первоначальная симметрия резонанса нарушается.

§ 6. Общие свойства траектории $\alpha(\sqrt{E})$

Как следует из предыдущего рассмотрения, связанные состояния и резонансы группируются в семейства, характеризующиеся одной и той же функцией $\alpha(\sqrt{E})$. Всякий раз, когда $\alpha(\sqrt{E})$ является целым числом l , в l -й парциальной волне амплитуды рассеяния возникает полюс, который интерпретируется как связанное состояние или как резонанс в зависимости от соответствующего ему значения E . Так как $\alpha(\sqrt{E})$ определяется из равенства

$$F \left[\alpha(\sqrt{E}) + \frac{1}{2}, \sqrt{E} \right] = 0,$$

то $\alpha(\sqrt{E})$ является аналитической функцией в плоскости E с разрезом вдоль положительной веществен-

ной оси на листе $\text{Im } k = \text{Im } \sqrt{E} < 0$, исключая точки, где $\partial F/\partial \lambda = 0$, и точки, где $\alpha(\sqrt{E}) < -1/2$ (это следствие теоремы 16 гл. 2). Пусть энергия E вещественна: рассмотрим по отдельности случаи $E < 0$, $E > 0$ и $E = 0$ (пороговое поведение). При $E < 0$ и $k = ib$, $b < 0$, имеем следующую асимптотику:

$$\varphi \left[\alpha(\sqrt{E}) + \frac{1}{2}, ib, x \right] \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2b} f \left[\alpha(\sqrt{E}) + \frac{1}{2}; -ib \right] e^{bx}.$$

Следовательно, в данном случае φ^* и φ регулярны как при $x=0$, так и при $x=\infty$. С помощью очевидного соотношения

$$\begin{aligned} \varphi^* \left[\varphi'' - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} \varphi + (E-V)\varphi \right] - \\ - \varphi \left[\varphi^{*\prime\prime} - \frac{\alpha^*(\alpha^*+1)}{x^2} \varphi^* + (E-V)\varphi^* \right] = 0 \end{aligned}$$

получаем тождество

$$\text{Im } \alpha(\alpha+1) \int_0^{\infty} \frac{|\varphi|^2}{x^2} dx = 0,$$

из которого следует, что функция $\alpha(\sqrt{E})$ вещественна при $E < 0$, если только $\alpha > -1/2$. Ясно, что последнее условие необходимо, так как в противном случае

интеграл $\int_0^{\infty} (|\varphi|^2/x^2) dx$ был бы расходящимся в начале.

Рассматривая далее равенство (9.22) при $E < 0$, видим, что $\alpha(\sqrt{E})$ является возрастающей функцией E . Следовательно, $\alpha(0)$ соответствует высшему угловому моменту семейства, при котором еще может реализоваться связанное состояние с нулевой энергией. Если $E > 0$, следует ожидать, что функция $\alpha(\sqrt{E})$ комплексна, причем вследствие унитарности $\alpha(\sqrt{E+i\epsilon}) = \alpha^*(\sqrt{E-i\epsilon})$. Более того, согласно предыдущему рассмотрению, полюсы $S(\lambda, k)$ при $\text{Re } \lambda > 0$ возможны только тогда, когда k вещественно и находится в верхнем квадранте, а $\text{Im } \lambda > 0$. Следовательно,

если $\operatorname{Re} \alpha > -1/2$, то $\operatorname{Im} \alpha > 0$ вдоль верхнего края разреза в комплексной плоскости энергии.

Интересно пороговое поведение $S(\lambda, k)$ вблизи значения $E=0$; оно весьма просто выводится из (5.28)

$$S(\lambda, k) = \frac{Z(\lambda, E) - iE^\lambda e^{2i\pi\lambda}}{Z(\lambda, E) - iE^\lambda},$$

при этом $\alpha(\sqrt{E})$ может быть определено как корень уравнения

$$Z\left[\alpha(\sqrt{E}) + \frac{1}{2}, E\right] = iE^{\alpha(\sqrt{E})+1/2}.$$

Как было показано в § 3 гл. 5, предыдущее уравнение нельзя использовать при полуцелых α ; в этом случае следует перейти к его предельной форме

$$\frac{dZ}{d\alpha} = iE^{\alpha+1/2} \ln E.$$

При малых E можно разложить $Z(\alpha+1/2, E)$ по степеням E :

$$Z = Z_0(\alpha) + Z_1(\alpha)E + \dots,$$

где значение $Z_0[\alpha(0)] = 0$, а функция $Z_0(\alpha)$ регулярна при $\alpha = \alpha(0)$. Если $\alpha(0) < 1/2$, то член, пропорциональный $E^{\alpha+1/2}$, преобладает над членом с E

$$Z(\alpha) \approx Z'[\alpha(0)] [\alpha(\sqrt{E}) - \alpha(0)]$$

и пороговое поведение равно

$$\alpha(\sqrt{E}) - \alpha(0) = O(E^{\alpha(0)+1/2}).$$

Если $\alpha(0) > 1/2$, то доминирует член с первой степенью E и пороговое поведение принимает вид

$$\alpha(\sqrt{E}) - \alpha(0) = O(E).$$

В случае же $\alpha(0) = 1/2$ имеем

$$\alpha(\sqrt{E}) - \alpha(0) = O(E \ln E).$$

Для $\alpha \leq 1/2$ можно записать

$$\lim_{E \rightarrow 0+} \arg [\alpha(\sqrt{E}) - \alpha(0)] = \pi \left[\frac{1}{2} - \alpha(0) \right],$$

а для $\alpha \geq 1/2$

$$\lim_{E \rightarrow 0+} \arg [\alpha(\sqrt{E}) - \alpha(0)] = 0.$$

Таким образом, при $E=0$ траектория полюса отходит от вещественной оси в следующих направлениях: вперед при волнах с $l>0$; под прямым углом в случае S -волн и назад при $l<0$ [77, 6]. При этом траектория тем ближе «прижимается» к вещественной оси, чем более высокой волне соответствует точка отрыва. Нет никаких общих соображений, запрещающих встречу траекторий в точке, где $(\partial F/\partial \lambda) = 0$; в случае такой встречи функция Юста может иметь нуль второго порядка по λ и быть симметричной функцией, если только траектории остаются аналитическими функциями E . Конкретные численные расчеты, выполненные для потенциала Юкавы, не показали сближения траекторий, во всяком случае при $\text{Re } \alpha > -1/2$. Это явление возможно в левой полуплоскости, но это область неустойчивости, и полученные здесь результаты настолько сильно зависят от несущественных характеристик потенциала, что не представляют интереса. К тому же они никогда не определяют асимптотику релятивистских амплитуд вследствие кризиса Грибова — Померанчука [44], который не проявляется при потенциальном рассеянии.

§ 7. Интегральное представление для $f(E, t)$

Предположим, что $f(E, t)$ обращается в нуль при больших t , т. е. что нет полюсов с $\text{Re } \alpha > 0$. Тогда $f(E, t)$ можем записать в виде интеграла Стильтьеса

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{d\omega(t')}{t' + t}.$$

Используя формулу (9.2), получаем ($\lambda = l + 1/2$)

$$a(\lambda, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 P_l(\cos \vartheta) d \cos \vartheta \int_{m^2}^{\infty} \frac{dw(t')}{t' + t}.$$

Вспоминая равенство

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(x) dx}{y-x} = Q_l(y), \quad (9.25)$$

находим

$$a(\lambda, k) = \frac{1}{2\pi k^2} \int_{m^2}^{\infty} Q_l\left(1 + \frac{t'}{2k^2}\right) d\omega(t'). \quad (9.26)$$

Как показал Фруассар [38] (см. также [44]), формула (9.26), выведенная первоначально только для целых l , определяет при комплексных λ функцию $a(\lambda, k)$, которая обладает асимптотическими и аналитическими свойствами, согласующимися с описанными в предыдущих параграфах. Кроме того, формула (9.26) дает единственное решение задачи восстановления полной комплексной функции $a(\lambda, k)$ [или $S(\lambda, k)$] по заданной функции $f(E, t)$. Действительно, допустим, что существуют две такие функции $S_1(\lambda)$ и $S_2(\lambda)$, каждая из которых соответствует одной и той же $f(E, t)$. Ясно, что при физических значениях λ функции $S_1(\lambda)$ и $S_2(\lambda)$ будут совпадать и разность $Z(\lambda) = S_1(\lambda) - S_2(\lambda)$ обратится в нуль. Кроме того, функция $Z(\lambda)$ должна стремиться к нулю при больших λ и быть аналитической в некоторой полуплоскости $\text{Re } \lambda > a > -1/2$. Но, согласно теореме Карлсона (теорема 3 гл. 2), каждая такая функция должна равняться нулю. Следовательно, $S_1(\lambda) = S_2(\lambda)$ и ответ является единственным.

Интересно отметить, что формула (9.2) в том виде, как она записана, совершенно непригодна для получения правильного аналитического продолжения S в λ -плоскости, так как в полном противоречии с истиной она дает целую функцию, четную относительно λ . Это очевидное противоречие связано с тем, что равенство (9.25) неверно при нецелых l и, следовательно, соот-

ношения (9.2) и (9.26) не эквивалентны при комплексных λ . Это положение похоже на аналогичную ситуацию, возникающую в теории поля, где $S(\lambda, k)$ определяют обычно, исходя из $f(E, t)$, а не наоборот. В заключение следует подчеркнуть, что многие из свойств функции $S(\lambda, k)$, изложенных в предыдущих главах, могут быть также получены путем детального рассмотрения формулы (9.26) [6].

ОБЫЧНОЕ ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

§ 1. Введение

Дисперсионные соотношения в том виде, в котором они рассматриваются в настоящей главе, появились впервые в релятивистской теории поля. Уже тогда можно было заключить, что подобные дисперсионные соотношения имеют место и для потенциального рассеяния. Кури [58] первый вывел дисперсионные соотношения для этого случая. В последующем были предприняты значительные усилия, направленные на то, чтобы заменить первоначальное доказательство Кури более убедительным и простым [39, 57, 47, 48]. Мы приводим вывод дисперсионных соотношений для потенциального рассеяния, следуя Унцикеру [47, 48].

Сделаем несколько вводных замечаний, чтобы пояснить некоторые трудности, с которыми приходится здесь сталкиваться. Прежде всего не существует никакого строгого вывода дисперсионных соотношений Кури (или обычных дисперсионных соотношений) из известных аналитических свойств парциальных амплитуд рассеяния, хотя, как будет показано, имеются некоторые нестрогие аргументы в пользу того, что такой вывод возможен. Указанное обстоятельство объясняет, почему мы вынуждены отказаться от формализма предыдущих глав книги и ввести формализм полного трехмерного рассмотрения. Настоящую главу можно рассматривать поэтому как самостоятельную. Конечно, предпочтительнее с эстетической точки зрения и рациональнее иметь единый метод рассмотрения. Однако даже если бы и имелась возможность вывода дисперсионных соотношений в рамках методов, работающих с парциальными волнами, тем не менее целесообразно поступить так, как это сделано ниже, ибо интересно знать и другие методы (не связанные с парциальными волнами). Кроме того, вывод Унцикера легко можно применить к несферическим

потенциалам; весьма вероятно также, что его удастся обобщить на случай многих измерений и на случай систем, состоящих более чем из двух частиц.

§ 2. Допущения и формальный аппарат в выводе Унцикера

Напомним, что с самого начала в книге было использовано трехмерное уравнение

$$\Delta\Psi(\mathbf{x}) + k^2\Psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}), \quad (10.1)$$

в котором $x = |\mathbf{x}|$. Изучаемое решение уравнения (10.1) имеет следующее асимптотическое поведение:

$$\Psi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \Phi(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{x}) = 0, \quad (10.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - ik\Phi \right) = 0,$$

где \mathbf{k} — вектор относительного импульса ($k = |\mathbf{k}|$). Будем предполагать, что потенциал удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} x |V(x)| dx < \infty. \quad (10.3)$$

Пусть C — функциональное пространство непрерывных и ограниченных функций от x с нормой

$$\|\Psi\| = \sup_x |\Psi(x)|.$$

Пространство C полно; т. е. если функции φ_n образуют некоторую последовательность функций в пространстве C и если

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0,$$

то существует функция $\varphi \in C$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0.$$

В таком случае будем писать, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Таким образом, для сходимости справедлив критерий Коши.

Пространство C является банаховым. Сходимость по норме является в этом пространстве равномерной сходимостью.

Будем искать решения (10.1), принадлежащие C и удовлетворяющие соотношениям (10.2). Первоначальные результаты будут относиться только к потенциалам, принадлежащим C .

Введем еще пространство D_2 дважды непрерывно дифференцируемых функций, для которых оператор

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi$$

ограничен. Этот оператор можно расширить следующим образом. Пусть $\varphi_n \rightarrow \varphi$ и $\Delta\varphi_n \rightarrow \mu$; определим тогда оператор равенством $\Delta\varphi = \mu$, при этом расширенную область действия оператора Δ будем обозначать через D .

§ 3. Рассмотрение волнового уравнения

Пусть k вещественно, а волновая функция $\Psi \in D$. Уравнение Шредингера с граничными условиями (10.2) можно заменить следующим интегральным уравнением:

$$\Psi(x) = e^{ik \cdot x} + \int G(x, x') V(x') \Psi(x') d^3x', \quad (10.4)$$

где для $G(x, x')$ имеем

$$G(x, x') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|}.$$

Уравнение (10.4) удобно записать в операторной форме

$$\Psi = \Psi_0 + GV\Psi. \quad (10.5)$$

Оператор $GV = GV(k)$ будем рассматривать также и для комплексных k .

При изучении уравнения (10.5) для нас существенны следующие свойства линейного оператора $GV(k)$:

а) При $\text{Im } k \geq 0$

$$|GV(k)| < \int_0^{\infty} x |V(x)| dx.$$

Здесь

$$|GV(k)| = \sup_{\|\Psi\|=1} \|GV(k)\Psi\|.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|GV\Psi\| &= \sup_{\mathbf{x}} \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \Psi(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \leq \\ &\leq \sup_{\mathbf{x}} \frac{\|\Psi\|}{4\pi} \int \frac{|V(\mathbf{x}')|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \frac{|V(\mathbf{x}')|}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' &\leq \frac{1}{x} \int_0^x |V(x')| x'^2 dx' + \\ &+ \int_x^{\infty} |V(x')| x' dx' \leq \int_0^{\infty} |V(x')| x' dx'. \quad (10.6) \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $GV(k)$ ограничен. Если

$$\int_0^{\infty} x |V(x)| dx < 1,$$

то уравнение (10.5) может быть разрешено итерациями, т. е. борновское разложение сходится.

б) Оператор $GV(k)$ при $\text{Im } k \geq 0$ является вполне непрерывным оператором, т. е. он переводит ограниченные множества функций пространства C в компактные множества функций. Другими словами, он переводит любую ограниченную последовательность функций $\varphi_n \in C$ в последовательность E , имеющую в пространстве C равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Докажем сначала, что оператор $GV(k)$ является вполне непрерывным, предположив, что потенциал $V(x)$ удовлетворяет неравенству $|V(x)| < M$ и что $V(x) = 0$ при $x > R$. Для доказательства того, что

оператор $GV(k)$ вполне непрерывен, достаточно показать следующее:

- 1) все функции $\varphi \in E$ равномерно ограничены,
- 2) все функции $\varphi \in E$ равностепенно непрерывны,
- 3) все функции $\varphi \in E$ равномерно ограничены некоторой функцией $f(x)$, для которой $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Свойство 1 сразу следует из «а». Свойство 2 можно вывести, используя то, что последовательность дифференцирования по x и интегрирования по x' можно изменить в силу ограничений, наложенных на потенциал. Легко видеть, что все производные удовлетворяют неравенству (x_i — i -я компонента вектора x)

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| < (1 + |k|)N,$$

где N — константа, зависящая только от M и R . Для доказательства равностепенной непрерывности этого неравенства более чем достаточно.

Свойство 3 лучше всего вывести из (10.6), обратив внимание на то, что выражение в правой части (10.6) является убывающей функцией x . Если $x > R$, то это выражение сводится к

$$\frac{1}{x} \int_0^R x'^2 |V(x')| dx' < \frac{MR^3}{3x} = f(x).$$

Теперь необходимо избавиться от ограничений на потенциал $V(x)$. Используем тот факт, что предел равномерно сходящейся последовательности вполне непрерывных операторов сам является вполне непрерывным оператором. Таким образом, нужно только показать, что для любого потенциала $V(x)$, удовлетворяющего (10.3), имеется такая последовательность ограниченных потенциалов $V_n(x)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |GV - GV_n| = 0.$$

Подробное доказательство этого приводится в приложении V.

Если оператор GV вполне непрерывен, то, согласно теореме 17 гл. 2, для функционального уравнения (10.5) в нормированном векторном пространстве справедлива альтернатива Фредгольма, т. е. либо существует резольвентное ядро

$$R(k) = [1 - GV(k)]^{-1},$$

либо существует нетривиальное решение однородного уравнения

$$\Psi = GV\Psi. \quad (10.7)$$

Из существования резольвентного ядра сразу же вытекает существование решения неоднородного уравнения. Поэтому существует либо решение (10.5), либо решение (10.7).

Унцикер доказал, что при

$$\frac{1}{4\pi} \int |V(x)| d^3x = \int_0^\infty x^2 |V(x)| dx < \infty, \quad (10.8)$$

функцию Грина, входящую в интегральное уравнение (10.4), можно заменить для больших x асимптотическим выражением

$$\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|} \sim \frac{e^{ikx}}{4\pi x} e^{-ik \cdot x'}, \quad (10.9)$$

где $x = xn$, $k' = kn$. Доказательство приведено в приложении VI.

В силу этого асимптотическое выражение волновой функции имеет вид

$$\Psi(x) \sim e^{ik \cdot x} + \frac{e^{ikx}}{x} F(k, \cos \vartheta), \quad (10.10)$$

где $\cos \vartheta = k \cdot n/k$, а амплитуда рассеяния $F(k, \cos \vartheta)$ дается формулой

$$F(k, \cos \vartheta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-ik' \cdot x} V(x) \Psi(x) d^3x. \quad (10.11)$$

Далее, любое решение уравнения (10.7) удовлетворяет неравенству

$$|\Psi| < A \frac{e^{-bx}}{x}, \quad b = \text{Im } k > 0,$$

поэтому любое такое решение, принадлежащее к $L_2(0, \infty)$, представляет некоторое связанное состояние.

Так как потенциал $V(x)$ веществен, гамильтониан является самосопряженным, и его собственные числа $E = k^2$ должны быть действительными; следовательно, величина k должна быть чисто мнимой.

§ 4. Аналитические свойства оператора резольвенты

Прежде чем выводить дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния, нужно рассмотреть аналитические свойства волновой функции и резольвентного ядра.

Ниже нам понадобится определение голоморфной векторной (операторной) функции. Пусть D — некоторая область комплексной плоскости k ($k = h + ib$), и пусть $\Psi(k)$ означает функцию, заданную на D из комплексного банахова пространства Γ . Пусть $U(k)$ — функция на D из банахова пространства линейных операторов на Γ (из другого банахова пространства Γ'). В нашем случае, конечно, подразумевается, что пространство $\Gamma = C$, а пространство ограниченных линейных операторов переводит C в C .

Голоморфность удобно определить как свойство иметь производную в сильной топологии [45], т. е. функция $\Psi(k)$ называется голоморфной в области D , если для любой последовательности $k_n \rightarrow k$ в D существует такой элемент $\Psi'(k) \in \Gamma$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\Psi(k) - \Psi(k_n)}{k - k_n} - \Psi'(k) \right\| = 0.$$

Аналогично определяется голоморфность операторов. Операторы удобно рассматривать как элементы банахова пространства. Существуют и многие другие определения голоморфности, однако все они эквивалентны данному [45].

Для нас сейчас важно то, что на голоморфные векторные функции можно распространить известные результаты, полученные для обычных функций комплексного переменного, например теорему Коши, тео-

рему Морера, разложение в ряд Тейлора, формулу Коши. Конечно, теорию нелинейных функций в векторном пространстве построить невозможно.

Получим некоторые результаты для функции $GV(k)$. Пусть P означает область $\text{Im } k \geq 0$.

а) Функция $GV(k)$ равномерно непрерывна в P , т. е. при условии (10.8) имеет место

$$\lim_{k' \rightarrow k} |GV(k) - GV(k')| = 0, \quad k', k \in P.$$

Очевидно, что

$$|e^{ikx} - e^{ik'x}| < |k - k'|x,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |GV(k) - GV(k')| &= \sup_{\|\Psi\|=1} \|[GV(k) - GV(k')]\Psi\| \leq \\ &\leq \frac{1}{4\pi} \int \frac{|\exp(ik|x-x'|) - \exp(ik'|x-x'|)|}{|x-x'|} |V(x')| \times \\ &\quad \times |\Psi(x')| d^3x' \leq \frac{|k' - k|}{4\pi} \int |V(x')| d^3x'. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует, что интеграл $\int_Q GV(k) dk$ существует для любой ограниченной спрямляемой кривой Q в области P .

б) Функция $GV(k)$ голоморфна в P . Пусть

$$A = \int_Q GV(k) dk,$$

где Q — замкнутая кривая, лежащая в области P . Интеграл A всегда существует в силу сказанного в пункте «а». Пусть $\psi \in C$ и не зависит от k . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi = A\psi &= \left[\oint_Q GV(k) dk \right] \psi = \oint_Q dk GV(k) \psi = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint_Q dk \int \frac{\exp(ik|x-x'|)}{|x-x'|} V(x') \psi(x') d^3x'. \end{aligned}$$

Так как последний интеграл равномерно сходится для всех k , в нем можно изменить порядок интегрирования. Тогда для любой функции ψ $\varphi = 0$ и, следовательно,

$A=0$. Функция $GV(k)$ является поэтому голоморфной функцией k в P .

в) Резольвентный оператор $R(k)=[1 - GV(k)]^{-1}$ голоморфен в любой точке области P , за исключением множества B точек, для которых однородное уравнение $GV(k)\Psi=\Psi$ имеет решение.

Когда k_0 не принадлежит B , резольвентный оператор $R(k_0)=[1 - GV(k_0)]^{-1}$ существует. Так как оператор $GV(k)$ непрерывен, существует такая окрестность U точки k_0 , для которой

$$|GV(k) - GV(k_0)| < \frac{1}{2|R(k_0)|}, \quad k \in U.$$

Пусть

$$S=R(k_0)[1 - GV(k)]=1 - R(k_0)[GV(k) - GV(k_0)]= \\ =1 - K.$$

Поскольку $|K| < 1/2$ при $k \in U$, оператор S^{-1} можно представить в виде ряда Неймана

$$S^{-1} = 1 + K + K^2 + K^3 + \dots$$

Это разложение равномерно сходится и представляет поэтому голоморфную векторную функцию. Следовательно, функция

$$R(k) = S^{-1}(k) R(k_0)$$

также голоморфна в области U . Отсюда ясно, что резольвентный оператор $R(k)$, исключая собственные значения, аналитичен в области P , так как оператор $GV(k)$ непрерывен при $\text{Im } k \geq 0$ и оператор $R(k)$ также непрерывен при $\text{Im } k \geq 0$, за исключением, быть может, точки $k=0$, которая может принадлежать множеству B .

Когда вектор k принимает комплексные значения, сходящаяся волна перестает быть ограниченной, и ее нельзя представить элементом пространства S . Эту трудность можно обойти, если ввести в рассмотрение новое пространство S' непрерывных функций с нормой

$$\|\psi'\|_{\alpha} = \sup_x e^{-\alpha x} |\psi'(x)|.$$

Здесь α — некоторое фиксированное положительное число, которое будет выбрано позже.

Рассмотрим теперь нормировочное преобразование, отображающее пространство C на C' ,

$$\psi'(x) = e^{\alpha x} \psi(x).$$

Это преобразование приводит уравнение (10.4) к следующему виду:

$$\Psi(x) = e^{i k \cdot x - \alpha x} - \frac{e^{-\alpha x}}{4\pi} \int \frac{e^{i k |x-x'|}}{|x-x'|} V'(x') \Psi(x') d^3 x', \quad (10.12)$$

где

$$V'(x') = e^{\alpha x'} V(x').$$

Все сказанное выше относительно уравнения (10.4) можно отнести и к преобразованному уравнению (10.12). В частности, если предположить, что при $\alpha < m$

$$\int_0^{\infty} x |V'(x)| dx = \int_0^{\infty} x e^{\alpha x} |V(x)| dx < \infty,$$

то можно утверждать, что резольвента $\bar{R}(k)$ уравнения (10.12) имеет в пространстве C ту же область голоморфности, что и резольвента $R'(k)$ в пространстве C' . Падающая волна $\Psi'_0 = \exp(i k \cdot x)$ будет теперь голоморфной векторной функцией в пространстве C' и областью определения $|\operatorname{Im} k| < m$. Отсюда следует, что функция

$$\Psi'(k) = R'(k) \Psi'_0(k)$$

голоморфна в области

$$|\operatorname{Im} k| < m, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad (10.13)$$

при условии, что k не является собственным значением. Положим $\Psi' = \Psi'_0 + \Psi'_1$; функция Ψ'_1 будет голоморфной в области (10.13) при фиксированном x , а если и k принадлежит к этой области, то также непрерывна и ограничена по x . Непрерывность следует из того, что сильная сходимость по норме в простран-

стве C' ведет к сходимости в точке; поэтому если элемент $\varphi(k)$ пространства C' имеет производную по k , то функция $\varphi(x, k)$ также имеет производную по k .

В заключение отметим, что в силу уравнения (10.12) функция $\bar{\Psi}_1$ является произведением ограниченной функции на $\exp(-\alpha x)$ и поэтому Ψ_1' также ограничена.

§ 5. Амплитуда рассеяния

Конечной целью нашего исследования является амплитуда рассеяния. Введем новые переменные

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(k + k') = Pe, & P^2 &= k^2 - \frac{t}{4}, \\ \Delta &= k' - k = \Delta e', & \Delta^2 &= t = 2k^2(1 - \cos \vartheta), \\ e \cdot e' &= 0, & e^2 &= e'^2 = 1. \end{aligned}$$

Эти переменные более удобны, чем угол рассеяния.

Согласно формуле (10.11), полную амплитуду рассеяния можно разбить на две части:

$$f(E, t) = f_0(t) + f_1(E, t).$$

Здесь функция $f_0(t)$ представляет собой так называемое первое борновское приближение и зависит только от t :

$$f_0(t) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\Delta \cdot x} V(x) d^3x.$$

Ясно, что $f_0(t)$ регулярна в области $|\operatorname{Im} \Delta| < m$. Обратимся к функции $f_1(E, t)$; подстановкой

$$\Psi^\beta(x) = \Psi(x) e^{i\beta k \cdot x}$$

уравнение (10.5) преобразуется им к виду

$$\Psi^\beta = \Psi_0^\beta + G^\beta V \Psi^\beta = \Psi_0^\beta + \Psi_1^\beta,$$

$$\Psi_0^\beta(x) = \exp\left[-i \frac{\Delta}{2} e' \cdot x + i(P + \beta k) e \cdot x\right], \quad (10.14)$$

$$G^\beta(x, x') = G(x, x') \exp[ik\beta e \cdot (x - x')].$$

Параметр β нужно выбрать так, чтобы возможно полнее использовать распадное или ограниченное пове-

дение функции Грина на больших расстояниях. Это поведение имеет место при условии $|\beta| \leq 1$. Если к тому же

$$\frac{1}{4} (\operatorname{Im} \Delta)^2 + [\operatorname{Im} (P + \beta k)]^2 < m^2, \quad (10.15)$$

то функция Ψ_0^β будет элементом пространства S' . Покажем, что Ψ_1^β при фиксированном x — аналитическая функция E и Δ в области (10.15) с точкой ветвления при $E = t/4$, разрезом вдоль положительной действительной оси E и конечным числом сингулярностей на отрицательной действительной оси (они соответствуют связанным состояниям). Воспользуемся рассуждением § 4. Разрез вдоль положительной действительной оси и сингулярности, соответствующие связанным состояниям, образуют спектр G . При фиксированных E и Δ Ψ_1^β — непрерывная и ограниченная функция x .

Рассмотрим теперь формулу для $f_1(E, t)$

$$f_1(E, t) = \\ = -\frac{1}{4\pi} \int \exp \left[-i \frac{\Delta}{2} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{x} - i (P + \beta k) \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \right] V(x) \Psi_1^\beta(x) d^3x,$$

причем в области (10.15) интеграл существует. Точка ветвления при $E = t/4$ исчезает после интегрирования, в чем нетрудно убедиться, совершая простую замену переменных. Поэтому функция $f_1(E, t)$ регулярна в следующей последовательности областей (для разных β):

$$\frac{1}{4} (\operatorname{Im} \Delta)^2 + \left[\operatorname{Im} \left(\sqrt{E - \frac{t}{4}} + \beta \sqrt{E} \right) \right]^2 < m^2,$$

$$|\beta| \leq 1, \quad E \notin G.$$

Очевидно, что всегда должно иметь место неравенство $|\operatorname{Im} \Delta| < 2m$. Легко убедиться, что задание областей аналитичности можно осуществить и по-другому:

$$|\operatorname{Im} \Delta| < 2m, \quad E \notin G,$$

$$\left| \operatorname{Im} \sqrt{E - \frac{t}{4}} \right| - \left| \operatorname{Im} \sqrt{E} \right| < \sqrt{m^2 - \frac{(\operatorname{Im} \Delta)^2}{4}}. \quad (10.16)$$

Все, что известно относительно неюкавских потенциалов, содержится в (10.16) (юкавские потенциалы имеют, конечно, много большую область аналитичности); покажем это.

а) Большой лемановский эллипс. Если величина E действительна и фиксирована, то из соотношения (10.16) получаем

$$\frac{1}{4}(\operatorname{Im} \Delta)^2 + \left[\operatorname{Im} \sqrt{E - \frac{t}{4}} \right]^2 < m^2. \quad (10.17)$$

Вводя угол рассеяния ϑ , имеем $\Delta = 2\sqrt{E} \sin(\vartheta/2)$. Границы области (10.17) выразятся через ϑ в виде

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Im} \vartheta) = 1 + \frac{2m^2}{E}. \quad (10.18)$$

Равенство (10.18) является уравнением для большого лемановского эллипса [функция $f(E, t)$ аналитична в малом эллипсе $\operatorname{ch}(\operatorname{Im} \vartheta) = 1 + m^2/2E$].

б) В то время как результаты пункта «а» были уже нами получены при изучении разложения по парциальным волнам, до сих пор мы ничего не знаем относительно аналитических свойств на комплексной плоскости E при фиксированном Δ . Можно утверждать, что точка $E=0$ попадает на границу области аналитичности, если $|\Delta| = 2m$. Если же $|\Delta| < 2m$, то любая точка плоскости E , не принадлежащая G , является регулярной точкой.

Докажем это утверждение. Так как $|\operatorname{Re} \Delta| < \sqrt{4m^2 - (\operatorname{Im} \Delta)^2}$, то достаточно только установить неравенство

$$\left| \operatorname{Im} \sqrt{E - \frac{t}{4}} \right| \leq \left| \operatorname{Im} \sqrt{E} \right| + \frac{|\operatorname{Re} \Delta|}{2}. \quad (10.19)$$

Неравенство (10.19) можно записать и в другом виде:

$$\operatorname{Im} \sqrt{k^2 - \frac{t}{4}} = \operatorname{Im} P \leq |\operatorname{Im} k| + \frac{|\operatorname{Re} \Delta|}{2}.$$

Возьмем теперь вещественную и мнимую части от $k^2 - P^2 = \Delta^2/4 = t/4$:

$$(\operatorname{Im} P)^2 = (\operatorname{Re} P)^2 + (\operatorname{Im} k)^2 - (\operatorname{Re} k)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Re} \Delta)^2 - \frac{1}{4}(\operatorname{Im} \Delta)^2, \quad (10.20)$$

$$(\operatorname{Im} P)(\operatorname{Re} P) = (\operatorname{Im} k)(\operatorname{Re} k) - \frac{1}{4}(\operatorname{Im} \Delta)(\operatorname{Re} \Delta). \quad (10.21)$$

Используя неравенство Шварца, из соотношения (10.21) имеем

$$(\operatorname{Im} P)^2 (\operatorname{Re} P)^2 \leq \left[(\operatorname{Im} k)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Re} \Delta)^2 \right] \left[(\operatorname{Re} k)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Im} \Delta)^2 \right].$$

Чтобы исключить отсюда $(\operatorname{Re} P)^2$, используем равенство (10.20)

$$(\operatorname{Im} P)^2 \leq \left[\frac{(\operatorname{Im} k)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Re} \Delta)^2}{(\operatorname{Im} P)^2} - 1 \right] \left[(\operatorname{Re} k)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Im} \Delta)^2 \right] + (\operatorname{Im} k)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Re} \Delta)^2.$$

Это неравенство противоречиво, если только не требовать, чтобы

$$(\operatorname{Im} P)^2 \leq (\operatorname{Im} k)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Re} \Delta)^2 < \left(|\operatorname{Im} k| + \frac{1}{2}|\operatorname{Re} \Delta| \right)^2.$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

§ 6. Асимптотическое поведение при высоких энергиях

Изучим теперь поведение амплитуды рассеяния $f(E, t)$ при $|E| \rightarrow \infty$ при произвольной фиксированной действительной величине Δ . Амплитуда $f(E, t)$ задана на комплексной плоскости E с разрезом, который соответствует $\operatorname{Im} k \geq 0$. Если потенциал удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} x e^{\alpha x} |V(x)| dx < \infty \quad (10.22)$$

при некотором $\alpha > 0$, то, следуя Унцкеру, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Аналитическое продолжение функции $f(E, t)$ по E для произвольного действительного фиксированного t удовлетворяет условию

$$\lim_{|E| \rightarrow \infty} f(E, t) = f_0(t),$$

причем предел сходится равномерно вдоль всех направлений в E -плоскости с разрезом $\text{Im} \sqrt{E} > 0$.

Когда предел берется вдоль действительной энергетической оси, сформулированную теорему можно несколько усилить в том смысле, что высказанное в ней положение оказывается справедливым и при более слабом условии на потенциал, а именно если

$$\int_0^{\infty} |V(x)| x^n dx < \infty, \quad n = 1, 2.$$

Последнее утверждение можно доказать, слегка изменив приводимое ниже доказательство теоремы 1. Первое доказательство этого утверждения можно найти в работе Клейна и Земаха [57]. Ограничимся этим замечанием и ниже не будем специально останавливаться на частном случае предела вдоль действительной оси.

Чтобы доказать теорему 1, допустим на время (позже мы ослабим это требование), что потенциальная функция $V(x)$ непрерывно дифференцируема и обращается в нуль при $x > R$.

Возьмем уравнение (10.14) при $\beta = -1$:

$$\begin{aligned} \Psi'(x) = \exp \left[-i \frac{\Delta}{2} \mathbf{e}' \cdot \mathbf{x} + i(P - k) \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \right] - \\ - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|-\mathbf{e} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y}))}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} V(\mathbf{y}) \Psi'(\mathbf{y}) d^3y. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Уравнение (10.23) следует рассматривать как функциональное уравнение в пространстве всех комплекс-

нозначных непрерывных функций с конечной нормой, определенной в § 4, т. е. нормой вида

$$\|\Psi'\|_a = \sup_x e^{-\alpha x} |\Psi'(x)|.$$

Рассмотрим далее интегральный оператор $(G'V)^2$, ядро которого имеет вид

$$e^{-ik\mathbf{e} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} V(y) \frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{t}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{t}|} V(t) \frac{e^{ik|\mathbf{t}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{t}-\mathbf{y}|} d^3t. \quad (10.24)$$

В качестве начала координат при интегрировании в (10.24) возьмем $(\mathbf{x}+\mathbf{y})/2$, а положительную ось t_3 направим к точке \mathbf{x} . Введем далее эллиптические координаты φ, η, ξ с фокусами \mathbf{x}, \mathbf{y} ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$),

$$t_1 = [(\xi^2 - d^2)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi,$$

$$t_2 = [(\xi^2 - d^2)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi,$$

$$t_3 = \xi \eta,$$

$$d \leq \xi < \infty, \quad -1 \leq \eta \leq +1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

где $d = (1/2)|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. В этих координатах

$$d^3t = |\mathbf{x} - \mathbf{t}| |\mathbf{t} - \mathbf{y}| d\xi d\eta d\varphi.$$

Тогда интеграл в (10.24) [обозначим его через $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$] примет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\eta \int_d^{\infty} e^{2ik\xi} V(\xi, \eta, \varphi) d\xi.$$

Интегрирование по частям по ξ дает желаемый множитель $1/k$

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k) = \frac{1}{k} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k),$$

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k) = id \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 V(d, \eta, \varphi) d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\eta \int_d^{\infty} e^{2ik(\xi-d)} \frac{\partial V(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} d\xi \right\}. \quad (10.25)$$

Функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k)$ равномерно ограничена при всех \mathbf{x} , при $y < R$ и $\text{Im } k \geq 0$.

Докажем последнее утверждение. Если отвлечься от тривиального интегрирования по углу, то первое слагаемое в правой части (10.25) является не чем иным, как интегралом от потенциала вдоль отрезка прямой линии, соединяющего x и y . Следовательно,

$$\left| d \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 V(d, \eta, \varphi) d\eta \right| \leq 4\pi R \max_x |V(x)|.$$

Чтобы оценить второе слагаемое в правой части (10.25), вспомним, что $y < R$, т. е. функция $V(t)$ исчезает при $|y - t| > 2R$. Следовательно, в качестве области интегрирования для второго слагаемого можно взять $|y - t| = \xi + \eta d \leq 2R$,

$$d \leq \xi \leq d + 2R, \quad -1 \leq \eta \leq -1 + \frac{2R}{d}.$$

Далее имеем

$$\frac{\xi^2 - \eta^2 d^2}{\xi^2 - d^2} \leq \frac{\xi + \eta d}{\xi - d},$$

так что

$$\left| \frac{\partial V(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} \right| \leq \sup_x \left| \frac{dV(x)}{dx} \right| \left(\frac{\xi + \eta d}{\xi - d} \right)^{1/2}.$$

Вместо η, ξ введем $p \equiv d(1 + \eta)$ и $q \equiv \xi - d$

$$\left| d \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\eta \int_d^{\infty} e^{2ik(\xi-d)} \frac{\partial V(\xi, \eta, \varphi)}{\partial \xi} d\xi \right| \leq \\ \leq \sup_x \left| \frac{dV(x)}{dx} \right| 2\pi \int_0^{2R} dp \int_0^{2R} dq \left(\frac{p+q}{q} \right)^{1/2}.$$

Эта верхняя оценка не зависит от x, y и k . Отсюда заключаем, что

$$|F(x, y, k)| \leq C$$

для всех x , для всех y , для которых $y < R$, и для всех k , для которых $\text{Im } k \geq 0$.

Из (10.25) следует, что

$$\|(G'V)^2\|_\alpha \leq \frac{C}{|k|} \int_0^\infty x e^{\alpha x} |V(x)| dx \quad (10.26)$$

для всех k , для которых $\text{Im } k \geq 0$.

Отбросим теперь дополнительное предположение о том, что $V(x)$ непрерывно дифференцируема и исчезает при $x > R$, сохраняя только условие (10.22). При любом $\delta > 0$ существует непрерывно дифференцируемый потенциал $U(x)$, такой, что

$$U(x) = 0 \quad \text{при } x > R, \quad (10.27)$$

и

$$\int_0^\infty x e^{\alpha x} |V(x) - U(x)| dx < \delta.$$

Следовательно,

$$\|G'V - G'U\| \leq \delta,$$

$$\|(G'V)^2 - (G'U)^2\| \leq \delta \left(2 \int_0^\infty x e^{\alpha x} |V(x)| dx + \delta \right) \quad (10.28)$$

для всех k , для которых $\text{Im } k \geq 0$. Поскольку $U(x)$ удовлетворяет условию (10.27), для $(G'U)^2$ имеет место оценка (10.26). Тогда в силу (10.28) имеем

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \|(G'V)^2\| = 0,$$

сходимость равномерна при $\text{Im } k \geq 0$.

Отсюда, используя очевидное соотношение

$$(1 - G'V)(1 + G'V) = 1 - (G'V)^2,$$

закключаем, что

$$(1 - G'V)^{-1} = R = 1 + T$$

удовлетворяет условию

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \|T - G'V\| = 0, \quad (10.29)$$

причем сходимость равномерна при $\text{Im } k \geq 0$.

Представим волновую функцию как сумму падающей волны Ψ'_0 и рассеянной волны Ψ'_1 , тогда

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \|\Psi'_1 - G'V\Psi'_0\| = 0; \quad (10.30)$$

при этом сходимость равномерна при $\text{Im } k \geq 0$.

Если отвлечься от члена, соответствующего первой борновской аппроксимации, то амплитуда рассеяния запишется в виде

$$f_1(E, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \exp\left[-i\frac{\Delta \cdot \mathbf{x}}{2} - i(P - k)\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}\right] \times \\ \times V(\mathbf{x}) \Psi'_1(\mathbf{x}) d^3x. \quad (10.31)$$

Обозначим через $f_1^B(E, t)$ член, соответствующий второй борновской аппроксимации. Тогда из условия (10.30) можно получить

$$\lim_{|E| \rightarrow \infty} f_1(E, t) = f_1^B(E, t), \quad (10.32)$$

сходимость равномерна при $\text{Im } k \geq 0$.

Теперь остается доказать, что вторая борновская аппроксимация исчезает, когда $|E| \rightarrow \infty$ при $\text{Im } k \geq 0$. Это можно сделать, обратившись к уже использованному методу [см. формулу (10.23)]. Ограничимся изложением идеи доказательства.

Исходным является выражение для второго борновского члена

$$f_1^B(E, t) = (4\pi)^{-2} \int d^3x \exp\left[-i\frac{\Delta \cdot \mathbf{x}}{2} - iP\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}\right] \times \\ \times V(\mathbf{x}) \int d^3y \frac{\exp ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} V(\mathbf{y}) \exp\left[-i\frac{\Delta \cdot \mathbf{y}}{2} + iP\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}\right].$$

Функцию $f_1^B(E, t)$ можно снова равномерно аппроксимировать при $\text{Im } k \geq 0$, если заменить $V(\mathbf{x})$ соответствующим образом подобранным непрерывно дифференцируемым потенциалом $U(\mathbf{x})$, исчезающим при $x > R$. Затем следует ввести параболические координаты для \mathbf{y} с фокусом в точке \mathbf{x} и с осью в направлении \mathbf{e} . Тогда величина $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ будет равна одной из параболических координат, и интегрирование по частям по этой координате даст мно-

житель k^{-1} . Получающиеся интегралы просто оценить, используя свойства $U(x)$; в результате получаем, что $f_1^B(E, \Delta; U)$ ограничена величиной $\text{const} |k|^{-1}$ для больших $|k|$ при $\text{Im } k \geq 0$. Поскольку функция $f_1^B(E, t; V)$ равномерно аппроксимируется $f_1^B(E, t; U)$, то

$$\lim_{|E| \rightarrow \infty} f_1^B(E, t) = 0,$$

причем сходимость равномерна при $\text{Im } k \geq 0$. Вместе с равенством (10.32) это завершает доказательство теоремы 1.

Сделаем еще одно замечание о частном случае предела вдоль действительной положительной оси E . В этом случае нет необходимости проводить отдельно рассуждение для второй борновской аппроксимации. Причина состоит в том, что для физических значений E амплитуда определяется равенством

$$f(E, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-ikx} \Phi(x), \quad (10.33)$$

где $\Phi(x)$ означает рассеянную волну и предел $x \rightarrow \infty$ следует понимать как стремление в бесконечность вдоль фиксированного направления k' . Так как известно, что рассеянная волна стремится при $E \rightarrow \infty$ к первой борновской аппроксимации, то сразу же заключаем, что соответствующий результат имеет место и для самой амплитуды рассеяния. Это основная идея работы [57]. В случае же комплексного E никакого соотношения, подобного (10.33), по-видимому, не существует, и аналитическое продолжение амплитуды рассеяния необходимо искать с помощью интегрального представления (10.31).

Имея в виду возможное приложение полученных результатов к выводу дисперсионных соотношений, напомним в заключение, что если потенциал $V(x)$ действителен, то имеет место соотношение эрмитовости

$$[f(E, t)]^* = f(E^*, t^*) \quad (10.34)$$

при условии, что E не принадлежит спектру. Приведенное соотношение легко получить из уравнений (10.4) и (10.11).

§ 7. Дисперсионное соотношение Кури

Изучив в § 6 асимптотическое поведение амплитуды рассеяния, можно перейти теперь к последнему этапу вывода Унцикера, т. е. непосредственно к получению дисперсионного соотношения по энергии для действительного фиксированного значения передаваемого импульса. Это дисперсионное соотношение впервые было выведено Кури в 1957 г. [58].

Положим $|t| < 4m^2$. В этом случае функция $f(E, t)$ регулярна на всей плоскости E , кроме точек спектра, заполняющих положительную действительную полуось, и конечного числа простых полюсов на отрицательной оси, соответствующих связанным состояниям. Применим теорему Коши к интегралу

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_P \frac{f(E', t) - f_0(t)}{E' - E} dE',$$

где в качестве пути интегрирования P выбрана достаточно большая окружность на плоскости E' с вырезом, охватывающим положительную действительную полуось, а также сингулярности, соответствующие связанным состояниям. Точка $E' = E$ содержится внутри области, ограниченной путем интегрирования. Имеем соответственно

$$I = f(E, t) - f_0(t). \quad (10.35)$$

Устремим радиус круга в бесконечность. В силу результатов § 6 ясно, что в пределе вклад подынтегрального выражения на границе круга исчезает, и равенство (10.35) переходит в следующее:

$$\begin{aligned} I &= f(E, t) - f_0(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{f(E' + i\varepsilon, t) - f(E' - i\varepsilon, t)}{E' - E} dE' + \sum_n \frac{g_n(t)}{E - E_n}. \end{aligned}$$

Используя (10.34), окончательно находим

$$f(E, t) = f_0(t) + \sum_n \frac{g_n(t)}{E - E_n} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} f(E', t)}{E' - E} dE'. \quad (10.36)$$

Равенство (10.36) является классической формой дисперсионного соотношения Кури.

Величины $g_n(t)$ появились как вычеты функции $f(E, t)$ в особых точках E_n на плоскости E , причем оказывается, что $g_n(t)$ пропорциональны полиномам Лежандра, порядок которых равен угловым моментам l соответствующих связанных состояний. Доказательство этого положения намечено ниже.

В окрестности особой точки $E = E_n$ решение волнового уравнения имеет вид

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{\Psi_n(\mathbf{x})}{E - E_n} + \chi(E, \mathbf{x}),$$

причем функция χ регулярна по E при $E = E_n$. Функция $\Psi_n(\mathbf{x})$ есть решение однородного уравнения

$$\Psi_n = GV\Psi_n$$

(при $k = ib$, $b^2 = -E_n$) и является волновой функцией связанного состояния. Отвлекаясь от случайного вырождения, можно утверждать, что это связанное состояние имеет определенный угловой момент l , а его волновая функция имеет вид

$$\Psi_n(\mathbf{x}) = \psi(x) P_l(\cos \vartheta), \quad \cos \vartheta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}}{xk},$$

так как $\Psi(E, \mathbf{x})$ не зависит от азимутального угла. Подставляя $\Psi_n(\mathbf{x})$ в формулу (10.11), находим, что величина $g_n(t)$ равна

$$g_n(t) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-ik' \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) P_l(\cos \vartheta) d^3x.$$

Отсюда после интегрирования по углам получаем

$$g_n(t) = -(2l_n + 1) c_n P_n \left(\frac{t}{2E_n} - 1 \right),$$

где c_n — некоторые действительные положительные константы. Значения c_n можно найти, обратившись к разложению по парциальным волнам

$$f(E, t) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l \left(1 - \frac{t}{2E} \right) [S_l(E) - 1].$$

Если $E = E_n = -b^2$, то единственным сингулярным членом в разложении будет

$$\frac{1}{2ik} (2l_n + 1) P_{l_n} \left(1 - \frac{t}{2E}\right) (S_{l_n} - 1).$$

В окрестности $E = E_n$ величина $S_{l_n}(E)$ имеет полюс вида

$$[S_{l_n}(E)]^{-1} \approx (E - E_n) \left. \frac{d[S_{l_n}(E)]^{-1}}{dE} \right|_{E=E_n}.$$

Из соотношения (7.7) имеем

$$\begin{aligned} c_n^{-1} &= (-1)^{l_n} 2b \left. \frac{d[S_{l_n}(E)]^{-1}}{dE} \right|_{E=E_n} = \\ &= \frac{4b^2}{[f_{l_n}(ib)]^2} \int_0^\infty [\varphi_{l_n}(k, x)]^2 dx > 0. \end{aligned}$$

В заключение укажем на связь аналитических свойств $f(E, t)$ при $\text{Im } k \geq 0$ и для фиксированного t при $|t| < 4m^2$ с разложением по парциальным волнам. Отметим только наиболее существенные моменты.

Вместо (9.16) для амплитуды рассеяния можно получить интеграл вдоль пути C , окружающего по часовой стрелке все точки $\lambda = l + 1/2$, где l не может быть целым отрицательным числом,

$$f(E, t) = -\frac{1}{2k} \int_C \lambda \frac{P_{\lambda-1/2}(\cos \vartheta)}{\cos \pi \lambda} e^{-i\pi(\lambda+1/2)} [S(\lambda, k) - 1] d\lambda.$$

Его можно преобразовать к интегралу по мнимой оси λ [вклад полюсов $S(\lambda, k)$ при $\text{Re } \lambda > 0$ нужно будет обсудить особо]. Сходимость интеграла можно исследовать по методу гл. 9. Если заменить λ на $-\lambda$, путь интегрирования изменит свое направление на обратное, а так как величина $\lambda P_{\lambda-1/2}(\cos \vartheta) (\cos \pi \lambda)^{-1}$ является нечетной функцией λ , то интерес представляет только нечетная часть O выражения

$$e^{-i\pi(\lambda+1/2)} [S(\lambda, k) - 1],$$

равная

$$O = \sin \pi \lambda + \frac{i}{2} [e^{i\pi \lambda} S(-\lambda, k) - e^{-i\pi \lambda} S(\lambda, k)],$$

поскольку только эта часть и дает вклад в интеграл. Однако в силу соотношений (5.13) и (5.21)

$$O = \sin \pi \lambda + \frac{2i\lambda k}{f(\lambda, -k) f(-\lambda, -k)},$$

и так как

$$f_0(-\lambda, -k) f_0(\lambda, -k) = -\frac{2i\pi \lambda}{\sin \pi \lambda},$$

то

$$O = \sin \pi \lambda \left[1 - \frac{f_0(\lambda, -k) f_0(-\lambda, -k)}{f(\lambda, -k) f(-\lambda, -k)} \right],$$

т. е. O является мероморфной функцией k при $\text{Im } k > 0$.

Итак, мы видим, что для $f(E, t)$ при $\text{Im } k > 0$ и фиксированном t имеются только такие сингулярности, которые соответствуют связанным состояниям (мы не касаемся довольно трудного вопроса о равномерной сходимости соответствующего интеграла при $\text{Im } k > 0$).

Разберем подробнее, как возникают такие сингулярности. В силу аналитичности по λ и возможности соответствующим образом деформировать путь интегрирования, полюс подынтегрального выражения, вообще говоря, не ведет к сингулярности. Если k будет меняться в области $\text{Im } k > 0$, то полюсы будут блуждать на плоскости λ . До тех пор пока они находятся далеко от физических значений, вклад их равен

$$\frac{\beta(k)}{\sin \pi I_n(E)} P_{l_n} \left(\frac{t}{2E_n} - 1 \right).$$

Никаких сингулярностей в этом случае не появляется. Если же значения λ становятся физическими, $\sin \pi l_n = 0$, и мы получаем простой полюс для $f(E, t)$, который при $\text{Im } k > 0$ (в согласии с гл. 7) может возникнуть только тогда, когда величина k чисто мнима. Ясно, что эти полюсы соответствуют связанным состояниям системы.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАНДЕЛЬСТАМА

§ 1. Вводные замечания

В предыдущей главе было показано, как аналитические свойства амплитуды рассеяния могут быть получены из рассмотрения волнового уравнения в координатном пространстве. В основу всего рассмотрения можно также положить уравнение Липпмана — Швингера в импульсном пространстве, тогда окончательные результаты можно получить даже более просто. Уравнение Липпмана — Швингера для парциальных волн весьма эффективно при изучении асимптотического поведения вдоль мнимой оси λ (см. гл. 8). Возможно, что это вообще единственный путь получения такого рода информации. В настоящей главе будет рассматриваться главным образом уравнение Липпмана — Швингера для полной амплитуды; изучение этого уравнения служит первым шагом в доказательстве представления Мандельстама.

Первоначальный метод Баукока — Мартина [17] получения двойных дисперсионных соотношений (улучшенный впоследствии Бланкенбеклером и др. [10]), нельзя считать совершенно строгим, поскольку в нем используются многие никак не оговариваемые замены переменных интегрирования, а также поскольку из него ничего не следует относительно проблемы вычитаний при записи двойных дисперсионных соотношений. В то же время этот метод не оценим, когда нужно рассматривать вклады от каждого порядка теории возмущений. Он представляет просто нерелятивистский аналог разложения Фейнмана — Дайсона для амплитуды рассеяния. Использование его позволяет более просто сравнивать методы и результаты теории потенциального рассеяния с методами и результатами полной релятивистской теории.

§ 2. Метод Баукока — Мартина

Этот метод исходит из уравнения Липпмана — Швингера для полной трехмерной амплитуды $T(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$, заданной вне энергетической поверхности,

$$T(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{1}{4\pi} v(|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i|) - \\ - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty v(|\mathbf{k}_f - \mathbf{q}|) \frac{1}{q^2 - k^2 - i\varepsilon} T(k; \mathbf{q}, \mathbf{k}_i) d^3q. \quad (11.1)$$

Амплитуда $T(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$ определяется соотношением

$$T(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) \Psi(k; \mathbf{k}_i, \mathbf{x}) d^3x,$$

где в свою очередь волновая функция $\Psi(k; \mathbf{k}_i, \mathbf{x})$ (в соответствии со сказанным в гл. 10, § 3) определяется как решение интегрального уравнения

$$\Psi(k; \mathbf{k}_i, \mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}} - \\ - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} V(\mathbf{y}) \Psi(k; \mathbf{k}_i, \mathbf{y}) d^3y,$$

причем, когда $k_i = k_f = k$, $T(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = F(k, \cos \vartheta)$. Функция $v(|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i|)$ является фурье-преобразованием потенциальной функции; она непосредственно дает первое борновское приближение для амплитуды $T(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$

$$v(|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i|) = \int e^{i(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) d^3x.$$

Решение уравнения (11.1) можно искать в виде формального борновского разложения, или ряда теории возмущений

$$T(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i),$$

$$T_1(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{1}{4\pi} v(|\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i|),$$

$$T_n(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int T_1(k; \mathbf{k}, \mathbf{q})_f \frac{1}{q^2 - k^2 - i\varepsilon} T_{n-1}(k; \mathbf{q}, \mathbf{k}_i) d^3q.$$

Мы будем интересоваться аналитическими свойствами каждого члена разложения по переменной

$$\cos \vartheta = \frac{k_i^2 + k_f^2 - (k_i - k_f)^2}{2k_i k_f},$$

не заботясь пока о сходимости всего разложения в целом. Ограничимся рассмотрением юкавских потенциалов

$$V(x) = x^{-1} \int_m^{\infty} \sigma(\mu) e^{-\mu x} d\mu.$$

Переменные k ; k_i , k_f будем считать фиксированными.

Аналитические свойства первого борновского приближения T_1 очевидны из его следующего выражения:

$$T_1(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = \frac{1}{2k_f k_i} \int_m^{\infty} \frac{\sigma(\mu) d\mu}{\cos \vartheta - (k_i^2 + k_f^2 + \mu^2)/2k_f k_i}. \quad (11.2)$$

Амплитуда T_1 имеет разрез, начинающийся при $\cos \vartheta = k_f^2 + k_i^2 + m^2/2k_i k_f$ и уходящий в бесконечность. На энергетической поверхности, т. е. при $k = k_i = k_j$, этот разрез занимает интервал $1 + (m^2/2k^2) \dots \infty$.

Перейдем теперь ко второму борновскому приближению T_2 . Для него имеем

$$\begin{aligned} T_2(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \\ &= \frac{1}{8\pi^2 k_f k_i} \int \frac{d^3 q}{q^2 (q^2 - k^2 - i\epsilon)} \int_m^{\infty} \frac{\sigma(\mu_1) d\mu_1}{(q^2 + k_f^2 + \mu_1^2)/2q k_f - \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_q} \times \\ &\quad \times \int_m^{\infty} \frac{\sigma(\mu_2) d\mu_2}{(q^2 + k_i^2 + \mu_2^2)/2q_i k_i - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_q}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{v}_f = \frac{\mathbf{k}_f}{k_f}, \quad \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{k_i}, \quad \mathbf{v}_q = \frac{\mathbf{q}}{q}.$$

Единственная возникающая здесь трудность — интегрирование по углам. Структура интеграла по

угловым переменным следующая:

$$I = \int \frac{d\Omega_q}{(A - \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_q)(B - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_q)},$$

где

$$A = \frac{q^2 + k_f^2 + \mu_1^2}{2qk_f}, \quad B = \frac{q^2 + k_i^2 + \mu_2^2}{2qk_i}.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, воспользуемся известным фейнмановским интегральным тождеством

$$\frac{1}{ab} = \int_0^\infty \frac{dx}{(ax + b)^2}$$

и преобразуем интеграл I к виду

$$I = \int d\Omega_q \int_0^\infty \frac{dx}{[Ax + B - \mathbf{v}_q \cdot (x\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_i)]^2}.$$

Если направить теперь новую полярную ось вдоль вектора $x\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_i$, то интегрирование осуществляется особенно просто, и мы приходим к следующему результату:

$$I = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{\Phi - \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_i} \frac{dx}{x}, \quad (11.3)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[(A^2 - 1)x + (B^2 - 1)\frac{1}{x} + 2AB \right].$$

Итак, амплитуда T_2 обладает такой же аналитической структурой, как T_1 , т. е. T_2 также имеет разрез по $\cos \vartheta$, начинающийся от минимума Φ по переменным x , q , μ_1 и μ_2 . Этот минимум легко вычисляется алгебраически. Приведем здесь только результат

$$\min_{x, q} \Phi = \frac{k_f^2 + k_i^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2}{2k_i k_f}.$$

Поскольку обе величины μ_1 и μ_2 пробегают значения, начинающиеся с m , а интегрирование по q не ведет к каким-либо дополнительным сингулярностям, то разрез начинается при $(k_f^2 + k_i^2 + 4m^2)/2k_i k_f$.

Очень важно то, что амплитуда T_2 обладает той же аналитической структурой, как и T_1 ; поэтому мы можем продолжить рассмотрение для амплитуды T_3 и последующих борновских членов. В результате получаем, что n -й член разложения T_n имеет разрез по $\cos \vartheta$, начинающийся при

$$\operatorname{ch} \alpha_n(k_i, k_f) = \frac{k_f^2 + k_i^2 + n^2 m^2}{2k_i k_f}.$$

На энергетической поверхности это выражение упрощается

$$\operatorname{ch} \alpha_n(k, k) = 1 + \frac{n^2 m^2}{2k^2}.$$

Таким образом, при увеличении n разрез сдвигается все дальше и дальше.

Нам остается еще доказать, что полная амплитуда не имеет других сингулярностей, кроме тех, которые возникают в отдельных членах ряда теории возмущений. При этом само существование амплитуды рассеяния нам придется предположить, сославшись на другие более строгие методы, скажем на строгую теорию Унцикера (гл. 10). Будем предполагать также, что эта амплитуда регулярна внутри лемановского эллипса (в действительности достаточно предположить, что она регулярна внутри некоторого невырожденного эллипса с фокусами $-1, +1$).

Рассмотрим конечную сумму

$$T^{(N)} = \sum_{n=1}^N T_n.$$

Интегрируя уравнение (11.1), легко установить, что

$$\begin{aligned} T(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) - T^{(N)}(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &\doteq \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int T_N(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{q}) \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon} T(k; \mathbf{q}, \mathbf{k}_i) d^3q. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Гольдбергер [43] показал, как из выражения для остаточного члена (11.4) можно вывести многие его аналитические свойства и получить полную картину аналитических свойств при конечных $\cos \vartheta$. Для этого

надо разложить обе амплитуды T_N и T в ряды по полиномам Лежандра относительно $\cos \vartheta$:

$$T_N(k; \mathbf{k}_f, \mathbf{q}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) b_l(k, k_f, q) P_l(\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_q),$$

$$T(k; \mathbf{q}, \mathbf{k}_i) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k, q, k_i) P_l(\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{v}_i).$$

Подставляя эти разложения в формулу (11.4) и используя известное тождество (9.10), получаем

$$\int P_l(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_q) P_{l'}(\mathbf{v}_q \cdot \mathbf{v}_i) d\Omega_q = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} P_l(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_f).$$

Придадим остаточному члену следующий вид:

$$\frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_f) \times \\ \times \int b_l(k, k_f, q) \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon} a_l(k, q, k_i) q^2 dq.$$

Напомним (см. гл. 9, § 3), что размеры эллипсов сходимости разложений по полиномам Лежандра определяются следующими пределами:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |(a_l)^{1/l}| \leq e^{-\alpha_l(q, k_f)}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} |(b_l)^{1/l}| \leq e^{-\alpha_N(k_i, q)}.$$

Размеры соответствующего эллипса для остаточного члена определяются величиной

$$\sup_{0 \leq q \leq \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} |(a_l b_l)^{1/l}|,$$

которая всегда меньше величины $\exp[-\alpha_N(k_f, k_f)]$.

Хотя приведенное рассуждение и не является строгим, тем не менее оно крайне поучительно, ибо позволяет проследить влияние высших порядков теории возмущений на аналитические свойства амплитуды рассеяния. Так как верхняя граница обращается в нуль при больших N , то эллипс сходимости остаточного члена можно сделать сколь угодно

большим, если взять N достаточно большим. Это означает, что амплитуда T имеет в любой конечной области те же сингулярности, что и $T^{(N)}$ при условии, что N достаточно велико. Отсюда и из анализа методом парциальных волн в гл. 6 видим, что более высокие члены имеют сингулярности, расположенные все дальше и дальше на комплексной плоскости. В частности, с помощью конечного числа шагов можно установить аналитическую структуру сингулярностей в любой конечной области, при этом полное число шагов будет зависеть от размеров рассматриваемой области.

В рамках приведенных рассуждений нельзя найти аналитическое поведение амплитуды при больших $\cos \vartheta$, так как оно определяется совместным эффектом всех T_n , и поэтому теория возмущений о нем ничего не говорит. Чтобы изучить поведение при больших $\cos \vartheta$, необходимо применить к разложению по парциальным волнам W -преобразование.

§ 3. Представление Мандельштама

В 1958 г. Мандельштам [65] предложил для релятивистской амплитуды рассеяния двойное дисперсионное соотношение. Хотя представление Мандельштама и не было доказано им самим, тем не менее оно послужило основой для нового и весьма плодотворного направления исследований. Сразу же после этого стали предприниматься попытки доказать представление Мандельштама хотя бы для простых моделей, например потенциального рассеяния. Первой на эту тему была рассмотренная в § 2 работа [17], в которой было показано, что представление Мандельштама выполняется в любом порядке теории возмущений. Однако в этой работе не было сделано каких-либо окончательных заключений относительно аналитического поведения полной амплитуды рассеяния. Это последнее звено к доказательству [17] было добавлено в работе [10]. Совершенно новый подход к вопросу об аналитическом поведении полной амплитуды рассеяния при больших передаваемых импульсах t и фиксированных

энергиях E дает метод комплексного углового момента [89], в котором задача доказательства представления Мандельштама для потенциального рассеяния решается совсем иначе.

Представление Мандельштама для потенциального рассеяния на юкавском потенциале является простым следствием результатов гл. 9 и 10. Действительно, выпишем еще раз дисперсионное соотношение Кури

$$f(E, t) = f_0(t) + \sum_n \frac{g_n(t)}{E - E_n} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} f(E', t)}{E' - E} dE', \quad (11.5)$$

где E принимает комплексные значения. Физическая амплитуда получается при $0 \leq t \leq 4E$ и при подходе к действительным положительным значениям энергии со стороны полуплоскости $\text{Im} E > 0$. Величина $f_0(t)$ представляет первое борновское приближение. Положим, что здесь и в дальнейшем потенциал юкавский

$$V(x) = \int_m^{\infty} \frac{e^{-\mu x}}{x} \sigma(\mu) d\mu.$$

Тогда

$$f_0(t) = - \int_m^{\infty} \frac{\sigma(\mu)}{\mu^2 + t} d\mu.$$

Для простоты предположим, что $f(E, t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$ и фиксированном E . В гл. 9 было показано, что для юкавского потенциала функция $f(E, t)$ является аналитической во всей плоскости с разрезом $-\infty \leq t \leq -m^2$. Пусть E действительно и положительно; определим величину $(\text{Im} f)(E, t)$ как аналитическое продолжение $\text{Im} f(E, t)$, т. е.

$$(\text{Im} f)(E, t) = \frac{1}{2i} \{f(E, t) - [f(E, t^*)]^*\}$$

(ясно, что $\text{Im} f(E, t)$ не является аналитической функцией E, t). Функция $(\text{Im} f)(E, t)$ имеет по меньшей мере ту же область аналитичности, что $f(E, t)$. Далее, так как $(\text{Im} f_0)(E, t) = 0$, то как следствие рассмотре-

ния в § 2 асимптотических свойств членов ряда теории возмущений имеем

$$(\operatorname{Im} f)(E, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\rho(E, t')}{t' + t} dt', \quad (11.6)$$

где $\rho(E, t)$ — вообще говоря, обобщенная функция (см. гл. 9, § 7). При $m^2 \leq t' < 4m^2$ вклад в интеграл исчезает, так как первая борновская аппроксимация действительна. Подставим (11.6) в (11.5); пренебрегая вкладом связанных состояний и переставляя без соответствующего обоснования порядок интегрирования, получаем

$$f(E, t) = - \int_m^{\infty} \frac{\sigma(\mu)}{\mu^2 + t} d\mu + \frac{1}{\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} \frac{\rho(E', t')}{(E' - E)(t' + t)} dE'. \quad (11.7)$$

Вклад от связанных состояний не включен в рассматриваемое выражение, ибо их существование противоречит нашей исходной гипотезе о том, что $f(E, t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Величина $P_l(1 - t/E_n)$ ведет себя как t^l или как константа для S -состояний.

Соотношение (11.7) является простейшей формой представления Мандельстама (для потенциального рассеяния). Необходимо отметить, что, хотя область аналитичности формулы (11.7) установлена с достоверностью, сама формула получена не вполне строго: перестановка порядка интегрирования нуждается, конечно, в более строгом обосновании¹⁾.

При наличии связанных состояний нужно использовать процедуру вычитания. Из сказанного в гл. 9 следует, что минимальное число вычитаний N удовлетворяет неравенству

$$N > \max_{0 \leq E < \infty} \max_{\lambda_p} \operatorname{Re} \lambda_p.$$

Это ясно, так как N должно быть всегда больше, чем наибольший угловой момент для связанных состоя-

¹⁾ Это сделано в работе [8].

ний. Дисперсионное соотношение с вычитаниями записывается в виде

$$f(E, t) = f_0(t) + \sum_{n=0}^{N-1} a_n t^n + \frac{(-1)^N}{\pi^2} t^N \int_{4m^2}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} \frac{\rho(E', t')}{t'^N (t' + t)(E' - E)} dE'. \quad (11.8)$$

Соотношение (11.8) очень удобно, но, к сожалению, содержит меньше информации об аналитическом поведении, чем аналогичное выражение, получаемое при W -преобразовании. Действительно, соотношение (11.8) устанавливает верхнюю границу для показателя степенного роста $t^{\alpha(E)}$ в виде $\alpha(E) < N$, $0 \leq E < \infty$, но ничего не говорит о деталях функциональной зависимости $\alpha(E)$.

Зависимость $\alpha(E)$ явилась предметом многих исследований и численных расчетов как в релятивистской, так и в нерелятивистской теории. Однако никаких общих заключений относительно общих свойств $\alpha(E)$ и порогового поведения, кроме обсуждавшихся в гл. 8 и 9, из этих исследований и расчетов сделать нельзя. Не зная детально функцию $\alpha(E)$, не имеет смысла заниматься дисперсионными соотношениями с вычитанием типа (11.8), и поэтому мы будем заниматься в основном простейшей формой дисперсионного соотношения (11.7).

§ 4. Унитарность и представление Мандельштама

Перейдем теперь к одновременному использованию свойства унитарности и двойного дисперсионного соотношения [10]. Это направление исследования отчасти вызвано теорией элементарных частиц в рамках формализма S -матрицы Чу. При этом основная идея сводится к тому, чтобы в окончательной теории сильных взаимодействий использовать только асимптотические амплитуды. В этом случае уравнение шредингеровского типа должно быть заменено таким

соотношением, которое содержит только S -матрицу и совсем не содержит волновой функции.

При таком подходе мы вообще не должны вводить потенциал $V(x)$; вместо него следует говорить скорее об асимптотическом значении $f_0(t)$ амплитуды рассеяния $f(E, t)$, которое содержит в другой форме ту же самую информацию, что и потенциал. Следуя процедуре, предложенной впервые Мандельштамом в релятивистской теории, Бланкенбеклер и др. [10] ввели представление (11.7) в соотношение унитарности (0.13)

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(E, t) &= \int f(E, t_1) f^*(E, t_2) d\Omega_q, \\ t_1 &= (\mathbf{k}_i - \mathbf{q})^2 = 2k^2(1 - \cos \vartheta_1), \\ t_2 &= (\mathbf{k}_f - \mathbf{q})^2 = 2k^2(1 - \cos \vartheta_2). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Подобным образом они нашли уравнение непосредственно для двойной спектральной функции $\rho(E, t)$. Выкладки несложны, если воспользоваться следующей записью интеграла I [см. формулу (11.3)]:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d\Omega_q}{(A - \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_q)(B - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_q)} = 4\pi \int_{\varphi_0}^{\infty} \frac{1}{H(\varphi)} \frac{1}{\varphi - \cos \vartheta} d\varphi, \\ \varphi_0 &= AB + \sqrt{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}, \\ H(\varphi) &= \sqrt{(\varphi - AB)^2 - (A^2 - 1)(B^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Используя формулу (11.10), для $\rho(E, t)$ находим

$$\begin{aligned} \rho(E, t) &= \int_m^{\infty} \sigma(\mu_1) d\mu_1 \int_m^{\infty} \sigma(\mu_2) K(E, t; \mu_1^2, \mu_2^2) d\mu_2 - \\ &- \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dt_1 P \int_0^{\infty} dE_1 \frac{\rho(E_1, t_1)}{E_1 - E} \int_m^{\infty} \sigma(\mu) K(E, t; t_1, \mu^2) d\mu + \\ &+ \frac{1}{\pi^4} \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_0^{\infty} dE_1 \int_0^{\infty} dE_2 \times \\ &\times \frac{\rho(E_1, t_1)}{E_1 - E - i\varepsilon} \frac{\rho(E_2, t_2)}{E_2 - E + i\varepsilon} K(E, t; t_1, t_2), \end{aligned} \quad (11.11)$$

где

$$K(E, t; t_1, t_2) = \frac{\pi}{2} \frac{\theta \left\{ t - t_1 - t_2 - \frac{t_1 t_2}{2E} - \frac{\sqrt{t_1 t_2}}{2E} [16E^2 + 4E(t_1 + t_2) + t_1 t_2]^{1/2} \right\}}{[E[t - (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^2][t - (\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2})^2] - t t_1 t_2]^{1/2}}.$$

Несмотря на кажущуюся сложность уравнения (11.11), решение его крайне просто. Нетрудно убедиться в том, что

$$T = t_1 + t_2 + \frac{t_1 t_2}{2E} + \frac{\sqrt{t_1 t_2}}{2E} [16E^2 + 4E(t_1 + t_2) + t_1 t_2]^{1/2}$$

является наибольшим корнем квадратного уравнения $D \equiv E[t - (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^2][t - (\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2})^2] - t t_1 t_2 = 0$.

Если $t > T$, то $D > 0$ и

$$[t - (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^2][t - (\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2})^2] > 0.$$

Так как $t > T > t_1 + t_2$, второй множитель положителен. Следовательно, положителен и первый множитель. Отсюда заключаем, что функция $K(E, t; t_1, t_2)$ обращается в нуль, если только не выполняется неравенство

$$t > (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^2.$$

Таким образом, вторая борновская аппроксимация обращается в нуль, если только не выполняется $t > 4m^2$. Если же $4m^2 \leq t < 9m^2$, то она сразу дает $\rho(E, t)$, ибо остальные члены в формуле (11.11) обращаются в нуль. Пусть далее $9m^2 \leq t < 16m^2$. Тогда в правой части (11.11) имеем либо $\sqrt{t_1} + m < \sqrt{t_1} + \mu < \sqrt{t} < 4m$, либо $\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} < 4m$. В первом случае интегрирование по t_1 ведется в области $t_1 < 9m^2$, в которой $\rho(E, t_1)$ уже известна. Во втором случае вообще нет никакого вклада, так как $\rho(E, t_1) = \rho(E, t_2) = 0$, если только не выполняются неравенства $\sqrt{t_1} > 2m$, $\sqrt{t_2} > 2m$, что противоречит неравенству $\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} < 4m$.

Итак, спектральную функцию $\rho(E, t)$ можно найти явно вплоть до $t < 16m^2$. Подобным образом нетрудно показать, что $\rho(E, t)$ при $n^2m^2 \leq t < (n+1)^2m^2$ можно найти рекуррентно путем непосредственного интегрирования из $\rho(E, t)$ при $(n-1)^2m^2 \leq t < n^2m^2$. Таким образом, с помощью конечного (хотя и возрастающего с увеличением t) числа шагов амплитуду $f(E, t)$ можно рассчитать вплоть до любого значения t . В любой точке E , t плотность $\rho(E, t)$ совершенно точно дается конечным полиномом по константе связи, причем степень этого полинома возрастает с ростом t .

То обстоятельство, что $\rho(E, t)$ можно всегда точно рассчитать в любой точке, не ведет, однако, к заключению о том, что амплитуду рассеяния также можно рассчитать точно в любой точке путем обрывающегося процесса. Чтобы получить амплитуду $f(E, t)$, нам нужно знать плотность $\rho(E, t)$ одновременно для всех значений t , а это требует бесконечного числа итераций. Вместе с тем представляется разумным предположение о том, что хорошую аппроксимацию можно получить, взяв достаточно большое число итераций, поскольку более высокие итерации существенны лишь для отдаленных областей плоскости t .

По известной плотности $\rho(E, t)$ можно рассчитать положение левого разреза в N/D -методе (см. гл. 6) и затем найти с помощью этого метода положения связанных состояний. Метод настоящего параграфа в силу своей внутренней связи с теорией возмущений этого сделать не позволяет. Можно, конечно, используя электронные вычислительные машины, провести численные расчеты плотности $\rho(E, t)$ даже для очень больших t , учитывая при этом вклады высоких порядков теории возмущений. Результаты таких расчетов можно представить в виде $\beta(k)t^{\alpha(k)}$ и найти численными методами функцию $\alpha(k)$. Подобные расчеты были выполнены для потенциала Юкавы и находятся в полном согласии с результатами других методов [1].

В заключение заметим, что математическая строгость во всех упомянутых выше расчетах далека от той, которая достигнута в других областях излагаемой теории. Было бы весьма желательно поэтому про-

вести дальнейшие исследования и обойти трудности, с которыми приходится здесь сталкиваться. Несомненно, что решение итерациями, полученное для $f(E, t)$ с помощью выражения (11.11), должно совпадать с решением методом теории возмущений (§ 2 настоящей главы). Однако совсем не просто убедиться в том, что полные вклады в каждый порядок идентичны друг другу. Совсем не тривиально убедиться, что они действительно совпадают хотя бы до членов третьего порядка. До сих пор нет общего метода, который позволил бы просто проводить такого рода сравнение.

Отметим, что в рамках изложенных идей вместо переменных E, t и амплитуды рассеяния $f(E, t)$ можно использовать переменные E, λ и нормированную функцию Йоста $F(\lambda, k)$ [28]. При этом вместо выражений (11.9) и (11.7) нужно воспользоваться соотношением (5.14)

$$e^{i\pi\lambda} F(\lambda, -k) F(-\lambda, k) - e^{-i\pi\lambda} F(\lambda, k) F(-\lambda, -k) = 2i \sin \pi\lambda$$

и интегральным представлением

$$F(\lambda, k) = 1 + \frac{\sigma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} Q_{\lambda-1/2}(1+\beta) \int_0^\infty \frac{D(\beta, \rho)}{\rho - \sigma - i\varepsilon} d\rho,$$

где $\sigma = m^2/2E$. Уравнение для D имеет вид

$$\begin{aligned} D(\beta, \rho) + \frac{1}{\pi^2} P \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\beta - \gamma} \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} P \int_0^\infty \frac{D(\gamma, \sigma)}{\sigma - \rho} d\sigma = \\ = \frac{\rho \sqrt{\beta}}{2\pi^4} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}} \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma}} \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\eta \times \\ \times \int_0^\infty \frac{\bar{K}(\xi; \sigma, \beta) D(\gamma, \tau) D(\sigma, \eta)}{(\tau - \sigma - i\varepsilon)(\eta - \sigma + i\varepsilon)(\xi - \gamma + i\varepsilon)} d\xi, \end{aligned} \quad (11.12)$$

где

$$\bar{K}(\xi; \sigma, \beta) = \frac{\theta(\xi - \xi_0)}{\xi^2 + \sigma^2 + \beta^2 - 2\xi\sigma\beta - 2(\xi\sigma + \sigma\beta + \xi\beta)}$$

и
$$\xi_0 = \sigma + \beta + \sigma\beta + \sqrt{\sigma\beta(\sigma + 2)(\beta + 2)}.$$

После того как уравнение (11.12) решено относительно $D(\beta, \rho)$, можно найти функцию $F(\lambda, k)$ и все другие величины, характеризующие процесс рассеяния; нули $F(\lambda, k)$ дают связанные состояния и резонансы. Однако уравнение (11.12) не имеет того весьма удобного свойства уравнения (11.11), которое позволяет провести точный расчет амплитуды $D(\beta, \rho)$ в заданной точке.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

§ 1. Введение

В предыдущих главах мы обстоятельно занимались задачей отыскания амплитуды рассеяния по заданному потенциалу. С 1947 г. началось изучение так называемой обратной задачи, т. е. задачи отыскания потенциала по известной амплитуде рассеяния; кроме нее оказалось необходимым учитывать также и связанные состояния и характеризующие их нормировочные константы.

Фрэдберг [37] и Хиллераас [49] первыми начали изучать обратную задачу. Задавая S -фазу рассеяния, они получили формальное выражение для $V(x)$, чего, однако (как потом оказалось), знать недостаточно. Баргман [2, 3] первый нашел примеры различных потенциалов, ведущих к одним и тем же фазам рассеяния с одним и тем же положением связанного состояния. После этого Левинсон [62] показал, что неоднозначность определения потенциала связана с возможным существованием дискретного спектра. Марченко [67, 68] выяснил природу исходных данных для обратной задачи, показав, что для нее достаточно задать сдвиги фаз, значения энергии связанных состояний и констант, связанных с величиной C в соотношении (7.7). Подобные же результаты были независимо получены Иостом и Коном [54, 55], Боргом [15], а также Холмбергом [46]. Наконец, Гельфанд и Левитан [40] получили в явном виде процедуру построения спектральной функции, определяемой формулой (11.10), в случае S -волны. Их метод дал первое эффективное решение обратной задачи для случая, когда спектральную функцию можно получить только из фаз рассеяния. Природа условий, налагаемых на S -функцию и гарантирующих существование потенциала, оставалась несколько туманной, ибо связь между

S -функцией и потенциальной функцией совсем не тривиальна. Иост и Кон [56], а также Левинсон [106] применили общий метод Гельфанда — Левитана к частному классу дифференциальных уравнений, встречающихся в потенциальном рассеянии, и пришли к тем же самым заключениям, что и Марченко.

После того как были опубликованы упомянутые статьи, была проделана очень большая работа ¹⁾ в направлении получения более простых условий на S -матрицу, гарантирующих существование потенциала, и в направлении обобщения результатов на другие типы уравнений. Напомним, что в гл. 6 мы уже описали метод обращения Мартина [71], который применим, однако, только для юкавских потенциалов.

§ 2. Разложение по собственным функциям

Рассмотрим S -волны; положим

$$\begin{aligned}\varphi(k, x) &= \varphi\left(\frac{1}{2}, k, x\right), & f(k, x) &= f\left(\frac{1}{2}, k, x\right), \\ f(k) &= f\left(\frac{1}{2}, k\right).\end{aligned}$$

Конечно, все изложение можно было бы сразу распространить на волны с $l \geq 1$, однако для простоты это будет сделано только в конце этой главы. Будем называть в дальнейшем множество значений $-\infty < k < \infty$ и $k = \pm i\xi_n$ спектром G оператора L . Напомним, что $-\xi_n^2$ являются величинами энергии связи связанных состояний.

Докажем теорему разложения по функциям $\varphi(k, x)$ при $k \in G$. Для этого рассмотрим функцию Грина (являющуюся ядром интегрального уравнения)

$$G(E, x, y) = \begin{cases} \varphi(k, x) \frac{f(-k, y)}{f(-k)}, & y > x, \\ \varphi(k, y) \frac{f(-k, x)}{f(-k)}, & y < x, \end{cases} \quad (12.1)$$

¹⁾ Полную библиографию по этому вопросу можно найти в статье Фаддеева [32].

где $0 \leq \arg k \leq \pi$. Ясно, что ядро $G(E, x, y)$ при фиксированных x и y является аналитической функцией E на комплексной плоскости E , за исключением точек спектра $G(E > 0$ и $E = -\xi_n^2)$. Далее, имеем оценку (см. леммы 1 и 3 гл. 4)

$$|G(E, x, y)| \leq K \frac{x}{1+|k|x} e^{-b|x-y|}, \quad (12.2)$$

где $b = \text{Im } k > 0$. Пусть $L = -d^2/dx^2 + V(x)$. Ядро $G(E, x, y)$ определяет некоторый ограниченный оператор, а именно резольвентный оператор $(L - E)^{-1}$. Оно удовлетворяет следующему символическому уравнению:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E\right) G(E, x, y) = \\ = \left(-\frac{d^2}{dy^2} + V(y) - E\right) G(E, x, y) = \delta(x - y). \end{aligned} \quad (12.3)$$

Пусть $\psi(x)$ — дважды дифференцируемая функция, исчезающая в окрестности точки $x=0$ и для достаточно больших x . Тогда если

$$\vartheta(x) = -\psi''(x) + V(x)\psi(x), \quad (12.4)$$

то функция $\vartheta(x)$ также обращается в нуль вне любого конечного интервала, не содержащего $x=0$. Из уравнений (12.3) и (12.4) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} G(E, x, y) \psi(y) dy = \\ = -\frac{1}{E} \psi(x) + \frac{1}{E} \int_0^{\infty} G(E, x, y) \vartheta(y) dy. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Интегрируем обе части уравнения (12.5) по окружности $|E| = R$ на энергетической плоскости. В силу неравенства (12.2) вклад от второго слагаемого в правой части уравнения (12.5) обращается в нуль при $R \rightarrow \infty$. Вклад от первого слагаемого равен $-2\pi i \psi(x)$.

Поэтому имеем

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|E|=R} dE \int_0^{\infty} G(E, x, y) \psi(y) dy. \quad (12.6)$$

Рассмотрим тот же самый интеграл на замкнутом контуре C , который состоит из окружности $|E|=R$ и кривой, огибающей точки спектра, составленной, например, из отрезков, соединяющих по порядку точки $R - i\varepsilon$, $-E_0 - \varepsilon - i\varepsilon$, $-E_0 - \varepsilon + i\varepsilon$ и $R + i\varepsilon$ ($-E_0$ — энергия связи основного состояния). Конечно, интеграл (12.5) по такому контуру C обращается в нуль, следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|E|=R} dE \int_0^{\infty} G(E, x, y) \psi(y) dy + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_0^R dE \int_0^{\infty} [G(E + i\varepsilon, x, y) - G(E - i\varepsilon, x, y)] \psi(y) dy - \\ & - \sum_{E=-E_n} \text{Выч} \int_0^{\infty} G(E, x, y) \psi(y) dy = 0, \quad (12.7) \end{aligned}$$

где вычеты в третьем слагаемом левой части нужно брать в полюсах функции $G(E, x, y)$. Из уравнений (12.6) и (12.7) после некоторых преобразований находим

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(k, x) \frac{k^2 dk}{f(k)f(-k)} \int_0^{\infty} \varphi(k, y) \psi(y) dy + \\ & + \sum_n C_n \varphi(i\xi_n, x) \int_0^{\infty} \varphi(i\xi_n, y) \psi(y) dy, \quad (12.8) \end{aligned}$$

где в силу соотношения (7.7)

$$C_n = \left[\int_0^{\infty} \varphi^2(i\xi_n, x) dx \right]^{-1} = -\frac{4ik^2}{f(k)df(-k)/dk} \Big|_{k=i\xi_n}.$$

Поскольку множество функций $\psi(x)$ плотно в пространстве $L_2(0, \infty)$, соотношение (12.8) выполняется для любой $\psi \in L_2(0, \infty)$. Из соотношения (12.8) имеем

$$\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k, x) \varphi(k, y) d\rho(E), \quad (12.9)$$

где

$$\frac{d\rho(E)}{dE} = \begin{cases} \frac{E^{1/2}}{\pi} \frac{1}{|f(\sqrt{E})|^2}, & E \geq 0, \\ \sum C_n \delta(E - E_n), & E < 0 \quad (C_n > 0). \end{cases} \quad (12.10)$$

Если $V(x) = 0$, то

$$[\rho(E)]_{V(x)=0} = \rho_0(E) = \frac{2}{3\pi} E^{3/2} \theta(E).$$

§ 3. Операторы $A(x, y)$ и $K(x, y)$

Из леммы 2 гл. 4 легко получить, что $h(k, x) = f(k, x) - \exp(-ikx) \in L_2(ib - \infty, ib + \infty)$ по k ($b < 0$), так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(q + ib, x)|^2 dq = O(e^{2bx}), \quad b < 0.$$

Теорема 10 гл. 2 утверждает в таком случае, что

$$A(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(k, x) - e^{-ikx}] e^{iky} dk = 0, \quad y < x. \quad (12.11)$$

Обращая соотношение (12.11), приходим к соотношению

$$f(k, x) = e^{-ikx} + \int_x^{\infty} A(x, y) e^{-iky} dy, \quad (12.12)$$

где $A(x, y) \in L_2(x, \infty)$ по y .

Подобное же интегральное соотношение можно вывести при использовании вместо $f(k, x)$ функции $\varphi(k, x)$ при ограничениях, которые, однако, пока не

ясны. Учет законов сохранения ограничивает произвол в выборе потенциалов теми потенциалами, которые удовлетворяют условию леммы 4 гл. 4, т. е. условию

$$R(x) = \int_0^x |V(y)| dy < \infty.$$

В этом случае (см. гл. 4, лемму 4)

$$\Phi(k, x) = ik \left[\varphi(kx) - \frac{\sin kx}{kx} \right]$$

принадлежит $L_2(-\infty + ib, +\infty + ib)$ по k для любого x . Далее в силу лемм 3 и 5 гл. 4 $\Phi(k, x)$ является целой функцией x экспоненциального порядка. Следовательно, по теореме Палея — Винера (теорема 9 гл. 2) имеем

$$\Phi(k, x) = \frac{1}{2} \int_{-x}^x K(x, y) e^{iky} dy,$$

где $K(x, y) \in L_2(-x, x)$ по y . Так как $\Phi(k, x)$ — нечетная функция k , то имеем также

$$K(x, -y) = -K(x, y),$$

$$\varphi(k, x) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x K(x, y) \frac{\sin ky}{k} ky. \quad (12.13)$$

Соотношения (12.12) и (12.13) мало что говорят о самих функциях $A(x, y)$ и $K(x, y)$; чтобы узнать о них больше, подставим (12.12) и (12.13) в соотношения (4.8) и (3.29) для S -волн, которые имеют вид

$$f(k, x) = e^{-ikx} + \frac{1}{k} \int_x^\infty \sin k(y-x) V(y) f(k, y) dy, \quad (12.14)$$

$$\varphi(k, x) = \frac{\sin kx}{k} + \frac{1}{k} \int_0^x \sin k(x-y) V(y) \varphi(k, y) dy.$$

Исключая тригонометрические функции, приходим к уравнениям

$$A(x, y) = \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} V(t) dt + \\ + \int_{(x+y)/2}^{\infty} dt \int_0^{(y-x)/2} V(t-z) A(t-z, t+z) dz, \quad (12.15) \\ y \geq x,$$

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \int_{(x-y)/2}^{(x+y)/2} V(t) dt + \\ + \int_{(x-y)/2}^{(x+y)/2} dt \int_0^{(x-y)/2} V(t+z) K(t+z, t-z) dz, \quad (12.16) \\ x \geq y.$$

Эти уравнения легко изучить, в частности для них можно построить ряды теории возмущений, из которых можно получить следующие оценки:

$$|A(x, y)| \leq \frac{1}{2} \int_{(x+y)/2}^{\infty} |V(t)| dt \exp \left(\int_x^{\infty} t' |V(t')| dt' \right), \\ |K(x, y)| \leq \frac{1}{2} \int_{(x-y)/2}^x |V(t)| dt \exp \left(\int_0^{(x+y)/2} t' |V(t')| dt' \right). \quad (12.17)$$

Для производной $\partial A(x, y)/\partial x$ получаем

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} A(x, y) + \frac{1}{4} V\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq \\ \leq C \int_x^{\infty} |V(t)| dt \int_{(x+y)/2}^{\infty} |V(t')| dt'.$$

Подобные оценки можно получить и для других производных.

При наличии оценок (12.17) можно построить решения уравнений Вольтерра

$$f(x) + \int_0^x K(x, y) f(y) dy = g(x),$$

$$f(x) + \int_x^\infty A(x, y) f(y) dy = g(x)$$

в виде

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \tilde{K}(x, y) g(y) dy, \quad (12.18)$$

$$f(x) = g(x) + \int_x^\infty \tilde{A}(x, y) g(y) dy.$$

Введем далее новые переменные

$$\zeta = \frac{x+y}{2}, \quad \eta = \frac{x-y}{2},$$

$$A(x, y) = \alpha(\zeta, \eta), \quad K(x, y) = \chi(\zeta, \eta).$$

В этих переменных уравнения (12.15) и (12.16) принимают вид

$$\alpha(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\zeta}^{\infty} V(t) dt + \int_{\zeta}^{\infty} dt \int_0^{\eta} V(t+z) \alpha(t, z) dz, \quad (12.19)$$

$$\chi(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta}^{\zeta} V(t) dt + \int_{\eta}^{\zeta} dt \int_0^{\eta} V(t+z) \chi(t, z) dz.$$

Из уравнений (12.19) ясно видно, что существуют смешанные производные $\partial^2 \alpha / \partial \zeta \partial \eta$, $\partial^2 \chi / \partial \zeta \partial \eta$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \zeta \partial \eta} + V(\zeta + \eta) \alpha = 0, \quad \eta \leq 0,$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \zeta \partial \eta} - V(\zeta + \eta) \chi = 0, \quad \eta \geq 0.$$

Если производные

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}$$

также существуют, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} &= -V(x)A, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} &= V(x)K. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Из уравнений (12.15) и (12.16) имеем также (см. лемму 4 гл. 4)

$$\begin{aligned} A(x, x) &= \frac{1}{2} \int_x^\infty V(t) dt, \\ K(x, x) &= \frac{1}{2} \int_0^x V(t) dt \leq R(x) < \infty, \\ K(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Функцию $K(x, y) = -K(x, -y)$ можно таким образом рассматривать как решение уравнения (12.20) с граничным условием

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x V(t) dt, \quad K(x, -x) = -K(x, x).$$

Стандартные теоремы [96] гарантируют существование и единственность решения при наложенных на потенциал $V(x)$ условиях.

Также можно доказать, что обратные ядра, определяемые соотношениями (12.18), удовлетворяют уравнениям типа (12.20), (12.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial y^2} &= V(x)\tilde{A}, \quad \tilde{A}(x, x) = -\frac{1}{2} \int_x^\infty V(t) dt, \\ \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial y^2} &= -V(x)\tilde{K}, \quad \tilde{K}(x, x) = -\frac{1}{2} \int_0^x V(t) dt. \end{aligned}$$

Наконец, пусть заданы два потенциала $V_1(x)$ и $V_2(x)$ и их ядра $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$, $\tilde{K}_1(x, y)$ и $\tilde{K}_2(x, y)$. Тогда имеем

$$\varphi_1(k, x) = \varphi_0(k, x) + \int_0^x K_1(x, y) \varphi_0(k, y) dy, \quad (12.22)$$

$$\varphi_0(k, x) = \varphi_2(k, x) + \int_0^x \tilde{K}_2(x, y) \varphi_2(k, y) dy. \quad (12.23)$$

Подставляя функцию $\varphi_0(k, x)$, определенную по формуле (12.23), в (12.22), приходим к следующему уравнению Вольтерра:

$$\varphi_1(k, x) = \varphi_2(k, x) + \int_0^x K_{12}(x, y) \varphi_2(k, y) dy,$$

в котором

$$K_{12}(x, y) = K_1(x, y) + \tilde{K}_2(x, y) + \int_y^x K_1(x, z) \tilde{K}_2(z, y) dz.$$

Аналогично находим

$$\varphi_2(k, x) = \varphi_1(k, x) + \int_0^x \tilde{K}_{12}(x, y) \varphi_1(k, y) dy,$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{12}(x, y) &= K_{21}(x, y) = \\ &= K_2(x, y) + \tilde{K}_1(x, y) + \int_y^x K_2(x, z) \tilde{K}_1(z, y) dz. \end{aligned}$$

Очевидно, что $K_{12}(x, y)$ является обратным ядром для $K_{21}(x, y)$. Эти ядра удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_2(x) \right] K_{12} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_1(x) \right] K_{12}, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_1(x) \right] K_{21} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + V_2(x) \right] K_{21}, \end{aligned}$$

$$K_{12}(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x [V_1(t) - V_2(t)] dt = -K_{21}(x, x). \quad (12.23a)$$

§ 4. Уравнения Гельфанда — Левитана и Марченко

В этом параграфе мы выведем некоторые интегральные уравнения, которые чрезвычайно важны для исследования обратной задачи.

Напомним теорему разложения (12.9)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k, t) \varphi(k, x) d\rho(E) = \delta(t - x). \quad (12.24)$$

Положим в соотношениях (12.18) $f(x) = \varphi_0(k, x)$, $g(x) = \varphi(k, x)$

$$\varphi_0(k, x) = \varphi(k, x) + \int_0^x \tilde{K}(x, y) \varphi(k, y) dy. \quad (12.25)$$

Пусть $t > x$; тогда, подставляя (12.25) в (12.24), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k, t) \varphi_0(k, x) d\rho(E) = 0 \quad \text{при } t > x.$$

Из соотношения (12.13) имеем также

$$\varphi(k, t) = \varphi_0(k, t) + \int_0^t K(t, y) \varphi_0(k, y) dy,$$

поэтому при $t > x$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(k, t) \varphi_0(k, x) d\rho(E) + \\ & + \int_0^t K(t, y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(k, y) \varphi_0(k, x) d\rho(E) = 0. \end{aligned}$$

Теперь совершенно ясно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(k, t) \varphi_0(k, y) d\rho_0(E) = \delta(t - y).$$

Полагая $\sigma(E) = \rho(E) - \rho_0(E)$, получаем

$$\Omega(t, x) + \int_0^t K(t, y) \Omega(y, x) dy + K(t, x) = 0, \quad (12.26)$$

где

$$\Omega(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(k, t) \varphi_0(k, x) d\sigma(E). \quad (12.27)$$

Уравнение (12.26) называется уравнением Гельфанда — Левитана.

Подобное уравнение можно получить и для $A(x, y)$. Для простоты предположим, что связанные состояния отсутствуют. В этом случае соотношение (12.24) можно записать по-другому:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(k, t) \varphi(k, y) \frac{k^2 dk}{f(k) f(-k)} = \delta(t - y).$$

Дважды используя формулу (5.11), приходим к разложению

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-k, t) [f(k, x) - S(k) f(-k, x)] dk = \delta(t - x). \quad (12.28)$$

Возьмем теперь соотношение, подобное (12.25),

$$e^{-ikx} = f(k, x) + \int_x^{\infty} \tilde{A}(x, y) f(k, y) dy. \quad (12.29)$$

Из соотношений (12.28) и (12.29) очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-k, t) [e^{-ikx} - S(k) e^{ikx}] dk = 0, \quad x > t.$$

Вспоминая далее, что

$$f(-k, t) = e^{ikt} + \int_x^{\infty} A(t, y) e^{iky} dy,$$

находим

$$F(t+x) + \int_x^{\infty} F(x+y) A(t, y) dy - A(t, x) = 0, \quad (12.30)$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S(k) - 1] e^{ikx} dk.$$

При наличии связанных состояний уравнение (12.30) сохраняет свой вид, только для $F(x)$ в этом случае имеем

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S(k) - 1] e^{ikx} dk + \sum_n S_n e^{-\epsilon_n x},$$

где S_n — константы нормировки. Уравнение (12.30) называется уравнением Марченко.

Зная $S(k)$, $|f(k)|^2$, положение связанных состояний и их нормировочные константы, можно найти ядра $F(x)$ и $\Omega(x, y)$, после чего уравнения (12.26) и (12.30) можно рассматривать как уравнения Фредгольма для неизвестных $A(x, y)$ или $K(x, y)$ соответственно. Эти уравнения можно разрешить стандартными методами. После этого потенциал вычислится по формулам (12.20). Таково принципиальное решение обратной задачи. Чтобы применить теорию Фредгольма, необходимо, однако, подробнее изучить ядра $F(x)$ и $\Omega(x, y)$.

§ 5. Ядра $F(x)$ и $\Omega(x, y)$

Из формулы (12.12) очевидно, что

$$f(k) = 1 + \int_0^{\infty} A(0, y) e^{-iky} dy = 1 + \int_0^{\infty} \Gamma(y) e^{-iky} dy.$$

Далее из неравенств (12.17) легко вывести, что $|\Gamma(y)| \in L(0, \infty)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 |\Gamma(y)| &< C \int_{y/2}^{\infty} |V(t)| dt; \\
 \frac{1}{C} \int_{y_0}^H |\Gamma(y)| dy &\leq \int_{y_0}^H dy \int_{y/2}^{\infty} |V(t)| dt = \\
 &= H \int_{H/2}^{\infty} |V(t)| dt + 2 \int_{y_0/2}^{H/2} t |V(t)| dt - y_0 \int_{y_0/2}^{\infty} t |V(t)| dt \leq \\
 &\leq 2 \int_{y_0/2}^{\infty} t |V(t)| dt.
 \end{aligned}$$

Это выражение имеет конечный предел при $H \rightarrow \infty$, так как

$$\int_{y_0/2}^{\infty} t |V(t)| dt < \infty.$$

Имеем также

$$0 \leq \int_{y_0}^H dy \int_{y/2}^{\infty} |V(t)| dt \leq H \int_{H/2}^{\infty} |V(t)| dt + 2 \int_{y_0/2}^{H/2} t |V(t)| dt;$$

последнее выражение ограничено при $y_0 \rightarrow 0$, поэтому

$$|\Gamma(y)| \in L(0, \infty).$$

Из теоремы Римана — Лебега (теорема 8 гл. 2) следует, что функция $f(k) - 1$ непрерывна по k и обращается в нуль при больших k (см. гл. 5). По теореме Винера — Леви (теорема 11 гл. 2) величины $(\pi/k)[d\sigma(E)/dE]$ и $S(k) - 1$ суть фурье-образы абсолютно интегрируемых функций

$$S(k) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-ikt} dt, \quad (12.31)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < \infty,$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{k} \frac{d\sigma(E)}{dE} &= \frac{1}{f(k)f(-k)} - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) \cos kt dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} H(t) \cos kt dt, \quad (12.32) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(t)| dt < \infty.$$

При отсутствии связанных состояний фаза $\delta(k) = -1/2 \ln S(k)$ также является аналитической функцией k при $-\infty < k < +\infty$, и всегда можно положить $\delta(\pm\infty) = 0$. В силу теоремы 11 гл. 2 имеем

$$\delta(k) = \int_0^{\infty} \gamma(t) \sin kt dt, \quad \int_0^{\infty} |\gamma(t)| dt < \infty. \quad (12.33)$$

Можно проверить, что

$$\begin{aligned} f(k) &= \exp\left(\int_0^{\infty} e^{-ikt} \gamma(t) dt\right), \\ f(k)f(-k) &= \exp\left(2 \int_0^{\infty} \gamma(t) \cos kt dt\right). \quad (12.34) \end{aligned}$$

Пусть имеются связанные состояния; введем новую величину

$$\tilde{S}(k) = S(k) \prod_{l=1}^n \left(\frac{k - i\xi_l}{k + i\xi_l}\right)^2.$$

Функция $\tilde{S}(k)$ имеет те же свойства, что $S(k)$, однако в отличие от $S(k)$ она не имеет нулей и полюсов.

В соответствии с формулой (12.34) перестроим функцию $\tilde{f}(k)$:

$$f(k) = \tilde{f}(k) \prod_{i=1}^n \frac{k + i\xi_i}{k - i\xi_i}. \quad (12.34a)$$

Эти формулы еще раз приводят к соотношениям (5.36), служащим для восстановления $f(k)$ и $\rho(k)$ из $\delta(k)$ и связанных состояний.

§ 6. Изучение уравнений Гельфанда — Левитана и Марченко

Из соотношений (12.32) и (12.27) имеем

$$\Omega(x, y) = H(x - y) - H(x + y), \quad (12.35)$$

и поэтому ядро Ω интегрируемо в любом конечном интервале как по x , так и по y . Уравнение (12.26) можно рассматривать как интегральное уравнение Фредгольма по переменной x , в котором t играет роль параметра. Поскольку ядро Ω интегрируемо, нам остается только проверить, что однородное уравнение имеет только тривиальные решения. Предположим, что для заданного t уравнение

$$h_0(x) + \int_0^t h_0(y) \Omega(x, y) dy = 0 \quad (12.36)$$

имеет решение $h_0(x) \neq 0$. Введем новую функцию

$$h(x) = \begin{cases} h_0(x), & x < t, \\ 0, & x > t. \end{cases}$$

Из уравнения (12.36) тогда имеем

$$\int_0^{\infty} h^2(x) dx + \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \Omega(x, y) h(x) h(y) dy = 0.$$

Используя соотношение (12.27) и равенство Парсеваля для функции $\varphi_0(k, x)$, находим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{\infty} \varphi_0(k, x) h(x) dx \right]^2 d\rho(E) = 0.$$

Этот интеграл обращается в нуль только тогда, когда

$$\int_0^{\infty} \varphi_0(k, x) h(x) dx = 0,$$

причем E принадлежит спектру, т. е. $h(x)$ ортогональна всем функциям $\varphi_0(k, x)$, для которых E принадлежит спектру, и, следовательно, $h(x) = 0$. Отсюда ясно, что уравнение (12.26) всегда имеет решение. Остается только доказать, что подстановка этого решения $K(x, y)$ в соотношение (12.13) дает систему собственных функций дифференциального оператора $-d^2/dx^2 + V(x)$, где $V(x) = 2dK(x, x)/dx$.

Доказательство проведем при упрощающем предположении, что ядра $\Omega(x, y)$ и $K(x, y)$ имеют интегрируемые вторые производные. Это ограничение можно, конечно, ослабить, однако большинство потенциалов удовлетворяет этому условию. При сделанном предположении применим оператор $(\partial^2/\partial t^2) - (\partial^2/\partial x^2)$ к обеим частям уравнения (12.26). Так как, согласно равенству (12.35),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Omega(t, x) = 0,$$

то

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) K(x, t) + \frac{dK(t, t)}{dt} \Omega(t, x) + K(t, t) \frac{\partial \Omega(x, t)}{\partial t} + \\ & + \left(\frac{\partial K(t, y)}{\partial t} \right)_{y=t} \dot{\Omega}(x, t) + \int_0^t \frac{\partial^2 K(t, y)}{\partial t^2} \Omega(x, y) dy = \\ & = \int_0^t K(t, y) \frac{\partial^2 \Omega(x, y)}{\partial x^2} dy = \int_0^t K(t, y) \frac{\partial^2 \Omega(x, y)}{\partial y^2} dy. \end{aligned}$$

Интегрируя далее по частям, находим

$$\begin{aligned}
 D(x) &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{dK(t, t)}{dt} \right) K(t, x) + \\
 &+ \int_0^t \Omega(x, y) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 \frac{dK(t, t)}{dt} \right] K(t, y) dy = \\
 &= -2 \frac{dK(t, t)}{dt} \left[K(t, x) + \Omega(t, x) + \int_0^t K(t, y) \Omega(x, y) dy \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция $D(x)$ есть решение однородного уравнения и поэтому равна нулю тождественно. С другой стороны, очевидно, что в силу уравнения (12.26) $\Omega(x, 0) = 0$ и $K(x, 0) = 0$. Таким образом, ядро $K(x, y)$, удовлетворяющее, согласно § 4 настоящей главы, соотношениям (12.20), также удовлетворяет в силу равенства $D(x) = 0$ и уравнению (12.16). Функции $\varphi(k, x)$, получаемые из $K(x, y)$, согласно (12.13), будут удовлетворять уравнению (12.14), если положить $V(x) = 2dK(x, x)/dx$, причем эти функции будут собственными функциями $-(d^2/dx^2) + V(x)$, что и требовалось доказать. Наш способ доказательства, конечно, формален, поскольку еще нужно доказать, что вторые производные существуют. Строгое доказательство этого можно найти в литературе [40].

Уравнение Марченко можно рассмотреть аналогично. Наметим вкратце соответствующее доказательство. Мы уже знаем, что

$$\int_t^\infty |F(x)| dx < \infty, \quad \int_t^\infty dx \int_x^\infty |V(u)| du < \infty.$$

Как будет показано дальше, имеется далеко идущая аналогия между функциями $F'(x)$ и $V(x)$ в том смысле, что они удовлетворяют одним и тем же условиям. Поэтому потребуем, чтобы

$$\int_0^\infty x |F'(x)| dx < \infty,$$

В этом случае $F(x+y)$ является ядром Гильберта — Шмидта (см. гл. 2, § 5). Действительно,

$$F(t) < \int_t^{\infty} |F'(x)| dx < \frac{1}{t} \int_t^{\infty} x |F'(x)| dx = \frac{o(1)}{t}$$

или $|tF(t)| < M$; следовательно,

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} dx \int_t^{\infty} [F(x+y)]^2 dy &< \int_{2t}^{\infty} q [F(q)]^2 dq < \\ &< M \int_{2t}^{\infty} |F(q)| dq < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что в данном случае имеет место альтернатива Фредгольма, т. е. уравнение (12.30) имеет решение, если однородное уравнение

$$f(x) = \int_t^{\infty} F(x+y) f(y) dy \quad (12.37)$$

не имеет решений в пространстве $L_2(t, \infty)$. Умножая равенство (12.37) на $f(x)$ и интегрируя по x от t до ∞ , получаем

$$\int_t^{\infty} [f(x)]^2 dx - \int_t^{\infty} dx \int_t^{\infty} F(x+y) f(x) f(y) dy = 0. \quad (12.38)$$

Если ввести функцию

$$\eta(k) = \int_t^{\infty} e^{ikx} f(x) dx,$$

такую, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2(k) dk = 0,$$

то уравнение (12.38) можно записать по-другому:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\eta(k)|^2 [1 - e^{2i(\delta+\varphi)}] dk = 0, \quad (12.39)$$

$$\varphi = \arg \eta(k).$$

Но соотношение (12.39) противоречиво (если только функция $\eta(k)$ не равна нулю), так как вещественная часть подынтегрального выражения неотрицательна:

$$\operatorname{Re} [1 - e^{2i(\delta+\varphi)}] = 2 \sin^2(\delta + \varphi) \geq 0.$$

Проведем теперь упомянутую выше аналогию между функциями $F'(x)$ и $V(x)$. Из уравнения (12.30) имеем

$$F(2x) = A(x, x) - 2 \int_x^{\infty} F(2t) A(x, 2t - x) dt. \quad (12.40)$$

Соотношение (12.40) можно рассматривать как уравнение Вольтерра относительно неизвестной функции $F(2x)$. Это уравнение можно анализировать обычными методами, используя (12.17). Полагая

$$\sigma(x) = \int_x^{\infty} |V(y)| dy < \infty,$$

получаем

$$|A(x, y)| \leq C \sigma\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\left| \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} + \frac{1}{4} V\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq C \sigma(x) \sigma\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

В результате находим следующую оценку:

$$|F(2x)| \leq C \sigma(x).$$

Более тщательная оценка Фаддеева [32] (доказательство ее здесь не приводится) дает

$$\left| F'(2x) + \frac{1}{4} V(x) \right| \leq C [\tau(2x)]^2 = C \left[\int_{2x}^{\infty} |F'(t)| dt \right]^2,$$

где, конечно,

$$|F(2x)| < \int_{2x}^{\infty} |F'(t)| dt = \tau(2x).$$

Аналогия между $\tau(2x)$ и $\sigma(x)$, а следовательно, и между $F'(x)$ и $V(x)$ очевидна [32].

Зная функцию $A(x, x)$, можно легко восстановить $V(x)$; можно видеть, что функции $f(k, x)$, полученные по формуле (12.12), являются в точности решениями Иоста соответствующего уравнения Шредингера.

§ 7. Потенциалы, ведущие к одинаковым фазам

Важным побочным результатом исследования обратной задачи является факт существования потенциалов, эквивалентных с точки зрения фаз рассеяния. Оказывается, что существуют разные потенциалы с одним и тем же $S(k)$ и даже одними и теми же энергиями связи для связанных состояний.

Для простоты предположим, что для двух таких эквивалентных потенциалов $V_1(x)$ и $V_2(x)$ имеется только одно связанное состояние при $k = -i\xi$, причем $\xi > 0$. Из соотношения (12.34) и (12.34а) видим, что $f_1(k) = f_2(k) = f(k)$ [$f_1(k)$ и $f_2(k)$ — функции Иоста для потенциалов $V_1(x)$ и $V_2(x)$] и, следовательно, $\rho_1(E) = \rho_2(E) > 0$, хотя нормировочные константы C_1, C_2 для связанных состояний могут и быть различными.

В данном случае лучше всего исходить из ядра $K_{12}(x, y)$, определенного в § 3 настоящей главы. Можно показать, что ядро $K_{12}(x, y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$K_{12}(t, x) + \Omega_{12}(t, x) + \int_0^t K_{12}(t, y) \Omega_{12}(y, x) dy = 0, \quad (12.41)$$

частным случаем которого является уравнение (12.26). При этом ядро $\Omega_{12}(t, y)$ дается выражением

$$\Omega_{12}(t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(k, t) \varphi_2(k, y) d\sigma_{12}, \quad (12.42)$$

$$\sigma_{12}(E) = \rho_1(E) - \rho_2(E),$$

где $\rho_1(E)$ и $\rho_2(E)$ — спектральные функции для потенциалов $V_1(x)$ и $V_2(x)$ соответственно. Из (12.42) непосредственно видно, что если $V_1(x)$ и $V_2(x)$ эквивалентны в смысле фаз, о чем было сказано выше, то $\sigma_{12}(E) = 0$ при $E > 0$, и поэтому

$$\frac{d\sigma(E)}{dE} = (C_1 - C_2) \delta(E + \xi^2).$$

Тогда ядру $\Omega_{12}(t, y)$ можно придать очень простой вид

$$\Omega_{12}(t, y) = (C_1 - C_2) \varphi_2(i\xi, t) \varphi_2(i\xi, y).$$

Следовательно, уравнение (12.41) можно преобразовать к виду

$$K_{12}(t, x) + (C_1 - C_2) \varphi_2(i\xi, t) \varphi_2(i\xi, x) +$$

$$+ (C_1 - C_2) \varphi_2(i\xi, x) \int_0^t K_{12}(t, y) \varphi_2(i\xi, y) dy = 0,$$

так что функция $K_{12}(t, x, y)$ удовлетворяет уравнению с вырожденным ядром; можно утверждать поэтому, что

$$K_{12}(t, x) = a(t) \varphi_2(i\xi, x),$$

где функция $a(t)$ определяется из уравнений

$$M(t) a(t) = (C_1 - C_2) \varphi_2(i\xi, t),$$

$$M(t) = - (C_1 - C_2) \int_0^t [\varphi_2(i\xi, y)]^2 dy - 1,$$

так что

$$K_{12}(t, x) = - \frac{(C_1 - C_2) \varphi_2(i\xi, t) \varphi_2(i\xi, x)}{(C_1 - C_2) \int_0^t [\varphi_2(i\xi, y)]^2 dy + 1}.$$

Таким образом, согласно (12.23а), имеем

$$V_1(x) - V_2(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln M(x).$$

Полезно отметить, что если потенциал $V_1(x)$ удовлетворяет неравенству (4.6) при $v < m$ и $m > 2\xi$, то потенциал $V_2(x)$ удовлетворяет этому неравенству при $v < 2\xi$, а не при $v < m$, т. е. $V_2(x)$ имеет больший радиус, чем $V_1(x)$. Можно ожидать, что функция $f_1(k)$ будет регулярной вплоть до значения $\text{Im } k = m/2$, а $f_2(k)$ — только до значения $\text{Im } k = \xi$. В действительности $f_1(k) = f_2(k)$ при $\text{Im } k < \xi$ и $f_2(k)$ не определено для $\text{Im } k > \xi$. Указанное обстоятельство объясняет, почему величины C все же различны, несмотря на то что, согласно формуле (7.7), они одинаковы для $V_1(x)$ и $V_2(x)$:

$$C = - \frac{4ik^2}{f(\lambda, k) (df(\lambda, -k)/dk)} \Big|_{k=i\xi},$$

и что функции Иоста одинаковы для обоих потенциалов. Дело в том, что значение $f_2(i\xi)$ не определено. Если, кроме того, желательно определить $f_2(k)$ для $V_2(x)$ при $\text{Im } k > \xi$, то нельзя пользоваться аналитическим продолжением.

Опустим теперь условие, что энергия связи одинакова для потенциалов $V_1(x)$ и $V_2(x)$, т. е. $f_1(-i\xi_1) = 0$ и $f_2(-i\xi_2) = 0$, и $\xi_1 \neq \xi_2$. Из эквивалентности фаз имеем

$$f_1(k) = f_2(k) \frac{k^2 + \xi_1^2}{k^2 + \xi_2^2},$$

так что

$$\frac{d\sigma_{12}(E)}{dE} = C_1 \delta(E + \xi_1^2) - C_2 \delta(E + \xi_2^2), \quad E < 0,$$

$$\frac{d\sigma_{12}(E)}{dE} = \frac{k}{\pi} \frac{1}{|f_2(k)|^2} \frac{(2E + \xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_2^2 - \xi_1^2)}{(E + \xi_1^2)^2}, \quad E > 0,$$

причем $\sigma_{12}(E)$ достаточно быстро убывает, что позволяет ввести в рассмотрение ядро $\Omega_{12}(x, y)$, для которого уравнение (12.41) может быть разрешено. Иост и Кон [56] вычислили изменение $\delta V(x)$ потенциала

$V_2(x) = V(x)$, которое ведет к бесконечно малому сдвигу $\delta\xi$ в энергии связи $\xi_2^2 = \xi^2$. Они нашли, что

$$\delta V(x) = \frac{8i\xi}{df(k)/dk|_{k=-i\xi} [\partial f(-i\xi, x)/dx]_{x=0}} \frac{\partial}{\partial \xi} \times \\ \times \left[f(-i\xi, x) \frac{\partial f(-i\xi, x)}{\partial \xi} \right] \delta \xi.$$

Подобное соотношение имеет место и в случае нескольких связанных состояний.

§ 8. Баргмановские потенциалы

Баргман [2, 3] открыл замечательный класс потенциалов, для которых можно указать явно вид функций Иоста; при этом функции Иоста выражаются через элементарные рациональные функции. Эти потенциалы замечательны также тем, что для них ядро $K(x, y)$ представимо в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N A_i(x) B_i(y).$$

Для простоты будем считать, что $N=1$. Подставляя ядро $K(x, y)$ в уравнения (12.20) и вспоминая, что $K(x, 0) = 0$, мы приходим к следующему выражению для $K(x, y)$:

$$K(x, y) = \psi(q, x) \varphi_0(q, y),$$

где q — некоторая константа, а ψ — решение волнового уравнения

$$\psi'' + q^2 \psi - V(x) \psi = 0.$$

Однако поскольку при вещественном q

$$V(x) = 2 \frac{dK(x, x)}{dx} = 2 \frac{d}{dx} [\psi(q, x) \varphi_0(q, x)],$$

то потенциал $V(x)$ осциллирует и не обращается в нуль при больших x ; следовательно, $q = ip$. Вышеприведенное выражение растет, если только не выполняется асимптотическое соотношение

$$\psi(q, x) = C f(-ip, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} C e^{-px}.$$

Полагая в формуле (12.13) $k = ip$, получаем

$$\begin{aligned}\varphi(ip, x) &= \varphi_0(ip, x) + \int_0^x K(x, y) \varphi_0(ip, y) dy = \\ &= \varphi_0(ip, x) + \psi(ip, x) \int_0^x [\varphi_0(ip, y)]^2 dy.\end{aligned}$$

Допустим теперь, что $\psi(ip, x) = -\alpha\varphi(ip, x)$, т. е. что имеется связанное состояние с энергией связи $-p^2$. Тогда

$$\varphi(ip, x) = \frac{\varphi_0(ip, x)}{1 + \alpha \int_0^x [\varphi_0(ip, y)]^2 dy}.$$

Потенциал $V(x)$ можно записать теперь явно:

$$V(x) = -2\alpha \frac{d}{dx} \frac{[\varphi_0(ip, x)]^2}{1 + \alpha \int_0^x [\varphi_0(ip, y)]^2 dy}.$$

Вспоминая тождество

$$\begin{aligned}(k_1^2 - k_2^2) \int_0^x \varphi_0(k_1, x) \varphi_0(k_2, x) dx = \\ = \varphi_0(k_1, x) \varphi_0'(k_2, x) - \varphi_0(k_2, x) \varphi_0'(k_1, x),\end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned}\varphi(k, x) &= \varphi_0(k, x) - \alpha \frac{\varphi_0(ip, x)}{1 + \alpha \int_0^x [\varphi_0(ip, y)]^2 dy} \frac{1}{k^2 + p^2} \times \\ &\times [\varphi_0(k, x) \varphi_0'(ip, x) - \varphi_0(ip, x) \varphi_0'(k, x)].\end{aligned}$$

Отсюда можно найти асимптотику $\varphi(k, x)$ при больших x :

$$\varphi(k, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sin kx}{k} \left(1 - \frac{2p^2}{p^2 + k^2}\right) \cos kx \frac{2p}{p^2 + k^2},$$

откуда функция Иоста равна

$$f(k) = \frac{k + ip}{k - ip}.$$

Найденное таким образом семейство потенциалов является семейством эквивалентных потенциалов в смысле эквивалентности их фаз, так как все они имеют одну и ту же функцию Иоста. Это семейство потенциалов является частью семейства, указанного в начале параграфа. Когда ядро представимо в виде

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N A_i(x) B_i(y),$$

соответствующая функция Иоста является рациональной функцией более высокого порядка. Замечательно то, что эти потенциалы были открыты до того, как Гельфанд и Левитан создали свой алгоритм.

§ 9. Заключительные замечания

Алгоритм Гельфанда — Левитана и Марченко был распространен на волны с орбитальным моментом $l \geq 1$; при этом результаты оказались подобными тем, которые были получены для S -волн¹⁾. Так же, как и для S -волн, для l -волн можно установить соотношение

$$\varphi(\lambda, k, x) = \varphi_l(k, x) \varphi_{0,l}(k, x) + \int_0^x K(x, y) \varphi_{0,l}(k, y) dy, \quad (12.43)$$

причем ядро $K(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} - V(x) \right] K(x, y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{l(l+1)}{y^2} \right] K(x, y),$$

¹⁾ См. Левинсон [62], Иост и Кон [56], Ньютон [74]. Потенциалы, сингулярные при $x=0$, были рассмотрены Сташевской [97] и Волком [102].

а также интегральному уравнению

$$K(x, y) + \Omega(x, y) + \int_0^x K(x, z) \Omega(z, y) dy = 0,$$

где $\Omega(z, y)$ может быть задано с помощью спектральной функции $\rho(E)$

$$\Omega(z, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{0,l}(k, z) \varphi_{0,l}(k, y) d[\rho(E) - \rho_0(E)];$$

здесь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(k, x) \varphi_l(k, y) d\rho(E) = \delta(x - y).$$

Соотношение (12.43) обобщалось и на другие более сложные случаи. Ньютон и Иост [75] изучали его для многоканального рассеяния.

Было бы желательно получить подобное представление для трехмерной волновой функции и связать полную амплитуду рассеяния непосредственно с потенциалом. К сожалению, для неюкавских потенциалов не получено пока на этом пути сколь-нибудь существенных результатов. Заметим еще, что подход к обратной задаче, подобный изложенному, можно развить, рассматривая вместо энергии комплексный угловой момент [89, 72].

Отметим, наконец, процедуру обращения Мартина и Таргонского [72], которые исходили для юкавского потенциала из амплитуды рассеяния при данной энергии, заданной в функции от передаваемого импульса.

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ ОБЫЧНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО
РАССЕЯНИЯ

§ 1. Многоканальные задачи

Наиболее очевидный путь обобщения теории обычного потенциального рассеяния состоит во введении дополнительных внутренних переменных, например спина, или в учете возможности наличия возбужденных состояний взаимодействующих частиц. Методы решения таких задач не сильно отличаются от изложенных нами для одноканальной задачи, и поэтому наше изложение будет достаточно кратким.

Отдельные каналы в задаче рассеяния будем нумеровать индексом α , предполагая, что подобных каналов конечное число N . Задачи рассеяния с бесконечным числом каналов еще не изучены. Рассмотрим вначале случай взаимодействия бесспиновых частиц, обладающих возбужденными состояниями; при этом будем пользоваться галилеевской инвариантностью. Волновая функция имеет в этом случае дополнительную переменную α . Пусть $m_{1\alpha}$ и $m_{2\alpha}$ — массы частиц в состояниях α , а \mathcal{E}_α — энергии возбуждения из основного состояния ($\alpha=0$). Нумерация состояний α проводится так, что \mathcal{E}_α монотонно возрастают.

Вместо одного уравнения Шредингера следует рассмотреть систему уравнений

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_{1\alpha}}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_{2\alpha}}\Delta_2 + \mathcal{E}_\alpha\right)\Psi_\alpha = \mathcal{E}\Psi_\alpha - \sum_{\beta=1}^N U_{\alpha\beta}\Psi_\beta.$$

Галилеева инвариантность требует, чтобы суммарная масса $m_{1\alpha} + m_{2\alpha} = M_0$ не зависела от α и чтобы

$$\langle x_1 x_2 | U_{\alpha\beta} | x'_1 x'_2 \rangle = U_{\alpha\beta}(x) \delta(x - x') \delta(x_B - x'_B),$$

где

$$x = x_1 - x_2, \quad x = |x|, \quad x' = x'_1 - x'_2,$$

$$x_B = \frac{m_{1\alpha}x_1 + m_{2\alpha}x_2}{M_0}, \quad x'_B = \frac{m_{1\beta}x'_1 + m_{2\beta}x'_2}{M_0}.$$

Следовательно, движение центра масс отделяется, и вместо исходного уравнения Шредингера получаем

$$-\frac{\hbar^2}{2M_\alpha} \Delta \psi_\alpha + \mathcal{E}_\alpha \psi_\alpha = \mathcal{E} \psi_\alpha - \sum_{\beta=1}^N U_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (13.1)$$

где $M_\alpha = m_{1\alpha} m_{2\alpha} / (m_{1\alpha} + m_{2\alpha})$ — приведенная масса в канале α .

Инвариантность относительно обращения времени требует, чтобы $U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha} = U_{\alpha\beta}^*$. Радиус действия $1/m_{\alpha\beta}$ потенциала $U_{\alpha\beta}$ определяется неравенством

$$\int_0^\infty e^{bx} U_{\alpha\beta}(x) dx < \infty, \quad b < m_{\alpha\beta}.$$

Юкавские потенциалы $U_{\alpha\beta}$ определим следующим образом:

$$U_{\alpha\beta}(x) = \int_{m_{\alpha\beta}}^\infty \sigma_{\alpha\beta}(\mu) \frac{e^{-\mu x}}{x} d\mu,$$

где $\sigma_{\alpha\beta}(\mu)$, — вообще говоря, обобщенные функции.

В общем случае нужно искать такие решения (13.1), асимптотическое поведение которых при больших x имеет вид

$$\psi_\alpha \sim \delta_{\alpha\beta} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{x}}}{x} \cdot f_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f), \quad (13.2)$$

где

$$\mathbf{k}_f = k_f \mathbf{n}, \quad \mathbf{x} = x \mathbf{n}.$$

В выражении (13.2) \mathbf{k}_i и \mathbf{k}_f суть начальный и конечный относительные импульсы сталкивающихся частиц; для них имеем

$$\hbar^2 k_i^2 = 2M_\beta (\mathcal{E} - \mathcal{E}_\beta), \quad \hbar^2 k_f^2 = 2M_\alpha (\mathcal{E} - \mathcal{E}_\alpha).$$

Величина $f_{\alpha\beta}$ является амплитудой рассеяния. Передаваемый импульс определим равенством $\Delta = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$;

тогда для связанного с ним угла рассеяния получим

$$\hbar^2 \Delta^2 = \hbar^2 t = 2\mathcal{E}(M_\alpha + M_\beta) - 2(M_\alpha \mathcal{E}_\alpha + M_\beta \mathcal{E}_\beta) - 4\sqrt{M_\alpha M_\beta (\mathcal{E} - \mathcal{E}_\alpha)(\mathcal{E} - \mathcal{E}_\beta)} \cos \theta. \quad (13.3)$$

Прежде чем детально исследовать полную амплитуду рассеяния, соберем относящуюся сюда информацию о первой и второй борновских аппроксимациях $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $f_{\alpha\beta}^{(1)}$ [35]. Как и в случае одноканальной задачи, амплитуда $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ является функцией только передаваемого импульса

$$f_{\alpha\beta}^{(0)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2M_\beta}{\hbar^2} \int e^{-i\Delta \cdot x} U_{\alpha\beta}(x) d^3x.$$

Для собственно потенциала Юкавы вторая борновская аппроксимация $f_{\alpha\beta}^{(1)}$ может быть вычислена явно. Приведем окончательное выражение для $f_{\alpha\alpha}^{(1)}$ при

$$\sigma_{\alpha\beta}(\mu) = (\hbar^2/2M_\alpha) c_{\alpha\beta} \delta(\mu - m),$$

$$f_{\alpha\alpha}^{(1)}(E, t) = -\frac{4i}{Vt} \sum_{\beta=1}^N M_\beta c_{\alpha\beta}^2 \frac{1}{\sqrt{H_\beta^+ H_\beta^-}} \ln \frac{\sqrt{H_\beta^+} + iz \sqrt{H_\beta^-}}{-\sqrt{H_\beta^+} + iz \sqrt{H_\beta^-}}, \quad (13.4)$$

здесь

$$z = \frac{\sqrt{(4m^2 + t) + 2m}}{\sqrt{t}},$$

$$H_{\alpha\beta}^\pm = \hbar^2 m^2 + 2M_\alpha (\mathcal{E}_\beta - \mathcal{E}_\alpha) + 2(\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\beta)(M_\alpha - M_\beta) \pm \pm i \sqrt{2M_\beta (\mathcal{E} - \mathcal{E}_\beta)(4m^2 + t)}.$$

Из формулы (13.4) нетрудно видеть, что при $M_\alpha > M_\beta$ и $-4m^2 > t > -4m^2(M_\alpha/M_\beta)$

сингулярности амплитуды не будут ограничены только осью действительных значений E . Поэтому маловероятно, что в рассматриваемом случае может быть получено обычное дисперсионное соотношение. Подобные же трудности появляются в анализе методом парциальных волн. Это объясняет, почему большинство исследователей многоканальной задачи с самого

начала принимают, что масса $M_\alpha = M$ и не зависит от α ; мы поступим аналогично.

Положим

$$\frac{2M}{\hbar^2} \mathcal{E}_\alpha = E_\alpha, \quad \frac{2M}{\hbar^2} \mathcal{E} = E, \quad \frac{2M}{\hbar^2} U_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, параметрами уравнений будут служить только две величины E_α и $m_{\alpha\beta}$. В работе [35] полная амплитуда была исследована методом Клейна — Земаха; в результате было получено дисперсионное соотношение вида

$$f_{\alpha\beta}(E, t) = f_{\alpha\beta}^{(0)}(E, t) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} f_{\alpha\beta}(E', t)}{E' - E} dE' \sum_n \frac{C_{\alpha\beta}^{(n)}(t)}{E - E_n} \quad (13.5)$$

при условии, что для всех $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$m_{\alpha\beta}^2 \geq |E_\alpha - E_\beta|, \quad 0 < t \leq t_0(E),$$

$$[m_{\alpha\gamma}^2(E) + E - E_\alpha]^{1/2} + [m_{\beta\delta}^2(E) + E - E_\gamma]^{1/2} > |m_{\alpha\gamma}(E) - m_{\beta\delta}(E)|, \quad (13.6)$$

где

$$m_{\alpha\beta}(E) = m_{\alpha\beta} + (E_\alpha - E)^{1/2} \theta(E_\alpha - E),$$

$$t_0(E) = 2E - E_\alpha - E_\gamma + 2m_{\alpha\gamma}(E) m_{\beta\delta}(E) + 2[m_{\alpha\gamma}^2(E) + E - E_\alpha]^{1/2} [m_{\beta\delta}^2(E) + E - E_\gamma]^{1/2}.$$

Условие на t является непосредственным обобщением условия Кури $t < 4m^2$. Условие же $m_{\alpha\beta}^2 > |E_\alpha - E_\beta|$, является новым. Оно не имеет аналогии в одноканальной задаче, кроме разве что тривиального условия $m_{\alpha\alpha} > 0$. Оно, скорее, является нерелятивистским приближением к условиям стабильности вертекса с внешними массами

$$M_1 = M + \frac{\mathcal{E}_\alpha}{c^2} = M + \frac{\hbar^2 E_\alpha}{2Mc^2},$$

$$M_2 = M + \frac{\mathcal{E}_\beta}{c^2} = M + \frac{\hbar^2 E_\beta}{2Mc^2},$$

$$M_3 = m_{\alpha\beta} \frac{\hbar}{c},$$

которые имеют вид

$$M_1^2 < M_2^2 + M_3^2, \quad M_2^2 < M_1^2 + M_3^2.$$

Эти условия гарантируют отсутствие аномальных порогов в релятивистских фейнмановских амплитудах.

Ограничиваясь юкавскими потенциалами, представление Мандельштама можно было бы получить также из рассуждений гл. 11. Вопрос о необходимом для этого числе вычитаний в работе [35] не обсуждался. Для этого необходимо провести обработку многоканальной задачи методами, основанными на использовании парциальных волн. Это было сделано Ньютоном и Иостом [75] для S -волн, однако только для случая, когда все $E_\alpha = 0$. Они даже восстановили потенциал из S -матрицы, дав, таким образом, обобщение процедуры Гельфанда — Левитана на случай многих каналов. Однако принятая ими модель была слишком простой, чтобы можно было выявить на ней какие-либо новые особенности многоканальной задачи.

Более общим является подход Шарапа и Сквайра [25], которые рассмотрели частицы с произвольными спинами и другими внутренними степенями свободы; при этом спин был функцией индекса канала. Приведем краткое изложение соответствующей теории для бесспиновых частиц; то характерное, что привносит спин в анализ с использованием комплексных угловых моментов, выявится позже. Наоборот, свойства по энергетической переменной в значительной мере не зависят от наличия спина. Система уравнений для парциальных волн, следующая из уравнения (13.1), имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_\alpha + (E - E_\alpha) \psi_\alpha - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} \psi_\alpha - \sum_{\beta=1}^N V_{\alpha\beta}(x) \psi_\beta = 0, \\ k_\alpha^2 = E - E_\alpha, \quad k^2 = E. \quad (13.7)$$

Возьмем для нее две системы фундаментальных решений: регулярную систему решений $\Phi_{\alpha\beta}$ с граничным условием при $x=0$

$$\Phi_{\alpha\beta}(\lambda, E, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \delta_{\alpha\beta} x^{\lambda+1/2} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N)$$

и систему решений Иоста $f_{\alpha\beta}^{\pm}(\lambda, E, x)$ с граничными условиями

$$f_{\alpha\beta}^{\pm}(\lambda, E, x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \delta_{\alpha\beta} e^{\mp ik_{\alpha} x} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N).$$

Эти функции образуют полный $2N$ -мерный базис для всех решений (13.7). В дальнейшем для $f^{\pm}(\lambda, E, x)$ мы будем пользоваться матрицами $f^{\pm}(\lambda, E, x)$ и $\varphi(\lambda, E, x)$. Можно показать, что если A, B — любые два матричные решения уравнения (13.7) с одним и тем же числом строк, то вронскиан $W(A, B)$, определяемый как

$$W(A, B) = A^T \frac{dB}{dx} - \frac{dA^T}{dx} B$$

(T означает транспонирование), является матрицей, не зависящей от x . Соответственно функцию Иоста определим равенством

$$f^{\pm}(\lambda, E) = [W(\varphi, f^{\pm})]^T. \quad (13.8)$$

Функция Иоста будет теперь квадратной $N \times N$ -матрицей. Далее имеем

$$W(f^+, f^-) = 2iK, \quad (13.9)$$

где K — матрица с элементами $K_{\alpha\beta} = k_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}$.

Поскольку $f^{\pm}(\lambda, E, x)$ образуют полную систему функций, то

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda, E, x) &= f^+(\lambda, E, x) A(\lambda, E) + \\ &+ f^-(\lambda, E, x) B(\lambda, E), \end{aligned} \quad (13.10)$$

где A и B суть $N \times N$ -матрицы. Используя соотношения (13.8) и (13.10), получаем

$$\begin{aligned} f^{+T}(\lambda, E) &= W(\varphi, f^+) = W(f^+ A + f^- B, f^+) = \\ &= B^T f^{-T} \frac{df^+}{dx} - B^T \frac{df^{-T}}{dx} f^+ = B^T W(f^-, f) = -2iB^T K, \end{aligned}$$

или $f^+ = -2iKB$. Аналогично $f^- = 2iKA$. Следовательно,

$$\varphi(\lambda, E, x) = \frac{1}{2i} [f^+(\lambda, E, x)K^{-1}f^-(\lambda, E) - f^-(\lambda, E, x)K^{-1}f^+(\lambda, E)]. \quad (13.11)$$

Из формулы (13.11) непосредственно видно, что асимптотика $\varphi(\lambda, E, x)$ при больших x будет иметь вид

$$\varphi_{\alpha\beta}(\lambda, E, x) \sim \frac{1}{2ik_\alpha} [e^{-ik_\alpha x} f_{\alpha\beta}^-(\lambda, E) - e^{ik_\alpha x} f_{\alpha\beta}^+(\lambda, E)].$$

Поэтому функция

$$\chi = 2iK\varphi(\lambda, E, x) [f^-(\lambda, E)]^{-1}$$

ведет себя при больших x как

$$\chi_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta} e^{-ik_\alpha x} - e^{ik_\alpha x} f^+(\lambda, E) [f^-(\lambda, E)]^{-1}.$$

Тогда для S -матрицы имеем

$$S = f^+(\lambda, E) [f^-(\lambda, E)]^{-1} e^{i\pi(\lambda-1/2)}.$$

Само собой разумеется, что все приведенные определения совершенно формальны и их нужно дополнить более строгими рассмотрениями с помощью теории интегральных уравнений, причем можно почти дословно повторить всю теорию для одного канала. Скаляры нужно заменить при этом на соответствующие матрицы. Такой подход позволяет легко найти аналитические свойства по интересующим нас переменным.

В одноканальной задаче очень удобно использовать в качестве переменной величину k , так как соответствующие амплитуды не имеют при этом кинематических сингулярностей, и остается исследовать только динамические сингулярности. В многоканальной же задаче нет оснований считать k привилегированной переменной, так как порог $k=0$ нужно рассматривать в этом случае наравне с другими возможными порогами. Соответственно сказанному находим, что матричная функция Иоста как функция E имеет на каждом пороге E_α особенность, подобную той, ко-

торая в случае одного канала была при $E=0$. Каждую такую сингулярность можно локально исключить, беря в качестве переменной k_α . Подобным образом нельзя, однако, добиться общей униформизации амплитуды. В силу сказанного обсуждение свойств амплитуды на нефизических листах сильно усложняется. Подобные трудности возникают при изучении полной амплитуды рассеяния, для которой было получено дисперсионное соотношение (13.5). Из (13.5) видно, что амплитуда имеет разрез, начинающийся от самого низкого порога $E=0$. В действительности же мы имеем дело с целой суперпозицией разрезов, начинающихся на каждом пороге.

Рассмотрение связанных состояний и резонансов можно провести так же, как и в случае одного канала. Если для некоторого E_0 функция f принимает нулевое собственное значение, то матричные элементы S будут сингулярными при $E=E_0$. При $\text{Im } k > 0$ соответствующая волновая функция будет интегрируемой. Она представляет связанное состояние с отрицательной энергией. Несколько неожиданным для многоканальной задачи является появление стабильных связанных состояний, расположенных выше и ниже порога $E=0$ и лежащих в сплошном спектре [34, 36].

Возвращаясь к рассмотрению комплексного углового момента, отметим здесь то новое, что привносит в теорию внутренних спин сталкивающихся частиц [20]. Удобной переменной в этом случае будет полный угловой момент $J=S+L$, ибо L не является больше интегралом движения. Любой элемент S -матрицы будет аналитичен при $\text{Re } J > L_0 + S$, где L_0 — некоторая константа, зависящая от потенциалов $V_{\alpha\beta}$, а S — максимальный спин. Грубо говоря, сингулярности как бы производятся на плоскости L , а затем переносятся при добавлении спина на плоскость J . В теорию входит аналитическое продолжение коэффициентов Клебша—Гордана на комплексные значения индексов.

Гелл-Манн [41, 42] отметил, что в многоканальной задаче в пренебрежении случайным вырождением собственное значение имеет сравнительно простую структуру. Если S -матрица имеет простой полюс при

$J=J_0(E)$ как функция J (можно, однако, говорить также о переменной E), то в окрестности такого полюса имеем

$$S_{\alpha\beta}(J, E) \approx \frac{\gamma_\alpha(E) \gamma_\beta(E)}{J - J_0(E)}.$$

Полученный простой результат имеет важные приложения в физике высоких энергий, где с его помощью выводятся интегральные соотношения между эффективными сечениями различных процессов.

Примером, позволяющим понять многие особенности задачи рассеяния частиц со спином, является рассеяние двух частиц со спином $1/2$ при нецентральной потенциале

$$V(\sigma_1, \sigma_2; \mathbf{x}) = V_d(\mathbf{x}) + V_\sigma(\mathbf{x}) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \\ + V_T(\mathbf{x}) S_{12} + V_0(\mathbf{x}) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}, \\ \mathbf{S} = \sigma_1 + \sigma_2, \quad S_{12} = \frac{3(\sigma_1 \cdot \mathbf{x}_1)(\sigma_2 \cdot \mathbf{x}_2) - (\sigma_1 \cdot \sigma_2) x^2}{x^2}.$$

Уравнение Шредингера можно свести к уравнениям для парциальных волн. Синглетные состояния $J=L$ не смешиваются с другими состояниями и описываются поэтому одноканальной теорией. Состояния $L=J-1$ и $L=J+1$, наоборот, связаны тензорными силами, и система уравнений для них имеет вид [101]

$$u_J''(x) + \left[k^2 - \frac{J(J-1)}{x^2} - V_c(x) - (J-1)V_0(x) - \right. \\ \left. - \frac{2(J-1)}{2J+1} V_T(x) \right] u_J = - \frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_T(x) v_J(x), \\ v_J''(x) + \left[k^2 - \frac{(J+1)(J+2)}{x^2} - V_c(x) + (J+2)V_0(x) + \right. \\ \left. + \frac{2J+2}{2J+1} V_T(x) \right] v_J(x) = - \frac{6\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} V_T(x) u_J(x),$$

где $V_c = V_d + V_\sigma$. Когда тензорные силы отсутствуют, приведенная система уравнений распадается и соответствующие функции Йоста становятся аналитиче-

скими при $\text{Re}(J-1) > -1/2$ и $\text{Re}(J+1) > -1/2$ при тех же допущениях (3.2), что и в случае одного канала. Таким образом, процедуры спинового сдвига плоскости L в плоскость J очевидны.

Предположим теперь, что величины V_c и V_0 таковы, что отдельно появляются две траектории $J=J_1(E)$ и $J=J_2(E)$ для u_J и v_J при $V_T=0$. Разумеется, что при $J=0$ канал u_J становится бессмысленным, так как в этом случае $L=-1$. Поэтому, если траектория $J=J_1(E)$ пересекает прямую $J=0$, это не ведет ни к связанным состояниям, ни к резонансам; не будет также никакого вклада в полную амплитуду рассеяния. По известной теории (см. [10]) амплитуда рассеяния для частиц со спином имеет следующий общий вид:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{ik} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{l, l'=|J-S|}^{J+S} \sqrt{2l+1} i^{l-l'} (S_{ll'}^J - 1) C_{lS}(J, M; O, M) \mathcal{Y}_{Jl'S}^M,$$

где $C_{lS}(J, M; O, M)$ — коэффициенты Клебша — Гордана (см. [10], приложение А), $\mathcal{Y}_{Jl'S}^M$ — нормированные собственные функции переменных J, l', S, M ,

$$\mathcal{Y}_{Jl'S}^M = \sum_{m=-l'}^{l'} \sum_{m'=-S}^S C_{l'S}(J, M; m, m') \chi_S^m Y_{l'}^m(\vartheta, \varphi).$$

Здесь χ_S^m — спиновая собственная функция. В нашем частном случае вклад члена $(S_{J-1, J-1}^J - 1)$ в амплитуду $M=0, S=1$ будет равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ik} \sum_{J=0}^{\infty} & \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \sin \vartheta P'_{J-1}(\cos \vartheta) \chi_1^1 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \sin \vartheta P'_{J-1}(\cos \vartheta) \chi_1^{-1} + \right. \\ & \left. + JP_J(\cos \vartheta) \chi_1^0 \right] (S_{J-1, J-1}^J - 1). \end{aligned}$$

Допуская, что можно провести W -преобразование и что существует только траектория $J=J_1(E)$, вклад от

полюса $J_1(E)$ можно представить в виде

$$\frac{i\pi}{2k} \frac{\beta(E)}{\sin \pi J_1} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \sin \vartheta \frac{d}{d \cos \vartheta} P_{J_1-1}(-\cos \vartheta) \times \right. \\ \left. \times (e^{-i\varphi} \chi_1^1 - e^{i\varphi} \chi_1^{-1}) + J_1 P_{J_1}(-\cos \vartheta) \chi_1^0 \right];$$

ясно, что этот вклад при $J_1(E)=0$ еще остается конечным, так как и $P'_{J_1-1}(-\cos \vartheta)$, и $J_1 P_{J_1-1}(-\cos \vartheta)$ имеют только простые нули.

Включим теперь тензорные силы, связывающие каналы u и v . Траектории $J_1(E)$ и $J_2(E)$ изменятся, но интересно, что в пределе при $J \rightarrow 0$ недиагональные матричные элементы тензорных сил исчезают, и каналы опять становятся фактически независимыми. При $J=0$ только канал v входит в амплитуду рассеяния; бессмысленный канал u выпадает. Наличие влияния бессмысленных каналов при $J=0$ составляет особенность систем со спином в случае, когда для J, L, S нарушается неравенство треугольника $L+S > J \geq \geq |L-S|$, которому подчиняется векторное сложение угловых моментов. Тем не менее, как было продемонстрировано на частных примерах в [41, 42], бессмысленные каналы всегда можно отделить.

Изложенный метод очень удобен для объяснения того, почему в релятивистской теории отсутствуют нежелательные «частицы-духи», однако подробное обсуждение этого вопроса выходит за рамки настоящей книги.

§ 2. Сингулярные потенциалы

Условия (3.2), а именно

$$\int_c^\infty |V(x)| dx < \infty, \quad \int_0^{c'} x |V(x)| dx < \infty,$$

оказываются часто слишком узкими, так как они не выполняются для кулоновского потенциала и потенциала с непроницаемой сердцевиной. Но, как это ни парадоксально, именно эти два потенциала наиболее широко используются в феноменологической теории атомных и ядерных процессов.

Приведем обзор имеющихся результатов для случаев, когда условия (3.2) не выполняются. Задача рассеяния на чисто кулоновском потенциале $U(x) = -e^2/x$ решается, конечно, до конца; для нее могут быть записаны явно амплитуда рассеяния и волновая функция. Сингх [94] провел анализ плоскости комплексного углового момента для этого случая. Литература по кулоновскому потенциалу настолько известна, что мы приведем только основные формулы.

Трехмерная волновая функция равна

$$\Psi(x, \vartheta) = e^{(\pi/2)\gamma} \Gamma(1 - i\gamma) e^{ikx \cos \vartheta} {}_1F_1(i\gamma, 1; ik\zeta),$$

где $\gamma = Me^2/\hbar^2 k$, $\zeta = x(1 - \cos \vartheta)$ и ${}_1F_1$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция, определяемая рядами Куммара [7]. При больших x

$$\begin{aligned} \Psi(x, \vartheta) \sim 1 - \frac{\gamma^2}{ikx(1 - \cos \vartheta)} \exp \times \\ \times \{ ikx \cos \vartheta - i\gamma \ln [kx(1 - \cos \vartheta)] \} + \\ + \frac{1}{x} \exp(ikx + i\gamma \ln kx), \end{aligned}$$

причем амплитуда рассеяния $F(k, \cos \vartheta)$ дается выражением

$$\begin{aligned} F(k, \cos \vartheta) = \\ = -\frac{\gamma}{2k} \frac{1}{\sin^2 \vartheta/2} \exp [i\gamma \ln (1 - \cos \vartheta) + i\pi] \frac{\Gamma(1 - i\gamma)}{\Gamma(1 + i\gamma)}. \end{aligned}$$

Регулярная парциальная волновая функция равна

$$\varphi_l(x) = x^{l+1} e^{ikx} {}_1F_1(-i\gamma + l + 1, 2l + 2; -2ikx),$$

причем асимптотическое поведение ее при больших x имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_l(x) \sim e^{-(\pi/2)\gamma} \frac{\Gamma(2l + 2)}{|\Gamma(l + 1 - i\gamma)|} 2^{-l} k^{-l-1} \sin \times \\ \times \left(kx - l \frac{\pi}{2} + \eta_l + \gamma \ln 2kx \right), \end{aligned}$$

$$\eta_l = \arg \Gamma(l + 1 - i\gamma).$$

Если

$$l = -n - 1 + i \frac{Me^2}{\hbar^2 k}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (13.12)$$

то функция $\varphi_l(x)$ имеет в асимптотике только расходящуюся волну

$$\varphi_l(x) \sim \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\gamma)} (2ik)^{-l-1+i\gamma} x^{i\gamma} e^{ikx}.$$

Примем (13.12) за определение траектории полюса. Нетрудно узнать в (13.12) старую боровскую формулу для уровней энергии атома водорода.

Корниль и Мартин [105] рассмотрели класс потенциалов, которые асимптотически ведут себя как кулоновский потенциал и вместе с тем являются юкавскими при $m=0$. Наиболее существенным моментом является то, что для них нет последовательности разрезов, имеющей место в методе Мартина (гл. 6) для парциальных волн и для амплитуды рассеяния (гл. 11, § 2). Вклады высоких порядков теории возмущений не ведут поэтому к сингулярностям, сдвигающимся все дальше и дальше с увеличением порядка. Начало $k=0$ является в этом случае точкой сгущения сингулярностей и, вообще говоря, существенно особой точкой амплитуды. В окрестности существенно особой точки мероморфная функция может принимать бесконечное число раз одно и то же значение; отсюда амплитуда рассеяния может иметь на k -плоскости вблизи $k=0$ бесконечное число полюсов (связанных состояний). Это следует также и из формулы для кулоновского потенциала. Бесконечное число связанных состояний не запрещается неравенством Баргмана,

так как интеграл $\int_0^{\infty} x W(x) dx$ стал расходящимся.

В потенциале вида $U(x) = (e^2/x) + U_Y(x)$ юкавскую часть $U_Y(x)$ можно рассматривать как возмущение для кулоновской части. Кулоновские сингулярности становятся кинематическими, и асимптотика регулярного решения принимает вид

$$\varphi(x) \sim C \sin \left(kx - l \frac{\pi}{2} + \eta_l + \delta_l + \gamma \lg 2kx \right);$$

теперь S -матрицу можно определить следующим образом:

$$S(\lambda, k) = e^{2i\delta_l(k)} e^{i\pi(\lambda-1/2)}.$$

Корниль и Мартин показали, что функция $S(\lambda, k)$ имеет в этом случае динамический разрез, зависящий от U_Y .

Для S -волн имеем формулу обобщенного эффективного радиуса для области $k \approx 0$

$$\frac{2\pi\gamma}{1 - e^{-2\pi\gamma}} k \operatorname{ctg} \delta + \frac{2Me^2}{\hbar^2} h(-\gamma) = z_0 + z_1 E + \dots,$$

в которой

$$h(\gamma) = \frac{1}{2} [\psi(i\gamma) + \psi(-i\gamma) - 2 \ln \gamma],$$

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Пока не ясно, доказаны ли дисперсионные соотношения для потенциала Корниля — Мартина.

Условие (3.2) не выполняется при малых x для сингулярных потенциалов с непроницаемой сердцевиной, используемых в ядерной физике низких энергий. Литература по этому классу потенциалов довольно отрывочна. Никто не пытался изучать для них амплитуду рассеяния. Тем не менее интересно было бы рассмотреть сингулярные потенциалы, для которых произведение $x^n V(x)$ становится неограниченным при $n > 2$ и $x \rightarrow 0$. При $x=0$ для таких потенциалов, наоборот, нужно сохранить $V(x)$ и пренебречь центробежным числом.

Таким образом, все сказанное в гл. 3 относительно регулярного решения $\phi(\lambda, k, x)$ перестает быть справедливым. Точка $x=0$ становится существенно особой точкой уравнения Шредингера. Наложив (правда, только в вещественной области) при $x=0$ некоторые довольно искусственные условия, Предацци и Редже [86] сумели исследовать ситуацию при $x=0$ для потенциала $V(x)$, ведущего себя при $x \rightarrow 0$ как $A^2/x^4 + B/x^3$. Лимич [63] рассмотрел более широкий класс потенциалов, аналитических при $x = \operatorname{Re} z > 0$. В работе [86] регулярное решение было взято по-новому, а именно с граничным условием

$$\Phi(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} N x^{1+B/2A} e^{-A/x}.$$

В работе [63] граничное условие было взято в виде

$$\Phi(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} N[V(x)]^{-1/2} \exp \left\{ - \int_x |V(x')|^{1/2} dx' \right\}.$$

Поскольку в эти граничные условия не входит λ , то по обобщенной теореме Пуанкаре (теорема 7 гл. 2) Φ является целой функцией λ^2 . Решение Иоста можно определить с помощью того же интегрального уравнения (4.8). Новая функция Иоста определится равенством

$$G(\lambda, k) = W[\Phi(\lambda, k, x), f(\lambda, k, x)],$$

где функция $G(\lambda, k)$, конечно, четна по λ . Так как S -матрица дается выражением

$$S(\lambda, k) = \frac{G(\lambda, k)}{G(\lambda, -k)} e^{i\pi(\lambda - 1/2)},$$

то приходим к неожиданному результату, что

$$S(\lambda, k) e^{-i\pi\lambda} = S(-\lambda, k) e^{i\pi\lambda}. \quad (13.13)$$

Формально этот результат является не чем иным, как тождеством (5.14), взятым при $F \rightarrow \infty$. Симметрия равенства (13.13) позволяет продолжить $S(\lambda, k)$ в левую часть плоскости λ , для которой ничего не известно относительно обычных потенциалов. При этом нам приходится мириться с тем, что асимптотическое поведение амплитуды при больших x становится очень сложным, так как имеется бесконечное число полюсов с точкой сгущения на бесконечности. Функция $G(\lambda, k)$ является целой функцией λ , и точка $\lambda = \infty$ для нее — существенно особая точка. Как показали Жакшич и Лимич [50], для потенциалов, аналитических при $x = \operatorname{Re} z > 0$, функцию $G(\lambda, k)$ можно представить в следующем виде:

$$G(\lambda, \pm k) = G(0, \pm k) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2(\pm k)} \right],$$

откуда

$$S(\lambda, k) = e^{i\pi\lambda} S(0, k) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda^2/\lambda_n^2(k)}{1 - \lambda^2/\lambda_n^2(-k)},$$

где $\lambda_n^*(k) = \lambda_n(-k^*)$.

Для потенциала, сингулярного в нуле, аналитического при $x = \operatorname{Re} z > 0$ и ведущего себя на бесконечности как $V_0 z^{-p-1} \exp(-mz)$ вдоль любого луча $x > 0$, Жакшич и Лимич [50] для сдвигов фаз получили асимптотическое поведение при больших λ и $|\arg \lambda| < \pi/2$

$$\delta(\lambda, k) \sim -\frac{V_0}{2k} \left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^{1/2} (\operatorname{sh} \alpha)^{-1/2} \left(\frac{k^2}{m\lambda} \operatorname{sh} \alpha\right)^p e^{-\lambda\alpha} \left[1 + O\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

где

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{m^2}{2k^2}.$$

Согласно этому результату, фазы в указанной области ведут себя как первое борновское приближение для регуляризованного в нуле потенциала. Они определяются поведением потенциала исключительно при больших x . Вдоль мнимой оси, согласно равенству (13.13), имеем совершенно точный результат

$$|S(\lambda, k)| = e^{-p\pi}, \quad \lambda = ip.$$

По-прежнему можно применить \mathcal{W} -преобразование, однако вопрос о сходимости получающегося при этом разложения остается открытым. Известно, что целая функция нецелого порядка всегда имеет бесконечное число нулей. Поэтому в \mathcal{W} -преобразовании, помимо основного интеграла, имеется также бесконечный ряд полюсных членов, которые пока еще исчерпывающим образом не изучены. Интересной особенностью сингулярных потенциалов является то, что в силу соотношения симметрии основной интеграл обращается в нуль в \mathcal{W} -преобразовании, возникающем при выводе обычных дисперсионных соотношений (гл. 10, § 7),

$$f(E, t) = -\frac{1}{2k} \int_C \lambda \frac{P_{\lambda-1/2}(\cos \vartheta)}{\cos \pi\lambda} e^{-i\pi(\lambda+1/2)} [S(\lambda, k) - 1] d\lambda.$$

Окончательный результат имеет вид формулы Брейта — Вигнера с бесконечным числом уровней. Ничего неизвестно относительно сходимости этого формаль-

ного разложения для других сингулярных потенциалов.

Довольно любопытно, что исторически именно сингулярные потенциалы были изучены первыми в связи с задачей распространения волн вокруг Земли [79, 84, 104, 96]. В этой задаче $V(x)$ — по существу потенциал с непроницаемой сердцевиной, т. е. $V(x) = \infty$ для $x < R$, где R — радиус Земли. Получающийся ряд полюсных членов сходится при больших x очень быстро, однако не известно, удастся ли эти результаты применить в ядерной физике.

Наконец, из приведенного выше граничного условия для $\Phi(\lambda, k, x)$

$$\varphi(\lambda, k, x) \sim e^{-2A/n-2} x^{n-2/2}$$

ясно видно, что Φ не является более аналитической функцией константы связи A^2 , как это было для $\varphi(\lambda, k, x)$. Можно ожидать, что подобная ситуация возникнет в теории поля. Этот вопрос исследуется в настоящее время с помощью так называемой ператизационной техники [59, 81, 98].

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Выведем неравенства, которым подчиняются ядра $G(\lambda, k, x, y)$ и $B(\lambda, k, x, y)$, входящие в формулы (3.29) и (4.3) [76, 62]. Напомним, что

$$\begin{aligned}\varphi_0(\lambda, k, x) &= 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) k^{-\lambda} x^{1/2} J_\lambda(kx), \\ f_0(\lambda, k, x) &= \left(\frac{\pi k x}{2}\right)^{1/2} e^{-i(\pi/2)(\lambda+1/2)} H_\lambda^{(2)}(kx)\end{aligned}$$

являются решениями уравнения

$$U'' + k^2 U - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2} U = 0$$

с граничными условиями .

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-\lambda-1/2} \varphi_0(\lambda, k, x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{ikx} f_0(\lambda, k, x) = 1$$

соответственно. Здесь $J_\lambda(kx)$ — функция Бесселя первого рода и $H_\lambda^{(2)}(kx)$ — функция Ганкеля второго рода [8]. Легко проверить, что

$$\begin{aligned}\varphi_0(\lambda, k, x) &= k^{-\lambda-1/2} \varphi_0(\lambda, 1, kx), \\ f_0(\lambda, k, x) &= f_0(\lambda, 1, kx).\end{aligned}\tag{I.1}$$

Соответственно граничным условиям, которым удовлетворяет $\varphi_0(\lambda, 1, z)$, существует положительное, число C_0 , зависящее только от λ , такое, что

$$|\varphi_0(\lambda, 1, z)| e^{-|\operatorname{Im} z|} < \left(\frac{1}{2} C_0 |z|\right)^{\mu+1/2} \quad \text{при } |z| < 1,$$

$$|\varphi_0(\lambda, 1, z)| e^{-|\operatorname{Im} z|} < \left(\frac{1}{2} C_0\right)^{\mu+1/2} \quad \text{при } |z| > 1,$$

где $\mu = \operatorname{Re} \lambda$, при этом $\left| \arg z + \frac{\pi}{2} \right| < \pi$. Ясно, что

$$\left(\frac{1}{2} C_0 \right)^{\mu+1/2} < \left(\frac{C_0 |z|}{1+|z|} \right)^{\mu+1/2} \quad \text{при } |z| > 1,$$

$$\left(\frac{1}{2} C_0 |z| \right)^{\mu+1/2} < \left(\frac{C_0 |z|}{1+|z|} \right)^{\mu+1/2} \quad \text{при } |z| < 1.$$

и, следовательно,

$$|\varphi_0(\lambda, 1, z)| e^{-|\operatorname{Im} z|} < \left(\frac{C_0 |z|}{1+|z|} \right)^{\mu+1/2}.$$

Отсюда с помощью первой из формул (I.1) получаем

$$|\varphi_0(\lambda, k, x)| e^{-|b|x} < \left(\frac{C_0 x}{1+|k|x} \right)^{\mu+1/2}, \quad (\text{I.2})$$

где $b = \operatorname{Im} k$. Аналогичным образом можно показать существование такой величины $C_1(\lambda)$, что

$$|f_0(\lambda, 1, z)| e^{-\operatorname{Im} z} < (C_1 |z|)^{-|\mu|+1/2} \quad \text{при } |z| < 1$$

и

$$|f_0(\lambda, 1, z)| e^{-\operatorname{Im} z} < C_1^{-|\mu|+1/2} \quad \text{при } |z| > 1,$$

если только $|\arg z + \pi/2| < \pi$. Из сказанного следует, что

$$|f_0(\lambda, k, x)| e^{-bx} < \left(\frac{C_1 |k|x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2}. \quad (\text{I.3})$$

Вспоминая далее, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(-\lambda, k, x) &= \\ &= \frac{1}{f_0(\lambda, k)} [2\lambda f_0(\lambda, k, x) + f_0(-\lambda, k) \varphi_0(\lambda, k, x)], \end{aligned}$$

где

$$f_0(\lambda, k) = 2^{\lambda+1/2} \pi^{-1/2} \Gamma(\lambda+1) k^{-\lambda+1/2} e^{-i(\pi/2)(\lambda-1/2)},$$

получаем формулу

$$\begin{aligned} G(\lambda, k, x, y) &= \\ &= \frac{1}{f_0(\lambda, k)} [\varphi_0(\lambda, k, x) f_0(\lambda, k, y) - \varphi_0(\lambda, k, y) f_0(\lambda, k, x)]. \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Аналогичная формула получается при замене k на $-k$, поскольку G четно относительно k . Без потери общности мы ограничимся рассмотрением только случая $\mu > 0$, $\text{Im } k = b < 0$. Используем очевидное неравенство

$$|f_0(\lambda, k)|^{-1} < A |k|^{\mu-1/2}, \quad \left| \arg k + \frac{\pi}{2} \right| < \pi,$$

где A , как и остальные постоянные в данном рассмотрении, зависит от λ .

Из соотношений (I.4), (I.2) и (I.3) получаем искомое неравенство

$$|G(\lambda, k, x, y)| < \\ < C(\lambda) e^{|\lambda| |x-y| |b|} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{|\mu|+1/2} \left(\frac{y}{1+|k|y} \right)^{-|\mu|+1/2}.$$

Здесь C — некоторая постоянная, фактическая величина которой несущественна для анализа уравнения (3.29).

Ядро B формально эквивалентно ядру G с тем только отличием, что переменные входят в него в другой комбинации. Основываясь на предыдущих результатах, нетрудно получить довольно слабое неравенство

$$|B(\lambda, k, x, y)| < \\ < C e^{|\lambda| |y+bx|} \left(\frac{y}{1+|k|y} \right)^{|\mu|+1/2} \left(\frac{x}{1+|k|x} \right)^{-|\mu|+1/2},$$

которое, однако, достаточно для рассмотрения уравнения (4.3).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Всю теорию потенциального рассеяния можно в принципе получить, исходя из интегральных уравнений фредгольмовского типа для волновой функции. В настоящем приложении мы выведем это уравнение.

Рассматриваемый подход пригоден для всех дифференциальных уравнений вида

$$\Phi''(x) + J(x)\Phi(x) = \Delta J(x)\Phi(x), \quad (\text{II.1})$$

для которых предполагаются известными решения невозмущенного уравнения

$$\Phi_0'' + J\Phi_0 = 0. \quad (\text{II.2})$$

Для определенности возьмем интервал $0 \leq x \leq \infty$. Пусть двумя известными решениями (II.2) являются функции $A(x)$ и $B(x)$, которые мы будем считать нормированными так, что $A(x)B'(x) - A'(x)B(x) = W(A, B) = 1$. Так же как при рассмотрении уравнений Вольтерра, воспользуемся подстановкой

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \alpha(x)A(x) + \beta(x)B(x), \\ 0 &= \alpha'(x)A(x) + \beta'(x)B(x), \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

отсюда

$$\Phi'(x) = \alpha A' + \beta B'.$$

Из (II.1) и (II.3) получаем

$$\begin{aligned} \Phi'' &= \alpha' A' + \beta' B' + \alpha A'' + \beta B'' = \alpha' A' + \beta' B' - \\ &\quad - J(\alpha A + \beta B) = (\Delta J - J)\Phi. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения и из (II.1) следует, что

$$\alpha' A' + \beta' B' = \Delta J \Phi.$$

Решая это уравнение вместе со вторым из соотношений (II.3) относительно $\alpha' \beta'$, находим

$$\alpha' = -\Delta J B \Phi, \quad \beta' = \Delta J A \Phi.$$

До настоящего пункта мы не отходили от обычной для уравнений Вольтерра схемы. Однако далее мы положим $\alpha(\infty) = a$, $\beta(0) = b$ и соответственно

$$\alpha(x) = a + \int_x^{\infty} \Delta J(y) B(y) \Phi(y) dy,$$

$$\beta(x) = b + \int_0^x \Delta J(y) A(y) \Phi(y) dy.$$

В силу (II.3) имеем

$$\Phi(x) = aA(x) + bB(x) + \int_0^{\infty} B(x_>) A(x_<) \Delta J(y) \Phi(y) dy, \quad (II.4)$$

$$x_> = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}|x-y|,$$

$$x_< = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}|x-y|.$$

Формула (II.4) применима в разнообразных случаях при надлежащем выборе A , B , a , b , J и ΔJ . Приведенный вывод является, конечно, чисто формальным и не дает никаких гарантий, что уравнение (II.4) действительно имеет решения. Формула (8.19) соответствует выбору

$$A = \left(\frac{\pi k x}{2}\right)^{1/2} J_{\lambda}(kx), \quad B = -i \left(\frac{\pi x}{2k}\right)^{1/2} H_{\lambda}^{(1)}(kx),$$

$$a = 1, \quad b = 0,$$

$$J = k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad \Delta J = V(x),$$

а формула (8.25) — выбору

$$A = -\sqrt{x} I_{\lambda}(kx), \quad B = \sqrt{x} K_{\lambda}(kx),$$

$$a = 0, \quad b = \exp\left\{-\frac{1}{2}i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \left(\frac{k}{2}\right)^{\lambda} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)},$$

$$J = -k^2 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad \Delta J = -V(ix).$$

Ядро уравнения (II.4) называется функцией Грина.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Обсудим подробно формальные свойства уравнения Липпмана — Швингера для парциальных волн. Определим в соответствии с [18] для вещественных k , k' амплитуду вне энергетической поверхности

$$T^{\pm}(\lambda, k', k) = -\frac{1}{k} \left(\frac{\pi k'}{2}\right)^{1/2} \times \\ \times \int_0^{\infty} J_{\lambda}(k'x) \psi^{\pm}(\lambda, k, x) V(x) x^{1/2} dx, \quad (\text{III.1})$$

где функции $\psi^{\pm}(\lambda, k, x)$ подчиняются интегральным уравнениям

$$\psi^{\pm}(\lambda, k, x) = \left(\frac{\pi kx}{2}\right)^{1/2} J_{\lambda}(kx) + \\ + \int_0^{\infty} K^{\pm}(\lambda, k, x, x') V(x') \psi^{\pm}(\lambda, k, x') dx' \quad (\text{III.2})$$

с ядрами

$$K^{\pm}(\lambda, k, x, x') = \mp i \frac{\pi}{2} (xx')^{1/2} H_{\lambda}^{(1,2)}(kx_{>}) J_{\lambda}(kx_{<}), \quad (\text{III.3})$$

$$x_{>} = \frac{x+x'}{2} + \frac{|x-x'|}{2},$$

$$x_{<} = \frac{x+x'}{2} - \frac{|x-x'|}{2}.$$

Мы предполагаем при этом, что $\text{Re } \lambda > 0$.

Обычная амплитуда рассеяния получается из $T^{\pm}(\lambda, k, k')$ на энергетической поверхности, т. е. при $k=k'$. Установим строго эту связь между амплитудами. Так как функции $\psi^{\pm}(\lambda, k, x)$ (см. приложение II) удовлетворяют уравнению Шредингера и так как они регулярны при $x=0$, то

$$\psi^{\pm}(\lambda, k, x) = C^{\pm} \varphi(\lambda, k, x),$$

где C^\pm не зависят от x . Найдем эти коэффициенты пропорциональности. Поскольку

$$f_0(\lambda, k, x) = \left(\frac{\pi k x}{2}\right)^{1/2} \exp\left[-i \frac{\pi}{2} \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\right] H_\lambda^{(2)}(kx),$$

$$f_0(\lambda, -k, x) = \left(\frac{\pi k x}{2}\right)^{1/2} \exp\left[i \frac{\pi}{2} \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\right] H_\lambda^{(1)}(kx),$$

$$\varphi_0(\lambda, k, x) = \left(\frac{2}{k}\right)^\lambda \Gamma(\lambda + 1) x^{1/2} J_\lambda(kx),$$

$$\begin{aligned} f_0(\lambda, k) &= \\ &= 2^\lambda \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma(\lambda + 1) k^{-\lambda+1/2} \exp\left[-i \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_0(\lambda, -k) &= \\ &= 2^\lambda \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma(\lambda + 1) k^{-\lambda+1/2} \exp\left[i \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

то уравнения для ψ^\pm можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi^+(\lambda, k, x) &= \frac{1}{f_0(\lambda, -k)} \left\{ k \exp\left[i \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right] \varphi_0(\lambda, k, x) - \right. \\ &\left. - \int_0^\infty f_0(\lambda, -k, x_>) \varphi_0(\lambda, k, x_<) V(x') \psi^+(\lambda, k, x') dx' \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

$$\begin{aligned} \psi^-(\lambda, k, x) &= \frac{1}{f_0(\lambda, k)} \left\{ k \exp\left[-i \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right] \varphi_0(\lambda, k, x) - \right. \\ &\left. - \int_0^\infty f_0(\lambda, k, x_>) \varphi_0(\lambda, k, x_<) V(x') \psi^-(\lambda, k, x') dx' \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

Для нахождения C^+ рассмотрим поведение $\psi^+(\lambda, k, x)$ при $x \rightarrow 0$

$$f_0(\lambda, -k)\psi^+(\lambda, k, x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \varphi_0(\lambda, k, x) \times \\ \times \left\{ k \exp \left[i \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} f_0(\lambda, -k, x') V(x') \psi^+(\lambda, k, x') dx' \right\}.$$

Но так как из последних формул гл. 5 § 2 следует, что

$$f(\lambda, -k) = f_0(\lambda, -k) + \\ + \int_0^{\infty} f_0(\lambda, -k, x) \varphi(\lambda, k, x) V(x) dx,$$

то приходим к соотношению

$$C^+ f(\lambda, -k) = k \exp \left[i \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \right].$$

Следовательно,

$$\psi^+(\lambda, k, x) = \frac{k \exp [i\pi/2 (\lambda - 1/2)]}{f(\lambda, -k)} \varphi(\lambda, k, x).$$

Аналогичным образом можно получить

$$\psi^-(\lambda, k, x) = \frac{k \exp [-i\pi/2 (\lambda - 1/2)]}{f(\lambda, k)} \varphi(\lambda, k, x),$$

так что

$$T^+(\lambda, k', k) f(\lambda, -k) \exp \left\{ -i \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \right\} = \\ = T^-(\lambda, k', k) f(\lambda, k) \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \right\},$$

$$\frac{T^+(\lambda, k', k)}{T^-(\lambda, k', k)} = S(\lambda, k) = e^{2i\delta(\lambda, k)}.$$

Для функции $T^+(\lambda, k, k)$ при $k' = k$ полученные формулы дают

$$T^+(\lambda, k, k) = e^{i\delta(\lambda, k)} \sin \delta(\lambda, k) \quad (\text{III.6})$$

и соответственно

$$T^-(\lambda, k, k) = e^{-i\delta(\lambda, k)} \sin \delta(\lambda, k).$$

Покажем, что $F(\lambda, -k)$ представляет собой просто детерминант Фредгольма $\Delta^+(\lambda, k)$ интегрального уравнения (III.4), определяемый формальным разложением [53]:

$$\Delta^+(\lambda, k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} dx_1 \dots \int_0^{\infty} dx_n \times \\ \times \begin{vmatrix} K^+(x_1, x_1) & \dots & K^+(x_1, x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K^+(x_n, x_1) & \dots & K^+(x_n, x_n) \end{vmatrix} V(x_1) \dots V(x_n).$$

Так как подынтегральные выражения в n -кратных интегралах являются симметричными функциями x_i , то детерминант $\Delta^+(\lambda, k)$ можно переписать также в виде

$$\Delta^+(\lambda, k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[f_0(\lambda, -k)]^n} \times \\ \times \int_0^{\infty} dx_1 \int_{x_1}^{\infty} dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^{\infty} dx_n D_n V(x_1) V(x_2) \dots V(x_n), \quad (\text{III.7})$$

где через D_n обозначено [для сокращения полагаем $f_i = f_0(\lambda, -k, x_i)$, $\Phi_i = \Phi_0(\lambda, k, x_i)$ и учитываем, что $x_i < x_j$ при $i < j$]

$$D_n = \begin{vmatrix} \Phi_1 f_1 & \Phi_1 f_2 & \dots & \Phi_1 f_n \\ \Phi_2 f_1 & \Phi_2 f_2 & \dots & \Phi_2 f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n-1} f_1 & \Phi_{n-1} f_2 & \dots & \Phi_{n-1} f_n \\ \Phi_n f_1 & \Phi_n f_2 & \dots & \Phi_n f_n \end{vmatrix}. \quad (\text{III.8})$$

Рассматривая f_n и φ_n как независимые переменные, можно представить детерминант D_n в виде

$$D_n = f_n [\varphi_n D_{n-1} + f_n G(f_1, \dots, f_{n-1})], \quad (\text{III.9})$$

где G не содержит f_n .

Полагая в (III.8) $f_n = f_{n-1}$, видим, что

$$(D_n)_{f_n=f_{n-1}} = f_{n-1} [\varphi_n - \varphi_{n-1}] D_{n-1}.$$

С другой стороны, в силу равенства (III.9) имеем

$$(D_n)_{f_n=f_{n-1}} = f_{n-1} [\varphi_n D_{n-1} + f_{n-1} G].$$

Отсюда получаем выражение для G

$$G = - \frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}} D_{n-1}$$

и, следовательно,

$$D_n = \frac{f_n}{f_{n-1}} [f_{n-1} \varphi_n - f_n \varphi_{n-1}] D_{n-1}.$$

Далее, так как $D_1 = f_1 \varphi_1$, то

$$D_n = f_n [f_{n-1} \varphi_n - f_n \varphi_{n-1}] [f_{n-2} \varphi_{n-1} - f_{n-1} \varphi_{n-2}] \dots \dots [f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1] \varphi_1.$$

Соответственно формула (III.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta^+(\lambda, k) = & 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[f_0(\lambda, -k)]^n} \int_0^{\infty} dx_1 \varphi_1 V(x_1) \times \\ & \times \int_{x_1}^{\infty} dx_2 V(x_2) [f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1] \dots \\ & \dots \int_{x_{n-1}}^{\infty} dx_n V(x_n) [f_{n-1} \varphi_n - f_n \varphi_{n-1}] f_n. \quad (\text{III.10}) \end{aligned}$$

Чтобы подтвердить равенство $\Delta^+(\lambda, k) = F(\lambda, -k)$, воспользуемся выражением для $F(\lambda, -k)$, следующим

из последних формул § 2 гл. 5:

$$\begin{aligned}
 F(\lambda, -k) &= \\
 &= 1 + \frac{1}{f_0(\lambda, -k)} \int_0^\infty f(\lambda, -k, x) \varphi_0(\lambda, k, x) V(x) dx.
 \end{aligned}
 \tag{III.11}$$

Функция $f(\lambda, -k, x)$ подчиняется интегральному уравнению (4.3), которому может быть придана следующая форма:

$$\begin{aligned}
 f(\lambda, -k, x) &= f_0(\lambda, -k, x) + \\
 &+ \frac{1}{f_0(\lambda, -k)} \int_x^\infty \{f_0(\lambda, -k, x) \varphi_0(\lambda, k, y) - \\
 &- f_0(\lambda, -k, y) \varphi_0(\lambda, k, x)\} V(y) f(\lambda, -k, y) dy.
 \end{aligned}
 \tag{III.12}$$

Решение (III.12) (найденное итерациями), подставленное при подстановке в (III.11), дает правую часть (III.10); таким образом, действительно

$$\Delta^+(\lambda, k) = F(\lambda, -k).$$

Совершенно аналогично можно доказать равенство $\Delta^-(\lambda, k) = F(\lambda, k)$.

Выведем теперь уравнения Липпмана — Швингера для $T(\lambda, k', k)$. Из уравнения (III.2) с помощью интегрального представления

$$K^\pm(\lambda, k, x, x') = (xx')^{1/2} \int_0^\infty J_\lambda(k'x) J_\lambda(k'x') \frac{k' dk'}{(k \pm i\epsilon)^2 k'^2},$$

$$\operatorname{Re} \lambda > -1,$$

получаем интегральные уравнения для $T^\pm(\lambda, k', k)$:

$$\begin{aligned}
 T^\pm(\lambda, k', k) &= T_0(\lambda, k', k) + \\
 &+ \int_0^\infty H^\pm(\lambda, k; k', k'') T^\pm(\lambda, k'', k) dk'',
 \end{aligned}
 \tag{III.13}$$

где

$$T_0(\lambda, k', k) = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{k'}{k}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} x J_{\lambda}(k'x) J_{\lambda}(kx) V(x) dx$$

$$H^{\pm}(\lambda, k; k', k'') = \frac{(k'k'')^{1/2}}{(k \pm i\varepsilon)^2 - k''^2} \int_0^{\infty} J_{\lambda}(k'x) J_{\lambda}(k''x) V(x) dx.$$

При

$$V(x) = \int_m^{\infty} \sigma(\mu) \frac{e^{-\mu x}}{x} d\mu$$

имеем

$$\begin{aligned} H^{\pm}(\lambda, k; k', k'') &= \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(k \pm i\varepsilon)^2 - k''^2} \int_m^{\infty} Q_{\lambda-1/2} \left(\frac{k'^2 + k''^2 + \mu^2}{2k'k''} \right) \sigma(\mu) d\mu \end{aligned}$$

Соотношения (III.13) эквивалентны интегральным уравнениям Липпмана — Швингера. Легко убедиться, что детерминанты Фредгольма для уравнений (III.13) совпадают с рассмотренными ранее детерминантами, т. е. с $F(\lambda, \mp k)$. Действительно, детерминант Фредгольма инвариантен относительно преобразования эквивалентности, переводящего (III.2) в (III.13).

Так можно получить разложение функции $F(\lambda, k)$, ограничиваясь рассмотрением только в импульсном пространстве. Подобный подход удобен тем, что здесь проще получить оценки сверху для соответствующих ядер. Подобным образом Брауну и др. [18] удалось по-новому вывести практически все описанные в данной книге аналитические свойства $F(\lambda, k)$, включая и наиболее принципиальный пункт — поведение амплитуды рассеяния при больших мнимых значениях λ .

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

В настоящем приложении мы найдем оценку сверху для величины

$$J_\lambda(z) H_\lambda^{(1)}(Z), \quad |z| < |Z|,$$

входящей в ядро уравнения (8.19). Исходным пунктом будет следующее интегральное представление [7]:

$$\begin{aligned} J_\lambda(z) H_\lambda^{(1)}(Z) &= \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_0^{i\infty} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[t - \frac{z^2 + Z^2}{t}\right]\right\} I_\lambda\left(\frac{zZ}{t}\right) \frac{dt}{t}, \quad (\text{IV. 1}) \end{aligned}$$

где $|z| < |Z|$ и $\text{Re } \lambda > -1$. Из приведенной формулы сразу следует

$$\begin{aligned} |J_\lambda(z) H_\lambda^{(1)}(Z)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left|J_\lambda\left(\frac{zZ}{t}\right)\right| \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |J_\lambda(x)| \frac{dx}{x}. \quad (\text{IV. 2}) \end{aligned}$$

Интегралу в правой части (IV.2) может быть придан следующий вид:

$$\int_0^\infty |J_\lambda(x)| \frac{dx}{x} = \int_0^\infty |J_\lambda(x)| (Ax^{-1/4} + Bx^{-3/4}) \frac{dx}{Ax^{3/4} + Bx^{1/4}},$$

где A и B — постоянные. Для вещественных λ с помощью неравенства Шварца находим

$$\begin{aligned} \left[\int_0^{\infty} |J_{\lambda}(x)| \frac{dx}{x} \right]^2 &\leq \\ &\leq \int_0^{\infty} [J_{\lambda}(x)]^2 (Ax^{-1/4} + Bx^{-3/4})^2 dx \int_0^{\infty} \frac{dx'}{(Ax'^{1/4} + Bx'^{3/4})^2} = \\ &= 2 \left[\frac{A}{B} I\left(\frac{1}{2}\right) + 2I(1) + \frac{B}{A} I\left(\frac{3}{2}\right) \right], \quad (\text{IV.3}) \end{aligned}$$

где для сокращения введено обозначение

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} [J_{\lambda}(x)]^2 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma\left(\lambda + \frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha} \left[\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\right]^2 \Gamma\left(\lambda + \frac{1+\alpha}{2}\right)}. \quad (\text{IV.4})$$

Минимизируя правую часть уравнения (IV.3) по величине A/B , получаем неравенство

$$\left[\int_0^{\infty} |J_{\lambda}(x)| \frac{dx}{x} \right]^2 \leq 4 \left\{ I(1) + \left[I\left(\frac{1}{2}\right) I\left(\frac{3}{2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

По определению величины $I(\alpha)$ [равенство (IV.4)]

$$I\left(\frac{1}{2}\right) I\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1}, \quad I(1) = \frac{1}{2\lambda}$$

и

$$\begin{aligned} \left[\int_0^{\infty} |J_{\lambda}(x)| \frac{dx}{x} \right]^2 &< \\ &< 4 \left[(2\lambda)^{-1} + \pi^{-1/2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/2} \right] < \\ &< 4 \left(\frac{1}{2} + \pi^{-1/2} \right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное неравенство в соотношение (IV.2), находим, что

$$|J_\lambda(z) H_\lambda^{(1)}(z)| < \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \pi^{-1/2}\right)^{1/2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4} < \left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1/4},$$

т. е. результат, использованный в связи с формулой (8.21).

Выведем далее аналогичное неравенство для ядра, входящего в уравнение (8.25):

$$N(\lambda, k, t, y) = (ty)^{1/2} K_\lambda(ky_>) I_\lambda(ky_<).$$

Выражение для N может быть найдено из (IV.1) при выборе z и Z мнимыми, однако получающееся при этом представление не удобно для решения поставленной задачи. Мы используем для этого представление Диксона — Феррара [29]

$$K_\lambda(ky_>) I_\lambda(ky_<) = \frac{1}{2} \int_{q_0}^{\infty} e^{-\lambda q} J_0(kw) dq, \quad (\text{IV.5})$$

где

$$w = (-t^2 - y^2 + 2ty \operatorname{ch} q)^{1/2}, \quad \operatorname{ch} q_0 = \frac{t^2 + y^2}{2ty}.$$

Из формулы (IV.5) и неравенства $|J_0(x)| < C/x^{1/2}$ нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} |N| &\leq \frac{1}{2} \sqrt{ty} \int_0^{\infty} |J_0(kw)| \left| \frac{dq}{dw} \right| dw \leq \\ &\leq C \sqrt{\frac{ty}{k}} \int_0^{\infty} \frac{w^{1/2}}{2ty \operatorname{sh} q} dw. \end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned} 2ty \operatorname{sh} q &= 2ty (\operatorname{ch}^2 q - 1)^{1/2} = \\ &= [w^4 + t^4 + y^4 + 2w^2(t^2 + y^2) - 2t^2y^2]^{1/2} > \\ &> w[w^2 + 2(t^2 + y^2)]^{1/2}. \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 |N| &\leq C \sqrt{\frac{ty}{k}} \int_0^{\infty} \frac{w^{-1/2} dw}{[w^2 + 2(t^2 + y^2)]^{1/2}} = \\
 &= C \sqrt{\frac{ty}{k}} \frac{1}{(t^2 + y^2)^{1/4}} \int_0^{\infty} \frac{w^{-1/2} dw}{(w^2 + 2)^{1/2}} \leq \\
 &\leq C' \sqrt{\frac{ty}{k}} \frac{1}{(t^2 + y^2)^{1/4}}. \quad (IV.6)
 \end{aligned}$$

С помощью интегрирования по частям можно получить еще одно неравенство

$$\begin{aligned}
 N = \frac{\sqrt{ty}}{2} \left\{ \frac{e^{-\lambda q} - e^{-\lambda q_0}}{-\lambda} J_0(kw) \Big|_{q_0}^Q + \frac{1}{\lambda} \int_{q_0}^Q (e^{-\lambda q} - e^{-\lambda q_0}) \times \right. \\
 \left. \times \frac{dw}{dq} \frac{dJ_0(kw)}{dw} dq + \int_Q^{\infty} e^{-\lambda q} J_0(kw) dq \right\},
 \end{aligned}$$

так что, приравнявая

$$w(Q) = (2ty \operatorname{ch} Q - t^2 - y^2)^{1/2} = \frac{|\lambda|}{k},$$

для достаточно больших $|\lambda|$ находим

$$\begin{aligned}
 |N| &\leq \frac{\sqrt{ty}}{2} \left\{ \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} + \frac{1}{|\lambda|} \int_0^{|\lambda|} |J_1(w)| dw + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \int_{|\lambda|/k}^{\infty} \frac{|J_0(kw)|}{[w^2 + 2(t^2 + y^2)]^{1/2}} dw \right\} \leq \\
 &\leq \frac{\sqrt{ty}}{2} \left\{ \frac{C}{|\lambda|^{3/2}} + \frac{2}{|\lambda|^{1/2}} + \frac{C}{|\lambda|^{1/2}} \right\} \leq \frac{C_1 \sqrt{ty}}{|\lambda|^{1/2}}, \quad (IV.7)
 \end{aligned}$$

поскольку $J_1(z) < 1/\sqrt{z}$.

Из неравенств (IV.6) и (IV.7) получаем соотношение (8.28)

$$|N(\lambda, k, t, y)| < \gamma(t) \gamma(y),$$

где

$$\gamma(y) = C \left(\frac{|\lambda|}{k^2} \right)^{1/4} \left(\frac{ky}{|\lambda|} \right)^{1/4} \quad \text{при} \quad \frac{ky}{|\lambda|} > 1,$$

$$\gamma(y) = C \left(\frac{|\lambda|}{k^2} \right)^{1/4} \left(\frac{ky}{|\lambda|} \right)^{1/2} \quad \text{при} \quad \frac{ky}{|\lambda|} < 1.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ V

Покажем, что для любого потенциала $V(x)$, подчиняющегося условию (10.3), имеется такая последовательность ограниченных потенциалов V_n , что $\lim_{n \rightarrow \infty} |GV - GV_n| = 0$. Пусть

$$V_n(x) = \begin{cases} V(x), & \text{если } x < x_n \text{ и } |V(x)| < M_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$|GV - GV_n| \leq \int_{x_n}^{\infty} x |V(x)| dx + \int_{E_n} x |V(x)| dx, \quad (\text{V.1})$$

где через E_n обозначено множество всех точек x_i , для которых $x_i < x_n$ и $|V(x)| > M_n$. Далее, x_n и M_n можно выбрать достаточно большими так, чтобы оба интеграла в (V.1) были бы меньше $1/n$; отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |GV - GV_n| = 0.$$

Функции $V_n(x) \in L_2$, и поэтому их можно аппроксимировать с точностью δ_n в смысле среднего квадратичного значения с помощью неограниченно дифференцируемых функций $U_n(x)$, тождественно обращающихся в нуль при $x > x_n$. Используя неравенство Шварца, имеем

$$\begin{aligned} |GV_n - GU_n| &\leq \\ &\leq \sup_x \frac{1}{4\pi} \int |V_n(x') - U_n(x')| \frac{d^3x'}{|x - x'|} < (x_n \delta_n)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |GU_n - GV| = 0,$$

если δ_n таковы, что $R_n \delta_n \rightarrow 0$. Когда $V(x)$ принадлежит функциональному пространству C непрерывно ограниченных функций x и $\lim V(x) = 0$, величины U_n можно взять такими, чтобы они равномерно сходились к $V(x)$; это можно сделать, например, с помощью приближенного метода Вейерштрасса.

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Докажем, что в (10.4) при больших x функцию Грина, являющуюся ядром этого интегрального уравнения, можно заменить на ее асимптотическое выражение (при больших x). Вначале предположим, что

$$V(x) = 0, \text{ если } x > R, \quad (\text{VI. 1})$$

и введем следующие определения:

$$\Phi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|} V(x') \Psi(x') d^3x', \quad (\text{VI. 2})$$

$$\Phi_\infty(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikx}}{x} \int e^{-ik' \cdot x'} V(x') \Psi(x') d^3x', \quad (\text{VI. 3})$$

где

$$x = x\mathbf{n}, \quad \mathbf{k}' = k\mathbf{n}.$$

Чтобы изучить разность $\Phi - \Phi_\infty$ при $x > R$, рассмотрим следующее выражение:

$$A(x, x') = \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|} - \frac{e^{ikx}}{x} e^{-ik' \cdot x'}.$$

Для больших $x > R$ и $x' < R$ модуль разности $|x-x'|$ можно разложить,

$$A(x, x') \sim \frac{e^{ikx - ik' \cdot x'}}{|x-x'|} \times \\ \times \left\{ \exp \left[\frac{ikx}{2} \left(\frac{x'}{x} \right)^2 - \frac{i}{2} \frac{(k' \cdot x')^2}{kx} \right] - 1 + \frac{k' \cdot x'}{kx} \right\}.$$

Используя неравенства

$$0 \leq \frac{1}{x^2} \left[x'^2 - \frac{(x \cdot x')^2}{x^2} \right] \leq \left(\frac{R}{x} \right)^2, \quad (\text{VI. 4}) \\ |e^z - 1| \leq z \text{ при } \text{Re } z \leq 0,$$

легко найти, что

$$|A(x, x')| \leq \frac{e^{-b(x-R)}}{2(x-R)^2} [|k| R^2 + 2R],$$

где $b = \text{Im } k \geq 0$. Отсюда можно получить оценку для $|\Phi - \Phi_\infty|$

$$\begin{aligned} & |\Phi - \Phi_\infty| \leq \\ & \leq \frac{e^{-b(x-R)}}{2(x-R)^2} (|k| R^2 + 2R) \frac{1}{4\pi} \int |V(x')| |\Psi(x')| d^3x' \quad (\text{VI. 5}) \end{aligned}$$

для всех $x > R$ и $b = \text{Im } k \geq 0$. Точно так же можно получить еще одну оценку

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ik\Phi \right| \leq \\ & \leq \frac{e^{-b(x-R)}}{(x-R)^2} (2|k|R + 1) \frac{1}{4\pi} \int |V(x')| |\Psi(x')| d^3x'. \quad (\text{VI. 6}) \end{aligned}$$

Заменим теперь (VI. 1) на более слабое условие

$$\int_0^\infty x^2 |V(x)| dx < \infty, \quad (\text{VI. 7})$$

которое гарантирует существование $\Phi_\infty(x)$. Опять введем величину R , являющуюся теперь некоторой функцией x , такой, что $R(x) < x$. Далее разобьем потенциал на две части:

$$V(x) = V_R(x) + \bar{V}(x), \quad (\text{VI. 8})$$

где

$$V_R(x) = \begin{cases} V(x) & \text{при } x < R, \\ 0 & \text{при } x \geq R. \end{cases}$$

Тогда Φ и Φ_∞ также распадаются на две части (обозначения очевидны):

$$\Phi = \Phi_R + \bar{\Phi}, \quad \Phi_\infty = \Phi_{R\infty} + \bar{\Phi}_\infty.$$

Совершив это разбиение, имеем

$$|\bar{\Phi}(x)| < \frac{\|\Psi\|}{x} \int_{R(x)}^{\infty} y^2 |V(y)| dy, \quad (\text{VI. 9})$$

$$|\bar{\Phi}_{\infty}(x)| < \frac{\|\Psi\|}{x} \int_{R(x)}^{\infty} y^2 |V(y)| dy. \quad (\text{VI. 10})$$

Рассмотрим интересующий нас предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x |\Phi - \Phi_{\infty}| &\leq \lim_{x \rightarrow \infty} x |\Phi_R - \Phi_{R\infty}| + \\ &+ \lim_{x \rightarrow \infty} x |\bar{\Phi}| + \lim_{x \rightarrow \infty} x |\bar{\Phi}_{\infty}|. \end{aligned}$$

Относительно первого слагаемого в правой части неравенство (VI. 5) утверждает, что входящий в него, интеграл меньше, чем

$$\|\Psi\| \int_0^{\infty} x'^2 V(x') dx'.$$

Таким образом, из соотношений (VI. 5), (VI. 9) и (VI. 10) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x |\Phi(x) - \Phi_{\infty}(x)| = 0,$$

если только $R(x)$ выбрано таким, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - R)^{-2} x R^2(x) = 0,$$

что всегда возможно. Подобным же образом можно провести анализ производной волновой функции по $|x|$.

Найдем теперь асимптотику решения однородного уравнения

$$\Psi = GV\Psi \quad (\text{VI. 11})$$

при условии, что $\text{Im } k > 0$, а потенциал $V(x)$ удовлетворяет (10.3). Для этого нужно сначала доказать две леммы:

а) Все функции Ψ , принадлежащие S и такие, что $\|\Psi\| < Ae^{-bx}/x$, где $b = \text{Im } k$, образуют линейное под-

пространство T в C , которое переводится само на себя оператором GV .

б) Все решения уравнения (VI.11) лежат в T .

Чтобы установить справедливость леммы «а», возьмем $\Psi \in T$ и $\varphi = GV\Psi$. Тогда легко находим, что

$$|\varphi(x)| < A \frac{e^{-bx}}{x} \int_0^{\infty} x' |V(x')| dx',$$

что и доказывает лемму.

Чтобы доказать лемму «б», разобьем потенциал [так же как и в (VI.8)] на две части $V = V_R + \bar{V}$, где величина R фиксирована и достаточно велика, чтобы имело место неравенство $|G\bar{V}| < 1$. Можно записать

$$\Psi = GV_R\Psi + G\bar{V}\Psi = \Psi_0 + G\bar{V}\Psi. \quad (\text{VI.12})$$

Из (VI.3) и (VI.5) следует, что $\Psi_0 \in T$. Соотношение (VI.12) можно интерпретировать как функциональное уравнение в пространстве C или T . В обоих случаях в силу альтернативы Фредгольма решение существует и единственно, ибо $|G\bar{V}| < 1$. Однако так как C содержит T , то оба решения совпадают.

Асимптотическое поведение $\Psi(x)$ можно найти аналогично. Если условие (10.3) выполняется, то $\Phi_{\infty}(x)$ существует и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{bx} |\Phi(x) - \Phi_{\infty}(x)| = 0.$$

Если же

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x |V(x)| = 0,$$

то имеем также

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{bx} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} - ik\Phi_{\infty} \right| = 0.$$

Литература

1. *Ahmadzadeh A., Burke P. G., Tate C.*, Phys. Rev., **131**, 1315 (1963).
2. *Bargmann V.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 488 (1949).
3. *Bargmann V.*, Phys. Rev., **75**, 301 (1949).
4. *Bargmann V.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **38**, 961 (1952).
5. *Barut A. O., Dilley J.*, Journ. Math. Phys., **4**, 1401 (1963).
6. *Barut A. O., Zwanziger D. E.*, Phys. Rev., **127**, 974 (1962). (Имеется перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963.)
7. *Bateman H.*, Higher Transcendental Functions, New York, 1953.
8. *Bessis D.*, Journ. Math. Phys., **6**, 637 (1965).
9. *Bethe H. A., Kinoshita T.*, Phys. Rev., **128**, 1418 (1962).
10. *Blankenbecler R., Goldberger M. L., Khuri N. N., Treiman S. B.*, Ann. of Phys., **10**, 62 (1960). (Имеется перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963.)
11. *Blatt J. M., Weisskopf V. F.*, Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952. (Имеется перевод: Дж. Блаатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.)
12. *Boas R. P.*, Entire Functions, New York, 1954.
13. *Boas R. P., Buck R. C.*, Polynomial Expansions of Analytic Functions, Ergebnisse der Mathematik, **19** (1958).
14. *Bochner S., Martin W. T.*, Several Complex Variables, Princeton, 1948. (Имеется перевод: С. Бохнер, У. Т. Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИЛ, 1951.)
15. *Borg G.*, Proc. 11th Congress of Scandinavian Math., Trondheim, August, 1949, p. 276.
16. *Bottino A., Longoni A. M., Regge T.*, Nuovo Cimento, **23**, 954 (1962). (Имеется перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963.)
17. *Bowcock J., Martin A.*, Nuovo Cimento, **14**, 516 (1959).
18. *Brown L., Fivel D., Lee B. W., Sawyer R. F.*, Ann. of Phys., **23**, 187 (1963).
19. *Calogero F.*, Nuovo Cimento, **28**, 761 (1963).
20. *Calogero F., Charap J. M., Squires E. J.*, Ann. of Phys., **25**, 325 (1963).
21. *Castillejo L., Dalitz R. H., Dyson F. J.*, Phys. Rev., **101**, 453 (1956).
22. *Chadan K.*, Nuovo Cimento, **24**, 379 (1962).
23. *Charap J. M., Fubini S.*, Nuovo Cimento, **14**, 540 (1959).
24. *Charap J. M., Fubini S.*, Nuovo Cimento, **15**, 73 (1960).
25. *Charap J. M., Squires E. J.*, Ann. of Phys., **25**, 143 (1963).

26. *De Alfaro V., Rossetti C.*, Nuovo Cimento, **18**, 783 (1960).
27. *De Alfaro V., Regge T.*, Nuovo Cimento, **20**, 956 (1961).
28. *De Alfaro V., Regge T., Rossetti C.*, Nuovo Cimento, **26**, 1029 (1962).
29. *Dixon A. L., Ferrar W. L.*, Quart. Journ. Math., Oxford, **4**, 302 (1933).
30. *Doetsch G.*, Handbuch der Laplace-transformation, Bd. I, Basel, 1950.
31. *Eden R. J.*, Lectures in Theoretical Physics, Brandeis Summer Institute, 1961, New York, 1962.
32. *Фаддеев Л. Д.*, Усп. математич. наук, **14**, II, 57 (1959).
33. *Faxén M., Holtsmark J.*, Zs. Phys., **45**, 307 (1927).
34. *Fonda L., Newton R. G.*, Ann. of Phys., **10**, 490 (1960).
35. *Fonda L., Radicati L. A., Regge T.*, Ann. of Phys., **12**, 68 (1961).
36. *Fonda L.*, Ann. of Phys., **12**, 476 (1961).
37. *Frøberg C. E.*, Phys. Rev., **72**, 519 (1947).
38. *Froissart M.*, Journ. Math. Phys., **3**, 29 (1962).
39. *Gasiorowicz S., Noyes H. P.*, Nuovo Cimento, **10**, 78 (1958).
40. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.*, Изв. АН СССР, сер. математич., **15**, 309 (1951).
41. *Gell-Mann M.*, Proc. of the 1962 Intern. Conf. on High Energy Physics at CERN, 1962, p. 533.
42. *Gell-Mann M.*, Phys. Rev. Lett., **8**, 263 (1962).
43. *Goldberger M. L.*, Lectures on Dispersion Relations (mimeographed notes), Princeton University, 1960.
44. *Грибов В. Н.*, ЖЭТФ, **42**, 1260 (1962).
45. *Hille E., Phillips R. S.*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., **31** (1957).
46. *Holmberg B.*, Nuovo Cimento, **9**, 597 (1952).
47. *Hunziker W.*, Helv. Phys. Acta, **34**, 593 (1961).
48. *Hunziker W.*, Helv. Phys. Acta, **36**, 838 (1963).
49. *Hylleraas E. A.*, Phys. Rev., **74**, 48 (1948).
50. *Jakšić B., Linić N.*, Journ. Math. Phys., **7**, 88 (1966); Comm. Math. Phys., **2**, 94 (1966).
51. *Jauch J.*, Helv. Phys. Acta, **30**, 143 (1957).
52. *Jost R.*, Helv. Phys. Acta, **20**, 256 (1947).
53. *Jost R., Pais A.*, Phys. Rev., **82**, 840 (1951).
54. *Jost R., Kohn W.*, Phys. Rev., **87**, 977 (1952).
55. *Jost R., Kohn W.*, Phys. Rev., **88**, 382 (1952).
56. *Jost R., Kohn W.*, Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat. Fys. Medd., **27**, № 9 (1953).
57. *Klein A., Zemach C.*, Ann. of Phys., **7**, 440 (1959).
58. *Khuri N. N.*, Phys. Rev., **107**, 1148 (1957).
59. *Khuri N. N., Pais A.*, Rev. Mod. Phys., **36**, 590 (1964).
60. *Landau L. D.*, Nucl. Phys., **13**, 181 (1959).
61. *Lehmann H.*, Nuovo Cimento, **10**, 579 (1958).
62. *Levinson N.*, Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat. Fys. Medd., **25**, № 9 (1949).
63. *Linić N.*, Nuovo Cimento, **26**, 581 (1962).
64. *Ma S. T.*, Phys. Rev., **69**, 668 (1946).

65. *Mandelstam S.*, Phys. Rev., **112**, 1344 (1958). (Имеется перевод в сборнике «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960.)
66. *Mandelstam S.*, Ann. of Phys., **19**, 254 (1962). (Имеется перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963.)
67. *Марченко В. А.*, ДАН СССР, **72**, 47 (1950).
68. *Марченко В. А.*, Труды Московского математич. общества, **1**, 327 (1952).
69. *Martin A.*, Nuovo Cimento, **14**, 403 (1959).
70. *Martin A.*, Nuovo Cimento, **15**, 99 (1960).
71. *Martin A.*, Nuovo Cimento, **19**, 1257 (1961).
72. *Martin A., Targonski J.*, Nuovo Cimento, **20**, 1182 (1961).
73. *Martin A.*, Nuovo Cimento, **31**, 1229 (1964).
74. *Newton R. G.*, Phys. Rev., **100**, 412 (1955).
75. *Newton R. G., Jost R.*, Nuovo Cimento, **1**, 590 (1955).
76. *Newton R. G.*, Journ. Math. Phys., **1**, 319 (1960).
77. *Newton R. G.*, Journ. Math. Phys., **3**, 867 (1962).
78. *Newton R. G.*, Journ. Math. Phys., **3**, 75 (1962).
79. *Nicholson J. W.*, Phil. Mag., **20**, 157 (1910).
80. *Noyes P., Wong D. Y.*, Phys. Rev. Lett., **3**, 191 (1959).
81. *Pais A., Wu T. T.*, Journ. Math. Phys., **5**, 799 (1964).
82. *Paley R. E. A. C., Wiener N.*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., **19** (1934).
83. *Poincaré H.*, Acta Math., **4**, 213 (1884).
84. *Poincaré H.*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, **29**, 169 (1910).
85. *Polkinghorne J. C.*, Lectures in Theoretical Physics, Brandeis Summer Institute, 1961, New York, 1962.
86. *Predazzi E., Regge T.*, Nuovo Cimento, **24**, 518 (1962).
87. *Rayleigh J. W. S.*, The Theory of Sound, London, 1894. (Имеется перевод: *Релей*, Теория звука, М., 1955.)
88. *Regge T.*, Nuovo Cimento, **8**, 671 (1958).
89. *Regge T.*, Nuovo Cimento, **14**, 951 (1959).
90. *Riesz F., Sz-Nagy B.*, Leçons d'Analyse Fonctionnelle, Budapest, 1952. (Имеется перевод: *Ф. Русс, Б. Секефальви-Надь*, Лекции по функциональному анализу, М., 1954.)
91. *Sartori L.*, Journ. Math. Phys., **4**, 1408 (1963).
92. *Scadron M., Weinberg S., Wright J.*, Phys. Rev., **135B**, 202 (1964).
93. *Schwinger J.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **47**, 122 (1961).
94. *Singh V.*, Phys. Rev., **127**, 632 (1962).
95. *Smithies F.*, Duke Math. Journ., **8**, 107 (1941).
96. *Sommerfeld A.*, Partial Differential Equations in Physics, New York, 1949. (Имеется перевод: *А. Зоммерфельд*, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950.)
97. *Сташевская В. В.*, ДАН СССР, **93**, 409 (1953).
98. *Tiktopoulos G., Treiman S. B.*, Phys. Rev., **134B**, 844 (1964).
99. *Titchmarsh E. C.*, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford, 1937. (Имеется перевод: *Е. К. Титчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.)

100. *Titchmarsh E. C.*, Theory of Functions, Oxford, 1939. (Имеется перевод: *Е. К. Титчмарш*, Теория функций, М., 1951.)
101. *Vinh Mau R., Martin A.*, Nuovo Cimento, 20, 390 (1961).
102. *Волк В. Я.*, Усп. математич. наук, 8, 141 (1953).
103. *Whittaker E. T., Watson G. N.*, A Course of Modern Analysis, Cambridge, 1952. (Имеется перевод: *Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, т. I, II, М., 1963.)
104. *Wiener N.*, The Fourier Integral and Certain of its Applications, Cambridge, 1960. (Имеется перевод: *Н. Винер*, Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М., 1963.)
105. *Cornille H., Martin A.*, Nuovo Cimento, 26, 298 (1962).
106. *Levinson N.*, Phys. Rev., 755 (1955).

ДОПОЛНЕНИЕ

РАССЕЯНИЕ С УЧАСТИЕМ ТРЕХ И БОЛЕЕ ЧАСТИЦ

А. М. Бродский, В. В. Толмачев

В задаче рассеяния двух частиц основную роль играет, как известно, интегральное уравнение вида

$$G(W) = G_0(W) + K(W)G(W), \quad (1)$$

где G_0 и G — нулевая и полная функции Грина стационарного уравнения Шредингера и $K(W)$ — так называемое ядро рассеяния, или просто ядро;

$$G(W) = \frac{1}{W - H}, \quad G_0(W) = \frac{1}{W - H_0}, \\ K(W) = \frac{1}{W - H_0} V, \quad (1a)$$

где H — полный двухчастичный гамильтониан, H_0 — гамильтониан без взаимодействия и энергия W берется комплексной. В двухчастичном случае ядро $[W - H_0]^{-1} V$ уравнения (1) можно сделать несингулярным, если выделить δ -функцию, выражающую закон сохранения энергии-импульса, и достаточно «хорошим», если потенциал V достаточно гладкий и достаточно быстро убывает на бесконечности.

Соответствующее интегральное уравнение можно изучить непосредственно одним из методов существующей математической теории линейных интегральных уравнений (например методом Фредгольма).

К сожалению, при переходе к задаче рассеяния трех и более частиц ядро вида $(W - H_0)^{-1} V$ оказывается существенно сингулярным и ни один из известных методов теории интегральных уравнений к нему неприменим.

Гамильтониан $H = H_0 + V$ для N -частичной задачи возьмем в обычном виде

$$H_0 = \sum_{(1 \leq i \leq N)} \frac{p_i^2}{2m_i}, \quad V = \sum_{(1 \leq i < j \leq N)} V_{ij}. \quad (2)$$

Оставляем только парные силы; тройными и т. д. силами пренебрегаем; все частицы предполагаются различными. Переход к общему случаю не представляет затруднений.

В существующей теории линейных интегральных уравнений обычно предполагается, что ядро $K(W)$ является вполне непрерывным; к числу таких ядер относятся, в частности, ядра с интегрируемым квадратом (ядра Гильберта — Шмидта).

Для нерелятивистского двухчастичного рассеяния ядро $K(W)$ можно сделать при определенных ограничениях на потенциалы ядром Гильберта — Шмидта. В импульсном пространстве имеем

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | K(W) | \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \rangle = \frac{\delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}')}{W - \frac{q}{2\mu} - \frac{p^2}{2M}} \langle \mathbf{q} | V_{12} | \mathbf{q}' \rangle, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{q} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}, \\ M &= m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (3a)$$

Положим

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 | G(W) | \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \rangle \equiv \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \langle \mathbf{q} | G\left(W - \frac{p^2}{2m}\right) | \mathbf{q}' \rangle. \quad (4)$$

Уравнение (1) принимает тогда вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | G(W) | \mathbf{q}' \rangle &= \frac{\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{W - \frac{q^2}{2\mu}} + \\ &+ \int d^3 q'' \frac{\langle \mathbf{q} | V_{12} | \mathbf{q}'' \rangle \langle \mathbf{q}'' | G(W) | \mathbf{q}' \rangle}{W - \frac{q^2}{2\mu}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Это уравнение (его обычно называют уравнением Липпмана — Швингера) имеет ядро, интегрируемое с квадратом, если потенциал удовлетворяет условию

$$\int d^3 q d^3 q' \frac{|\langle \mathbf{q} | V_{12} | \mathbf{q}' \rangle|^2}{\left| W - \frac{q^2}{2\mu} \right|^2} < \infty \quad (6)$$

для комплексного или отрицательного значения W .
Условие (6) выполняется, если

$$\int d^3r V_{12}^2(r) < \infty. \quad (6a)$$

Уравнение Липпмана — Швингера для N -частичного рассеяния с $N \geq 3$ существенно отличается от уравнения Липпмана — Швингера для двухчастичной задачи рассеяния с $N=2$ в следующих отношениях:

1) Ядро $[W - H_0]^{-1} V$ уравнения Липпмана — Швингера не сводится к ядру Гильберта — Шмидта даже тогда, когда двухчастичное взаимодействие достаточно хорошее.

2) Ядро $[W - H_0]^{-1} V$ имеет непрерывный спектр и потому не является также вполне непрерывным ядром.

3) Диаграммы для $[W - H_0]^{-1} V$ могут быть несвязными.

4) Амплитуда рассеяния не является мероморфной функцией константы связи; наряду с полюсами, характерными для двухчастичной задачи, она имеет еще и разрезы.

5) Альтернатива Фредгольма здесь не имеет места.

Таким образом, уравнение Липпмана — Швингера для задачи рассеяния с участием трех и более частиц существенно сингулярно. Вейнбергу [1] удалось найти эффективный способ изучения этого сингулярного уравнения. Он свел его к некоторой системе линейных интегральных уравнений с хорошими ядрами. Мы будем называть ее системой уравнений Вейнберга.

Как уже было указано в предисловии, идеи Вейнберга близки к идеям Фаддеева [2], развитым Лавли [4] для задачи трех тел, с той только разницей, что в уравнения Фаддеева не входит непосредственно двухчастичный потенциал, так как задача для двух частиц решается заранее (для сингулярных потенциалов это важно). Уравнений у Фаддеева больше, они сложнее, и, самое главное, не видно, как можно непосредственно обобщить их и получить эффектив-

ные формулы в случае более чем трех частиц¹⁾. Трехчастичная задача рассеяния проще общей многочастичной задачи, так как в ней приходится иметь дело только с одной составной частицей.

Покажем (на примере трехчастичной задачи), что для многочастичного рассеяния а) ядро $K(W)$ не является ядром с интегрируемым квадратом; б) ядро $K(W)$ не является даже вполне непрерывным ядром.

а) Рассмотрим трехчастичную задачу в импульсном представлении. Имеем уравнение, подобное (3),

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 | K(W) | \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 \rangle = \frac{\delta \left(\sum_i \mathbf{p}_i - \sum_i \mathbf{p}'_i \right)}{W - \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}} \times \\ \times \{ \delta(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}'_3) \langle \mathbf{q}_{12} | V_{12} | \mathbf{q}'_{12} \rangle + \\ + \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) \langle \mathbf{q}_{23} | V_{23} | \mathbf{q}'_{23} \rangle + \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2) \langle \mathbf{q}_{13} | V_{13} | \mathbf{q}'_{13} \rangle \}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{q}_{12} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2} \text{ и т. д.} \quad (7a)$$

Появляющаяся в уравнении (7) δ -функция, соответствующая сохранению полного импульса, не приводит к затруднениям; она аналогична появляющейся в двухчастичной задаче и исключается подобно тому, как это имело место выше для двухчастичного рассеяния. Опасными являются δ -функции в фигурных скобках. От них в $\text{Sp}\{KK^+\}$ в подынтегральном выражении появляются члены типа $[\delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2)]^2$.

б) Покажем теперь, что ядро K для трехчастичной задачи рассеяния не только квадратично неинтегрируемо, но вообще не является вполне непрерывным ядром.

В работе [1] при условии, что потенциал V_{ij} удовлетворяет условию (ба), получена следующая

¹⁾ Возможность приближенного расчета с использованием уравнений Фаддеева показана в работе [6].

оценка для нормы оператора $K(W)$:

$$\|K(W)\| \leq \sum_{(1 \leq i < j \leq N)} \left[\frac{\mu_{ij}^{1/2}}{2\pi |\operatorname{Im}(2W)^{1/2}|} \int d^3r |V_{ij}(r)|^2 \right]^{1/2}, \quad (8)$$

где μ_{ij} — приведенная масса частиц i и j . Таким образом, оператор $K(W)$ является ограниченным, если только W не равно действительному положительному числу.

Вполне непрерывный оператор может иметь самое большее точечный спектр ¹⁾. Так что если будет показано, что ядро $K(W)$ имеет либо остаточный спектр, либо непрерывный спектр, то тем самым будет уста-

¹⁾ Здесь, так же как и у Вейнберга [1], спектр определяется несколько иначе, чем в других работах. Определим спектр ядра $K(W)$. Точки λ , в которых резольвента $F(W, \lambda)$ [или функция Грина $G(W, \lambda)$] неаналитична или неограничена, составляют спектр. Функция Грина $G(W, \lambda)$ является решением уравнения (1) $G(W, \lambda) = G_0(W) + \lambda K(W)G(W, \lambda)$, причем λ комплексно. Для резольвенты $F(W, \lambda)$ имеем

$$F(W, \lambda) = K(W) + \lambda K(W)F(W, \lambda) = K(W) + \lambda F(W, \lambda)K(W), \\ G(W, \lambda) = [1 + \lambda F(W, \lambda)]G_0(W).$$

Очевидно, что функция $G(W, \lambda)$ будет аналитической и ограниченной всюду, где $F(W, \lambda)$ аналитична и ограничена (и наоборот).

Спектр общего ограниченного оператора $K(W)$ включает:

1) так называемый точечный спектр всех тех конечных λ , для которых существует (нормируемый) собственный вектор Υ такой, что $K\Upsilon = \lambda^{-1}\Upsilon$;

2) так называемый остаточный спектр всех тех λ , для которых существует (нормируемый) собственный вектор Υ , такой, что $\Phi^+K = \lambda^{-1}\Phi^+$; для этих λ уравнение $K\Upsilon = \lambda^{-1}\Upsilon$ не имеет, однако, решения;

3) так называемый непрерывный спектр всех тех λ , для которых при данном $\varepsilon > 0$ существует такой «приближенный собственный вектор» Υ_ε , что $\|(1 - \lambda K)\Upsilon_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, $\|\Upsilon_\varepsilon\| = 1$, для этих λ уравнения $K\Upsilon = \lambda^{-1}\Upsilon$, $\Phi^+K = \lambda^{-1}\Phi^+$ не имеют, однако, решения.

Таким образом, согласно Вейнбергу, спектр определяется как множество всех λ , а не множество всех $1/\lambda$, для которых выполняются соотношения $K\Upsilon = \lambda^{-1}\Upsilon$; $\Phi^+K = \lambda^{-1}\Phi^+$; $\|(1 - \lambda K)\Upsilon_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, $\|\Upsilon_\varepsilon\| = 1$. Поэтому в двухчастичной задаче нет непрерывного спектра,

новлено, что $K(W)$ не является вполне непрерывным оператором.

Из инвариантности относительно обращения времени следует, что ядро $K(W)$ не может иметь остаточного спектра. Однако при $N \geq 3$ оно обязательно имеет непрерывный спектр. Пусть $\lambda(W)$ принадлежит точечному спектру двухчастичной задачи, тогда $\lambda(W - E)$ будет лежать в непрерывном спектре трехчастичной задачи для всех $E > 0$. Покажем это.

Пусть Υ — некоторое нормированное состояние, в котором частицы 1 и 2 находятся в некотором связанном состоянии двухчастичного ядра, а частица 3 почти точно обладает импульсом \mathbf{p} и находится так далеко от 1 и 2, что ее волновая функция почти не перекрывается с волновой функцией частиц 1 и 2, хотя и является сильно размытой, например,

$$\langle \mathbf{q}_{12} \mathbf{p}_3 | \Upsilon \rangle = \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}} \right)^{3/2} \psi(\mathbf{q}_{12}; W - E) e^{-1/2 a^2 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p})^2} e^{i \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{R}}, \quad (9)$$

где ψ — собственная функция двухчастичного ядра,

$$\lambda(W) \int d^3 q'_{12} \frac{\langle \mathbf{q}_{12} | V_{12} | \sigma'_{12} \rangle}{W - (q'_{12})^2 / 2\mu_{12}} \psi(\mathbf{q}'_{12}; W) = \psi(\mathbf{q}_{12}; W), \quad (9a)$$

$$\mu_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \int d^3 q_{12} |\psi(\mathbf{q}_{12})|^2 = 1.$$

При этом параметры a и $|\mathbf{R}|$ нужно устремить в бесконечность, считая $|\mathbf{R}| \gg a$. Параметр \mathbf{p} фиксирован

$$\frac{p^2}{2\mu_3} = E, \quad \mu_3 \equiv \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

При $|\mathbf{R}| \rightarrow \infty$ (т. е. при удалении частицы 3) имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_{12} \mathbf{p}_3 | K(W) | \Upsilon \rangle &\rightarrow \langle \mathbf{q}_{12} \mathbf{p}_3 | G_0(W) V_{12} | \Upsilon \rangle = \\ &= \left(\frac{a}{\sqrt{\pi}} \right)^{3/2} \int d^3 q'_{12} \times \\ &\times \frac{\langle \mathbf{q}_{12} | V_{12} | \mathbf{q}'_{12} \rangle \Psi(\mathbf{q}'_{12}; W - E) \exp \left[-\frac{1}{2} a^2 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p})^2 \right] \exp(i \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{R})}{W - \frac{q_{12}^2}{2\mu_{12}} - \frac{p_3^2}{2\mu_3}}. \end{aligned}$$

Устремим теперь $a \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lambda(W - E)K(W) | \Upsilon \rangle \rightarrow | \Upsilon \rangle \quad (R \rightarrow \infty, a \rightarrow \infty).$$

Однако $|\Upsilon\rangle$ не имеет предела при $|R| \rightarrow \infty$ и $a \rightarrow \infty$, поэтому $\lambda(W - E)$ лежит в непрерывном спектре ядра $K(W)$. Итак, для трехчастичной и т. д. задачи ядро $K(W)$ не является ни интегрируемым с квадратом, ни даже вполне непрерывным.

Как уже говорилось выше, Вейнберг преформировал уравнение Липпмана — Швингера для $G(W)$ для многочастичной задачи, так что к заменяющим его линейным интегральным уравнениям Вейнберга можно применить обычные математические методы теории интегральных уравнений.

Перейдем к выводу соответствующих уравнений. Возьмем разложение $G(W)$ в ряд по взаимодействию

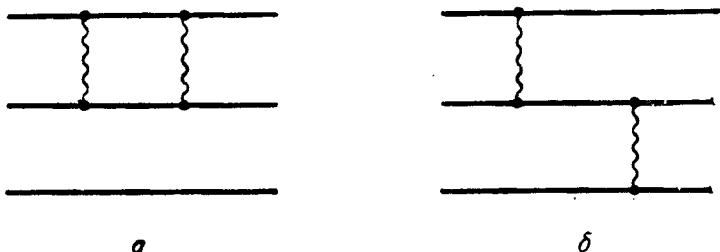
$$G(W) = [1 + K(W) + K^2(W) + \dots] G_0(W)$$

и отдельным членам этого разложения сопоставим определенные диаграммы. Как конкретно осуществляется такое сопоставление, легко видеть из нижеприводимого примера. Для трехчастичной задачи для $G(W)$ во втором порядке среди прочих имеются диаграммы, изображенные на фиг. 1. Вклады от каждой из этих диаграмм в $G(W)$ имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 | G_A(W) | \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 \rangle = \\ & = \int \frac{d^3 p''_1 d^3 p''_2 d^3 p''_3}{(W - E_1 - E_2 - E_3)(W - E''_1 - E''_2 - E''_3)(W - E'_1 - E'_2 - E'_3)} \times \\ & \quad \times \langle \mathbf{q}_{12} | V_{12} | \mathbf{q}''_{12} \rangle \delta(\mathbf{p}_{12} - \mathbf{p}''_{12}) \delta(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}''_3) \times \\ & \quad \times \langle \mathbf{q}''_{12} | V_{12} | \mathbf{q}'_{12} \rangle \delta(\mathbf{p}''_{12} - \mathbf{p}'_{12}) \delta(\mathbf{p}''_3 - \mathbf{p}'_3), \quad (10a) \end{aligned}$$

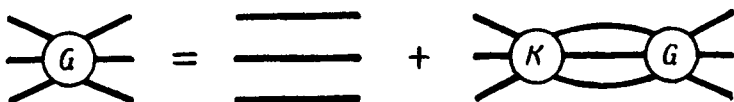
$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 | G_B(W) | \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 \rangle = \\ & = \int \frac{d^3 p''_1 d^1 p''_2 d^3 p''_3}{(W - E_1 - E_2 - E_3)(W - E''_1 - E''_2 - E''_3)(W - E'_1 - E'_2 - E'_3)} \times \\ & \quad \times \langle \mathbf{q}_{12} | V_{12} | \mathbf{q}''_{12} \rangle \delta(\mathbf{p}_{12} - \mathbf{p}''_{12}) \delta(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}''_3) \times \\ & \quad \times \langle \mathbf{q}''_{23} | V_{23} | \mathbf{q}'_{23} \rangle \delta(\mathbf{p}''_{23} - \mathbf{p}'_{23}) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1). \quad (10b) \end{aligned}$$

Диаграммы для задачи с тремя и более частицами существенно отличаются от диаграмм для задачи с двумя частицами. Диаграммы для двух частиц



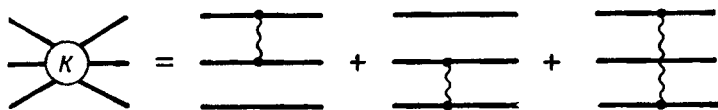
Фиг. 1. Примеры диаграмм для $G(W)$.

всегда топологически связные, диаграммы же для трех и более частиц могут быть как связными, так и



Фиг. 2. Диаграммное изображение уравнения Липпмана — Швингера для трехчастичной задачи.

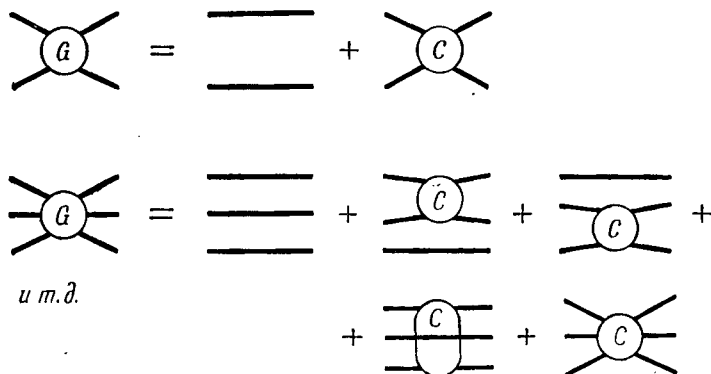
несвязными. Так, диаграмма *a* на фиг. 1 несвязная, а диаграмма *б* связная.



Фиг. 3. Диаграмма для ядра $K(W)$ в трехчастичной задаче.

Уравнение Липпмана — Швингера для многочастичной задачи легко интерпретировать с помощью диаграмм. Так, например, для трехчастичной задачи (фиг. 2) ядро K уравнения Липпмана — Швингера является суммой диаграмм, изображенных на фиг. 3.

Трудности с уравнением Липпмана — Швингера для многочастичной задачи легко понять из диаграмм. Они заключаются в том, что диаграммы для $K(W)$ топологически несвязные. Связная диаграмма имеет только одну δ -функцию сохранения полного импульса; несвязная диаграмма имеет дополнительные δ -функции, гарантирующие сохранение импульса в каждой несвязной части. Так, все три диаграммы для ядра K на фиг. 3 двухсвязные.



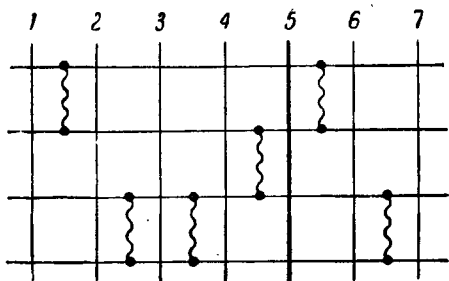
Фиг. 4. Интегральные соотношения для G и C .

Можно ли переписать уравнение Липпмана — Швингера в виде системы интегральных уравнений с ядрами, диаграммы для которых только связные? Оказывается, можно.

Вместо функций Грина G введем так называемые связные части функций Грина C , согласно соотношениям, изображенным на фиг. 4. Это представление функций Грина аналогично известному в статистической физике представлению Урсела — Майера для статистических функций распределения.

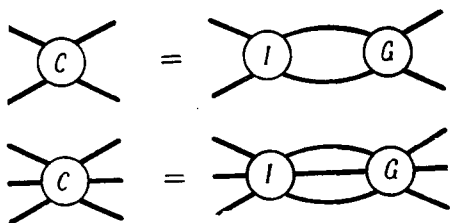
Уравнения Вейнберга составляются для связных частей C , а не для самих функций Грина G . В отличие от самих функций Грина их связные части удовлетворяют интегральным уравнениям, ядрам которых соответствуют только связные диаграммы, и являются поэтому вполне непрерывными,

Введем в рассмотрение ядра I , являющиеся суммами неприводимых связанных диаграмм. Чтобы определить термин «неприводимые связанные диаграммы», необходимо пояснить вначале, что такое критический



Фиг. 5. Иллюстрация идеи критического разреза диаграмм.

разрез связанной диаграммы. Под критическим разрезом связанной диаграммы понимается самый левый вертикальный разрез (проводимый между любыми двумя



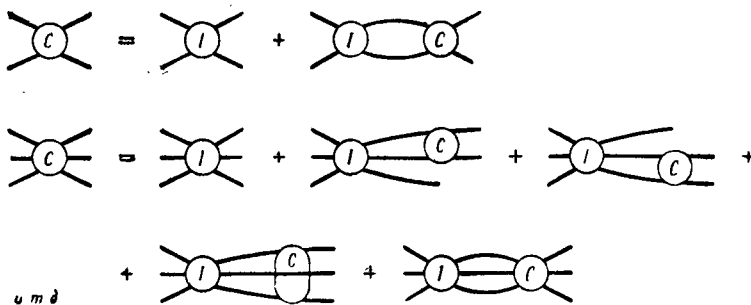
и т.д

Фиг. 6. Интегральные соотношения для G , C и I .

мя соседними вертексами диаграммы), слева от которого диаграмма остается связанной (фиг. 5).

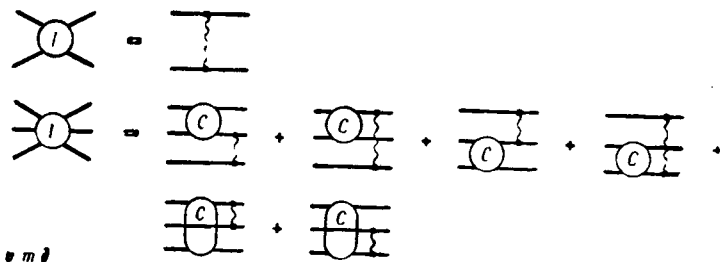
В диаграмме, изображенной на фиг. 5, критическим является разрез 5. Действительно, слева от разрезов 1, 2, 3, 4 остается несвязная диаграмма. Разрезы же 5, 6, 7 обладают тем свойством, что слева от них диаграмма связная; разрез 5 — самый левый из них. Связная диаграмма является неприводимой, если

критическим в ней является самый крайний правый разрез. В противном случае диаграмма приводимая. Таким образом, связанные диаграммы могут быть приводимыми и неприводимыми.



Фиг. 7. Диаграммное изображение первой группы уравнений системы Вейнберга.

Суммы неприводимых связанных диаграмм I являются ядрами интегральных уравнений для связанных



Фиг. 8. Диаграммное изображение второй группы уравнений системы Вейнберга.

частей C , которые изображены на фиг. 6. Выражая в этих уравнениях функции Грина G через связанные части C , получаем первую группу уравнений системы Вейнберга (фиг. 7), которые выражают C через I . Можно получить также (независимые) уравнения, выражающие I через C ; это дает вторую группу уравнений системы Вейнберга (фиг. 8).

Запишем в аналитическом виде систему уравнений Вейнберга для трехчастичной задачи, когда

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3}, \quad V = V_{12} + V_{13} + V_{23}.$$

Имеем

$$G(W) \equiv \frac{1}{W-H}, \quad G_0(W) \equiv \frac{1}{W-H},$$

$$G_{ij}(W) \equiv \frac{1}{W-H_0-V_{ij}},$$

где $ij = 12, 13, 23$.

Рассмотрим связанные части $L_{ij}(W)$ и $C(W)$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} G_{ij}(W) &= G_0(W) + L_{ij}(W), \\ G(W) &= G_0(W) + L_{12}(W) + L_{13}(W) + \\ &\quad + L_{23}(W) + C(W). \end{aligned} \quad (11)$$

Для этих связанных частей имеем

$$\begin{aligned} L_{ij}(W) &= K_{ij}(W) G_{ij}(W), \\ K_{ij}(W) &= G_0(W) V_{ij}, \quad C(W) = I(W) G(W), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} I(W) &= L_{12}(W) \{V_{23} + V_{13}\} + \\ &\quad + L_{23}(W) \{V_{12} + V_{13}\} + L_{13}(W) \{V_{12} + V_{23}\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из соотношений (12) имеем также

$$\begin{aligned} L_{ij}(W) &= K_{ij}(W) G_0(W) + K_{ij}(W) L_{ij}(W), \\ C(W) &= I(W) [G_0(W) + L_{12}(W) + \\ &\quad + L_{13}(W) + L_{23}(W)] + I(W) C(W). \end{aligned} \quad (14)$$

Суть проведенной перестройки уравнения Липпмана — Швингера в систему уравнений Вейнберга состоит в том, что теперь ядро $I(W)$ является хорошим ядром, а именно ядром Гильберта — Шмидта с интегрируемым квадратом.

Мы не будем здесь останавливаться на деталях работы Вейнберга, который доказал [1], что ядро

$I(W)$ является ядром Гильберта — Шмидта для $N=2, 3$. Вместо этого перейдем к изложению более полного исследования этого вопроса, проведенного Унцикером [5].

Прежде всего Унцикер предложил новое представление для $I(W)$. Он рассмотрел разные системы последовательных разбиений N частиц на так называемые кластеры. Например, для четырех частиц среди прочих можно рассмотреть такую систему разбиений: $(1) (2) (3) (4) \rightarrow (12) (3) (4) \rightarrow (123) (4) \rightarrow (1234)$. Каждая система разбиений (D_N, \dots, D_1) начинается с разбиения $D_N = (1) \dots (N)$ и оканчивается $D_1 = (1 \dots N)$. Отдельные разбиения обозначим через $S \equiv (D_N, \dots, D_1)$. Представление Унцикера для связанной части функции Грина $C(W)$ имеет вид

$$C(W) = \sum_{\text{Все } S} G_{D_N} V_{D_N, D_{N-1}} G_{D_{N-1}} \dots \dots G_{D_2} V_{D_2, D_1} G_{D_1} \equiv I(W) G(W), \quad (15)$$

где G_{D_k} ($k=N, \dots, 1$) означает G для гамильтониана H_{D_k} . Гамильтониан H_{D_k} получается из полного гамильтониана H , если в H опустить члены взаимодействия между кластерами разбиения D_k . Далее $V_{D_k, D_{k-1}} = H_{D_{k-1}} - H_{D_k}$. Очевидно, что $G_{D_1} = G$, так что из формулы [15] сразу получается представление для оператора Вейнберга $I(W)$.

Далее вводится в рассмотрение цепочка операторов

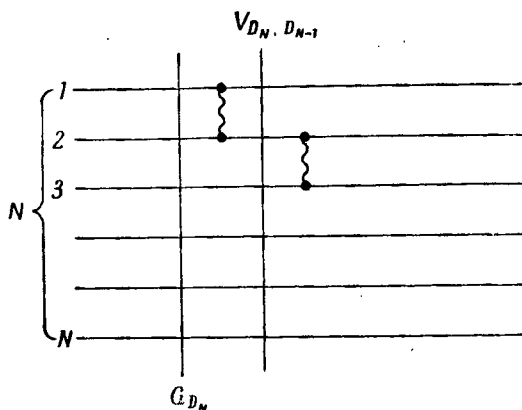
$$A_k \equiv G_{D_N} V_{D_N, D_{N-1}} G_{D_{N-1}} \dots G_{D_k} \quad (N \geq k \geq 2); \quad (16)$$

каждый оператор A_k содержит произведение ровно k δ -функций сохранения импульса. Любой оператор A_k можно рассматривать как оператор в некотором гильбертовом пространстве H_k функций $\psi(p_1 \dots p_N)$ с нормой

$$(\psi, \varphi) = \int dp_1 \dots dp_N \underbrace{\delta(\dots) \delta(\dots)}_k \bar{\psi}(p_1 \dots p_N) \varphi(p_1 \dots p_N), \quad (17)$$

в которой схематически указаны k δ -функций сохранения для k кластеров разбиения D_k . Конструкция Унцикера схематически проиллюстрирована на фиг. 9.

Унцикер использует метод индукции, чтобы, начиная с $k=N$, когда $A_N=G_N$ и равно свободной функции



Фиг. 9. Иллюстрация конструкции Унцикера.

Грина, доказать, что $A_k(W)$ является оператором Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве H_k , причем $N \geq k \geq 2$ и для W , не принадлежащих спектру H_{D_k} . При этом относительно V_{ij} предполагается, что все они интегрируемы с квадратом. За недостатком места и ввиду громоздкости мы не приводим здесь, по существу весьма простого доказательства Унцикера для сформулированного положения (см. [5]).

Полагая $k=1$, имеем $A_1=I(W)$ и $H_1=H$, где H — гильбертово пространство с нормой

$$(\psi, \varphi) = \int dp_1 \dots dp_N \delta \left(\sum p_i \right) \bar{\psi}(p_1 \dots p_N) \varphi(p_1 \dots p_N). \quad (18)$$

Отсюда ясно, что ядро Вейнберга $I(W)$ является ядром Гильберта — Шмидта в «норме системы центра масс».

Литература

1. *Weinberg S.*, Phys. Rev., **133**, B232 (1964).
2. *Фаддеев Л. Д.*, ЖЭТФ, **39**, 1459 (1960).
3. *Фаддеев Л. Д.*, ДАН, **138**, 565 (1961); ДАН **145**, 301 (1962).
4. *Lovelace C. A.*, Lecture Notes for the Edinburgh Summer School, July 1963.
5. *Hunziker W.*, Phys. Rev., **135**, B800 (1964).
6. *Basdevant J. L.*, Phys. Rev., **138**, B892 (1965).

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие переводчиков</i>	8
<i>Предисловие авторов к русскому изданию</i>	10
<i>Предисловие</i>	11
Глава 1. Введение	13
§ 1. Уравнение Шредингера	13
§ 2. Исторические замечания	16
Глава 2. Математический аппарат	21
§ 1. Предварительные замечания	21
§ 2. Некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений второго порядка	21
§ 3. Интегралы Фурье	24
§ 4. Аналитические функции	26
§ 5. Интегральные уравнения	27
Глава 3. Решения уравнения для парциальных волн с граничными условиями при $x=0$	31
§ 1. Интегральное уравнение для регулярного решения	31
§ 2. Дальнейшее исследование интегральных уравнений	38
Глава 4. Решения уравнения для парциальных волн с граничными условиями на бесконечности	41
§ 1. Интегральные уравнения для решения Иоста	41
§ 2. Природа сингулярности при $k=0$	45
§ 3. Поведение общего решения при больших x	47
§ 4. Аналогия между граничными условиями при $x=0$ и $x=\infty$	48
§ 5. Качественное обсуждение	50
§ 6. S -волны	52
Глава 5. Функция Иоста и S-матрица	54
§ 1. Определение и формальные свойства функции Иоста	54
§ 2. Аналитические свойства $f(\lambda, k)$	57

§ 3. Отыскание сдвигов фаз	59
§ 4. Связь между сдвигом фазы и амплитудой рассеяния	62
§ 5. Асимптотическое поведение $f(\lambda, k)$ для заданного λ при больших энергиях. Теорема Левинсона	65
§ 6. Потенциалы, убывающие быстрее экспоненты	67
Глава 6. Юкавские потенциалы	70
§ 1. Определение	70
§ 2. Аналитические свойства волновых функций	71
§ 3. Рассмотрение S -волн по Мартину	74
§ 4. Методы рассмотрения в случае угловых моментов $l \geq 1$	77
§ 5. N/D -метод	81
§ 6. Соотношение между $v(\xi)$ и потенциалом	85
Глава 7. Интерпретация полюсов $S(\lambda, k)$ при физических значениях угловых моментов	87
§ 1. Связанные состояния	87
§ 2. Нормировка связанных состояний	89
§ 3. Связанные состояния и ложные полюсы	90
§ 4. Резонансы	93
§ 5. Антисвязанные состояния	97
§ 6. Неравенство Баргмана	99
Глава 8. Асимптотические свойства $S(\lambda, k)$ при больших λ и фиксированном k	105
§ 1. Предварительные замечания	105
§ 2. Предварительные ограничения на положение полюсов при вещественных k	103
§ 3. Дальнейшие ограничения на полюсы для юкавских потенциалов при вещественных k	108
§ 4. Асимптотическое поведение $S(\lambda, k)$ при больших вещественных λ и фиксированных вещественных k	112
§ 5. Асимптотическое поведение при больших комплексных λ и вещественных k	116
§ 6. Асимптотическое поведение при больших комплексных λ и произвольных k	119
Глава 9. Аналитические свойства полной амплитуды рассеяния в t-плоскости при вещественной энергии	126
§ 1. Функции $f(E, t)$ и $S(\lambda, k)$	126
§ 2. Унитарность	127

§ 3. Асимптотические свойства в λ -плоскости и аналитичность относительно переменной передаваемого импульса в t -плоскости	170
§ 4. Асимптотическое поведение в t -плоскости и особенности в λ -плоскости	135
§ 5. Интерпретация полюсов в λ -плоскости	137
§ 6. Общие свойства траектории $\alpha(\sqrt{E})$	140
§ 7. Интегральное представление для $f(E, t)$	143
Глава 10. Обычное дисперсионное соотношение	146
§ 1. Введение	146
§ 2. Допущения и формальный аппарат в выводе Унцкера	147
§ 3. Рассмотрение волнового уравнения	148
§ 4. Аналитические свойства оператора резольвенты	152
§ 5. Амплитуда рассеяния	156
§ 6. Асимптотическое поведение при высоких энергиях	159
§ 7. Дисперсионное соотношение Кури	166
Глава 11. Представление Мандельстама	170
§ 1. Вводные замечания	170
§ 2. Метод Баукока — Мартина	171
§ 3. Представление Мандельстама	176
§ 4. Унитарность и представление Мандельстама	179
Глава 12. Обратная задача	185
§ 1. Введение	185
§ 2. Разложение по собственным функциям	186
§ 3. Операторы $A(x, y)$ и $K(x, y)$	189
§ 4. Уравнения Гельфанда — Левитана и Марченко	195
§ 5. Ядра $F(x)$ и $\Omega(x, y)$	197
§ 6. Изучение уравнений Гельфанда — Левитана и Марченко	200
§ 7. Потенциалы, ведущие к одинаковым фазам	205
§ 8. Баргмановские потенциалы	208
§ 9. Заключительные замечания	210
Глава 13. Обобщения теории обычного потенциального рассеяния	212
§ 1. Многоканальные задачи	212
§ 2. Сингулярные потенциалы	222
Приложение I	229

Приложение II	232
Приложение III	234
Приложение IV	241
Приложение V	246
Приложение VI	248
Литература	252
Дополнение. <i>Рассеяние с участием трех и более частиц</i> (А. М. Бродский, В. В. Толмачев) . . .	256
Литература	270

В. де Альфаро, Т. Редже

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ

Редактор *В. В. Рабин*

Художник *С. Г. Ципорин*

Художественный редактор *Е. И. Вескова*

Технический редактор *Л. В. Харьковская*

Корректор *И. С. Цветкова*

Сдано в производство 4/1 1966 г.

Подписано к печати 15/VII 1966 г.

Бумага $84 \times 108 \frac{1}{32} = 4,31$ бум. л.

14,49 усл. печ. л.

Уч. изд. л. 11,96. Изд. № 2/3534

Цена 86 коп. Зак. № 18.

Тем. план 1966 г. изд-ва «Мир»,
пор. № 43

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой

Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете

Министров СССР

Измайловский проспект, 29