

*Н.Г. де Брёйн*

## **АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АНАЛИЗЕ**

Книга содержит элементарное изложение ряда методов, используемых в анализе для получения асимптотических формул. Изложение весьма своеобразное — каждая глава состоит из небольшого введения, объясняющего суть данного метода, и некоторого количества удачно подобранных примеров (иногда довольно сложных), иллюстрирующих применение этого метода. В конце глав приводятся упражнения для самостоятельного решения.

Важность излагаемых в книге методов, наглядность и доступность изложения делают эту книгу очень ценной для всех начинающих знакомиться с методами получения асимптотических формул (студентов старших курсов и аспирантов университетов и технических вузов, физиков, инженеров различных специальностей). Книга представляет несомненный интерес также для тех, кто уже знаком с этой областью анализа.

### **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие	5
<i>Глава 1. Введение</i>	9
1.1. Что такое асимптотика?	9
1.2. Символ $O$	11
1.3. Символ $o$	19
1.4. Асимптотическое равенство	19
1.5. Асимптотические ряды	20
1.6. Элементарные действия с асимптотическими рядами	24
1.7. Асимптотические оценки и вычислительная математика	28
1.8. Упражнения	30
<i>Глава 2. Неявные функции</i>	32
2.1. Введение	32
2.2. Формула обращения Лагранжа	33
2.3. Применения	34
2.4. Более сложный случай	36
2.5. Метод итераций	41
2.6. Корни уравнений	42
2.7. Асимптотические итерации	44
2.8. Упражнения	46
<i>Глава 3. Суммирование</i>	47
3.1. Введение	47
3.2. Случай $a$	48
3.3. Случай $b$	50
3.4. Случай $c$	51
3.5. Случай $d$	52
3.6. Формула суммирования Эйлера — Маклорена	55
3.7. Пример	58
3.8. Замечание	58

3.9. Другой пример	59
3.10. Формула Стирлинга для $\Gamma$ -функции в комплексной плоскости	63
3.11. Знакопеременные суммы	66
3.12. Применение формулы суммирования Пуассона	71
3.13. Преобразование Абеля	76
3.14. Упражнения	79
<i>Глава 4. Метод Лапласа для оценки интегралов</i>	81
4.1. Введение	81
4.2. Общий случай	85
4.3. Максимум на границе	87
4.4. Асимптотические разложения	88
4.5. Асимптотическое поведение гамма-функции	92
4.6. Кратные интегралы	94
4.7. О применениях	96
4.8. Упражнения	100
<i>Глава 5. Метод перевала</i>	102
5.1. Метод	102
5.2. Геометрическая интерпретация	105
5.3. Поверхности без вершин	107
5.4. Наибыстрейший спуск	109
5.5. Наибыстрейший спуск в концевой точке	111
5.6. Второй этап	112
5.7. Простой общий случай	113
5.8. Контур постоянной высоты	115
5.9. Замкнутый контур	117
5.10. Область влияния точки перевала	117
5.11. Примеры	119
5.12. Малые возмущения	124
5.13. Упражнения	130
<i>Глава 6. Применения метода перевала</i>	131
6.1. Число разбиений конечного множества на классы	132
6.2. Асимптотическое поведение $d_n$	133
6.3. Другой метод	138
6.4. Сумма $S(s, n)$	139
6.5. Асимптотическое поведение $P$	143
6.6. Асимптотическое поведение $Q$	147
6.7. Окончательная оценка $S(s, n)$	151
6.8. Обобщенная гамма-функция	152
6.9. Целая функция $G_0(s)$	156
6.10. Окончательная оценка $G(s)$	165
6.11. Упражнения	167
<i>Глава 7. Непрямые методы</i>	168
7.1. Прямые и непрямые асимптотические методы	168

7.2. Тауберовы теоремы	171
7.3. Дифференцирование асимптотических формул	174
7.4. Аналогичная задача	176
7.5. Метод Караматы	179
7.6. Упражнения	183
<i>Глава 8. Итерации функций</i>	185
8.1. Введение	185
8.2. Итерации функции	185
8.3. Быстрая сходимость	188
8.4. Медленная сходимость	191
8.5. Подготовка	192
8.6. Итерации синуса	195
8.7. Другой метод	198
8.8. Окончание исследования итераций синуса	203
8.9. Об одном неравенстве, содержащем бесконечные ряды	206
8.10. Итерационная задача	209
8.11. Упражнения	216
<i>Глава 9. Дифференциальные уравнения</i>	217
9.1. Введение	217
9.2. Уравнение Риккати	219
9.3. Случай неустойчивости	226
9.4. Применение к линейному уравнению второго порядка	229
9.5. Случай осцилляции	232
9.6. Более общие случаи осцилляции	240
9.7. Упражнения	243

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла на основе курса лекций, прочитанного в 1954/55 учебном году в Математическом Центре (Амстердам) и повторенного в Эйнховене в 1956/57 году. Цель книги — научить читателя асимптотическим методам на детальном разборе ряда примеров; мы надеемся, что она будет полезна для начинающих, которые имеют серьезное желание овладеть техникой асимптотических оценок.

Хотя асимптотические методы никоим образом не являются новой областью, посвящать им книги и специальные курсы стали лишь сравнительно недавно. Причина этого, возможно, состоит в том, что сейчас обязательные университетские курсы анализа сокращены в пользу более современных направлений математики. Поэтому сейчас владение аналитической техникой далеко не так широко распространено, как раньше. С другой стороны, и в теоретической и в прикладной математике имеется так много задач асимптотической природы, что мы не можем позволить себе пренебречь этим предметом. Поэтому весьма желательно дать специальную возможность совершенствоваться в технике асимптотических оценок тем, чьи знания исчерпываются общим курсом анализа.

Читатель не найдет в этой книге чего-либо похожего на общую теорию. Большинство асимптотических методов крайне гибки, и обычно бывает невозможно сформулировать единственную теорему, включающую все возможные приме-

нения данного метода. Любая попытка обобщения в действительности привела бы к ограничению возможностей.

Обычно в математике приходится выбирать между двумя возможностями: говорить все больше и больше о все более конкретном, либо говорить все меньше и меньше о все более общем. Однако в таком практически важном разделе анализа, как рассматриваемый здесь, наиболее правильно будет сказать настолько много, насколько это возможно в данной ситуации. И так как невозможно включить все в одну книгу, приходится рассматривать в основном примеры, делая обобщения лишь тогда, когда это безусловно необходимо.

Выбор материала для книги такого объема, как эта, конечно, совсем произволен. Читатель найдет здесь развернутое исследование метода перевала (гл. 4, 5, 6), большая доля внимания уделена итерациям (гл. 8). С другой стороны, в отношении тауберовых теорем (в гл. 7) и асимптотики решений дифференциальных уравнений (гл. 9) эта книга дает лишь малую часть того, на что мог бы надеяться читатель. И, что еще хуже, здесь нет ничего из аналитической теории чисел, так как это потребовало бы слишком много места. С другой стороны, по аналитической теории чисел имеется так много замечательных книг, что в еще одном учебнике, пожалуй, нет необходимости. Но, несомненно, любому, кто хотел бы специализироваться в асимптотике, следовало бы изучить аналитическую теорию чисел с ее богатым выбором прекраснейших асимптотических задач.

Многие вопросы в этой книге изложены не наикратчайшим образом, так как в ней делается попытка показать хотя бы до некоторой степени, какие соображения приводят к определенному методу. Конечно, в этом отношении нельзя идти слишком далеко, ибо математик, разумеется, не может публиковать все содержимое своей корзины для бумаг.

В некоторых случаях даны два или даже несколько подходов к решению одной и той же задачи, чтобы читатель мог сравнить различные методы. Так, например, приведено несколько доказательств формулы Стирлинга; задача из раздела 4.7 решается второй раз в гл. 6; задача об итерациях синуса дважды решается в гл. 8.

В целом автор старался рассматривать оригинальные задачи и результаты, включая в книгу лишь те из хорошо известных фактов, которые совершенно необходимы. Конечно, в подобной области трудно решить, является ли что-нибудь сказанное действительно новым, особенно, когда идеи хорошо известны. По-видимому, прежде не были опубликованы результаты следующих разделов: 3.9, 4.7, вся гл. 6, гл. 8, начиная с раздела 8.4 и дальше, и, возможно, даже разделы 2.4, 9.2 и 9.3.

Эта книга написана не исключительно для математиков, но также для физиков и для инженеров, достаточно знающих анализ, включая элементы теории аналитических функций. В целом она не является легким чтением ни для какой категории читателей: изложение асимптотических методов трудно тем, что требует постоянного внимания и аккуратности. Для тех, кто найдет изложение книги слишком трудным, может быть, приятно знать, что главы этой книги можно изучать практически независимо друг от друга. Единственным исключением являются гл. 5 и 6, опирающиеся на гл. 4. Кроме того, введение, конечно, является фундаментом для всей книги.

Большинство глав начинается с простых вещей, а кончается довольно сложными примерами. В конце каждой главы дано несколько упражнений. Даже когда они очень трудны, для их решения не требуется методов, отличных от изложенных в тексте.

В этой книге почти не приводится никаких ссылок, потому что материал так стар, что дать ссылки точно было бы

очень трудно. За краткой библиографией по асимптотическим методам мы отсылаем к книге Erdélyi A., *Asymptotic Expansions*, Dover Publ., 1956, которая содержит также намного более полное изложение методов асимптотики дифференциальных уравнений, чем гл. 9 этой книги.

Хочу предостеречь читателей: эта книга не может служить энциклопедией асимптотических оценок. В ней нельзя найти даже асимптотических формул для функций Бесселя. Внимание сосредоточено в основном на методах. Задачи сами по себе не так уж важны; их выбор основан скорее на поучительности, чем на важности.

Октябрь 1957.

*Н. Г. де Брёйн*

**ВВЕДЕНИЕ****1.1. Что такое асимптотика?**

Ответить на этот вопрос почти столь же трудно, как и ответить на вопрос „Что такое математика?“ Тем не менее мы попытаемся дать кое-какие объяснения слову „асимптотика“.

Часто случается, что нам нужно вычислить определенную каким-либо образом величину, а это вычисление приводит к чрезвычайно большому числу действий, так что их выполнение становится практически невозможным. В таких случаях настоящей находкой может оказаться какой-либо иной метод получения дополнительной информации об этой величине, позволяющий найти ее значение хотя бы приближенно. Обычно такой метод (как заметил Лаплас) „тем более точен, чем более необходим“; мы получаем тем более точное приближение к искомой величине, чем больше действий необходимо для ее прямого вычисления. В подобном положении мы говорим об асимптотической оценке или об асимптотической формуле.

Это определение, конечно, весьма расплывчато. Однако если мы попытаемся высказаться более точно, то в наше определение или не войдет многое из того, что стоило бы называть асимптотическими оценками, или войдет почти весь математический анализ. Трудно сформулировать определение таким образом, чтобы формула Стирлинга (1.1.1) относилась к асимптотическим оценкам, а такая формула, как

$$\int_0^{\infty} (1+x^2)^{-1} dx = \pi/2, \text{ не относилась. Очевидная причина,}$$

по которой последнюю формулу не называют асимптотической, состоит в том, что она относится к той части анализа, которая уже имеет свое название: интегральное исчисление. Вообще наиболее надежным и отнюдь не самым



неясным является следующее определение: асимптотические оценки — это раздел анализа, имеющий дело с задачами того же типа, что и рассмотренные в этой книге.

Типичной асимптотической формулой (и к тому же одной из наиболее давно известных) является уже упоминавшаяся выше формула Стирлинга

$$(1.1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Действительно, при любом  $n$  вычисление  $n!$  не сопряжено ни с какими теоретическими трудностями, но чем больше  $n$ , тем больше число операций, необходимых для этого вычисления. Формула Стирлинга дает удобное приближение  $e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ , и чем больше  $n$ , тем меньше относительная погрешность.

Различные доказательства формулы (1.1.1) и ее обобщений мы еще получим в этой книге (см. разд. 3.7, 3.10, 4.5, 6.9).

Приведем еще одну знаменитую асимптотическую формулу, намного более глубокую, чем предыдущая, и выходящую за рамки этой книги. Для любого положительного  $x$  обозначим через  $\pi(x)$  число простых чисел, не превосходящих  $x$ . Так называемый закон распределения простых чисел гласит, что

$$(1.1.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{(x/\ln x)} = 1$$

(см., например, Ингам А. Е., Распределение простых чисел, М., 1936).

Приведенные выше формулы являются предельными соотношениями и в том виде, в каком они написаны, не пригодны для вычислительных целей. Действительно, из формулы (1.1.1) мы не можем сделать никакого заключения о величине  $n!$  ни для одного частного значения  $n$ . Это утверждение относится к бесконечному числу значений  $n$  и, как это ни странно, ничего не говорит ни об одном частном значении  $n$ .

Чтобы полнее исследовать это явление, перепишем формулу (1.1.1) в виде

$$(1.1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1, \quad \text{или} \quad f(n) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Эта формула говорит нам только о существовании функции  $N(\epsilon)$  со следующим свойством:

$$(1.1.4) \text{ при любом } \epsilon > 0 \text{ из } n > N(\epsilon) \text{ следует } |f(n) - 1| < \epsilon.$$

Доказывая соотношение  $f(n) \rightarrow 1$ , обычно получают в явном или в скрытом виде какие-то сведения вида (1.1.4) с некоторой конструкцией соответствующей функции  $N(\epsilon)$ . Ясно, что знание функции  $N(\epsilon)$  на самом деле дает некоторую численную информацию о  $f(n)$ . Однако, используя обозначение  $f(n) \rightarrow 1$ , мы отбрасываем эту информацию, так как знание конкретного вида функции  $N(\epsilon)$  заменяется при этом лишь утверждением, что такая функция существует.

В известной степени одной из причин успехов анализа является введение обозначения, отбрасывающего именно такую информацию и оставляющего то, что еще полезно. Даже на совершенно простой теореме, скажем на теореме  $\lim a_n b_n = \lim a_n \lim b_n$ , легко убедиться, что доказать существование функции  $N(\epsilon)$  значительно легче, чем построить новую  $N(\epsilon)$  по двум прежним.

## 1.2. Символ $O$

Несколько более слабый способ отбрасывания информации дает обозначение  $O$ , введенное Бахманом и Ландау<sup>1)</sup>. Это обозначение отбрасывает уже не функцию, а только число. Это значит, что оно заменяет знание числа с некоторыми свойствами утверждением, что такое число существует. При обозначении  $O$  теряется значительно меньше информации, чем при обозначении  $\lim$ , и оно все еще довольно удобно в обращении.

Допустим, что мы имеем следующую точную информацию о последовательности  $\{f(n)\}$ :

$$(1.2.1) \quad |f(n) - 1| \leq \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Тогда, очевидно, мы имеем и соответствующую функцию  $N(\epsilon)$  со свойством (1.1.4), именно  $N(\epsilon) = 3\epsilon^{-1}$ . Поэтому

$$(1.2.2) \quad f(n) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

<sup>1)</sup> См. Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 2, Leipzig, 1927, S. 3—5.

Часто случается так, что информации (1.2.1) вполне достаточно для нашей задачи, а утверждение (1.2.2) непригодно для использования. Случается и так, что (1.2.1) остается полезным после замены 3 на 100 000 и вообще на любую другую постоянную. В таком случае нас устроило бы следующее утверждение:

$$(1.2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Существует такое число } A \text{ (не зависящее от } n), \\ \text{что } |f(n) - 1| \leq \frac{A}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{array} \right.$$

Логические связи между нашими формулами таковы:

$$(1.2.1) \Rightarrow (1.2.3) \Rightarrow (1.2.2).$$

Утверждение (1.2.3) символически записывается в виде

$$(1.2.4) \quad f(n) - 1 = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В литературе встречается несколько вариантов определения символа  $O$ , но расхождения между ними совершенно несущественны. Обычно символом  $O$  заменяют слова „величина, которая по абсолютному значению не превосходит постоянной, умноженной на ...“. Мы будем использовать символ  $O$  в смысле, отвечающем словам „величина, которая по абсолютному значению не превосходит постоянной, умноженной на абсолютное значение ...“. Иными словами, если  $S$  — какое-либо множество, а  $f$  и  $\varphi$  — действительные или комплексные функции, определенные на  $S$ , то формула

$$(1.2.5) \quad f(s) = O(\varphi(s)) \quad (s \in S)$$

означает, что существует такое положительное число  $A$ , не зависящее от  $s$ , что

$$(1.2.6) \quad |f(s)| \leq A |\varphi(s)| \quad (s \in S).$$

Если, в частности,  $\varphi(s) \neq 0$  при всех  $s \in S$ , то (1.2.5) означает просто, что отношение  $f(s)/\varphi(s)$  ограничено на  $S$ .

Приведем несколько очевидных примеров:

$$\begin{aligned} x^2 &= O(x) && (|x| < 2), \\ \sin x &= O(1) && (-\infty < x < \infty), \\ \sin x &= O(x) && (-\infty < x < \infty). \end{aligned}$$

Чаще всего соотношения вида (1.2.6) интересуют нас не на всем множестве  $S$ , а только на той его части, где эти соотношения дают нетривиальную информацию. Например, в формуле  $\sin x = O(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) стоит рассматривать лишь малые значения  $|x|$ . Однако неинтересные значения переменной, хотя они и несущественны для нас, вызывают иногда особые трудности.

Рассмотрим пример:

$$e^x - 1 = O(x) \quad (-1 < x < 1).$$

Ясно, что здесь интересны лишь малые значения  $x$ . На всей прямой соотношение  $e^x - 1 = O(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) не выполняется. Если указать, что интервал конечен, то размеры его уже не имеют значения.

С другой стороны, случается и так, что именно выбор интервала доставляет много забот. Тогда, чтобы избавиться от этих мелких неприятностей, пользуются некоторым видоизменением обозначения  $O$ , при котором теряется еще некоторая часть информации. Мы объясним это обозначение для случая, когда нас интересуют большие положительные значения  $x$  ( $x \rightarrow \infty$ ), но нетрудно ввести аналогичные обозначения и для  $x \rightarrow -\infty$ ,  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow c$ ,  $x \uparrow c$  (т. е. для  $x$ , стремящегося к  $c$  слева). Именно, мы будем писать

$$(1.2.7) \quad f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \rightarrow \infty),$$

если существует такое число  $a$ , что

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (a < x < \infty).$$

Другими словами, формула (1.2.7) означает существование таких чисел  $a$  и  $A$ , что

$$(1.2.8) \quad |f(x)| \leq A|\varphi(x)| \quad \text{при} \quad a < x < \infty.$$

Примеры:

$$\begin{array}{ll} x^2 = O(x) & (x \rightarrow 0); & x = O(x^2) & (x \rightarrow \infty); \\ e^{-x} = O(1) & (x \rightarrow \infty); & (\ln x)^6 = O(x^{1/2}) & (x \rightarrow \infty); \\ \frac{1}{\ln x} = O(1) & (x \rightarrow \infty); & \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} = O(x) & (x \rightarrow \infty). \end{array}$$

Во многих случаях формулы вида (1.2.7) можно сразу заменить формулами вида (1.2.5). Действительно, если справедливо соотношение (1.2.7), функции  $f$  и  $\varphi$  непрерывны на интервале  $0 \leq x < \infty$  и сверх того  $\varphi(x) \neq 0$  на этом интервале, то  $f(x) = O(\varphi(x))$  ( $0 \leq x < \infty$ ). Это следует из того, что отношение  $f/\varphi$  непрерывно, а значит, и ограничено на интервале  $0 \leq x \leq a$ .

Читателю следует заметить, что мы так и не определили, что означает само выражение  $O(\varphi(x))$ , а определили лишь смысл некоторой полной формулы, включающей это выражение. Ясно, что взятое изолированно выражение  $O(\varphi(x))$  и не может быть определено, во всяком случае так, чтобы формула (1.2.5) была эквивалентна выполнению условия (1.2.6). В самом деле,  $f(s) = O(\varphi(s))$ , очевидно, влечет за собой  $2f(s) = O(\varphi(s))$ . Если бы  $O(\varphi(s))$  само по себе что-либо означало, то мы получили бы  $f(s) = O(\varphi(s)) = 2f(s)$ , откуда  $f(s) = 2f(s)$ .

Неприятно, конечно, что приходится так неправильно употреблять знак равенства. Аналогичное положение может возникнуть, когда кто-нибудь, печатая на пишущей машинке, вместо слов „меньше, чем“ начинает писать  $= M$ , например, так:  $3 = M(5)$ . На вопрос: „Что это значит —  $M(5)$ ?“ — он должен ответить: „Нечто, что меньше, чем 5“. Таким образом, он быстро привыкает читать  $M$  как „нечто, что меньше, чем“, приближаясь к тем самым словам, которые употребили мы, вводя соотношение (1.2.5). После этого он пишет:  $M(3) = M(5)$  (меньшее, чем 3, является меньшим, чем 5), но, конечно, писать  $M(5) = M(3)$  уже нельзя. Ничего страшного он не видит и в таких формулах:  $4 = 2 + M(3)$ ,  $M(3) + M(2) = M(8)$ .

Символ  $O$  используется точно таким же образом, как описанный символ  $M$ . Разберем несколько примеров:

$$O(x) + O(x^2) = O(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

Это означает: для любой пары функций  $f$  и  $g$ , таких, что

$$f(x) = O(x) \quad (x \rightarrow 0), \quad g(x) = O(x^2) \quad (x \rightarrow 0),$$

мы имеем

$$f(x) + g(x) = O(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} O(x) + O(x^3) &= O(x^3) & (x \rightarrow \infty), \\ e^{O(1)} &= O(1) & (-\infty < x < \infty), \\ e^{O(x)} &= e^{O(x^2)} & (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Мы будем писать также формулы вида

$$e^x = 1 + x + O(x^2) \quad (x \rightarrow 0),$$

что означает  $e^x = 1 + x + f(x)$ , где  $f(x) = O(x^2)$  ( $x \rightarrow 0$ ), и вида

$$\frac{1}{x} O(1) = O(1) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (0 < x < \infty).$$

Последняя запись показывает, что если для функции  $f(x)$  справедливо  $f(x) = O(1)$  ( $0 < x < \infty$ ), то функцию  $x^{-1}f(x)$  можно разбить на сумму двух слагаемых  $g(x)$  и  $h(x)$ , таких, что  $g(x) = O(1)$ ,  $h(x) = O(x^{-2})$  ( $0 < x < \infty$ ). Доказательство очень просто: положим  $g(x) = 0$  при  $0 < x \leq 1$ ,  $g(x) = x^{-1}f(x)$  при  $x > 1$ ;  $h(x) = x^{-1}f(x)$  при  $0 < x \leq 1$ ,  $h(x) = 0$  при  $x > 1$ .

Можно дать следующее общее истолкование всех таких формул. Любое выражение, содержащее символ  $O$ , следует рассматривать как класс функций. Скажем, на отрезке  $0 < x < \infty$  сумма  $O(1) + O(x^{-2})$  означает класс всех функций вида  $f(x) + g(x)$ , где  $f(x) = O(1)$  ( $0 < x < \infty$ ),  $g(x) = O(x^{-2})$  ( $0 < x < \infty$ ), а выражение  $x^{-1}O(1) = O(1) + O(x^{-2})$  означает, что класс  $x^{-1}O(1)$  содержится в классе  $O(1) + O(x^{-2})$ . Иногда в левой части может стоять не класс, а отдельная функция, как в соотношении (1.2.7). Это означает, что функция, стоящая в левой части, входит в класс, стоящий в правой части.

Ясно, что знак равенства в действительности не подходит для таких соотношений, поскольку он предполагает симметрию, которой на самом деле нет. Действительно, например, соотношение  $O(x) = O(x^2)$  ( $x \rightarrow \infty$ ) справедливо, а соотношение  $O(x^2) = O(x)$  ( $x \rightarrow \infty$ ) не справедливо. Однако, поскольку предупреждение сделано и можно не опасаться ошибок из-за неправильного понимания знака равенства, мы его сохраним, хотя для этого и нет никаких других оснований, кроме привычки.

Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  — две такие функции, что  $\varphi(x) = O(\psi(x))$  ( $x \rightarrow \infty$ ) выполняется, а  $\psi(x) = O(\varphi(x))$  ( $x \rightarrow \infty$ ) не выполняется. Если третья функция  $f$  удовлетворяет условию

$$(1.2.9) \quad f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \rightarrow \infty),$$

то она, очевидно, удовлетворяет условию

$$(1.2.10) \quad f(x) = O(\psi(x)) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Если справедливо соотношение (1.2.9), то мы назовем его уточнением соотношения (1.2.10). Соотношение (1.2.9) мы назовем наилучшим возможным, если оно не может быть уточнено, т. е. если найдутся такие положительные постоянные  $a$  и  $A$ , что  $a|\varphi(x)| \leq |f(x)| \leq A|\varphi(x)|$  для всех достаточно больших значений  $x$ .

Например, соотношение

$$2x + x \sin x = O(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

является наилучшим возможным, так как левая часть заключена между  $x$  и  $3x$ . Точно так же соотношение

$$\ln(e^{2x \cos x} + e^x) = O(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

тоже является наилучшим возможным. Если  $x > 0$ , то левая часть не превосходит  $\ln(e^{2x} + e^x)$ , что в свою очередь меньше, чем  $\ln(e^{2x} + e^{2x}) = \ln 2 + 2x$ . С другой стороны,  $e^{2x \cos x} > 0$ , что дает оценку снизу  $\ln e^x = x$ .

Если  $m$  — целое положительное число, то имеет место оценка

$$(1.2.11) \quad e^{-x} = O(x^{-m}) \quad (x \rightarrow \infty)$$

( $x^m e^{-x}$  на отрезке  $0 \leq x \leq \infty$  достигает максимума при  $x = m$ ). Но ни при каком значении  $m$  соотношение (1.2.11) не является наилучшим возможным, поскольку всегда возможно улучшение  $e^{-x} = O(x^{-m-1})$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

Остановимся теперь на вопросе о равномерности. Начнем со следующего примера. Пусть  $S$  — множество значений  $x$ ,  $k$  — положительное число,  $f(x)$  и  $g(x)$  — произвольные функции. Тогда

$$(1.2.12) \quad (f(x) + g(x))^k = O((f(x))^k) + O((g(x))^k) \quad (x \in S).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} |f+g|^k &\leq (|f|+|g|)^k \leq \{2 \max(|f|, |g|)\}^k \leq \\ &\leq 2^k \max(|f|^k, |g|^k) \leq 2^k (|f|^k + |g|^k). \end{aligned}$$

Формула (1.2.12) означает, что найдутся такие  $A$  и  $B$ , что

$$|f(x)+g(x)|^k \leq A|f(x)|^k + B|g(x)|^k \quad (x \in S),$$

причем следует заметить, что  $A$  и  $B$  зависят от  $k$ , или, точнее, мы не знаем, существуют ли  $A$  и  $B$ , не зависящие от  $k$ .

С другой стороны, в соотношении

$$(1.2.13) \quad \left(\frac{k}{x^2+k^2}\right)^k = O(x^{-k}) \quad (1 < x < \infty)$$

постоянная, входящая в символ  $O$ , может быть выбрана не зависящей от  $k$  ( $0 < k < \infty$ ). В самом деле, мы имеем  $x^2+k^2 = (x-k)^2 + 2kx \geq 2kx$ , откуда

$$\left(\frac{k}{x^2+k^2}\right)^k \leq \frac{1}{(2x)^k}.$$

Для всех  $k > 0$  имеем  $2^{-k} < 1$ . Следовательно, можно выбрать число  $A$ , не зависящее от  $k$  (а именно,  $A=1$ ), так, чтобы

$$\left(\frac{k}{x^2+k^2}\right)^k \leq \frac{A}{x^k} \quad (1 < x < \infty, k > 0).$$

Этот факт можно выразить, сказав, что оценка (1.2.13) имеет место равномерно по  $k$ .

Можно также взглянуть на оценку (1.2.13) с несколько иной точки зрения. Функция  $k^k(x^2+k^2)^{-k}$  зависит от двух переменных  $x$  и  $k$ , так что ее можно рассматривать как функцию переменной точки в плоскости  $(x, k)$ . Тогда равномерность оценки (1.2.13) может быть выражена и таким образом

$$\left(\frac{k}{x^2+k^2}\right)^k = O(x^{-k}) \quad (1 < x < \infty, 0 < k < \infty).$$

Множество  $S$ , входящее в определение (1.2.6), является теперь частью плоскости  $(x, k)$ , описываемой неравенствами  $1 < x < \infty, 0 < k < \infty$ .

Заботиться о равномерности оценок часто приходится в положениях следующего рода. Мы хотим получить  $O$ -оценку



для функции  $f$ . Мы имеем для  $f(x)$  некоторое выражение, которое мы разбиваем на два слагаемых; способ, при помощи которого  $f(x)$  разбивается на эти слагаемые, зависит от параметра  $t$ . Оценивая оба слагаемых равномерно по  $x$  и  $t$ , получаем, например,

$$f(x) = O(x^2t) + O(x^4t^{-2}) \quad (x > 1, t > 1).$$

Далее мы хотим выбрать  $t$  таким образом, чтобы правая часть стала возможно меньше. Поскольку оценка равномерна, можно считать  $t$  равным некоторой функции от  $x$ . Это приводит к задаче: найти минимум  $x^2t + x^4t^{-2}$  при данном  $x$ . Минимум достигается при  $t = (2x^2)^{1/3}$ , и в точке минимума оба слагаемые имеют один и тот же порядок, а именно  $x^{8/3}$ . Следовательно,  $f(x) = O(x^{8/3})$  ( $x > 1$ ).

Чтобы получить этот результат, нет необходимости определять точное значение минимума. Можно рассуждать и так: пусть  $t_0$  таково, что  $x^2t$  и  $x^4t^{-2}$  имеют один и тот же порядок, скажем,  $t_0 = x^{2/3}$ . Это уже дает наилучший результат, так как, увеличивая  $t$ , мы увеличим первое слагаемое, а уменьшая  $t$ , увеличим второе. В обоих случаях результат будет хуже (или, во всяком случае, не лучше), чем при  $t = t_0$ .

В  $O$ -оценках, содержащих условия вида  $x \rightarrow \infty$ , имеются две постоянные [ $A$  и  $a$  в (1.2.8)]. Мы будем говорить, что такая оценка имеет место равномерно по  $k$  лишь в том случае, когда обе постоянные  $A$  и  $a$  могут быть выбраны независимо от  $k$ .

Пример. При каждом фиксированном  $k > 0$  имеем

$$k^2(1 + kx^2)^{-1} = O(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \infty),$$

но эта оценка не является равномерной по  $k$ . Действительно, если бы она была равномерной, то нашлись бы такие положительные числа  $A$  и  $a$ , не зависящие от  $k$ , что

$$k^2(1 + kx^2)^{-1} < Ax^{-1} \quad (x > a, k > 0).$$

Но тогда, положив  $k = x^2$ , мы получили бы, что  $A(1 + x^4) > x^5$  при всех  $x > a$ , а это невозможно.

С другой стороны, одну из постоянных  $A$  или  $a$  можно выбрать независимо от  $k$ . Мы можем взять  $a = k$ ,  $A = 1$ , так как

$$k^2(1 + kx^2)^{-1} < kx^{-2} < x^{-1} \quad (x > k, k > 0),$$

и можем взять  $a = 1$ ,  $A = k$ , так как

$$k^2(1 + kx^2)^{-1} < kx^{-2} < kx^{-1} \quad (x > 1, k > 0).$$

### 1.3. Символ $o$

Формула

$$(1.3.1) \quad f(x) = o(\varphi(x)) \quad (x \rightarrow \infty)$$

означает, что отношение  $f(x)/\varphi(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Это более сильное утверждение, чем соответствующая  $O$ -оценка: из соотношения (1.3.1) следует соотношение (1.2.7), поскольку из сходимости следует ограниченность при достаточно большом  $x$ .

Во всем остальном остаются в силе те соглашения, которые мы ввели для символа  $O$ : обозначение  $= o$  мы должны читать, как „равно величине, стремящейся к нулю, умноженной на“. Примеры:

$$\cos x = 1 + o(x) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$e^{o(x)} = 1 + o(x) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$n! = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$n! = e^{-n+o(1)} n^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$o(f(x)g(x)) = o(f(x))O(g(x)) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$o(f(x)g(x)) = f(x)o(g(x)) \quad (x \rightarrow 0).$$

В асимптотических оценках символы  $o$  имеют меньшее значение, чем  $O$ , поскольку они несут в себе меньше информации. Если какая-либо величина стремится к нулю, мы обычно хотим знать, с какой скоростью происходит это стремление.

### 1.4. Асимптотическое равенство

Мы будем говорить, что  $f(x)$  и  $g(x)$  асимптотически равны при  $x \rightarrow \infty$ , если отношение  $f(x)/g(x)$  стремится к единице. Записывать этот факт мы будем формулой

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Это обозначение мы будем использовать также и при любом другом способе стремления переменной к пределу (скажем,  $x \rightarrow -\infty$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $x \downarrow 0$ ,  $|z| \rightarrow 0$ ).

Строго говоря, символ  $\sim$  является излишним, поскольку соотношение  $f(x) \sim g(x)$  вполне удобно записывать в виде

$$f(x) = g(x)(1 + o(1)) \quad \text{или в виде} \quad f(x) = e^{o(1)}g(x).$$

Примеры:

$$x + 1 \sim x \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$\operatorname{sh} x \sim \frac{1}{2} e^x \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \rightarrow \infty) \quad [\text{ср. (1.1.1)}],$$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad (x \rightarrow \infty) \quad [\text{ср. (1.1.2)}].$$

Говоря об „асимптотическом поведении“ данной функции  $f(x)$ , можно иметь в виду асимптотическую информацию любого рода. Однако обычно под этими словами подразумевают простую функцию  $g(x)$ , асимптотически равную  $f(x)$ . Здесь „простая“ означает, что способ точного вычисления ее значений не становится исключительно сложен, когда  $x$  очень велико. Например, с некоторой точки зрения  $n!$  много проще, чем  $e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ , но с точки зрения асимптотических свойств последнее выражение проще.

Слова „асимптотическая формула для  $f(x)$ “ обычно употребляются в том же узком смысле, т. е. в них речь идет о формуле  $f(x) \sim g(x)$ .

### 1.5. Асимптотические ряды

Часто бывает так, что для функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  имеется бесконечная последовательность  $O$ -оценок, причем каждая следующая оценка как бы усвершенствует предыдущую. Особенно часто встречаются последовательности такого вида: имеется последовательность функций  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , удовлетворяющих условиям

$$(1.5.1) \quad \varphi_1(x) = o(\varphi_0(x)) \quad (x \rightarrow \infty), \quad \varphi_2(x) = o(\varphi_1(x)) \quad (x \rightarrow \infty), \dots$$

и последовательность постоянных  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , таких, что для  $f(x)$  имеет место последовательность  $O$ -оценок

$$(1.5.2) \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = O(\varphi_0(x)) & (x \rightarrow \infty), \\ f(x) = c_0\varphi_0(x) + O(\varphi_1(x)) & (x \rightarrow \infty), \\ f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + O(\varphi_2(x)) & (x \rightarrow \infty), \\ \dots & \dots \\ f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots \\ \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + O(\varphi_n(x)) & (x \rightarrow \infty) \\ \dots & \dots \end{array} \right.$$

Очевидно, что вторая формула усовершенствует первую, поскольку

$$c_0\varphi_0(x) + O(\varphi_1(x)) = (c_0 + o(1))\varphi_0(x) = O(\varphi_0(x)) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Аналогично третья формула усовершенствует вторую и т. д.

Чтобы записать все множество формул (1.5.2) одной формулой, мы воспользуемся следующим обозначением:

$$(1.5.3) \quad f(x) \approx c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Правую часть этого выражения мы назовем *асимптотическим рядом* для  $f(x)$ , или *асимптотическим разложением* функции  $f(x)$ . Это понятие было впервые введено Пуанкаре.

Нетрудно убедиться, что при данных  $\varphi_k$  и  $f$  величины  $c_k$  определяются единственным образом, если асимптотическое разложение  $f$  по  $\varphi_k$  существует. В самом деле, допустим, что справедливо соотношение (1.5.3) и что имеется другой асимптотический ряд

$$f(x) \approx d_0\varphi_0(x) + d_1\varphi_1(x) + d_2\varphi_2(x) + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Обозначив через  $k$  наименьшее из чисел  $n$ , для которых  $c_n \neq d_n$ , после вычитания получим

$$0 = (c_k - d_k)\varphi_k(x) + O(\varphi_{k+1}(x)).$$

Разделив на  $c_k - d_k$ , получим  $\varphi_k(x) = O(\varphi_{k+1}(x))$ , что противоречит условию  $\varphi_{k+1}(x) = o(\varphi_k(x))$ .

Может случиться, что все коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, \dots$  в формулах (1.5.2) равны нулю. Тогда условимся писать

$$f(x) \approx 0 \cdot \varphi_0(x) + 0 \cdot \varphi_1(x) + 0 \cdot \varphi_2(x) + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Это значит, что  $f(x) = O(\varphi_n(x))$  ( $x \rightarrow \infty$ ) для всех  $n$  (но не обязательно равномерно по  $n$ ). Например, поскольку  $e^{-x} = O(x^{-n})$  ( $x \rightarrow \infty$ ) при всех  $n$ , то мы можем написать

$$(1.5.4) \quad e^{-x} \approx 0 \cdot 1 + 0 \cdot x^{-1} + 0 \cdot x^{-2} + \dots \quad (x \rightarrow \infty)$$

Ряд вида (1.5.3) не обязательно сходится. На первый взгляд выглядит странным, что подобный процесс, дающий все более и более точное приближение, не оказывается автоматически сходящимся. Причина этого заключается в том, что сходимость является некоторым свойством ряда при фиксированном  $x_0$ , в то время как  $O$ -оценки (1.5.2) относятся не к фиксированному  $x = x_0$ , а к  $x \rightarrow \infty$ . Сходимость ряда (1.5.3), скажем, для всех  $x > 0$ , означает, что для каждого фиксированного  $x$  ряд обладает некоторым свойством при  $n \rightarrow \infty$ . С другой стороны, утверждение, что ряд является асимптотическим разложением функции  $f(x)$ , означает, что этот ряд обладает тем же свойством при фиксированном  $n$  и при  $x \rightarrow \infty$ .

Более того, даже если асимптотический ряд сходится, его сумма не обязана быть равной  $f(x)$ ; формула (1.5.4) дает нам такой пример. Можно даже подобрать функции  $f(x)$ ,  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ , ... таким образом, чтобы ряд (1.5.3) сходился при всех  $x$  и в то же время не являлся бы асимптотическим рядом своей суммы.

Простейшим примером расходящегося асимптотического ряда является следующий. Рассмотрим функцию  $f(x)$ , определенную формулой

$$(1.5.5) \quad f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

(с точностью до постоянного слагаемого эта функция совпадает с интегральной экспонентой  $Ei(x)$ ). Интегрируя по частям, получаем

$$(1.5.6) \quad f(x) = \frac{e^t}{t} \Big|_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

Первый член в правой части равен  $x^{-1}e^x - e$ , а второй — более высокого порядка малости. В самом деле, разбивая

интеграл на два слагаемых, получаем

$$\int_1^{x/2} t^{-2} e^t dt < \int_1^{x/2} e^t dt < e^{x/2},$$

$$\int_{x/2}^x t^{-2} e^t dt < \int_{x/2}^x \left(\frac{x}{2}\right)^{-2} e^t dt < 4x^{-2} e^x.$$

Так как  $-e$ ,  $e^{x/2}$  и  $4x^{-2}e^x$  равны  $O(x^{-2}e^x)$ , то

$$f(x) = x^{-1}e^x + O(x^{-2}e^x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Дальнейшее усовершенствование оценки мы получаем, повторяя ту же операцию. Интегрируя по частям интеграл в равенстве (1.5.6), находим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^t}{t} \Big|_1^x + \frac{e^t}{t^2} \Big|_1^x + \int_1^x \frac{2e^t}{t^3} dt = \\ &= \frac{e^t}{t} \Big|_1^x + \frac{e^t}{t^2} \Big|_1^x + \frac{2e^t}{t^3} \Big|_1^x + \int_1^x \frac{3!e^t}{t^4} dt \end{aligned}$$

и вообще ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$f(x) = e^t \left( \frac{1}{t} + \frac{1!}{t^2} + \frac{2!}{t^3} + \dots + \frac{(n-1)!}{t^n} \right) \Big|_1^x + n! \int_1^x \frac{e^t}{t^{n+1}} dt.$$

Последний интеграл равен  $O(x^{-n-1}e^x)$  при  $x \rightarrow \infty$  и при фиксированном  $n$ . Это опять можно доказать, разбивая промежуток интегрирования на две части, а именно  $(1, x/2)$  и  $(x/2, x)$ . Итак, при каждом  $n$  имеем

$$e^{-x} f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots + \frac{(n-1)!}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

откуда следует

$$e^{-x} f(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \dots \quad (x \rightarrow \infty).$$

Ряд в правой части не сходится ни при одном значении  $x$ .

Простым, хотя и тривиальным, классом асимптотических рядов является класс сходящихся степенных рядов. Пусть  $f(z)$  — сумма сходящегося степенного ряда

$$(1.5.7) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

причем  $|z| \leq p$ , где  $p$  — любое положительное число, меньшее радиуса сходимости. Тогда

$$(1.5.8) \quad f(z) \approx a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (|z| \rightarrow 0).$$

Доказать это очень просто. Из сходимости ряда при  $z = p$  следует ограниченность его общего члена, т. е.  $|a_n| p^n \leq A$  при всех  $n$ . Далее, при любом  $n$  и при  $|z| \leq p/2$  имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq |z|^{n+1} A p^{-n-1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right),$$

откуда

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + O(z^{n+1}) \quad \left( |z| < \frac{p}{2} \right).$$

Это и доказывает наше утверждение.

Ясно, что в этих рассуждениях было совершенно безразлично, является ли переменная  $z$  комплексной, действительной или действительной и положительной.

### 1.6. Элементарные действия с асимптотическими рядами

Для простоты мы ограничимся в наших рассуждениях асимптотическими рядами вида

$$(1.6.1) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (x \rightarrow 0),$$

хотя аналогичные выводы можно было бы сделать и для рядов многих других видов.

Ряд (1.6.1) является степенным рядом (по степеням  $x$ ), и независимо от его сходимости мы будем называть его формальным степенным рядом.

Если для таких формальных степенных рядов определить естественным образом сложение и умножение, то множество всех формальных степенных рядов станет коммутативным кольцом, единицей которого будет ряд  $1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$  (мы обозначим его  $I$ ). Для рядов  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  и  $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$  (мы будем обозначать их символами  $A$  и  $B$  соответственно) определим сумму и произведение равенствами

$$A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \dots,$$

$$AB = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots$$

Если  $a_0 \neq 0$ , то существует единственный ряд  $C$ , такой, что  $AC = I$ . Его коэффициенты  $c_0, c_1, c_2, \dots$  определяются последовательно из уравнений

$$a_0 c_0 = 1, \quad a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0, \quad a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 = 0, \dots$$

Далее, предположив, что  $b_0 = 0$ , мы можем определить формальный степенной ряд, получающийся в результате подстановки ряда  $B$  в ряд  $A$ . Этот новый ряд обозначим через  $A(B)$ <sup>1</sup>). Определим его следующим образом. Пусть  $c_{kn}$  — коэффициент при  $x^k$  в ряде  $a_0 I + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_n B^n$ . Легко видеть, что  $c_{kk} = c_{k, k+1} = c_{k, k+2} = \dots$ . Полагая  $c_{kk} = c_k$ , мы можем написать

$$\begin{aligned} & a_0 I + a_1 B + \dots + a_n B^n = \\ & = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + c_{n+1, n} x^{n+1} + c_{n+2, n} x^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Теперь положим

$$\begin{aligned} A(B) = c_0 + c_1 x + \dots \\ \dots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Итак, ряд  $A(B)$  получается подстановкой ряда  $B$  в ряд  $A$  вместо  $x$  и приведением подобных членов.

Следующей операцией над формальными рядами является дифференцирование. Производную ряда  $A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  определим формулой

$$A' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots,$$

т. е. при помощи формального почленного дифференцирования.

Известно, что если  $A$  и  $B$  — степенные ряды с отличным от нуля радиусом сходимости, то все эти формальные действия в точности соответствуют тем же действиям над суммами  $A(x)$  и  $B(x)$  этих рядов. Например, если  $A(B) = C$ , то ряд  $C$  имеет отличный от нуля радиус сходимости, и внутри круга этого радиуса  $A\{B(x)\} = C(x)$ .

Если говорить об асимптотических рядах вместо сходящихся степенных рядов, то мы имеем совершенно анало-

<sup>1</sup>) Отметим разницу между обозначениями  $A(B)$  и  $AB$ . Формула  $A(B) = C$  соответствует формальному тождеству  $A\{B(x)\} = C(x)$ , в то время как  $AB = D$  означает, что  $D(x)$  является формальным произведением  $A(x)$  на  $B(x)$ .



гичное положение, за исключением того, что вопрос о дифференцировании требует особой осторожности. Действительно, пусть  $A(x)$  и  $B(x)$  — функции, определенные в окрестности  $x=0$  и имеющие асимптотические разложения

$$A(x) \approx A \quad (x \rightarrow 0), \quad B(x) \approx B \quad (x \rightarrow 0).$$

Заметим, что  $A(x)$  обозначает функцию и  $A$  обозначает формальный ряд  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ . Как уже было замечено в разд. 1.5, коэффициенты ряда  $A$  определяются по функции  $A(x)$  единственным образом в предположении, что  $A(x)$  имеет асимптотическое разложение.

Нетрудно убедиться, что

$$(1.6.2) \quad A(x) + B(x) \approx A + B \quad (x \rightarrow 0),$$

$$(1.6.3) \quad A(x)B(x) \approx AB \quad (x \rightarrow 0).$$

Если  $a_0 \neq 0$ , то

$$(1.6.4) \quad \{A(x)\}^{-1} \approx A^{-1} \quad (x \rightarrow 0)$$

( $A^{-1}$  — по-прежнему решение уравнения  $A^{-1}A = I$ .) Далее, если  $b_0 = 0$ , то сложная функция  $A\{B(x)\}$  определена для всех достаточно малых значений  $x$  и

$$(1.6.5) \quad A\{B(x)\} \approx A(B) \quad (x \rightarrow 0).$$

Формула (1.6.2) очевидна. Докажем (1.6.3). Полагая  $AB = C$ , имеем для любого  $n$

$$A(x) = a_0 + \dots + a_n x^n + O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0),$$

$$B(x) = b_0 + \dots + b_n x^n + O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

и, следовательно,

$$A(x)B(x) = (a_0 + \dots + a_n x^n)(b_0 + \dots + b_n x^n) + O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0).$$

Но

$(a_0 + \dots + a_n x^n)(b_0 + \dots + b_n x^n) = (c_0 + \dots + c_n x^n)$  является линейной комбинацией  $x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{2n}$  и поэтому равно  $O(x^{n+1})$  при  $x \rightarrow 0$ . Отсюда

$$A(x)B(x) = c_0 + \dots + c_n x^n + O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0),$$

что и требовалось доказать.

Аналогичные доказательства можно дать для утверждений (1.6.4) и (1.6.5), причем соотношение (1.6.4) можно рассматривать как частный случай соотношения (1.6.5), так как  $A^{-1} = P(Q)$ , где  $P = a_0^{-1}(1 + x + x^2 + \dots)$ , а  $Q = a_0^{-1}(a_0 - A)$ .

Предположим теперь, что

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (x \rightarrow 0)$$

и что интеграл  $\int_0^x f(t) dt$  существует для достаточно малых значений  $x$ . Тогда законно почленное интегрирование

$$(1.6.6) \quad \int_0^x f(t) dt \approx a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \dots \quad (x \rightarrow 0).$$

Это легко доказать. Для любого  $n$  существуют такие постоянные  $A$  и  $a$ , что

$$|f(t) - a_0 - a_1 t - \dots - a_{n-1} t^{n-1}| < A |t|^n \quad (|t| < a),$$

откуда при  $|x| < a$  получаем

$$\left| \int_0^x f(t) dt - a_0 x - \frac{1}{2} a_1 x^2 - \dots - \frac{1}{n} a_{n-1} x^n \right| < \frac{A}{n+1} |x|^{n+1},$$

и соотношение (1.6.6) доказано.

При рассмотрении дифференцирования положение будет несколько иным. Если  $A(x)$  имеет асимптотическое разложение  $A(x) \approx A(x \rightarrow 0)$ , то производная  $A'(x)$  даже не обязательно существует, а если она и существует, то может не иметь асимптотического разложения. Например, функция  $e^{-1/x} \sin(e^{1/x})$  имеет асимптотический ряд

$$e^{-1/x} \sin(e^{1/x}) \approx 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots \quad (x \rightarrow 0, x > 0),$$

а ее производная

$$x^{-2} e^{-1/x} \sin(e^{1/x}) - x^{-2} \cos(e^{1/x})$$

не имеет подобного асимптотического разложения.

Однако почленное дифференцирование асимптотических рядов все же является законным, если удастся показать, что

производная тоже имеет асимптотическое разложение (в виде формального степенного ряда). Действительно, предположим, что

$$\begin{aligned} f(x) &\approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots & (x \rightarrow 0), \\ f'(x) &\approx b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots & (x \rightarrow 0), \end{aligned}$$

и докажем, что  $b_k = (k+1)a_{k+1}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Рассматривая при  $n \geq 1$  функцию

$$g_n(x) = f(x) - \left( b_0x + \frac{1}{2}b_1x^2 + \dots + \frac{1}{n}b_{n-1}x^n \right),$$

получаем

$$g'_n(x) = O(x^n) \quad (x \rightarrow 0).$$

Из теоремы о среднем следует, что  $g_n(x) - g_n(0) = O(x^{n+1})$  ( $x \rightarrow 0$ ). Поскольку  $n$  произвольно, это дает нам

$$f(x) \approx f(0) + b_0x + \frac{1}{2}b_1x^2 + \frac{1}{3}b_2x^3 + \dots \quad (x \rightarrow 0).$$

Теперь формула  $b_k = (k+1)a_{k+1}$  сразу получается, так как коэффициенты асимптотического ряда определяются единственным образом.

### 1.7. Асимптотические оценки и вычислительная математика

Целью асимптотических методов является получение  $O$ -оценок и  $o$ -оценок в случаях, когда воспользоваться определением функции для очень больших (или очень малых) значений аргумента слишком трудно. Случается даже так, что определение функции столь сложно, что уже для обычных значений переменной легче получить асимптотическую информацию, чем любую другую.

В разд. 1.1 мы уже говорили, что ни  $O$ -оценки, ни  $o$ -оценки в их обычном виде непосредственно не применимы для вычислительных целей. Однако почти во всех случаях, где имеются такие оценки, можно, пересмотрев доказательство, заменить  $O$ -оценки неравенствами, содержащими численные постоянные.

Для этого на каждом этапе наших действий мы должны указывать определенные числа или функции с определенными свойствами там, где при получении асимптотических оценок

мы ограничивались доказательством существования таких чисел или функций.

В большинстве случаев окончательные неравенства, полученные таким путем, очень грубы; постоянные, скажем, в тысячи раз больше, чем они могли бы быть. Причина этого в том, что неравенства получаются в результате большого числа шагов, а на каждом шаге постоянные завышаются раза в два. Очень часто можно избавиться от излишнего завышения, просмотрев все этапы доказательства более внимательно.

Но даже если асимптотическая оценка уже приведена к самому точному виду, это еще не значит, что она годится для вычислений. Следующий диалог между мисс В. — вычислительницей — и профессором А. — специалистом по асимптотическим оценкам — характерен во многих отношениях.

В.: Я хочу вычислить функцию  $f(x)$  для больших значений  $x$  с точностью 1%.

$$A.: f(x) = x^{-1} + O(x^{-2}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

В.: Мне очень жаль, но я ничего не поняла.

$$A.: |f(x) - x^{-1}| < 8x^{-2} \quad (x > 10^4).$$

В.: Но мое значение  $x$  равно всего лишь 100.

А.: Что же вы сразу этого не сказали? Мои оценки дают

$$|f(x) - x^{-1}| < 57\,000x^{-2} \quad (x \geq 100).$$

В.: Это для меня не ново. Я уже знаю, что  $0 < f(100) < 1$ .

А.: Я могу слегка улучшить мои оценки. Сейчас я вижу, что

$$|f(x) - x^{-1}| < 20x^{-2} \quad (x \geq 100).$$

В.: Но мне же нужна точность 1%, а не 20%.

А.: Но улучшить эту оценку уже почти невозможно. Почему бы Вам не взять  $x$  побольше?

В.:!!! Спасибо, я лучше обращусь к нашей электронной вычислительной машине.

Машина:  $f(100) = 0,01137\ 42259\ 34008\ 67153$ .

А.: Ну что я Вам говорил? Мои 20% ненамного больше 14% истинной ошибки.

В.:!!!...!

Через несколько дней мисс В. понадобилось вычислить  $f(1000)$ . Теперь уж она сначала обратилась к машине, но узнала, что той потребуется месяц непрерывной работы. Тогда она вновь обратилась к своему коллеге А., и на этот раз получила вполне удовлетворивший ее ответ.

## 1.8. Упражнения

1. Показать, что

$$\int_1^x \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t dt = ex - \frac{1}{2} e \ln x + O(1) \quad (x > 1).$$

[Указание. Сначала показать, что

$$e^{-1} (1 + t^{-1})^t = 1 - \frac{1}{2} t^{-1} + O(t^{-2}) \quad (t \geq 1).]$$

2. Показать, что

$$(x + 1 + O(x^{-1}))^x = ex^x + O(x^{x-1}) \quad (x \rightarrow \infty).$$

3. Доказать, что для любого  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\int_0^x (\ln y)^n dy = O(x (\ln x)^n) \quad (x \rightarrow 0).$$

4. Показать, что

$$t \int_2^\infty e^{-xt} (\ln x)^{-1} dx \approx \sum_0^\infty c_n (\ln t)^{-n-1} \quad (t \rightarrow 0, t > 0)$$

с коэффициентами

$$c_n = - \int_0^\infty e^{-y} (\ln y)^n dy.$$

[Указание. Использовать, что

$$\int_0^{2t} e^{-y} (\ln y)^n dy = O\left(\int_0^{2t} (\ln y)^n dy\right)$$

и применить результат предыдущего упражнения к этому интегралу.]

5. Доказать, что оценка

$$(xe^{2(x-n)})^n = O(e^{x^2+x}) \quad (x > 0)$$

имеет место равномерно по  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).[Указание. Найти максимум выражения  $(xe^{2(x-n)})^n e^{-x-x^2}$  при  $x > 0$  и при фиксированном  $n$ .]

6. Доказать следующую равномерную оценку

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \left| \int_0^u e^{i(n-v)t} dt \right| = O(\ln(1+ux)) + O(u)$$

$(x \geq 1, u > 0, -\infty < v < \infty).$

Здесь суммирование распространено на все целые  $n$ ,  $1 \leq n \leq x$ ;  $x$  — не обязательно целое.

[Указание. При  $p$  действительном и  $u > 0$

$$\left| \int_0^u e^{ipt} dt \right| \leq \min(u, 2|p|^{-1}).$$

## НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

## 2.1. Введение

Пусть функциональная зависимость  $x$  от  $t$  задана уравнением

$$f(x, t) = 0,$$

причем если уравнение имеет больше одного корня, то для каждого значения  $t$  указано, какой из корней должен быть выбран. Этот корень мы будем обозначать  $x = \varphi(t)$ . Задача состоит в определении асимптотического поведения функции  $\varphi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров, так как об общем случае мало что можно сказать. В общем случае задача довольно неопределенна, так как на самом деле мы хотим выразить асимптотическое поведение данной функции  $\varphi(t)$  в терминах элементарных функций или по крайней мере в терминах явных функций. При этом существенно, какие функции считать элементарными. Например, если бы еще не был введен логарифм, то вопрос об асимптотическом поведении положительного решения уравнения  $e^x - t = 0$  при  $t \rightarrow \infty$  был бы безнадежной проблемой. Но как только начинают рассматривать логарифм как функцию, пригодную для оценок, проблема полностью исчезает.

Во многих встречающихся в практике случаях можно выразить асимптотическое поведение неявной функции в терминах элементарных функций. Приведем любопытный пример, когда такого элементарного выражения нет, хотя доказать это довольно трудно. Если  $x$  задано уравнением

$$x(\ln x)^t - t^{2t} = 0, \quad x > 1,$$

то легко убедиться, что  $x = e^{t\varphi(t)}$ , где  $\varphi(t)$  — решение уравнения  $\varphi e^\varphi = t$ . При  $t \rightarrow \infty$  мы имеем для  $\varphi$  асимптотическое разложение (см. разд. 2.4), позволяющее определить  $\varphi(t)$  с ошибкой порядка  $(\ln t)^{-k}$ , где  $k$  произвольное, но фиксированное.

рованное число. Это значит, что мы имеем асимптотическую формулу для  $\ln x$ , но не для  $x$ . Иными словами, у нас нет такой элементарной функции  $\psi(t)$ , что  $x/\psi(t)$  стремится к единице при  $t \rightarrow \infty$ . Действительно, это означало бы существование асимптотической формулы для  $\varphi(t)$  с ошибкой порядка  $o(t^{-1})$ , и кажется невероятным, чтобы подобная формула вообще могла быть найдена.

В большинстве случаев, когда асимптотические формулы могут быть получены, они получаются довольно легко. Обычно это зависит от разложения в ряд по некоторым малым параметрам, большей частью в связи с формулой обращения Лагранжа. Эта формула относится к теории функций комплексного переменного, но те же самые результаты часто можно получить при помощи методов вещественного анализа. Часто можно применять метод итераций, хотя иногда это не удается (см. разд. 2.7).

## 2.2. Формула обращения Лагранжа <sup>1)</sup>

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности точки  $z=0$  комплексной плоскости. Предположив, что  $f(0) \neq 0$ , рассмотрим уравнение

$$(2.2.1) \quad w = \frac{z}{f(z)},$$

где  $z$  — неизвестное. Существуют две положительные постоянные  $a$  и  $b$ , такие, что при  $|w| < a$  наше уравнение имеет единственное решение в области  $|z| < b$  и это решение является аналитической функцией  $w$ :

$$(2.2.2) \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \quad (|w| < a),$$

при этом коэффициенты  $c_k$  можно найти по формулам

$$(2.2.3) \quad c_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} (f(z))^k \right\}_{z=0}.$$

<sup>1)</sup> См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, т. 1, М., 1933, § 7.32.



Обобщенная формула дает значения  $g(z)$ , где  $g$  — любая функция  $z$ , аналитическая в окрестности точки  $z=0$ :

$$(2.2.4) \quad g(z) = g(0) + \sum_1^{\infty} d_k \omega^k, \\ d_k = \frac{1}{k!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} \left\{ g'(z) (f(z))^k \right\}_{z=0}.$$

Формула (2.2.2), обычно называемая формулой обращения Лагранжа, является частным случаем более общей теоремы о неявной функции<sup>1)</sup>. Если  $f(z, \omega)$  — аналитическая функция  $z$  и  $\omega$  в некоторой области  $|z| < a_1$ ,  $|\omega| < b_1$ , причем  $f(0, 0) = 0$  и  $\partial f / \partial z \neq 0$  при  $z = \omega = 0$ , то существуют положительные числа  $a$  и  $b$ , такие, что для любого  $\omega$  в круге  $|\omega| < a$  уравнение  $f(z, \omega) = 0$  имеет единственное решение в круге  $|z| < b$  и это решение может быть разложено в степенной ряд  $z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega^k$ .

Мы не будем приводить здесь доказательства этих теорем, хотя в разд. 2.4 будет рассмотрен во всех подробностях один частный случай [см. (2.4.6)] несколько более общей теоремы.

### 2.3. Применения

Некоторые задачи об асимптотическом поведении неявных функций решаются прямым применением формулы Лагранжа. Например, рассмотрим положительное решение уравнения

$$(2.3.1) \quad xe^x = t^{-1}$$

при  $t \rightarrow \infty$ . Так как  $t^{-1}$  стремится к нулю, можно применить формулу Лагранжа (2.2.2) к уравнению  $ze^z = \omega$ , при этом  $f(z) = e^{-z}$ . Тогда можно утверждать, что существуют

<sup>1)</sup> См. Bieberbach L., Funktionentheorie, Bd. 1, 3e. Aufl., Leipzig — Berlin, 1930, Kap. VII, § 8.

(См. также Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М., ГТТИ, 1954, стр. 349.)

Замечание автора, что формула обращения Лагранжа является частным случаем этой общей теоремы, вряд ли справедливо, поскольку в общей теореме отсутствуют столь компактные формулы для коэффициентов. — *Прим. перев.*)

постоянные  $a > 0$  и  $b > 0$ , такие, что при  $|w| < a$  существует единственное решение  $z$ , удовлетворяющее условию  $|z| < b$ , а именно

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^{k-1}}{k!} w^k.$$

(в действительности ряд сходится при  $|w| < e^{-1}$ ). Отсюда ясно, что при  $t > a^{-1}$  существует единственное решение в круге  $|x| < b$ . Но поскольку  $x e^x$  возрастает от 0 до  $\infty$ , когда  $x$  возрастает от 0 до  $\infty$ , уравнение (2.3.1) имеет положительное решение и оно не может превосходить  $b$ , если  $t$  достаточно велико. Значит, при достаточно больших  $t$  именно это положительное решение разлагается в ряд

$$(2.3.2) \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} k^{k-1}}{k!} t^{-k},$$

и этот степенной ряд служит также асимптотическим разложением (см. разд. 1.5).

Нашим вторым примером будет положительное решение уравнения

$$(2.3.3) \quad x^t = e^{-x}$$

при  $t \rightarrow \infty$ . Функция  $x^t$  возрастает при  $x > 0$ , а функция  $e^{-x}$  убывает. Если заметить, что  $x^t$  мало на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ , за исключением  $x$ , очень близких к 1, то из рассмотрения графиков  $x^t$  и  $e^{-x}$  становится ясно, что наше уравнение имеет ровно один положительный корень, который не превосходит 1 и стремится к 1 при  $t \rightarrow \infty$ .

Положим теперь  $x = 1 + z$ ,  $t^{-1} = w$  и приведем уравнение к виду (2.2.1). Из уравнения  $x^t = e^{-x}$  мы получим уравнение

$$\frac{z}{f(z)} = w, \quad \text{где} \quad f(z) = -\frac{z(1+z)}{\ln(1+z)}.$$

Функция  $f(z)$  аналитична при  $z = 0$ :  $f(z) = -1 + c_1 z + \dots$ . Следовательно,

$$x = 1 - t^{-1} - c_1 t^{-2} + \dots$$

удовлетворяет уравнению (2.3.3) при достаточно больших  $t$ . Как и в предыдущем примере, существование единственного положительного решения, стремящегося к 1 при  $t \rightarrow \infty$ ,

обеспечивает разложимость этого решения в степенной ряд при достаточно больших  $t$ .

Наш третий пример будет иметь несколько иной характер. Рассмотрим уравнение

$$(2.3.4) \quad \cos x = x \sin x.$$

Из графиков функций  $x$  и  $\operatorname{ctg} x$  видно, что это уравнение имеет ровно по одному корню в каждом из интервалов  $n\pi < x < (n+1)\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Обозначая эти корни через  $x_n$ , поставим вопрос об асимптотическом поведении  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $\operatorname{ctg}(x_n - \pi n) = x_n \rightarrow \infty$ , имеем  $x_n - \pi n \rightarrow 0$ . Полагая  $x = \pi n + z$ ,  $(\pi n)^{-1} = \omega$ , находим, что  $\cos z = (\omega^{-1} + z) \sin z$  и, следовательно,

$$\omega = \frac{z}{f(z)}, \quad f(z) = \frac{z(\cos z - z \sin z)}{\sin z},$$

где  $f(z)$  аналитична в точке  $z = 0$  и  $f(0) = 1$ . Поэтому  $z$  разлагается в степенной ряд по степеням  $\omega$ , и мы получаем  $z = \omega + c_2 \omega^2 + c_3 \omega^3 + \dots$ . Следовательно, при достаточно большом  $n$

$$x_n = \pi n + \frac{1}{\pi n} + \frac{c_2}{(\pi n)^2} + \dots$$

Заметим, что  $c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0$ , так как  $f(z)$  — четная функция.

## 2.4. Более сложный случай

Рассмотрим уравнение

$$(2.4.1) \quad x e^x = t,$$

которое при положительном  $t$  имеет единственное положительное решение  $x$ , поскольку функция  $x e^x$  возрастает от 0 до  $\infty$ , когда  $x$  возрастает от 0 до  $\infty$ . Это решение мы будем обозначать просто  $x$  и будем интересоваться его поведением при  $t \rightarrow \infty$ .

Преобразовать это уравнение в уравнение типа Лагранжа значительно труднее, чем во всех предыдущих примерах. Будем действовать методом итераций. Запишем уравнение (2.4.1) в виде

$$(2.4.2) \quad x = \ln t - \ln x.$$

Имея какое-либо приближенное выражение для  $x$ , мы можем подставить его в правую часть уравнения (2.4.2) и получить новое приближение, более точное, чем прежнее. Заметим, что погрешность  $\Delta$  в значении  $x$  дает нам погрешность примерно  $\Delta/x$  в значении  $\ln x$ .

Мы должны с чего-то начать. Поскольку  $t \rightarrow \infty$ , то можно считать, что  $t > e$  и, следовательно,  $x > 1$ . Действительно, при  $0 < x \leq 1$  мы имели бы  $\ln t - \ln x \geq \ln t > \ln e = 1$ , в то время как левая часть уравнения (2.4.2) по предположению не превосходит единицы.

Из неравенства  $x > 1$  в силу уравнения (2.4.2) следует, что

$$x = \ln t - \ln x < \ln t.$$

Таким образом, мы начинаем с неравенства

$$1 < x < \ln t.$$

Из него следует, что  $\ln x = O(\ln \ln t)$ . Отсюда в силу уравнения (2.4.2)

$$x = \ln t + O(\ln \ln t).$$

В этой формуле, как и во всех остальных  $O$ -оценках в этом разделе, подразумевается, что  $t \rightarrow \infty$ .

Логарифмируя, находим, что

$$\ln x = \ln \ln t + \ln \left\{ 1 + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right) \right\} = \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.4.2), получаем второе приближение

$$(2.4.3) \quad x = \ln t - \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right).$$

Снова логарифмируя и подставляя результат в уравнение (2.4.2), получаем третье приближение

$$\begin{aligned} x &= \ln t - \ln \left\{ \ln t - \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right) \right\} = \\ &= \ln t - \ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)^2 + O\left(\frac{\ln \ln t}{(\ln t)^2}\right). \end{aligned}$$

Сделаем еще два шага. Вводя сокращенные обозначения

$$\ln t = L_1, \quad \ln \ln t = L_2,$$

получаем

$$\ln x = L_2 + \ln \left\{ 1 - L_2 L_1^{-1} + L_2 L_1^{-2} + \frac{1}{2} L_2^2 L_1^{-3} + O(L_2 L_1^{-3}) \right\},$$

и, поскольку член  $O(L_2 L_1^{-3})$  поглощает все члены вида  $L_2^p L_1^{-q}$  при  $q > 3$ , имеем

$$\begin{aligned} x &= L_1 - L_2 - \left\{ -L_2 L_1^{-1} + L_2 L_1^{-2} + \frac{1}{2} L_2^2 L_1^{-3} + O(L_2 L_1^{-3}) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -L_2 L_1^{-1} + L_2 L_1^{-2} \right\}^2 - \frac{1}{3} (L_2 L_1^{-1})^3 = \\ &= L_1 - L_2 + L_2 L_1^{-1} + \left\{ \frac{1}{2} L_2^2 - L_2 \right\} L_1^{-2} + \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{3} L_2^3 - \frac{3}{2} L_2^2 + O(L_2) \right\} L_1^{-3}. \end{aligned}$$

Можно показать, что следующий шаг даст

$$\begin{aligned} (2.4.4) \quad x &= L_1 - L_2 + L_2 L_1^{-1} + \left\{ \frac{1}{2} L_2^2 - L_2 \right\} L_1^{-2} + \\ &\quad + \left\{ -\frac{1}{3} L_2^3 - \frac{3}{2} L_2^2 + L_2 \right\} L_1^{-3} + \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{4} L_2^4 - \frac{11}{6} L_2^3 + 3L_2^2 + O(L_2) \right\} L_1^{-4}. \end{aligned}$$

При взгляде на эти формулы создается впечатление, что существует асимптотический ряд

$$(2.4.5) \quad x \approx L_1 - L_2 + L_2 P_0(L_2) L_1^{-1} + \\ + L_2 P_1(L_2) L_1^{-2} + L_2 P_2(L_2) L_1^{-3} + \dots,$$

где  $P_k(L_2)$  — многочлен степени  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Это можно доказать, тщательно исследуя операции, которые приводят к выражению (2.4.4) и к последующим приближенным формулам такого вида. Мы не будем здесь заниматься этим, потому что другим методом мы можем доказать более сильное утверждение: если  $t$  достаточно велико, то  $x$  представляет собой сумму сходящегося ряда такого вида.

Нам понадобится теорема Руше<sup>1)</sup>, состоящая в следующем.

Пусть  $D$  — ограниченная область комплексной плоскости, ее граница  $C$  — замкнутая жорданова кривая. Пусть, далее,

<sup>1)</sup> См., например, Титчмарш, Теория функций, М., 1951, § 3.42.

функции  $f(z)$  и  $g(z)$  аналитичны в  $D$  и на  $C$ , причем  $|f(z)| < |g(z)|$  на  $C$  [так что автоматически  $g(z) \neq 0$  на  $C$ ]. Тогда  $f(z) + g(z)$  имеет в  $D$  то же число нулей, что и  $g(z)$ , считая все нули с их кратностью. Для доказательства этой теоремы достаточно показать, что  $\arg(f + g)$  возрастает на ту же величину, что и  $\arg g$ , когда  $z$  обходит контур  $C$ . Но это следует из того, что функция  $\operatorname{Re} \frac{f+g}{g}$  положительна на  $C$  (так как  $|f| < |g|$ ), а потому изменение  $\arg \frac{f+g}{g}$  вдоль  $C$  не может равняться ни одному из чисел  $\pm 2\pi$ ,  $\pm 4\pi$ , ...

Наш метод исследования уравнения (2.4.2) построен по образцу обычного доказательства теоремы Лагранжа. Для сокращения записи введем обозначения

$$\begin{aligned}x &= \ln t - \ln \ln t + v, \\ \frac{1}{\ln t} &= \sigma, \quad \frac{\ln \ln t}{\ln t} = \tau.\end{aligned}$$

В этих обозначениях уравнение (2.4.2) запишется в виде

$$(2.4.6) \quad e^{-v} - 1 - \sigma v + \tau = 0.$$

На время мы забудем о связи, существующей между  $\sigma$  и  $\tau$ , и будем рассматривать их как малые независимые комплексные параметры. Мы покажем, что существуют такие положительные числа  $a$  и  $b$ , что при  $|\sigma| < a$ ,  $|\tau| < a$  уравнение (2.4.6) имеет единственное решение в области  $|v| < b$  и что это решение является аналитической функцией  $\sigma$  и  $\tau$  в области  $|\sigma| < a$ ,  $|\tau| < a$ .

Обозначим через  $\delta$  нижнюю грань  $|e^{-z} - 1|$  на окружности  $|z| = \pi$ . Ясно, что  $\delta > 0$ , а  $e^{-z} - 1$  имеет ровно один нуль внутри этой окружности, именно  $z = 0$ . Затем выберем положительное число  $a$  равным  $\delta/2(\pi + 1)$ . Тогда

$$|\sigma z - \tau| < \frac{\delta}{2} \quad (|\sigma| < a, \quad |\tau| < a, \quad |z| = \pi).$$

Отсюда  $|e^{-z} - 1| > |\sigma z - \tau|$  на окружности  $|z| = \pi$ , и по теореме Руше уравнение  $e^{-z} - 1 - \sigma z + \tau = 0$  имеет ровно один корень в круге  $|z| < \pi$ . Обозначая этот корень через  $v$ , имеем по теореме Коши

$$(2.4.7) \quad v = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{-e^{-z} - \sigma}{e^{-z} - 1 - \sigma z + \tau} z dz,$$

где интегрирование проводится по окружности  $|z| = \pi$  в положительном направлении.

Для всех  $z$  на пути интегрирования  $|\sigma z| + |\tau| < < 1/2 |e^{-z} - 1|$ , так что можно написать разложение в ряд

$$(2.4.8) \quad (e^{-z} - 1 - \sigma z + \tau)^{-1} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (e^{-z} - 1)^{-k-m-1} z^k \sigma^k \tau^m (-1)^m \frac{(m+k)!}{m! k!},$$

сходящийся абсолютно и равномерно, когда  $|z| = \pi$ ,  $|\sigma| < a$ ,  $|\tau| < a$ . Следовательно, можно подставить этот ряд в формулу (2.4.7) и проинтегрировать почленно, что даст нам выражение для  $v$  в виде абсолютно сходящегося двойного степенного ряда (по степеням  $\sigma$  и  $\tau$ ). Заметим, что члены, не содержащие  $\tau$ , отсутствуют. В самом деле, члены с  $m=0$  в разложении (2.4.8) после подстановки в формулу (2.4.7) дают интегралы

$$-\frac{1}{2\pi i} \int (e^{-z} + \sigma)(e^{-z} - 1)^{-k-1} z^k \cdot z dz,$$

равные нулю вследствие регулярности подинтегральной функции в точке  $z=0$ .

Таким образом, мы доказали, что при  $|\sigma| < a$ ,  $|\tau| < a$  уравнение (2.4.6) имеет единственное решение  $v$ , удовлетворяющее условию  $|v| < \pi$ , и это решение имеет вид

$$(2.4.9) \quad v = \tau \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{km} \sigma^k \tau^m,$$

где  $c_{km}$  — постоянные.

Вернемся к первоначальным обозначениям  $\sigma = (\ln t)^{-1}$ ,  $\tau = \ln \ln t / \ln t$ . Для достаточно больших  $t$  имеем  $|\sigma| < a$ ,  $|\tau| < a$ . Кроме того, то решение уравнения (2.4.6), которое нам в действительности нужно, мало: из оценки (2.4.3) следует, что  $v = O(\ln \ln t / \ln t)$ . Это значит, что оно совпадает при больших  $t$  с решением (2.4.9). Итак, окончательный результат

$$(2.4.10) \quad x = \ln t - \ln \ln t + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{km} (\ln \ln t)^{m+1} (\ln t)^{-k-m-1},$$

и ряд абсолютно сходится для всех достаточно больших значений  $t$ . Нет необходимости говорить, что этот ряд можно преобразовать к виду (2.4.5).

## 2.5. Метод итераций

В предыдущем разделе мы столкнулись с типичным примером использования итераций в асимптотических оценках. В следующих разделах мы рассмотрим дальнейшее применение итераций к асимптотическим оценкам. Этот вопрос не вполне соответствует заголовку „невяные функции“, и мы коснемся его довольно бегло.

Пусть мы хотим знать асимптотическое поведение некоторой функции  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Обычно, прежде чем начинать что-либо доказывать, очень важно иметь какие-то разумные предположения об этом поведении. И чем лучше мы угадаем аппроксимацию для  $f(t)$ , тем легче доказать, что это и в самом деле есть некоторая аппроксимация.

Пусть  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots$  — последовательность функций, и предположим, что асимптотическое поведение  $\varphi_k(t)$  при каждом отдельном  $k$  известно. Пусть, далее, мы имеем основания полагать, что свойства  $\varphi_0(t)$  в некотором смысле близки к свойствам  $f(t)$ . Предположим еще, что имеется какая-то операция, преобразующая  $\varphi_0$  в  $\varphi_1$ ,  $\varphi_1$  в  $\varphi_2$  и т. д., и мы имеем основания полагать, что эта операция превращает хорошее приближение в еще лучшее. При этом мы надеемся на то, что  $\varphi_k$  может при некотором  $k$  оказаться настолько близким к  $f$  (в некотором специальном смысле), что мы сможем уже доказать этот факт. Может случиться и так, что сама эта операция приведет к доказательству. Именно: это будет так, если мы сумеем доказать два утверждения: 1) для любого  $n$  из того, что  $\varphi_n$  дает в некотором смысле  $n$ -е приближение, следует, что  $\varphi_{n+1}$  дает в том же смысле  $(n+1)$ -е приближение; 2) при некотором фиксированном  $k$  функция  $\varphi_k$  дает  $k$ -е приближение (в том же смысле).

Простым примером такой ситуации может служить процесс, который привел нас к выражению (2.4.4). В разд. 2.4 нам повезло в том отношении, что у нас оказалась полезная информация:  $0 < x < \ln t$ , правильная с самого начала, так что в догадках не было необходимости. Но очень часто первый шаг далеко не так прост. Например, если бы мы



опять рассмотрели уравнение (2.4.1), но на этот раз для комплексных значений  $t$ , то первый шаг был бы уже значительно сложнее. Для определенности предположим, что  $\operatorname{Im} t = 1$  и что нас интересует решение  $x$ , для которого  $\operatorname{Re} x \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Im} x \rightarrow 0$ . Теперь уже оценка  $x = O(\ln t)$  была бы только предположением, так же как и ее следствия (2.4.3) и (2.4.4). Но как только мы получим, что  $x = \ln t - \ln \ln t + o(1)$ , мы сможем положить  $x - \ln t + \ln \ln t = v$  и использовать соображения, высказанные относительно соотношения (2.4.6). Только после этого мы достигнем определенных результатов.

Этот пример, когда предполагаемое соотношение итерируется, чтобы рано или поздно достичь этапа, на котором оно может быть доказано, слишком прост, для того чтобы от него можно было многого ожидать. Действительно, используя теорему Руше, было бы не очень трудно доказать с самого начала, что  $x = O(\ln t)$ . С другой стороны, легко представить себе гораздо более запутанный пример, в котором применение теоремы Руше было бы сильно затруднено.

Метод итерации предположения встречается и в вычислительной математике. Там его цель состоит уже не в выяснении асимптотического поведения некоторой функции, а в приближенном вычислении числа. Мы разберем один случай такого рода в разд. 2.6 и сравним его с асимптотической задачей разд. 2.7.

## 2.6. Корни уравнений

Мы хотим получить приближенное значение для некоторого корня  $\xi$  уравнения  $f(x) = 0$ . В этом случае хороший результат дает метод Ньютона. Он состоит в том, что берется грубое первое приближение  $x_0$  и строится последовательность  $x_1, x_2, x_3, \dots$  по формуле <sup>1)</sup>

$$(2.6.1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Это означает, что  $x_{n+1}$  является корнем линейной функции, график которой — касательная в точке  $P_n$  к графику  $f(x)$  [ $P_n$  — точка с координатами  $(x_n, f(x_n))$ ].

<sup>1)</sup> Jordan C., *Calculus of Finite Differences*, 2nd ed., New York, 1947, § 150.

При этом обычно существует интервал  $J$ , содержащий внутри точку  $\xi$  и такой, что если  $x_0$  лежит в  $J$ , то и все  $x_1, x_2, \dots$  лежат в  $J$ , и эта последовательность сходится к точке  $\xi$ .

Достаточным условием существования  $J$  может служить, например, следующее:  $f(x)$  имеет непрерывную вторую производную в окрестности точки  $\xi$  и  $f'(\xi) \neq 0$ . При выполнении этого условия процесс сходится очень быстро, а именно: из формулы (2.6.1) следует, что  $x_{n+1} - \xi$  заведомо имеет порядок  $(x_n - \xi)^2$ .

Часто о функции  $f(x)$  известно очень мало, иначе говоря, для каждого  $x$  можно найти значение  $f(x)$ , но информация относительно верхних и нижних границ  $f(x)$ ,  $f'(x)$  и т. д. для больших интервалов оси  $x$  не очень велика. Такую информацию обычно можно получить лишь для очень малых интервалов. Чтобы найти корень уравнения  $f(x) = 0$ , мы просто выбираем более или менее случайно некоторое число  $x_0$  и строим последовательность  $x_1, x_2, \dots$  при помощи итерационного процесса Ньютона. Если эта последовательность обнаруживает тенденцию сходиться, это еще ничего не означает, поскольку сходимость не может быть установлена с помощью конечного числа наблюдений. Однако может случиться, что рано или поздно мы попадем в малый интервал  $J$ , в котором информация о  $f(x)$  уже достаточно велика, чтобы доказать, что все следующие  $x_n$  остаются в интервале  $J$  и сходятся к некоторой точке этого интервала, что эта точка — корень уравнения  $f(x) = 0$  и что внутри  $J$  не существует других корней. Добившись этого, мы будем знать не точное значение корня, а лишь малый интервал, в котором оно заключено; кроме того, мы имеем способ безграничного уменьшения этого интервала. Поэтому с точки зрения вычислителя такое положение вещей исключительно удачно.

Имеются, впрочем, и менее благоприятные возможности, и мы отметим сейчас некоторые из них:

а) Последовательность  $x_0, x_1, \dots$  стремится к бесконечности.

б) Последовательность сходится, но не к тому корню, который нам нужен.

с) Последовательность колеблется.

д) Последовательность сходится к нужному нам корню, но мы не в состоянии это доказать.

## 2.7. Асимптотические итерации

Возвращаясь к асимптотическим задачам, связанным с неявными функциями, заметим, что метод Ньютона вполне хорош для задач с малым параметром, подобных тем, которые рассматривались в разд. 2.3 или в (2.4.6). Излишне напоминать, что теперь корень уже не число, а функция от  $t$  и нам нужна асимптотическая информация об этой функции.

Имеется два различных вопроса. Первый — дает ли метод Ньютона последовательность достаточно хороших приближений.

Второй, значительно более трудный вопрос, состоит в том, можем ли мы доказать, что эти приближения действительно являются приближениями. Мы не будем обсуждать этот второй вопрос, поскольку речь пойдет лишь о примерах, подробно рассмотренных выше, где асимптотическое поведение решения точно известно.

Возьмем сначала уравнение (2.3.1):  $xe^x = t^{-1}$ . В качестве первого приближения к корню возьмем  $\varphi_0 = 0$ . Применяя формулу Ньютона (2.6.1) к функции  $f(x) = xe^x - t^{-1}$ , получаем

$$\varphi_{n+1} = (\varphi_n^2 + t^{-1}e^{-\varphi_n})(\varphi_n + 1)^{-1}$$

и, полагая  $t^{-1} = \varepsilon$ ,

$$\varphi_1 = \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varepsilon - \varepsilon(e^\varepsilon - 1)e^{-\varepsilon}(1 + \varepsilon)^{-1} = \\ &= \varepsilon - \varepsilon^2 + \frac{3}{2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\varphi_2$  отличается от истинного значения корня  $x$  [см. (2.3.2)] на величину  $O(\varepsilon^4)$ . Используя разложение (2.3.2), нетрудно показать, что  $\varphi_k$  отличается от  $x$  на величину  $O(\varepsilon^{2k})$ .

Перейдем теперь к уравнению (2.4.1) и применим метод Ньютона на том этапе, когда мы еще не ввели в задачу малый параметр. При этом мы столкнемся с явлениями, которые не возникали в разд. 2.6.

Замечая, что положительный корень уравнения  $xe^x = t$  мал по сравнению с  $t$ , мы можем считать, что разумно

начать приближение с  $\varphi_0 = 0$ . Имеем

$$\varphi_{n+1} = (\varphi_n^2 + te^{-\varphi_n})(\varphi_n + 1)^{-1},$$

откуда

$$\varphi_1 = t,$$

$$\varphi_2 = t - 1 + O(t^{-1}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$\varphi_3 = t - 2 + O(t^{-1}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

и т. д. Ясно, что это ни к чему нас не приведет. Ни одна из функций  $\varphi_k$  совершенно непохожа асимптотически на истинный корень  $x$ , который равен  $\ln t - \ln \ln t + o(1)$ .

То же самое произойдет, если мы начнем с  $\varphi_0 = \ln t$ , что является уже вполне разумным приближением, так как  $x = \ln t + o(\ln t)$  ( $t \rightarrow \infty$ ) [см. (2.4.3)]. Мы опять получим, что  $\varphi_n = \ln t - n + o(1)$ . Нетрудно показать, что мы всегда получим  $\varphi_n = \varphi_0 - n + o(1)$ , если только начнем с такой функции  $\varphi_0$ , для которой  $\varphi_0 e^{\varphi_0} / t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

Попробуем еще взять  $\varphi_0 = \ln t - \ln \ln t + a_0$ , где  $a_0$  — некоторая постоянная (конечно, такое предположение не очень естественно, потому что никто не будет начинать с такого выражения, не попробовав предварительно взять  $\varphi_0 = \ln t - \ln \ln t$ ). После несложных вычислений получим

$$\varphi_n = \ln t - \ln \ln t + a_n + O\left(\frac{1}{\ln t}\right), \quad \text{где } a_{n+1} = a_n + e^{-a_n} - 1.$$

Можно показать, что  $a_n$  очень быстро стремится к нулю (см. гл. 8). Однако ни одна из функций  $\varphi_k$  этой последовательности не дает приближения много лучшего, чем  $\ln t - \ln \ln t + O(1)$ .

В некотором смысле  $\ln t - \ln \ln t$  является пределом этой последовательности  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Если мы вновь начнем применять метод Ньютона с  $\varphi_0^* = \ln t - \ln \ln t$ , то неожиданно найдем значительно лучшие приближения. В действительности это означает, что мы рассматриваем задачу с малыми параметрами (2.4.6), начиная с нуля как первого приближения для  $v$ .

Ограничимся сказанным; нашей основной целью было подчеркнуть тот факт, что для многих асимптотических задач очень важно начинать с хорошей гипотезы или с хорошего первого приближения.

## 2.8. Упражнения

1. Показать, что уравнение  $\sin x = (\ln x)^{-1}$  имеет ровно один корень  $x_n$  в интервале  $2\pi n < x_n < 2\pi n + \pi/2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и что

$$x_n = 2\pi n + \frac{1}{\ln 2\pi n} + O((\ln 2\pi n)^{-3}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

2. Пусть  $f(t) > 0$  и

$$e^{tf(t)} = f(t) + t + O(1) \quad (0 < t < \infty).$$

Показать, что

$$f(t) = \frac{\ln t}{t} + O(t^{-2}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

3. Показать, что для больших  $t$  положительное решение уравнения  $e^x + \ln x = t$  имеет вид

$$x = \ln t + \frac{\ln \ln t}{t} P\left(\frac{\ln \ln t}{t \ln t}, \frac{1}{t \ln t}, \frac{\ln \ln t}{t}\right),$$

где  $P(\lambda, \mu, \sigma)$  — степенной ряд от своих переменных, сходящийся при всех достаточно малых значениях  $|\lambda|, |\mu|, |\sigma|$ .

## Глава 3

# СУММИРОВАНИЕ

### 3.1. Введение

Мы будем рассматривать суммы вида  $\sum_{k=1}^n a_k(n)$ , где каждое слагаемое и число членов зависят от  $n$ . Нас будет интересовать асимптотическая информация о значении суммы при больших значениях  $n$ . Во многих приложениях  $a_k(n)$  не зависят от  $n$ , и в действительности некоторые наши примеры будут такого типа, но мы исследуем их такими методами, которые никоим образом не ограничены только этим случаем.

Конечно, довольно трудно делать общие высказывания. Подобные асимптотические задачи могут быть весьма сложными, особенно в случаях, когда не все  $a_k$  одного знака и

когда сумма  $\sum_1^n a_k(n)$  может быть много меньше суммы

$\sum_1^n |a_k(n)|$ . С другой стороны, имеется класс шаблонных

задач, встречающихся во многих разделах анализа, которым посвящена значительная часть этой главы: это случаи, когда все  $a_k$  одного знака и, кроме того, „довольно гладкие“. Мы не будем пытаться определять, что такое гладкость, а приведем только несколько примеров. Эти задачи мы разделим на четыре типа a, b, c, d в зависимости от того, какие слагаемые дают основной вклад в сумму. Основное влияние на величину суммы могут оказывать:

a) сравнительно небольшое число членов в начале или в конце суммы;

b) один член в начале или в конце;

c) сравнительно небольшое число членов в середине.

Имеется еще случай d, когда небольшой группы членов, преобладающей над остальными слагаемыми, просто нет,

## 3.2. Случай а

В качестве первого примера рассмотрим сумму  $s_n = \sum_{k=1}^n k^{-3}$ .

Первым приближением к  $s_n$  является сумма  $S = \sum_1^{\infty} k^{-3}$

бесконечного ряда, а погрешность равна  $-\sum_{n+1}^{\infty} k^{-3}$ . Для этой последней суммы легко получается оценка  $O(n^{-2})$ , например, с помощью такого неравенства:

$$(3.2.1) \quad \sum_{n+1}^{\infty} k^{-3} < \sum_{n+1}^{\infty} \int_{k-1}^k t^{-3} dt = \int_n^{\infty} t^{-3} dt = \frac{1}{2n^2},$$

и, следовательно,

$$(3.2.2) \quad s_n = S + O(n^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Результаты такого типа вполне удовлетворительны для многих задач анализа, однако следует заметить, что с точки зрения вычислительной математики соотношение (3.2.2) ничего не дает, если мы не знаем значения  $S$  из других источников информации. Вычислитель предпочел бы сосчитать  $\sum_1^m k^{-3}$  для некоторого подходящего значения  $m$  и оценить величину  $\sum_{m+1}^n k^{-3}$ .

Оценку (3.2.2) можно улучшить, уточнив неравенство (3.2.1); сравнивая сумму с интегралом. К этому техническому приему мы еще вернемся в разд. 3.5 и 3.6.

Нашим следующим примером будет  $\sum_1^n 2^k \ln k$ . В этой сумме сравнительно небольшое количество последних слагаемых дает вклад, значительно больший, чем все остальные члены. Если мы отбросим последние  $[\ln n]$  слагаемых ( $[x]$  означает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ), то сумма оставшихся слагаемых не превзойдет

$$\sum_1^{n-[\ln n]} 2^k \ln n \leq 2^{n+1-\ln n} \ln n = 2^{n+1} n^{-\ln 2} \ln n,$$

а это намного меньше, чем одно только последнее слагаемое.

Заметим, что  $\ln k$  мало меняется, когда  $k$  пробегает последние  $[\ln n]$  номеров. Поэтому разложим  $\ln k$  по степеням  $(n-k)/n$ ; при этом мы вполне можем считать, что  $n/2 < k \leq n$ . Нас удовлетворит оценка

$$\ln k = \ln(n-h) = \ln n - \frac{h}{n} + O\left(\frac{h^2}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

которая справедлива равномерно по  $h$  ( $0 \leq h < n/2$ ). Теперь проведем следующие оценки:

$$\sum_{1 \leq k \leq n/2} 2^k \ln k = O(2^{n/2} \ln n),$$

$$\sum_{n/2 < k \leq n} 2^k \ln n = 2^{n+1} \ln n + O(2^{n/2} \ln n),$$

$$\sum_{n/2 < k \leq n} 2^k h n^{-1} = \frac{2^n}{n} \sum_{h=1}^{\infty} 2^{-h} h + O(2^{n/2}),$$

$$\sum_{n/2 < k \leq n} 2^k O\left(\frac{h^2}{n^2}\right) = O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) \sum_{h=1}^{\infty} 2^{-h} h^2.$$

Главная часть остаточного члена равна  $O(2^n n^{-2})$ ; члены, содержащие  $2^{n/2}$ , значительно меньше. Таким образом, мы получаем

$$2^{-n} \sum_1^n 2^k \ln k = 2 \ln n - \frac{1}{n} \sum_1^{\infty} h 2^{-h} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

и нетрудно, продолжив наши рассуждения, получить асимптотический ряд по степеням  $n^{-1}$

$$2^{-n} \sum_1^n 2^k \ln k - 2 \ln n \approx \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots \quad (n \rightarrow \infty),$$

где

$$c_m = -\frac{1}{m} \sum_{h=1}^{\infty} h^m 2^{-h}.$$



### 3.3. Случай b

Часто приходится сталкиваться с суммами положительных членов, в которых каждый член имеет по крайней мере тот же порядок, что и сумма всех предыдущих. Рассмотрим

пример  $s_n = \sum_{k=1}^n k!$ . Разделив на последний член, получим

$$\frac{s_n}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Если мы остановимся, скажем, после пятого члена и пренебрежем последними  $(n-5)$ , каждый из которых не превосходит  $(n-5)!/n!$ , то мы сделаем ошибку порядка  $O(n^{-4})$ . Но пятый член сам имеет порядок  $O(n^{-4})$ , так что

$$\frac{s_n}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + O(n^{-4})$$

$(n \rightarrow \infty).$

При желании мы можем разлагать по степеням  $n^{-1}$ :

$$\frac{s_n}{n!} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + O(n^{-4}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Заменив число 5 произвольным целым числом, мы легко убедимся, что существует асимптотический ряд

$$(3.3.1) \quad \frac{s_n}{n!} \approx c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \dots \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ряд  $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$  расходится при любом  $x \neq 0$ . Это можно доказать следующим образом. Ряд  $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$  возник как формальная сумма степенных рядов для функций

$$1, \quad x, \quad \frac{x^2}{1-x}, \quad \frac{x^3}{(1-x)(1-2x)}, \quad \frac{x^4}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}, \quad \dots,$$

каждый из которых имеет неотрицательные коэффициенты. Таким образом, для любого целого  $k$  коэффициенты ряда  $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$  больше коэффициентов ряда для функции  $x^{k+1}/(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)$ . Последний ряд расходуется при  $x = k^{-1}$ , следовательно, и ряд  $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$  расходуется при  $x = k^{-1}$ . Так как  $k$  произвольно, радиус сходимости этого ряда равен нулю.

Обычно не имеет смысла получать общие формулы для коэффициентов расходящихся асимптотических рядов. Для практических целей требуется лишь несколько членов асимптотического ряда, а почти для всех теоретических целей достаточно одного лишь существования асимптотического ряда. Так что только из любопытства мы приведем формулу  $c_{k+1} = k! d_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $d_k$  — коэффициенты в разложении

$$e^{e^x - 1} = \sum_0^{\infty} d_k x^k.$$

Доказать этот факт предоставим читателю. [Указание. Сначала доказать, скажем, по индукции, что

$$\int_0^{\infty} e^{-y/x} \frac{(e^y - 1)^k}{k!} dy = \frac{x^{k+1}}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$$

$$(0 < x < k^{-1}),$$

а затем убедиться, что коэффициент при  $x^{m+1}$  равен умноженному на  $m!$  коэффициенту при  $y^m$  в разложении функции  $(e^y - 1)^k/k!$

### 3.4. Случай с

Типичным примером является следующий:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k(n), \quad a_k(n) = 2^{2k} \left\{ \frac{n!}{k!(n-k)!} \right\}^2.$$

Имеем

$$\frac{a_{k+1}(n)}{a_k(n)} = \left( \frac{2(n-k)}{k+1} \right)^2.$$

Следовательно, максимальный член встретится при первом значении  $k$ , для которого  $2(n-k) < k+1$ , т. е. около  $k = 2n/3$ .

Заметим, что в этом случае, в отличие от наших прежних примеров, сумма велика по сравнению с максимальным членом. В самом деле, если мы будем изменять  $k$  в любом направлении от максимального члена, то  $a_k(n)$  меняется очень медленно (при фиксированном  $n$ ). Другими методами, например с помощью формулы Стирлинга для факториала, можно показать, что число членов, превосходящих  $1/2 \max_k a_k(n)$ ,

имеет порядок  $\sqrt{n}$ . Если же  $|k - 2n/3|$  много больше  $\sqrt{n}$ , то  $a_k(n)$  очень мало по сравнению с максимумом и общая сумма всех таких членов относительно мала. Поэтому наше внимание должно быть сосредоточено на тех  $k$ , для которых  $|k - 2n/3| < A\sqrt{n}$ . С помощью формулы Стирлинга  $a_k(n)$  при таких значениях  $k$  можно достаточно хорошо аппроксимировать, и получившаяся при этом сумма вполне аналогична рассматриваемой в разд. 3.9. Здесь же мы ограничимся этим коротким замечанием.

### 3.5. Случай d

В качестве первого примера рассмотрим  $a_k = \sqrt{k}$ . Идеальный техническим приемом для такого гладкого случая, как этот, является формула суммирования Эйлера — Маклорена. Тем не менее мы начнем с одного более элементарного метода, который можно успешно использовать в менее регулярном случае.

Имеются два этапа. Первый состоит в приближении  $a_k$  последовательностью  $u_k$ , для которой сумма  $\sum_1^n u_k$  точно известна; приближение должно быть достаточно хорошим, чтобы обеспечивать сходимость ряда  $\sum_1^\infty (a_k - u_k)$ . На втором этапе мы имеем дело с  $\sum_{k=1}^n (a_k - u_k)$ . Первым приближением к этой сумме, как и в разд. 3.2, служит сумма бесконечного ряда  $S = \sum_1^\infty (a_k - u_k)$ , и мы имеем

$$(3.5.1) \quad s_n = \sum_1^n a_k = \sum_1^n u_k + S + \sum_{n+1}^\infty (u_k - a_k).$$

В последней сумме мы пытаемся приблизить  $u_k - a_k$  последовательностью  $v_k$ , для которой сумма  $\sum_{n+1}^\infty v_k$  точно известна, а относительно погрешности  $\sum_{n+1}^\infty (u_k - a_k - v_k)$  известно, что она мала. Этот процесс можно продолжить и дальше.

Слабым местом этого процесса является то, что, вообще говоря, наша информация о значении  $S$  очень незначительна. Правда, положение здесь не так серьезно, как в соотношении (3.2.2), поскольку в сумме (3.5.1) главным членом является не  $S$ , а сумма  $\sum_1^n u_k$ , значение которой известно.

В нашем примере  $a_k = \sqrt{k}$  мы можем получить первое приближение к сумме  $s_n$  при помощи интеграла

$$\int_0^n \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} n^{3/2}.$$

Однако если мы выберем  $u_k$  так, чтобы

$$\sum_1^n u_k = \frac{2}{3} n^{3/2},$$

этого будет еще недостаточно. Действительно, ряд с общим членом

$$(3.5.2) \quad k^{1/2} - \left\{ \frac{2}{3} k^{3/2} - \frac{2}{3} (k-1)^{3/2} \right\}$$

еще не будет сходящимся, так как, разлагая  $(1 - 1/k)^{3/2}$  по степеням  $k^{-1}$ , мы находим, что выражение (3.5.2) равно

$\frac{1}{4} k^{-1/2} + O(k^{-3/2})$ , а ряд  $\sum_1^\infty k^{-1/2}$  расходится. Но мы опять

приближим частные суммы  $\sum_1^n k^{-1/2}$  интегралом, что даст нам  $2n^{1/2}$ . Если мы возьмем теперь новые  $u_k$ , именно

$$u_k = U_k - U_{k-1}, \quad U_k = \frac{2}{3} k^{3/2} + \frac{1}{2} k^{1/2},$$

мы без труда найдем, что

$$(3.5.3) \quad u_k - a_k = \frac{k^{-3/2}}{48} + O(k^{-5/2}) \quad (k \rightarrow \infty),$$

откуда видно, что ряд  $\sum_1^\infty (u_k - a_k)$  сходится.

На втором этапе мы должны приблизить  $u_k - a_k$  при помощи  $v_k$ . Возьмем  $v_k = V_{k-1} - V_k$ , где

$$V_k = \frac{k^{-1/2}}{24}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_k = V_n,$$

как подсказывает нам интеграл

$$\int_n^{\infty} \frac{t^{-3/2}}{48} dt = \frac{n^{-1/2}}{24}.$$

Таким образом, мы получим

$$u_k - a_k - v_k = O(k^{-5/2})$$

и согласно равенству (3.5.1)

$$(3.5.4) \quad \sum_1^n k^{1/2} = \frac{2}{3} n^{3/2} + \frac{1}{2} n^{1/2} + S + \frac{1}{24} n^{-1/2} + O(n^{-3/2})$$

$$(n \rightarrow \infty).$$

Остаточный член  $O(n^{-3/2})$  можно заменить асимптотическим рядом, поскольку процесс может быть продолжен и мы можем при желании получить любое число членов. Для этого, конечно, необходимо уточнить оценку (3.5.3), что легко сделать, так как  $(u_k - a_k) k^{3/2}$  можно разложить в ряд по степеням  $k^{-1}$ , сходящийся при  $k > 1$ .

Остается еще вопрос о значении  $S$ . Очевидно, имеем

$$(3.5.5) \quad S = \sum_1^{\infty} \left\{ k^{1/2} - \frac{2}{3} k^{3/2} - \frac{1}{2} k^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} (k-1)^{3/2} + \frac{1}{2} (k-1)^{1/2} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_1^n k^{1/2} - U_n \right\},$$

но можно получить и более простое выражение. Наш метод использует аналитичность и поэтому не всегда применим. Сначала обобщим выражение (3.5.4), введя комплексный параметр  $z$ . Вместо равенства (3.5.4) мы получим тем же

самым способом, что

$$(3.5.6) \quad \sum_1^n k^{-z} = \frac{n^{1-z}}{1-z} + \frac{1}{2} n^{-z} + S(z) + O(n^{-z-1})$$

$$(n \rightarrow \infty)$$

при  $\operatorname{Re} z > -1$ ,  $z \neq 1$ . Здесь  $S(z)$  — сумма сходящегося ряда, аналогичного ряду (3.5.5). Кроме того нетрудно показать, что эта сумма является аналитической функцией  $z$  в области  $\operatorname{Re} z > -1$ ,  $z \neq 1$ . Если  $\operatorname{Re} z > 1$ , то она совпа-

дает с дзета-функцией Римана<sup>1)</sup>  $\zeta(z) = \sum_1^\infty n^{-z}$ , в чем нетрудно убедиться, устремляя  $n$  к бесконечности. Следовательно,  $S(z) = \zeta(z)$  во всей области.

В частности, значение  $S$  в выражении (3.5.5) равно

$$S\left(-\frac{1}{2}\right) = \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right).$$

Последнее равенство получается из функционального уравнения

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s).$$

### 3.6. Формула суммирования Эйлера — Маклорена

Наши рассуждения в разд. 3.5 были скорее демонстрацией метода, нежели кратчайшим способом исследования

$\sum_1^n k^{1/2}$ . По-видимому, кратчайшим и наиболее эффективным способом исследования в таких случаях является формула Эйлера — Маклорена. Она входит во многие учебники анализа<sup>2)</sup>, поэтому мы опускаем ее доказательство.

<sup>1)</sup> См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М. 1934, гл. 13.

<sup>2)</sup> См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М. 1934, § 7.21. Наши обозначения чисел и многочленов Бернулли слегка отличаются от используемых там.

Основная формула имеет вид

$$(3.6.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{g(0) + g(1)}{2} - \int_0^1 g(x) dx = \\ & = \{g'(1) - g'(0)\} \frac{B_2}{2!} + \{g'''(1) - g'''(0)\} \frac{B_4}{4!} + \dots \\ & \dots + \{g^{(2m-1)}(1) - g^{(2m-1)}(0)\} \frac{B_{2m}}{(2m)!} - \\ & - \int_0^1 g^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x)}{(2m)!} dx. \end{aligned} \right.$$

Здесь  $m \geq 1$  — любое целое число, а  $g$  — функция, имеющая  $2m$  непрерывных производных на интервале  $0 \leq x \leq 1$ . Величины  $B_k$  — числа Бернулли — определяются равенством

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad (|z| < 2\pi),$$

из которого можно найти

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0,$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad \dots$$

Наконец,  $B_n(t)$  означает многочлен Бернулли, который определяется равенством

$$\frac{ze^{zt}}{e^z - 1} = \sum_0^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} z^n.$$

Если мы напишем формулу (3.6.1) для функций  $g(x) = f(x+1)$ ,  $g(x) = f(x+2)$ , ...,  $g(x) = f(x+n-1)$  и сложим полученные результаты, то многие слагаемые взаимно уничтожатся, и мы придем к формуле суммирования Эйлера —

Маклорена. Запишем ее в виде

$$(3.6.2) \quad \left\{ \begin{aligned} f(1) + \dots + f(n) &= \int_1^n f(x) dx + C + \frac{1}{2} f(n) + \\ &+ \frac{B_2}{2!} f'(n) + \frac{B_4}{4!} f'''(n) + \dots + \frac{B_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(n) - \\ &- \int_1^n f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x - [x])}{(2m)!} dx. \end{aligned} \right.$$

Функцию  $f(x)$  мы будем предполагать имеющей  $2m$  непрерывных производных при  $x \geq 1$ . Символ  $[x]$  означает, как обычно, наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ , а  $B_{2m}(x - [x])$  — это значение  $2m$ -го многочлена Бернулли в точке  $x - [x]$ . Число  $C$  не зависит от  $n$ :

$$C = \frac{1}{2} f(1) - \frac{B_2}{2!} f'(1) - \dots - \frac{B_{2m}}{(2m)!} f^{(2m-1)}(1).$$

Известно, что<sup>1)</sup>

$$B_{2m}(x - [x]) = 2(2m)!(2\pi)^{-2m} (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2m} \cos 2k\pi x$$

при  $m = 1, 2, 3, \dots$ , откуда следует, что

$$|B_{2m}(x - [x])| \leq |B_{2m}| = 2(2m)!(2\pi)^{-2m} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2m}.$$

Это дает нам удовлетворительную оценку для остаточного члена в формуле (3.6.1).

Если функция  $f(x)$  такова, что  $\int_0^{\infty} |f^{(2m)}(x)| dx < \infty$ , то мы сразу получаем асимптотическую формулу

$$(3.6.3) \quad f(1) + \dots + f(n) = \int_1^n f(x) dx + S + \frac{1}{2} f(n) + \\ + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + O\left(\int_n^{\infty} |f^{(2m)}(x)| dx\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

<sup>1)</sup> См. Rogosinski W., *Fourier Series*, Chelsea, New York, ch. 2, § 4.

(См. также Харди и Рогозинский, *Ряды Фурье*, М., 1959. — *Прим. ред.*)



где  $m \geq 1$  — фиксированное целое число, а

$$S = C - \int_1^{\infty} f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x - [x])}{(2m)!} dx.$$

### 3.7. Пример

Пусть  $f(x) = x^{-z} \ln x$ , где  $z$  — какое-либо комплексное число. Тогда оценка (3.6.3) применима при  $2m > 1 - \operatorname{Re} z$  и дает нам

$$\sum_{k=1}^n k^{-z} \ln k = \int_1^n x^{-z} \ln x dx + C(z) + \frac{1}{2} n^{-z} \ln n + R(n, z),$$

где  $C(z)$  зависит только от  $z$ , а  $R(n, z)$  имеет асимптотическое разложение

$$R(n, z) \approx \frac{B_2}{2!} (n^{-z} \ln n)' + \frac{B_4}{4!} (n^{-z} \ln n)''' + \dots \quad (n \rightarrow \infty).$$

Здесь штрих означает производную по  $n$ , вычисленную в предположении, что  $n$  меняется непрерывно.

Как и в разд. 3.5,  $C(z)$  можно найти, используя аналитичность по  $z$ , и получить  $C(z) = -\zeta'(z) - (1-z)^{-2}$ . В частном случае  $z=0$  мы получаем формулу Стирлинга для  $\ln n!$ , так как<sup>1)</sup>

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi.$$

Заметим, впрочем, что имеются и другие способы для определения значения  $C(0)$  (см. разд. 3.10).

### 3.8. Замечание

Грубо говоря, метод Эйлера — Маклорена не приводит к цели, если наибольший член, скажем  $f(n)$ , не мал по сравнению со всей суммой  $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ . В этом случае нельзя ожидать, что порядок  $f^{(2m)}(n)$  меньше, чем

<sup>1)</sup> См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М., 1934, § 13.21.

порядок  $f(n)$ , и формула Эйлера — Маклорена не может дать ничего лучшего, чем  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = O(f(n))$ .

Это можно проиллюстрировать на примере  $\sum_1^n k!$  разд. 3.3.

### 3.9. Другой пример

Метод Эйлера — Маклорена можно применять и к суммам вида  $\sum_{k=1}^n a_k(n)$ , где каждое слагаемое зависит от  $k$  и от  $n$ . Однако в этом случае не имеет смысла переходить от формулы (3.6.2) к (3.6.3), потому что тогда  $S$  будет зависеть от  $n$ . Неопределенная постоянная в асимптотической формуле часто вполне допустима, но иметь в такой формуле неопределенную функцию от  $n$  — это значит не иметь никакой формулы вообще. Однако имеются случаи, когда

$$\frac{1}{(2m)!} \int_1^n f^{(2m)}(x) B_{2m}(x - [x]) dx$$

не доставляет трудностей, например когда интеграл  $\int_1^n |f^{(2m)}(x)| dx$  сравнительно мал.

В качестве такого примера возьмем

$$s_n = \sum_{k=-n}^n e^{-k^2\alpha/n},$$

где  $\alpha$  — положительная постоянная. Формула Эйлера — Маклорена при  $f(x) = e^{-\alpha x^2/n}$  дает

$$(3.9.1) \quad s_n = \int_{-n}^n f(x) dx + \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} f(-n) + \\ + \frac{B_2}{2!} \{f'(n) - f'(-n)\} + \dots + \frac{B_{2m}}{(2m)!} \{f^{(2m-1)}(n) - \\ - f^{(2m-1)}(-n)\} + R_m,$$

где

$$(3.9.2) \quad R_m = - \int_{-n}^n f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x - [x])}{(2m)!} dx,$$

откуда

$$|R_m| \leq \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_{-n}^n |f^{(2m)}(x)| dx.$$

Имеем

$$\int_{-n}^n f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \varepsilon_n = \sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}} + \varepsilon_n,$$

где остаточный член  $\varepsilon_n$  равен  $O(e^{-bn})$  с некоторой положительной постоянной  $b$ . Про такой остаточный член говорят, что он *экспоненциально мал*.

Остальные слагаемые в формуле (3.9.1), кроме  $R_m$ , тоже экспоненциально малы в силу того, что каждая производная функции  $f(x)$  имеет вид  $P(x)f(x)$ , где  $P(x)$  — многочлен. Таким образом, все зависит от того, насколько хорошо нам удастся оценить  $R_m$ .

Делая замену  $x = y\sqrt{n/2\alpha}$ , получаем

$$(3.9.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2m)}(x)| dx = \left(\frac{2\alpha}{n}\right)^{m-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^{2m}}{dy^{2m}} e^{-y^2/2} \right| dy$$

и, следовательно,  $|R_m| < C_m n^{1/2-m}$ , где  $C_m$  положительно и не зависит от  $n$ . Поэтому при любом  $m$  имеем

$$(3.9.4) \quad s_n = \sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}} + O(n^{1/2-m}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Здесь мы случайно можем получить информацию из другого источника, а именно формула преобразования зета-функции дает для  $s_n$  хорошую оценку. Поэтому интересно сравнить ее с результатом, полученным с помощью формулы Эйлера — Маклорена.

Для удобства будем говорить о бесконечной сумме вместо конечной (разность между ними экспоненциально мала).

Написав формулу, аналогичную (3.9.1), для  $\sum_{-N}^N e^{-\alpha k^2/n}$ ,

и устремив  $N$  к бесконечности, получим

$$(3.9.5) \quad S_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ak^2/n} = \\ = \sqrt{\frac{\pi n}{a}} - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(x - [x])}{(2m)!} dx,$$

где по-прежнему  $f(x) = e^{-ax^2/n}$ .

Обозначим интеграл через  $R^*$ . Из формулы (3.9.5) ясно, что  $R^*$  не зависит от  $m$ . Все, что дает здесь метод Эйлера — Маклорена, заключается в оценке

$$(3.9.6) \quad |R^*| \leq \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2m)}(x)| dx$$

и в выборе такого  $m$ , чтобы правая часть неравенства принимала наименьшее значение.

Формула преобразования тэта-функции дает<sup>1)</sup>

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ak^2/n} = \sqrt{\frac{\pi n}{a}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2\pi^2 n/a},$$

откуда

$$(3.9.7) \quad -R^* = 2 \sqrt{\frac{\pi n}{a}} e^{-\pi^2 n/a} + O(n^{1/2} e^{-4\pi^2 n/a}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Выясним теперь, может ли неравенство (3.9.6) дать такую же точность, как последняя оценка. Сразу видно, что при любом  $m$  имеем  $R^* = O(n^{1/2-m})$ . При фиксированном  $m$  это намного слабее, чем оценка (3.9.7), но, получив равномерную оценку и взяв  $m$  подходящей функцией от  $n$ , мы сможем достигнуть лучшего результата. Конечно, нельзя надеяться доказать оценку (3.9.7), но интересно убедиться, что методом Эйлера — Маклорена еще можно получить оценку  $R^* = O(ne^{-\pi^2 n/a})$ , отличающуюся от истинной на множитель  $n^{1/2}$ .

<sup>1)</sup> См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М. 1934, § 21.51.

Простое доказательство можно получить, положив  $f(x) = e^{-\beta x^2}$ ,  $a = 0$  ( $\beta = a/n$ ) в формуле Пуассона (3.12.1).

Если воспользоваться определением многочленов Эрмита

$$H_k(y) = (-1)^k e^{y^2/2} \left( \frac{d}{dy} \right)^k e^{-y^2/2},$$

то подинтегральную функцию в правой части равенства (3.9.3) можно записать в виде  $e^{-y^2/2} |H_{2m}(y)|$ .

Используя интегральное представление

$$\begin{aligned} H_{2m}(y) &= (2\pi)^{-1/2} e^{y^2/2} \left( \frac{d}{dy} \right)^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2 + ivy} dv = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (iv)^{2m} e^{-\frac{1}{2}v^2 + ivy + \frac{1}{2}y^2} dv = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (y - iv)^{2m} e^{-u^2/2} du, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(2m)}(x)| dx &\leq \\ &\leq \left( \frac{2\alpha}{n} \right)^{m-1/2} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2+u^2)/2} (y^2+u^2)^m du dy. \end{aligned}$$

Вводя полярные координаты в плоскости  $(u, y)$ , мы легко находим, что повторный интеграл равен  $2^{m+1}\pi m!$ .

Множитель  $|B_{2m}|/(2m)!$ , входящий в неравенство (3.9.6), равен (см. разд. 3.6)  $2(2\pi)^{-2m}\zeta(2m)$  и, следовательно, меньше, чем  $C(2\pi)^{-2m}$ , где  $C$  — абсолютная постоянная. Поэтому из неравенства (3.9.6) получается

$$|R^*| < C(2\pi)^{-2m} \left( \frac{2\alpha}{n} \right)^{m-1/2} (2\pi)^{-1/2} 2^{m+1} \pi m!.$$

Используя формулу Стирлинга для  $m!$ , мы заключаем, что существует абсолютная постоянная  $C_1$ , такая, что при всех  $m$  и  $n$

$$(3.9.8) \quad |R^*| < C_1 \left( \frac{\alpha m}{\pi^2 n e} \right)^m \left( \frac{nm}{2\alpha} \right)^{1/2}.$$

Теперь нужно выбрать значение  $m$ . Как нетрудно убедиться, минимум выражения  $(\alpha t/\pi^2 n e)^t$  достигается при  $t = \pi^2 n/\alpha$  и

равен  $e^{-\pi^2 n/\alpha}$ . Но  $m$  целое, и поэтому мы должны взять  $m = m_0 = [\pi^2 n/\alpha]$ . Чтобы исследовать, как изменится при этом оценка (3.9.8), положим

$$\psi(\rho) = \rho \ln \frac{\alpha \rho}{\pi^2 e}.$$

Минимум этой функции равен  $-\pi^2/\alpha$  и достигается при  $\rho = \rho_0 = \pi^2/\alpha$ . Имеем  $\psi'(\rho_0) = 0$  и, следовательно,

$$\psi\left(\frac{m_0}{n}\right) = \psi\left(\rho_0 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{\pi^2}{\alpha} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Теперь мы видим, что если положить  $m = m_0$ , то неравенство (3.9.8) даст нам

$$R^* = O(ne^{-\pi^2 n/\alpha}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

### 3.10. Формула Стирлинга для $\Gamma$ -функции в комплексной плоскости

Ниже формула Эйлера — Маклорена играет приблизительно ту же роль, что и в задаче (3.9.5). Наша сумма будет содержать параметр  $z$ . При фиксированном  $z$  мы будем безгранично увеличивать число слагаемых и только после этого заставим  $|z|$  стремиться к бесконечности [как параметр  $n$  в формуле (3.9.5)].

Пусть  $z$  — действительное или комплексное число, не лежащее на отрицательной части действительной оси и отличное от нуля. Применим формулу Эйлера — Маклорена к сумме

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n \ln(z+k-1),$$

где для логарифма берется главное значение (с мнимой частью, по модулю меньшей, чем  $\pi$ ). При произвольном целом  $m \geq 1$  получаем

$$\begin{aligned} S_n(z) = & \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln(z+n-1) + \int_1^n \ln(z+x-1) dx + \\ & + \sum_{k=1}^m \left\{ (z+n-1)^{1-2k} - z^{1-2k} \right\} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} + \\ & + \int_1^n (z+x-1)^{-2m} \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m} dx. \end{aligned}$$

При фиксированном  $z$  мы без труда получаем асимптотическую формулу с остаточным членом  $o(1)$ :

$$(3.10.1) \quad S_n(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln n - \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + n \ln n + \\ + z - n - \rho(z) + o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

где

$$(3.10.2) \quad \rho(z) = \sum_{k=1}^m z^{1-2k} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} - \\ - \int_0^{\infty} (z+x)^{-2m} \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m} dx.$$

Поскольку функция  $\rho(z)$  не зависит от  $n$ , то из формулы (3.10.1) ясно, что она не зависит и от  $m$ . В этом можно также убедиться, интегрируя по частям в равенстве (3.10.2).

Применив дважды формулу (3.10.1), мы получим для разности  $S_n(z) - S_n(1)$  следующее выражение:

$$(3.10.3) \quad S_n(z) - S_n(1) = (z-1) \ln n - \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + \\ + z - 1 + \rho(1) - \rho(z) + o(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Эта разность связана с формулой Эйлера для  $\Gamma(z)$ :

$$(3.10.4) \quad \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{z-1} n!}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n-1)}.$$

Логарифмируя, находим

$$(3.10.5) \quad \ln \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (z-1) \ln n + S_n(1) - S_n(z) \right\}.$$

Теперь выражение (3.10.3) превращается в полезное тождество

$$(3.10.6) \quad \ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \rho(z) + 1 - \rho(1).$$

Следует заметить, что  $\ln \Gamma(z)$  не обязательно является главным значением логарифма. Так как правая часть непрерывно зависит от  $z$  и принимает действительное значение при  $z > 0$  (для  $\ln z$  берется его главное значение), то тождество (3.10.6) представляет ту ветвь  $\ln \Gamma(z)$ , которая получается при аналитическом продолжении в область  $|\arg z| < \pi$ .

начиная с действительных значений на положительной части действительной оси.

Из тождества (3.10.6) уже нетрудно вывести асимптотическую формулу, справедливую при  $|z| \rightarrow \infty$ . Пусть  $\delta$  — положительная постоянная ( $\delta < \pi$ ),  $R_\delta$  — часть комплексной плоскости, определенная неравенством  $|\arg z| < \pi - \delta$ , и  $m \gg 1$  — целое число. Тогда  $B_{2m}(x - [x])$  ограничено, откуда следует, что

$$\left| \int_0^\infty (z+x)^{-2m} \frac{B_{2m}(x-[x])}{2m} dx \right| < C \int_0^\infty |z+x|^{-2m} dx = \\ = C |z|^{-2m+1} \int_0^\infty \left| y + \frac{z}{|z|} \right|^{-2m} dy,$$

причем  $C$  не зависит от  $z$ . Величина  $|y + z/|z||$  равна расстоянию от точки  $-y$  до некоторой точки единичного круга, принадлежащей области  $R_\delta$ . Из геометрических соображений ясно, что это расстояние не меньше, чем  $|y + e^{i(\pi-\delta)}|$ . Так

как интеграл  $\int_0^\infty |y + e^{i(\pi-\delta)}|^{-2m} dy$  сходится, то интеграл в ра-

венстве (3.10.2) равен  $O(|z|^{-2m})$ . Поскольку  $m$  произвольно, мы получаем для  $\rho(z)$  асимптотический ряд, и тождество (3.10.6) дает нам

$$(3.10.7) \quad \ln \Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + z \approx 1 - \rho(1) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} z^{1-2k} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \quad (|\arg z| < \pi - \delta, |z| \rightarrow \infty).$$

Остается показать, что постоянная  $1 - \rho(1)$  равна  $\frac{1}{2} \ln 2\pi$ . Мы уже знаем, что она действительна, так что достаточно показать, что  $e^{1-\rho(1)} = \sqrt{2\pi}$ . Приведем несколько возможных способов. 1) В разд. 3.7 мы сделали это с помощью  $\zeta$ -функции Римана, но это, конечно, не самый элементарный способ. 2) Можно использовать функциональное уравнение

$$\Gamma(z) \Gamma(-z) = -\pi (z \sin z)^{-1}$$



и устремить  $z$  к бесконечности по мнимой оси. 3) Можно использовать функциональное уравнение <sup>1)</sup>

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z),$$

устремив  $z$  к бесконечности. 4) Можно найти  $\rho(1)$ , вычислив интеграл  $\int_0^{\infty} (1+x)^2 B_2(x - [x]) dx$ . 5) Можно использовать соображения, изложенные в начале разд. 4.5, при  $z \rightarrow +\infty$ .

### 3.11. Знакопеременные суммы

Знакопеременная сумма — это сумма вида  $\sum (-1)^k f(k)$ , где функции  $f(k)$  положительны. Естественно ожидать, что такие суммы малы, т. е. намного меньше, чем сумма абсолютных величин слагаемых.

Мы можем, конечно, написать

$$\sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k f(k) = \sum_{k=0}^m f(2k) - \sum_{k=0}^m f(2k+1)$$

и исследовать каждую сумму в отдельности, но обычно эти суммы почти равны, так что приходится проводить оценки с большой точностью, чтобы получить о разности достаточную информацию.

В большинстве случаев, однако, проще сгруппировать слагаемые попарно:

$$\sum_{k=0}^{2m+1} (-1)^k f(k) = \sum_{k=0}^m \{ f(2k) - f(2k+1) \},$$

новые слагаемые  $f(2k) - f(2k+1)$  обычно малы.

В качестве примера рассмотрим бесконечную сумму

$$(3.11.1) \quad S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f(k), \quad f(x) = (x^2 + t^2)^{-1/2}$$

и исследуем асимптотическое поведение  $S(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Функция  $f(x)$  убывает и стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Поэтому ряд сходится и по хорошо известной теореме о знако-

<sup>1)</sup> См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М., 1934, § 12.15.

переменных рядах  $0 < S(t) < f(0)$ . Таким образом, первая грубая оценка  $S(t) = O(t^{-1})$ .

Далее, напомним

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{f(2k) - f(2k+1)\}.$$

Мы, конечно, должны заменить разность  $f(2k+1) - f(2k)$  производной  $f'(2k)$ , а затем сумму  $-\sum_0^{\infty} f'(2k)$  интегралом

$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} f'(x) dx$  (множитель  $1/2$  появляется из-за того, что  $2k$

пробегает лишь четные числа). Можно выполнить обе эти операции одновременно, заменив разность  $f(2k) - f(2k+1)$

интегралом  $-\frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} f'(x) dx$ .

Используя ряд Тейлора, мы можем обе эти величины выразить через  $f(2k)$ ,  $f'(2k)$ , ... . Если взять разложение Тейлора лишь до члена, содержащего  $f''$ , т. е. если воспользоваться формулой

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(a) + \int_a^{a+h} (a+h-x)\varphi''(x) dx,$$

то получатся следующие равенства:

$$f(2k+1) - f(2k) = f'(2k) + \int_{2k}^{2k+1} (2k+1-x)f''(x) dx,$$

$$\frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} f'(x) dx = f'(2k) + \frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} (2k+2-x)f''(x) dx.$$

Вычитая, находим

$$\begin{aligned} f(2k) - f(2k+1) + \frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} f'(x) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} (1 - |x - 2k - 1|) f''(x) dx \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(3.11.2) \quad \left| f(2k) - f(2k+1) + \frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} f'(x) dx \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} |f''(x)| dx.$$

В нашем случае  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  и поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k}^{2k+2} f'(x) dx = \int_0^{\infty} f'(x) dx = -f(0).$$

Отсюда следует, что

$$(3.11.3) \quad \left| S(t) - \frac{1}{2} f(0) \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |f''(x)| dx.$$

Имеем  $f''(x) = (2x^2 - t^2)(x^2 + t^2)^{-5/2}$ . Сделаем в интеграле замену  $x = yt$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} |f''(x)| dx = t^{-2} \int_0^{\infty} |1 - 2y^2| (1 + y^2)^{-5/2} dy,$$

а последний интеграл, как нетрудно видеть, сходится. Поэтому неравенство (3.11.3) дает

$$(3.11.4) \quad S(t) = \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Процесс, который привел к оценке (3.11.2), разумеется, можно продолжить. Для следующего шага нужно взять в разложении Тейлора член, содержащий  $f'''(x)$ . Чтобы исключить члены с  $f''(2k)$ , вычтем интеграл  $\int_{2k}^{2k+2} f''(x) dx$  с подходящим множителем, точно так же, как мы исключали

—  $f'(2k)$ , вычитая  $-\frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} f'(x) dx$ . Затем воспользуемся формулой

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{2}\varphi''(a) + \\ + \int_a^{a+h} \frac{1}{2}(a+h-x)^2 \varphi'''(x) dx$$

и получим

(3.11.5)

$$\left| f(2k) - f(2k+1) + \frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} f'(x) dx - \frac{1}{4} \int_{2k}^{2k+2} f''(x) dx \right| \leq \\ \leq C \int_{2k}^{2k+2} |f'''(x)| dx.$$

Так как  $\int_0^{\infty} f''(x) dx = -f'(0) = 0$ , мы получаем точно так же, как и раньше, что

$$(3.11.6) \quad S(t) = \frac{1}{2t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Член с  $t^{-2}$  отсутствует, и на следующих ступенях процесса окажется, что коэффициенты при  $t^{-3}$ ,  $t^{-4}$ , ... тоже равны нулю. Чтобы убедиться в этом, проще всего представить ряд в виде

$$S(t) = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k f(k).$$

Применяя оценку (3.11.5) к  $\sum_{-\infty}^{\infty}$ , получим при  $t \rightarrow \infty$

$$S(t) - \frac{1}{2t} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) dx - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) dx + \\ + O\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'''(x) dx\right).$$

Так как  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $f'(x) \rightarrow 0$ ,  $f''(x) \rightarrow 0$ , ... при  $x \rightarrow \pm\infty$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'''(x) dx = \dots = 0.$$

Кроме того, с помощью замены  $x = ut$  легко получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)| dx = O(t^{-m}) \quad (t \rightarrow \infty)$$

при любом фиксированном  $m > 0$ . Теперь нам достаточно лишь общих соображений о продолжении процесса, который привел нас к оценкам (3.11.4) и (3.11.6), чтобы увидеть, что

(3.11.7)

$$S(t) \approx \frac{1}{2} t^{-1} + 0 \cdot t^{-2} + 0 \cdot t^{-3} + \dots \quad (t \rightarrow \infty).$$

Можно заметить, что неравенства (3.11.2) и (3.11.5) — это частные случаи одной общей формулы, тривиально связанной с формулой суммирования Буля<sup>1)</sup>, о которой мы не будем здесь говорить.

Второе замечание состоит в том, что разложение (3.11.7) можно получить из формулы суммирования Эйлера—Маклорена, примененной к каждой из сумм  $\sum f(2k)$  и  $\sum f(2k+1)$  в отдельности.

В связи с формулой (3.11.7) возникает то же положение, что в разд. 3.9. Можно ожидать, что разность  $S(t) - \frac{1}{2} t^{-1}$  экспоненциально мала, и, аккуратно используя все применявшиеся выше соображения, вплоть до равномерной оценки по  $m$  и  $t$ , мы смогли бы это доказать, хотя оценки при этом получаются весьма громоздкими. Но даже после этого мы получили бы только оценку сверху для разности  $S(t) - \frac{1}{2} t^{-1}$ , а не асимптотическую формулу, подобную той, которую мы приведем в разд. 3.12.

<sup>1)</sup> См. Jordan C., *Calculus of Finite Differences*, 2nd ed., New York, 1947, § 112.

### 3.12. Применение формулы суммирования Пуассона

Эта формула имеет вид

$$(3.12.1) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+a) = \sum_{\nu}^* e^{2\pi i \nu a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu y} f(y) dy,$$

где  $a$  — действительное число,  $f(x)$  интегрируема по Риману на любом конечном интервале и

$$\sum_{\nu}^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\nu=-N}^N.$$

Для справедливости формулы, как нетрудно видеть, достаточно выполнения следующих условий<sup>1)</sup>:

1) ряд  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+x)$  равномерно сходится при  $0 \leq x \leq 1$ ;

2) функция  $\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+x)$ , имеющая период 1, удовлетворяет условиям Фурье (т. е. равна сумме своего ряда Фурье) по крайней мере при  $x = a$ .

В самом деле, условие 1 дает нам право совершать следующую операцию над коэффициентами Фурье функции  $\varphi(x)$ . Если  $\nu$  — целое число, то  $\nu$ -й коэффициент Фурье  $\varphi(x)$  равен

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-2\pi i \nu y} \varphi(y) dy &= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu y} f(k+y) dy = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-2\pi i \nu y} f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu y} f(y) dy. \end{aligned}$$

Последнее действие законно, потому что из свойства 1 следует, что

$$\int_k^{k+t} e^{-2\pi i \nu y} f(y) dy \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \pm \infty$ , равномерно по  $t$  на отрезке  $0 \leq t \leq 1$ .

<sup>1)</sup> О других достаточных условиях см. в книге Титчмарш, Теория интегралов Фурье, М., 1950, гл. 2.

Можно показать, что условия 1 и 2 следуют из условий:

3) ряд  $\sum_{-\infty}^{\infty} f(k+a)$  сходится;

4)  $f'(x)$  существует ( $-\infty < x < \infty$ );

5) ряд  $\sum_{-\infty}^{\infty} f'(k+x)$  равномерно сходится при  $0 \leq x \leq 1$ .

Действительно, условия 3 и 5 влекут за собой 1 [применим теорему о среднем к конечной сумме  $\sum_{N}^{M} f(k+x)$ , где  $M$  и  $N$  — большие постоянные одного знака], а из условия 5 следует, что  $\varphi(x)$  всюду дифференцируема и поэтому удовлетворяет условиям Фурье.

Еще один набор достаточных условий дают условия 3, 6 и 7, где

6)  $f(x)$  есть функция ограниченной вариации<sup>1)</sup> на интервале  $-\infty < x < \infty$ ;

7)  $\lim_{h \rightarrow 0} \{f(x+h) + f(x-h)\} = 2f(x)$  по крайней мере для всех  $x$  вида  $a+n$ , где  $n$  — любое целое число.

Заметим, что из условий 3 и 6 можно вывести условие 1<sup>2)</sup>, а также то, что  $\varphi(x)$  имеет ограниченную вариацию на интервале  $0 \leq x \leq 1$ ; условия 6 и 7 можно использовать, чтобы доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\varphi(a+h) + \varphi(a-h)\} = 2\varphi(a).$$

Эта формула в сочетании с тем, что  $\varphi(x)$  имеет ограниченную вариацию, дает условие 2.

Поскольку изложение теории рядов Фурье не входит в наши задачи, то мы ограничимся этими короткими замечаниями.

Применим формулу Пуассона к сумме

$$(3.12.2) \quad S_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k), \quad f(x) = e^{\pi i x} (x^2 + t^2)^{-1/2},$$

<sup>1)</sup> Определение функции ограниченной вариации см. в книге Титчмарш, Теория функций, М., 1951, § 11.4.

(См. также Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М., 1950. — Прим. ред.)

<sup>2)</sup> См. там же, § 13.232.

связанной с суммой (3.11.1) соотношением

$$(3.12.3) \quad S(t) = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2} S_1(t).$$

Числу  $a$ , входящему в формулу (3.12.1), мы придадим здесь значение нуль, а  $t$  будем считать фиксированным положительным числом, чтобы применить формулу (3.12.1) к сумме (3.12.2).

Условие 6 не удовлетворяется, но выполнена совокупность условий 3, 4, 5. Условие 3 мы уже проверяли в начале разд. 3.11, а условие 4 тривиально. Чтобы показать выполнение условия 5, напомним

$$f'(x) = \pi i e^{\pi i x} (x^2 + t^2)^{-1/2} - x e^{\pi i x} (x^2 + t^2)^{-3/2}.$$

Возьмем два целых положительных числа  $N$  и  $M$ ,  $t < N < M$ , и действительное число  $x$  из интервала  $0 \leq x \leq 1$ . Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^M f'(x+k) &= \\ &= e^{\pi i x} \sum_{k=N}^M (-1)^k \{ \pi i ((x+k)^2 + t^2)^{-1/2} - \\ &\quad - (x+k) ((x+k)^2 + t^2)^{-3/2} \}. \end{aligned}$$

Числа  $((x+k)^2 + t^2)^{-1/2}$  образуют убывающую последовательность  $(M-N+1)$  положительных чисел, и то же самое можно сказать о числах  $(x+k) \{ (x+k)^2 + t^2 \}^{-3/2}$ . [Функция  $y(y^2 + t^2)^{-3/2}$  убывает при  $y > t/\sqrt{2}$ .] Теперь используем следующий хорошо известный факт: если последовательность  $a_N, a_{N+1}, \dots, a_M$  такова, что  $a_N > a_{N+1} > \dots > a_M > 0$ , то

$$\left| \sum_{k=N}^M (-1)^k a_k \right| \leq a_N.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{k=N}^M f'(x+k) \right| \leq (N^2 + t^2)^{-1/2} + N(N^2 + t^2)^{-3/2} < 2N^{-1}.$$

Поскольку это неравенство имеет место равномерно по  $x$  на интервале  $0 \leq x \leq 1$ , то мы видим, что ряд  $\sum_1^{\infty} f'(x+h)$



равномерно сходится на интервале  $0 \leq x \leq 1$ . То же самое справедливо для  $\sum_{-\infty}^0 f'(x+h)$ , и таким образом условие 5 доказано.

Применив теперь формулу (3.12.1) к сумме (3.12.2), получим

$$(3.12.4) \quad S_1(t) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y + \pi i y} (y^2 + t^2)^{-1/2} dy,$$

так что мы должны исследовать интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{bty} (y^2 + t^2)^{-1/2} dy$$

для  $b = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ . Делая замену  $y = tz$ , замечаем, что этот интеграл является функцией от  $bt$ , которую мы обозначим через  $\varphi$ :

$$(3.12.5) \quad \varphi(bt) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ibtz} (z^2 + 1)^{-1/2} dz.$$

Заменяя  $z$  на  $-\omega$ , убеждаемся, что  $\varphi$  — четная функция. Этот интеграл представляет собой функцию Бесселя нулевого порядка второго рода от мнимого аргумента. В принятых обозначениях<sup>1)</sup>

$$\varphi(bt) = 2K_0(bt).$$

Мы не собираемся, впрочем, использовать здесь теорию функций Бесселя.

Преобразуем интеграл в выражении (3.12.5) по теореме Коши. Считая  $b > 0$ , мы деформируем контур интегрирования  $(-\infty, \infty)$  в некоторый другой, состоящий из следующих частей: 1) луча  $(-\infty, -R)$ , где  $R$  — большое положительное число; 2) дуги окружности  $z = Re^{i\theta}$  ( $\pi \geq \theta \geq \pi/2$ ); 3) отрезка  $z = is$  ( $1 + \delta \leq s \leq R$ ), где  $\delta$  — малое положительное число; 4) окружности  $z = i + \delta e^{i\theta}$  ( $\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2$ ); 5) отрезка  $z = is$  ( $1 + \delta \leq s \leq R$ ); 6) дуги  $z = Re^{i\theta}$  ( $\pi/2 \geq \theta \geq 0$ ); 7) луча  $(R, \infty)$ . Вдоль отрезка 3) функция

<sup>1)</sup> См. Ватсон, Теория бесселевых функций, М., 1949, § 6.16.

$(1+z^2)^{-1/2}$  имеет вид  $i(s^2-1)^{-1/2}$ , где  $(s^2-1)^{-1/2} > 0$ , а вдоль отрезка 5) она имеет вид  $-i(s^2-1)^{-1/2}$ . Полагая  $R \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , получаем

$$\varphi(bt) = 2 \int_1^{\infty} e^{-bts} (s^2-1)^{-1/2} ds = 2e^{-bt} \int_0^{\infty} e^{-btu} (u^2+2u)^{-1/2} du.$$

(Последний интеграл получен из предыдущего заменой  $s = u+1$ .) При  $t \geq 1$ ,  $b \geq \pi$  имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-btu} (u^2+2u)^{-1/2} du < \int_0^{\infty} e^{-\pi u} u^{-1/2} du = 1$$

и, следовательно,  $|\varphi(bt)| < 2e^{-bt}$  ( $b \geq \pi$ ,  $t \geq 1$ ). Согласно формуле (3.12.4) мы получаем

$$|S_1(t) - 2\varphi(\pi t)| = |2\varphi(3\pi t) + 2\varphi(5\pi t) + \dots| \leq \leq 2e^{-3\pi t} (1 - e^{-2\pi t})^{-1},$$

откуда

$$(3.12.6) \quad S_1(t) = 2\varphi(\pi t) + O(e^{-3\pi t}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Остается выяснить асимптотическое поведение  $\varphi(\pi t)$ . Для этой цели напишем, положив  $u = x^2$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\pi t) &= 2e^{-\pi t} \int_0^{\infty} e^{-\pi t u} (u^2+2u)^{-1/2} du = \\ &= 2e^{-\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2} (x^2+2)^{-1/2} dx, \end{aligned}$$

чтобы иметь возможность применить метод, изложенный в разд. 4.1. Окончательный результат [см. вывод разложения (4.1.10)]:

$$\varphi(\pi t) \approx 2e^{-\pi t} (2\pi t)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi^{-n} t^{-n} \quad (t \rightarrow \infty),$$

где коэффициенты  $d_n$  определяются из равенства

$$(2+x^2)^{-1/2} = 2^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{2n} \quad (|x^2| < 2),$$

При любом  $M$  остаточный член  $O(e^{-3\pi t})$  в равенстве (3.12.6) равен  $O(e^{-\pi t} t^{-1/2-M})$ , так что  $S_1(t)$  с точностью до множителя 2 имеет тот же асимптотический ряд, что и  $\varphi(\pi t)$ . Поскольку  $d_n = (-1)^n 2^{-3n} (2n)! (n!)^{-2}$ , то наш окончательный результат можно записать в виде

$$S(t) - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2} S_1(t) \approx \\ \approx e^{-\pi t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{-n-1/2} 2^{1/2-5n} \pi^{-n} \{(2n)!\}^2 \{n!\}^{-3} \quad (t \rightarrow \infty).$$

### 3.13. Преобразование Абеля

Часто возникает вопрос об асимптотическом поведении при  $n \rightarrow \infty$  суммы  $a_1 b(1) + \dots + a_n b(n)$ , где поведение суммы  $a_1 + \dots + a_n$  известно, а  $b(x)$  — довольно гладкая функция. В таких случаях обычно применяют преобразование Абеля (суммирование по частям)

$$(3.13.1) \quad a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \\ = A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \dots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n.$$

Здесь  $A_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ , а  $b_k$  — сокращенное обозначение для  $b(k)$ . С помощью нехитрых формальных преобразований эту формулу можно записать с помощью интегралов. Допустим для простоты, что  $b(x)$  имеет непрерывную производную и положим  $A(x) = \sum_{1 \leq m \leq x} a_m$  [т. е.  $A(x) = 0$ , если  $x < 1$ , и  $A(x) = a_1 + \dots + a_k$  при  $k \leq x < k+1$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )]. Тогда формула (3.13.1) примет вид

$$(3.13.2) \quad a_1 b(1) + \dots + a_n b(n) = \\ = A(n) b(n) - \int_1^n A(x) b'(x) dx.$$

В качестве примера рассмотрим сумму  $\sum_{k=1}^n \sin kt \ln k$ , где  $t$  — действительная постоянная. Положим  $\sin kt = a_k$ ,

$\ln x = b(x)$ . При любом  $n$  имеем

$$\sum_{k=1}^n \sin kt = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n e^{ikt} = \operatorname{Im} \frac{e^{i(n+1)t} - e^{it}}{e^{it} - 1}.$$

Поэтому существует такое число  $C > 0$ , не зависящее от  $n$ , что  $\left| \sum_1^n \sin kt \right| < C$ . (При  $e^{it} = 1$  наши рассуждения неверны, но результат остается в силе, так как тогда  $\sin kt = 0$  при всех  $k$ .) Полагая  $A(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \sin kt$ , получаем в силу формулы (3.13.2)

$$\sum_{k=1}^n \sin kt \ln k = A(n) \ln n - \int_1^n A(x) x^{-1} dx.$$

Так как  $|A(x)| < C$  при всех  $x$ , мы легко выводим отсюда, что

$$\sum_{k=1}^n \sin kt \ln k = O(\ln n),$$

когда  $t$  фиксировано,  $n \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим еще один пример, взятый из теории чисел. Положим  $a_n = \ln n$ , если  $n$  — простое число, и  $a_n = 0$  в противном случае. Тогда  $A(x)$  — это функция, обозначаемая обычно  $\theta(x)$ , и мы можем написать

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Основным и далеко не тривиальным результатом в теории распределения простых чисел является оценка<sup>1)</sup>

$$(3.13.3) \quad \theta(x) = x + O(x(\ln x)^{-m}) \quad (x \rightarrow \infty),$$

справедливая при любом  $m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ).

Многие другие суммы, содержащие простые числа, как  $\sum_{p \leq x} p^{-1}$ ,  $\sum_{p \leq x} p^2$ ,  $\sum_{p \leq x} 1$ , могут быть оценены с помощью этой. Рассмотрим  $\sum_{p \leq x} 1$ , т. е. число простых чисел, не превосходящих  $x$ .

<sup>1)</sup> См. Ингам А. Е., Распределение простых чисел. М., 1936.

Эта функция обычно обозначается  $\pi(x)$ . Полагая, в формуле (3.13.2)  $b(x) = (\ln x)^{-1}$ , получаем

$$\pi(n) = a_2 b(2) + \dots + a_n b(n) = \frac{\theta(n)}{\ln n} - \int_2^n \theta(x) d\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

(Мы заменили нижний предел 1 на 2, так как  $(\ln x)^{-1}$  имеет особенность при  $x=1$ ; это не имеет значения, поскольку  $\theta(1)=0$ .) Сравним это с выражением

$$\int_2^n \frac{dx}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} \Big|_2^n - \int_2^n x d\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

Вычитая и используя оценку (3.13.3), получаем

$$\begin{aligned} \pi(n) - \int_2^n \frac{dx}{\ln x} &= (\ln n)^{-1} O(n(\ln n)^{-m}) + \\ &+ \int_2^n O(x(\ln x)^{-m})(\ln x)^{-2} \frac{dx}{x} \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Для интеграла в правой части имеем оценку

$$\int_2^{\sqrt{n}} O(1) dx + \int_{\sqrt{n}}^n O((\ln \sqrt{n})^{-m-2}) dx = O(n(\ln n)^{-m-2}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

и поэтому

$$\pi(n) - \int_2^n \frac{dx}{\ln x} = O(n(\ln n)^{-m-1}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Интеграл в левой части легко записывается в виде асимптотического ряда [ср. (1.5.5)], и мы получаем, что

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2!n}{(\ln n)^3} + \frac{3!n}{(\ln n)^4} + \dots \quad (n \rightarrow \infty).$$

Между прочим заметим, что в примере (3.13.3) опять встречается ситуация, описанная в разд. 3.9 и 3.11. Мы

снова имеем асимптотический ряд, все коэффициенты которого равны нулю:

$$e^{-x\theta}(e^x) \approx 1 + 0 \cdot x^{-1} + 0 \cdot x^{-2} + \dots \quad (x \rightarrow \infty),$$

но в этом случае вопрос о том, будет ли левая часть экспоненциально мала, еще не решен.

### 3.14. Упражнения

1. Показать (например, с помощью преобразования Абеля), что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e^{-n^2 t} = -\frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{2} \gamma + O(t^{1/2}) \quad (0 < t < 1),$$

где  $\gamma = -\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx$  — постоянная Эйлера.

2. Показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 - b e^{-nt}) \approx \frac{c-1}{t} + c_0 + c_1 t + \dots \quad (t \rightarrow 0, t > 0).$$

Здесь  $b$  — постоянная,  $0 < b < 1$ , а

$$c_k = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \sum_{n=1}^{\infty} b^n n^{k-1} \quad (k = -1, 0, 1, 2, \dots).$$

3. Показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-nt}) \approx -\frac{\pi^2}{6t} - \frac{1}{2} \ln t + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{t}{24} + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 + \dots \quad (t \rightarrow 0, t > 0).$$

[Указание. Применить формулу Эйлера — Маклорена к сумме  $\sum_0^N f(n)$ , где

$$f(x) = \ln \frac{1 - e^{-xt}}{xt} .]$$

4. Пусть  $s_n$  определяется равенством

$$s_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} - \dots$$

Показать, что

$$s_n = \frac{1}{2} (\ln n)^{-1} + O(n^{-1} (\ln n)^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

5. Вывести из оценки (3.13.3), что

$$\sum_p e^{-pt} \approx - \sum_{n=0}^{\infty} t^{-1} (\ln t)^{-n-1} \int_0^{\infty} e^{-y} (\ln y)^n dy \quad (t \rightarrow 0, t > 0),$$

где суммирование распространяется на все простые числа (ср. разд. 1.8, упражнение 4).

## МЕТОД ЛАПЛАСА ДЛЯ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ

### 4.1. Введение

Мы будем рассматривать интегралы по действительному отрезку, в которых и промежуток интегрирования, и подынтегральная функция могут зависеть от параметра  $t$ ; нас будет интересовать асимптотическое поведение этих интегралов при  $t \rightarrow \infty$ . Мы можем, конечно, распространить интегрирование на всю ось  $(-\infty, \infty)$ , положив подынтегральную функцию равной нулю вне первоначального промежутка. Тогда мы получим интегралы вида

$$(4.1.1) \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dx \quad (t \rightarrow \infty).$$

Часто случается, что  $\varphi(x, t)$  как функция  $x$  имеет где-либо острый пик и интеграл, взятый по некоторой окрестности этого пика, почти равен значению всего интеграла, когда  $t$  велико. Тогда мы можем пытаться приблизить  $\varphi$  в этой окрестности какой-либо простой функцией, для которой интеграл вычисляется. Эта идея была предложена Лапласом. Ее преимущество в том, что мы должны заботиться о приближении лишь на сравнительно малом интервале.

В качестве примера применения этого метода набросаем приблизительно, как оценить интеграл

$$(4.1.2) \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} \ln(1+x+x^2) dx.$$

При большом  $t$  подынтегральная функция очень мала всюду, кроме значений  $x$ , близких к нулю. На отрезке, скажем,  $-1/2 < x < 1/2$  функцию  $\ln(1+x+x^2)$  можно с успехом приблизить простой функцией, так что сначала



мы попытаемся доказать, что интегралы  $\int_{-\infty}^{-1/2}$  и  $\int_{1/2}^{\infty}$  малы. Далее заметим, что

$$\ln(1+x+x^2) = \ln \frac{1-x^3}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + O(x^4) \quad \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, мы приходим к приближению  $F(t)$  функцией

$$(4.1.3) \quad \int_{-1/2}^{1/2} e^{-tx^2} \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) dx.$$

Слагаемые  $xe^{-tx^2}$  и  $-\frac{2}{3}x^3e^{-tx^2}$  можно отбросить, так как интеграл от них равен нулю (это нечетные функции).

Поскольку  $e^{-tx^2}$  очень мало при  $|x| > 1/2$ , то легко показать, что нет большой разницы, брать ли интеграл (4.1.3) по интервалу  $(-1/2, 1/2)$  или  $(-\infty, \infty)$ .

В предыдущих рассуждениях идея замены интервала  $(-\infty, \infty)$  интервалом  $(-1/2, 1/2)$  встретилась дважды. Однако рассматриваемый метод можно модифицировать так, чтобы полностью освободиться от подобного урезывания (хотя практически это не всегда стоит делать). Действительно, положим

$$\ln(1+x+x^2) - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 = R(x).$$

Принимая во внимание оценку

$$R(x) = O(x^4) \quad (-\infty < x < \infty),$$

можно показать, что интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} R(x) dx$  мал; делая замену  $tx^2 = y$ , находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^4 dx = t^{-5/2} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{3/2} dy = O(t^{-5/2}) \quad (0 < t < \infty).$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^2 dx = t^{-3/2} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{1/2} dy = \frac{1}{2} t^{-3/2} \pi^{1/2} \quad (t > 0),$$

то мы имеем

$$(4.1.4) \quad F(t) = \frac{1}{4} \pi^{1/2} t^{-3/2} + O(t^{-5/2}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Интегралы вида  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^k dx$  будут встречаться очень часто,

и для дальнейших ссылок мы приведем здесь некоторые формулы. Если  $k$  — нечетное целое положительное число, то ввиду нечетности подинтегральной функции

$$(4.1.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^k dx = 0 \quad (k = 1, 3, 5, \dots).$$

Если  $k$  четное, то замена  $tx^2 = y$  приводит нас к интегралу для гамма-функции

$$(4.1.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n} dx = t^{-n-1/2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = t^{-n-1/2} \pi^{1/2} \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}}.$$

Эти формулы справедливы не только при  $t > 0$ , но и при комплексных  $t$ , имеющих положительную действительную часть.

Нам понадобится еще оценка

$$(4.1.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-tx^2} x^k| dx = O((\operatorname{Re} t)^{-(k+1)/2}) \quad (\operatorname{Re} t > 0),$$

пригодная и для четных и для нечетных  $k$ . Эта оценка неравномерна по  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Часто будут применяться также более простые формулы, содержащие  $e^{-tx}x^k$ . При  $k = 0, 1, 2, \dots$  мы имеем

$$(4.1.8) \quad \int_0^{\infty} e^{-tx} x^k dx = t^{-k-1} k! \quad (\operatorname{Re} t > 0),$$

$$(4.1.9) \quad \int_0^{\infty} |e^{-tx} x^k| dx = O((\operatorname{Re} t)^{-k-1}) \quad (\operatorname{Re} t > 0).$$

Последняя оценка опять неравномерна по  $k$ .

Оценку (4.1.4) легко заменить асимптотическим рядом. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \ln(1+x+x^2) &= \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) - \left(x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \dots\right) = \\ &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

Таким образом, если  $M$  — произвольное фиксированное целое число, то

$$\begin{aligned} \ln(1+x+x^2) - (c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{2M-1}x^{2M-1}) = \\ = O(x^{2M}) \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

и эта же оценка справедлива при  $-\infty < x < \infty$ . Используя формулы (4.1.5) и (4.1.6), мы видим, что

$$F(t) = \sum_{n=1}^{M-1} c_{2n} t^{-n-1/2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) + O(t^{-M-1/2}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

и отсюда получаем асимптотический ряд

$$(4.1.10) \quad F(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} t^{-n-1/2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Начиная объяснять метод Лапласа, мы говорили об остром пике. Однако ни острота пика, ни независимость его положения от  $t$  на оси  $x$  несущественны. Действительно, и то, и другое мы можем регулировать при помощи замены переменной интегрирования  $x = au + b$ , где  $a$  и  $b$  могут зависеть от  $t$ . Важно лишь то, что существует такой интервал  $J$ ,

для которого разность  $\int_{-\infty}^{\infty} - \int_f$  мала по сравнению с  $\int_f$  и на котором подинтегральную функцию можно приблизить простой функцией.

Во многих простых случаях метод Лапласа можно заменить следующим рассуждением. Оно меняет общую точку зрения, но вряд ли отражается на выполняемых действиях.

Предположим, что после некоторой подстановки  $x = \xi(y)$  интеграл (4.1.1) приведет к виду  $\omega(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(y, t) dy$  и что существует предел  $g(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(y, t)$ . Предположим еще, что стремление  $g(y, t)$  к  $g(y)$  обеспечивает стремление  $\int_{-\infty}^{\infty} g(y, t) dy$  к  $\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy$ . Тогда мы сразу получим такую асимптотическую эквивалентность:

$$F(t) \sim \omega(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy \quad (t \rightarrow \infty);$$

дальнейшие приближения часто можно получить при более подробном изучении разности  $g(y, t) - g(y)$ .

## 4.2. Общий случай

Рассмотрим интеграл

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} dx,$$

где  $h(x)$  — действительная непрерывная функция. Предположим, что она достигает абсолютного максимума в точке  $x = 0$ . Не ограничивая общности, мы можем допустить, что  $h(0) = 0$ . Кроме того, мы потребуем, чтобы  $h(x) < 0$  при всех  $x \neq 0$  и даже чтобы существовали положительные числа  $b$  и  $c$ , такие, что  $h(x) \leq -b$  при  $|x| \geq c$ . Это условие выполнено, если  $h(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow \pm \infty$  (именно так бывает в большинстве приложений).

Еще мы потребуем, чтобы интеграл сходился для всех достаточно больших значений  $t$ . Для простоты мы будем считать, что он сходится при  $t=1$ , т. е. что сходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h(x)} dx.$$

Наконец, мы предположим, что  $h'(x)$  существует в некоторой окрестности точки  $x=0$ , что  $h''(0)$  существует и что  $h''(0) < 0$ .

Поскольку  $h(x)$  имеет при  $x=0$  максимум, то  $h'(0)=0$ .

Из наших предположений следует, что для любого  $\delta > 0$  существует положительное число  $\eta(\delta)$ , такое, что  $h(x) \leq -\eta(\delta)$  при  $|x| > \delta$ . При  $\delta \geq c$  это очевидно; при  $\delta \leq c$  мы замечаем, что непрерывная функция  $h(x)$  в замкнутом интервале  $\delta \leq x \leq c$  достигает своего наибольшего значения, и это наибольшее значение отрицательно (и аналогично при  $-c \leq x \leq -\delta$ ).

Сумма интегралов по отрезкам  $(-\infty, -\delta)$  и  $(\delta, \infty)$  удовлетворяет неравенству

$$(4.2.1) \quad \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} < e^{-(t-1)\eta(\delta)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{h(x)} dx \quad (t > 1).$$

В окрестности точки  $x=0$  мы аппроксимируем  $h(x)$  величиной  $\frac{1}{2} x^2 h''(0)$ . При данном  $\varepsilon$  ( $0 < 3\varepsilon < |h''(0)|$ ) мы можем определить  $\delta > 0$  так, чтобы

$$(4.2.2) \quad \left| h(x) - \frac{1}{2} x^2 h''(0) \right| \leq \varepsilon x^2 \quad (-\delta \leq x \leq \delta).$$

Чтобы это доказать, положим  $h(x) - \frac{1}{2} x^2 h''(0) = \varphi(x)$ , откуда  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ . Производная  $\varphi'(x)$  существует в окрестности нуля [это следует из существования  $\varphi''(0)$ ] и  $x^{-1}(\varphi'(x) - \varphi'(0)) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , так что  $\varphi'(x) = o(x)$  ( $x \rightarrow 0$ ). При достаточно малом  $|x|$  к функции  $\varphi$  можно применить теорему о среднем значении, и это даст нам  $\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\theta x)$  ( $0 < \theta < 1$ ). Итак,  $\varphi(x) = x\varphi'(\theta x) = o(x^2)$  ( $x \rightarrow 0$ ). Отсюда следует неравенство (4.2.2).

Теперь мы можем оценить интеграл от  $-\delta$  до  $+\delta$ :

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{1}{2} tx^2 (h''(0) - 2\varepsilon)} dx < \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} dx < \int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{1}{2} tx^2 (h''(0) + 2\varepsilon)} dx.$$

Все три интеграла  $\int_{-\delta}^{\delta}$  отличаются от соответствующих интегралов  $\int_{-\infty}^{\infty}$  на величину  $O(e^{-\alpha t})$ , где  $\alpha > 0$  — постоянная, не зависящая от  $t$ , хотя и зависящая от выбора  $\delta$ . Для среднего интеграла это следует из оценки (4.2.1), а для двух других это можно установить тем же способом. Используя формулу (4.1.6) (с  $n = 1$ ), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} dx < (2\pi)^{1/2} (-h''(0) - 2\varepsilon)^{-1/2} t^{-1/2} + O(e^{-\alpha t}) \quad (t > 1).$$

Отсюда следует, что

$$(4.2.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} dx < (2\pi)^{1/2} (-h''(0) - 3\varepsilon)^{-1/2} t^{-1/2}$$

для всех достаточно больших значений  $t$ . Нет необходимости говорить, что такая же оценка имеется и снизу. Так как  $\varepsilon$  произвольно мало, то

$$(4.2.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{th(x)} dx \sim (2\pi)^{1/2} (-th''(0))^{-1/2} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Если снять ограничение  $h(0) = 0$ , то мы получим еще дополнительный множитель  $e^{th(0)}$  в правой части формулы (4.2.4).

### 4.3. Максимум на границе

В разд. 4.2 максимум подинтегральной функции достигался во внутренней точке интервала, и из сделанного нами предположения дифференцируемости вытекало, что  $h' = 0$  в этой точке. Но максимум  $h$  может достигаться, скажем, в левом конце интервала, и тогда  $h'$  будет там, вообще говоря, отрицательна.

Пусть нам нужно оценить интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{th(x)} dx,$$

где  $h(x)$  — действительная и непрерывная функция, достигающая максимума при  $x=0$ ,  $h'(0)$  существует и меньше нуля. Предположим еще, что  $h(x) < h(0)$  ( $x > 0$ ),  $h(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow \infty$  и что интеграл  $\int_0^{\infty} e^{h(x)} dx$  сходится.

Мы можем повторить все рассуждения разд. 4.2 в несколько более простом виде. Вместо неравенства (4.2.2) мы используем неравенство

$$|h(x) - h(0) - xh'(0)| \leq \varepsilon x \quad (0 \leq x \leq \delta),$$

сразу вытекающее из того, что  $x^{-1}(h(x) - h(0)) \rightarrow h'(0)$  при  $x \rightarrow 0$ .

Тем же приемом, используя теперь формулы (4.1.8), совсем просто показать, что

$$\int_0^{\infty} e^{th(x)} dx \sim (-th'(0))^{-1} e^{th(0)} \quad (t \rightarrow \infty).$$

В частности, в этом простом случае очень легко убедиться, что формула остается верной и при комплексных  $t$ , если вместо  $t \rightarrow \infty$  написать  $\operatorname{Re} t \rightarrow \infty$ . То же замечание относится ко всем интегралам, рассматриваемым в этой главе, если только заменить остаточный член  $O(t^{-k})$  на  $O((\operatorname{Re} t)^{-k})$ , а  $O(e^{-at})$  на  $O(e^{-a \operatorname{Re} t})$ .

#### 4.4. Асимптотические разложения

Ясно, что в случае интегралов, рассмотренных в разд. 4.2 и 4.3, большая асимптотическая информация (при  $x \rightarrow 0$ ) об  $h(x)$  приводит к большей асимптотической информации об интеграле (при  $t \rightarrow \infty$ ). Мы ограничимся лишь случаем разд. 4.2, случай разд. 4.3 совершенно аналогичен. Мы уже дали один пример в разд. 4.1, но сейчас мы поговорим о более общем и более трудном случае.

Для простоты мы предположим, что в некотором интервале  $-\delta \leq x \leq \delta$  функция  $h(x)$  равна сумме сходящегося степенного ряда

$$h(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

и что  $a_2 < 0$ . Мы будем говорить об интеграле

$$(4.4.1) \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{th(x)} dx,$$

где  $g(x)$  — интегрируемая функция, которая на том же интервале  $-\delta \leq x \leq \delta$  равна сумме степенного ряда

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

Мы можем считать, что оба степенных ряда продолжают абсолютно сходиться при  $|x| = \delta$ , так как в противном случае мы могли бы взять меньшее  $\delta$ .

Нам понадобится грубая оценка, показывающая, что интегралами по интервалам  $(-\infty, -\delta)$  и  $(\delta, \infty)$  можно пренебречь. Мы предположим, что при любом целом  $M > 0$

$$(4.4.2) \quad \int_{-\infty}^{-\delta} g(x) e^{th(x)} dx = O(t^{-M}),$$

$$\int_{\delta}^{\infty} g(x) e^{th(x)} dx = O(t^{-M}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

не беспокоясь о том, каким образом можно получить эти оценки. Еще мы предположим существование такого  $\eta > 0$ , что

$$(4.4.3) \quad h(x) \leq -\eta x^2 \quad (-\delta \leq x \leq \delta).$$

[В действительности неравенство (4.4.3) можно доказать, используя тот факт, что  $h(x) < 0$  при  $-\delta \leq x \leq \delta$ .]

Мы дадим два приема получения асимптотического ряда для  $F$ . Один из них мы опишем здесь, второй в разд. 4.5.

Пользуясь первым методом, мы рассматриваем  $\exp(ta_2 x^2)$  как основной множитель в подинтегральной функции. Оставшийся множитель

$$g(x) \exp\{tx^3(a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + \dots)\}$$

можно разложить в двойной степенной ряд по  $tx^3$  и по  $x$ , сходящийся при  $|x| \leq \delta$  и при любых значениях  $tx^3$ .

Мы будем записывать этот ряд в виде

$$P(tx^3, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} (tx^3)^m x^n.$$



Его коэффициенты  $c_{mn}$  не зависят от  $t$  и от  $x$ . Мы хотим равномерно приближать  $P$  частными суммами ряда, поэтому мы ограничимся конечным интервалом изменения  $tx^3$ . Скажем, мы будем использовать этот степенной ряд только при  $|x| \leq t^{-1/3}$ . Для краткости обозначим  $t^{-1/3} = \tau$ . Мы можем считать, что  $t > \delta^{-3}$ , тогда  $\tau \leq \delta$ .

Во-первых, заметим, что интервалами  $(-\delta, -\tau)$  и  $(\tau, \delta)$  можно пренебречь. Нетрудно показать, что при фиксированном  $\eta > 0$

$$(4.4.4) \quad \int_{\tau}^{\infty} e^{-\eta tx^3} dx = O(e^{-\eta t^{1/3}}) \quad (t > 1).$$

В самом деле, поскольку

$$\eta t(x^2 - \tau^2) > \eta t\tau(x - \tau) > \eta(x - \tau) \quad (x > \tau),$$

то

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-\eta t(x^2 - \tau^2)} dx < \int_{\tau}^{\infty} e^{-\eta(x - \tau)} dx = \frac{1}{\eta},$$

откуда и следует оценка (4.4.4). Вообще, при любом целом  $N \geq 0$

$$(4.4.5) \quad \int_{\tau}^{\infty} e^{-\eta tx^3} x^N dx = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \eta t^{1/3}\right)\right) \quad (t > 1).$$

Множитель  $x^N$  не доставляет трудностей. В самом деле, при  $x \geq \tau$  имеем  $x \leq tx^2$ , и поэтому  $x^N = O(e^{\eta x^2}) = O(e^{\eta tx^2/2})$ . Таким образом, оценка (4.4.5) следует из формулы (4.4.4) после замены  $\eta$  на  $\eta/2$ .

Из оценок (4.4.3), (4.4.4) и из того, что  $g(x)$  ограничена на интервале  $-\delta \leq x \leq \delta$ , следует, что

$$(4.4.6) \quad \int_{\tau}^{\delta} g(x) e^{th(x)} dx + \int_{-\delta}^{-\tau} g(x) e^{th(x)} dx = \\ = O(e^{-\eta t^{1/3}}) \quad (t > \delta^{-3}).$$

На оставшемся интервале  $-\tau \leq x \leq \tau$  аппроксимируем  $P$  частными суммами ряда. Выберем целое число  $A > 0$  и напомним

$$P_A(tx^3, x) = \sum_{\substack{m+n \leq A \\ m \geq 0, n \geq 0}} c_{mn} (tx^3)^m x^n.$$

Тогда при  $|x| < \tau$

$$(4.4.7) \quad P - P_A = O((tx^3)^{A+1}) + O(x^{A+1})$$

равномерно по  $x$  и  $t$ . Это требует некоторых пояснений. Если двойной степенной ряд  $\sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} c_{mn} z^m w^n$  сходится при  $|z| < 2R$ ,  $|w| < 2S$ , то из ограниченности общего члена сходящегося ряда следует, что  $c_{mn} = O(R^{-m} S^{-n})$ . Отсюда при  $|z| < R/3$ ,  $|w| < S/3$  легко получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m+n > A \\ m > 0, n > 0}} c_{mn} z^m w^n &= O\left(\sum \left|\frac{z}{R}\right|^m \cdot \left|\frac{w}{S}\right|^n\right) = \\ &= O\left(\sum_{k=A+1}^{\infty} \left(\frac{|z|}{R} + \frac{|w|}{S}\right)^k\right) = O\left(\left(\frac{|z|}{R} + \frac{|w|}{S}\right)^{A+1}\right) = \\ &= O((|z| + |w|)^{A+1}) = O(|z|^{A+1}) + O(|w|^{A+1}). \end{aligned}$$

О последнем шаге см. формулу (1.2.12). Еще раз подчеркнем, что оценка неравномерна по  $A$ .

Если добавить к оценке (4.4.7), что функция  $P$  непрерывна при  $|tx^3| \leq 1$ ,  $-\delta \leq x \leq \delta$ , то мы получим, что формула, доказанная в некоторой достаточно малой области, будет справедлива и в указанной большей области (см. разд. 1.2).

Согласно оценке (4.4.5) при фиксированном  $A$  имеем

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\tau}^{\tau} \right\} P_A e^{t a_2 x^2} dx = O\left(t^{A-\frac{1}{2}} e^{a_2 t^{1/3}}\right) \quad (t \rightarrow \infty)$$

( $a_2$  отрицательно). Отсюда в силу оценок (4.4.2), (4.4.5), (4.4.6) и (4.4.7) при любом целом  $M > 0$  имеем

$$(4.4.8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{th(x)} dx - \int_{-\infty}^{\infty} P_A e^{t a_2 x^2} dx = O(t^{-M}) + \\ + O\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{t a_2 x^2} (|tx^3|^{A+1} + |x|^{A+1}) dx \right\} \quad (t \rightarrow \infty).$$

С этими интегралами мы встречались в формулах (4.1.5) и (4.1.6). Согласно оценке (4.1.7) последнее слагаемое в выра-

жении (4.4.8), как нетрудно убедиться, равно  $O(t^{-A/2-1})$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{th(x)} dx = \\ & = \sum_{\substack{m+n \leq A \\ m \geq 0, n \geq 0}} c_{mn} \varepsilon_{m+n} t^{-(m+n+1)/2} (-a_2)^{-(3m+n+1)/2} \Gamma\left(\frac{3m+n+1}{2}\right) + \\ & \quad + O(t^{-A/2-1}) + O(t^{-M}) \quad (t \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_s = 1$  при четном  $s$  и  $\varepsilon_s = 0$  при нечетном  $s$ .

Поскольку  $A$  и  $M$  произвольны, то мы имеем асимптотический ряд

$$(4.4.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{th(x)} dx \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu} t^{-\frac{1}{2}-\nu} \quad (t \rightarrow \infty),$$

где

$$d_{\nu} = (-a_2)^{-\nu-1/2} \sum_{m=0}^{2\nu} c_{m, 2\nu-m} (-a_2)^{-m} \Gamma\left(m + \nu + \frac{1}{2}\right).$$

Легко видеть, что главный член  $d_0 t^{-1/2}$  равен

$$g(0) \sqrt{-\frac{2\pi}{th''(0)}}.$$

Мы предположили выше, что  $h(x)$  и  $g(x)$  разлагаются в сходящиеся степенные ряды в некоторой окрестности точки  $x=0$ . Нетрудно показать, что эти результаты применимы также в случае, если

$$h(x) \approx a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \quad g(x) \approx b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \quad (x \rightarrow 0)$$

в смысле асимптотических рядов.

#### 4.5. Асимптотическое поведение гамма-функции

Мы применим результат разд. 4.4 к задаче об асимптотическом поведении  $\Gamma(t+1)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Мы хотим провести наши рассуждения совершенно независимо от разд. 3.10, где к бесконечному произведению  $\Gamma$ -функции применялся метод

Эйлера—Маклорена. Здесь мы ограничимся случаем действительного  $t$ .

Мы будем исходить из интегрального представления

$$(4.5.1) \quad \Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^t du \quad (t > -1).$$

Подинтегральная функция имеет пик, но его положение непостоянно: максимум  $e^{-u} u^t$  достигается при  $u = t$  и равен  $e^{-t} t^t$ . Поэтому сделаем в интеграле замену переменного  $u = t + y$  и исследуем подинтегральную функцию в окрестности точки  $y = 0$ . Окрестности эти в нашем случае довольно велики. Ниже выяснится, что длина этих интервалов больше, чем  $t^{1/2}$ . Это, впрочем, ни в каком отношении не влияет на метод, и если мы сделаем еще одну замену  $y = tx$ , то лишь для того, чтобы слегка упростить формулы.

После замены  $u = t(1+x)$  интеграл в равенстве (4.5.1) примет вид

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} t^{t+1} \int_{-1}^{\infty} \{e^{-x} (1+x)\}^t dx.$$

Функция  $e^{-x} (1+x)$  имеет максимум при  $x = 0$ , и, полагая  $e^{-x} (1+x) = e^{h(x)}$ , получаем

$$h(x) = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots$$

Таким образом,  $h(x)$  удовлетворяет условиям разд. 4.2 и  $h''(0) = -1$ . Поэтому согласно формуле (4.2.4)

$$\Gamma(t+1) \sim e^{-t} t^{t+1/2} (2\pi)^{1/2} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Это формула Стирлинга.

Метод разд. 4.4 приведет нас к асимптотическому ряду для функции  $\Gamma(t+1) t^{-t-1/2} e^t$ . Мы объясним сейчас одно видоизменение этого метода, работать с которым во многих случаях совсем просто. Введем новую переменную интегрирования  $z$  формулой  $\frac{1}{2} z^2 = -h(x)$  или, точнее,

$$z = x \left( 1 - \frac{2}{3} x + \frac{2}{4} x^2 - \dots \right)^{1/2},$$

где для корня берется главное значение. В некоторой окрестности начала формула обращения Лагранжа представляет  $x$  в виде ряда по степеням  $z$ :

$$x = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

Насколько эта окрестность мала, неважно, поскольку от  $t$  она не зависит, так что в интеграле можно ограничиться лишь этой окрестностью [ср. (4.2.1)]. Таким образом, мы видим, что существуют числа  $\delta > 0$  и  $c > 0$ , не зависящие от  $t$  и такие, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \Gamma(t+1) = \\ & = e^{-t} t^{t+1} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1}{2} z^2 t} (1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots) dz + O(e^{-ct}) \right\}, \end{aligned}$$

и метод, изложенный в разд. 4.1, дает

$$\begin{aligned} (4.5.2) \quad & (2\pi)^{-1/2} \Gamma(t+1) e^{tt} t^{-t-1/2} \approx \\ & \approx 1 + 3c_3 \frac{2}{t} \cdot \frac{2!}{1!2^2} + 5c_5 \left(\frac{2}{t}\right)^2 \frac{4!}{2!2^4} + \dots \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Можно сравнить этот результат с формулой (3.10.7), которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} (4.5.3) \quad & \ln \left\{ (2\pi)^{-1/2} \Gamma(t+1) e^{tt} t^{-t-1/2} \right\} \approx \\ & \approx \frac{B_2}{1 \cdot 2t} + \frac{B_4}{3 \cdot 4t^3} + \frac{B_6}{5 \cdot 6t^5} + \dots \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если обозначить формальные степенные ряды в формулах (4.5.2) и (4.5.3) через  $P(t^{-1})$  и  $Q(t^{-1})$  соответственно, то формально  $e^{Q(z)} = P(z)$ . Однако убедиться в этом непосредственно далеко не просто.

#### 4.6. Кратные интегралы

Метод Лапласа без труда может быть применен и к кратным интегралам. Рассмотрим, например,

$$F(t) = \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \exp \{ th(x_1, \dots, x_n) \} dx_1 \dots dx_n,$$

где  $h$  непрерывна в гиперкубе  $-1 \leq x_1 \leq 1, \dots, -1 \leq x_n \leq 1$ . Мы предположим, что  $h(0, \dots, 0) = 0$  и  $h(x_1, \dots, x_n) < 0$  во всех остальных точках гиперкуба. Кроме того, мы предположим, что все вторые производные функции  $h$  существуют, непрерывны в окрестности начала, а максимум в точке  $(0, \dots, 0)$  — эллиптического типа. В действительности нам нужно знать, что

$$(4.6.1) \quad h(x_1, \dots, x_n) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + o(x_1^2 + \dots + x_n^2) \quad (x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow 0),$$

причем квадратичная форма  $\sum \sum a_{ij} x_i x_j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) положительно определена.

Все рассуждения разд. 4.2 можно повторить, внося очевидные изменения. Опустив детали, упомянем только окончательный результат

$$(4.6.2) \quad F(t) \sim At^{-n/2} \quad (t \rightarrow \infty),$$

где

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum \sum a_{ij} x_i x_j\right) dx_1 \dots dx_n.$$

Хорошо известно, что

$$(4.6.3) \quad A = (2\pi)^{n/2} D^{-1/2},$$

где  $D$  — определитель матрицы  $(a_{ij})$ . Это обычно доказывается при помощи ортогонального преобразования переменных интегрирования, приводящего матрицу к диагональному виду, после чего интеграл получается равным произведению однократных интегралов.

Если  $h$  допускает разложение в ряд по степеням  $x_1, \dots, x_n$ , то можно получить асимптотический ряд для  $F(t)$  точно таким же способом, как в разд. 4.4.

Во многих случаях, особенно для теоретических целей, легче применить метод, аналогичный использованному в разд. 4.5. Мы дадим лишь краткое описание этого метода.

Для любого  $\epsilon > 0$  обозначим через  $\varphi(\epsilon)$  объем той части гиперкуба  $-1 \leq x_1 \leq 1, \dots, -1 \leq x_n \leq 1$ , точки которой

удовлетворяют неравенству  $h(x_1, \dots, x_n) \geq -y^2/2$ . Тогда

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ty^2} d\varphi(y),$$

и таким образом задача свелась к однократному интегралу. Обычно  $\varphi(y)$  дифференцируема и  $\varphi'(y) \sim ny^{n-1}D^{-1/2}V_n(y \rightarrow 0)$ , где  $V_n$  — объем единичной сферы  $n$ -мерного евклидова пространства. Для главного члена получаем

$$\begin{aligned} F(t) &\sim nD^{-1/2}V_n \int_0^{\infty} e^{-ty^2/2} y^{n-1} dy = \\ &= nD^{-1/2}V_n \cdot 2^{-1+n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) t^{-n/2} \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Поскольку  $V_n = \pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ , то это снова дает нам формулу (4.6.2).

#### 4.7. О применениях

Рассмотрим один поучительный пример многомерного метода Лапласа. Возьмем сумму

$$(4.7.1) \quad S(s, n) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+n} \binom{2n}{k}^s,$$

где  $s$  и  $n$  — целые положительные числа. Хорошо известно, что  $S(1, n) = 0$ ,  $S(2, n) = (2n)!/(n!)^2$  и что по формуле Диксона<sup>1)</sup>  $S(3, n) = (3n)!/(n!)^3$ . Можно, конечно, ожидать, что аналогичные формулы имеются и для больших значений  $s$ , но ни одна из таких формул не известна. Простой способ проверить, существует ли такая формула, — определить асимптотическое поведение  $S(s, n)$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $s$  и выяснить, соответствует ли это мультипликативным комбинациям факториалов. Оказывается, что асимптотическая формула для  $S(s, n)$  содержит  $(\cos \pi/2s)^{2ns}$ . Число  $(\cos \pi/2s)^{2s}$  при  $s = 2$  и  $s = 3$  рационально, но при  $s > 3$  это уже не так, и, следовательно,  $(\cos \pi/2s)^{2sn}$  не может получиться из формулы Стирлинга для  $n!$ ,  $(2n)!$ ,  $(3n)!$ , ... Поэтому мы не можем надеяться на простое обобщение формулы Диксона для  $s > 3$ .

<sup>1)</sup> См. Bailey W. N., Generalized Hypergeometric Series, Cambridge, 1935, p. 13.

Строго говоря, оценка  $S(s, n)$  относится к гл. 3. Мы попадаем, однако, в положение, описанное в разд. 3.11: сумма экспоненциально мала по сравнению с наибольшим слагаемым (т. е. с тем слагаемым, для которого  $k = n$ ). В этом легко убедиться при  $s = 1, 2, 3$ , а при любом  $s$  это следует из нашего окончательного результата (4.7.4). [Заметим, что наибольший член  $t_n$  асимптотически равен  $(2^{2n}(\pi n)^{-1/2})^s$ .] Это значит, грубо говоря, что метод Эйлера — Маклорена (ввиду знакопеременности — тот его вариант, который изложен в разд. 3.11) даст результат такого вида:

$$\frac{S(s, n)}{t_n} \approx 0 + 0 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots \quad (n \rightarrow \infty),$$

и возможно (см. метод разд. 3.10), что отношение  $S/t_n$  экспоненциально мало, однако нас не удовлетворит простая оценка сверху. Кроме того, в этом случае слагаемые суммы являются очень громоздкими функциями переменной суммирования  $k$ , и метод Эйлера — Маклорена становится неудобным. Ввиду этих соображений имеет смысл найти другое явное выражение для  $S(s, n)$ . Одну такую возможность мы используем здесь, другую, не ограничивающуюся случаем целого  $S$ , — в разд. 6.4.

Нетрудно убедиться, что сумма  $S(s, n)$  равна свободному члену в произведении

$$(-1)^n (1+z_1)^{2n} (1+z_2)^{2n} \dots (1+z_r)^{2n} \{1 - (z_1 \dots z_r)^{-1}\}^{2n},$$

где  $r = s - 1$ .

Поскольку  $S(1, n) = 0$  — тривиальный случай, мы предположим, что  $s \geq 2$ ,  $r \geq 1$ . По формуле Коши имеем

$$S(r+1, n) = (-1)^n (2\pi i)^{-r} \int \dots \int (1+z_1)^{2n} \dots (1+z_r)^{2n} \times \\ \times \{1 - (z_1 \dots z_r)^{-1}\}^{2n} \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_r}{z_r},$$

где интегралы берутся по единичным окружностям в комплексной  $z$ -плоскости.

После подстановки  $z_j = e^{2i\varphi_j}$  получаем

$$(4.7.2) \quad S(r+1, n) = 2^{2n(r+1)} \pi^{-r} \times \\ \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{\cos \varphi_1 \dots \cos \varphi_r \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_r)\}^{2n} d\varphi_1 \dots d\varphi_r,$$



и к полученному кратному интегралу применяем метод Лапласа. Положим

$$G(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = \cos \varphi_1 \dots \cos \varphi_r \sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_r),$$

и прежде всего найдем точки экстремума функции  $G$ . Так как  $G = 0$  на границе гиперкуба

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_r \leq \frac{\pi}{2},$$

а внутри него она принимает как положительные, так и отрицательные значения, то границей можно пренебречь. Но во внутренних точках  $G$  имеет непрерывные частные производные, так что мы должны рассмотреть лишь те точки, в которых  $\partial G / \partial \varphi_1 = \dots = \partial G / \partial \varphi_r = 0$ . Исключая точки, где  $G = 0$ , получаем

$$(4.7.3) \quad \frac{\partial G}{\partial \varphi_j} = \{-\operatorname{tg} \varphi_j + \operatorname{ctg}(\varphi_1 + \dots + \varphi_r)\} G \\ (j=1, 2, \dots, r).$$

Итак, из наших условий следует, что  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \dots = \operatorname{tg} \varphi_r$ . Но  $\varphi_j$  заключены в интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$ , таким образом, все  $\varphi_j$  равны между собой, скажем,  $\varphi_1 = \dots = \varphi_r = \alpha$ . Мы имеем  $\operatorname{ctg} r\alpha = \operatorname{tg} \alpha$ , и поэтому  $\alpha + r\alpha = \pi/2 + k\pi$ , где  $k$  — целое число. Другими словами,  $\alpha = \pi\nu/2s$ , где  $s = r + 1$ , а  $\nu$  — нечетное целое число,  $|\nu| < s$ . Значение  $G$  в этой точке равно

$$G(\alpha, \dots, \alpha) = (\cos \alpha)^r \sin r\alpha = \pm (\cos \alpha)^s.$$

Таким образом, имеются два абсолютных максимума функции  $G^2$ , соответствующих  $\nu = +1$  и  $\nu = -1$  в точках  $\alpha = \beta$  и  $\alpha = -\beta$ , где  $\beta = \pi/2s$ . Достаточно рассмотреть лишь одну из этих точек, скажем,  $\alpha = +\beta$ . Действительно, интеграл в выражении (4.7.2) можно разбить на две равные части, отвечающие  $\varphi_1 + \dots + \varphi_r > 0$  или  $< 0$ .

В окрестности  $\Omega$  точки  $(\beta, \dots, \beta)$  напомним

$$G(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = G(\beta, \dots, \beta) e^{h(\beta + x_1, \dots, \beta + x_r)}$$

и оценим

$$2 \int \dots \int \exp(2nh(\beta + x_1, \dots, \beta + x_r)) dx_1 \dots dx_r,$$

где интегрирование распространено на окрестность  $\Omega'$  точки  $(0, 0, \dots, 0)$ . Так как  $G$  имеет непрерывные частные производные всех порядков, мы можем написать формулу Тейлора для  $h$  [ср. (4.6.1)]. Но  $x_1 = \dots = x_r = 0$  — точка максимума для функции  $G$  и  $h = 0$  в этой точке, так что свободный член и линейные члены отсутствуют, и мы имеем

$$h(\beta + x_1, \dots, \beta + x_r) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_{ij} x_i x_j + \dots,$$

где

$$a_{ij} = -\frac{\partial^2 \ln G}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \Big|_{\varphi_1 = \dots = \varphi_r = \beta}.$$

Из выражения (4.7.3) находим

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\operatorname{tg} \varphi_j - \operatorname{ctg} (\varphi_1 + \dots + \varphi_r)) = \\ = \delta_{ij} \cos^{-2} \varphi_j + \sin^{-2} (\varphi_1 + \dots + \varphi_r) = (\delta_{ij} + 1) \cos^{-2} \frac{\pi}{2s},$$

так как при  $\varphi_1 = \dots = \varphi_r = \pi/2s$  имеем  $\sin (\varphi_1 + \dots + \varphi_r) = \sin (r\pi/2s) = \cos (\pi/2s)$ . Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера:  $\delta_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ),  $\delta_{jj} = 1$ . Определитель матрицы  $(1 + \delta_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, \dots, r$ ), имеющей на главной диагонали 2, а на всех остальных местах 1, равен  $s$  (порядок матрицы  $r$ ), что легко доказывается по индукции. Это можно также доказать, найдя собственные значения матрицы; числа 1 и  $r + 1$ , очевидно, являются собственными значениями, и поскольку вычитание из нашей матрицы единичной матрицы дает матрицу ранга 1, то кратность собственного значения 1 равна  $r - 1$ . Поэтому других собственных значений нет. Но определитель равен произведению собственных значений, откуда видно, что определитель нашей матрицы равен  $r + 1 = s$ .

Матрица  $(1 + \delta_{ij})$  положительно определена, так как соответствующая квадратичная форма имеет вид

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 + (x_1 + \dots + x_r)^2.$$

Теперь мы уже можем применить формулы (4.6.2) и (4.6.3) и получить, что  $S(s, n)$  асимптотически равна выражению

$$2^{2n} (r-1) \pi^{-r} 2 (2\pi)^{r/2} D^{-1/2} (2n)^{-r/2} \{G(\beta, \dots, \beta)\}^{2n},$$

где

$$D = s \cos^{-2r} \frac{\pi}{2s}, \quad G(\beta, \dots, \beta) = \cos^s \frac{\pi}{2s}.$$

Окончательно имеем

$$(4.7.4) \quad S(s, n) \sim \left\{ 2 \cos \frac{\pi}{2s} \right\}^{2ns+s-1} 2^{2-s} (\pi n)^{(1-s)/2} s^{-1/2}$$

при  $n \rightarrow \infty$  и при фиксированном  $s$  ( $s = 2, 3, \dots$ ).

Для проверки возьмем  $s = 3$ . Тогда

$$S(3, n) \sim 3^{3n+1/2} (2\pi n)^{-1} \quad (n \rightarrow \infty),$$

и так как

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} \sim (3n)^{3n+1/2} (2\pi)^{1/2} e^{-3n} \left\{ n^{n+1/2} (2\pi)^{1/2} e^{-n} \right\}^{-3},$$

то наш результат находится в согласии с формулой Диксона:  $S(3, n) = (3n)!/(n!)^3$ .

#### 4.8. Упражнения

1. Доказать асимптотическое равенство

$$\int_0^{\pi} x^n \sin x \, dx \sim \pi^{n+2} n^{-2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

2. Показать, что

$$\int_0^1 e^x x^n (1+x^2)^{-n} \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{e}{2^n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

3. Доказать асимптотическое равенство

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! n^{-k} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Показать, что при  $0 < \lambda < 1$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! n^{-k} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda^2}{n(1-\lambda)^3} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(Указание.  $k! n^{-k-1} = \int_0^{\infty} e^{-nx} x^k dx$ .)

4. Показать, что имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-n(x^2+y^2)} (1-x-y)^n dx dy \approx c_2 n^{-2} + c_3 n^{-3} + c_4 n^{-4} + \dots \quad (n \rightarrow \infty),$$

причем  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = -7$ .

**МЕТОД ПЕРЕВАЛА****5.1. Метод**

Метод перевала, предложенный Риманом и Дебаем <sup>1)</sup>, — один из наиболее важных и наиболее сильных методов асимптотических оценок. Его целью является получение хороших приближений для интеграла

$$(5.1.1) \quad F(t) = \int_P \varphi(z) dz,$$

где  $P$  — контур в комплексной плоскости, а функция  $\varphi(z)$  аналитична в некоторой окрестности этого контура. Мы предположим, что как контур интегрирования, так и функция  $\varphi$  зависят от действительного параметра  $t$ , и изучим асимптотическое поведение  $F(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

В любом конкретном случае применение метода перевала распадается на два этапа.

1) Этап, когда мы прикидываем, строим предположения и планы. Именно это является обычно наиболее трудным. Результатом этого этапа является выбор нового контура интегрирования, пригодного для перехода ко второму этапу.

<sup>1)</sup> Riemann B., *Gesammelte Mathematische Werke*, 2-е Aufl., Leipzig, 1892, S. 424—430.

Debye P., *Math. Ann.* 67 (1909), S. 535—558.

Приведем несколько книг, содержащих изложение метода перевала с примерами: Курант и Гильберт, *Методы математической физики*, т. I, М., 1948; Jeffreys B. S. and H., *Methods of Mathematical Physics*, 3 ed., Cambridge, 1956; Copson E. T., *The Asymptotic Expansion of a Function Defined by a Definite Integral or a Contour Integral*, Admiralty Computing Service, London, 1946; Erdélyi A., *Asymptotic Expansions*, Dover Publ., 1956.

(Добавим к этому списку несколько книг на русском языке, не упомянутых автором: Смирнов В. И., *Курс высшей математики*, т. III, М., 1950; Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., *Методы теории функций комплексного переменного*, М., 1957, 2-е изд.; Евграфов М. А., *Асимптотические оценки и целые функции*, М., 1957. — *Прим. перев.*)

2) Этап, когда собственно применяется этот метод. Если подходящий контур интегрирования уже выбран, дальнейшие действия пройдут, как правило, по шаблону, хотя они могут оказаться сложными. Этот этап опирается в основном на метод Лапласа, изложенный в гл. 4.

Первый этап обычно крайне труден, особенно в тех случаях, когда новый контур интегрирования должен зависеть от параметра  $t$ . Большинство авторов предпочитают иметь дело с конкретными применениями, не вдаваясь в объяснения, почему контур выбран так, а не иначе. Основная причина этого в том, что всегда очень трудно сказать, почему мы используем одни возможности и пренебрегаем другими — ведь это зависит от личного опыта и от личного мнения.

Мы в своем изложении попытаемся привести в каждом примере определенные соображения, объясняющие до некоторой степени выбор пути интегрирования, однако многие читатели могут найти их неудовлетворительными. Имеются, конечно, общие принципы, изложенные в разд. 5.2 — 5.5, на которых основан метод, однако в конкретных применениях помощь от этих общих принципов невелика.

Общую идею метода перевала можно легко понять следующим образом. Допустим на мгновение, что нас интересует не значение  $F(t)$ , а лишь точная оценка сверху для  $|F(t)|$ . Если контур  $P$  имеет конечную длину  $l_P$ , то мы можем, конечно, написать

$$(5.1.2) \quad |F(t)| \leq \int_P |\varphi(z)| |dz| \leq l_P \max_P |\varphi(z)|,$$

где  $\max_P |\varphi(z)|$  — это максимум  $|\varphi(z)|$  вдоль контура  $P$ .

Однако иногда можно получить лучшую оценку, выбрав иной контур. По теореме Коши можно заменить контур  $P$  в интеграле (5.1.1) другим контуром  $C$ , имеющим те же концы, что и  $P$ , и получающимся из  $P$  непрерывной деформацией в пределах области аналитичности функции  $\varphi(z)$ . Такой контур  $C$  мы назовем допустимым.

Мы теперь хотим определить контур  $C$  так, чтобы величина

$$(5.1.3) \quad l_C \max_C |\varphi(z)|$$

принимала наименьшее значение. Такой контур  $C$  может, конечно, зависеть от  $t$ .

Роль  $l_C$ , как правило, совсем незначительна, во-первых, из-за грубости оценки (5.1.2). Вдоль большей части контура значение  $|\varphi(z)|$  может быть значительно меньше, чем в точке максимума, так что существенной может оказаться лишь малая часть контура. Во-вторых, нас интересуют применения к случаям, когда  $\varphi(z)$  при больших  $t$  меняется довольно резко — очень велика в одних местах и очень мала в других. Поэтому малое изменение контура может привести к сильному изменению  $\max_C |\varphi(z)|$ , в то время как величина  $l_C$  сильно измениться не может.

Наконец, стоит заметить, что если  $\varphi(z)$  не будет резко меняющейся функцией, то применение метода перевала вряд ли будет успешным.

В силу этих соображений мы можем надеяться, что значение величины (5.1.3) будет довольно близко к минимальному, если мы выберем из множества всех допустимых контуров тот (назовем его  $C$ ), для которого величина

$$(5.1.4) \quad \max_C |\varphi(z)|$$

принимает наименьшее значение. Вообще говоря, минимизирующий контур, конечно, может не существовать, но обычно он существует.

При этом часто получается так, что контур  $C$ , выбранный таким способом для оценки  $|F(t)|$ , в то же время пригоден и для получения асимптотической оценки самой функции  $F(t)$ . То есть, записывая уравнения контура в параметрическом виде, мы можем представить интеграл  $\int_C \varphi(z) dz$  в виде инте-

грала по действительному интервалу, к которому уже можно попытаться применить метод Лапласа. Если метод Лапласа неприменим, то можно только сказать, что задача в действительности была непригодна для применения метода перевала.

Сделанное утверждение, конечно, очень грубо. Есть много контуров с одним и тем же значением  $\max_C |\varphi(z)|$ , и не все они подходят для применения метода Лапласа. Мы должны еще так подправить контур  $C$ , чтобы та его часть, где значение  $|\varphi(z)|$  близко к своему максимуму, была малой длины. Этого можно добиться так называемым методом наибо-  
 лее быстрого спуска (см. разд. 5.4).

Если контур  $C$  выбран этим методом, то максимум  $|\varphi(z)|$  достигается лишь в нескольких изолированных точках и, как правило, только в одной единственной точке. Эти изолированные точки являются либо концами контура, либо точками перевала, т. е. точками, в которых  $\varphi'(z)$  обращается в нуль. Точки перевала обычно легко найти, и они образуют основу для построения контура  $C$ .

Как мы уже говорили, максимум может достигаться и в одном из концов контура, и тогда не возникает вопроса о точках перевала. Однако мы и в этом случае будем говорить о методе перевала, так как и задача и метод те же, что и в случае, когда точки перевала имеются.

## 5.2. Геометрическая интерпретация

Чтобы пояснить сказанное, дадим геометрическую иллюстрацию. Положим  $z = x + iy$  и рассмотрим в трехмерном пространстве  $(x, y, w)$  поверхность, заданную уравнением  $w = |\varphi(x + iy)|$ . Тривиальный случай  $\varphi = \text{const}$  мы исключим.

Из формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\varphi|}{\partial x} - i \frac{\partial |\varphi|}{\partial y} &= |\varphi| \left\{ \frac{\partial \operatorname{Re} \ln \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \operatorname{Re} \ln \varphi}{\partial y} \right\} = \\ &= |\varphi| \frac{d \ln \varphi}{dz} = \frac{|\varphi|}{\varphi} \frac{d\varphi}{dz} \end{aligned}$$

легко видеть, что в точках, где  $\varphi'(x + iy) = 0$ , и только в них касательная плоскость горизонтальна. [Для простоты мы на время забудем о точках, где  $\varphi(x + iy) = 0$ .] По принципу максимума модуля  $|\varphi|$  не имеет ни максимумов, ни минимумов, за исключением минимумов в точках, где  $\varphi = 0$ , так что точки с горизонтальной касательной плоскостью являются седловыми точками. Это значит, что на поверхности любая окрестность каждой такой точки расположена частично выше, частично ниже уровня самой седловой точки.

Представим себе человека, желающего попасть из пункта  $A$  в пункт  $B$  в горной местности, причем из-за своего физического состояния он по возможности избегает больших высот. С другой стороны, он не боится лишних подъемов или горизонтальных участков. Тогда он попытается сделать



именно то, что мы хотим сделать на нашей поверхности  $\omega = |\varphi(x + iy)|$ , — он постарается найти такой путь, чтобы максимальная высота была возможно меньше.

Если найдется такой путь, на котором  $A$  — самое высокое место, то его задача решена. Ясно, что ни на одном пути, ведущем из  $A$  в  $B$ , наивысшая точка не может быть ниже  $A$ . Те же рассуждения применимы и к  $B$ .

С другой стороны, может случиться и так, что такого пути нет, т. е. на любом пути, ведущем из  $A$  в  $B$ , найдутся точки, более высокие, чем  $A$  и  $B$ . Путешественнику, не являющемуся математиком, сразу станет ясно, что если существует путь, решающий его экстремальную задачу, то наивысшая точка такого пути будет седловой, или, согласно географической терминологии, перевалом. Математик же сумеет доказать это (также предполагая, что решение экстремальной задачи существует) при некоторых условиях непрерывности, заведомо выполненных для нашей поверхности  $\omega = |\varphi(x + iy)|$ . Если бы поверхность Земли представляла собой не сферу, а бесконечную плоскость, то нашему путешественнику пришлось бы считаться с тем, что такой экстремальный путь может и не существовать: могло бы случиться, что выбирая все более и более окольные пути, мы уменьшали бы максимальную высоту подъема, никогда не достигая минимума. Достаточным, хотя и не необходимым, условием существования экстремального пути является наличие окружности, содержащей  $A$  и  $B$  внутри и такой, что все ее точки расположены выше любой точки прямолинейного отрезка, соединяющего  $A$  с  $B$ .

Сейчас мы опишем метод, позволяющий нашему путешественнику выбрать наилучший возможный путь. Пусть  $h_0$  — наибольшая из высот  $A$  и  $B$ . Для каждого  $h \geq h_0$  мы построим множество  $R_h$ , состоящее из всех точек, высота которых не превосходит  $h$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат в  $R_h$ , и вопрос состоит в том, можно ли соединить их путем, целиком лежащим в  $R_h$ . Если ответ отрицателен, то наивысшая точка минимального пути имеет высоту, большую чем  $h$ , а если положителен, то существует путь, максимальная высота которого меньше или равна  $h$ . Итак, задача путешественника решена, если он знает наименьшее значение  $h$ , при котором ответ на поставленный вопрос положителен. Но как найти это наименьшее значение?

Следующее утверждение для нематематического ума очевидно: если  $k$  — такое наименьшее значение  $h$ , а  $P$  — путь из  $A$  в  $B$ , целиком лежащей в  $R_k$ , то наивысшая точка этого пути является седловой. Действительно, в противном случае эту наивысшую точку можно было бы обойти.

Это значит, что наименьшее значение  $h$  следует искать только среди высот различных перевалов. Даже и без этих рассуждений наш путешественник прежде всего сравнил бы высоту близлежащих перевалов и выяснил, не может ли он воспользоваться каким-либо из наиболее низких.

Ясно, что через самый высокий перевал путешественник должен пройти так, чтобы в любой его окрестности с обеих сторон пути были точки, лежащие выше перевала<sup>1)</sup>.

Проведенные выше рассуждения упрощают задачу, причем настолько, что неизвестной величиной становится уже не путь, а число. К сожалению, в математических задачах нахождение точки перевала часто бывает очень трудно выполнить эти операции. Однако нетрудно сравнить высоты близлежащих точек перевала и попытаться воспользоваться наиболее низкой точкой. В следующем разделе мы покажем, что этим способом часто можно получить определенный ответ.

### 5.3. Поверхности без вершин

Поверхности, которые нас особенно интересуют, а именно  $w = |\varphi(x + iy)|$ , обладают одним простым свойством: в силу принципа максимума модуля они не имеют вершин. Предположив, что особых точек нет, мы можем извлечь отсюда такое следствие: если замкнутый контур проходит через точку перевала, не являющуюся двойной точкой контура, то эта точка перевала *не может быть* наивысшей точкой контура. (Это следует понимать в том смысле, что на контуре есть более высокие точки.) Чтобы это показать, достаточно рассмотреть замкнутый контур без двойных точек, так как в противном случае мы могли бы взять ту простую замкнутую часть контура, которая уже не содержит двойных точек и все еще проходит через точку перевала (наши рассуждения все еще находятся на математическом уровне нашего

---

<sup>1)</sup> В дальнейшем слова „путь *проходит* через точку перевала“ всегда будут пониматься именно в этом смысле. — *Прим. ред.*

путешественника). Но по принципу максимума модуля наивысшая точка поверхности, ограниченной нашим контуром, лежит на самом контуре. Значит, в некоторой окрестности наивысшей точки контура по одну сторону от него нет более высоких точек. Поэтому наивысшая точка не может быть точкой перевала, через которую проходит контур (см. определение понятия „проходит“ в конце разд. 5.2).

Эта теорема о замкнутом пути имеет следствие большого практического значения для нашей задачи на минимум. Если (на поверхности без вершин и без особенностей) путь без двойных точек, ведущий из  $A$  в  $B$ , проходит через точку перевала и если эта точка перевала является наивысшей точкой пути (в слабом смысле, если на пути нет более высоких точек), то этот путь решает нашу минимальную задачу, т. е. любой другой путь имеет по крайней мере одну точку по меньшей мере той же высоты, что и упомянутая точка перевала. Доказать это очень просто. Если мы пойдем из  $A$  в  $B$  по этому пути, а потом обратно из  $B$  в  $A$  по любому другому, то мы получим замкнутый контур, к которому применима предыдущая теорема.

Это означает, что можно сразу узнать, является ли путь минимальным. Если мы предположили, что некоторый путь решает нашу минимальную задачу, то мы можем проверить это предположение, рассматривая только этот путь; в исследовании всех других путей нет никакой необходимости.

Если включить случай, когда наивысшей точкой пути является  $A$  или  $B$ , то можно сформулировать следующее правило для решения минимальной задачи: *найти не содержащий двойных точек путь из  $A$  в  $B$ , высшей точкой которого является либо один из концов, либо точка перевала, через которую он проходит.*

Дополнительные слова „через которую он проходит“, очевидно, необходимы, чтобы избежать случая, когда наш путешественник поднимается на очень высокий перевал, а затем спускается с него в ту же сторону, откуда пришел.

Если имеются особенности, то мы должны заботиться о том, чтобы минимальный путь был эквивалентен первоначальному контуру в том смысле, что эти контуры можно деформировать один в другой, не выходя из области регулярности. Иными словами, мы должны заботиться о том, чтобы теорема Коши была применима.

Впрочем, последнее соглашение об особенностях часто бывает выгодно нарушить. При этом, конечно, нужно добавить соответствующие вычеты, но они, как правило, легко находятся с большой точностью.

Сделанные до сих пор различные утверждения можно было бы более точно сформулировать и более строго доказать. Но для наших целей в этом нет необходимости, так как все эти вопросы играют роль лишь на первом этапе (см. 5.1) применения метода. Строгие доказательства будут нужны лишь на втором этапе, где оценки будут проводиться на некотором специальном контуре, и тогда будет уже совершенно несущественно, из каких соображений этот контур был выбран.

#### 5.4. Наибыстрейший спуск

Рассмотрим контур, наивысшей точкой которого является точка перевала (причем контур проходит через эту точку). Исследуем окрестность точки перевала.

Несколько удобнее иметь дело с логарифмом функции  $\varphi(z)$ , который мы обозначим  $\psi(z)$ , так что  $\varphi(z) = e^{\psi(z)}$ . Поскольку точка перевала, которую мы обозначим через  $\zeta$ , является наивысшей точкой контура, то  $\varphi(\zeta) \neq 0$ . Так как в дальнейшем нас будет интересовать лишь окрестность точки  $\zeta$ , то мы можем выделить какую-либо ветвь логарифма и избавиться от всех трудностей, связанных с многозначностью.

Из условия  $\varphi(\zeta) \neq 0$  следует, что условия  $\varphi'(\zeta) = 0$  и  $\psi'(\zeta) = 0$  эквивалентны.

До сих пор мы считали высотой поверхности величину  $|\varphi(z)|$ . Если мы вместо  $|\varphi(z)|$  возьмем  $\operatorname{Re} \psi(z)$ , которая является монотонной функцией от  $|\varphi(z)|$ , то в рассуждениях предыдущего раздела ничего не изменится. Кроме того,  $\operatorname{Re} \psi(z)$  — однозначная функция [во всяком случае, если  $\varphi(z)$  однозначна].

Если  $\psi(z) \neq \operatorname{const}$ , то хотя бы одна из высших производных  $\psi''(\zeta)$ ,  $\psi'''(\zeta)$ , ... отлична от нуля. Пусть  $k$  — наименьшее целое положительное число, для которого  $\psi^{(k)}(\zeta) \neq 0$ . Мы будем считать  $k = 2$ . Случай  $k > 2$  лишь немногим сложнее, и так как в приложениях он встречается довольно редко, мы его не рассматриваем.

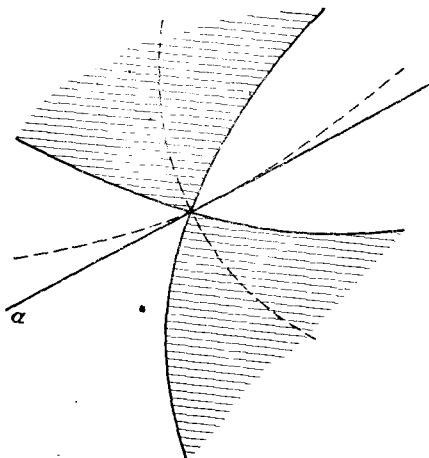
Ситуация в малой окрестности точки  $\zeta$  в основном определяется значением  $\psi''(\zeta)$ , так как

$$\psi(z) = \psi(\zeta) + \frac{1}{2} \psi''(\zeta) (\zeta - z)^2 + \dots$$

Назовем *осью* точки перевала прямую комплексной плоскости  $z$ , определенную условием

$$\psi''(\zeta) (z - \zeta)^2 \leq 0.$$

Эта прямая проходит через точку  $\zeta$ . Аргумент оси равен  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arg \psi''(\zeta)$  (если прямая  $l$  параллельна прямой, соединяющей



Фиг. 1.

той точки 0 и  $\alpha$ , то мы будем называть  $\arg \alpha$  аргументом  $l$ ; аргумент  $l$  определяется с точностью до слагаемого, кратного  $\pi$ ). Прямая, на которой  $\psi''(\zeta) (z - \zeta)^2 \geq 0$ , очевидно, перпендикулярна оси.

Кривые  $\operatorname{Re} \psi(z) = \operatorname{Re} \psi(\zeta)$ , пересекающие ось в точке  $\zeta$ , образуют с ней углы  $\pm \pi/4$ . Эти кривые изображены на фиг. 1 сплошными линиями. Кривые  $\operatorname{Im} \psi(z) = \operatorname{Im} \psi(\zeta)$  обозначены пунктирными линиями. Касательная к одной из них в точке  $\zeta$  совпадает

с осью, касательная к другой — перпендикулярна оси. Сама ось обозначена буквой  $a$ . Кривые  $\operatorname{Re} \psi(z) = \operatorname{Re} \psi(\zeta)$  делят окрестность точки  $\zeta$  на четыре части. Две части, не содержащие точек оси, заштрихованы. В этих областях  $\operatorname{Re} \psi(z) > \operatorname{Re} \psi(\zeta)$ , откуда следует, что наш путь интегрирования, на котором  $\zeta$  — наивысшая точка, не должен заходить в эти области. Поскольку наш путь интегрирования должен проходить через точку перевала, то он должен идти по обеим незаштрихованным частям.

Возможен предельный случай, когда контур интегрирования идет в точности по одной из линий  $\operatorname{Re} \psi(z) = \operatorname{Re} \psi(\zeta)$  и  $\zeta$  — не единственная наивысшая точка, а все точки по крайней мере некоторой части этого контура находятся на одной высоте. Существует даже метод, специально предназначенный для такого случая, — он называется методом стационарной фазы. Мы увидим, однако, что для аналитических функций от этого случая всегда можно освободиться (разд. 5.8), и поэтому в дальнейшем мы не будем его рассматривать.

В общем случае, когда используется контур интегрирования, проходящий полностью, кроме самой точки  $\zeta$ , внутри незаштрихованной области, мы всегда можем деформировать его так, чтобы его касательная в точке  $\zeta$  совпала с осью  $a$  и чтобы в случае резко меняющейся функции  $\operatorname{Re} \psi(z)$ , который собственно нас и интересует, значение  $\operatorname{Re} \psi(z)$  во всех точках контура, за исключением малой окрестности точки  $\zeta$ , было много меньше, чем  $\operatorname{Re} \psi(\zeta)$ . Если мы пойдем по оси в любую сторону от точки перевала, то  $\operatorname{Re} \psi(z)$  будет убывать. Легко убедиться, что в этом направлении убывание будет более быстрым, чем в любом другом. Поэтому направление оси называется направлением *наибыстрейшего спуска*.

Использование этих направлений *наибыстрейшего спуска* не очень существенно для метода перевала. Обычно можно брать любую другую кривую, проходящую по двум незаштрихованным областям, лишь бы угол, который она образует с осью, был меньше  $\pi/4$  и не стремился к  $\pi/4$  при  $t \rightarrow \infty$ .

### 5.5. Наибыстрейший спуск в концевой точке

Пусть мы имеем путь, ведущий из  $A$  в  $B$ , с наивысшей точкой  $A$ . Вообще говоря,  $\psi'(A) \neq 0$ . Мы не будем рассматривать, что случится, когда  $\psi'(A) = 0$ , так как при этом  $A$  оказывается точкой перевала и применимо все, что было сказано в разд. 5.4.

При  $\psi'(A) \neq 0$  значение  $\operatorname{Re} \psi(z)$  в малой окрестности точки  $A$  определяется в основном значением  $\psi'(A)$ , так как

$$\psi(z) = \psi(A) + (z - A)\psi'(A) + \dots$$

Опять определим ось условием

$$(z - A)\psi'(A) \leq 0.$$

Теперь это луч, выходящий из точки  $A$ ,

Перпендикулярно к этому лучу проходит кривая, вдоль которой  $\operatorname{Re} \psi(z) = \operatorname{Re} \psi(A)$ . С одной стороны этой кривой, а именно со стороны оси, имеем  $\operatorname{Re} \psi(z) < \operatorname{Re} \psi(A)$ , с другой стороны  $\operatorname{Re} \psi(z) > \operatorname{Re} \psi(A)$ . Наш контур не может, конечно, заходить в последнюю область, так как  $A$  — наивысшая точка на контуре.

Направление оси является направлением **наибыстрейшего спуска**, и мы предпочитаем выбирать наш контур так, чтобы он начинался в этом направлении.

### 5.6. Второй этап

Пусть с помощью соображений, изложенных в разд. 5.3, мы уже нашли контур, на котором  $\max_C \operatorname{Re} \psi(z)$  достигает наименьшего значения, и деформировали его так, чтобы в концах и в точке перевала он шел по направлениям **наибыстрейшего спуска**. Предположим, что  $\operatorname{Re} \psi(z)$  резко меняется в том смысле, что она велика (относительно) в некоторых из точек перевала или концевых точек и что в этих точках велик модуль  $|\psi''(\zeta)|$ , если рассматривается точка перевала, или  $|\psi'(\zeta)|$ , если рассматривается концевая точка. Тогда на нашем контуре значения функции  $|\exp \psi(z)|$  велики в малых окрестностях некоторых точек перевала или концевых точек, и ее значениями во всех других точках контура можно пренебречь. Не все точки перевала и концевые точки одинаково важны: может случиться, что значениями  $|\exp \psi(z)|$  в некоторых из этих точек можно пренебречь по сравнению со значениями в других. В этих несущественных точках не обязательно двигаться по направлению **наибыстрейшего спуска**, и если говорить о точках перевала, то даже не обязательно проводить контур точно через эти точки.

Чтобы окончательно сосчитать асимптотическое выражение для нашего интеграла, мы теперь применим метод Лапласа (гл. 4). В концевой точке подинтегральная функция имеет, грубо говоря, вид  $\exp(-cs)$ , а в точке перевала вид  $\exp(-cs^2)$ . В обоих случаях  $c$  — постоянная с большой действительной частью, а  $s$  — действительный параметр, с помощью которого записано уравнение нашего контура в окрестности рассматриваемой точки (нашей точке отвечает  $s = 0$ ).

## 5.7. Простой общий случай

Рассмотрим односвязную область  $D$  комплексной плоскости и две функции  $g(z)$  и  $h(z)$ , не зависящие от  $t$ . Функции  $g(z)$  и  $h(z)$  аналитичны внутри  $D$ . Точки  $A$  и  $B$  лежат в области  $D$  и не зависят от  $t$ . Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении интеграла

$$F(t) = \int_A^B g(z) e^{th(z)} dz$$

при  $t > 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Предположим, что в  $D$  имеется точка  $\zeta$ , в которой  $h'(\zeta) = 0$ ,  $h''(\zeta) \neq 0$ . Строго говоря,  $\zeta$  будет точкой перевала для  $e^{th(z)}$ , а не для  $g(z)e^{th(z)}$ . Тем не менее оказывается, что  $\zeta$  можно использовать при решении задачи с  $ge^{th}$ .

Линии уровня  $|e^{th}|$ , проходящие через точку  $\zeta$ , изображены на фиг. 1, стр. 110. Если число  $\delta$ ,  $0 < \delta < \pi/4$ , не зависит от  $t$ , то мы можем найти такое  $\rho > 0$ , что существуют два противоположных сектора круга с центром  $\zeta$  и радиусом  $\rho$ , имеющие раствор  $\pi/2 - 2\delta$ , симметричные относительно оси точки перевала, в которых  $|e^{th(z)}| < |e^{th(\zeta)}|$ , или  $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(\zeta)$ . Эти секторы могут быть описаны формулами

$$(1) \quad 0 < |z - \zeta| < \rho, \quad \left| \arg(z - \zeta) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arg h''(\zeta) \right| < \frac{\pi}{4} - \delta,$$

$$(2) \quad 0 < |z - \zeta| < \rho, \quad \left| \arg(z - \zeta) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arg h''(\zeta) \right| < \frac{\pi}{4} - \delta.$$

Действительно, в обоих секторах имеем

$$\left| \arg \{ -(z - \zeta)^2 h''(\zeta) \} \right| < \pi/2 - 2\delta$$

и, значит,

$$\operatorname{Re} \{ -(z - \zeta)^2 h''(\zeta) \} > |z - \zeta|^2 \sin 2\delta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} h(z) - \operatorname{Re} h(\zeta) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ h''(\zeta) (z - \zeta)^2 \} + O(|z - \zeta|^3) < \\ &< -\frac{1}{2} |z - \zeta|^2 \sin 2\delta + O(|z - \zeta|^3). \end{aligned}$$

Эта величина отрицательна, если  $\rho$  достаточно мало.

Очевидно, и  $\delta$ , и  $\rho$  можно выбрать независимо от  $t$ . Предположим теперь, что  $A_1$  — точка из сектора (1), а  $B_1$  — точка



из сектора (2), обе не зависят от  $t$ , и что путь интегрирования от  $A_1$  до  $B_1$  лежит внутри  $D$ . Этот путь мы можем заменить другим. Сначала соединим точку  $A_1$  с точкой оси  $A_2$ , лежащей в секторе (1), затем пройдем через точку перевала вдоль оси от точки  $A_2$  до некоторой точки  $B_2$  [лежащей в секторе (2)], и, наконец, соединим точку  $B_2$  с  $B_1$ . На отрезках пути от  $A_1$  до  $A_2$  и от  $B_1$  до  $B_2$  выражение  $\operatorname{Re}\{h(z) - h(\zeta)\}$  имеет отрицательную верхнюю грань  $-c$ , так что вклад от этих отрезков в интеграл равен  $O(e^{-ct}e^{t \operatorname{Re} h(\zeta)})$ . Вклад интеграла от  $A_2$  до  $B_2$  может быть оценен при помощи метода Лапласа. Напишем параметрическое уравнение этого пути в виде

$$z = \zeta + \alpha x, \quad a \leq x \leq b \quad (-\rho < a < 0 < b < \rho, \\ \alpha = \exp\{\pi i/2 - i/2 \arg h''(\zeta)\}.$$

Тогда интеграл от  $A_2$  до  $B_2$  примет вид

$$\alpha \int_a^b g(\zeta + \alpha x) e^{th(\zeta + \alpha x)} dx.$$

Таким образом, мы пришли к интегралу, подробно изученному в разд. 4.4, поскольку

$$h(\zeta + \alpha x) = h(\zeta) + \frac{1}{2} h''(\zeta) \alpha^2 x^2 + \dots, \quad \frac{1}{2} h''(\zeta) \alpha^2 < 0.$$

Можно сразу применить полученный там результат. Мы найдем асимптотический ряд вида [ср. (4.4.9)]

$$(5.7.1) \quad \int_{A_1}^{B_1} g(z) e^{th(z)} dz \approx e^{th(\zeta)} t^{-\frac{1}{2}} \sum_0^{\infty} d_n t^{-n} \quad (t \rightarrow \infty).$$

При  $g(\zeta) \neq 0$  главный член легко вычисляется:

$$(5.7.2) \quad \int_{A_1}^{B_1} g(z) e^{th(z)} dz = \\ = (2\pi)^{1/2} \alpha t^{-1/2} |h''(\zeta)|^{-1/2} g(\zeta) e^{th(\zeta)} \{1 + O(t^{-1})\} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Заметим, что  $\alpha$  — комплексное число с модулем 1 и с аргументом, соответствующим направлению оси от (1) к (2).

Правую часть равенства (5.7.1) мы назовем *вкладом* точки перевала  $\zeta$ . Стоит заметить, хотя это и очевидно, что вклад точки перевала зависит от того, в каком направлении она

проходится. Если направление изменить на обратное, то вклад, разумеется, изменит знак.

Поскольку интегралы от  $A_1$  до  $A_2$  и от  $B_2$  до  $B_1$  экспоненциально малы по сравнению с  $e^{th(z)}$ , то формулы (5.7.1) и (5.7.2) остаются справедливыми, если заменить  $A_2$  на  $A_1$  и  $B_2$  на  $B_1$ .

Вопрос о том, будет ли интеграл по первоначальному контуру от  $A$  до  $B$  асимптотически равен вкладу точки перевала, носит совершенно другой характер. На него нельзя ответить, изучая лишь малую окрестность точки перевала  $\zeta$ . Ответ будет утвердительным, если  $A$  можно соединить с  $A_1$ , а  $B$  с  $B_1$  так, чтобы на соединяющих кривых максимум  $\operatorname{Re} h(z)$  был меньше  $\operatorname{Re} h(\zeta)$ , потому что тогда вкладом от интегралов по этим кривым снова можно пренебречь.

Заметим, что не было необходимости использовать  $A_1, B_1$  как промежуточные точки между  $A, B$  и  $A_2, B_2$ . Это было сделано выше для небольшого упрощения рассуждений. Вклад интегралов от  $A$  до  $A_2$  и от  $B_2$  до  $B$  экспоненциально мал, и без этого шага можно обойтись.

Если контур, соединяющий  $A$  и  $B$ , имеет  $\zeta$  наивысшей точкой, и касательная к нему в точке  $\zeta$  образует с осью угол, меньший  $\pi/4$ , то можно взять  $A_1$  и  $B_1$  на самом контуре достаточно близко к  $\zeta$ .

Аналогичным образом, но проще, можно было найти вклад концевой точки ( $A$  или  $B$ ) в наш интеграл  $\int g(z) e^{th(z)} dz$ . Мы приведем только результат: если  $g(A) \neq 0$ ,  $h'(A) \neq 0$  и если контур начинается от  $A$  в направлении убывания  $\operatorname{Re} h(z)$ , то главный член вклада в интеграл окрестности точки  $A$  равен (ср. разд. 4.3)

$$g(A) e^{th(A)} (-th'(A))^{-1}.$$

## 5.8. Контур постоянной высоты

Рассмотрим опять интегралы

$$\int_A^B \varphi(z) dz = \int_A^B e^{\psi(z)} dz.$$

Если точки  $A$  и  $B$  соединены контуром, все точки которого имеют одну и ту же высоту на поверхности  $w = \operatorname{Re} \psi(z)$ ,

то этот контур автоматически решает нашу минимальную задачу (поскольку ни на каком другом пути из  $A$  в  $B$  максимальная высота не может быть меньше высоты точки  $A$ ). Мы покажем, что такой контур всегда можно слегка деформировать так, чтобы получить контур с конечным числом наивысших точек.

С этой целью разобьем наш контур на части, имеющие своими концами либо  $A$ , либо  $B$ , либо какую-нибудь точку перевала, и не содержащие точек перевала внутри. Ясно, что разбиение контура на такие части возможно. Пусть  $A_k A_{k+1}$  — одна из таких частей, и пусть ее параметрическим уравнением будет  $z = f(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , где  $f(s)$  — непрерывно дифференцируемая функция,  $f'(s) \neq 0$ ,  $0 \leq s \leq 1$ ,  $f(0) = A_k$ ,  $f(1) = A_{k+1}$ . Поскольку на контуре между  $A_k$  и  $A_{k+1}$  нет точек перевала, то мы имеем

$$\frac{d\psi}{ds} = \psi'(z) f'(s) \neq 0 \quad (0 < s < 1).$$

Так как  $\operatorname{Re} \psi$  принимает на контуре постоянное значение, то  $i(d\psi/ds)$  действительна, непрерывна и отлична от нуля при  $0 < s < 1$ . Значит, она сохраняет знак, скажем,

$$i \frac{d\psi}{ds} < 0 \quad (0 < s < 1).$$

Но отсюда с помощью уравнений Коши — Римана получаем, что производная функции  $\operatorname{Re} \psi(z)$  по направлению, перпендикулярному к нашему контуру, тоже отрицательна в предположении, что положительная нормаль направлена влево от контура. Это значит, что слева от контура  $\operatorname{Re} \psi(z)$  принимает значения меньшие, чем ее постоянное значение на контуре, так что вместо левой стороны мы можем говорить о „низкой“ стороне.

Опишем теперь новый контур от  $A_k$  до  $A_{k+1}$ . Из точек  $A_k$  и  $A_{k+1}$  немного отходим в низкую сторону, лучше всего по направлению наибо́льшего спуска, а затем соединяем полученные точки, оставаясь на малом расстоянии от контура. Здесь „малое“ означает: достаточно малое, чтобы оставаться на более низком уровне, чем исходный контур.

То же самое мы можем проделать для других частей контура  $AB$ . Низкая сторона при этом будет то слева, то справа. В точках перевала новый контур поднимается до их уровня, а затем снова опускается с другой стороны. [По-

следнее сказано не совсем строго. Если мы имеем точку перевала высшего порядка, то может оказаться, что нам придется вернуться в ту же сторону, откуда пришли.]

Асимптотическое поведение интеграла от  $A$  до  $B$  в этом случае дается суммой вкладов точек  $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ .

В разд. 5.11 мы еще рассмотрим пример такого рода.

### 5.9. Замкнутый контур

Вместо контура, соединяющего точки  $A$  и  $B$ , в задаче об оценке интеграла (5.1.1) можно рассматривать и замкнутый контур. В этом случае мы, конечно, не должны предполагать, что подинтегральная функция регулярна всюду внутри этого контура, поскольку тогда интеграл был бы равен нулю.

Рассматривая замкнутый контур, мы не получим, разумеется, вклада от концов. Если наш контур можно деформировать в другой контур, проходящий через единственную точку перевала, и если эта точка перевала выше всех других точек контура, то к этому новому контуру можно применить все те технические приемы, которые мы называли вторым этапом метода.

Если мы имеем замкнутый контур постоянной высоты, то он не обязательно решает нашу минимальную задачу (соображения, высказанные в начале разд. 5.8, по существу зависели от того, что точки  $A$  и  $B$  были зафиксированы). Например, при  $\varphi(z) = z^{-2}$  любая окружность с центром в начале будет контуром постоянной высоты, но ни одна из них не решает нашей задачи о минимуме.

### 5.10. Область влияния точки перевала

Часто бывает трудно точно определить точки перевала. Однако для получения асимптотических оценок не всегда необходимо проводить контур точно через точку перевала. [В разд. 5.7 мы, например, использовали не точную точку перевала для  $g(z)e^{th(z)}$ , а приближение к ней — точку перевала для  $e^{th(z)}$ .] Чтобы выяснить, какие отклонения от точки перевала возможны, мы введем понятие *области влияния* точки перевала.

Если  $\zeta$  — точка перевала для функции  $\psi(z)$ , то областью влияния точки перевала  $\zeta$  мы назовем круговую окрестность  $\zeta$ ,

состоящую из точек  $z$ , для которых величина  $|\psi''(\zeta)(z - \zeta)^2|$  не очень велика.

Сказанное выше не есть точное математическое определение, но оно может оказаться полезным. Слова „область влияния“ здесь такие же нематематические слова, как „мало“, „велико по сравнению“. Мы без труда могли бы придать им определенное значение, однако с большой степенью произвола. Но поскольку это понятие играет роль лишь в том, что мы назвали первым этапом, то у нас нет необходимости в большей точности.

Мы будем использовать также слова „радиус области влияния“ для обозначения радиуса той круговой окрестности, о которой мы говорили выше.

Следует помнить, что любая из написанных величин зависит от  $t$ , хотя в формулах буква  $t$  в явном виде отсутствует. В частности, точка перевала  $\zeta$  может зависеть от  $t$ . Но даже если точка перевала фиксирована, ее область влияния все еще может зависеть от  $t$ . Например, если  $\psi(z) = -tz^2$ , то точка перевала  $\zeta = 0$  не зависит от  $t$ , а радиус ее области влияния имеет порядок  $t^{-1/2}$ .

Если мы имеем дело с интегралом  $\int e^{\psi(z)} dz$  и если  $\zeta$  — точка перевала, то очень важно знать, будет ли в формуле

$$(5.10.1) \quad \psi(z) = \psi(\zeta) + \frac{1}{2} \psi''(\zeta)(z - \zeta)^2 + \frac{1}{6} \psi'''(\zeta)(z - \zeta)^3 + \dots$$

сумма членов

$$(5.10.2) \quad \frac{1}{6} \psi'''(\zeta)(z - \zeta)^3 + \dots$$

мала по сравнению с  $\frac{1}{2} \psi''(\zeta)(z - \zeta)^2$ , когда  $z$  лежит в области влияния этой точки перевала. (Нет необходимости говорить, что все зависит от параметра  $t$  и что „малость“ следует понимать как  $o$ -оценку при  $t \rightarrow \infty$ .) Если она мала, то мы можем применить всю технику разд. 4.4, и если речь идет о вкладе точки перевала, то наш интеграл можно вполне успешно сравнивать с интегралом

$$(5.10.3) \quad \int_L \exp \left\{ \psi(\zeta) + \frac{1}{2} \psi''(\zeta)(z - \zeta)^2 \right\} dz = \\ = (2\pi)^{1/2} |\psi''(\zeta)|^{-1/2} e^{\psi(\zeta)}.$$

Здесь  $L$  — ось точки перевала, бесконечная в обе стороны, а направление, в котором берется интеграл, соответствует направлению, в котором контур проходит через точку перевала. Число  $\alpha$  по модулю равно единице, а его аргумент указывает направление  $L$  [ср. (5.7.2)].

В частном случае, когда  $\psi(z) = th(z)$ ,  $h(z)$  не зависит от  $t$ ,  $h'(\zeta) = 0$ ,  $h''(\zeta) \neq 0$  (см. разд. 5.7), внутри области влияния сумма членов третьего и более высоких порядков мала по сравнению с членом второго порядка. В самом деле, тогда разложение (5.10.1) имеет положительный радиус сходимости  $R$ , не зависящий от  $t$ . Радиус области влияния имеет порядок  $t^{-1/2}$ , так как  $|\psi''(\zeta)(z - \zeta)^2|$  велик, если  $|z - \zeta|$  много больше  $t^{-1/2}$ . Далее, ряд (5.10.2) сходится при  $|z - \zeta| < R$ , и его сумма равна  $O(t(z - \zeta)^3)$  при  $|z - \zeta| < R_1$  ( $R_1$  — постоянная,  $0 < R_1 < R$ ). Значит, сумма ряда (5.10.2) равна  $O(t^{-1/2}(\psi''(\zeta)(z - \zeta)^2))$  при  $|z - \zeta| = O(t^{-1/2})$ . Это означает, что внутри области влияния член второго порядка преобладает над всеми остальными при  $t \rightarrow \infty$ .

Если же, напротив, сумма (5.10.2) не является малой по сравнению с  $\frac{1}{2}\psi''(\zeta)(z - \zeta)^2$  при  $z$ , лежащем в области влияния точки перевала, то в общем случае трудно что-нибудь сказать. Обычно это означает, что в области влияния  $\zeta$  имеются другие точки перевала или особые точки функции  $\psi(z)$ . Мы рассмотрим такой пример в разд. 5.12.

## 5.11. Примеры

Примеры, которые мы приводим в заключительных разделах этой главы, являются несколько искусственными в двух отношениях. Во-первых, они возникли не из практических задач, а были специально придуманы, чтобы проиллюстрировать некоторые аспекты метода перевала. Во-вторых, в каждом из этих примеров встречается лишь часть трудностей, характерных для метода перевала, в то время как в большинстве практически встречающихся применений в одной и той же задаче бывают сосредоточены почти все возможные трудности. Несколько таких более сложных задач мы рассмотрим в следующей главе,

Нашим первым примером будет интеграл

$$f(t) = \int_0^{\infty} \exp(t(z + iz - z^3)) dz$$

того же типа, что и рассмотренные в разд. 5.7.

Даже в таком простом случае, как этот, нелегко получить „карту“ поверхности. К счастью, эту задачу можно решить, почти не глядя на поверхность.

Положим  $z + iz - z^3 = h(z)$ . Точки перевала определяются из уравнения  $h'(z) = 1 + i - 3z^2 = 0$ . Их две:  $\zeta$  и  $-\zeta$ , где  $\zeta = 2^{1/4} 3^{-1/2} e^{\pi i/8}$ . На первый взгляд кажется, что  $-\zeta$  не нужно рассматривать, так что мы обратим свое внимание на  $\zeta$ .

Ось этой точки перевала (см. разд. 5.4) имеет аргумент  $-\pi/16$ . Поэтому луч  $l$ , идущий из начала через  $\zeta$ , пересекается с осью под углом  $3\pi/16$ , который меньше  $\pi/4$ . Это значит, что луч  $l$  является подходящим путем в окрестности точки перевала. К счастью, этот луч служит и для других наших целей: оказывается, на нем нет точек более высоких, чем точка перевала. В самом деле, если мы напишем его уравнение  $z = e^{\pi i/8} x$ ,  $0 \leq x < \infty$ , то функция  $h(z)$  примет вид

$$h(z) = h(xe^{\pi i/8}) = e^{3\pi i/8} (2^{1/2} x - x^3),$$

а функция  $2^{1/2} x - x^3$  достигает максимума при  $x = x_0 = 2^{1/4} 3^{-1/2}$ . То же справедливо и для  $\operatorname{Re} h(z)$ .

На луче  $l$  при достаточно больших  $x$  имеем  $\operatorname{Re} h(z) < \operatorname{Re} h(\zeta) - x$ , и поэтому вклад интеграла, скажем, от  $x_0 + 1$  до  $\infty$  экспоненциально мал по сравнению с вкладом точки перевала.

Обычным способом мы без труда покажем, что интеграл от 0 до  $\infty$  вдоль действительной оси равен интегралу от 0 до  $e^{\pi i/8} \cdot \infty$  вдоль  $l$ . Чтобы вычислить вклад точки перевала, напишем

$$h(\zeta) = (1 + i)\zeta - \zeta^3 = \frac{2}{3}(1 + i)\zeta = 2^{7/4} 3^{-3/2} e^{3\pi i/8},$$

$$h''(\zeta) = -6\zeta = -2^{5/4} 3^{1/2} e^{\pi i/8}.$$

Поскольку мы проходим перевал слева направо, то  $\alpha = e^{-\pi i/16}$  (см. разд. 5.7). Таким образом, по формуле (5.7.2)

главный член вклада равен

$$(2\pi)^{1/2} e^{-\pi i/16} t^{-1/2} (2^{5/4} 3^{1/4})^{-1/2} e^{th(\zeta)} = e^{-\pi i/16} 2^{-1/8} 3^{-1/4} \pi^{1/2} t^{-1/2} e^{th(\zeta)}.$$

Эта же величина дает нам асимптотическое поведение функции  $f$ , и поэтому

$$f(t) \sim e^{-\pi i/16} 2^{-1/8} 3^{-1/4} \pi^{1/2} t^{-1/2} \exp \left\{ 2^{7/4} 3^{-3/2} e^{3\pi i/8} t \right\} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Следующим нашим примером будет интеграл

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z, t) dz, \quad \varphi(z, t) = e^{it(3z-z^3)},$$

являющийся иллюстрацией к разд. 5.8.

Хотя  $|\varphi| = 1$  при всех действительных значениях  $z$ , можно показать, что интеграл сходится. Значит,  $\int_a^\infty \rightarrow 0$  при  $a \rightarrow \infty$  (и при фиксированном  $t$ ). Но интеграл  $\int_a^\infty$  не будет экспоненциально мал при фиксированном  $a$  и при  $t \rightarrow 0$ . Поэтому нецелесообразно применять метод разд. 5.8 к интегралу  $F_a = \int_{-a}^a$  и затем устремлять  $a$  к  $\infty$ . Для этого мы должны были бы получить оценки для  $F_a$ , равномерные по  $t$  и  $a$ .

Поэтому, прежде чем полагать  $t \rightarrow \infty$ , мы заменим контур  $(-\infty, \infty)$  некоторым новым бесконечным контуром  $P$ .

Точки перевала здесь  $z = -1$  и  $z = +1$ . Сначала узнаем, какая сторона здесь низкая (см. разд. 5.8). Полагая  $z = x + iy$ , имеем  $\operatorname{Re}(it(3z - z^3)) = t(3y(x^2 - 1) - y^3)$ . Это выражение отрицательно при малых положительных  $y$ , если  $-1 < x < 1$ , и при малых отрицательных  $y$ , если  $|x| > 1$  (мы считаем, конечно, что  $t > 0$ ). Значит, при  $-1 < x < 1$  низкая сторона лежит в верхней полуплоскости, а при  $x < -1$  или  $x > 1$  — в нижней полуплоскости.

Согласно сказанному в разд. 5.8, построим контур, проходящий через точку перевала 1 с северо-запада на юго-восток,



скажем, из точки  $1 - \varepsilon + i\delta$  в точку  $1 + \varepsilon - i\delta$ , где  $\varepsilon$  и  $\delta$  — малые положительные числа, выбранные так, чтобы точка  $1$  была наивысшей точкой этого контура. Для точки  $-1$  построим аналогичный контур, проходящий через нее из точки  $-1 - \varepsilon - i\delta$  в точку  $-1 + \varepsilon + i\delta$ . Наконец, соединим точки  $-1 + \varepsilon + i\delta$  и  $1 - \varepsilon + i\delta$  отрезком прямой, а точки  $-1 - \varepsilon - i\delta$  и  $1 + \varepsilon - i\delta$  соединим с  $-\infty$  и  $\infty$  соответственно лучами, параллельными действительной оси. Это и будет наш новый контур  $P$ .

Нетрудно убедиться, что интеграл вдоль  $P$  сходится, поскольку

$$\begin{aligned} |\varphi(x - i\delta)| &= |\varphi(1 + \varepsilon - i\delta)| \exp(-3\delta t(x^2 - (1 + \varepsilon)^2)) \leq \\ &\leq |\varphi(1 + \varepsilon - i\delta)| \exp(-6\delta t(x - 1 - \varepsilon)) \quad (x > 1 + \varepsilon), \end{aligned}$$

и аналогичные оценки справедливы на луче, идущем в  $-\infty$ . Поэтому

$$\left| \int_{1 + \varepsilon - i\delta}^{\infty - i\delta} \varphi dz \right| \leq |\varphi(1 + \varepsilon - i\delta)| / 6\delta t,$$

а величина  $|\varphi(1 + \varepsilon - i\delta)|$  экспоненциально мала, так как  $\operatorname{Re}(i(3z - z^3)) < 0$  в точке  $z = 1 + \varepsilon - i\delta$ . Следовательно, асимптотическое поведение интеграла вдоль контура  $P$  определяется вкладом точек перевала  $1$  и  $-1$ .

Остается еще вопрос, равны ли интегралы  $\int_P$  и  $\int_{-\infty}^{\infty}$ .

При исследовании этого вопроса мы можем считать  $t$  произвольной положительной постоянной. Если  $b$  — большое положительное число, то по теореме Коши

$$\int_{-b}^b = \int_P - \int_{b-i\delta}^{\infty-i\delta} - \int_{-\infty-i\delta}^{-b-i\delta} + \int_{b-i\delta}^b - \int_{-b-i\delta}^{-b},$$

где все пути интегрирования, кроме  $P$ , являются горизонтальными или вертикальными прямыми. Из сходимости интеграла  $\int_P$  следует, что второй и третий интегралы в правой

части стремятся к нулю при  $b \rightarrow \infty$ . То же самое справедливо для четвертого и пятого, так как

$$\left| \int_{b-i\delta}^b \right| \leq \int_0^\delta \exp(-t(3u(b^2-1) - u^3)) du < \\ < C(\delta, t) \int_0^\delta \exp(-3tu(b^2-1)) du < \frac{C(\delta, t)}{3t(b^2-1)},$$

а последнее выражение стремится к нулю при  $b \rightarrow \infty$  [ $C(\delta, t)$  не зависит от  $b$ ]. Это доказывает, что  $\int_{-b}^b \rightarrow \int_P$  при  $b \rightarrow \infty$ .

Таким образом, мы установили сходимость интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty}$

и доказали, что  $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_P$ .

Вклады точек перевала легко вычисляются, во всяком случае их главные члены. В точке  $z = -1$  ось направлена точно с юго-запада на северо-восток, так что  $\alpha = e^{\pi i/4}$  (см. 5.7). Полагая  $h(z) = i(3z - z^3)$ , имеем  $h''(z) = -6iz$ . Поэтому  $|h''(-1)| = 6$ . Теперь формула (5.7.2) дает главный член вклада точки  $-1$ , а именно

$$(2\pi)^{1/2} e^{\pi i/4} t^{-1/2} 6^{-1/2} e^{-2ti}.$$

Аналогично находим главный член вклада точки  $+1$ , который является числом, комплексно сопряженным с предыдущим. Окончательный результат:

$$F(t) = 2 \left( \frac{\pi}{3t} \right)^{1/2} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + O(t^{-3/2}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

В подобных случаях мы не можем говорить, что первый член дает асимптотическую формулу, так как остаточный член не всегда мал по сравнению с главным. Иначе говоря, нельзя писать  $F(t) \sim 2(\pi/3t)^{1/2} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$ . Последняя формула означала бы, что при больших значениях  $t$  функция  $F(t)$  обращается в нуль там же, где  $\cos(2t - \pi/4)$ , что совсем необязательно.

### 5.12. Малые возмущения

Сейчас мы рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих понятие области влияния точки перевала (см. 5.10). Начнем с интеграла

$$(5.12.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz^2} dz,$$

имеющего точку перевала  $z=0$ . Круг  $|z| \leq t^{-1/2}$  можно считать ее областью влияния. Понятие области влияния имеет большое значение, когда мы хотим исследовать какой-либо интеграл, получающийся из (5.12.1) при помощи малых возмущений. Например, в интеграле

$$(5.12.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1+iz)^{1/2} e^{-tz^2} dz$$

множитель  $(1+iz)^{1/2}$  мало меняется в области влияния точки перевала  $z=0$  интеграла (5.12.1). Конечно, он становится большим вне области влияния, но там это несущественно из-за очень малого множителя  $e^{-tz^2}$ , так что вкладом этих частей пути интегрирования можно пренебречь. Это значит, что хотя точка  $z=0$  и не является точкой перевала для подинтегральной функции в выражении (5.12.2), контур интегрирования  $-\infty < x < \infty$  с успехом можно использовать для выяснения асимптотического поведения интеграла (5.12.2). Это и было сделано в разд. 4.4, и нам нет необходимости повторять здесь все подробности.

Наш следующий пример несколько сложнее, так как множитель мы возьмем уже зависящим от  $t$ . Положим

$$(5.12.3) \quad F_{\alpha}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz^2} \frac{e^z}{1+t^{\alpha}z^2} dz,$$

где  $\alpha$  — положительный параметр. Требуется выяснить асимптотическое поведение  $F_{\alpha}(t)$  ( $t \rightarrow \infty$ ) при любом фиксированном значении  $\alpha$ . Нас интересует, в каком смысле можно рассматривать этот интеграл как „небольшое видоизменение“ интеграла (5.12.1).

Множитель  $e^z$  безопасен: он достаточно мало меняется в области влияния. Он велик, если значение  $z$  положительно и велико по сравнению с 1, но тогда множитель  $\exp(-tz^2)$  ничтожно мал.

Множитель  $(1 + t^\alpha z^2)^{-1}$  мало меняется, если  $t^\alpha z^2$  мало; более того, тогда его можно разложить в степенной ряд. Если же  $t^\alpha z^2$  велико, то этот множитель можно разложить в ряд по степеням  $(t^\alpha z^2)^{-1}$ , умноженный на  $(t^\alpha z^2)^{-1}$ . Опасна лишь зона, представляющая собой кольцо  $R$  в плоскости  $z$ , где  $z^2 t^\alpha$  ни велико, ни мало; и действительно, в этом кольце находятся два полюса  $z = \pm it^{-\alpha/2}$ . Таким образом, имеются следующие возможности:

1)  $0 < \alpha < 1$ . Кольцо  $R$  лежит вне области влияния точки перевала  $z = 0$ .

2)  $\alpha = 1$ . Кольцо  $R$  перекрывается с областью влияния.

3)  $\alpha > 1$ . Кольцо  $R$  лежит внутри области влияния, но очень мало по сравнению с ней.

Случай 1. Здесь положение можно сравнить со случаем (5.12.2). Применяя технику разд. 4.4, мы выберем положительное число  $T$ , большое по сравнению с радиусом области влияния и малое по сравнению с радиусами кольца; можно взять, например  $T = t^{-\beta}$ , где  $\frac{\alpha}{2} < \beta < \frac{1}{2}$ . Интегралы от  $T$  до  $\infty$  и от  $-\infty$  до  $-T$ , как нетрудно убедиться, равны  $O(\exp(-t^{1-2\beta}/2))$ . Поскольку  $1 - 2\beta > 0$ , этими членами можно пренебречь. На интервале  $-T \leq z \leq T$  множитель  $(1 + z^2 t^\alpha)^{-1} e^z$  можно хорошо приблизить. Взяв первые три члена приближения, получаем при  $-T \leq z \leq T$

$$\begin{aligned} e^z (1 + t^\alpha z^2)^{-1} &= \left\{ 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + O(z^3) \right\} \times \\ &\quad \times \{ 1 - t^\alpha z^2 + O(t^{2\alpha} z^4) \} = \\ &= 1 + z + \left( \frac{1}{2} - t^\alpha \right) z^2 - t^\alpha z^3 + O(t^{2\alpha} z^4) + O(z^3). \end{aligned}$$

Теперь легко находим (ср. разд. 4.1)

$$\begin{aligned} F_\alpha(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + z + \left( \frac{1}{2} - t^\alpha \right) z^2 - t^\alpha z^3 \right\} e^{-tz^2} dz + \\ &\quad + t^{-1/2} O(t^{2\alpha-2} + t^{-3/2}), \end{aligned}$$

откуда

$$F_\alpha(t) = \pi^{1/2} t^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} t^{\alpha-1} + O(t^{-1}) + O(t^{2\alpha-2}) \right\} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Мы ограничились лишь несколькими первыми членами, но легко видеть, что полный асимптотический ряд имеет вид

$$t^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} t^{-k} t^{-l(1-\alpha)}.$$

Случай 2. При  $\alpha = 1$  функция  $e^{-tz^2}$  уже не дает хорошего первого приближения для подынтегральной функции в области влияния, так как добавление множителя  $(1 + tz^2)^{-1}$  полностью меняет картину. Чтобы лучше видеть, что при этом происходит, сделаем замену переменной  $z = \omega t^{-1/2}$ . Тогда область влияния станет не зависящей от  $t$ . Имеем

$$F_1(t) = t^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2)^{-1} \exp \{-\omega^2 + t^{-1/2} \omega\} d\omega.$$

Роль, которую играли интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} \omega^k d\omega$ , теперь будут

играть интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2)^{-1} e^{-\omega^2} \omega^k d\omega$ . Техника остается той же, что и в разд. 4.4. Мы получаем асимптотический ряд

$$F_1(t) \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{-\nu-1/2} \quad (t \rightarrow \infty),$$

где

$$c_\nu = \frac{1}{(2\nu)!} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2)^{-1} \omega^{2\nu} e^{-\omega^2} d\omega.$$

В этом простом случае нетрудно показать, что асимптотический ряд сходится и что его сумма равна  $F_1(t)$  при всех  $t > 0$ .

Случай 3.  $\alpha > 1$ . В этом случае множитель  $(1 + tz^2)^{-1}$  имеет два полюса, очень близких к точке  $z = 0$ , т. е. очень близких по сравнению с размерами области влияния. Контур

интегрирования проходит как раз между полюсами. Мы можем передвинуть контур интегрирования вниз на расстояние, скажем,  $2t^{-\alpha/2}$ , добавив вычет относительно нижнего полюса. Смысл этого в том, что контур почти не изменился, если сравнить величину сдвига с размером области влияния, в то время как множитель  $(1 + t^\alpha z^2)^{-1}$  во всех точках нового контура уже может быть разложен по степеням  $z^{-2}$ . Вычет в точке  $z = -it^{-\alpha/2}$  равен

$$r(t) = \frac{1}{2} it^{-\alpha/2} \exp(t^{1-\alpha} - it^{-\alpha/2}),$$

и мы получаем

$$F_\alpha(t) = -2\pi i r(t) + \int_P \exp(-tz^2 + z) \frac{dz}{1 + t^\alpha z^2},$$

где контур интегрирования  $P$  — прямая  $(-\infty - 2it^{-\alpha/2}, \infty - 2it^{-\alpha/2})$ . На этом контуре ряд

$$(1 + t^\alpha z^2)^{-1} = t^{-\alpha} z^{-2} - t^{-2\alpha} z^{-4} + t^{-3\alpha} z^{-6} - \dots$$

равномерно сходится (поскольку на нем  $|t^\alpha z^2| \geq 4$ ). Функция  $e^z$  тоже может быть разложена в ряд по степеням  $z$ , и в пределах области влияния  $z$  мало. Поэтому легко получить асимптотический ряд для  $F_\alpha(t) + 2\pi i r(t)$ . Но положение даже более удачно: мы в состоянии доказать, что этот асимптотический ряд сходится при всех  $t > 0$  и что его сумма равна  $F_\alpha(t) + 2\pi i r(t)$ . Для этой цели напомним

$$\begin{aligned} F_\alpha(t) + 2\pi i r(t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-tz^2} \frac{z^k}{k!} (-1)^n t^{-(n+1)\alpha} z^{-2(n+1)} dx, \end{aligned}$$

где  $z = x - 2it^{-\alpha/2}$ , а  $x$  — новая переменная интегрирования.

Мы хотим проинтегрировать ряд почленно, и нам нужно это обосновать. Иными словами, мы должны доказать, что

$$(5.12.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{kn}(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{kn}(x) dx,$$

где

$$f_{kn}(x) = e^{-tz^2} \frac{z^k}{k!} (-1)^n t^{-(n+1)\alpha} z^{-2(n+1)},$$

$z = x - 2it^{-\alpha/2}$ , а  $t$  — положительная постоянная. Это не очень трудно, так как сходимость абсолютная. Имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |f_{kn}(x)| \leq |e^{-tz^2}| e^{|z|} \frac{1}{t^\alpha |z|^2 - 1},$$

поскольку  $t^\alpha |z|^2 \geq t^\alpha |2it^{-\alpha/2}|^2 = 4$ . В силу быстрого убывания множителя  $|e^{-tz^2}|$  интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |f_{kn}(x)| dx$  сходится. Но теперь из теории интеграла Лебега<sup>1)</sup> следует, что справедливо равенство (5.12.4), т. е. что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{kn}(x) dx$$

абсолютно сходится. Нетрудно, впрочем, дать и более элементарное доказательство, не опирающееся на теорию интеграла Лебега. Если  $h$  — целое число, то двойной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{kn}(x)$$

равномерно сходится в интервале  $h \leq x \leq h+1$ , откуда следует, что

$$\int_h^{h+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{kn}(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_h^{h+1} f_{kn}(x) dx.$$

Положив  $\int_h^{h+1} f_{kn}(x) dx = c_{knh}$ , получим в силу абсолютной сходимости тройного ряда в левой части

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{knh} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_{knh},$$

что эквивалентно равенству (5.12.4).

<sup>1)</sup> См. Титчмарш, Теория функций, М., 1951, § 10.9 и § 1.77.

Возвращаясь к нашему первоначальному переменному  $z$ , мы выводим из равенства (5.12.4), что

$$F_\alpha(t) + 2\pi i r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^{-(n+1)\alpha} \frac{(-1)^n}{k!} \int_P e^{-tz^2} z^{k-2n-2} dz$$

и что этот двойной ряд абсолютно сходится.

Остается вычислить интегралы, стоящие в правой части. Делаем замену  $-tz^2 = \omega$ ,  $z = -i(\omega/t)^{1/2}$ , где для квадратного корня берется главное значение. Когда  $z$  меняется вдоль контура  $P$ , точка  $\omega$  описывает путь  $C$ , начинающийся в  $-\infty$ , обходящий начало в положительном направлении и возвращающийся в  $-\infty$ . Интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \int_P \exp(-tz^2) z^{k-2n-2} dz &= \\ &= -\frac{1}{2t} \int_P \exp(-tz^2) z^{k-2n-3} d(-tz^2) = \\ &= -\frac{1}{2t} \int_C e^{\omega} i^{2n+3-k} t^{\frac{2n+3-k}{2}} \omega^{\frac{k-2n-3}{2}} d\omega, \end{aligned}$$

что равно

$$\pi t^{n-\frac{k-1}{2}} i^{2n-k+2} / \Gamma\left(n - \frac{k-3}{2}\right)$$

согласно формуле Ганкеля<sup>1)</sup> для  $(\Gamma(a))^{-1}$ . Итак, окончательно

$$\begin{aligned} F_\alpha(t) &= \pi t^{-\alpha/2} \exp(t^{1-\alpha} - it^{-\alpha/2}) - \\ &= \pi t^{-\alpha+1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{-n(\alpha-1)-\frac{k}{2}} i^{-k}}{k! \Gamma\left(n + \frac{3-k}{2}\right)}, \end{aligned}$$

причем двойной ряд абсолютно сходится при  $t > 0$ . Так как  $\alpha > 1$ , то в этом ряде все показатели отрицательны, и, следовательно, его можно рассматривать как асимптотический ряд.

<sup>1)</sup> См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М., 1934, § 12.22



Если разложить функцию  $\exp(t^{1-\alpha} - it^{-\alpha/2})$  в двойной ряд, то мы получим члены того же вида. Соединяя эти два ряда в один, легко получаем

$$F_{\alpha}(t) = \pi t^{-\alpha/2} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{h+m} t^{-\frac{m(\alpha-1)}{2}-h}}{(2h)! \Gamma\left(\frac{m}{2} - h + 1\right)} \quad (t > 0).$$

### 5.13. Упражнения

1. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (1+x^2)^{-t} dx \sim \left(\frac{\pi(1-c)}{t}\right)^{1/2} e^{-ct} (2c)^{-t} \quad (t \rightarrow \infty),$$

где  $c = \sqrt{2} - 1$ .

2. Показать, что

$$\int_{-1}^{\infty} (x^3 + 3x - 2i)^{-n} e^{ix} dx \sim 2e \left(\frac{i}{4}\right)^n \left(\frac{\pi}{3n}\right)^{1/2} \quad (n \rightarrow \infty),$$

где  $n$  принимает целые значения.

3. Показать, что

$$\int_{i-\infty}^{i+\infty} e^{-z^2} (1+z)^{-n} dz \sim \left(\frac{\pi}{2e}\right)^{1/2} i^{-n} e^{n/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{-n/2} e^{i\sqrt{2}n} \quad (n \rightarrow \infty),$$

где  $n$  принимает целые значения

## ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА

В гл. 5 мы рассмотрели ряд относительно простых применений метода перевала с целью проиллюстрировать основные идеи метода на несложных примерах. Так как простые примеры применения метода перевала довольно редко встречаются в практике, то мы разберем в этой главе три более трудных случая, чтобы дать полное представление о трудностях, которые могут встретиться в таких задачах.

Первой задаче посвящены разд. 6.1—6.3. Там подинтегральная функция совсем проста. Имеется бесконечное число точек перевала, но поскольку вклад главной точки очень велик по сравнению с вкладом всех остальных, то нет необходимости вводить в рассмотрение эти другие точки. Особая трудность в том, что главная точка перевала не может быть написана в явном виде, она задается трансцендентным уравнением. К счастью, это уравнение подробно изучалось в гл. 2.

Вторая задача (разд. 6.4—6.7) сложна тем, что подинтегральная функция выражается через гамма-функцию. Мы должны упростить ее, применяя формулу Стирлинга, но на всем пути интегрирования это невозможно. Однако задача выбора подходящего пути в этом случае не является исключительно трудной.

В третьем примере (разд. 6.8—6.10) наибольшая трудность заключается в выборе подходящего пути. Параметр в этом случае является комплексным числом, и это никак не облегчает выбор подходящего пути для всех возможных значений этого параметра. Трудность преодолевается с помощью конформного отображения, которое обычно служит очень эффективным инструментом при изучении поведения аналитической функции в бесконечной области.

### 6.1. Число разбиений конечного множества на классы

Пусть  $S$  — конечное множество. Разбиением множества  $S$  на классы мы назовем совокупность попарно не пересекающихся непустых подмножеств  $S$ , объединение которых равно  $S$ . Например, если  $S$  состоит из трех элементов  $a, b, c$ , то существует пять возможных разбиений на классы, а именно: 1)  $(a)(b)(c)$ , 2)  $(ab)(c)$ , 3)  $(ac)(b)$ , 4)  $(bc)(a)$ , 5)  $(abc)$ . Число разбиений  $S$  на классы зависит, очевидно, только от числа элементов  $S$ . Через  $d_n$  мы будем обозначать число разбиений на классы множества из  $n$  элементов. Легко найти  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 2$ ,  $d_3 = 5$ ,  $d_4 = 15$ , ... Наша задача состоит в определении асимптотического поведения  $d_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Имеется рекуррентное соотношение, выражающее  $d_{n+1}$  через  $d_1, d_2, \dots, d_n$ :

$$(6.1.1) \quad d_{n+1} = \binom{n}{0} d_0 + \binom{n}{1} d_1 + \dots + \binom{n}{n} d_n \\ (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $d_0 = 1$ . Доказательство получается следующим образом. Пусть  $S$  состоит из элементов  $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ . Рассмотрим какое-нибудь разбиение  $S$  на классы и предположим, что подмножество, содержащее  $a_{n+1}$ , содержит еще  $k$  других элементов ( $0 \leq k \leq n$ ). Если мы фиксируем  $k$ , то число таких разбиений равно  $\binom{n}{k} d_{n-k}$ . В самом деле, вышеупомянутые  $k$  элементов могут быть выбраны  $\binom{n}{k}$  способами из множества  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , а множество остающихся  $n - k$  элементов допускает  $d_{n-k}$  разбиений на классы. (При  $n = k$  не остается ни одного элемента, но соглашение  $d_0 = 1$  включает этот случай.) Выполняя суммирование по  $k$ , получаем выражение (6.1.1).

Применим метод производящих функций, исходя из рекуррентного соотношения (6.1.1). Полагая

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{z^n}{n!},$$

мы находим  $D'(z) = e^z D(z)$ , и так как  $D(0) = 1$ , отсюда следует, что  $D(z) = \exp(e^z - 1)$ . Поэтому  $d_n/n!$  являются

коэффициентами разложения

$$(6.1.2) \quad e^{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{z^n}{n!}.$$

Более прямой способ подсчета числа разбиений на классы, приводящий к той же формуле (6.1.2), состоит в следующем. Рассмотрим разбиение множества  $S$ , состоящего из  $n$  элементов. Это есть некоторая совокупность подмножеств. Обозначим число подмножеств этой совокупности, имеющих  $k$  элементов, через  $s_k$ . Тогда  $s_k \geq 0$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) и  $n = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots$ . Теперь зафиксируем последовательность  $s_1, s_2, \dots$ , удовлетворяющую этим условиям, и зададимся вопросом о числе разбиений, соответствующих этой последовательности. Нетрудно видеть, что это число равно

$$n! \{(1!)^{s_1} (2!)^{s_2} (3!)^{s_3} \dots s_1! s_2! s_3! \dots\}^{-1}.$$

Это значит, что  $d_n/n!$  равны коэффициентам при  $z^n$  в степенном ряде

$$\sum_{s_1=0}^{\infty} \frac{z^{s_1}}{s_1!} \sum_{s_2=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{2!}\right)^{s_2} \frac{1}{s_2!} \sum_{s_3=0}^{\infty} \left(\frac{z^3}{3!}\right)^{s_3} \frac{1}{s_3!} \dots,$$

а сумма этого ряда равна

$$e^z e^{z^2/2!} e^{z^3/3!} \dots = \exp\left(z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) = \exp(e^z - 1).$$

## 6.2. Асимптотическое поведение $d_n$

Мы будем изучать асимптотическое поведение коэффициентов ряда (6.1.2), выражая их по формуле Коши для коэффициентов степенного ряда

$$(6.2.1) \quad \frac{2\pi i d_n}{n!} = \int_C \exp(e^z - 1) z^{-n-1} dz,$$

где контур интегрирования  $C$  один раз обходит начало в положительном направлении. К этому интегралу мы применим метод перевала. Точками перевала являются корни уравнения  $ze^z = n + 1$ . Это уравнение имеет одно положительное

решение, исследованное в разд. 2.4, но оно имеет и другие решения. В действительности можно показать, что при любом целом  $k$  в горизонтальной полосе

$$(2k - 1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k + 1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

имеется ровно одно решение, если только  $n$  достаточно велико.

Обозначим через  $u$  положительную точку перевала, т. е. положительное решение уравнения  $ze^z = n + 1$ . К счастью, в данном случае на остальные точки перевала можно не обращать внимания, т. е. мы в состоянии найти контур, проходящий через  $u$ , на котором  $u$  — наивысшая точка.

Ось точки перевала  $u$ , как легко видеть, вертикальна. Исходя из принципа, что сначала надо испытать простейшие возможности, мы попытаемся взять в качестве большей части контура  $C$  вертикальную прямую. Вдоль этой вертикальной прямой, проходящей через  $u$ , имеем  $|\exp e^z| \leq \exp e^u$ , так как на этой прямой  $\operatorname{Re} e^z \leq |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} = e^u$ . Далее, множитель  $z^{-n-1}$  принимает максимальное по модулю значение в точке  $u$ . Итак, на вертикальном контуре подинтегральная функция принимает максимальное по модулю значение в точке перевала.

Однако вертикальная прямая не обходит начала. Но если мы возьмем большой отрезок вертикальной прямой и дополним его до замкнутого контура большой полуокружностью, то это будет выполнено. И если мы устремим радиус этой полуокружности к бесконечности, то ее вклад в интеграл (6.2.1) будет стремиться к нулю (при  $n > 0$ ), так как множитель  $z^{-n-1}$  равен  $O(R^{-n-1})$ , а множитель  $e^{e^z}$  ограничен в полуплоскости  $\operatorname{Re} z \leq u$ . Поэтому в формуле (6.2.1)

интеграл  $\int_C$  можно заменить интегралом  $\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}$ .

Подинтегральная функция равна

$$\exp(e^z - (n+1) \ln z) = \exp(e^z - ue^u \ln z).$$

Делая замену  $z = u + iy$ , получаем

$$(6.2.2) \quad \frac{2\pi e d_n}{n!} = \exp(e^u - ue^u \ln u) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \psi(y) dy,$$

где

$$\psi(y) = e^u [(e^{iy} - 1) - u \ln(1 + iyu^{-1})].$$

Поскольку  $|\exp \psi(y)| = \exp \operatorname{Re} \psi(y)$ , то мы должны исследовать выражение

$$\operatorname{Re} \psi(y) = e^u \left( -1 + \cos y - u \ln \sqrt{1 + \frac{y^2}{u^2}} \right).$$

Пока  $y$  не слишком велико, все определяется членами  $-1 + \cos y$ . Поэтому имеется максимум в точке  $y=0$ , далее около точек  $y = \pm 2\pi$  и т. д. Влияние этих более далеких максимумов очень мало ввиду наличия впереди большого множителя  $e^u$ . Мы покажем, что в равенстве (6.2.2) можно ограничиться по существу интервалом  $-\pi < y < \pi$ . В самом деле, при  $u > y > \pi$  имеем  $\ln \left(1 + \frac{y^2}{u^2}\right) > y^2/2u^2$ , и поэтому

$$\left| \int_{\pi}^u \exp \psi(y) dy \right| < u \exp \left\{ -\frac{\pi^2 e^u}{4u} \right\}.$$

Если же  $y > u$ , то, используя неравенство  $1 + \frac{y^2}{u^2} > 2y/u$ , мы получаем после замены  $y = ux$

$$\left| \int_u^{\infty} \exp \psi(y) dy \right| \leq u \int_1^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ue^u \ln 2x \right\} dx.$$

Легко видеть, что  $\int_1^{\infty} (2x)^{-p} dx = O(e^{-p/2})$  ( $p > 2$ ), и, значит,

$$\int_u^{\infty} \exp \psi(y) dy = O \left( u \exp \left( -\frac{1}{4} ue^u \right) \right) \quad (u \rightarrow \infty).$$

Следовательно,

$$(6.2.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp \psi(y) dy - \int_{-\pi}^{\pi} \exp \psi(y) dy = O \left( \exp \left( -\frac{e^u}{u} \right) \right) \\ (u \rightarrow \infty),$$

так что теперь мы можем направить наше внимание только на интервал  $(-\pi, \pi)$ , где основной вклад дает точка перевала, соответствующая  $y=0$ . Поскольку

$$\psi(y) = e^u \left[ -\frac{y^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots - \frac{y^2}{2u} - \frac{(iy)^3}{3u^2} - \dots \right],$$

мы находим методом Лапласа (гл. 4), что

$$(6.2.4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \exp \psi(y) dy = (2\pi e^{-u})^{1/2} (1 + O(u^{-1})).$$

Для получения асимптотического ряда неудобно пользоваться методом разд. 4.4, так как  $\psi$  зависит от  $u$  довольно сложным образом. Мы предпочитаем применить метод разд. 4.5, при котором вводится новая переменная интегрирования  $w$ , переводящая выражение  $\exp \psi(y)$  в  $\exp(-w^2 f(u))$  [ $f(u)$  зависит только от  $u$ ].

До сих пор  $y$  было действительным, теперь мы будем рассматривать его как комплексное переменное. При малом  $|y|$  определим  $w$  равенством

$$e^{iy} - 1 - u \ln \left( 1 + \frac{iy}{u} \right) = -\frac{1}{2} w^2 \left( 1 + \frac{1}{u} \right),$$

выбирая ту ветвь  $w$ , для которой  $d w / d y = 1$  при  $y=0$ . Тогда  $w$  можно представить в виде

$$(6.2.5) \quad w = y + y^2 P(y, u^{-1}),$$

где  $P(y, u^{-1})$  — степенной ряд по  $y$  и  $u^{-1}$ , сходящийся при достаточно малых  $|y|$  и  $|u^{-1}|$ . Отсюда следует, что уравнение (6.2.5) можно разрешить относительно  $y$ , применяя технику разд. 2.4 [ср. (2.4.7)]:

$$\begin{aligned} y &= y(w) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \{ \eta + \eta^2 P(\eta, u^{-1}) - w \}^{-1} \eta \frac{d}{d\eta} \{ \eta + \eta^2 P(\eta, u^{-1}) \} d\eta \end{aligned}$$

(где  $C$  — контур, обходящий начало в положительном направлении); формула справедлива, если только  $|w|$  и  $|u^{-1}|$  достаточно малы. Таким образом,  $y$  разлагается в степенной ряд по  $w$  и  $u^{-1}$ . Нам понадобится и его производная, имеющая вид

$$\frac{dy}{dw} = 1 + w \gamma_1(u^{-1}) + w^2 \gamma_2(u^{-1}) + \dots,$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  — степенные ряды по  $u^{-1}$ , одновременно сходящиеся для достаточно больших значений  $|u|$ .

У нас нет твердой уверенности в том, что интеграл (6.2.4) можно успешно преобразовать таким образом, но уж во всяком случае мы можем найти такое положительное число  $c$ ,

что это можно сделать для интеграла  $\int_{-c}^c$ . В плоскости  $w$

наш контур интегрирования представляет собой некоторую кривую, проходящую через точку перевала  $w=0$ . Ошибка, происходящая оттого, что мы ограничиваемся интегралом от  $-c$  до  $c$ , не должна нас беспокоить, поскольку это ошибка порядка  $\exp(-Ae^u)$ , где  $A$  — положительная постоянная.

Окончательно мы получаем

$$(2\pi)^{-1/2} U^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \psi(y) dy \approx \\ \approx 1 + a_1 \gamma_2(u^{-1}) U^{-1} + a_2 \gamma_4(u^{-1}) U^{-2} + \dots \quad (u \rightarrow \infty),$$

где

$$U = e^u (1 + u^{-1}), \quad a_k = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

Используя только первый член, приходим к следующему выражению для  $d_n$ :

$$(6.2.6) \quad d_n = n! e^{-1} (2\pi)^{-1/2} (1 + u^{-1})^{-1/2} \times \\ \times \left\{ 1 + O(e^{-u}) \right\} \exp \left( e^u - ue^u \ln u - \frac{u}{2} \right).$$

Здесь  $u$  связано с  $n$  формулой

$$ue^u = n + 1, \quad u > 0.$$

Асимптотическое поведение  $u$  при  $n \rightarrow \infty$  было исследовано в разд. 2.4. Согласно формуле (2.4.10) для решения уравнения  $xe^x = t$ , имеем

$$u = \ln t - \ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} Q(\sigma, \tau),$$

где  $Q(\sigma, \tau)$  — двойной ряд по степеням  $\sigma$  и  $\tau$  и для сокращения записи введены обозначения

$$\sigma = \frac{1}{\ln t}, \quad \tau = \frac{\ln \ln t}{\ln t} \quad (t = n + 1).$$



Однако если мы приблизим  $u$  конечным числом членов ряда  $Q(\sigma \tau)$ , то ошибка, внесенная тем самым в выражение (6.2.6), станет весьма значительной и точность, достигнутая в формуле (6.2.6), потеряется. Приближая  $u$  выражением  $\ln t - \ln \ln t$ , находим

$$e^u - ue^u \ln u - \frac{u}{2} = t(u^{-1} - \ln u) + O(\ln t) = \\ = t \left\{ -\ln \ln t + \frac{\ln \ln t}{\ln t} + \frac{1}{\ln t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln \ln t}{\ln t} \right)^2 \right\} + O \left( \frac{t \ln \ln t}{(\ln t)^2} \right).$$

Здесь  $t$  все еще означает  $n+1$ , но легко видеть, что, заменив  $n+1$  на  $n$ , мы совершим ошибку, намного меньшую, чем уже сделанная. Кроме того, используем грубую оценку для  $n!$

$$\ln n! = n \ln n - n + O(\ln n)$$

и найдем

$$(6.2.7) \quad \frac{\ln d_n}{n} = \ln n - \ln \ln n - 1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n} + \frac{1}{\ln n} + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln \ln n}{\ln n} \right)^2 + O \left( \frac{\ln \ln n}{(\ln n)^2} \right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Вместо остаточного члена довольно легко написать асимптотический ряд с членами вида  $(\ln \ln n)^k (\ln n)^{-m}$ .

### 6.3. Другой метод

Коротко укажем на совершенно иной метод, с помощью которого можно выяснить асимптотическое поведение последовательности  $d_n$ , рассмотренной в разд. 6.2. Исходя из формулы (6.1.2), разлагаем  $\exp e^x$  в ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}/k!$ , а затем в каждом слагаемом разлагаем функцию  $e^{kx}$  в соответствующий ей степенной ряд. Так мы придем к абсолютно сходящемуся двойному ряду, в котором можно изменить порядок суммирования, и формула (6.1.2) даст

$$d_n = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} k^n / k!$$

К этой сумме можно применить методы гл. 3. Номер  $k_{\max}$  наибольшего слагаемого близок к  $e^u$ , где  $u$  снова обозначает

решение уравнения  $ue^u = n + 1$ . В самом деле,  $k^n/k!$ , грубо говоря, равно

$$(2\pi)^{-1/2} k^{-3/2} \exp((n+1) \ln k - k \ln k + k),$$

а функция  $(n+1) \ln x - x \ln x + x$  достигает максимума при  $x = e^n$ . Вторая производная этой функции равна  $-(n+1)x^{-2} - x^{-1}$  и отсюда следует, грубо говоря, что только интервал  $|k - k_{\max}| < \sqrt{n}$  дает существенный вклад в эту сумму. В этом интервале нашу сумму можно заменить некоторым интегралом, если только внести некоторые поправки в соответствии с формулой суммирования Эйлера — Маклорена.

#### 6.4. Сумма $S(s, n)$

В разд. 4.7 мы получили асимптотическое поведение суммы  $S(s, n)$ , определенной равенством

$$(6.4.1) \quad S(s, n) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+n} \binom{2n}{k}^s,$$

при фиксированном целом  $s > 1$  и  $n \rightarrow \infty$ . Метод существенно использовал эти предположения, поскольку  $s-1$  входило в качестве размерности евклидова пространства. В настоящем разделе мы будем изучать эту сумму при любых действительных значениях  $s$  ( $s$  фиксировано,  $n \rightarrow \infty$ ). Следует согласиться, что это не очень естественный вопрос, поскольку нецелые степени биномиальных коэффициентов редко встречаются в математике. Мы займемся здесь этой задачей главным образом потому, что она трудна и интересна с различных точек зрения.

При  $s = 2, 3, \dots$  мы имеем, согласно формуле (4.7.4),

$$(6.4.2) \quad S(s, n) \sim \left\{ 2 \cos \frac{\pi}{2s} \right\}^{2ns+s-1} 2^{2-s} (\pi n)^{\frac{1-s}{2}} s^{-1/2} \\ (n \rightarrow \infty).$$

Эта формула явно неверна при  $s = 0$ , так как  $S(0, n) = (-1)^n$ . Несправедлива она и при отрицательных  $s$ . Тогда положение таково, что несколько первых и несколько последних членов

суммы являются преобладающими. При  $s < 0$  мы имеем асимптотический ряд

$$S(s, n) \approx 2(-1)^n \left\{ 1 - \binom{2n}{1}^s + \binom{2n}{2}^s - \dots \right\} \quad (n \rightarrow \infty),$$

или, более точно, при фиксированных  $h$  и  $s$  ( $s < 0$ ),

$$(6.4.3) \quad S(s, n) = 2(-1)^n \sum_{k=0}^h (-1)^k \binom{2n}{k}^s + O(n^{(h+1)s}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(Чтобы доказать это, нужно рассмотреть все члены, для которых  $k < h - 1/s$ , и заметить, что сумма оставшихся членов с  $k \leq n$  превосходит первый отброшенный член не более чем в  $n$  раз.)

При  $s > 0$  не существует такого тривиального способа. Применяя теорему о вычетах, мы заменим сумму интегралом

$$(6.4.4) \quad S(s, n) = \int_C \left( \frac{\Pi(2n)}{\Pi(n+z)\Pi(n-z)} \right)^s \frac{dz}{2i \sin \pi z}.$$

Здесь контур интегрирования  $C$  — это кривая, обходящая один раз (в положительном направлении) точки  $-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n-1, n$  и не обходящая точек  $\pm(n+1), \pm(n+2), \dots$ . Мы можем взять в качестве  $C$  прямоугольник с вершинами  $\pm\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm pi$ , где  $p$  — некоторое положительное число. Функция  $\Pi(z)$  — обобщенный факториал Гаусса ( $\Pi(k) = k!$ ), с которым нам будет несколько удобнее оперировать, чем с гамма-функцией, связанной с  $\Pi(z)$  соотношением  $\Pi(z) = \Gamma(z+1)$ .

Функция  $\Pi(n+z)\Pi(n-z)$  имеет полюса в точках  $\pm(n+1), \pm(n+2), \dots$ , так что подинтегральная функция, за исключением случая, когда  $s$  — целое число, многозначна. Но если сделать в плоскости  $z$  разрезы по действительной оси от  $n+1$  до  $+\infty$  и от  $-n-1$  до  $-\infty$ , то в полученной области (назовем ее  $D$ ) подинтегральная функция будет однозначна. Нет необходимости говорить, что для  $s$ -ой степени, встречающейся в подинтегральной функции, выбирается ветвь, положительная при  $z=0$ . Еще мы должны позаботиться, чтобы контур  $C$  лежал внутри области  $D$ .

Теперь легко доказать равенство (6.4.4): вычеты в точках  $z = h$  ( $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ) равны

$$\left( \frac{(2n)!}{(n+h)!(n-h)!} \right)^s (-1)^h \frac{1}{2\pi i},$$

так что, заменяя  $n - h$  на  $k$ , получаем, что интеграл равен  $S(s, n)$ .

Прежде чем предпринимать какие-либо серьезные действия над интегралом (6.4.4), сделаем несколько замечаний.

1) Подинтегральная функция является нечетной функцией  $z$ . Поэтому, если контур  $C$  симметричен относительно начала, то достаточно проинтегрировать по одной половине контура, а потом удвоить результат.

2) Если  $z$  — какая-либо точка правой полуплоскости, то модуль подинтегральной функции убывает при замене  $z$  на  $z + 1$ . Действительно, при этом модуль подинтегральной функции умножается на  $|(n - z)/(n + z + 1)|^s$ . Поэтому вполне естественно ожидать, что на верхней и, следовательно, на нижней части мнимой оси находится что-либо вроде точки перевала.

3) Подинтегральная функция слишком сложна для точного определения точек перевала. Однако на большей части контура  $C$  подинтегральная функция довольно хорошо приближается при помощи формулы Стирлинга. Точнее, если  $\delta$  — некоторое положительное число,  $0 < \delta < \pi$ , а  $R_\delta$  — угол  $|\arg z| < \pi - \delta$ , то из формулы (3.10.7) находим, что (при  $1 - \rho(1) = \frac{1}{2} \ln 2\pi$ )

$$(6.4.5) \quad \Pi(z) = (2\pi)^{1/2} z^{z+1/2} e^{-z} \left( 1 + O\left(\left|\frac{1}{z}\right|\right) \right) \quad (z \in R_\delta),$$

где  $z^{z+1/2} = e^{(z+1/2)\ln z}$  и для логарифма берется главное значение.

Формула (6.4.5) означает, что подинтегральную функцию в формуле (6.4.4) можно приблизить элементарными функциями, если только точка  $z$  расположена достаточно далеко от границы области  $D$ , т. е. от лучей  $(-\infty, -n-1)$  и  $(n+1, \infty)$ . Однако это нельзя сделать на всем контуре  $C$ , поскольку  $C$  должен пересекать действительную ось между  $n$  и  $n+1$ , а это уже не далеко от границы  $D$ .

4) При помощи той же формулы Стирлинга нетрудно найти полезное нам приближение подинтегральной функции

для значений  $z$ , не слишком далеких от  $z = n$ . Поэтому нам придется работать с двумя различными приближениями в двух различных областях. Это создает, конечно, некоторые трудности при склеивании контура из соответствующих частей. Эти трудности не столько принципиальные, сколько технические, их причина в сравнительной сложности подынтегральной функции.

5) Упомянутую трудность можно устранить, отодвигая место связи между двумя областями подальше от основного поля сражения, а именно в  $+\infty$  и в  $-\infty$  соответственно. Замечание 2) наводит на мысль, что такое отступление в  $+\infty$  и в  $-\infty$  можно будет совершить без особого труда.

Руководствуясь проведенными выше рассуждениями, мы разобьем нашу задачу на две части. Пусть  $N > n$  — целое число, а  $p$  — какое-либо положительное число. Определим  $P_N$  и  $Q_N$  равенствами

$$P_N = \int_{-N - \frac{1}{2} + ip}^{N + \frac{1}{2} + ip} \Omega dz, \quad Q_N = \int_{(N + \frac{1}{2})} \Omega dz.$$

Здесь через  $\Omega$  обозначена подынтегральная функция из формулы (6.4.4). Для  $P_N$  путь интегрирования представляет собой прямолинейный отрезок. Число  $p$  — положительная постоянная. Путь интегрирования для  $Q_N$  начинается в точке  $N + \frac{1}{2}$ , проходит в нижней полуплоскости, пересекает действительную ось между точками  $n$  и  $n + 1$ , а затем возвращается к точке  $N + \frac{1}{2}$  по верхней полуплоскости. Таким образом, этот путь, за исключением его концов (точка  $z = N + \frac{1}{2}$  на двух берегах разреза) лежит внутри области  $D$ . Мы покажем, что при фиксированном, но достаточно большом  $n$ , оба предела

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = P, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N = Q$$

существуют и

$$(6.4.6) \quad S(s, n) = -2P + 2Q.$$

Это утверждение легко доказывается на основании того, что  $\Omega = O(|z|^{-2})$  в области

$$(6.4.7) \quad |\operatorname{Im} z| \leq p, \quad |z - k| < \frac{1}{4} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

если только  $n$  фиксировано и достаточно велико [достаточно, чтобы  $(2n + 1)s \geq 2$ ]. Действительно, в силу функционального уравнения

$$\Pi(z) \Pi(-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}$$

имеем

$$(6.4.8) \quad \Omega = \frac{1}{2i} \left( \frac{(-1)^n (2n)! \Pi(z-n)}{\pi(z-n) \Pi(z+n)} \right)^s (\sin \pi z)^{s-1},$$

откуда следует

$$(6.4.9) \quad \Omega = O(|z|^{-(2n+1)s} |\sin \pi z|^{s-1}) \quad (|z| > 2n)$$

при фиксированных  $s > 0$  и  $n > 0$ . Отсюда  $\Omega = O(|z|^{-2})$ , если  $z$  лежит в области (6.4.7) и  $(2n + 1)s \geq 2$ .

К формуле (6.4.6) применимо замечание 1), которое показывает, что  $\frac{1}{2} S(s, n) = Q_N - P_N$  с точностью до интегралов от  $N + \frac{1}{2}$  до  $N + \frac{1}{2} + ip$  и от  $N + \frac{1}{2} - ip$  до  $N + \frac{1}{2}$ . Эти последние интегралы стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , так как  $\Omega = O(|z|^{-2})$  ( $n$  фиксировано).

Теперь у нас есть две отдельные задачи: выяснить асимптотическое поведение  $P$  и  $Q$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### 6.5. Асимптотическое поведение $P$

Сначала мы займемся интегралом  $P = \int_{ip-\infty}^{ip+\infty} \Omega dz$ , где  $p$  — некоторое положительное число. Ясно, что  $P$  не зависит от  $p$  [ср. (6.4.9)]. Приближим  $\Omega$  с помощью формулы Стирлинга. Правда, нам необходимо небольшое расширение области применимости формулы (6.4.5), поскольку наши значения  $n+z$  и  $n-z$  не всегда лежат внутри угла  $R_\delta$ . Если мы используем соотношение

$$\Pi(z) \Pi(-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z},$$

то мы сможем вывести поведение  $\Pi(z)$  в квадранте  $\text{Im } z > 0$ ,  $\text{Re } z < 0$  из его поведения в противоположном квадранте. Выяснив, что такое аргументы  $z^{z+1/2}$  и  $(-z)^{-z+1/2}$  [под главным значением  $(-z)^{\gamma}$  понимаем  $(-z)^{\gamma} = e^{-\pi i \gamma} z^{\gamma}$ ], получим

$$\Pi(z)(1 - e^{2\pi iz}) = (2\pi)^{1/2} z^{z+1/2} e^{-z} (1 + O(|z^{-1}|)) \\ (\text{Re } z < 0, \text{ Im } z > 0).$$

Отсюда легко следует, что при любом фиксированном положительном  $p_0$  мы имеем

$$\Pi(z) = (2\pi)^{1/2} z^{z+1/2} e^{-z} \{1 + O(|z^{-1}|) + O(e^{-2\pi |\text{Im } z|})\} \\ (|\text{Im } z| > p_0).$$

Из этой формулы с помощью несложных выкладок сразу получаем оценку для  $\Omega$  (подинтегральной функции в (6.4.4)):

$$(6.5.1) \quad \Omega = -2^{2ns} (\pi n)^{-s/2} (1 - \zeta^2)^{-s/2} \times \\ \times \exp \left[ n \left\{ -s \ln(1 - \zeta^2) - s\zeta \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + \pi i \zeta \right\} \right] \times \\ \times \left\{ 1 + O \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n|1 + \zeta|} + \frac{1}{n|1 - \zeta|} + e^{-2\pi n |\text{Im } \zeta|} \right) \right\} \\ (n > 1, |\text{Im } n\zeta| > p_0).$$

Здесь  $s$  и  $p_0$  фиксированы и положительны, а  $\zeta = z/n$ .

Подинтегральная функция, грубо говоря, принадлежит к виду, рассмотренному в разд. 5.7, если положить

$$(6.5.2) \quad \psi(\zeta) = -s \ln(1 - \zeta^2) - s\zeta \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + \pi i \zeta.$$

Напомним, что здесь  $s$  — положительная постоянная, а многозначные функции  $\ln(1 + \zeta)$  и  $\ln(1 - \zeta)$  понимаются в смысле главного значения. Пренебрегая временно  $O$ -членом в формуле (6.5.1), начнем с отыскания точек перевала для  $\psi$ . Имеем

$$(6.5.3) \quad \psi'(\zeta) = \pi i - s \ln \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta},$$

и поэтому  $\psi'(\eta) = 0$  при  $\eta = i \text{tg } \frac{\pi}{2s}$ . Таким образом, мы замечаем, что в верхней полуплоскости имеется точка перевала в том и только в том случае, когда  $s > 1$ . Предполагая сна-

чала, что  $s > 1$ , мы возьмем в качестве контура интегрирования горизонтальную прямую, проходящую через точку перевала  $\eta$ . Поскольку

$$\begin{aligned}\psi''(\eta) &= -2s(1 - \eta^2)^{-1} = \\ &= -2s \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2s}\right)^{-1} = -2s \cos^2 \frac{\pi}{2s} < 0,\end{aligned}$$

то эта прямая совпадает с осью точки перевала.

Наш контур описывается уравнением  $\zeta = \eta + x$  ( $-\infty < x < \infty$ ). К счастью, точка перевала является наивысшей точкой контура, так как  $\operatorname{Re} \psi(\zeta)$  для интересующей нас функции  $\psi$  убывает, когда  $x$  изменяется от 0 до  $\infty$  и от 0 до  $-\infty$ . Действительно, согласно формуле (6.5.3), имеем

$$\operatorname{Re} \frac{d\psi}{dx} = -s \ln \left| \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right| < 0 \quad (x > 0),$$

поскольку  $|1+\zeta| > |1-\zeta|$  при  $x > 0$ , и аналогично при  $x < 0$ .

Согласно сказанному в разд. 5.7, имеем

$$\begin{aligned}(6.5.4) \quad & \int_{\eta-1}^{\eta+1} (1-\zeta^2)^{-s/2} \exp(n\psi(\zeta)) d\zeta = \\ & = (2\pi)^{1/2} n^{-1/2} |\psi''(\eta)|^{-1/2} e^{n\psi(\eta)} (1-\eta^2)^{-s/2} \left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}\psi''(\eta) &= -2s \cos^2 \frac{\pi}{2s}, \\ \exp(n\psi(\eta)) &= \left(\cos \frac{\pi}{2s}\right)^{2ns}, \\ (1-\eta^2)^{-s/2} &= \left(\cos \frac{\pi}{2s}\right)^s,\end{aligned}$$

так что выражение в правой части равенства (6.5.4) приводится к виду

$$(6.5.5) \quad \left(\frac{\pi}{ns}\right)^{1/2} \left(\cos \frac{\pi}{2s}\right)^{2ns+s-1} \left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

Возвращаясь теперь к  $\Omega$ , замечаем, что на нашем контуре  $\operatorname{Im} n\zeta = n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2s}$ , а это превосходит  $\rho_0$ , если  $n$  доста-



точно велико. Значит, оценка (6.5.1) применима, и остаточный член в ней равен  $O(n^{-1})$ . Нетрудно показать, что

$$\int_{\eta-1}^{\eta+1} \left| (1-\zeta^2)^{-s/2} e^{n\psi(\zeta)} O\left(\frac{1}{n}\right) \right| |d\zeta| = O(n^{-s/2} e^{n\psi(\eta)}),$$

и, значит, этот остаточный член дает поправку того же порядка, что и остаточный член в выражении (6.5.5).

Вследствие убывания функции  $\operatorname{Re} \psi(\zeta)$  (при  $x \rightarrow \infty$ ) и наличия множителя  $(1-\zeta^2)^{-s/2}$  не возникает почти никаких трудностей, связанных с тем, что наш контур имеет бесконечную длину, так что, к счастью, нам не придется заниматься исследованием  $\psi(\zeta)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Действительно,

$$\left| \int_{\eta+1}^{\eta+\infty} \Omega d\zeta \right| \leq C 2^{2ns} (\pi n)^{-s/2} |e^{n\psi(\eta+1)}| \int_{\eta+1}^{\eta+\infty} |1-\zeta^2|^{-s/2} |d\zeta|,$$

где  $C$  — некоторое положительное число, не зависящее от  $n$ . Последний интеграл, как легко видеть, сходится ввиду нашего предположения  $s > 1$ . Нет необходимости говорить, что интеграл

$\int_{\eta-1}^{\eta-1}$  можно оценить тем же путем.

Объединяя сделанные оценки, получаем окончательную формулу для  $P$ :

$$(6.5.6) \quad P = \int_{\eta-\infty}^{\eta+\infty} \Omega dz = n \int_{\eta-\infty}^{\eta+\infty} \Omega d\zeta = \\ = - \left( 2 \cos \frac{\pi}{2s} \right)^{2ns+s-1} 2^{1-s} (\pi n)^{(1-s)/2} s^{-1/2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

справедливую при фиксированном  $s > 1$  и  $n \rightarrow \infty$ .

Можно заметить, что множитель  $(1 + O(n^{-1}))$  можно заменить асимптотическим рядом  $\sum_0^{\infty} c_k n^{-k}$ . Чтобы его получить, нужно, конечно, использовать формулу Стирлинга в виде асимптотического ряда.

Точка перевала  $\eta$  движется к  $i\infty$ , когда  $s$ , убывая, подходит к 1. Это наводит на мысль, что при  $s \leq 1$  можно получить оценку интеграла, перенося наш горизонтальный

контур бесконечно далеко вверх. На самом деле можно показать, что при  $0 < s \leq 1$ ,  $n > \frac{1}{2}(s^{-1} - 1)$  интеграл  $P$  обращается в нуль. Действительно, если  $0 < s \leq 1$  и  $\text{Im } z > p_0$  ( $p_0 > 0$  фиксировано), то мы имеем  $|\sin \pi z|^{s-1} = O(1)$ . Теперь из оценки (6.4.9) выводим, что  $\Omega = O(|z|^{-\lambda})(|z| > 2n, \text{Im } z > p_0)$  с постоянным  $\lambda > 1$ , если только  $(2n+1)s > 1$ ,  $0 < s \leq 1$ ,  $s$  и  $n$  фиксированы. Отсюда следует, что

$$P = \int_{ip-\infty}^{ip+\infty} \Omega dz = O(p^{1-\lambda}) \quad (p \rightarrow \infty),$$

и поскольку  $P$  не зависит от  $p$ , то  $P = 0$  ( $0 < s \leq 1$ ,  $(2n+1)s \geq 1$ ).

### 6.6. Асимптотическое поведение $Q$

Теперь обратим наше внимание на интеграл  $Q$ , определенный в разд. 6.4. Мы будем предполагать, что  $s > 0$ . Конечно, мы ожидаем точку перевала на действительной оси между  $n$  и  $n+1$ , ближе к  $n+1$ . Если в подинтегральной функции заменить  $\Pi(n+z)$  по формуле Стирлинга, то окажется, что такая точка перевала существует, но только при  $0 < s < 1$ . Кроме того, можно показать, что особая точка  $z = n+1$  лежит в области влияния этой точки перевала. Поэтому обычный метод перевала неприменим к нашему интегралу  $Q$ .

Чтобы изучить  $\Omega$  для значений  $z$ , близких к  $n+1$ , мы используем формулу (6.4.8). Заметим для начала, что, кроме тривиального множителя  $\{(2n)!\}^s$ , „сильно“ зависит от  $n$  лишь один множитель в формуле (6.4.8), а именно  $\{\Pi(z+n)\}^{-s}$ . К этому множителю мы применим непосредственное следствие формулы Стирлинга

$$(6.6.1) \quad \frac{(2n)!}{\Pi(x+2n)} = (2n)^{-x} (1 + O(n^{-1}))$$

( $x$  фиксировано,  $n \rightarrow \infty$ )

и положим  $z = n + x$ .

Ввиду наличия множителя  $(2n)^{-x}$  кажется целесообразным сдвинуть контур интегрирования по возможности дальше вправо. Но необходимо помнить, что нельзя при этом проходить через точку ветвления  $z = n+1$ .

Поэтому мы деформируем контур интегрирования для интеграла  $Q$  в контур, состоящий из части действительной оси от  $\infty$  до  $n+1$ , на которой значения многозначной подинтегральной функции берутся из нижней полуплоскости, и той же части действительной оси в обратном направлении от  $n+1$  до  $\infty$ , на этот раз со значениями подинтегральной функции из верхней полуплоскости. (Напомним, что подинтегральная функция однозначна в области  $D$ , описанной в разд. 6.4.) Этот контур должен быть снабжен малыми полуокружностями вокруг точек  $n+2$ ,  $n+3$ , ... и полной окружностью вокруг точки  $n+1$ , как это обычно делается, чтобы обойти особенности, но при этом, как всегда в таких случаях, радиусы этих кружков можно устремить к нулю. Кроме того, следует заметить, что первоначально интеграл определялся не как интеграл от  $\infty$  до  $\infty$ , а как предел интеграла  $Q_N$  от  $N+1/2$  до  $N+1/2$ , где  $N$  — целое число, но это не имеет значения, поскольку  $\Omega = O(|z|^{-2})$  в области (6.4.7).

В соответствии с формулой (6.4.8) запишем  $\Omega$  в виде

$$\Omega = (-1)^n \pi^{-s} \frac{1}{2i} \left\{ \frac{(2n)! \Pi(z-n-1)}{\Pi(z+n)} \right\}^s (\sin \pi(z-n))^{s-1}.$$

Функция  $\Pi(z-n-1)/\Pi(z+n)$  однозначна в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > n$  и положительна при действительном  $z > n$ . Поведение  $(\sin \pi(z-n))^{s-1}$  тоже легко описать. Это выражение положительно при  $n < z < n+1$ . Его аргумент возрастает на  $\pi(s-1)$ , когда мы обходим точку ветвления  $n+k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) по полуокружности в нижней полуплоскости от  $n+k-\delta$  до  $n+k+\delta$ , а при аналогичном обходе в верхней полуплоскости аргумент возрастает на  $-\pi(s-1)$ . Таким образом, полагая снова  $z = n+x$ , получаем

$$(6.6.2) \quad Q = (-1)^{n+1} \pi^{-s} \int_1^{\infty} \Lambda dx,$$

где

$$\Lambda = \left\{ \frac{(2n)! \Pi(x-1)}{\Pi(x+2n)} \right\}^s |\sin \pi x|^{s-1} \sin(\pi(s-1)[x]).$$

Здесь  $[x]$  означает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Отсюда сразу же следует, что  $Q = 0$  при целых положительных  $s$ , так как в этом случае  $\sin(\pi(s-1)[x]) \equiv 0$ .

Оказывается, что основной вклад в интеграл дают значения  $x$ , близкие к 1. В интервале  $1 \leq x \leq 2$ , скажем, мы можем использовать оценку (6.6.1), справедливую в этом интервале

равномерно по  $x$ . Из нее следует, что интеграл  $\int_1^2 \Lambda dx$

можно записать в виде

$$\int_1^2 (2n)^{-xs} \{\Pi(x-1)\}^s |\sin \pi x|^{s-1} \sin \pi(s-1) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) dx.$$

Этот интеграл аналогичен интегралам, рассмотренным в разд. 4.3, причем  $\ln 2n$  играет роль параметра  $t$ . Полагая  $x = 1 + u$  и сравнивая наш интеграл с интегралом

$$\int_0^{\infty} e^{-ys \ln 2n} y^{s-1} dy = \Gamma(s) (s \ln 2n)^{-s},$$

мы легко получаем

$$(6.6.3) \quad \int_1^2 \Lambda dx = \pi^{s-1} \Gamma(s) (2ns \ln 2n)^{-s} \times \\ \times \{\sin \pi(s-1) + O((\ln n)^{-1})\}.$$

Вместо остаточного члена  $O((\ln n)^{-1})$  мы могли бы получить асимптотический ряд по степеням  $(\ln n)^{-k}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

Оставшийся интеграл  $\int_2^{\infty}$  требует некоторого внимания,

так как оценка (6.6.1) не равномерна по  $x$  при  $2 \leq x < \infty$ . Но, сделав довольно грубую оценку, мы покажем, что

$\int_2^{\infty} = O(n^{-2s})$ , а это ничтожно мало по сравнению с оста-

точным членом в формуле (6.6.3).

Пусть  $K > s^{-1}$  — целое число. Покажем, что существует постоянная  $C_1$  (не зависящая ни от  $x$  ни от  $n$ ), такая, что

$$(6.6.4) \quad \frac{\Pi(x+2n)}{(2n)! \Pi(x-1)} > C_1 x^K n^2 \quad (x \geq 2, n \geq K).$$

Левая сторона может быть записана в виде

$$x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{2n}\right),$$

а это больше, чем

$$\frac{x^K}{(K-1)!} \prod_{h=K}^{2n} \left(1 + \frac{2}{h}\right) \geq C_2 x^K \prod_{h=1}^{2n} \left(1 + \frac{2}{h}\right),$$

где

$$C_2^{-1} = (K-1)! \prod_{h=1}^{K-1} \left(1 + \frac{2}{h}\right).$$

Произведение

$$\prod_{h=1}^{2n} (1 + 2h^{-1})$$

можно оценить через  $\prod (1 + 2h^{-1} + h^{-2})$ :

$$\begin{aligned} \prod_1^{2n} (1 + 2h^{-1}) &= \prod_1^{2n} (1 + h^{-1})^2 \prod_1^{2n} (1 - (h+1)^{-2}) \geq \\ &\geq (2n+1)^2 \prod_1^{\infty} \{1 - (h+1)^{-2}\}. \end{aligned}$$

Последнее произведение сходится, и неравенство (6.6.4) доказано, причем

$$C_1 = 4C_2 \prod_1^{\infty} \{1 - (h+1)^{-2}\}.$$

Это позволяет нам дать вполне удовлетворительную оценку для интеграла от 2 до  $\infty$ :

$$\left| \int_2^{\infty} \Lambda dx \right| \leq n^{-2s} \int_2^{\infty} C_1^{-s} x^{-Ks} |\sin \pi x|^{s-1} dx.$$

Интеграл в правой части сходится (поскольку  $K > s^{-1}$ ) и не зависит от  $n$ , так что

$$\left| \int_2^{\infty} \Lambda dx \right| < C_3 n^{-2s} \quad (C_3 \text{ не зависит от } n).$$

Сравнивая это с формулой (6.6.3), мы замечаем, что  $n^{-2s}$  поглощается остаточным членом  $n^{-s} (s \ln n)^{-s} O((\ln n)^{-1})$ . Поэтому окончательная оценка для  $Q$  [ср. (6.6.2)] принимает вид

$$(6.6.5) \quad Q = \frac{(-1)^n}{\pi} \Gamma(s) (2ns \ln 2n)^{-s} (\sin \pi s + O((\ln n)^{-1})) \quad (s > 0).$$

### 6.7. Окончательная оценка $S(s, n)$

Таким образом, мы получили асимптотическое поведение  $S(s, n)$  для всех действительных значений  $s$ . При  $s < 0$  мы имеем оценку (6.4.3); при  $s = 0$  имеем  $S(0, n) = (-1)^n$ ; при  $0 < s < 1$  мы используем выражение  $S = 2Q - 2P$  [см. (6.4.6)] при  $P = 0$ ; при  $s = 1$  имеем  $S(1, n) = 0$ ; при  $1 < s < 3/2$  величина  $P$  много меньше  $Q$ , поскольку в этом случае [см. (6.5.6) и (6.6.5)]  $2 \cos \frac{\pi}{2s} < 1$ ; при  $s > 3/2$  величина  $P$  много больше  $Q$  (при  $s = 3/2$  и  $P$  и  $Q$  примерно одного порядка, хотя  $Q$  несколько меньше). Приведем перечень результатов:

$$s < 0: \quad S(s, n) = 2(-1)^n + O(n^s);$$

$$s = 0: \quad S(0, n) = (-1)^n;$$

$$0 < s < 3/2: \quad S(s, n) = 2(-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\pi} (2ns \ln 2n)^{-s} \times \\ \times \left( \sin \pi s + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \right);$$

$$s = 1: \quad S(1, n) = 0;$$

$$s \geq 3/2: \quad S(s, n) = 2^{2-s} \left\{ 2 \cos \frac{\pi}{2s} \right\}^{2ns + s - 1} \times \\ \times (\pi n)^{\frac{1-s}{2}} s^{-1/2} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

При  $s < 0$  и при  $s > 3/2$  остаточный член можно заменить асимптотическим рядом по степеням  $n^{-1}$ ; то же самое можно сделать при  $0 < s < 3/2$ , но ряд будет по степеням  $(\ln n)^{-1}$ . При  $s = 3/2$  асимптотический ряд более сложен, поскольку оба интеграла  $P$  и  $Q$  вносят свой вклад:

$$S\left(\frac{3}{2}, n\right) \approx 2 \cdot 3^{-1/2} \pi^{-1/4} \left\{ n^{-1/4} + c_1 n^{-5/4} + c_2 n^{-3/2} (\ln n)^{-1/2} + \right. \\ \left. + c_3 n^{-5/2} (\ln n)^{-3/2} + \dots \right\}.$$

Члены асимптотического разложения  $P$ , начиная с третьего, пренебрежимо малы по сравнению с любым членом асимптотического разложения  $Q$ .

### 6.8. Обобщенная гамма-функция

Сейчас мы рассмотрим пример, где задача нахождения подходящего пути интегрирования весьма трудна. Эта трудность обусловлена главным образом тем, что действительная переменная  $t$ , входившая до сих пор в наши задачи на метод перевала, заменяется комплексной переменной  $s$  и мы хотим найти асимптотическое поведение интеграла при всех комплексных значениях  $s$ , когда  $|s| \rightarrow \infty$ . Поэтому путь интегрирования будет зависеть от  $|s|$  и  $\arg s$ , причем зависимость от  $\arg s$  и доставляет наибольшие трудности. Мы справимся с этими трудностями, применяя конформное отображение.

Рассматриваемая функция определяется равенством

$$(6.8.1) \quad G(s) = \int_0^{\infty} e^{-P(u)} u^{s-1} du \quad (\operatorname{Re} s > 0),$$

где  $P(u)$  — многочлен:

$$P(u) = u^N + \alpha_{N-1} u^{N-1} + \dots + \alpha_1 u + \alpha_0.$$

Его степень  $N$  — фиксированное целое положительное число, а его коэффициенты  $\alpha_{N-1}, \dots, \alpha_0$  — фиксированные комплексные числа. В частном случае  $\alpha_{N-1} = \dots = \alpha_0 = 0$  функция  $G(s)$  совпадает с  $N^{-1} \Gamma(s/N)$ , так что формула Стирлинга для комплексных значений переменного [ср. (6.4.5)] является частным случаем того, что мы должны сделать. Этот частный случай, конечно, получить гораздо проще, чем общую формулу для  $G(s)$ . Например, для гамма-функции достаточно рассматривать полуплоскость  $\operatorname{Re} s > 0$  ввиду функционального уравнения  $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$ . Кроме того, для нее можно использовать совершенно другие методы (см., например, разд. 3.10).

Как и в случае гамма-функции, легко видеть, что интеграл (6.8.1) сходится только при  $\operatorname{Re} s > 0$ . Но нетрудно показать, что  $G(s)$  аналитически продолжается на всю плоскость, за исключением простых полюсов в точках  $s = 0$ ,

—1, —2, ... [причем для некоторых исключительных наборов коэффициентов  $\alpha_k$  часть этих точек может оказаться регулярными точками функции  $G(s)$ ]. Возможность такого аналитического продолжения следует из аналитичности  $e^{-P(u)}$  при  $u = 0$ . Доказательство состоит в следующем. Степенной ряд

$$e^{-P(u)} = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$$

сходится при всех значениях  $u$ . Если  $k \geq 0$  — любое целое число, то

$$e^{-P(u)} = a_0 + a_1 u + \dots + a_k u^k + R(u),$$

$$R(u) = O(u^{k+1}) \quad (|u| < 1),$$

и поэтому

$$G(s) = \int_1^{\infty} e^{-P(u)} u^{s-1} du + \int_0^1 R(u) u^{s-1} du + \\ + \sum_{j=0}^k a_j (s+j)^{-1} \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Первый интеграл аналитичен при всех  $s$ , а второй — в полуплоскости  $\operatorname{Re} s > -k - 1$ . Это дает нам аналитическое продолжение  $G(s)$  в полуплоскость  $\operatorname{Re} s > -k - 1$ , а поскольку  $k$  произвольно, то задача решена и для всей плоскости.

Второй способ аналитического продолжения опирается на функциональное уравнение

$$sG(s) = NG(s+N) + (N-1)\alpha_{N-1}G(s+N-1) + \dots \\ \dots + \alpha_1 G(s+1),$$

которое при  $\operatorname{Re} s > 0$  легко выводится из равенства (6.8.1) интегрированием по частям.

Третий способ тесно связан с нашим подходом к решению этой асимптотической задачи, и мы его на время отложим [см. (6.8.8)].

Сначала мы избавимся от многозначной функции  $u^{s-1}$  под интегралом. Делая замену  $u = e^z$ , получаем

$$(6.8.2) \quad G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-P(e^z) + sz\} dz \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$



Интеграл сходится при  $\operatorname{Re} s > 0$ , но, меняя путь интегрирования, мы сможем пользоваться им и для других частей плоскости  $s$ . Выберем некоторое малое число  $\delta > 0$  и определим контур  $C_\delta$ , состоящий из двух лучей:

- 1) луча, описываемого уравнением  $z = ix e^{i\theta}$ ,  $\infty > x \geq 0$ ;
- 2) положительной части действительной оси  $z = x$ ,  $0 \leq x < \infty$ .

Нетрудно показать, что интеграл по  $C_\delta$  равен  $G(s)$  при  $\operatorname{Re} s > 0$ ,  $\operatorname{Im} s \geq 0$  и что этот интеграл представляет собой аналитическую функцию  $s$  в полуплоскости  $-\delta < \arg s < \pi - \delta$ . Поскольку  $\delta$  произвольно, это дает аналитическое продолжение  $G(s)$  на всю верхнюю полуплоскость, кроме отрицательной части действительной оси.

Асимптотическое поведение интеграла по  $C_\delta$  может быть получено методом перевала. Точками перевала являются решения уравнения

$$(6.8.3) \quad e^{zP'}(e^z) = s.$$

При большом  $|s|$  решения уравнения (6.8.3) легко определяются. Положим  $s = |s| e^{i\theta}$ ,  $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ . В каждой горизонтальной полосе  $S_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), определенной неравенством

$$(6.8.4) \quad |\operatorname{Im} z - (\theta + 2k\pi)N^{-1}| \leq \pi N^{-1},$$

лежит ровно одно решение уравнения (6.8.3), близкое к  $z = z_k$ , где

$$z_k = N^{-1} \left\{ \ln \frac{|s|}{N} + \theta i + 2k\pi i \right\}.$$

Это утверждение мы легко получим, заменив  $e^{zP'}(e^z)$  одним первым членом, а именно  $Ne^{Nz}$ , и применив теорему Руше (см. разд. 2.4) в упомянутой полосе  $S_k$  к функциям  $e^{zP'}(e^z) - s$  и  $Ne^{Nz} - s$ . Разность между ними по модулю не превосходит  $|Ne^{Nz} - s|$  для всех  $z$  на границе  $S_k$ , если только  $|s|$  достаточно велик. (Теорема Руше справедлива для ограниченной области, так что нам придется заменить бесконечную полосу достаточно большим прямоугольником.) Поскольку  $Ne^{Nz} - s$  имеет в  $S_k$  ровно один нуль, а именно  $z_k$ , то это справедливо и для  $e^{zP'}(e^z) - s$ .

Более того, если  $|s|$  достаточно велик, то корни уравнения (6.8.3) могут быть разложены в ряд по степеням  $s^{-1/N}$ :

$$(6.8.5) \quad \zeta_k = z_k + c_{k1}s^{-1/N} + c_{k2}s^{-2/N} + \dots,$$

где через  $\zeta_k$  обозначен корень, лежащий в полосе  $S_k$ . Ряд (6.8.5) сходится абсолютно при всех больших значениях  $|s|$ . Не вдаваясь в детали доказательства, сошлемся на аналогичный случай, рассмотренный в разд. 2.4 [см. (2.4.7)].

Наш контур интегрирования  $C_\delta$  проходит к  $+\infty$  через полосу  $S_0$ . Мы должны изменить его так, чтобы он проходил через точку перевала  $\zeta_0$ . Но весь путь целиком мы не можем поместить в полосу  $S_0$ . Поскольку  $C_\delta$  начинается в  $ie^{i\delta} \cdot \infty$ , он должен пересекать полосы  $S_1, S_2, \dots$ . При этом следует опасаться (поскольку мы должны избегать значений подинтегральной функции, больших, чем в точке перевала), что при пересечении контур пройдет слишком близко к точкам перевала  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ . Именно это делает нашу задачу довольно громоздкой. Было бы значительно проще, если бы мы ограничились случаем, когда  $|s| \rightarrow \infty$ , а  $\arg s$  фиксирован или изменяется в некотором малом интервале. При таких предположениях наша задача была бы того же типа, что и в разд. 6.2, где бесконечный набор точек перевала не создавал особых трудностей. Но даже там это потребовало некоторого количества изящных выкладок. А здесь нас интересует вся верхняя полуплоскость, так что нам пришлось бы делить ее на некоторое количество меньших углов, и внутри каждого такого угла выкладки были бы различны.

К счастью, имеется намного более простой способ, опирающийся на то, что в разложении  $P(e^z) = e^{Nz} + \alpha_1 e^{(N-1)z} + \dots$  коэффициенты при  $z$  в показателях — целые числа, и поэтому  $P(e^z)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi i$ . Определим прежде всего новые контуры  $L_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Контур  $L_k$  состоит из трех частей:

- 1) луча  $z = 2k\pi i N^{-1} + x$  ( $\infty > x \geq 0$ ),
- 2) отрезка  $z = ix$  ( $2k\pi N^{-1} \leq x \leq 2(k+1)\pi N^{-1}$ ),
- 3) луча  $z = 2(k+1)\pi i N^{-1} + x$  ( $0 \leq x < \infty$ ).

Определим теперь функцию  $G_k(s)$  равенством

$$(6.8.6) \quad G_k(s) = \int_{L_k} \exp\{-P(e^z) + sz\} dz.$$

Очевидно,  $G_k(s)$  аналитична при всех  $s$ . Поскольку  $L_{k+N}$  получается из  $L_k$  переносом на  $2\pi$  вверх, то

$$(6.8.7) \quad G_{k+N}(s) = e^{2\pi i s} G_k(s) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Функцию  $G(s)$  можно выразить через  $G_0(s), \dots, G_{N-1}(s)$ . Допустим на мгновение, что  $\operatorname{Re} s > 0$ , так что  $G(s)$  представлена интегралом (6.8.2). Очевидно, имеем

$$\int_{2\pi i - \infty}^{2\pi i + \infty} = e^{2\pi i s} \int_{-\infty}^{\infty},$$

аналогично равенству (6.8.7). Кроме того, можно показать, что

$$\int_{2\pi i - \infty}^{2\pi i + \infty} - \int_{-\infty}^{\infty} = G_0 + G_1 + \dots + G_{N-1},$$

переноса контуры  $L_0, \dots, L_{N-1}$  влево до бесконечности. Поэтому при  $\operatorname{Re} s > 0$

$$(6.8.8) \quad G(s) = -(1 - e^{2\pi i s})^{-1} \{G_0(s) + \dots + G_{N-1}(s)\}.$$

Правая часть аналитична при всех  $s$ , за исключением, может быть, простых полюсов в точках  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Но регулярность  $G(s)$  в точках  $s = 1, 2, 3, \dots$  нам известна. Последняя формула в третий раз дает нам аналитическое продолжение  $G(s)$ .

Оказывается, что асимптотическое поведение  $G_0, G_1, \dots, G_{N-1}$  можно вполне удовлетворительно описать внутри угла  $\delta < \arg s < 2\pi - \delta$ , где  $\delta$  — некоторое положительное число. Значит, формула (6.8.8) даст нам удовлетворительный результат для  $G(s)$  при всех  $s$ , кроме тех, которые близки к положительной части действительной оси. Однако для  $s$ , находящихся внутри небольшого угла около действительной оси, скажем,  $|\arg s| < \pi/8$ , мы легко можем решить нашу задачу, применяя метод перевала прямо к интегралу (6.8.2), так что этими значениями  $s$  мы можем не заниматься.

### 6.9. Целая функция $G_0(s)$

В этом разделе мы будем рассматривать только функцию  $G_0(s)$ . Мы предположим, что  $\delta < \arg s < 2\pi - \delta$  при некотором  $\delta > 0$ . Тогда точка перевала  $\zeta_0$  функции  $\exp(-P(e^z) + sz)$  лежит внутри контура  $L_0$ , если только  $|s|$  достаточно велик. Действительно,  $\zeta_0$  близко к  $z_0$  [см. (6.8.5)], а  $z_0 = N^{-1} \left( \ln \frac{|s|}{N} + \theta i \right)$ , где  $\theta = \arg s$ .

Чтобы найти правильный путь, рассмотрим сначала частный случай  $\alpha_{N-1} = \dots = \alpha_1 = 0$ , когда  $\zeta_0$  совпадает с  $z_0$ . В этом частном случае мы будем писать  $G_0^*$  вместо  $G_0$ .

С помощью замены  $z = z_0 + w$  точка перевала переносится в начало координат. Контур интегрирования тоже сдвинется — он станет контуром  $(L_0 | - z_0)$  (так мы будем обозначать контур, проходимый точкой  $z = z_0$ , когда точка  $z$  проходит контур  $L_0$ ). Из теоремы Коши следует, что горизонтальный перенос контура  $(L_0 | - z_0)$  не влияет на значение интеграла, так что можно заменить его контуром  $(L_0 | - i\theta N^{-1})$ . Этот контур проходит через точку перевала  $w = 0$ .

Подинтегральная функция принимает вид

$$\begin{aligned} \exp(-e^{Nz} + sz) &= \\ &= \exp\{s(z_0 - N^{-1})\} \exp\{-sN^{-1}(e^{Nw} - Nw - 1)\}, \end{aligned}$$

причем разбиение было сделано так, чтобы придать второму множителю вид  $\exp\left\{-\frac{1}{2} sN(w^2 + \dots)\right\}$  для малых значений  $|w|$ . Теперь  $G_0^*(s)$  приведена к виду

$$(6.9.1) \quad G_0^*(s) = \exp\{s(z_0 - N^{-1})\} \times \\ \times \int_{(L_0 | - i\theta N^{-1})} \exp\{-sN^{-1}(e^{Nw} - Nw - 1)\} d\omega.$$

В этом месте мы применим конформное отображение, чтобы получить ясное представление о поведении  $e^{Nw} - Nw - 1$ . Рассмотрим эту функцию в полосе  $|\operatorname{Im} w| < 2\pi N^{-1}$ . Контур  $(L_0 | - i\theta N^{-1})$  при всех  $\theta$ , удовлетворяющих условию  $\delta < \theta < 2\pi - \delta$ , лежит внутри этой полосы.

Нет необходимости говорить, что функция  $e^{Nw} - Nw - 1$  не может осуществлять конформного отображения никакой области, содержащей  $w = 0$ , так как эта функция имеет там нуль второго порядка. Вместо нее мы рассмотрим функцию

$$\xi(w) = \sqrt{2(e^{Nw} - Nw - 1)},$$

где для квадратного корня выбрана та ветвь, для которой в окрестности  $w = 0$  мы имеем  $\xi(w) = Nw + \dots$ .

Мы покажем, что полоса  $|\operatorname{Im} w| < 2\pi N^{-1}$  конформно отображается на область  $S$ , получающуюся удалением из всей

плоскости  $\xi$  дуг двух гипербол, лежащих в левой полуплоскости. Уравнения этих дуг:

$$(\operatorname{Re} \xi)(\operatorname{Im} \xi) = \pm 2\pi, \quad \operatorname{Re} \xi \leq -|\operatorname{Im} \xi|.$$

Чтобы доказать это, заметим сначала, что  $\xi^2 > 0$  при  $\omega > 0$ , так что из способа выбора знака квадратного корня в окрестности  $\omega = 0$  следует, что и  $\xi > 0$  при  $\omega > 0$ . Кроме того,  $\xi \rightarrow +\infty$  при  $\omega \rightarrow +\infty$ .

Возьмем теперь прямоугольник с вершинами  $\pm M \pm 2\pi i N^{-1}$ , где  $M$  — большое положительное число, и посмотрим, что происходит с  $\xi$ , когда  $\omega$  обходит границу этого прямоугольника. Начнем с точки  $\omega = M$ , в которой  $\xi$  положительно и велико. Когда  $\omega$  изменяется от  $M$  до  $M + 2\pi i N^{-1}$ , тогда  $|\xi|$  велик, а  $\arg \xi$  изменяется от нуля почти до  $\pi$ , так что  $\xi$  проходит по кривой, близкой к полуокружности  $|\xi| = \sqrt{2e^{NM}}$ ,  $\operatorname{Re} \xi > 0$ , от точки на положительной части действительной оси до точки на верхней гиперболе. Если  $\omega$  проходит верхнюю горизонтальную сторону прямоугольника, то  $\xi$  проходит верхнюю дугу гиперболы до ее конечной точки  $(i - 1)\sqrt{2\pi}$  (которая отвечает значению  $\omega = 2\pi i N^{-1}$ ), а затем ту же самую дугу в обратном направлении и приближается к действительной оси. Когда  $\omega$  изменяется от  $-M + 2\pi i N^{-1}$  до  $-M$ ,  $\xi$  переходит с дуги гиперболы на действительную ось почти по вертикальному отрезку. Когда  $\omega$  проходит нижнюю часть прямоугольника,  $\xi$  проходит путь, симметричный только что описанному относительно действительной оси.

Пусть  $\alpha$  — любая точка из области  $S$ . Ясно, что величина  $\arg(\xi(\omega) - \alpha)$  возрастает на  $2\pi$ , когда  $\omega$  обходит границу прямоугольника, так как при этом  $\xi$  обходит  $\alpha$  ровно один раз, если только  $M$  достаточно велико. Мы видим, что  $\xi(\omega)$  принимает значение  $\alpha$  ровно один раз внутри нашего прямоугольника<sup>1)</sup>, а следовательно, и внутри бесконечной полосы.

Если  $\alpha$  лежит на одной из упомянутых дуг гипербол, то  $\xi(\omega)$  не обращается в  $\alpha$  ни для одного  $\omega$ , лежащего внутри полосы. В этом можно убедиться, например, исследуя прямоугольник с вершинами  $\pm M \pm (2\pi - \varepsilon) i N^{-1}$ , где  $\varepsilon$  — положительно и мало.

<sup>1)</sup> См. Титчмарш, Теория функций, М., 1951, § 3.41.

Итак, мы показали, что  $\xi(w)$  осуществляет взаимно однозначное отображение нашей полосы на область  $S$ . Поскольку  $\xi(w)$  — аналитическая функция  $w$ , то это конформное отображение.

Мы хотим ввести  $\xi$  в качестве новой переменной интегрирования в интеграл (6.9.1), так что нам придется исследовать  $d\omega/d\xi$ . Не стоит и говорить, что эта производная является аналитической функцией  $\xi$  в области  $S$ .

Поскольку  $\xi^2 = 2(e^{N\omega} - N\omega - 1)$ , мы имеем  $\xi d\xi = N(e^{N\omega} - 1)d\omega$ . Но  $e^{N\omega} - 1$ , поскольку речь идет о нашей полосе, близко к нулю лишь при  $\omega$ , близких к нулю или к  $\pm 2\pi iN^{-1}$ . Поэтому

$$(6.9.2) \quad \frac{d\omega}{d\xi} = O(\xi) \quad \left( |\arg \xi| < \frac{3\pi}{4}, |\xi| > 3 \right).$$

Нетрудно показать даже, что  $\frac{d\omega}{d\xi} = O(\xi^{-1})$  в этой области, но для наших целей вполне достаточно оценки  $\frac{d\omega}{d\xi} = O(\xi)$ .

Наш интеграл принимает вид

$$(6.9.3) \quad G_0^*(s) = \exp\{s(z_0 - N^{-1})\} \int_C \exp\left(-\frac{1}{2} sN^{-1}\xi^2\right) \frac{d\omega}{d\xi} d\xi,$$

и остается лишь выяснить, что такое  $C$ . Исследуя образ контура  $(L_0 | -i\theta N^{-1})$  при конформном отображении, мы находим, что  $C$  — это кривая, начинающаяся в  $e^{-i\theta/2} \cdot \infty$  и идущая в  $e^{\pi i - \theta i/2} \cdot \infty$ , минуя дуги гипербол. Мы можем, однако, довольно свободно изменять этот контур. Вдоль прямой линии, проходящей через начало с аргументами  $-\theta/2$  и  $\pi - \theta/2$  (прямая, проходящая через начало, имеет два аргумента), выражение  $\frac{1}{2} sN^{-1}\xi^2$  положительно. Ясно, что эту прямую можно заменить другими проходящими через начало прямыми, аргументы которых отличаются от  $-\theta/2$  и  $\pi - \theta/2$  меньше, чем на  $\pi/4$ , так как при этом  $\operatorname{Re} \frac{1}{2} sN^{-1}\xi^2$  все еще будет больше, чем некоторая положительная постоянная, умноженная на  $|\xi|^2$ , и благодаря формуле (6.9.2) сходимость будет обеспечена. Разумеется, в конечной части плоскости может оказаться необходимым искривить контур, чтобы обойти дуги гипербол.

Все такие прямые в то же время подходят нам и с точки зрения метода перевала — на этих прямых наибольшее значение выражения  $\left| \exp \left\{ -\frac{1}{2} s N^{-1} \xi^2 \right\} \right|$  достигается в точке перевала:  $\xi = 0$ . Однако с этой точки зрения искривление контура, о котором говорилось выше, не всегда можно разрешить. Иными словами, мы можем допустить лишь прямые, идущие из  $-e^{i\eta} \cdot \infty$  в  $+e^{i\eta} \cdot \infty$ , где  $\pi/4 < \eta < 3\pi/4$ . Это требование не является ограничением: поскольку  $\eta - (\pi - \theta/2)$  должно быть заключено между  $-\pi/4$  и  $\pi/4$ , то для любого  $\theta$  из интервала  $\delta < \theta < 2\pi - \delta$  мы можем найти подходящее  $\eta$ . Можно взять просто  $\eta = (3\pi - \theta)/4$ . Мы предпочли бы, однако, иметь фиксированный контур интегрирования, не зависящий от  $\eta$ . Этого можно добиться только при некоторых ограничениях на  $\theta$ , и поэтому мы будем рассматривать для  $\eta$  два возможных значения:

- 1)  $\eta = (3\pi - \delta)/4$  при  $\delta/2 < \theta < \pi + \delta/2$ ;
- 2)  $\eta = (\pi + \delta)/4$  при  $\pi - \delta/2 < \theta < 2\pi - \delta/2$ .

Из соображений симметрии ясно, что можно обойтись случаем  $\delta < \theta < \pi + \delta/4$ . Значит, можно рассматривать только случай 1. Заменяем в формуле (6.9.3) контур  $C$  прямой, проходящей через начало от  $-e^{i(3\pi-\delta)/4} \cdot \infty$  к  $+e^{i(3\pi-\delta)/4} \cdot \infty$ . Эту прямую обозначим через  $D$ . Вдоль  $D$  имеем

$$\left| \exp \left( -\frac{1}{2} s N^{-1} \xi^2 \right) \right| \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2} |s| N^{-1} |\xi|^2 \sin \frac{\delta}{4} \right\}.$$

Теперь уже наступило время для применения метода разд. 4.1. Значение  $d\omega/d\xi$  при  $\xi = 0$  равно  $N^{-1}$  (так как  $\xi = N\omega + \dots$ ). Кроме того,  $d\omega/d\xi$  — аналитическая функция  $\xi$  на прямой  $D$  и  $d\omega/d\xi = O(\xi)$  при  $|\xi| > 3$ .

Интеграл оценивается при помощи формулы

$$\int_D \exp \left( -\frac{1}{2} s N^{-1} \xi^2 \right) d\xi = -(2\pi N)^{1/2} s^{-1/2},$$

где  $s^{-1/2}$  следует понимать в смысле  $|s|^{-1/2} e^{-i\theta/2}$ . Значит, окончательно

$$(6.9.4) \quad G_0^*(s) = -\exp \left\{ s(z_0 - N^{-1}) \right\} \sqrt{\frac{2\pi}{Ns}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right),$$

и остаточный член можно заменить асимптотическим рядом вида  $c_1 s^{-1} + c_2 s^{-2} + \dots$ . Следует отметить, что соотноше-

ние (6.9.4) выполняется равномерно в области  $|s| > 1$ ,  $\delta < \arg s < \pi + \delta/4$ .

Формула (6.9.4), конечно, не является новой. Имеем [замечая, что  $G_k^*(s) = e^{2\pi i k s N^{-1}} G_0^*(s)$ , и применяя (6.8.8)]

$$G_0^*(s) = -N^{-1} (1 - e^{2\pi i s N^{-1}}) \Gamma(s N^{-1}).$$

Значит, если заменить  $s N^{-1}$  на  $\omega$ , то формула (6.9.4) сводится к

$$\Gamma(\omega) = (2\pi)^{1/2} (1 - e^{2\pi i \omega})^{-1} e^{(\omega - 1/2) \ln \omega - \omega} \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right),$$

$$(\delta < \arg \omega < \pi + \delta/4).$$

Это простое следствие формулы Стирлинга (для  $\ln \omega$  берется значение, для которого  $\delta < \operatorname{Im} \ln \omega < \pi + \delta/4$ ). Однако наша цель состояла не в том, чтобы еще раз получить хорошо известные оценки для гамма-функции, что можно сделать более простыми способами, а скорее в том, чтобы развить при оценке  $G_0^*(s)$  некоторую технику, которая с определенными изменениями может быть использована и при оценке  $G_0(s)$ .

В качестве подготовки к решению задачи об асимптотическом поведении  $G_0(s)$  мы исследуем интеграл

$$(6.9.5) \quad f(t, \omega) = \int_{-p}^p g(x) \exp(-tx^2 - tQ(x, \omega)) dx.$$

Здесь  $p > 0$  — фиксированное число,  $Q(x, \omega)$  — двойной степенной ряд по степеням  $x$  и  $\omega$ :

$$Q(x, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} x^n \omega^m,$$

абсолютно сходящийся при  $|x| < 2p$  и  $|\omega| < b$ , где  $b > 0$  — фиксированное число. Мы предположим, что функция  $g(x)$  аналитична в круге  $|x| < 2p$  и что  $g(0) \neq 0$ . Мы хотим определить асимптотическое поведение  $f(t, \omega)$ ; когда  $|\omega|$  мал, а  $|t| \rightarrow \infty$ , причем значения  $t$  заключены внутри угла  $|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \delta$ .

Разыскивая точки перевала, приходим к уравнению

$$(6.9.6) \quad -2tx - tQ'(x, \omega) = 0,$$



где штрих означает дифференцирование по  $x$ . По теореме Руше (см. разд. 2.4) это уравнение имеет ровно одно решение внутри круга  $|x| \leq p$ , если только  $|\omega|$  достаточно мал. Действительно, на границе этого круга  $|Q'(x, \omega)| < 2|x|$ , так что  $2x + Q'(x, \omega)$  имеет внутри него столько же нулей, сколько и  $2x$ . Кроме того, это решение  $x_0$  разлагается в степенной ряд

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \omega^k,$$

сходящийся при достаточно малом  $|\omega|$ .

Отрезок прямой от  $-p$  до  $p$  является подходящим контуром для применения метода перевала к упрощенному интегралу  $\int \exp(-tx^2) dx$ . Этот отрезок в начале координат образует с осью точки перевала угол, меньший  $\pi/4 - \delta$ . В измененном интеграле (6.9.5) точка перевала  $x_0$  близка к точке перевала в начале, и направления осей тоже мало отличаются. Значит, при достаточно малом  $|\omega|$  горизонтальный отрезок, проходящий через  $x_0$ , образует с новой осью угол, меньший  $\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}$ , и его можно использовать, во всяком случае, в некоторой окрестности точки перевала. Сказанное следует воспринимать только как наводящие соображения, вся работа еще должна быть проделана.

Заменим интеграл (6.9.5) суммой интегралов

$$(6.9.7) \quad \int_{-p}^{-p+x_0} + \int_{-p+x_0}^{p+x_0} + \int_{p+x_0}^p,$$

в каждом из которых интегрирование ведется по прямолинейному отрезку. Первый и последний из этих интегралов экспоненциально малы по сравнению со значением  $\exp(-tx^2 - tQ)$  в точке перевала, так что мы можем ими пренебречь. В среднем интеграле сделаем замену  $x = x_0 + y$ . Тогда он приведет к виду

$$(6.9.8) \quad f(t, \omega) = \exp(-tx_0^2 - tQ(x_0, \omega)) \times \\ \times \int_{-p}^p g(x_0 + y) \exp(-ty^2 - tQ_1(y, \omega)) dy,$$

где  $Q_1(y, \omega) = Q(x_0 + y, \omega) - Q(x_0, \omega) - yQ'(x_0, \omega)$  — опять двойной степенной ряд

$$Q_1(y, \omega) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{nm} y^n \omega^m,$$

сходящийся при  $|y| < 3p/2$  и достаточно малом  $|\omega|$  (если  $|\omega|$  достаточно мал, то условие на  $y$  увлечет за собой  $|y + x_0| < 2p$ ).

Теперь мы можем продолжать различными способами. Можно, например, разложить  $\exp(-tQ_1(y, \omega))$  по степеням  $y$ . Другой метод состоит в том, чтобы снова применить конформное отображение, введя новую переменную  $z$  равенством  $y^2 + Q_1(y, \omega) = z^2$ . Тогда  $z$  можно разложить в двойной ряд по степеням  $y$  и  $\omega$  и интеграл приведет к виду

$$\int Q_3(z, \omega) \exp(-tz^2) dz.$$

Опуская детали рассуждений, проводимых по обычному шаблону метода перевала, сформулируем результат:

$$(6.9.9) \quad f(t, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \left(1 + \frac{1}{2} Q''(x_0, \omega)\right)^{-1/2} \times \\ \times (g(x_0) + O(t^{-1})) \exp\{-tx_0^2 - tQ(x_0, \omega)\}$$

равномерно в области

$$|\arg t| < \frac{\pi}{2} - \delta, \quad |t| > 1, \quad |\omega| < b_1$$

(при некотором фиксированном  $b_1 > 0$ ). Остаточный член  $O(t^{-1})$  можно заменить асимптотическим рядом с общим членом  $f_k(\omega)t^{-k}$ , где  $f_k(\omega)$  — степенной ряд по степеням  $\omega$ , сходящийся при  $|\omega| < b_1$ .

Стоит заметить, что  $g(x_0)$  и  $Q''(x_0, \omega)$  — также степенные ряды по степеням  $\omega$ , сходящиеся при  $|\omega| < b_1$ .

Чтобы применить результат относительно  $f(t, \omega)$  к  $G_0$ , лучше выразить сущность этого результата в словах: при достаточно малом  $|\omega|$  вблизи  $x = 0$  имеется ровно одна точка перевала и вклад этой точки перевала дает асимптотический ряд для  $f(t, \omega)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

В интеграле (6.8.6) для  $G_0(s)$  сделаем ту же замену, что мы делали в случае  $G_0^*(s)$ , т. е.  $z = z_0 + \omega$ , где

$$Nz_0 = \ln \frac{|s|}{N} + i\theta, \quad \theta = \arg s, \quad 2(e^{N\omega} - N\omega - 1) = \xi^2,$$

и рассмотрим в плоскости  $\xi$  интеграл

$$(6.9.10) \quad G_0(s) = \exp \{s(z_0 - N^{-1})\} \times \\ \times \int_D \exp \left\{ -\frac{1}{2} s N^{-1} \xi^2 + (e^{Nz} - P(e^z)) \right\} \frac{d\omega}{d\xi} d\xi.$$

Здесь  $D$  — прямая, проходящая через начало от  $-e^{i(3\pi-\delta)/4} \cdot \infty$  к  $e^{i(3\pi-\delta)/4} \cdot \infty$ . Мы опять будем считать  $\delta < \theta < \pi + \delta/4$ .

Сначала исследуем член  $e^{Nz} - P(e^z)$ , в котором заключено отклонение  $G_0$  от  $G_0^*$ . Он равен

$$(6.9.11) \quad e^{Nz_0 + N\omega} \{ -\alpha_{N-1} e^{-z_0 - \omega} - \alpha_{N-2} e^{-2z_0 - 2\omega} - \dots \}.$$

Используя свойства конформных отображений, нетрудно показать, что  $\operatorname{Re} \omega \rightarrow +\infty$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$  вдоль  $D$ . Отсюда при любом  $p > 0$  легко получаем, что  $e^\omega = O(\xi^{2/N})$  ( $\xi \in D$ ,  $|\xi| > p$ ). Поэтому

$$|e^{Nz} - P(e^z)| \leq c_1 |s \xi^2|^{(N-1)/N} \quad (\xi \in D, |\xi| > p, |s| > c_2),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — подходящие положительные числа, не зависящие от  $s$  и  $\xi$ . Это значит, что при любом  $p > 0$  мы можем ограничить интегрирование в выражении (6.9.10) отрезком  $D$  длины  $2p$ , симметричным относительно начала. Действительно, интеграл по остальной части  $D$  дает вклад, экспоненциально малый при  $|s| \rightarrow \infty$ .

К оставшейся части  $D$  длины  $2p$  можно применить результат относительно интеграла (6.9.5). Для этого, конечно, мы должны будем повернуть контур интегрирования на угол  $-(3\pi - \delta)/4$  при помощи замены  $\xi = x e^{i(3\pi - \delta)/4}$  и положить  $s = e^{-i(3\pi - \delta)/2} t$ , чтобы  $t$  удовлетворяло условиям  $-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2} < \arg t < \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{4}$ , а  $s \xi^2$  приобрело вид  $t x^2$ . Далее, при достаточно малом  $p$  в круге  $|\xi| < 2p$  имеем

$$e^{Nz} - P(e^z) = N^{-1} s Q(\xi, \omega),$$

где [ср. (6.9.11)]  $\omega = s^{-1/N}$ , а  $Q$  — двойной степенной ряд, причем  $Q(\xi, 0) = 0$ . Действительно,  $\omega = N^{-1} \xi + \dots$  и  $e^{-\omega}, \dots, e^{-(N-1)\omega}$  — степенные ряды по степеням  $\xi$ , сходящиеся при малом  $|\xi|$ , а  $e^{-z_0} = \omega N^{1/N}$ . (На самом деле из конформного отображения видно, что ряд для  $\omega$  сходится при  $|\xi| < 2\sqrt{\pi}$ , так что в качестве  $p$  можно взять  $\sqrt{\pi}$ .)

Из наших рассуждений относительно интеграла (6.9.5) следует, что для  $G_0(s)$  мы имеем асимптотический ряд, совпадающий с вкладом точки перевала. Этот ряд равен некоторой функции, умноженной на асимптотический ряд вида  $c_0(\omega) + c_1(\omega)s^{-1} + \dots$ , и все  $c_k(\omega)$  являются сходящимися степенными рядами по степеням  $\omega = s^{-1/N}$ . Поэтому ряд  $c_0(\omega) + c_1(\omega)s^{-1} + \dots$  можно записать в виде асимптотического ряда  $c'_0 + c'_1 s^{-1/N} + c'_2 s^{-2/N} + \dots$ .

Мы не будем точно вычислять вклад точки перевала в интеграл по контуру в плоскости  $\xi$ , поскольку это проще сделать для первоначального интеграла в плоскости  $z$  [см. (6.8.6)] с точкой перевала  $\zeta_0$ , определенной равенством (6.8.5). Легко видеть, что вклад точки перевала не зависит от замены  $z$  на  $\xi$  и  $\xi$  на  $x$ . Значит, нашим окончательным результатом является асимптотический ряд

$$(6.9.12) \quad G_0(s) \approx -\exp\{-P(e^{\zeta_0}) + s^{\zeta_0}\} \times \\ \times \sqrt{-\frac{2\pi}{\psi''(\zeta_0)}} \sum_0^{\infty} c_k s^{-k/N},$$

где  $c_0 = 1$ , а  $\psi(z) = -P(e^z) + sz$ . Имеется, конечно, еще трудность с определением знака вклада, но этот знак легко определить с помощью знака в формуле (6.9.4) из соображений непрерывности. Имеем

$$-\psi''(\zeta_0) = N^2 e^{Nz} + (N-1)^2 \alpha_{N-1} e^{(N-1)z} + \dots = \\ = Ns(1 + a_1 s^{-1/N} + a_2 s^{-2/N} + \dots),$$

так что формула (6.9.12) сильно упрощается. Вводя новые коэффициенты  $d_k$  ( $d_0 = 1$ ), находим

$$(6.9.13) \quad G_0(s) \approx -\sqrt{\frac{2\pi}{Ns}} \exp\{-P(e^{\zeta_0}) + s^{\zeta_0}\} \sum_0^{\infty} d_k s^{-k/N}.$$

Эта формула доказана нами при  $\delta < \arg s < \pi + \delta/4$ ,  $|s| \rightarrow \infty$ . Аргумент  $\sqrt{s}$  считается лежащим между  $\delta/2$  и  $\pi/2 + \delta/8$ . Очевидно, что формула (6.9.13) обобщает формулу (6.9.4).

## 6.10. Окончательная оценка $G(s)$

Чтобы перейти к  $G(s)$ , нам нужно, в соответствии с формулой (6.8.8), знать асимптотическое поведение  $G_0, G_1, \dots, G_{N-1}$ .

Задача для  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ ) легко сводится к задаче для  $G_0$ . В самом деле, из (6.8.6) следует, что

$$(6.10.1) \quad G_k(s) = e^{2k\pi i s/N} \int_{L_0} \exp \{-P(e^{2k\pi i/N} e^z) + sz\} dz,$$

а этот интеграл равен функции  $G_0(s)$ , построенной для многочлена  $P(u e^{2k\pi i/N})$  вместо  $P(u)$ . Старший член нового многочлена по-прежнему равен  $u^N$ .

Замена  $P(u)$  на  $P(u e^{2k\pi i/N})$  может влиять на положение в точке перевала. Разность между двумя точками перевала может быть порядка  $s^{-1/N}$ , и поскольку в разложении (6.9.13) в показателе встречается член  $s^{\zeta_0}$ , то это влияние может значительно сказаться на асимптотическом поведении.

Совсем легко получить следующую более слабую оценку:

$$(6.10.2) \quad G_k(s) = e^{2k\pi i s/N} \left(\frac{2\pi}{Ns}\right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{s}{N} + \frac{s}{N} \ln \frac{s}{N} + O(s^{(N-1)/N}) \right\}.$$

Здесь  $\delta < \arg s < \pi + \delta/4$  и  $|s| \rightarrow \infty$ . Из нее видно, что  $G_k$  ( $k > 0$ ) по сравнению с  $G_0$  можно пренебречь, поскольку множитель  $e^{2k\pi i s/N}$  превосходит  $\exp \{O(s^{(N-1)/N})\}$ . Это справедливо лишь при ограничениях  $\delta < \arg s < \pi - \delta$ . При этих же ограничениях множитель  $(1 - e^{2\pi i s})^{-1}$  в формуле (6.8.8) можно заменить единицей. Относительная ошибка при этом равна  $O(e^{-c|s|})$  с некоторым  $c > 0$ . Подводя итоги, мы получаем из формулы (6.9.13), что

$$(6.10.3) \quad G(s) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{Ns}} \exp \{-P(e^{\zeta_0}) + s^{\zeta_0}\} \sum_0^{\infty} d_k s^{-k/N}$$

при  $|s| \rightarrow \infty$  внутри угла  $\delta < \arg s < \pi - \delta$ . Напомним, что  $d_0 = 1$ .

Для угла  $-\pi + \delta < \arg s < -\delta$  мы можем получить тот же самый результат, но  $\zeta_0$  уже будет означать точку перевала, близкую к  $N^{-1} \ln \frac{s}{N}$ , причем логарифм понимается в смысле главного значения. Внутри угла вида  $-\delta < \arg s < \delta$  опять легко получить оценку (6.10.3) прямым применением метода перевала к интегралу (6.8.2). В этом случае мы мо-

жем взять в качестве контура интегрирования горизонтальную прямую, проходящую через точку перевала.

Таким образом, оценка (6.10.3) доказана нами для угла  $-\pi + \delta < \arg s < \pi - \delta$ . В частном случае  $P(u) = e^{Nu}$  наша формула сводится к формуле Стирлинга, которая, как известно, справедлива в том же самом угле.

Наконец, сформулируем одно грубое неравенство, которое легко получается из формул (6.10.2) и (6.8.8). Если мы удалим из комплексной плоскости полуполосу  $|\operatorname{Im} s| < 1$ ,  $\operatorname{Re} s < 1$ , то в оставшейся области имеем

$$\left| \frac{G(s)}{\Gamma(s/N)} \right| < C_1 \exp(C_2 |s|^{(N-1)/N}).$$

### 6.11. Упражнения

1. При фиксированном действительном  $\alpha$  положим

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \binom{2n}{n+k} k^{2n+\alpha}.$$

Показать, что имеется асимптотический ряд

$$n^{-3\alpha/2} \frac{S_n}{(2n)!} \approx c_0 + c_1 n^{-1} + c_2 n^{-2} + \dots \quad (n \rightarrow \infty),$$

причем  $c_0 = \frac{1}{2} 3^{-\alpha/2} / \Gamma(1 + \alpha/2)$ .

2. Если  $\alpha$  — четное неотрицательное число, то в предыдущей задаче лишь конечное число коэффициентов  $c_m$  отлично от нуля, и сумма этого конечного асимптотического ряда в точности равна выражению слева. (Указание. Рассмотреть  $(2n + \alpha)$ -ю производную от  $(e^{x/2} - e^{-x/2})^{2n}$  при  $x = 0$ .) Если  $\alpha$  — четное и отрицательное, то  $S_n = 0$  при  $2n + \alpha > 0$ .

3. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-w)^2 - ew} dw \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\lambda} \lambda^{-k}$$

при  $|x| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg x| < 3\pi/4 - \delta$ ,  $\delta$  — положительная постоянная. Здесь  $\lambda$  — корень уравнения  $\lambda + \ln \lambda = x$  ( $|\arg \lambda| < \pi$ ;  $|\ln \lambda|$  понимается в смысле главного значения),  $b_k$  — постоянные,  $b_0 = 1$ .

[Ср. de Bruijn N. G., *Nederl. Acad. Wetensch., Proc. Ser. A56 = Indagationes Math.*, 15 (1953), 456.]

## НЕПРЯМЫЕ МЕТОДЫ

### 7.1. Прямые и не прямые асимптотические методы

Первые шесть глав этой книги (за исключением некоторых соображений гл. 1) были посвящены асимптотическим методам, которые мы будем называть *прямыми* методами. Характерными особенностями этих методов являются: 1) функция  $f(t)$ , асимптотическое поведение которой (при  $t \rightarrow \infty$ ) мы выясняем, представляется некоторой явной формулой в виде ряда или интеграла; 2) представляющее  $f(t)$  выражение разбивается на части, про некоторые из них доказывается, что они малы, а преобладающие части сравниваются с известными функциями, и доказывается, что их уклонение от этих известных функций мало; 3) окончательный результат основывается на том, что абсолютная величина суммы (т. е. полная погрешность) не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых (т. е. суммы абсолютных величин частичных погрешностей). Заметим, что эти прямые методы всегда конструктивны в том смысле, что они дают возможность заменить  $O$ -оценки и  $o$ -оценки определенными численными неравенствами (ср. разд. 1.7).

Заметив, что прямые методы по существу опираются на неравенство  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , мы можем сказать, что прямые методы работают как в действительном, так и в комплексном случае, и даже могут быть применены к функциям  $f(t)$ , значения которых принадлежат некоторому множеству, каждый элемент которого  $a$  имеет „норму“  $|a|$ , такую, что  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (мы предполагаем, конечно, что это множество является абелевой группой по сложению).

В остальных главах этой книги мы приведем несколько методов, не принадлежащих к этому типу; мы назовем их *непрямыми* методами. Описать их характерные особенности так, как мы сделали это выше для прямых методов, трудно. Мы укажем здесь на некоторые особенности, но они не будут общими для *всех* не прямых методов.

1. Большинство не прямых методов рассматривает только действительные функции. Обычно они по существу опираются на то, что множество действительных чисел является линейно упорядоченной системой (т. е. системой, где имеется соотношение неравенства, причем из  $a < b$  и  $b < c$  следует, что  $a < c$ ), и на то, что всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

2. Иногда применяются косвенные доказательства. Это может означать, что окончательные  $O$ -оценки или  $o$ -оценки, утверждающие существование числа, или двух чисел, или функции (см. разд. 1.2 и 1.3), сводятся к утверждениям, выражающим абсурдность несуществования. В таких случаях мы не можем заменить  $O$ - или  $o$ -оценки определенными численными неравенствами.

Однако неконструктивность может быть результатом и прямого доказательства. Например, это может произойти в результате применения теоремы о сходимости ограниченной монотонной последовательности; если  $a_1 < a_2 < \dots < 1$ , то существует такое число  $\alpha$ , что  $a_n = \alpha + o(1)$  ( $n \rightarrow \infty$ ), и мы ничего не можем больше сказать, поскольку не имеем больше никакой информации относительно  $a_n$ .

3. Часто не прямые методы используют доказательства по индукции. Приведем типичное рассуждение: чтобы доказать, что некоторая функция  $f(t)$  удовлетворяет соотношению  $f(t) = t^2 + O(t)$  ( $t \rightarrow \infty$ ), мы покажем, например, что  $|f(t)| < 10$  ( $2 < t \leq 3$ ), и что для всех  $T \geq 3$  предположение

$$|f(t) - t^2| < 80t \quad (T - 1 < t \leq T)$$

приводит к утверждению

$$|f(t) - t^2| < 80t \quad (T < t \leq T + 1).$$

Отсюда по индукции мы заключаем, что  $|f(t) - t^2| < 80t$  ( $t > 2$ ).

Трудности при таких рассуждениях те же, что и вообще при доказательстве по индукции. Может случиться, что индукция не проходит при замене  $80t$  на  $100t$ . Или, что индукция не проходит для любого неравенства  $|f(t) - t^2| < At$ , но проходит для некоторого более сильного неравенства вида  $|f(t) - t^2| < A\sqrt{t}$ . Другими словами, может случиться, что более сильное утверждение легче доказать, чем более слабое.



<sup>0</sup> Не стоит и говорить, что доказательства по индукции чаще всего встречаются в случаях, когда мы хотим выяснить асимптотическое поведение некоторой последовательности  $\{a_n\}$ , заданной рекуррентными формулами, и мы не знаем формулы, выражающей  $a_n$  непосредственно через  $n$  (ср. гл. 8).

4. Очень часто мы будем использовать формулы, выражающие функцию  $f(t)$  (асимптотическое поведение которой нам нужно найти) не только через известные величины, но и через самое  $f$ . Может случиться, например, что  $f(t)$  можно выразить с помощью некоторого интеграла через значения  $f(\tau)$  на интервале  $t < \tau < \infty$ . Такие выражения часто можно использовать для определения поведения  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ ; они могут позволить преобразовать совсем грубую информацию относительно  $f(\tau)$  (на интервале  $t < \tau < \infty$ ) в значительно более точную информацию относительно  $f(t)$ .

Например, если мы знаем, что действительная функция  $f(t)$  удовлетворяет соотношению

$$f(t) = \cos \frac{1}{t} + \int_t^{\infty} (\tau^2 + (f(\tau))^2)^{-1} d\tau \quad (t > 1),$$

то легко видеть, что интеграл равен  $O(t^{-1})$ . Отсюда следует,

$$f(t) = \cos t^{-1} + O(t^{-1}) = 1 + O(t^{-1}) \quad (t > 1).$$

Подставляя это в интеграл, находим

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} \{\tau^2 + 1 + O(\tau^{-1})\}^{-1} d\tau &= \int_t^{\infty} \{\tau^{-2} - \tau^{-4} + O(\tau^{-5})\} d\tau = \\ &= t^{-1} - \frac{1}{3} t^{-3} + O(t^{-4}), \end{aligned}$$

откуда

$$f(t) = 1 + t^{-1} - \frac{1}{2} t^{-2} - \frac{1}{3} t^{-3} + O(t^{-4}) \quad (t > 1).$$

Эту операцию можно продолжать и легко таким образом показать, что функция  $f(t)$  имеет асимптотическое разложение.

5. Иногда нам приходится искать поведение функции  $f(t)$ , заданной некоторыми условиями, среди которых может оказаться и условие относительно ее асимптотического поведения. Например, пусть мы имеем дело с ограниченной (при  $0 \leq t < \infty$ )

функцией  $f(t)$ , удовлетворяющей данному дифференциальному уравнению. Может случиться, что это уравнение имеет ровно одно ограниченное решение. Тогда наша задача снова состоит в переработке грубой асимптотической информации (ограниченность) в более точную. Некоторые задачи гл. 9 будут такого типа.

6. Нет необходимости говорить, что многие не прямые доказательства содержат части, примыкающие к прямым методам (см., например, разд. 7.5).

Из сделанных выше замечаний ясно, что название „непрямые асимптотические методы“ указывает не столько на методы, сколько на отсутствие общих методов. Поскольку дальнейшие главы этой книги посвящены как раз применениям не прямых методов к различным вопросам, то в этой главе мы рассмотрим лишь один тип примеров: несколько простых тауберовых теорем<sup>1)</sup>.

Тауберовы теоремы обычно доказываются не прямыми методами, хотя и нельзя сказать, что это всегда отражает существо дела. Однако их противоположность — так называемые абелевы теоремы — безусловно относятся к прямым асимптотическим методам.

## 7.2. Тауберовы теоремы

Хорошо известная теорема Абеля состоит в следующем: если степенной ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  сходится при  $x = 1$ , то он сходится и на всем интервале  $0 \leq x < 1$ , причем его сумма  $f(x)$  удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ 0 \leq x < 1}} f(x) = f(1).$$

Вычитая постоянную  $f(1)$ , мы можем представить эту теорему в следующем виде: если

$$(7.2.1) \quad a_0 + a_1 + \dots + a_n = o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

то

$$(7.2.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = o(1) \quad (x \rightarrow 1, 0 \leq x < 1).$$

<sup>1)</sup> Более подробные сведения читатель может найти в книге Харди, *Расходящиеся ряды*, М., 1951.

Эта теорема доказывается прямыми асимптотическими методами. Если написать

$$A(y) = \sum_{0 \leq k \leq y} a_k,$$

то, согласно преобразованию Абеля [см. (3.13.2)],

$$(7.2.3) \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k = A(n) x^n - \ln x \int_0^n A(y) x^y dy.$$

Взяв фиксированное значение  $x$  из интервала  $0 < x < 1$ , мы видим, что  $A(n) x^n = o(x^n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и что интеграл  $\int_0^\infty A(y) x^y dy$  сходится. Поэтому из формулы (7.2.3) следует, что

$$(7.2.4) \quad f(x) = -\ln x \int_0^\infty A(y) x^y dy.$$

Теперь разобьем интеграл на две части. Зададимся каким-либо  $\varepsilon > 0$  и выберем  $b$  так, чтобы  $|A(y)| < \varepsilon/2$  при  $b \leq y < \infty$ . Тогда, разбивая интеграл  $\int_0^\infty = \int_0^b + \int_b^\infty$ , получаем

$$|f(x)| \leq |\ln x| \int_0^b |A(y)| dy + \frac{1}{2} \varepsilon |\ln x| \int_b^\infty x^y dy.$$

Первое слагаемое меньше  $\varepsilon/2$ , если  $x$  достаточно близок к 1. Второе слагаемое не превосходит

$$\frac{1}{2} \varepsilon |\ln x| \int_0^\infty x^y dy = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит,  $|f(x)| < \varepsilon$  при  $x$ , достаточно близких к 1, и утверждение (7.2.2) доказано.

Формулу (7.2.4) можно также записать в виде

$$f(x) = \int_0^\infty A(y) x^y dy \bigg/ \int_0^\infty x^y dy.$$

показывающем, что  $f(x)$  равно среднему от значений  $A(y)$ , взятому с некоторым положительным весом. Теорема Абеля выводит асимптотическую информацию о среднем от функции  $A(y)$  из асимптотической информации о самой  $A(y)$ .

Обращение теоремы Абеля неверно: из соотношения (7.2.2) не следует (7.2.1). Легко построить противоречащий пример. Если

$$f(x) = \frac{1}{2} - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} \quad (0 \leq x < 1),$$

то  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 1$ , т. е. соотношение (7.2.2) справедливо. Но (7.2.1) в этом случае не имеет места, так как

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = \frac{1}{2} (-1)^n \neq o(1).$$

Можно доказать, что из соотношения (7.2.2) следует соотношение (7.2.1) при некотором дополнительном условии. Первый результат в этом направлении был получен Таубером, который доказал, что условие

$$(7.2.5) \quad a_n = o(n^{-1}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

является достаточным: из соотношений (7.2.2) и (7.2.5) следует утверждение (7.2.1). Позднее Харди и Литлвуд доказали, что условие (7.2.5) можно заменить более слабым условием существования такой положительной постоянной  $C$ , что

$$(7.2.6) \quad a_n > -Cn^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Мы докажем этот результат в разд. 7.5.

Общая терминология построена по этому частному случаю. Теорема, выводящая асимптотическую информацию о некотором роде среднем от функции из асимптотической информации о самой функции, называется *абелевой* теоремой. Если можно найти дополнительное условие, при котором справедливо обращение абелевой теоремы, то такое условие называется *тауберовым* условием, а обратная теорема называется *тауберовой* теоремой.

В разд. 7.3 и 7.4 мы рассмотрим несколько совсем простых случаев, а более трудную тауберову теорему докажем в разд. 7.5.

### 7.3. Дифференцирование асимптотических формул

Пусть  $f(x)$  интегрируема на любом конечном интервале, и пусть

$$(7.3.1) \quad F(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

Пусть нам известно асимптотическое поведение  $f(t)$ , скажем,

$$(7.3.2) \quad f(t) \sim t^\alpha \quad (t \rightarrow \infty),$$

где  $\alpha \geq 0$  — постоянная. Тогда легко получить абелеву теорему об асимптотическом поведении  $F(t)$ . В нашем случае

$$(7.3.3) \quad F(t) \sim (\alpha + 1)^{-1} t^{\alpha+1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Обратное не всегда верно, т. е. формальное дифференцирование формулы (7.3.3) не всегда законно. Например, если  $F(t) = t^2 + t \sin t$ , то  $F'(t) = t(2 + \cos t) + \sin t$ , так что  $F(t) \sim t^2$ , но  $F'(t) \sim 2t$  не верно.

Чтобы можно было вывести формулу (7.3.2) из (7.3.3), мы должны добавить некоторое тауберово условие, в качестве которого возьмем такое:

$$(7.3.4) \quad f(t) \text{ — действительна и не убывает при } 0 \leq t < \infty.$$

Мы будем доказывать такую тауберову теорему: из условий (7.3.3) и (7.3.4) следует утверждение (7.3.2).

Возьмем какое-либо  $\varepsilon > 0$ . В силу соотношения (7.3.3) можно взять такое  $T$ , чтобы

$$|F(t) - (\alpha + 1)^{-1} t^{\alpha+1}| < \varepsilon t^{\alpha+1} \quad (t \geq T).$$

Пусть  $p$  и  $t$  таковы, что  $t \geq T$ ,  $t + p \geq T$  ( $p$  может быть отрицательным). Тогда мы имеем также

$$|F(t + p) - (\alpha + 1)^{-1} (t + p)^{\alpha+1}| < \varepsilon (t + p)^{\alpha+1}$$

и, вычитая, получаем

$$(7.3.5) \quad \left| \int_t^{t+p} f(x) dx - \int_t^{t+p} x^\alpha dx \right| < \varepsilon t^{\alpha+1} + \varepsilon (t + p)^{\alpha+1}.$$

Предположим сначала, что  $p > 0$ . Тогда из условия (7.3.4) сразу следует, что  $pf(t) \leq \int_t^{t+p} f(x) dx$ . Кроме того,  $\int_t^{t+p} x^\alpha dx < p(t+p)^\alpha$ . Отсюда следует, что

$$f(t) \leq (t+p)^\alpha + 2\epsilon p^{-1}(t+p)^{\alpha+1}.$$

Это дает нам оценку сверху для  $f(t)$ , и мы еще можем выбрать  $p$ , чтобы сделать ее как можно эффективнее. Полагая  $p = qt$ , находим

$$f(t) \leq t^\alpha \{(1+q)^\alpha + 2\epsilon q^{-1}(1+q)^{\alpha+1}\}.$$

Искать точный минимум не обязательно. Заметим только, что  $q$  должно быть достаточно мало, чтобы  $(1+q)^\alpha$  было близко к 1, и достаточно велико по сравнению с  $\epsilon$ , чтобы  $\epsilon q^{-1}$  было мало. Поэтому мы возьмем  $q = \sqrt{\epsilon}$  и получим

$$(7.3.6) \quad f(t) \leq t^\alpha \{(1 + \sqrt{\epsilon})^\alpha + 2\sqrt{\epsilon}(1 + \sqrt{\epsilon})^{\alpha+1}\} \quad (t \geq T).$$

Оценка снизу получается, если взять в неравенстве (7.3.5)  $p < 0$ . Мы сразу возьмем  $p = -t\sqrt{\epsilon}$ . Предполагая, что  $\epsilon < 1/4$  и  $t \geq 2T$ , мы получим  $p + t \geq T$ . Кроме того,

$$|p|f(t) \geq \int_{t+p}^t f(x) dx, \quad \int_{t+p}^t x^\alpha dx \geq |p|(t+p)^\alpha,$$

и из неравенства (7.3.5) следует, что

$$(7.3.7) \quad f(t) \geq t^\alpha \{(1 - \sqrt{\epsilon})^\alpha - 2\sqrt{\epsilon}\} \quad (t \geq 2T).$$

Из оценок (7.3.6) и (7.3.7) получаем  $f(t) \sim t^\alpha (t \rightarrow \infty)$ . В самом деле, при любом  $\epsilon' > 0$  можно выбрать  $\epsilon$  столь малым, чтобы множители в фигурных скобках в формулах (7.3.6) и (7.3.7) были заключены между  $1 - \epsilon'$  и  $1 + \epsilon'$ . По значению  $\epsilon$  можно определить  $T$  и получить  $|f(t) - t^\alpha| < \epsilon' t^\alpha (t \geq 2T)$ . Это доказывает нашу тауберову теорему.

## 7.4. Аналогичная задача

Как и в предыдущем разделе, мы рассмотрим  $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ , но вместо условия (7.3.2) мы предположим теперь, что

$$(7.4.1) \quad f(t) = 2t + O(1) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Тогда с помощью тех же рассуждений мы получим абелеву теорему

$$(7.4.2) \quad F(t) = t^2 + O(t) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Нас снова интересует вопрос, достаточно ли дополнительного условия

$$(7.4.3) \quad f(t) \text{ не убывает при } 0 \leq t < \infty,$$

чтобы из соотношения (7.4.2) следовало (7.4.1). Оказывается, что недостаточно.

Рассуждая так же, как в разд. 7.3, мы выбираем положительную функцию  $p(t)$ , и из условий (7.4.2) и (7.4.3) получаем

$$\begin{aligned} f(t) &\leq p^{-1} \int_t^{t+p} f(x) dx = p^{-1} \{F(t+p) - F(t)\} = \\ &= 2t + p + O(tp^{-1}) + O(1) \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Наилучшая  $O$ -оценка получится, если мы выберем  $p$  так, чтобы оба слагаемых  $p$  и  $tp^{-1}$  были одного порядка. Взяв  $p = \sqrt{t}$ , получим  $f(t) \leq 2t + O(\sqrt{t})$ . Аналогично находим соответствующую оценку снизу и получаем

$$(7.4.4) \quad f(t) = 2t + O(\sqrt{t}) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Грубо говоря, это наилучший возможный результат, который только можно получить из условий (7.4.2) и (7.4.3). Точнее, мы покажем, что существует функция  $f(t)$ , удовлетворяющая условиям (7.4.2) и (7.4.3), для которой справедлива формула  $f(t) = 2t + O(\sqrt{t})$ , но не справедлива формула  $f(t) = 2t + o(\sqrt{t})$ .

Хороший пример можно построить, исходя из геометрических соображений. Предположение  $|F(t) - t^2| \leq t \quad (t \geq 0)$

означает, что график функции  $y = F(t)$  в плоскости  $(t, y)$  при  $t \geq 0$  лежит ниже графика  $y = t^2 + t$  и выше графика  $y = t^2 - t$ . Обозначим первую параболу через  $\pi_1$ , а вторую через  $\pi_2$ . Условие (7.4.3) означает, что график  $F(t)$  — выпуклая кривая. Мы хотим нарисовать между  $\pi_1$  и  $\pi_2$  возможно более нерегулярную выпуклую кривую. Под „нерегулярностью“ мы понимаем то, что наклон этой кривой должен время от времени сильно отличаться от наклона парабол.

Поэтому мы выбираем график  $F$  следующим образом. Возьмем последовательность точек  $P_0 = (t_0, y_0)$ ,  $P_1 = (t_1, y_1)$ , ... на  $\pi_2$  так, чтобы при каждом  $k$  прямая, соединяющая  $P_k$  с  $P_{k+1}$ , касалась  $\pi_1$  в какой-нибудь точке между  $P_k$  и  $P_{k+1}$ . В качестве графика  $F(t)$  выберем ломаную  $P_0P_1P_2 \dots$ .

При этом неважно, что  $F$  не имеет производной в вершинах  $P_k$ , так как  $f$  не определяется как производная  $F$ ; мы знаем только, что  $F$  определяется как интеграл от  $f$ . Мы можем приписать  $f(t_k)$  любое значение между угловыми коэффициентами прямых  $P_{k-1}P_k$  и  $P_kP_{k+1}$ .

Условие, что  $P_kP_{k+1}$  касается  $\pi_1$ , при помощи элементарных сведений из аналитической геометрии записывается в виде соотношения  $(t_k + t_{k+1} - 2)^2 = 4t_k t_{k+1}$ , откуда

$$t_{k+1} = t_k + 2 + \sqrt{8t_k}.$$

Если  $t_0$  задано, то  $t_1, t_2, \dots$  последовательно вычисляются. Здесь мы можем даже написать явную формулу. (Если бы это было невозможно, то мы могли бы исследовать асимптотическое поведение  $t_k$  при  $k \rightarrow \infty$  методами гл. 8.) Если взять  $t_0 = 0$ , то  $t_1 = 0 + 2 + 0 = 2$ ,  $t_2 = 2 + 2 + 4 = 8$ ,  $t_3 = 8 + 2 + 8 = 18$ ,  $t_4 = 32$ ,  $t_5 = 50, \dots$ , и легко показать, что  $t_k = 2k^2$ . Угловым коэффициентом прямой  $P_kP_{k+1}$ , как легко видеть, равен  $(2k+1)^2$ , а в точке касания  $t = 2k^2 + 2k$ . Поэтому  $f$  определяется равенствами

$$f(t) = (2k+1)^2 \quad (2k^2 \leq t < 2(k+1)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots).$$

Теперь, очевидно,  $f(t_k) - 2t_k = 4k + 1 > \sqrt{t_k}$ , так что выражение  $(f(t) - 2t)/\sqrt{t}$  не стремится к нулю. Функция  $f(t)$

не убывает, а  $F(t) = \int_0^t f(x) dx$  лежит между  $t^2 - t$  и  $t^2 + t$  при всех  $t$ . Из геометрических соображений это очевидно,



но можно, конечно, убедиться в этом, выполнив интегрирование, которое дает

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) &= t^2 + t - (t - 2k^2 - 2k)^2 = \\ &= t^2 - t + (2(k+1)^2 - t)(t - 2k^2) \quad (2k^2 \leq t \leq 2(k+1)^2). \end{aligned}$$

Из этих формул очевидно, что

$$t^2 - t \leq F(t) \leq t^2 + t \quad (0 \leq t < \infty).$$

Итак, мы установили, что условие (7.4.3) не является подходящим тауберовым условием для перехода от соотношения (7.4.2) к соотношению (7.4.1). Рассмотрим теперь более сильное условие: предположим, что  $f$  имеет неотрицательную вторую производную

$$(7.4.5) \quad f''(t) \geq 0 \quad (t \geq 0).$$

Кроме того, предположим, что выполнено соотношение (7.4.2), т. е.  $F(t) = t^2 + O(t)$ . Тогда мы можем получить формулу (7.4.1) при помощи некоторых простых соображений. Мы сможем даже доказать больше, а именно, что существует такое число  $b$ , что  $f(t) = 2t + b + o(1)$ . Сначала заметим, что неравенство  $f''(t) \geq 0$  означает, что  $f'(t)$  не убывает. Если бы при некотором  $t_0$  мы имели  $f'(t_0) = a$ ,  $a > 2$ , то мы имели бы и  $f'(t) \geq a$  при всех  $t > t_0$ , а это противоречило бы условию  $F(t) = t^2 + O(t)$ . Значит,  $f'(t) \leq 2$  при всех  $t$ , а отсюда следует, что  $f(t) - 2t$  не возрастает. При  $t > t_1 > 1$  имеем

$$\begin{aligned} F(t) - t^2 - F(t_1) + t_1^2 &= \\ &= \int_{t_1}^t (f(x) - 2x) dx \leq (t - t_1)(f(t_1) - 2t_1). \end{aligned}$$

Пусть  $A$  таково, что  $|F(t) - t^2| < At$  ( $t > 1$ ). Устремляя  $t$  к бесконечности, находим, что  $f(t_1) - 2t_1 \geq -A$ . Значит,  $f(t) - 2t$  не возрастает и ограничена снизу, а отсюда следует, что  $f(t) - 2t$  стремится к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Кое-что можно сказать и относительно  $f'(t)$ : поскольку  $f'(t)$  не убывает,  $f' \leq 2$  и  $f(t) = 2t + b + o(1)$ , то очевидно, что

$f'(t) = 2 + o(1)$ , и даже, что интеграл  $\int_0^\infty (f'(t) - 2) dt$  сходится,

## 7.5. Метод Караматы

Пусть  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  — степенной ряд, сходящийся при  $|x| < 1$ , и пусть мы имеем некоторую информацию об асимптотическом поведении частных сумм  $a_0 + a_1 + \dots + a_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если их поведение не слишком нерегулярно, то мы можем получить абелеву теорему о поведении функции

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

при  $x \rightarrow 1$  ( $0 < x < 1$ ). (О частном случае этой задачи и соответствующей тауберовой теореме мы говорили в разд. 7.2.)

Обратно, предположим, что нам известно асимптотическое поведение  $f(x)$  (при  $x \rightarrow 1$ ) и что мы хотим выяснить асимптотическое поведение частных сумм

$$A(n) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k.$$

Они могут быть записаны в виде

$$(7.5.1) \quad A(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g(e^{-k/n}) \quad (n > 0),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < e^{-1}), \\ 1 & (e^{-1} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

В методе Караматы эта разрывная функция  $g(x)$  приближается в некотором смысле (в каком именно, мы уточним несколько позже) многочленами  $P(x)$ ,  $P(0) = 0$ . Если

$$P(x) = \sum_{j=1}^m p_j x^j,$$

то сумма, соответствующая сумме (7.5.1), равна

$$(7.5.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k P(e^{-k/n}) = \sum_{j=1}^m p_j f(e^{-j/n}).$$

При фиксированном многочлене  $P$  асимптотическое поведение правой части (при  $n \rightarrow \infty$ ) известно.

Этот метод можно применять в довольно широком классе случаев. Мы конкретизируем задачу, взяв фиксированное действительное число  $\gamma$  и предположив, что

$$(7.5.3) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = o((1-x)^{-\gamma}) \quad (x \rightarrow 1, 0 < x < 1).$$

Используя тауберово условие

$$(7.5.4) \quad a_k > -C(k+1)^{\gamma-1} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

где  $C$  — положительная постоянная, мы докажем, что

$$(7.5.5) \quad A(n) = \sum_{k=0}^n a_k = o(n^{\gamma}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Частный случай  $\gamma = 0$  мы уже сформулировали в разд. 7.2. Его обычно получают при помощи вспомогательной тауберовой теоремы из случая  $\gamma = 1$ , но метод Караматы достаточно силен, чтобы справиться и со случаем  $\gamma = 0$ <sup>1)</sup>.

Относительно приближения  $g(x)$  многочленами мы поставим следующие условия. Пусть  $h$  — некоторое целое число,  $h > 0$ ,  $h > -\gamma$ . В действительности мы возьмем за  $h$  наименьшее целое число, удовлетворяющее этим неравенствам. Пусть  $\varepsilon$  — некоторое положительное число  $0 < \varepsilon < 1/2$ . Нам понадобятся такие многочлены  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$ , что

$$P_1(x) \leq g(x) \leq P_2(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$|P_2(x) - P_1(x)| \leq 2 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$|P_2(x) - P_1(x)| \leq \varepsilon x \quad (0 \leq x \leq e^{-1-\varepsilon}),$$

$$|P_2(x) - P_1(x)| \leq \varepsilon(1-x)^h \quad (e^{-1+\varepsilon} \leq x \leq 1).$$

Мы не требуем ничего относительно степени или коэффициентов этих многочленов. Возможность построения  $P_1$  и  $P_2$  мы покажем следующим образом. Сначала мы избавимся от разрыва при  $x = e^{-1}$ , построив такие непрерывные функции  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ , что

$$g_1(x) \leq g(x) \leq g_2(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$g_2(x) = g_1(x) = g(x) \quad \text{при } x \leq e^{-1-\varepsilon} \text{ или } x \geq e^{-1+\varepsilon},$$

$$g_2(x) - g_1(x) \leq 1 \quad \text{при } e^{-1-\varepsilon} \leq x \leq e^{-1+\varepsilon}.$$

<sup>1)</sup> См. Wielandt H., *Math. Z.*, 56 (1952), 206—207.

Затем мы определим многочлен  $Q(x)$  так, чтобы  $Q(0) = g(0)$ ,  $Q(1) = g(1)$ ,  $Q'(1) = g'(1)$ ,  $\dots$ ,  $Q^{(h-1)}(1) = g^{(h-1)}(1)$ . В действительности подходит уже  $Q(x) = 1 - (1-x)^h$ , но явный вид  $Q$  не имеет значения. Теперь функция  $\varphi_2$

$$\varphi_2(x) = (g_2(x) - Q(x)) x^{-1} (1-x)^{-h}$$

непрерывна при  $0 \leq x \leq 1$ . По теореме Вейерштрасса<sup>1)</sup> можно найти такой многочлен  $R_2(x)$ , что

$$\left| \varphi_2(x) + \frac{\varepsilon}{4} - R_2(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Полагая  $P_2 = Q + x(1-x)^h R_2$ , замечаем, что

$$g_2(x) \leq P_2(x) \leq g_2(x) + \frac{1}{2} \varepsilon x (1-x)^{-h} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Аналогично построим  $P_1(x)$  так, чтобы

$$g_1(x) - \frac{1}{2} \varepsilon x (1-x)^{-h} \leq P_1(x) \leq g_1(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Эти  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$ , очевидно, удовлетворяют всем нашим требованиям.

В силу равенства (7.5.1) и условия (7.5.4) имеем для всех положительных  $n$

$$(7.5.6) \quad -A(n) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_1(e^{-k/n}) \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{\infty} C(k+1)^{i-1} [g(e^{-k/n}) - P_1(e^{-k/n})],$$

$$(7.5.7) \quad A(n) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_2(e^{-k/n}) \leq \\ \leq \sum_{k=0}^{\infty} C(k+1)^{i-1} [P_2(e^{-k/n}) - g(e^{-k/n})],$$

поскольку  $g - P_1 \geq 0$ ,  $P_2 - g \geq 0$ . Правые части этих неравенств не превосходят

$$\sum_{k=0}^{\infty} C(k+1)^{i-1} (P_2(e^{-k/n}) - P_1(e^{-k/n})).$$

<sup>1)</sup> См. Титчмарш, Теория функций, М., 1951, § 13.33.

Эта величина легко оценивается разбиением суммы на части  $k \leq n(1-\varepsilon)$ ,  $n(1-\varepsilon) < k \leq n(1+\varepsilon)$ ,  $n(1+\varepsilon) < k < \infty$ . Для первой части суммы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n(1-\varepsilon)} &\leq \sum_{0 \leq k \leq n(1-\varepsilon)} C(k+1)^{\gamma-1} \varepsilon(1 - e^{-k/n})^h \leq \\ &\leq \sum_{0 \leq k \leq n} \varepsilon C(k+1)^{\gamma-1} k^h n^{-h} \leq \varepsilon C D_1 n^\gamma, \end{aligned}$$

где  $D_1$  зависит от  $\gamma$ , но не зависит от  $\varepsilon$  и  $n$ . Действительно,  $(k+1)^{\gamma-1} k^h \leq (k+1)^{\gamma+h-1}$  и  $\gamma+h > 0$ . А если  $\beta > 0$ , то

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^{\beta-1} = O(n^\beta) \quad (n > 0).$$

Вторая часть суммы содержит не более  $2\varepsilon n + 1$  слагаемых, так что

$$\begin{aligned} \sum_{n(1-\varepsilon) < k \leq n(1+\varepsilon)} &\leq 2C \sum_{n(1-\varepsilon) < k \leq n(1+\varepsilon)} (k+1)^{\gamma-1} \leq \\ &\leq 2C(2\varepsilon n + 1) D_2 n^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

где  $D_2$  зависит только от  $\gamma$  [мы можем взять  $D_2 = 3^{|\gamma-1|}$ , так как  $0 < \varepsilon < 1/2$  обеспечивает, что  $n/3 < k+1 < 3n$  при  $n(1-\varepsilon) < k \leq n(1+\varepsilon)$ ].

Для третьей части суммы имеем

$$\sum_{k \geq n(1+\varepsilon)} \leq \sum_{k \geq n(1+\varepsilon)} C(k+1)^{\gamma-1} \varepsilon e^{-k/n} \leq \varepsilon C D_3 n^\gamma,$$

где  $D_3$  зависит только от  $\gamma$ . В этом легко убедиться, сравнив сумму с соответствующим интегралом

$$\int_n^\infty x^{\gamma-1} e^{-x/n} dx = n^\gamma \int_1^\infty y^{\gamma-1} e^{-y} dy.$$

Значит, суммы в правых частях неравенств (7.5.6) и (7.5.7) дают самое большее  $\varepsilon C n^\gamma (D_1 + 4D_2 + D_3 + 2n^{-1}\varepsilon^{-1}D_2)$ , где  $D_m$  зависят только от  $\gamma$ .

Сумму  $\sum_{k=0}^\infty a_k P_1(e^{-k/n})$ , встречающуюся в неравенстве (7.5.6), можно оценить при помощи формул (7.5.2) и (7.5.3) [напомним, что  $P_1(0) = 0$ ]. Поскольку при фиксированном  $j$  и  $n \rightarrow \infty$

$$(1 - e^{-j/n})^{-\gamma} \sim j^{-\gamma} n^\gamma,$$

то сумма равна  $o(n^\gamma)$ . Точнее, найдется такое число  $n_0$ , зависящее от  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  и от многочлена  $P_1$ , что эта сумма по абсолютному значению будет меньше  $\varepsilon n^\gamma$  ( $n > n_0$ ). То же самое справедливо и для аналогичной суммы, содержащей  $P_2$ , встречающейся в неравенстве (7.5.7). Можно считать, что  $n_0$  годится для обеих сумм. Наконец, из неравенств (7.5.6) и (7.5.7) получаем

$$|A(n)| < \varepsilon n^\gamma (CD_1 + 4CD_2 + CD_3 + 2n^{-1}\varepsilon^{-1}CD_2 + 1) \\ (n > n_0).$$

Если к тому же  $n > \varepsilon^{-1}$ , то это дает нам  $|A(n)| < \varepsilon D_4 n^\gamma$ , где  $D_4$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $n$ . Так как  $\varepsilon$  произвольно, то утверждение (7.5.5) доказано.

При  $\gamma > 0$  легко доказать (ср. разд. 3.5), что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\gamma-1} x^k \sim \Gamma(\gamma)(1-x)^{-\gamma} \quad (x \rightarrow 1, 0 < x < 1),$$

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^{\gamma-1} \sim \gamma^{-1} n^\gamma \quad (n \rightarrow \infty).$$

Значит, при  $\gamma > 0$  наша тауберова теорема допускает следующее обобщение. Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sim (1-x)^{-\gamma} \quad (x \rightarrow 1, 0 < x < 1),$$

$$a_k > -C(k+1)^{\gamma-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

то

$$\sum_{k=0}^n a_k \sim \frac{n^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

## 7.6. Упражнения

1. Пусть  $\alpha \geq 0$ ,  $C > 0$ ,  $f'(t) > -Ct^{\alpha-1}$  при  $t > 1$  и  $\int_0^t f(x) dx \sim (\alpha+1)^{-1} t^{\alpha+1}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Показать, что  $f(t) \sim t^\alpha$  при  $t \rightarrow \infty$ .

2. Пусть

$$\sum_0^{\infty} a_k x^k \sim -\ln(1-x) \quad (x \rightarrow 1, 0 < x < 1),$$

где

$$a_k > -C \frac{\ln k}{k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

и  $C$  — некоторая положительная постоянная. Показать, что

$$\sum_0^n a_k \sim \ln n \quad (n \rightarrow \infty).$$

## ИТЕРАЦИИ ФУНКЦИЙ

## 8.1. Введение

Многие асимптотические задачи можно сформулировать следующим образом. Пусть нам даны последовательность функций  $F_1, F_2, \dots$  и число  $x_0$ . Положим

$$x_1 = F_1(x_0), \quad x_2 = F_2(x_1), \quad x_3 = F_3(x_2), \quad \dots$$

(предполагая, конечно, что  $F_1$  определена в точке  $x_0$ ,  $F_2$  определена в точке  $x_1$  и т. д.). Задача состоит в том, чтобы найти асимптотическое поведение  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

В большей части этой главы мы будем рассматривать только очень частный случай этой задачи, когда все функции  $F_1, F_2, \dots$  совпадают с одной и той же функцией  $f$ . Тем не менее задачи, в которых все  $F_k$  различны, очень часто могут быть решены методами, установленными для этого частного случая. Это замечание справедливо даже и в более общих предположениях. Например,  $F_n$  могут быть функциями  $n$  переменных, а не одного переменного, и  $x_n$  может определяться рекуррентной формулой  $x_n = F_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ . Дальнейшие обобщения получаются, если заменить  $x_k$  функциями, а  $F_k$  операторами. Многие асимптотические задачи о решениях дифференциальных или интегральных уравнений укладываются в эту схему.

## 8.2. Итерации функции

Вплоть до разд. 8.9 мы будем считать все функции  $F_k$  совпадающими с одной и той же действительной функцией  $f$ . Если  $x_0$  — любое действительное число, то

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \quad \dots$$

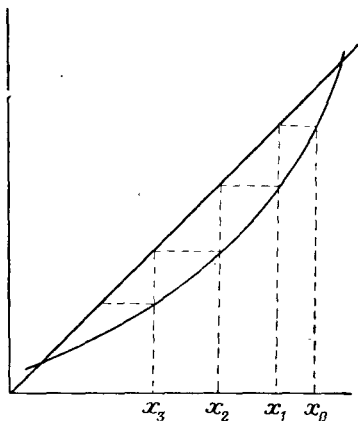


Через  $f_n$  мы будем обозначать  $n$ -ю итерацию функции  $f$ , т. е.

$$f_1(x_0) = f(x_0), \quad f_{n+1}(x_0) = f(f_n(x_0)) = f_n(f(x_0)) \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ясно, что  $x_n = f_n(x_0)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Для геометрической интерпретации этих формул мы воспользуемся фиг. 2. На этом чертеже нанесены график  $y = f(x)$  и прямая  $y = x$  и показано, как можно последовательно построить точки  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , если  $x_0$  задано. Читатель может получить удовольствие, начертив самостоятельно несколько таких графиков и выяснив, что происходит с точками  $x_1, x_2, x_3, \dots$  при различных значениях  $x_0$ .



Фиг. 2.

В дальнейшем мы будем считать, что  $f$  определена для всех действительных значений переменного, чтобы не возникало вопроса, определены  $f_n$  или нет.

Возможно, что последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots$  стремится к пределу  $c$ . Если  $f$  непрерывна в точке  $c$ , то из равенства  $x_{n+1} = f(x_n)$  видно, что  $c = f(c)$ . Поэтому, если  $f$

всюду непрерывна, то возможными значениями  $c$  являются лишь решения уравнения  $c = f(c)$ .

Сходимость к точке  $c$ , где  $c = f(c)$ , часто может быть доказана следующим образом. Мы показываем существование такой окрестности  $N$  точки  $c$ , что как только  $x_n$  попадает в эту окрестность, последовательность  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$  сходится к  $c$ . В таких случаях вполне вероятно, что асимптотическое поведение  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$  может быть изучено во всех деталях, особенно если  $f(x)$  аналитична в точке  $x = c$ .

Задача о том, найдется ли при данном  $x_0$  такое  $n$ , чтобы  $x_n$  попало в эту окрестность  $N$  точки  $c$ , носит совершенно иной характер. Она часто совсем проста, если  $f$  — действи-

тельная непрерывная функция, а  $x$  — действительное переменное. Мы рассмотрим один общий пример.

Пусть  $f(x)$  непрерывна на интервале  $J: c \leq x < d$  ( $d$  может быть равно и  $+\infty$ ). Предположим, что  $f(c) = c$  и  $f(c) \leq f(x) < x$  при  $x \in J, x > c$ . Тогда для любого  $x$  из  $J$  имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = c$ . Действительно, при наших предположениях  $f$

отображает  $J$  в себя, и то же самое можно сказать про  $f_2, f_3, f_4, \dots$ . Далее, неравенство  $f(x) \leq x$  ( $x \in J$ ) обеспечивает, что  $x \geq f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots$ . Поскольку все  $f_n(x)$  лежат в  $J$ , то эта последовательность ограничена снизу. Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  существует и равен решению уравнения

$f(x) = x$ , которое не может быть ничем иным, кроме  $c$ .

Аналогичные рассуждения применимы и в том случае, когда  $x < f(x) \leq c, c = f(c)$ , в интервале  $d < x \leq c$ .

Следует заметить, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  не обязан быть непре-

рывной функцией  $x$ . Если, например, применить предыдущие результаты к функции  $f(x) = x + \sin x$ , то мы получим, что этот предел существует для всех  $x$  и равен функции  $\varphi(x)$ , которая может быть описана равенствами  $\varphi(0) = 0, \varphi(x) = \pi$  ( $0 < x < 2\pi$ ),  $\varphi(2\pi) = 2\pi, \varphi(x) = 3\pi$  ( $2\pi < x < 4\pi$ ),  $\varphi(4\pi) = 4\pi, \varphi(x) = 5\pi$  ( $4\pi < x < 6\pi$ ) и т. д.

Однако положение может оказаться намного более сложным, чем в только что рассмотренных случаях. Если  $f(x)$  непрерывна при  $-\infty < x < \infty$  и если  $f(c) = c$  и  $f(x) < x$  на некотором интервале  $c < x < d$ , но неравенство  $f(x) \geq f(c)$  уже не выполняется на всем этом интервале, то поведение  $x_n$  ( $c < x < d, n \rightarrow \infty$ ) уже не определяется только свойствами  $f(x)$  на этом интервале  $c < x < d$ . В таких случаях полное решение вопроса о поведении  $x_n$  может оказаться очень трудным.

Вернемся снова к локальной задаче, т. е. к вопросу о том, что происходит в малой окрестности точки  $c, f(c) = c$ .

Без ограничения общности мы можем считать  $c = 0$  (в противном случае мы рассмотрели бы функцию  $f^*(x) = f(x + c) - c$ ; заметим, что ее итерации имеют вид  $f_n^*(x) = f_n(x + c) - c$ ), и в силу соотношения  $c = f(c)$  мы имеем тогда, что  $f(0) = 0$ .

Для большей определенности предположим, что  $f$  аналитична при  $x = 0$ . Тогда

$$(8.2.1) \quad f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (|x| < p),$$

где  $p$  — некоторое положительное число. Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  могут быть комплексными числами, а  $x$  — комплексное переменное.

Модуль коэффициента  $a_1$  играет в нашей задаче существенную роль. При  $|a_1| < 1$  последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots$  сходится к нулю, если только  $x_0$  было взято достаточно близко к нулю. Нетрудно выяснить и асимптотическое поведение  $x_n$  (см. разд. 8.3). Сходимость в этом случае быстрая. При  $0 < |a_1| < 1$  величина  $\ln|x_n^{-1}|$  ведет себя, как  $Cn$ , где  $C$  — положительная постоянная. При  $a_1 = 0$  сходимость еще быстрее. При  $|a_1| > 1$  легко убедиться, что  $x_n$  не стремится к нулю, если только, начиная с некоторого  $n$ , все  $x_n$  не обращаются тождественно в нуль. При  $|a_1| = 1$  задача значительно сложнее (см. разд. 8.5), и если даже последовательность в этом случае сходится, то совсем медленно.

### 8.3. Быстрая сходимость

При  $|a_1| < 1$  благодаря счастливому стечению обстоятельств задачу об итерации функции  $f(x)$ , заданной рядом (8.2.1), можно решить прямым методом. Иными словами, мы можем получить для  $x_n$  [определенных равенством  $x_n = f_n(x_0)$ ] новую формулу, из которой можно найти асимптотическое поведение  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , если только  $|x_0|$  не слишком велик.

Пока мы предположим, что  $a_1 \neq 0$ , а случай  $a_1 = 0$  рассмотрим отдельно в конце этого раздела.

Начнем с грубой оценки  $f_n(x)$ . Пусть  $|a_1| < b < 1$ . Тогда существует такое число  $p_1$  ( $0 < p_1 < p$ ), что

$$(8.3.1) \quad 0 < |f_n(x)| < b^n |x| \quad (n = 1, 2, \dots; 0 < |x| < p_1).$$

Действительно, степенной ряд для функции  $x^{-1}f(x)$  при  $x = 0$  равен  $a_1$ . Поэтому можно выбрать  $p_1$  так, чтобы  $0 < |x^{-1}f(x)| < b$  при  $|x| < p_1$ . Тогда при  $x_0$ , удовлетворяющем условию  $0 < |x_0| < p_1$ , мы имеем  $0 < |x_1| < b|x_0|$  и, значит,  $0 < |x_1| < p_1$ . На втором этапе получаем  $0 < |x_2| < b|x_1|$  и  $0 < |x_2| < p_1$ . По индукции находим,

что  $0 < |x_n| < b|x_{n-1}|$  и  $0 < |x_n| < p_1$ . Отсюда следует, что  $0 < |x_n| < b^n|x_0|$ , и неравенство (8.3.1) доказано.

Затем докажем, что при фиксированном  $x_0$  ( $0 < |x_0| < p_1$ ) выражение  $x_n a_1^{-n}$  стремится к пределу, который мы обозначим через  $\omega(x_0)$ . Имеем

$$(8.3.2) \quad \frac{x_{n+1}}{a_1 x_n} = \frac{f(x_n)}{a_1 x_n} = 1 + \frac{a_2}{a_1} x_n + \frac{a_3}{a_1} x_n^2 + \dots,$$

а это близко к 1, если  $n$  велико. Обозначая через  $1 + r_n$  правую часть равенства (8.3.2), мы видим из неравенства (8.3.1),

что  $r_n = O(b^n)$ . Следовательно, произведение  $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + r_k)$  сходит

дится. Поскольку  $\prod_{k=0}^{n-1} (1 + r_k)$  равно  $x_n a_1^{-n} x_0^{-1}$ , то мы получаем, что  $x_n a_1^{-n}$  стремится к пределу  $\omega(x_0)$ , где

$$(8.3.3) \quad \omega(x_0) = x_0 \prod_{n=0}^{\infty} (1 + r_n).$$

Поскольку  $f_n(x_0) = f_{n-1}(f(x_0)) = f_{n-1}(x_1)$ , то мы находим, что  $x_n a_1^{-n}$  стремится к пределу  $\omega(x_1)$ , и поэтому  $\omega(x_1) = a_1 \omega(x_0)$ , т. е. функция  $\omega$  удовлетворяет так называемому уравнению Шрёдера<sup>1)</sup>

$$(8.3.4) \quad \omega(f(x)) = a_1 \omega(x) \quad (|x| < p_1).$$

Следует заметить, что  $\omega(x)$  аналитична в круге  $|x| < p_1$ . Это следует из того, что каждый множитель  $1 + r_n$  в произведении (8.3.3) является аналитической функцией  $x_0$ , и произведение сходится равномерно по  $x_0$  в этом круге. А равенство (8.3.3) показывает, что  $\omega(0) = 0$ ,  $\omega'(0) = 1$ . Положим

$$(8.3.5) \quad \omega(x) = x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots \quad (|x| < p_1).$$

Коэффициенты  $d_2, d_3, \dots$  могут быть последовательно определены из уравнения (8.3.4), так как, зная  $d_2, d_3, \dots, d_{n-1}$ , мы можем найти  $d_n$ , сравнивая коэффициенты при  $x^n$  в уравнении (8.3.4). Это дает нам линейное уравнение для  $d_n$ , содержащее только  $d_2, d_3, \dots, d_n$ . В это уравнение  $d_n$  входит с коэффициентом  $a_1^n - a_1$ , а он не равен нулю в силу нашего предположения  $0 < |a_1| < 1$ .

<sup>1)</sup> См. Schröder E., *Math. Ann.*, 3 (1871), 296—322.

Повторно используя уравнение (8.3.4), получаем  $\omega(x_n) = a_1^n \omega(x_0)$  и, решая это уравнение относительно  $x_n$ , получаем для него явную формулу. Формула обращения Лагранжа (см. разд. 2.2) дает нам функцию  $\Omega$ , обратную к  $\omega$ , удовлетворяющую уравнению  $\Omega(\omega(x)) = x$  в соответствующем круге  $|x| < p_2$ . Положим

$$\Omega(x) = x + e_2 x^2 + e_3 x^3 + \dots \quad (|x| < p_2).$$

Заметим, что коэффициенты  $\Omega$  могут быть последовательно определены без использования коэффициентов функции  $\omega$ . Для этой цели можно использовать тождество  $f(\Omega(y)) = \Omega(a_1 y)$ , получающееся из уравнения (8.3.4), если положить  $\omega(x) = y$ .

Если  $p_3 = \min(p_1, p_2)$  и  $|x_0| < p_3$ , то, согласно неравенству (8.3.1),  $|x_n| < p_3$  при всех  $n$ . Отсюда следует, что (8.3.6)

$$\begin{aligned} x_n &= \Omega(a_1^n \omega(x_0)) = \\ &= a_1^n \omega(x_0) + e_2 a_1^{2n} [\omega(x_0)]^2 + e_3 a_1^{3n} [\omega(x_0)]^3 + \dots \quad (|x_0| < p_3). \end{aligned}$$

Эта формула дает вполне удовлетворительную информацию о поведении  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Хотя это и не имеет прямого отношения к асимптотике, мы упомянем, что последнюю формулу можно использовать для непрерывной итерации. Иначе говоря, можно определить функции  $f_\lambda(x)$  для всех  $\lambda \geq 0$  так, чтобы

$$f_\lambda(f_\mu(x)) = f_{\lambda+\mu}(x) \quad (\lambda \geq 0, \mu \geq 0), \quad f_1 = f,$$

а  $f_0(x) = x$ . Если  $\lambda$  — целое положительное число, то  $f_\lambda$  — это  $\lambda$ -я итерация  $f$ . Функции  $f_\lambda(x)$  можно определить равенством <sup>1)</sup>

$$f_\lambda(x) = \Omega(a_1^\lambda \omega(x)) \quad (|x| < p_3).$$

До сих пор мы предполагали, что  $a_1 \neq 0$ . Теперь коротко скажем, что происходит при  $a_1 = 0$ . Если все коэффициенты ряда (8.2.1) равны нулю, то и все  $x_n$  равны нулю, и поставленная задача теряет смысл. Так что обозначим через  $a_k$  ( $k > 1$ ) первый отличный от нуля коэффициент. Без ограничения общности мы можем считать  $a_k = 1$ , так как в противном

<sup>1)</sup> Эта формула предложена Кёнигсом (см. Koenigs G., *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* (3) 1 (1884), Supplém. p. 3—41 и 2 (1885), 385—404).

случае мы рассмотрели бы функцию  $f^*(x) = a^{-1}f(ax)$ , где  $a$  выбрано так, что  $a_k a^{k-1} = 1$ . Итак,

$$f(x) = x^k + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \dots$$

В этом случае итерационный процесс можно контролировать следующими формулами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\}^{k^{-n}} = \omega(x), \quad \omega(0) = 0, \quad \omega'(0) = 1,$$

$$\omega(f(x)) = [\omega(x)]^k,$$

$$f_n(x) = \Omega\{[\omega(x)]^{k^n}\}.$$

Здесь  $\Omega(x)$  — функция, обратная к  $\omega(x)$ . Это только формальная сторона вопроса, но нетрудно дать детальное обоснование так же, как мы это сделали в случае  $0 < |a_1| < 1$ .

#### 8.4. Медленная сходимость

Теперь перейдем к итерационной задаче для функции  $f$ , представленной рядом (8.2.1) с  $|a_1| = 1$ . Наши методы применимы и к функциям, имеющим асимптотический ряд вида

$$f(x) \approx x + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots \quad (x \rightarrow 0, x > 0),$$

где  $k > 1$ ,  $a_k < 0$ . В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

но и общий случай немногим труднее (см. разд. 8.11, упражнение 1). Прежде всего, введем обозначения

$$\sin_1 x = \sin x, \quad \sin(\sin_n x) = \sin_n(\sin x) = \sin_{n+1} x,$$

$$x_n = \sin_n x_0.$$

При  $0 < x_0 < \pi$  имеем  $0 < \sin x_0 < x_0$ . Отсюда по индукции  $0 < x_n < \pi$  при всех  $n$  и  $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  (см. разд. 8.2). Теперь перейдем к вопросу об асимптотическом поведении  $x_n$ .

Между этим случаем и рассмотренными в разд. 8.3 имеется некоторая разница. В разд. 8.3 имела место сходимость  $x_n$  к нулю для всех комплексных значений  $x_0$  внутри некоторого круга. В настоящем случае это уже не так. Например, если  $x_0$  — чисто мнимое,  $x_0 = it_0$  ( $t_0 > 0$ ), то мы

имеем  $x_n = it_n$ , где  $t_n = \operatorname{sh}_n t_0$ . Легко видеть, что  $0 < t_0 < t_1 < \dots$  и что  $t_n \rightarrow \infty$ , как бы ни было мало  $t_0$ .

В разд. 8.3 мы могли решить поставленную задачу при помощи некоторого ряда по степеням  $x$ , причем было безразлично, выбрано  $x_0$  действительным или нет. В нашем случае это обстоятельство имеет значение, так что мы не можем надеяться многого добиться с помощью такого степенного ряда. Однако без такого ряда изучение комплексных значений  $x_0$  представляется очень сложным, так что мы ограничимся действительными значениями  $x_0$ . Ограничение  $0 < x_0 < \pi$  несущественно ( $x_1 = \sin x_0$  во всяком случае удовлетворяет условию  $-\pi < x_1 < \pi$ , а  $\sin_n x_0 = \sin_{n-1} x_1$ ; кроме того, в силу симметрии, нет ничего страшного в изучении только положительных значений).

Мы приведем два различных метода решения задачи об асимптотическом поведении  $\sin_n x_0$ . Один из них (разд. 8.5 и 8.6) является совершенно естественным и использует идеи, обычно применяемые в итерационных задачах, второй (разд. 8.7 и 8.8) более эффективен, но по существу использует специфические особенности данной задачи.

### 8.5. Подготовка

Следующий вопрос будет служить подготовкой к дальнейшему. Пусть  $u_1, u_2, \dots$  — последовательность положительных чисел, и пусть

$$(8.5.1) \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 + O(u_n^3) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Что можно сказать об асимптотическом поведении  $u_n$  при  $n \rightarrow \infty$ ?

Прежде всего ясно, что нельзя ничего сказать, не накладывая каких-то дополнительных условий вида  $u_n \rightarrow 0$ . Действительно, если  $p > 0$  и  $q > 0$  фиксированы,  $0 < p < q$ , то любая последовательность чисел  $\{u_n\}$ , лежащих между  $p$  и  $q$ , очевидно, удовлетворяет условию (8.5.1).

Запишем (8.5.1) несколько более конкретно. Пусть  $A > 0$  таково, что

$$(8.5.2) \quad |u_{n+1} - u_n + u_n^2| \leq Au_n^3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Нетрудно показать, что существует такое число  $p > 0$ , что если  $0 < u_k < p$  при каком-нибудь значении  $k$ , то авто-

матически  $u_k > u_{k+1} > u_{k+2} > \dots$  и  $u_k \rightarrow 0$ . Для этой цели  $p$  нужно выбрать так, чтобы при  $0 < x < p$  мы имели  $Ax^3 < x^2$  и  $x - x^2 > Ax^3$  (так что  $Ap \leq 1$ ). Тогда из неравенства (8.5.2) следует, что  $0 < u_k < p$  влечет за собой  $0 < u_{k+1} < u_k < p$  и т. д. Последовательность убывает и ограничена снизу, значит, она сходится к некоторому пределу  $c$ ,  $0 \leq c < p$ . Из неравенства (8.5.2) имеем  $|c - c + c^2| \leq Ac^3$ . Поскольку  $Ap \leq 1$ ,  $0 \leq c < p$ , то отсюда следует, что  $c = 0$ .

Таким образом, мы выяснили (при общем предположении, что все  $u_n$  положительны), что или все  $u_n$  больше  $p$ , или  $u_n$  монотонно стремится к нулю, начиная с некоторого  $n$ . В последнем случае мы можем получить более точный результат:

$$(8.5.3) \quad \text{если } u_n \rightarrow 0, \text{ то } u_n = n^{-1} + O(n^{-2} \ln n).$$

Это можно доказать следующим образом. При помощи некоторых элементарных выкладок мы получаем, что существуют такие положительные постоянные  $K$  и  $N$ , что при всех  $n \geq N$  и при всех  $x$  из интервала

$$(8.5.4) \quad 0 < x < n^{-1} + Kn^{-2} \ln n$$

имеем

$$(8.5.5) \quad 0 < x - x^2 + Ax^3 < (n+1)^{-1} + K(n+1)^{-2} \ln(n+1).$$

[Чтобы убедиться в этом, положим  $\lambda_n = n^{-1} + Kn^{-2} \ln n$  и покажем, что

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n + \lambda_n^2 - A\lambda_n^3 = (1 + K - A)n^{-3} + O(n^{-4} \ln^2 n),$$

откуда  $\lambda_n - \lambda_n^2 + A\lambda_n^3 < \lambda_{n+1}$ , если  $K$  и  $n$  достаточно велики.]

Пусть теперь  $k$  выбрано так, что  $0 < u_k < N^{-1} + KN^{-2} \ln N$ . Это возможно в силу предположения  $u_n \rightarrow 0$ . Тогда по индукции легко доказывается, что

$$0 < u_{k+m} < (N+m)^{-1} + K(N+m)^{-2} \ln(N+m) \\ (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Значит,  $u_n < n^{-1} + O(n^{-2} \ln n)$ . Аналогичные соображения можно использовать и для получения оценки снизу.

Трудность этого результата заключена, конечно, не столько в том, чтобы доказать утверждение (8.5.3), сколько в том, чтобы догадаться, что именно надо доказывать. Что  $n^{-1}$  является



первым приближением, можно догадаться, заменив разностное уравнение  $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$  дифференциальным уравнением  $u'(t) = -[u(t)]^2$ , имеющим решение  $u(t) = (t + c)^{-1}$ . Не так легко объяснить, как можно угадать член  $O(n^{-2} \ln n)$ . Требуется некоторое воображение и опыт, чтобы увидеть, что именно член  $Kn^{-2} \ln n$  делает возможным переход от неравенства (8.5.4) к неравенству (8.5.5).

Случайно имеется намного более простой способ доказательства утверждения (8.5.3). Он основан на замене  $u_n = v_n^{-1}$ , преобразующей равенство (8.5.1) к более подходящему виду. Очевидных причин надеяться на успех такой подстановки заранее нет, но вид соотношения (8.5.3) наводит на мысль о ней. Из равенства (8.5.1) получаем

$$v_{n+1} = v_n \{1 - u_n + O(u_n^2)\}^{-1} = v_n \{1 + u_n + O(u_n^2)\} \quad (n \rightarrow \infty)$$

и поэтому

$$(8.5.6) \quad v_{n+1} - v_n = 1 + O(v_n^{-1}), \quad v_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Так как  $v_n^{-1} \rightarrow 0$ , то  $v_{n+1} - v_n > 1/2$  для достаточно больших  $n$ , и поэтому  $v_n > n/4$  для достаточно больших  $n$ . Отсюда имеем  $v_n^{-1} = O(n^{-1})$ . Следовательно,  $v_{n+1} - v_n = 1 + O(n^{-1})$ , откуда находим  $v_n = n + O(\ln n)$ . Но

$$u_n = v_n^{-1} = \{n + O(\ln n)\}^{-1} = n^{-1} + O(n^{-2} \ln n),$$

и мы опять получили соотношение (8.5.3).

Мы доказали относительно уравнения (8.5.1) оценку (8.5.3), т. е. утверждение такого рода: если  $u_n$  не слишком велики, то они очень малы. Приведем без доказательства два аналогичных результата, справедливость которых, однако, не ограничивается случаем действительных последовательностей.

1. Если последовательность  $\{a_n\}$  удовлетворяет условиям (8.5.7)  $a_{n+1} - a_n = O(n^{-1}) + O(n^{-2}a_n^2)$ ,  $a_n = o(n)$  ( $n \rightarrow \infty$ ), то  $a_n = O(\ln n)$ .

2. Если последовательность  $\{b_n\}$  удовлетворяет условиям

$$b_{n+1} - b_n = O(n^{-2}b_n^2), \quad b_n = o(n) \quad (n \rightarrow \infty),$$

то  $b_n = O(1)$ .

Теорема 1 связана с равенством (8.5.1): если предположить, что уже доказано предельное соотношение  $n u_n \rightarrow 1$  для  $u_n$ , удовлетворяющих равенству (8.5.1), то замена  $u_n = n^{-1} + n^{-2} a_n$  приводит к равенству (8.5.7).

### 8.6. Итерации синуса

Вернемся к задаче об итерациях синуса. Предполагается, что  $0 < x_0 < \pi$ ,  $x_1 = \sin x_0$ ,  $x_2 = \sin x_1$  и т. д. Мы уже показали, что  $x_n \rightarrow 0$ . Имеем

$$x_{n+1} = \sin x_n = x_n - \frac{1}{6} x_n^3 + \frac{1}{120} x_n^5 - \dots$$

Поскольку ряд содержит только нечетные степени  $x_n$ , формулу можно упростить, положив  $x_n^2 = y_n$ :

$$y_{n+1} = y_n \left( 1 - \frac{1}{6} y_n + \frac{1}{120} y_n^2 - \dots \right)^2.$$

Обозначив  $y_n/3 = x_n^2/3 = z_n$ , мы получаем некоторое подобие равенства (8.5.1)

$$(8.6.1) \quad z_{n+1} = z_n \left( 1 - \frac{1}{2} z_n + \frac{3}{40} z_n^2 - \dots \right)^2 = \\ = z_n^2 - z_n^3 + \frac{2}{5} z_n^4 - \dots$$

Так как  $z_n \rightarrow 0$ , то равенство (8.5.3) дает нам асимптотическую формулу для  $z_n$ , а именно  $z_n = n^{-1} + O(n^{-2} \ln n)$ , откуда <sup>1)</sup>

$$\sin_n x_0 = \sqrt{\frac{3}{n}} \left( 1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right).$$

Должно быть понятно, что все  $O$ -оценки в этом разделе относятся ко всему множеству целых положительных чисел  $n$  и что они не являются равномерными по  $x_0$ .

Более точные оценки можно получить, подставляя этот результат в равенство (8.6.1). Вычисления становятся несколько проще, если сделать ту же замену  $w_n = z_n^{-1}$ , которая так

<sup>1)</sup> Несколько более слабый результат, а именно  $\sqrt{n} \sin_n x \rightarrow \sqrt{3}$  ( $x$  фиксировано,  $0 < x < \pi$ ,  $n \rightarrow \infty$ ), имеется в книге: Полиа и Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. I, М., 1956, гл. I, задача № 173.

быстро привела к успеху в разд. 8.5. Между  $w_n$  и  $x_n$  имеется соотношение

$$w_n = 3x_n^{-2},$$

из которого видно, что  $w_n \rightarrow \infty$ . Кроме того,  $w_n$  удовлетворяет соотношению

$$(8.6.2) \quad w_{n+1} = w_n + 1 + \frac{3}{5} w_n^{-1} + O(w_n^{-2}).$$

Нетрудно получить полное разложение. Дифференцированием хорошо известного ряда для  $\operatorname{ctg} x$  получаем

$$(8.6.3) \quad (\sin x)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-4)^k (1-2k) \frac{B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-2},$$

где  $B_{2k}$  — числа Бернулли (см. разд. 3.6). Из равенства  $x_{n+1} = \sin x_n$  следует, что

$$(8.6.4) \quad w_{n+1} = w_n \sum_{k=0}^{\infty} w_n^{-k} (1-2k) (-12)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} = \\ = w_n + 1 + \frac{3}{5} w_n^{-1} + \frac{2}{7} w_n^{-2} + \frac{3}{25} w_n^{-3} + \frac{18}{385} w_n^{-4} + \dots$$

Точно так же, как из равенства (8.5.6), мы получаем, что  $w_n^{-1} = O(n^{-1})$  и  $w_n = n + O(\ln n)$ . Подставляя это в разложение (8.6.4), находим

$$w_{n+1} - w_n = 1 + \frac{3}{5} n^{-1} + O(n^{-2} \ln n).$$

Отсюда, полагая  $w_n = n + \frac{3}{5} \ln n + t_n$ , получаем

$$t_{n+1} - t_n = O(n^{-2} \ln n),$$

а это означает, что  $t_n$  стремится к пределу, который мы обозначим через  $C$ , и что

$$t_n = C + \sum_{k=n}^{\infty} (t_k - t_{k+1}) = C + \sum_{k=n}^{\infty} O(k^{-2} \ln k) = \\ = C + O(n^{-1} \ln n).$$

Напишем  $t_n = C + r_n$ , откуда  $r_n = O(n^{-1} \ln n)$ . Подставляя  $\omega_n = n + \frac{3}{5} \ln n + C + r_n$  в разложение (8.6.4), получаем

$$r_{n+1} - r_n = -\frac{9}{25} \frac{\ln n}{n^2} + \frac{41 - 42C}{70n^2} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right)$$

и, суммируя, легко находим

$$r_n = \frac{9}{25} \frac{\ln n}{n} + \frac{-79 + 210C}{350n} + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).$$

Этот процесс может быть продолжен, и можно показать, что для  $r_n$  имеется асимптотический ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} (n^{-1} \ln n)^k n^{-l}.$$

Это значит, что  $n^{-1} \omega_n$  имеет аналогичный асимптотический ряд. Окончательно мы находим для  $x_n = \sqrt[3]{3} / \sqrt{\omega_n}$  асимптотический ряд, несколько членов которого приводим здесь:

$$(8.6.5) \quad x_n = \sin_n x_0 = \\ = \sqrt{\frac{3}{n}} \left\{ 1 - \frac{3}{10} \frac{\ln n}{n} - \frac{C}{2n} + \frac{\alpha \ln^2 n + \beta \ln n + \gamma}{n^2} + O\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right) \right\},$$

где

$$\alpha = \frac{27}{200}, \quad \beta = \frac{9}{20} C - \frac{9}{50}, \quad \gamma = \frac{3}{8} C^2 - \frac{3}{10} C + \frac{79}{700}.$$

Значение  $C$ , разумеется, зависит от  $x_0$ . Замечательно, что два первых члена асимптотического ряда не зависят от  $x_0$ .

Чтобы узнать что-нибудь относительно зависимости  $C$  от  $x_0$ , введем обозначение  $C = \Psi(x_0)$  и рассмотрим упрощенную формулу, полученную из разложения (8.6.5):

$$(8.6.6) \quad x_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \left\{ 1 - \frac{3}{10} \frac{\ln n}{n} - \frac{\Psi(x_0)}{2n} + O(n^{-2} \ln^2 n) \right\}.$$

Поскольку  $x_{n+1} = \sin x_n = \sin_n(\sin x_0)$ , имеем

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{n}} \left\{ 1 - \frac{3}{10} \frac{\ln n}{n} - \frac{\Psi(\sin x_0)}{2n} + O(n^{-2} \ln^2 n) \right\},$$

и значит,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \sqrt{3n^{-3}} \{ \Psi(x_0) - \Psi(\sin x_0) \} + O(n^{-5/2} \ln^2 n).$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sin x_n - x_n = -\frac{1}{6} x_n^3 + O(x_n^5) = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{3} n^{-3/2} + O(n^{-5/2} \ln n). \end{aligned}$$

Поэтому  $\Psi$  удовлетворяет уравнению

$$(8.6.7) \quad \Psi(\sin x_0) - \Psi(x_0) = 1.$$

Функция  $\Psi$  определяется формулой (8.6.6) единственным образом. На самом деле из формулы (8.6.6) следует, что

$$\Psi(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2n - \frac{3}{5} \ln n - 2x_n n^{3/2} 3^{-1/2} \right\}.$$

Эта формула показывает, что  $\Psi(x) = \Psi(\pi - x)$  ( $0 < x < \pi$ ) и что  $\Psi(x)$  не возрастает на интервале  $0 < x < \pi/2$  (действительно, если  $x_0$  возрастает, а  $n$  фиксировано, то  $x_n$  возрастает). Кроме того, из равенства (8.6.7) видно, что  $\Psi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$  ( $x > 0$ ).

### 8.7. Другой метод

Наш второй метод исследования асимптотического поведения  $\sin_n x_0$  в некоторых отношениях аналогичен содержанию раздела 8.3. Мы начинаем с уравнения Шрёдера (8.3.4.), или, что в нашем случае несколько проще, с так называемого уравнения Абеля

$$(8.7.1) \quad \varphi(f(x)) - \varphi(x) = 1$$

[связь между решениями этих двух уравнений выражается формулой  $\omega(x) = a_1^{\varphi(x)}$ ].

Если  $\varphi$  известно, а  $f$  удовлетворяет уравнению (8.7.1), то легко получить итерации  $f$ . По аналогии с равенством (8.3.6) мы находим  $f_n$ , решая уравнение

$$(8.7.2) \quad \varphi(f_n(x)) = n + \varphi(x).$$

Приведем два примера.

Если  $\varphi(y) = y^{-1}$ , то, как следует из уравнения (8.7.1),  $f(x) = x/(1+x)$ , и из уравнения (8.7.2) находим

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx};$$

это выражение можно использовать и для непрерывных итераций (см. разд. 8.3).

Далее, возьмем  $\varphi(y) = c^{-1}y^{-2}$ , где  $c$  — постоянная. Это соответствует следующей системе итераций:

$$(8.7.3) \quad f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + ncx^2}}.$$

В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать уравнение (8.7.1) с другой точки зрения, считая, что функция  $f$  задана, а  $\varphi$  — неизвестная. Мы опять возьмем  $f(x) = \sin x$ , и уравнение Абеля примет вид

$$(8.7.4) \quad \psi(\sin x) - \psi(x) = 1.$$

Одно частное решение этого уравнения было получено в конце разд. 8.6, но мы не будем использовать здесь полученную там информацию.

Ограничиваясь интервалом  $0 < x \leq \pi/2$ , легко построить общее решение уравнения (8.7.4). Выберем на интервале  $1 < x \leq \pi/2$  произвольную функцию  $\psi^*$  и положим  $\psi = \psi^*$  на этом интервале. На следующем интервале  $\sin 1 < x \leq 1$  возьмем  $\psi$  таким, чтобы удовлетворялось уравнение (8.7.4). Затем определим  $\psi$  на интервале  $\sin_2 1 < x \leq \sin 1$  так, чтобы уравнение (8.7.4) опять удовлетворялось. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы определим решение  $\psi$  на всем интервале  $0 < x \leq \pi/2$ .

Ясно, что асимптотическое поведение этого решения  $\psi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  можно в какой-то степени описать, зная асимптотическое поведение  $\sin_n x$ . Мы, однако, хотим подойти к этому вопросу с другой стороны, а именно: 1) найти решение в явном виде; 2) определить его асимптотическое поведение; 3) использовать его для исследования асимптотического поведения  $\sin_n x$ .

Строго говоря, для наших целей нужно точно знать не само решение, а только его асимптотическое поведение.

Вместо того чтобы искать элементарные функции, аппроксимирующие решение уравнения (8.7.4), мы начнем с более простой задачи: мы будем искать элементарные функции  $\psi$ , для которых выражение  $\psi(\sin x) - \psi(x)$  быстро стремится к 1 при  $x \rightarrow 0$ . В качестве первой такой функции мы попы-

таемся взять  $\psi_1(x) = ax^{-b}$  ( $b > 0$ ). Это дает

$$\begin{aligned} \psi_1(\sin x) - \psi_1(x) &= a(\sin x)^{-b} - ax^{-b} = \\ &= ax^{-b} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{6}x^2 + \dots \right)^{-b} - 1 \right\} = \frac{1}{6} abx^{-b+2} + \dots \end{aligned}$$

Мы хотим, чтобы это было близко к 1, и поэтому должны взять  $b = 2$ ,  $a = 3$ . Значит,  $\psi_1(x) = 3x^{-2}$  и

$$\psi_1(\sin x) - \psi_1(x) = 1 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{63}x^4 + \frac{1}{225}x^6 + \dots$$

Ряд справа равен  $12 \sum_0^{\infty} (-4)^k (2k+1) \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} x^{2k}$ ,  
ср. (8.6.3).]

Теперь мы хотим видоизменить функцию  $\psi_1$  так, чтобы компенсировать член  $x^2/5$ . Для этого мы попытаемся подобрать такую функцию  $\chi_1(x)$ , чтобы разность  $\chi_1(\sin x) - \chi_1(x)$  была приближенно равна  $-x^2/5$ . Заметим, что теперь нам уже не обойтись одними степенными функциями. Стоит попробовать  $\ln x$ , так как, заменив разность  $\chi_1(\sin x) - \chi_1(x)$  выражением  $(\sin x - x)\chi'_1(x)$ , мы увидим, что  $\chi'_1(x)$  должна быть приближенно равна  $6/(5x)$ .

Действительно, взяв  $\chi_1(x) = \frac{6}{5} \ln x$ , получим

$$\chi_1(\sin x) - \chi_1(x) = \frac{6}{5} \ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{150}x^4 + \dots$$

Если положить  $\psi_2 = \psi_1 + \chi_1$ , то

$$\psi_2(\sin x) - \psi_2(x) = 1 + p(x),$$

$$p(x) = \left( \frac{2}{63} - \frac{1}{150} \right) x^4 + \dots = \frac{3}{\sin^2 x} - \frac{3}{x^2} - 1 + \frac{6}{5} \ln \frac{\sin x}{x}.$$

Мы можем продолжать точно так же, выбирая  $\chi_2$ , чтобы  $\chi_2(\sin x) - \chi_2(x)$  было приближенно равно  $-p(x)$  и т. д. Этим способом мы все еще строим приближенные решения вместо приближений некоторого решения. К счастью, мы в состоянии найти *точное* решение уравнения  $\chi(\sin x) - \chi(x) = -p(x)$ . Этому уравнению удовлетворяет функция

$$(8.7.5) \quad \chi_2(x) = p(x) + p(\sin x) + p(\sin_2 x) + \dots + p(\sin_3 x) + \dots$$

Нужно только показать, что ряд сходится при всех действительных значениях  $x$ . Это непосредственно следует из формул  $p(y) = O(y^4)$  ( $y \rightarrow 0$ ) и  $\sin_n(x) = O(n^{-1/2})$  ( $n \rightarrow \infty$ ), которые дают  $p(\sin_n x) = O(n^{-2})$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Формула  $\sin_n(x) = O(n^{-1/2})$  может быть доказана тем же способом, которым мы доказали формулу (8.5.3). Мы приведем, однако, короткое независимое доказательство: если  $\varepsilon > 0$ , то итерации функции  $f(x) = x(1 + \varepsilon x^2)^{-1/2}$  можно вычислить в явном виде. Согласно равенству (8.7.3) имеем  $f_n(x) = x(1 + n\varepsilon x^2)^{-1/2}$ . Далее, нетрудно показать, что  $\varepsilon$  можно выбрать так, чтобы  $\sin x < f(x) < x$  при  $0 < x < \pi$ . Тогда мы получим  $\sin_2 x < f(\sin x) < f_2(x)$ ,  $\sin_3 x < < f(\sin_2 x) < f(f_2(x)) = f_3(x)$  и т. д. Отсюда следует, что

$$(8.7.6) \quad \sin_n x < x(1 + n\varepsilon x^2)^{-1/2} \quad (0 < x < \pi, n = 1, 2, \dots),$$

и значит,  $\sin_n x = O(n^{-1/2})$ . Предположение  $0 < x < \pi$  конечно, не является существенным ограничением.

Итак, мы установили сходимость ряда (8.7.5), но нам нужно больше, а именно — некоторая оценка для  $\chi_2(x)$  при  $x \rightarrow 0$ . Мы докажем, что

$$(8.7.7) \quad \chi_2(x) = O(x^2) \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Мы уже установили, что  $p(x) = O(x^4)$  ( $x > 0$ ) и что  $p(\sin_n x) = O(n^{-2})$  ( $x$  фиксировано,  $n \rightarrow \infty$ ). Эти оценки легко конкретизировать: найдутся такие абсолютные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , что

$$\begin{aligned} |p(x)| < C_1 x^4, \quad |p(\sin_n x)| < C_2 n^{-2} \\ \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \dots\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} p(\sin_k x) < C_2 n^{-1}.$$

Кроме того, при  $0 < x \leq \pi/2$  имеем

$$\sum_{k=0}^n p(\sin_k x) < C_1 \sum_{k=0}^n (\sin_k x)^4 < C_1 \sum_{k=0}^n x^4 = C_1 n x^4.$$



Значит, при  $0 < x \leq \pi/2$  и при всех  $n$

$$|\chi_2(x)| < C_1 n x^4 + C_2 n^{-1}.$$

Выберем теперь  $n$ . Поскольку  $x \leq \pi/2$ , то  $3x^{-2} > 1$ . Пусть  $n$  — наименьшее целое число, превосходящее  $3x^{-2}$ . Тогда  $3x^{-2} < n < 6x^{-2}$  и, следовательно,

$$|\chi_2(x)| < \left(6C_1 + \frac{1}{3}C_2\right)x^2,$$

что и доказывает оценку (8.7.7). Несколько более простое доказательство можно получить, используя неравенство (8.7.6).

Поскольку функция  $\chi_2$ , определенная формулой (8.7.5), является точным решением уравнения  $\chi_2(\sin x) - \chi_2(x) = -p(x)$ , то функция

$$(8.7.8) \quad \psi(x) = 3x^{-2} + \frac{6}{5} \ln x + \chi_2(x)$$

является точным решением уравнения (8.7.4). Мы получили для  $\chi_2$  оценку (8.7.7), но нетрудно получить для нее асимптотический ряд

$$(8.7.9) \quad \chi_2(x) \approx c_2 x^2 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \dots \quad (x \rightarrow 0).$$

Старший коэффициент  $c_2$  равен  $79/1050$ . Мы сделаем первый шаг доказательства формулы (8.7.9); следующие шаги совершенно аналогичны. Имеем

$$\chi_2(\sin x) - \chi_2(x) = -p(x) = \alpha x^4 + \dots, \quad \alpha = -\frac{79}{3150}.$$

Кроме того,

$$(\sin x)^k - x^k = -\frac{k}{6} x^{k+2} + \dots \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(сейчас нам понадобится  $k = 2$ ). Положим  $\chi_2(x) = -3\alpha x^2 + \chi_3(x)$ . Тогда  $\chi_3(\sin x) - \chi_3(x) = -q(x)$ , где  $q(x)$  — степенной ряд, начинающийся с члена  $\beta x^6$ .

Из оценки (8.7.7) выводим грубую оценку  $\chi_3(x) = O(x^2)$ , из которой видно, что  $\chi_3(\sin_n x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $x$ .

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \chi_3(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{\chi_3(\sin_{n-1} x) - \chi_3(\sin_n x)\} = \\ &= q(x) + q(\sin x) + q(\sin_2 x) + \dots \end{aligned}$$

По аналогии с доказательством оценки (8.7.7) теперь можно получить, что  $\chi_3(x) = O(x^4)$ . Значит,  $\chi_2(x) = -3\alpha x^2 + O(x^4)$ .

Следует заметить, что степенные ряды для функций  $p(x)$ ,  $q(x)$ , ... имеют положительный радиус сходимости, но весьма маловероятно, чтобы это было справедливо для  $\chi_2(x)$  [или  $\chi_3(x)$ , ...].

### 8.8 Окончание исследования итераций синуса

Теперь мы займемся применением асимптотической информации о  $\psi(x)$ , полученной в разд. 8.7 [см. (8.7.8) и (8.7.9)], к задаче о  $\sin_n x$ . С этой целью обратимся к формуле

$$(8.8.1) \quad \psi(\sin_n x) = n + \psi(x),$$

являющейся прямым следствием уравнения (8.7.4). Мы будем считать  $x$  некоторым фиксированным числом, а  $n$  — большим целым числом. Поскольку  $\psi$  — данная функция, то равенство (8.8.1) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной величины  $\sin_n x$ . Поэтому вопрос об асимптотическом поведении  $\sin_n x$  в зависимости от параметра  $n$  является задачей того же типа, что и рассмотренные в гл. 2.

Для краткости обозначим неизвестную величину  $\sin_n x$  просто буквой  $u$ . Уравнение может быть записано в виде

$$(8.8.2) \quad n + \psi(x) \approx 3u^{-2} + \frac{6}{5} \ln u + \frac{79}{1050} u^2 + \dots \quad (n \rightarrow \infty).$$

В некоторых отношениях наша задача труднее задач, рассмотренных в гл. 2. Во-первых, ряд в правой части представляет функцию  $\psi(u)$  лишь асимптотически, причем  $\psi(u)$ , по-видимому, имеет сложную особенность при  $u = 0$ . Во-вторых, мы не знаем, монотонна ли  $\psi(u)$ , так что даже единственность решения уравнения  $\psi(u) = n + \psi(x)$  еще не доказана. [Здесь речь идет о том, единственным ли образом  $\sin_n x$  определяется по  $\psi(x)$ ; то, что  $\sin_n x$  определяется единственным образом по  $x$ , конечно, очевидно.]

Но, к счастью, мы не должны заботиться ни о существовании, ни о единственности решения  $u$  уравнения (8.8.2). Действительно,  $u = \sin_n x$  — это вполне определенная величина, и все, что мы хотим сделать — это получить асимптотическую информацию о функции  $u$ , используя то, что  $u$  является решением некоторого уравнения. Иными словами,

в действительности  $u$  не является неизвестной величиной, и нашу задачу с задачами гл. 2 объединяет лишь то, что асимптотическое поведение  $u$  неизвестно.

Для начала нам известно, что  $u \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и из уравнения (8.8.2) мы легко получаем, что  $u \sim \sqrt{3/n}$ . Это соотношение мы неоднократно будем использовать для оценки остаточного члена.

Чтобы избавиться от той трудности, что правая часть уравнения (8.8.2) представляет функцию  $\psi(u)$  только асимптотически, мы отбросим все члены ряда, скажем, после второго; остаток переносится при этом в левую часть. Одновременно вычтем из обеих частей по  $\frac{3}{5} \ln 3$ , чтобы упростить дальнейшие выкладки. Тогда получим

$$(8.8.3) \quad n + \psi(x) - \rho - \frac{3}{5} \ln 3 = 3u^{-2} + \frac{6}{5} \ln(3^{-1/2}u).$$

Здесь  $\rho = \psi(u) - 3u^{-2} - \frac{6}{5} \ln u$ . Из равенств (8.7.8) и (8.7.9) получаем

$$(8.8.4) \quad \rho \approx c_2 u^2 + c_4 u^4 + \dots (u \rightarrow 0), \text{ откуда } \rho = O(n^{-1}) (n \rightarrow \infty).$$

Обозначая левую часть равенства (8.8.3) через  $y$ , имеем

$$y = 3u^{-2} + \frac{6}{5} \ln(3^{-1/2}u),$$

и  $y = n + O(1)$  при фиксированном  $x$ . Полагая  $u = v \sqrt{3/y}$ , находим

$$(8.8.5) \quad v^{-2} = 1 + \frac{3}{5} \frac{\ln y}{y} - \frac{6}{5y} \ln v.$$

Из соотношений  $u \sim \sqrt{3/n}$ ,  $y \sim n$  мы видим, что  $v \rightarrow 1$ , так что  $\ln v = o(1)$ . Возводя обе части равенства (8.8.5) в степень  $-1/2$ , получаем

$$(8.8.6) \quad v = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{5} \frac{\ln y}{y} - \frac{6}{5y} \ln v \right\} + O(y^{-2} \ln^2 y)$$

и, следовательно,  $v = 1 + O(y^{-1} \ln y)$ ,  $\ln v = O(y^{-1} \ln y)$ .

Подставляя это в равенство (8.8.6), находим

$$v = 1 - \frac{3}{10} \frac{\ln y}{y} + O(y^{-2} \ln^2 y),$$

откуда  $\ln v = -\frac{3}{10}y^{-1} \ln y + O(y^{-2} \ln^2 y)$ . Теперь опять возведем равенство (8.8.5) в степень  $-1/2$  и возьмем несколько больше членов разложения, а именно воспользуемся формулой

$$(1+z)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 + O(z^3).$$

Тогда получим

$$v = 1 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{5} \frac{\ln y}{y} - \frac{6}{5y} \ln v \right\} + \frac{3}{8} \left( \frac{3}{5} \frac{\ln y}{y} \right)^2 + O(y^{-3} \ln^3 y).$$

Таким образом, с точностью до членов третьего порядка имеем

$$(8.8.7) \quad v = 1 - \frac{3}{10} \frac{\ln y}{y} + \frac{27}{200} \frac{\ln^2 y}{y^2} - \frac{9}{50} \frac{\ln y}{y^2} + O(y^{-3} \ln^3 y).$$

Нетрудно показать, что имеется и асимптотический ряд по степеням  $y^{-1}$  и  $y^{-1} \ln y$ . Действительно, положив  $v = e^{w/2}$ , мы преобразуем уравнение (8.8.5) в уравнение типа (2.4.6), так что соответствующий асимптотический ряд даже сходится.

Заменим теперь в разложении (8.8.7)  $v$  на  $u \sqrt{y/3}$ ,  $y$  на  $n + \psi(x) + \rho - \frac{3}{5} \ln 3$  и воспользуемся тем, что  $\rho = O(n^{-1})$ . Тогда мы придем к выражению функции  $\sin_n x$  через параметр  $n$  с остаточным членом  $O(n^{-3/2} \ln^2 n)$ :

$$(8.8.8) \quad u = \sin_n x = \sqrt{3/n} \left\{ 1 - \frac{3}{10} n^{-1} \ln n - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} n^{-1} \left( \psi(x) - \frac{3}{5} \ln 3 \right) + O(n^{-2} \ln^2 n) \right\} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Сравнивая это с выражением (8.6.6), мы видим, что существует простое соотношение

$$\Psi(x) = \psi(x) - \frac{3}{5} \ln 3$$

между частными решениями  $\Psi(x)$  (см. разд. 8.6) и  $\psi(x)$  (см. разд. 8.7) уравнения Абеля (8.7.3). В частности, это показывает, что  $\psi(x)$  убывает на интервале  $0 < x < \pi/2$ .

Уточнение оценки (8.8.8) можно получить следующим образом. С помощью равенства (8.8.8) мы можем улучшить нашу оценку  $\rho = O(n^{-1})$ . Формула (8.8.4) дает нам

$$\rho = 3c_2 n^{-1} + O(n^{-2} \ln n).$$

Подставляя это в выражение (8.8.7) [напомним, что  $y = n + \Psi(x) - \rho$ ], мы получаем следующее приближение к  $\sin_n x$ , уже полученное в разд. 8.6 [см. (8.6.5)]. Ясно, что этот процесс можно бесконечно продолжать, и мы во второй раз получаем доказательство существования асимптотического ряда.

Выше было отмечено, что асимптотический ряд для  $v$ , начало которого представляет собой формула (8.8.7), сходится в обычном смысле. Однако нет причин надеяться, что это остается верным и для ряда, асимптотически выражающего  $v$  через  $n$ . Для перехода от  $y$  к  $n$  мы использовали ряд (8.8.4), а этот ряд нельзя считать сходящимся в обычном смысле.

### 8.9. Об одном неравенстве, содержащем бесконечные ряды

В разд. 8.10 мы будем решать одну итерационную задачу, принадлежащую общему классу задач, описанному в разд. 8.1. Наиболее интересной особенностью задачи разд. 8.10 является неожиданное нарушение непрерывности (по параметру  $x$ ) в асимптотическом поведении.

Поскольку эта задача выглядит весьма искусственной, мы покажем в настоящем разделе, как она естественным образом возникает из одной задачи о рядах.

Если  $\lambda > 1$ ,  $a_n \geq 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то справедливо неравенство

$$\sum_1^{\infty} a_n \leq \lambda^{1/\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/\lambda} (a_n^\lambda + a_{n+1}^\lambda + \dots)^{1/\lambda},$$

установленное Копсоном<sup>1)</sup>. Постоянная в правой части, а именно  $\lambda^{1/\lambda}$ , не является наилучшей возможной. Попытаемся решить вопрос о наилучшей возможной постоянной для частного случая  $\lambda = 2$ . На самом деле мы покажем, что существует такая постоянная  $\gamma$  ( $1 < \gamma < \sqrt{2}$ ), что

$$(8.9.1) \quad \sum_1^{\infty} a_n \leq \gamma \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} (a_n^2 + a_{n+1}^2 + \dots)^{1/2}$$

для всех последовательностей с неотрицательными  $a_n$  (мы предполагаем, что ряд справа сходится) и что существует

<sup>1)</sup> См. Харди, Литлвуд, Поля, Неравенства, М., 1948, теорема 345.

такой сходящийся ряд  $\sum a_n$  (с положительными членами), для которого имеет место знак равенства. Метод доказательства опирается, конечно, на неравенство Коши  $(\sum u_n v_n)^2 \leq \leq \sum u_n^2 \sum v_n^2$ . Вводя положительные числа  $p_{kn}$ , получаем

$$(8.9.2) \quad \sum_{k=n}^{\infty} a_k p_{kn} \leq \left( \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=n}^{\infty} p_{kn}^2 \right)^{1/2},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=1}^k p_{kn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k p_{kn} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=n}^{\infty} p_{kn}^2 \right)^{1/2}.$$

Чтобы получить неравенство требуемого вида, мы попытаемся выбрать  $p_{kn}$  так, чтобы

$$\sum_{n=1}^k p_{kn} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \sum_{k=n}^{\infty} p_{kn}^2 = x^2 n^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $x$  — некоторое положительное число, не зависящее от  $n$ . Если числа  $p_{kn}$  выбраны таким образом, то неравенство (8.9.1) справедливо, если написать  $x$  вместо  $\gamma$ , и следующая наша задача — сделать  $x$  как можно меньше.

Мы хотели бы в конечном счете получить неравенство, в котором хотя бы для одного ряда  $\sum a_k$  имел бы место знак равенства. Поэтому хорошо было бы выбрать  $p_{kn}$  так, чтобы можно было, скажем, при  $a_k = \alpha_k$  получить в неравенстве (8.9.2) знак равенства для всех  $n$  одновременно. Это приводит нас к ограничению  $p_{kn} = \alpha_k \beta_n$ , где  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\beta_n\}$  — положительные последовательности. Они должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_1^n \beta_k = \alpha_n^{-1}, \quad \sum_n^{\infty} \alpha_k^2 = x^2 n^{-1} \beta_n^{-2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При каждом  $n$  второе уравнение содержит бесконечно много переменных. Поэтому мы положим  $\sum_n^{\infty} \alpha_k^2 = \delta_n$  и, исключив  $\beta_k$ , придем к уравнениям

$$x \sum_1^n k^{-1/2} \delta_k^{-1/2} = (\delta_n - \delta_{n+1})^{-1/2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

с дополнительными условиями

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \dots > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

Вычитая соседние уравнения, получаем

$$xn^{-1/2} = \left(1 - \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right)^{-1/2} - \left(\frac{\delta_{n-1}}{\delta_n} - 1\right)^{-1/2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

и  $x = (1 - \delta_2 \delta_1^{-1})^{-1/2}$ . Возьмем  $\delta_1 = 1$  и обозначим  $\delta_2 = v_1$ ,  $\delta_3 = v_1 v_2$ ,  $\delta_4 = v_1 v_2 v_3$ , ... Величины  $v_k$  лежат между нулем и единицей и удовлетворяют соотношениям

$$xn^{-1/2} = (1 - v_n)^{-1/2} - (v_{n-1}^{-1} - 1)^{-1/2} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

где  $x = (1 - v_1)^{-1/2}$ . Обозначив, наконец,  $1 - v_n = u_n^{-2}$ , мы получим следующую систему уравнений:

$$(8.9.3) \quad \begin{cases} u_1 = x, \\ u_2 = 2^{-1/2}x + (u_1^2 - 1)^{1/2}, \\ u_3 = 3^{-1/2}x + (u_2^2 - 1)^{1/2}, \\ \dots \end{cases}$$

Предположим теперь, что  $x, u_1, u_2, \dots$  — положительные числа, удовлетворяющие системе (8.9.3). Тогда мы возьмем

$$p_{kn} = \alpha_k \beta_n, \quad \alpha_k = u_k^{-1} (v_1 v_2 \dots v_{k-1})^{1/2},$$

$$\beta_k = x k^{-1/2} (v_1 v_2 \dots v_{k-1})^{-1/2}, \quad \delta_k = v_1 \dots v_{k-1},$$

где  $v_i = 1 - u_i^2$ , а  $v_1 v_2 \dots v_{k-1} = 1$  при  $k = 1$ . Действительно, можно доказать, что  $\delta_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  (см. разд. 8.10), и отсюда следует справедливость неравенства (8.9.1) (с  $x$  вместо  $\gamma$ ). Чтобы найти ряд  $\sum a_n$ , для которого имеет место знак равенства, достаточно вспомнить, что при  $a_n = \alpha_n$  неравенство (8.9.2) обращается в равенство. Значит, задача лишь в том, чтобы выяснить, сходятся ли ряды

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \alpha_k &= \sum_1^\infty u_k^{-1} (v_1 \dots v_{k-1})^{1/2} \quad \text{и} \quad \sum_1^\infty k^{-1/2} \delta_k = \\ &= \sum_1^\infty k^{-1/2} (v_1 \dots v_{k-1})^{1/2}. \end{aligned}$$

В разд. 8.10 мы увидим, что они сходятся, когда  $x$  равен своему минимальному значению  $\gamma$  (существование этого мини-

мального значения там тоже доказано). При  $x > \gamma$  это, конечно, не может случиться. Действительно, если неравенство (8.9.1) справедливо с  $\gamma$ , то оно справедливо и с  $x > \gamma$ , но при этом уже не может быть равенства.

### 8.10. Итерационная задача

Мы займемся исследованием решений системы (8.9.3). Под „решением“ понимается последовательность положительных чисел  $u_1, u_2, \dots$ , удовлетворяющих системе (8.9.3) при некотором данном значении  $x$ . При данном  $x$  существует не более одного решения, так как  $u_n$  могут быть последовательно вычислены. Мы покажем, что:

1) существует такое число  $\gamma$  ( $1 < \gamma \leq \sqrt{2}$ ), что решение существует в том и только в том случае, когда  $x \geq \gamma$ ;

2) при любом  $x \geq \gamma$  последовательность  $\{n^{-1/2}u_n\}$  сходится, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2}u_n = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{при } x > \gamma \quad (x \text{ фиксировано}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2}u_n = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1} \quad \text{при } x = \gamma.$$

Доказательство свойства 1. Система (8.9.3) имеет решение при  $x \geq \sqrt{2}$ . Действительно, по индукции можно доказать, что  $u_1 \geq \sqrt{2}$ ,  $u_2 \geq \sqrt{3}$ ,  $u_3 \geq \sqrt{4}$ ,  $\dots$ . Это видно из неравенства

$$\sqrt{n+1} < \sqrt{(\sqrt{n})^2 - 1} + \sqrt{2/n} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

которое следует из того, что

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{2} \int_{n-1}^{n+1} t^{-1/2} dt < (n-1)^{-1/2} \leq \sqrt{2/n}.$$

При  $0 < x < \sqrt{2}$  система (8.9.3) не всегда имеет решение. При данном  $x$  мы можем последовательно определить  $u_1, u_2, \dots$ . Однако может случиться, что при некотором  $k$  мы получим  $u_k < 1$ , а тогда или  $u_k$ , или  $u_{k+1}$  не положительны. Возьмем  $u_1 = u_1(x) = x$ , если  $x > 0$ . Обе функции  $u_1$  и  $u_2$  положительны тогда и только тогда, когда  $x \geq 1$ . Функция  $u_2(x)$  непрерывна и возрастает при  $x \geq 1$  и  $u_2(1) =$



$= 2^{-1/2} < 1$ . С другой стороны,  $u_2(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ , так как  $u_2(x) \geq 2^{-1/2}x$ . Значит, существует такое число  $c_2 > 1$ , что  $u_2(c_2) = 1$ . Следовательно,  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  положительны тогда и только тогда, когда  $x \geq c_2$ . Далее,  $u_3(x)$  непрерывна и возрастает при  $x \geq c_2$ , а  $u_3(c_2) = 3^{-1/2}c_2 < 1$  (напомним, что  $u_n \geq \sqrt{n+1}$  при  $x \geq \sqrt{2}$ , так что  $c_2 < \sqrt{2}$ ). Таким образом, мы строим последовательность  $c_2, c_3, c_4, \dots$ , такую, что

$$1 < c_2 < c_3 < \dots < \sqrt{2}$$

и что наша бесконечная система имеет решение в том и только в том случае, когда  $x \geq c_k$  для всех  $k$ , т. е. когда  $x \geq \gamma$ , где  $\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ . Кроме того, мы видим, что  $1 < \gamma \leq \sqrt{2}$ .

Доказательство свойства 2. При  $x \geq \gamma$  мы получаем из системы (8.9.3), что

$$u_n(x) \leq n^{-1/2}x + u_{n-1}(x) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

и, значит,  $u_n(x) \leq x(1 + 2^{-1/2} + \dots + n^{-1/2})$ . Отсюда следует, что

$$(8.10.1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2}u_n \leq 2x \quad (x \geq \gamma).$$

С другой стороны, мы можем доказать, что

$$(8.10.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/2}u_n \geq (2x)^{-1} \quad (x \geq \gamma).$$

Предположим, что это неверно для какого-либо  $x \geq \gamma$ . Тогда мы можем найти такое число  $c$  ( $0 < c < (2x)^{-1}$ ), что  $u_n(x) < c\sqrt{n}$  для бесконечного множества значений  $n$ . Значит, найдется такое число  $m$ , что при  $n = m$

$$(8.10.3) \quad u_n < c\sqrt{n}, \quad n > 2x^2(1 - 2cx)^{-1}.$$

Теперь мы можем показать по индукции, что неравенство (8.10.3) справедливо при всех  $n \geq m$ . Переход от  $n$  к  $n+1$  таков:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 &= u_n^2 - 1 + (n+1)^{-1}x^2 + 2x(n+1)^{-1/2}(u_n^2 - 1)^{1/2} < \\ < u_n^2 - 1 + (n+1)^{-1}x^2 + 2xc < u_n^2 - \frac{1}{2}(1 - 2xc) < c\sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Из тех же выкладок видно, что  $u_{n+1}^2 - u_n^2$  при  $n \geq m$  меньше отрицательной постоянной  $\frac{1}{2}(2cx - 1)$ . Отсюда следует, что  $u_n^2 \rightarrow -\infty$ , и поскольку это противоречит условию  $u_n \geq 0$ , то неравенство (8.10.2) доказано.

Для удобства положим  $u_n = s_n \sqrt{n}$ . Тогда при фиксированном  $x$  ( $x \geq \gamma$ ) мы имеем  $s_n = O(1)$ ,  $s_n^{-1} = O(1)$ . Соотношение между  $s_n$  и  $s_{n+1}$  можно записать в виде

$$s_{n+1} = (n+1)^{-1}x + s_n \sqrt{1 - (n+1)^{-1}(1 + s_n^{-2})} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Поскольку  $s_n$  и  $s_n^{-1}$  ограничены, мы видим, что

$$(8.10.4) \quad s_{n+1} - s_n = n^{-1} \left( x - \frac{1}{2} s_n - \frac{1}{2} s_n^{-1} \right) + O(n^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Для нас важен знак величины  $x - \frac{1}{2} s_n - \frac{1}{2} s_n^{-1}$ . Обозначив через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  корни уравнения  $\lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ , получим:

$$\lambda_1 = x - \sqrt{x^2 - 1}, \quad \lambda_2 = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

откуда

$$(2x)^{-1} < \lambda_1 < 1 < \lambda_2 < 2x.$$

Итак, мы имеем

$$x - \frac{1}{2} s_n - \frac{1}{2} s_n^{-1} = -\frac{1}{2} s_n^{-1} (s_n - \lambda_1)(s_n - \lambda_2).$$

Формула (8.10.4) означает, грубо говоря, что если  $s_n$  лежит справа от  $\lambda_1$ , то оно будет двигаться (при возрастании  $n$ ) в сторону  $\lambda_2$ , а если  $s_n$  лежит слева от  $\lambda_1$ , то оно будет двигаться дальше влево. Поэтому можно надеяться, что или  $s_n \rightarrow \lambda_1$ , или  $s_n \rightarrow \lambda_2$ . Действительно, мы докажем, что предположение

$$(8.10.5) \quad \overline{\lim} s_n > \lambda_1$$

ведет к  $s_n \rightarrow \lambda_2$ , в то время как предположение

$$(8.10.6) \quad \overline{\lim} s_n \leq \lambda_1$$

ведет к  $s_n \rightarrow \lambda_1$ . Какая из этих двух возможностей осуществляется в действительности, зависит от  $x$ .

Пусть выполнено условие (8.10.5). Запишем формулу (8.10.4) в виде

$$(8.10.7) \quad |(s_{n+1} - \lambda_2) - (s_n - \lambda_2)(1 - n^{-1}\sigma_n)| < An^{-2},$$

где  $A$  — постоянная и

$$\sigma_n = \frac{1}{2} s_n^{-1} (s_n - \lambda_1).$$

Из условия (8.10.5) следует, что найдется такое число  $\beta$  ( $\lambda_1 < \beta < \lambda_2$ ), что для бесконечного множества значений  $n$  имеем  $s_n > \beta$ . Мы покажем, что  $s_n > \beta$  для всех достаточно больших значений  $n$ . С этой целью мы докажем существование такого  $n_0$ , что выполнение условий  $n > n_0$ ,  $s_n > \beta$  влечет за собой  $s_{n+1} > \beta$ .

Если  $s_n \geq \lambda_2$ , то из неравенства (8.10.7) мы видим, что  $s_{n+1} \geq \lambda_2 - An^{-2}$ , а если  $\beta < s_n < \lambda_2$ , то  $\sigma_n > 0$  и

$$s_{n+1} > \beta + (\lambda_2 - \beta)n^{-1}\sigma_n - An^{-2}.$$

Поскольку  $s_n^{-1} = O(1)$ , то  $s_n^{-1} \leq B$ , где  $B$  — постоянная.

Поэтому  $\sigma_n > \frac{1}{2} B^{-1}(\beta - \lambda_1)$ , откуда

$$s_{n+1} > \beta + \frac{1}{2} (\lambda_2 - \beta)(\beta - \lambda_1) B^{-1} n^{-1} - An^{-2}.$$

Чтобы удовлетворить всем требованиям, возьмем  $n_0$  так, чтобы

$$An_0^{-2} < \lambda_2 - \beta \quad \text{и} \quad An_0^{-1} < \frac{1}{2} (\lambda_2 - \beta)(\beta - \lambda_1) B^{-1}.$$

Тогда из неравенств  $n > n_0$ ,  $s_n > \beta$  следует, что  $s_{n+1} > \beta$ . Значит,  $s_{n+1} > \beta$ ,  $s_{n+2} > \beta$ , ...

Таким образом, из условия (8.10.5) мы вывели, что  $s_n > \beta$  для всех достаточно больших  $n$  (и для некоторого  $\beta$ ,  $\lambda_1 < \beta < \lambda_2$ ), а отсюда получаем, что найдется такая постоянная  $c > 0$ , что  $\sigma_n > c$  при всех  $n$ . Полагая  $s_n - \lambda_2 = \omega_n$ , из неравенства (8.10.7) получаем, что

$$(8.10.8) \quad |\omega_{n+1}| \leq (1 - cn^{-1})|\omega_n| + An^{-2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Мы можем, конечно, считать  $0 < c < 1$ , откуда  $0 < 1 - cn^{-1} < 1$ . Повторно применяя неравенство (8.10.8), получаем:

$$\begin{aligned} |\omega_{n+2}| &\leq (1 - c(n+1)^{-1})(1 - cn^{-1})|\omega_n| + An^{-2} + A(n+1)^{-2}, \\ |\omega_{n+3}| &\leq (1 - c(n+2)^{-1})(1 - c(n+1)^{-1})(1 - cn^{-1})|\omega_n| + \\ &\quad + An^{-2} + A(n+1)^{-2} + A(n+2)^{-2} \end{aligned}$$

и т. д. Так как бесконечное произведение  $\prod_n (1 - ck)^{-1}$  сходится к нулю, то мы получаем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |\omega_{n+p}| \leq A \sum_{k=n}^{\infty} k^{-2} < A(n-1)^{-1}.$$

Устремляя  $n$  к бесконечности, мы видим, что левая часть равна нулю. Это означает, что  $\omega_n \rightarrow 0$ , так что из предположения (8.10.5) мы вывели, что  $s_n \rightarrow \lambda_2$ .

Теперь предположим, что выполнено условие (8.10.6) и что  $s_n$  не стремится к  $\lambda_1$ . Тогда мы можем найти такое число  $\mu$  ( $0 < \mu < \lambda_1$ ), что  $s_n < \mu$  для бесконечного множества значений  $n$ . Как и в предыдущем случае, только поменяв ролями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , мы можем показать, что  $s_n < \mu$  для всех достаточно больших значений  $n$ . Полагая  $\lambda_1 - s_n = z_n$ , мы приходим к неравенству вида

$$z_{n+1} \geq (1 + cn^{-1})z_n - An^{-2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

с некоторой положительной постоянной  $c$ . Вместо того чтобы действовать дальше методом, примененным к неравенству (8.10.8), мы покажем следующий несложный трюк. Мы устанавливаем, что

$$z_{n+1} - c^{-1}A(n+1)^{-1} \geq (1 + cn^{-1})(z_n - c^{-1}An^{-1}),$$

откуда  $z_n - c^{-1}An^{-1} \rightarrow \infty$ . Это противоречит тому, что  $z_n = \lambda_1 - s_n < \lambda_1$ .

Итак, мы доказали, что  $s_n = n^{-1/2}u_n = n^{-1/2}u_n(x)$  при  $x \geq \gamma$  и  $n \rightarrow \infty$  сходится или к  $x - \sqrt{x^2 - 1}$ , или к  $x + \sqrt{x^2 - 1}$ . Легко видеть, что при  $x > \gamma$  предел равен  $x + \sqrt{x^2 - 1}$ . Действительно, каждая функция  $u_n(x)$  является возрастающей функцией  $x$ , значит, и предел  $\lim n^{-1/2}u_n(x)$  — неубывающая функция  $x$ . Если бы предел был равен  $x_1 - \sqrt{x_1^2 - 1}$  в точке

$x_1 > \gamma$ , то при  $x = \gamma$  он должен был бы быть меньше, чем  $x_1 - \sqrt{x_1^2 - 1}$ . Но это невозможно, так как и  $\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}$ , и  $\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$  больше этой последней величины.

Остается последняя трудность — определить значение предела при  $x = \gamma$ . Для этого придется, конечно, использовать минимальное свойство  $\gamma$ . Мы покажем, что если бы предел при  $x = \gamma$  был равен  $\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$ , то нашлось бы число  $\gamma' < \gamma$ , для которого система (8.9.3) все еще имела бы положительное решение при  $x = \gamma'$ .

Итак, предположим, что  $u_n(\gamma) \sim \sqrt{n}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$ . Это означает, что  $u_n(\gamma) > \sqrt{n}$  для всех достаточно больших значений  $n$ . Положим  $\gamma'' = \frac{1}{2}(1 + \gamma)$  (ясно, что  $1 < \gamma'' < \gamma$ ) и возьмем  $N$  настолько большим, чтобы

$$u_N(\gamma) > \sqrt{N}, \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} < \gamma'' n^{-1/2} \quad (n \geq N)$$

(заметим, что  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim n^{-1/2}$ ). Функции  $u_1(x)$ ,  $u_2(x), \dots, u_N(x)$  непрерывны при  $x \geq c_{N-1}$  (см. стр. 210). Значит, мы можем найти такое  $\gamma'$ , чтобы

$$c_{N-1} < \gamma' < \gamma, \quad \gamma'' < \gamma' < \gamma, \quad u_N(\gamma') > \sqrt{N}.$$

Тогда мы сможем доказать по индукции, что  $u_n(\gamma') > \sqrt{n}$  ( $n = N, N+1, \dots$ ). Переход от  $n$  к  $n+1$  совершается при помощи формулы

$$u_{n+1}(\gamma') > \sqrt{n-1} + n^{-1/2}\gamma' > \sqrt{n-1} + n^{-1/2}\gamma'' > \sqrt{n+1}.$$

Таким образом, мы доказали, что система (8.9.3) все еще имеет решение при  $x = \gamma'$ , а это противоречит минимальному свойству  $\gamma$ . Значит, случай  $\lim n^{-1/2}u_n(\gamma) = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$  исключается и, следовательно,  $n^{-1/2}u_n(\gamma) \rightarrow \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1}$ .

Это завершает доказательство свойства 2.

В заключение вернемся к вопросам, оставшимся нерешенными в конце разд. 8.9. В первую очередь мы должны показать, что  $v_1 \dots v_{k-1} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $x \geq \gamma$ .

Мы имеем  $v_n = 1 - u_n^{-2}$ ,  $u_n^{-2} > cn^{-1}$  [ $c$  не зависит от  $n$ , см. (8.10.2)]. Поэтому бесконечное произведение  $\prod (1 - u_n^{-2})$  расходится к нулю, откуда следует, что  $v_1 \dots v_{k-1} \rightarrow 0$ .

Во-вторых, мы должны доказать сходимость рядов

$$\sum_1^{\infty} u_k^{-1} (v_1 \dots v_{k-1})^{1/2}, \quad \sum_1^{\infty} k^{-1/2} (v_1 \dots v_{k-1})^{1/2}$$

при  $x = \gamma$ . Поскольку  $u_n^{-1} = O(n^{-1/2})$ , достаточно рассмотреть последний ряд. Имеем  $u_n^{-2} \sim \rho n^{-1}$ , где  $\rho = (\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1})^{-2}$ . Так как  $\rho > 1$ , то можно найти такую постоянную  $\eta > 1$ , что  $u_n^{-2} > \eta n^{-1}$  для достаточно больших  $n$ .

Отсюда следует, что

$$v_1 \dots v_{k-1} = O\left(\prod_1^{k-1} (1 - \eta n^{-1})\right) = O(k^{-\eta}).$$

Поскольку  $\frac{1}{2}(1 + \eta) > 1$ , то ряд  $\sum k^{-1/2} (v_1 \dots v_{k-1})^{1/2}$  сходится.

При помощи системы (8.9.3) прежде было доказано<sup>1)</sup>, что наилучшая постоянная  $\gamma$ , входящая в неравенство Копсона, заключена между 1,08 и 1,13334.

Более точные численные границы можно получить, подробнее изучив асимптотическое поведение  $u_n(\gamma)$ . Можно показать, что при  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$n^{-1/2} u_n(\gamma) = \lambda_1 + \frac{1}{2} \gamma n^{-1} - \frac{1}{8} \gamma^2 (\lambda_1 + \gamma)^{-1} n^{-2} + \theta_n n^{-4},$$

где  $0 < \theta_n < 2^{-4} (\lambda_1 + \gamma)^{-2} \gamma^3$ . В этом можно убедиться, показав, что: 1) если некоторое  $\theta_n$  лежит вне этого интервала, то и все следующие  $\theta_n$  тоже лежат вне него, и 2)  $\theta_2$  стремится к пределу

$$2^{-7} \gamma^3 (5\gamma + 8\lambda_1) (\gamma + \lambda_1)^{-2} (\gamma + 3\lambda_1)^{-1},$$

лежащему внутри этого интервала. Эта формула была взята за основу для численных расчетов, выполненных на электронной вычислительной машине ARMAC в Математическом Центре (Амстердам). Используя значения  $n$  до  $n = 50$ , получили

$$4752363148 < 2^{32} \gamma < 4752363155.$$

Значит,  $\gamma = 1,1064957714$  с ошибкой, не превышающей 9 единиц последнего десятичного знака.

<sup>1)</sup> См. *Wiskundige Opgaven*, 20 (3) (1957), решение задачи № 83 (задача поставлена Боасом, решена де Брёйном).

За эту вычислительную работу на машине АРМАС автор выражает свою признательность профессору Вийнгаардену и его сотрудникам.

### 8.11. Упражнения

1. Пусть  $k > 1$  — целое число, и пусть действительная функция  $f(x)$  разлагается на некотором интервале  $0 < x < \delta$  в сходящийся степенной ряд

$$f(x) = x + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots,$$

причем  $a_k < 0$ . Показать, что найдется такой интервал  $0 < x < \delta_1$ , что для любого  $x$  из этого интервала  $n$ -я итерация  $f_n(x)$  асимптотически равна  $((1 - k) a_k n)^{-1/(k-1)}$ . Далее, показать, что в некотором интервале  $0 < x < \delta_2$  существует решение  $\psi$  уравнения  $\psi(f(x)) - \psi(x) = 1$ , для которого

$$\psi(x) \approx c_{1-k} x^{1-k} + \dots + c_{-1} x^{-1} + c_0 \ln x + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

( $x \rightarrow 0, x > 0$ ).

Коэффициенты  $c_{1-k}, \dots, c_0$  таковы, что

$$\psi'(x) - \frac{1}{2} (1 + f'(x)) (f(x) - x)^{-1} = O(1) \quad (x \rightarrow 0, x > 0).$$

Более точные результаты относительно  $f_n(x)$  можно получить из соотношения

$$\psi(f_n(x)) = n + \psi(x).$$

2. Пусть  $P(x, y)$  — двойной степенной ряд с действительными коэффициентами

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j,$$

сходящийся при достаточно малых  $|x|$  и  $|y|$ , и пусть  $c_{10} = 0$ ,  $c_{11} > 0$ . Пусть, далее, последовательность  $\{w_n\}$  удовлетворяет условиям  $w_n = o(1)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) и  $w_{n+1} - w_n = P(n^{-1}, w_n)$  для всех достаточно больших значений  $n$ . Показать, что имеет место асимптотическое разложение

$$w_n \approx a_1 n^{-1} + a_2 n^{-2} + \dots \quad (n \rightarrow \infty).$$

3. Пусть  $x$  — наименьшее число, для которого система (8.9.3) имеет положительное решение  $u_1, u_2, u_3, \dots$ . Показать, что имеется асимптотическое разложение

$$u_n \approx \sqrt[n]{n} (c_0 + c_1 n^{-1} + c_2 n^{-2} + \dots) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Показать также, что  $c_3 = c_5 = c_7 = \dots = 0$ .

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ****9.1. Введение**

Многие задачи как теоретической, так и прикладной математики имеют дело с поведением решений дифференциального уравнения вблизи особой точки. Очевидно, что такие задачи носят асимптотический характер, так как при помощи преобразования независимой переменной всегда можно перенести особую точку в бесконечность, после чего вопрос приобретает следующий вид: пусть  $F(t, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$  — данное дифференциальное уравнение для неизвестной функции  $y = y(t)$ . Как ведут себя решения этого уравнения при  $t \rightarrow \infty$ ?

Такие вопросы возникают, например, в задачах об устойчивости, о линейных и нелинейных колебаниях, в квантовой механике. Применения другого рода состоят в том, что можно изучать асимптотическое поведение данной функции, скажем, функции Бесселя, с помощью дифференциального уравнения, которому она удовлетворяет, вместо того, чтобы пользоваться явными выражениями для этой функции.

В этой области имеется большое разнообразие задач и обширная литература<sup>1)</sup>. Несомненно, сколько-нибудь подробный обзор этих задач вышел бы за рамки этой книги. Тем не менее в нескольких рассмотренных здесь задачах выступают такие идеи, которые можно использовать во многих других случаях.

Задачи о дифференциальных уравнениях очень гибки из-за возможности делать замены зависимых и независимых переменных. После сделанной замены задача часто выглядит совершенно иначе.

Другая характерная особенность асимптотических задач о дифференциальных уравнениях состоит в том, что обычно бывает легко догадаться, какую асимптотическую формулу

---

<sup>1)</sup> За ссылками на литературу читатель может обратиться к книге Erdélyi A., *Asymptotic Expansions*, Dover Publ., 1956.



и даже какой асимптотический ряд мы должны получить, но доказать, что это действительно асимптотическая формула, бывает довольно трудно.

Если мы должны доказать определенную асимптотическую формулу для определенного решения некоторого дифференциального уравнения, то естественно попытаться заключить это решение между двумя функциями, асимптотическое поведение которых нам известно. Во многих случаях такие неравенства могут быть получены с помощью несложных теорем следующего типа:

*Пусть  $y(t)$  — решение дифференциального уравнения первого порядка  $y' = F(t, y)$  ( $a \leq t \leq b$ ), а  $\varphi(t)$  — функция, удовлетворяющая условиям*

$$\varphi'(t) < F(t, \varphi(t)) \quad (a \leq t \leq b), \quad \varphi(a) \leq y(a).$$

*Тогда  $\varphi(t) < y(t)$  ( $a < t \leq b$ ). [Таким образом, чтобы получить неравенство для  $y(t)$ , нет необходимости точно решать дифференциальное уравнение, так как гораздо легче находить функции  $\varphi(t)$ , удовлетворяющие условию  $\varphi' < F(t, \varphi)$ .]*

*Доказательство.* Покажем сначала, что найдется такой интервал  $(a, a + \epsilon)$ , в котором  $\varphi(t) < y(t)$ . При  $\varphi(a) < y(a)$  это очевидно. Если  $\varphi(a) = y(a)$ , то

$$\varphi'(a) < F(t, \varphi(a)) = F(t, y(a)) = y'(a),$$

и мы опять легко убеждаемся в существовании такого интервала. Допустим теперь, что неравенство  $\varphi(t) < y(t)$  нельзя продолжить на весь интервал  $a < t \leq b$ . Тогда найдется такое число  $c$  ( $a < c \leq b$ ), что  $\varphi(c) = y(c)$  и  $\varphi(t) < y(t)$  ( $a < t < c$ ). Отсюда следует, что  $\varphi'(c) \geq y'(c)$ , но это противоречит тому, что

$$\varphi'(c) < F(c, \varphi(c)) = F(c, y(c)) = y'(c).$$

Вопрос о том, можно ли в приведенной теореме заменить знак  $<$  знаком  $\leq$ , не очень важен для нашей задачи. Этот вопрос зависит от более тонких соображений, связанных с единственностью решения. Действительно, если бы  $\varphi$  и  $y$  были различными решениями этого дифференциального уравнения, принимающими одно и то же значение при  $t = a$ , то неравенство  $\varphi(t) \leq F(t, \varphi(t))$  все еще было бы справедливо, в то время как неравенство  $\varphi(t) \leq y(t)$  ( $a < t \leq b$ ) уже не обязательно.

## 9.2. Уравнение Риккати

Пусть  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  — действительные функции, определенные и непрерывные при  $t > 0$ , и  $k \geq 0$  — целое число. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(9.2.1) \quad t^{-k} \rho'(t) = \alpha(t) + \beta(t) \rho(t) + \gamma(t) \rho^2(t)$$

относительно неизвестной функции  $\rho(t)$ . (Мы выбрали греческие буквы для функций  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$ , чтобы можно было использовать соответствующие латинские буквы для обозначения коэффициентов их асимптотических разложений.)

Все наши результаты относительно уравнения (9.2.1) можно было бы распространить на уравнение вида

$$t^{-k} \rho'(t) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \rho(t) + \dots + \alpha_m(t) \rho^m(t),$$

но поскольку случай  $m > 2$  почти никогда не встречается в практических задачах, мы ограничимся уравнением (9.2.1).

Что касается существования решения, то установить его лишь немногим сложнее, чем в случае линейных уравнений. Так как уравнение можно записать в виде  $\rho'(t) = F(t, \rho)$ , где  $F$  — непрерывная при  $t > 0$  функция двух переменных с непрерывной производной  $\partial F / \partial \rho$ , то имеет место следующая теорема.

*Пусть нам даны положительное число  $t_0$  и действительное число  $\rho_0$ . По этим числам единственным образом определяется интервал  $J: t_0 \leq t < t_1$  ( $t_1$  может быть бесконечным). В этом интервале существует решение  $\rho(t)$  рассматриваемого дифференциального уравнения, причем  $\rho(t_0) = \rho_0$ . Если  $J$  — конечный интервал, то при  $t$ , стремящемся к  $t_1$  слева,  $\rho(t)$  стремится к  $\infty$  или к  $-\infty$ .*

*Решение  $\rho(t)$  определяется единственным образом: если  $J^*$  — любой другой интервал с левым концом  $t_0$ , а  $\rho^*$  — решение нашего уравнения в интервале  $J^*$ , причем  $\rho^*(t_0) = \rho_0$ , то  $J^*$  содержится в  $J$  и  $\rho^* = \rho$  в  $J^*$ .*

**Доказательство.** В этом доказательстве под словом „решение“ понимается решение дифференциального уравнения  $\rho'(t) = F(t, \rho)$ , удовлетворяющее начальному условию  $\rho(t_0) = \rho_0$ .

Из общей теоремы о существовании и единственности<sup>1)</sup> следует, что имеется максимальный интервал  $J$  (с левым концом  $t_0$ ) существования решения  $\rho(t)$ . Действительно, во-первых, общая теорема утверждает, что имеется некоторое число  $b > t_0$ , такое, что решение существует на интервале  $t_0 \leq t < b$ . Во-вторых, если  $b_1 < b_2$  и на каждом из интервалов  $t_0 \leq t < b_1$ ,  $t_0 \leq t < b_2$  существует некоторое решение, то эти решения совпадают на общем интервале  $t_0 \leq t < b_1$ . Если бы это было не так, то мы пришли бы к противоречию с теоремой единственности в точке  $c$  ( $c$  — наибольшее из чисел  $b$ , для которых эти решения совпадают на интервале  $t_0 \leq t \leq b$ ).

Далее, множество значений  $b$ , для которых решение существует на интервале  $t_0 \leq t < b$ , может быть неограниченным или ограниченным. В первом случае мы обозначим через  $J$  бесконечный интервал  $t_0 \leq t < \infty$ . Во втором случае мы обозначим через  $t_1$  верхнюю грань всех подходящих значений  $b$  и через  $J$  — интервал  $t_0 \leq t < t_1$ . Из проведенных рассуждений ясно, что в обоих случаях на интервале  $J$  имеется единственное решение, причем в случае конечного  $J$  можно утверждать, что на замкнутом интервале  $t_0 \leq t \leq t_1$  решения не существует.

Остается показать, что в случае конечного  $J$  решение  $\rho(t)$  стремится к  $+\infty$  или к  $-\infty$  при  $t$ , стремящемся к  $t_1$  слева.

Если решение  $\rho(t)$  ограничено при  $t_0 \leq t < t_1$ , то функция  $F(t, \rho(t))$  тоже ограничена, и поэтому ограничена про-

изводная  $\rho'(t)$ . Значит, интеграл  $\int_{t_2}^{t_1} \rho'(t) dt$  сходится и  $\rho(t)$

стремится к некоторому пределу  $\rho_1$  при  $t$ , стремящемся к  $t_1$  слева. Поскольку  $\rho'(t) = F(t, \rho(t))$ , функция  $\rho'(t)$  стремится к  $F(t_1, \rho(t_1))$ , и, следовательно, решение существует на замкнутом интервале  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Ввиду этого противоречия  $\rho(t)$  неограничена на  $J$ .

Предположим теперь, что  $\rho(t)$  неограничена, но не стремится ни к  $+\infty$ , ни к  $-\infty$ . Тогда нетрудно убедиться,

<sup>1)</sup> См. Айнс Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939, § 3.1.

[См. также Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 3-е изд., М.—Л., 1949.— *Прим. перев.*]

что найдутся числа  $A, B, x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ , удовлетворяющие условиям

$$A < B, \quad t_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < t_1,$$

и такие, что при  $n = 1, 2, 3, \dots$  имеем

$$A \leq \rho(t) \leq B \quad (x_n \leq t \leq y_n), \quad \rho(x_n) = A, \quad \rho(y_n) = B.$$

Функция  $F(t, \rho)$  непрерывна в замкнутом прямоугольнике  $t_0 \leq t \leq t_1, B \geq \rho \geq A$  плоскости  $(t, \rho)$ . Поэтому  $F(t, \rho)$  ограничена в этом прямоугольнике некоторой постоянной  $c$ . Значит,

$$B - A = \int_{x_n}^{y_n} \rho'(t) dt \leq c(y_n - x_n).$$

Это противоречит тому, что ряд  $\sum_1^{\infty} (y_n - x_n)$  сходится (его сумма меньше, чем  $t_1 - t_0$ ), и доказательство теоремы завершено.

Особенно подчеркнем, что длина интервала  $J$  может зависеть от начального значения  $\rho_0$ .

Доказанную выше теорему мы неоднократно будем использовать следующим образом. Если нам заданы числа  $t_0, \rho_0$  и  $A > 0$  и если мы доказали, что ни для одного значения  $t_1 > t_0$  не существует решения  $\rho(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), для которого  $\rho(t_0) = \rho_0, |\rho(t_1)| > A$ , то мы знаем, что решение с начальным условием  $\rho(t_0) = \rho_0$  существует на интервале  $t_0 \leq t < \infty$  [и удовлетворяет условию  $|\rho(t)| \leq A$ ].

Ясное представление о существовании решений уравнения Риккати и об их особенностях можно получить из их связи с линейными уравнениями второго порядка. Например, уравнение  $\rho'(t) + \rho^2(t) = \alpha(t) + \rho(t)\beta(t)$  переходит в уравнение  $y'' - \beta(t)y' - \alpha(t)y = 0$  после замены  $y'/y = \rho$ . Если  $y(t_1) = 0$  для некоторого решения  $y$ , то соответствующая функция  $\rho$  имеет при  $t = t_1$  особенность; она ведет себя при  $t$ , стремящемся к  $t_1$ , как  $(t - t_1)^{-1}$ . Существование и расположение этих корней  $t_1$ , очевидно, зависит от отношения  $A/B$  постоянных общего решения  $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ .

Возвращаясь к уравнению (9.2.1), предположим еще, что асимптотическое поведение каждого из коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma$

задано некоторым асимптотическим рядом

$$(9.2.2) \quad \begin{cases} \alpha(t) \approx a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \dots & (t \rightarrow \infty), \\ \beta(t) \approx b_0 + b_1 t^{-1} + b_2 t^{-2} + \dots & (t \rightarrow \infty), \\ \gamma(t) \approx c_0 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \dots & (t \rightarrow \infty), \end{cases}$$

причем мы будем считать, что

$$(9.2.3) \quad b_0 < 0, \quad c_0 = 0.$$

Наша цель состоит в том, чтобы доказать существование класса решений, поведение которых описывается асимптотическим рядом

$$(9.2.4) \quad \rho(t) \approx r_0 + r_1 t^{-1} + r_2 t^{-2} + \dots \quad (t \rightarrow \infty).$$

Точнее мы покажем, что найдутся такие числа  $t_0 > 0$  и  $A > 0$ , что для каждого  $\rho_0$  из интервала  $-A \leq \rho_0 \leq A$  решение с начальным условием  $\rho(t_0) = \rho_0$  бесконечно продолжается вправо и имеет асимптотический ряд вида (9.2.4). При этом коэффициенты  $r_0, r_1, r_2, \dots$  не зависят от  $\rho_0$ .

Вообще говоря, не все решения обладают этим свойством. Например, уравнение

$$\rho'(t) = -1 - \rho(t) - t^{-1} \rho^2(t)$$

имеет решение  $\rho(t) = -t$ , но кроме него оно имеет еще решения, стремящиеся к  $-\infty$ , при  $t$ , стремящемся к некоторому конечному значению  $t_1$ . [Это можно увидеть из уравнения  $y'' + (1 + t^{-1})y' + t^{-1}y = 0$ , получающегося после замены  $y'/y = t^{-1}\rho$ .]

Пусть  $A$  — некоторое число,  $A > 2|a_0/b_0|$ . В силу предположения (9.2.3)  $t_0$  можно выбрать так, чтобы

$$(9.2.5) \quad \beta(t) < 0, \quad 2|\alpha(t)| < A|\beta(t)| \quad (t \geq t_0)$$

и чтобы

$$(9.2.6) \quad 2A|\gamma(t)| < |\beta(t)| \quad (t \geq t_0).$$

Обозначим через  $\varphi_1$  постоянную функцию  $\varphi_1(t) = -A$  ( $t \geq t_0$ ), а через  $\varphi_2$  — постоянную функцию  $\varphi_2(t) = A$  ( $t \geq t_0$ ). Из условий (9.2.5) и (9.2.6) следует, что

$$t^{-k} \varphi_1'(t) < \alpha(t) + \beta(t) \varphi_1(t) + \gamma(t) \varphi_1^2(t) \quad (t \geq t_0),$$

$$t^{-k} \varphi_2'(t) > \alpha(t) + \beta(t) \varphi_2(t) + \gamma(t) \varphi_2^2(t) \quad (t \geq t_0).$$

Из теоремы разд. 9.1 следует, что любое решение  $\rho(t)$  нашего уравнения  $t^{-k}\rho' = \alpha + \beta\rho + \gamma\rho^2$  с начальным условием  $|\rho(t_0)| \leq A$  автоматически удовлетворяет неравенству  $|\rho(t)| \leq A$  при всех  $t \geq t_0$ , если только  $\rho(t)$  существует. Значит, эти решения не могут стремиться к  $\pm\infty$ , и, следовательно, они бесконечно продолжаются вправо и удовлетворяют при  $t \geq t_0$  неравенству  $|\rho(t)| \leq A$ . Нам понадобится лишь то, что эти решения ограничены, т. е. что  $\rho(t) = O(1)(t \rightarrow \infty)$ . Решение мы будем называть ограниченным, если оно ограничено в некотором интервале  $(t_3, \infty)$ , хотя возможно, что это решение можно продолжить на интервал  $(t_4, t_3)$  ( $t_4$  может быть равно  $-\infty$ ), и на этом расширенном интервале оно не ограничено.

Нашим следующим шагом будет доказательство того, что условие  $\rho(t) = O(1)(t \rightarrow \infty)$  влечет за собой

$$(9.2.7) \quad \rho(t) = r_0 + O(t^{-1}) \quad (t \rightarrow \infty), \quad r_0 = -\frac{a_0}{b_0}.$$

Рассмотрим частное решение  $\rho(t)$ , ограниченное в некотором интервале  $t_0 \leq t < \infty$ . Опять введем две вспомогательные функции

$$\varphi_3(t) = r_0 - At^{-1}, \quad \varphi_4(t) = r_0 + At^{-1}$$

и попытаемся подобрать  $A > 0$  и  $t_1 > t_0$  так, чтобы

$$(9.2.8) \quad t^{-k}\varphi_3'(t) < \alpha(t) + \beta(t)\varphi_3(t) + \gamma(t)\varphi_3^2(t) \quad (t \geq t_1),$$

$$(9.2.9) \quad t^{-k}\varphi_4'(t) > \alpha(t) + \beta(t)\varphi_4(t) + \gamma(t)\varphi_4^2(t) \quad (t \geq t_1),$$

$$(9.2.10) \quad \varphi_3(t_1) \leq \rho(t_1) \leq \varphi_4(t_1).$$

Для этой цели заметим, что обе части неравенства (9.2.8) имеют асимптотические ряды и в обоих рядах отсутствуют постоянные члены. Коэффициент при  $t^{-1}$  в левой части равен нулю, а в правой (напомним, что  $c_0 = 0$ ) он равен

$$a_1 - b_0A + b_1r_0 + c_1r_0^2.$$

Так как  $b_0 < 0$ , то мы можем считать, что  $A > 1$ . Поэтому легко выбрать  $t_1$  так, чтобы было справедливо неравенство (9.2.8). Кроме того, из аналогичных рассуждений

относительно неравенства (9.2.9) следует, что можно выбрать  $A$  и  $t_1$  так, чтобы выполнялись оба неравенства (9.2.8) и (9.2.9). Неравенство (9.2.10) вносит некоторые трудности: оно справедливо при любом заданном  $t_1$ , если только  $A$  достаточно велико, однако в предыдущих рассуждениях выбор  $t_1$  зависел от  $A$ . Поэтому проведем их более внимательно, рассматривая  $t$  и  $A$  как переменные.

Имеем

$$\varphi_3(t) = r_0 + O(At^{-1}), \quad \varphi_3^2(t) = O(1) + O(A^2t^{-2}),$$

$$\alpha(t) = a_0 + O(t^{-1}),$$

$$\beta(t) = b_0 + O(t^{-1}), \quad \gamma(t) = O(t^{-1}), \quad t^{-k}\varphi_3'(t) = O(At^{-k-2}),$$

причем все  $O$ -оценки имеют место, скажем, при  $t \geq t_0$ ,  $A \geq 1$ . Отсюда следует, что

$$\beta(t)\varphi_3(t) = b_0r_0 - b_0At^{-1} + O(t^{-1}) + O(At^{-2}),$$

$$\gamma(t)\varphi_3^2(t) = O(t^{-1}) + O(A^2t^{-3}),$$

так что правая часть неравенства (9.2.8) превосходит левую часть на величину

$$\begin{aligned} -b_0At^{-1} + O(t^{-1}) + O(At^{-2}) + O(A^2t^{-3}) = \\ = At^{-1} \{-b_0 + O(A^{-1}) + O(t^{-1}) + O(At^{-2})\}. \end{aligned}$$

Значит, неравенство (9.2.8) справедливо, если  $A$ ,  $t_1$  и  $t_1^2A^{-1}$  достаточно велики [это же относится и к неравенству (9.2.9)]. Теперь рассмотрим неравенство (9.2.10). Поскольку  $\rho(t) = r_0 = O(1)$ , то оно справедливо, если  $At_1^{-1}$  достаточно велико. Таким образом, остается выяснить, можно ли при сколь угодно большом  $C$  выбрать  $A$  и  $t_1$  так, чтобы

$$A > C, \quad t_1 > C, \quad t_1^2A^{-1} > C, \quad At_1^{-1} > C.$$

Этого можно добиться, положив  $A_1 = t_1^{3/2}$  и выбрав  $t_1$  достаточно большим. Таким образом, мы нашли такие  $A$  и  $t_1$ , что неравенства (9.2.8), (9.2.9), (9.2.10) одновременно выполнены.

Теперь, согласно теореме разд. 9.1, имеем

$$\varphi_3(t) \leq \rho(t) \leq \varphi_4(t) \quad (t \geq t_1).$$

и оценка (9.2.7) доказана. (По поводу другого доказательства см. упражнение 2 разд. 9.7.)

Далее, вводя обозначение  $\rho(t) = r_0 + t^{-1}\rho_1(t)$ , мы можем уже доказанный результат сформулировать так: если  $\rho(t) = O(1)$ , то и  $\rho_1(t) = O(1)$ . Легко вывести следующее дифференциальное уравнение для  $\rho_1(t)$

$$(9.2.11) \quad t^{-k}\rho_1'(t) = \alpha_1(t) + \beta_1(t)\rho_1(t) + \gamma_1(t)\rho_1^2(t),$$

где

$$\alpha_1 = t(a + r_0\beta) + r_0^2t\gamma,$$

$$\beta_1 = \beta + 2r_0\gamma + t^{-k-1},$$

$$\gamma_1 = t^{-1}\gamma.$$

Новые коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  по-прежнему имеют асимптотические ряды, и условия, аналогичные условиям (9.2.3), по-прежнему выполнены. Применяя доказанный выше результат к нашему новому уравнению, мы получаем следующее утверждение: существует такая постоянная  $r_1$ , что если  $\rho_1(t) = r_1 + t^{-1}\rho_2(t)$ , то из оценки  $\rho_1(t) = O(1)$  следует  $\rho_2(t) = O(1)$ . Поскольку этот процесс может быть продолжен, то ясно, что  $\rho(t)$  имеет асимптотическое разложение вида (9.2.4).

Коэффициенты  $r_0, r_1, r_2, \dots$  легко определяются из самого процесса. Однако еще проще искать их методом неопределенных коэффициентов. Подставим формальный ряд  $r_0 + r_1t^{-1} + r_2t^{-2} + \dots$  в уравнение (9.2.1), взяв в качестве производной формальную производную  $-r_1t^{-2} - 2r_2t^{-3} - \dots$ . После этого потребуем, чтобы при каждом  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) коэффициенты при  $t^{-n}$  в обеих частях были равны. Это приведет нас к системе рекуррентных соотношений, из которых благодаря условиям  $b_0 \neq 0$ ,  $c_0 = 0$  можно легко определить величины  $r_0, r_1, r_2, \dots$ . Законность этой операции легко доказать, исходя из факта существования асимптотических рядов для  $\rho(t)$  и для  $t^{-k}\rho'(t)$ ; это можно показать также, сравнив оба способа нахождения коэффициентов с алгебраической точки зрения.

Наше уравнение дает типичный пример *устойчивости*. Если  $\rho_1(t)$  — одно из ограниченных решений, ограниченное, скажем, при  $t_0 \leq t < \infty$ , то существует такое  $\varepsilon > 0$ , что любое решение, удовлетворяющее условию  $|\rho_2(t_0) - \rho_1(t_0)| < \varepsilon$ ,



удовлетворяет также условию  $\rho_2(t) - \rho_1(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это случай очень сильной устойчивости, так как  $\rho_1$  и  $\rho_2$  имеют один и тот же асимптотический ряд, и поэтому  $\rho_2 - \rho_1 = O(t^{-n})$  при любом фиксированном  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Мы покажем даже, что  $\rho_2 - \rho_1 = O(e^{-ct})$  с некоторым  $c > 0$ .

Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — два ограниченных решения, и пусть  $\rho_2 - \rho_1 = \eta$ . Если при некотором  $t$  имеем  $\rho_1(t) = \rho_2(t)$ , то по теореме единственности это равенство выполняется тождественно. Значит, можно считать, что  $\rho_2(t) > \rho_1(t)$  при всех  $t$ . Очевидно, имеем

$$t^{-k} \eta' = \beta \eta + \gamma (\rho_1 + \rho_2) \eta$$

и, следовательно,

$$t^{-k} \eta' = \eta (\beta + O(t^{-1})).$$

Поскольку  $\beta \approx b_0 + \dots$ ,  $b_0 < 0$ , и  $\eta(t) > 0$  при всех  $t$ , то

$$\frac{\eta'}{\eta} < \frac{1}{2} b_0 t^k \quad (t > t_1)$$

при некотором  $t_1 > 0$ . Интегрируя, находим

$$\eta = O \left\{ \exp \frac{b_0 t^{k+1}}{2(k+1)} \right\} \quad (t \rightarrow \infty).$$

### 9.3. Случай неустойчивости

Рассмотрим снова уравнение (9.2.1)

$$(9.3.1) \quad t^{-k} \rho' (t) = \alpha (t) + \beta (t) \rho (t) + \gamma (t) \rho^2 (t)$$

и опять предположим, что  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  имеют асимптотические разложения (9.2.2), но вместо условия (9.2.3) выполнено условие

$$(9.3.2) \quad b_0 > 0, \quad c_0 = 0.$$

Формально ничего не изменилось, так что мы опять можем найти ряд  $r_0 + r_1 t^{-1} + r_2 t^{-2} + \dots$ , формально удовлетворяющий уравнению (в этих формальных действиях знак  $b_0$  не играет роли; существенно лишь, что  $b_0 \neq 0$ ). Разница со случаем  $b_0 < 0$  состоит в том, что теперь есть только одно решение, имеющее этот ряд своим асимптотическим разложением, и только это решение ограничено [т. е. только это решение удовлетворяет условию  $\rho(t) = O(1)$  при  $t \rightarrow \infty$ ].

Чтобы это доказать, мы, как и в разд. 9.2, начнем с определения функций

$$\varphi_3(t) = r_0 - At^{-1}, \quad \varphi_4(t) = r_0 + At^{-1} \quad \left( r_0 = -\frac{a_0}{b_0} \right).$$

Мы можем задать  $A > 0$  и  $t_1 > 0$  так, чтобы

$$(9.3.3) \quad t^{-k} \varphi_3'(t) > \alpha(t) + \beta(t) \varphi_3(t) + \gamma(t) \varphi_3^2(t) \quad (t > t_1),$$

$$(9.3.4) \quad t^{-k} \varphi_4'(t) < \alpha(t) + \beta(t) \varphi_4(t) + \gamma(t) \varphi_4^2(t) \quad (t > t_1).$$

Знаки в этих неравенствах не такие, как в неравенствах (9.2.8) и (9.2.9), потому что теперь  $b_0 > 0$ . Утверждение состоит в том, что если решение  $\rho(t)$  существует на интервале  $(t_2, t_3)$ ,  $t_3 > t_2 \geq t_1$ , и если  $\rho(t_2) < \varphi_3(t_2)$ , то  $\rho(t) < \varphi_3(t)$  ( $t_2 \leq t \leq t_3$ ). Аналогично, если  $\rho(t_2) > \varphi_4(t_2)$ ,  $t_2 \geq t_1$ , то  $\rho(t) > \varphi_4(t)$  при всех  $t > t_2$ , при которых  $\rho(t)$  существует. Таким образом, положение прямо противоположно тому, что было в разд. 9.2.

Мы получили теперь утверждения о решениях, меньших  $\varphi_3$  или больших  $\varphi_4$ , а нам хотелось бы знать что-либо о решениях, лежащих между  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$ . Этого можно добиться с помощью теоремы разд. 9.1, считая  $\tau = -t$  независимым переменным, так что  $d\rho/dt = -d\rho/d\tau$ . Таким образом, мы наблюдаем теперь поведение решения, когда  $t$  убывает, вместо того, чтобы возрастать. Наше утверждение звучит следующим образом: пусть  $t_1 < t_2$  и пусть число  $\rho_2$  удовлетворяет условию  $\varphi_3(t_2) \leq \rho_2 \leq \varphi_4(t_2)$ . Тогда наше уравнение имеет решение  $\rho(t)$  в интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ , причем  $\rho(t_2) = \rho_2$  и  $\varphi_3(t) < \rho(t) < \varphi_4(t)$  ( $t_1 \leq t < t_2$ ).

Если  $\rho_2$  принимает значения в замкнутом интервале  $\varphi_3(t_2) \leq \rho_2 \leq \varphi_4(t_2)$ , то значения  $\rho_1 = \rho(t_1)$  образуют некоторое подмножество открытого интервала  $\varphi_3(t_1) < \rho_1 < \varphi_4(t_1)$ .

Из общей теории дифференциальных уравнений<sup>1)</sup> следует, что  $\rho_1$  является непрерывной и возрастающей функцией  $\rho_2$ , и поэтому это подмножество тоже является замкнутым интервалом. Мы обозначим его  $i(t_2)$  ( $t_1$  мы будем считать фиксированным,  $t_2$  — меняющимся).

Множество  $i(t_2)$  можно рассматривать как множество всех таких чисел  $\rho_1$ , что решение  $\rho(t)$  с начальным условием

<sup>1)</sup> См. А й н с Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939, § 3.22.

$\rho(t_1) = \rho_1$  существует на всем интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$  и удовлетворяет на нем неравенствам  $\varphi_3(t) \leq \rho(t) \leq \varphi_4(t)$ . Отсюда следует, что  $i(t_2) \supset i(t_2 + 1)$ . Повторно используя те же соображения, мы получаем последовательность вложенных замкнутых интервалов

$$i(t_1 + 1) \supset i(t_1 + 2) \supset i(t_1 + 3) \supset \dots,$$

и эти интервалы имеют общую точку  $\rho_1^*$ . Обозначим через  $\rho^*(t)$  решение с начальным условием  $\rho^*(t_1) = \rho_1^*$ . Мы знаем, что его можно продолжить на интервал  $t_1 \leq t \leq t_1 + n$  и что оно заключено между  $\varphi_3(t)$  и  $\varphi_4(t)$  на этом интервале. Это справедливо для любого  $n$ , поэтому решение  $\rho^*(t)$  можно продолжить до бесконечности, и

$$\varphi_3(t) \leq \rho^*(t) \leq \varphi_4(t) \quad (t > t_1).$$

Таким образом, мы доказали, что наше уравнение имеет решение вида  $r_0 + O(t^{-1})$ . Сейчас мы покажем, что такое решение только одно и даже что оно является единственным ограниченным решением. Пусть  $\rho_1(t)$  и  $\rho_2(t)$  — два решения, ограниченные на интервале  $t_0 < t < \infty$ . Предположим, что они различны, скажем,  $\rho_2(t) > \rho_1(t)$  при  $t > t_0$ . Положив  $\rho_2(t) - \rho_1(t) = \eta(t)$ , мы получили бы (ср. с рассуждением в конце разд. 9.2), что при некотором  $t_1$

$$\frac{\eta'}{\eta} > \frac{1}{2} b_0 t^k \quad (t > t_1),$$

откуда следовало бы, что

$$(9.3.5) \quad \eta > c \exp \frac{b_0 t^{k+1}}{2(k+1)} \quad (t > t_1)$$

с некоторым  $c > 0$ . Значит,  $\eta$  стремилось бы к бесконечности, в то время как  $\rho_2(t)$  и  $\rho_1(t)$  ограничены. Это противоречие показывает, что имеется лишь одно ограниченное решение.

Чтобы найти для  $\rho^*(t)$  полное асимптотическое разложение, мы, как и в разд. 9.2, напомним  $\rho(t) = r_0 + t^{-1}\rho_1(t)$  и получим для  $\rho_1(t)$  дифференциальное уравнение (9.2.11) того же вида, что и уравнение для  $\rho(t)$ . Мы увидим, что существует ровно одно решение  $\rho_1^*(t)$  вида  $r_1 + O(t^{-1})$ . Это значит, что  $r + t^{-1}\rho_1^*(t)$  является решением уравнения (9.3.1)

и имеет вид  $r_0 + r_1 t^{-1} + O(t^{-2})$ . Так как уравнение (9.3.1) обладает единственным ограниченным решением, мы имеем тождественно

$$r_0 + t^{-1} \rho_1^*(t) = \rho^*(t),$$

и поэтому

$$\rho^*(t) = r_0 + r_1 t^{-1} + O(t^{-2}).$$

Этот процесс можно продолжить и получить для  $\rho^*(t)$  асимптотическое разложение (9.2.4). Величины  $r_0, r_1, \dots$  опять можно найти, подставляя формально ряд (9.2.4) в дифференциальное уравнение и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ .

#### 9.4. Применение к линейному уравнению второго порядка

Если мы имеем для  $y(t)$  линейное однородное уравнение второго порядка

$$y''(t) + P(t)y'(t) + Q(t)y(t) = 0,$$

то замена  $v = y'/y$  приводит нас к уравнению Риккати для функции  $v$ :

$$v'(t) + v^2(t) + P(t)v(t) + Q(t) = 0.$$

Линейная замена  $v(t) = a(t) + b(t)\omega(t)$ , где  $\omega(t)$  — новая неизвестная функция, опять приводит нас к уравнению Риккати (т. е. к линейному соотношению между  $1, \omega, \omega^2$  и  $\omega'$ ). Теперь можно попытаться привести это уравнение к одному из видов, рассмотренных в предыдущих разделах, или хотя бы к такому уравнению, к которому можно применить технику этих разделов.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$(9.4.1) \quad y''(t) - t^4 y(t) = 0,$$

которое после замены  $v = y'/y$  приводится к уравнению

$$(9.4.2) \quad v' + v^2 - t^4 = 0.$$

Это уравнение еще не имеет нужного вида. Чтобы получить грубое представление о поведении решений, будем рассуждать следующим образом. В уравнение входят три слагаемых,

так что хотя бы два из них должны быть одного порядка. Попробуем сначала пренебречь одним из слагаемых и исследовать получающееся уравнение.

Сначала попробуем отбросить  $t^4$ . Остающееся уравнение  $v' + v^2 = 0$  имеет решение  $v = (t - t_0)^{-1}$  с произвольной постоянной  $t_0$ . Но для такой функции  $v$  отброшенный член намного больше, чем  $v'$  и  $v^2$ , так что это не годится. Затем отбросим слагаемое  $v^2$ . Тогда остается  $v' = t^4$ , откуда  $v = \frac{1}{5}t^5 + C$ . Снова отброшенный член намного больше, чем оба оставшиеся.

Наша последняя возможность — отбросить  $v'$ . То, что при этом получается уже не дифференциальное уравнение, несколько не должно нас беспокоить. Мы получаем  $v = \pm t^2$ , и отброшенный член  $v'$  на этот раз действительно мал. Пока еще ничего не доказано, но мы уже имеем достаточно оснований, чтобы попытаться сделать замену  $v = t^2 + \rho(t)$  и  $v = -t^2 + \rho(t)$ . Первая замена  $v = t^2 + \rho(t)$  преобразует уравнение (9.4.2) в уравнение

$$(9.4.3) \quad t^{-2}\rho' = -2t^{-1} - 2\rho - t^{-2}\rho^2,$$

а это уравнение устойчивого типа, рассмотренное в разд. 9.2 [здесь  $k=2$ ,  $\alpha(t) = -2t^{-1}$ ,  $\beta(t) = -2$ ,  $\gamma(t) = -t^{-2}$ , так что, действительно,  $b_0 < 0$ ,  $c_0 = 0$ ]. Мы знаем, что в этом случае существует решение  $\rho(t)$ , имеющее асимптотический ряд

$$\rho(t) \approx r_0 + r_1 t^{-1} + r_2 t^{-2} + \dots \quad (t \rightarrow \infty)$$

(и даже бесконечно много таких решений). После формальной подстановки этого ряда в уравнение (9.4.3) мы получаем  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = -1$ ,  $r_2 = r_3 = 0$ , и, вообще,  $r_n = 0$ , за исключением  $n$  вида  $3k+1$ . Значит, имеет смысл положить  $\rho(t) = t^{-1}\sigma(t^3)$ ,  $t^3 = \tau$ , и преобразовать уравнение к виду

$$3 \frac{d\sigma}{d\tau} = -2 + (-2 + \tau^{-1})\sigma(\tau) - \tau^{-1}\sigma^2(\tau).$$

Поскольку  $y'/y = v$ , то мы получим  $\ln y$  интегрированием  $t^2 + t^{-1}\sigma(t^3)$ . Отсюда следует, что уравнение (9.4.1) имеет решения вида

$$(9.4.4) \quad y \approx Ct^{-1}e^{t^3/3}(1 + a_1 t^{-3} + a_2 t^{-6} + \dots) \quad (t \rightarrow \infty),$$

где  $C \neq 0$ , а  $1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  — формальный степенной ряд для

$$\exp \left\{ -\frac{1}{3} r_4 x - \frac{1}{6} r_7 x^2 - \dots \right\}.$$

Точно так же мы можем испытать вторую замену  $v = -t^2 + \rho(t)$ . Это приведет нас к уравнению

$$t^{-2} \rho'(t) = 2t^{-1} + 2\rho - t^{-2} \rho^2,$$

т. е. к неустойчивому случаю разд. 9.3. Теперь мы знаем, что существует *единственное* решение  $\rho(t)$  вида

$$\rho(t) \approx s_0 + s_1 t^{-1} + s_2 t^{-2} + \dots \quad (t \rightarrow \infty).$$

В отношении  $y$  это означает, что существует, с точностью до постоянного множителя  $C \neq 0$ , единственное решение  $y(t)$  вида

$$(9.4.5) \quad y \approx Ct^{-1} e^{-t^3/3} (1 + b_1 t^{-3} + b_2 t^{-6} + \dots) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Если мы возьмем какое-либо решение  $y_1(t)$  вида (9.4.4) и решение  $y_2(t)$  вида (9.4.5), то эти решения, очевидно, линейно независимы (так как  $y_2/y_1 \rightarrow 0$ ). Тогда общее решение уравнения (9.4.1) равно  $Ay_1(t) + By_2(t)$  ( $A$  и  $B$  — постоянные). Отсюда хорошо видна неустойчивость решения  $y_2(t)$ : каждое решение с  $A \neq 0$  должно иметь, как нетрудно видеть, асимптотическое поведение (9.4.4) (с некоторым  $C$ ), и только при  $A = 0$ ,  $B \neq 0$  мы получаем решение с асимптотическим поведением (9.4.5). Кроме того, нетрудно убедиться, что добавление  $By_2(t)$  к  $Ay_1(t)$  не меняет асимптотического ряда для  $Ay_1(t)$ .

Существует простое соотношение между коэффициентами  $a_n$  разложения (9.4.4) и коэффициентами  $b_n$  разложения (9.4.5), вытекающее из того, что коэффициенты уравнения (9.4.1) являются четными функциями  $t$ . Именно,

$$(9.4.6) \quad b_n = (-1)^n a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Другими словами, если правую часть разложения (9.4.4) обозначить формально через  $P(t)$ , то правая часть разложения (9.4.5) равна  $P(-t)$ . В этом легко убедиться, рассмотрев уравнение Риккати (9.4.2). Если мы подставим вместо  $v$  формальный ряд

$$Q_1(t) = t^2 + r_0 + r_1 t^{-1} + r_2 t^{-2} + \dots,$$

то уравнение (9.4.2) будет формально удовлетворено. Поскольку  $t^4$  — четная функция, формальный ряд  $Q_2(t) = -Q_1(-t)$  тоже формально удовлетворяет уравнению (9.4.2). С другой стороны, мы уже видели (см. разд. 9.2 и 9.3), что уравнение Риккати имеет только одно формальное решение вида  $-t^2 + s_0 + s_1 t^{-1} + s_2 t^{-2} + \dots$ . Отсюда следует, что  $s_n = -(-1)^n r_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), и мы без труда получаем соотношение (9.4.6).

Пусть  $y_2(t)$  обозначает неустойчивое решение вида (9.4.5) (с  $C = 1$ ). Опираясь на соотношение (9.4.6), мы покажем, что общее решение уравнения  $y'' - t^4 y = 0$  можно записать в виде

$$y = Ay_2(-t) + By_2(t).$$

Во-первых, заметим, что решение  $y_2(t)$  можно продолжить на всю ось  $(-\infty, \infty)$ , так как уравнение линейное. Функция  $t^4$  четная, поэтому  $y_2(-t)$  тоже удовлетворяет уравнению  $y'' - t^4 y = 0$ . Из асимптотического поведения видно, что  $y_2(-t)$  положительно и возрастает при больших по модулю отрицательных  $t$ . Из уравнения  $y'' = t^4 y$  видно, что его решения выпуклы всюду, где они положительны, и поэтому  $y_2(-t)$  продолжает возрастать при всех  $t$ . Так как  $y_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то  $y_2(t)$  и  $y_2(-t)$  являются линейно независимыми решениями.

Нетрудно определить все коэффициенты асимптотического ряда для  $y_2(t)$ . Читатель может проверить, что

$$y_2(t) \approx e^{-t^{5/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{18^n (n!)^2} (-1)^n t^{-3n-1} \quad (t \rightarrow \infty).$$

### 9.5. Случай осцилляции

Исследование, которое мы провели в разд. 9.4, применимо ко многим уравнениям вида  $y''(t) - y(t)f(t) = 0$ , где  $f(t) > 0$ . Однако совсем иное положение будет для уравнений вида  $y''(t) + y(t)f(t) = 0$  [опять  $f(t) > 0$ ]. При очень общих предположениях можно доказать, что решения такого уравнения осциллируют, т. е. имеют бесконечно много нулей в интервале  $(0, \infty)$ . Мы рассмотрим частный случай

$$(9.5.1) \quad y''(t) + (1 + t^{-1})y(t) = 0.$$

Заменой  $v = y'/y$  мы получаем уравнение Риккати

$$v' + v^2 + (1 + t^{-1})v = 0.$$

Руководствуясь теми же наводящими соображениями, которые мы использовали для уравнения (9.4.2), мы введем новую функцию  $\rho(t)$  подстановкой  $v = i + t^{-1}\rho(t)$ . Эта функция удовлетворяет уравнению

$$(9.5.2) \quad \rho'(t) = -1 + (-2i + t^{-1})\rho(t) - t^{-1}\rho^2(t).$$

В обозначениях (9.2.2) имеем  $b_0 = -2i$ ,  $c_0 = 0$ . Поскольку в разд. 9.2 и 9.3 коэффициенты считались действительными, результаты этих разделов неприменимы к уравнению (9.5.2). Мы еще могли бы доказать, что основной результат разд. 9.2 и 9.3 остается верным для уравнений с комплексными коэффициентами, если заменить условие  $b_0 < 0$  [см. (9.2.3)] условием  $\operatorname{Re} b_0 < 0$ , а условие  $b_0 > 0$  [см. (9.3.2)] условием  $\operatorname{Re} b_0 > 0$ . Но в нашем случае  $b_0$  чисто мнимое, так что мы не имеем ни сильной устойчивости, как в разд. 9.2, ни сильной неустойчивости, как в разд. 9.3.

Заметим, что нетрудно найти асимптотический ряд, формально удовлетворяющий уравнению (9.5.2), подставляя этот ряд в уравнение и приравнявая коэффициенты. Первые несколько членов этого ряда равны

$$\frac{i}{2} + \frac{2-i}{8t} - \frac{4+3i}{16t^2} + \dots$$

Однако сейчас мы не можем сказать, имеет ли этот формальный ряд какой-либо смысл.

Мы испробуем совершенно иной метод, основанный на применении одного интегрального уравнения. Следует заметить, что этот метод нетрудно приспособить и для случая экспоненциально растущих решений, рассмотренного в разд. 9.4.

Рассмотрим уравнение вида

$$(9.5.3) \quad y''(t) + \{1 + g(t)\}y(t) = 0,$$

где данная функция  $g(t)$  непрерывна и удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty. \text{ Это означает, что результаты нельзя будет}$$



непосредственно применить к уравнению (9.5.1), хотя это уравнение легко можно преобразовать к такому виду (см. конец разд. 9.6).

Сначала превратим уравнение (9.5.3) в интегральное. Это можно сделать следующим образом. Запишем уравнение в виде

$$y''(t) + y(t) = -g(t)y(t)$$

и поступим с ним так, как если бы в его правой части стояла известная функция  $h(t)$ . Используя метод вариации постоянных, положим

$$y(t) = A(t) \cos t + B(t) \sin t,$$

$$y'(t) = -A(t) \sin t + B(t) \cos t, \quad A'(t) \cos t + B'(t) \sin t = 0,$$

$$y''(t) = -y(t) - A'(t) \sin t + B'(t) \cos t,$$

$$-A'(t) \sin t + B'(t) \cos t = h(t).$$

Тогда имеем  $A' = -h(t) \sin t$ ,  $B' = h(t) \cos t$ . Значит, если  $a$  — какое-либо действительное число, то любое решение уравнения  $y''(t) + y(t) = h(t)$  можно представить в виде

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \int_a^t h(\tau) (\sin t \cos \tau - \cos t \sin \tau) d\tau$$

с подходящими постоянными  $C_1$  и  $C_2$ . Итак, если  $y(t)$  — решение уравнения (9.5.3), то оно удовлетворяет и уравнению

$$(9.5.4) \quad y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \int_a^t g(\tau) y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau$$

с соответствующими постоянными  $C_1$  и  $C_2$ .

Теперь мы можем показать, что любое решение уравнения (9.5.3) ограничено на интервале  $0 \leq t < \infty$ . С этой целью выберем положительное число  $a$  так, чтобы

$$\int_a^\infty |g(t)| dt < 1/2, \quad \text{что возможно в силу сходимости инте-$$

грала  $\int_0^\infty |g(t)| dt$ . Пусть  $y(t)$  — некоторое решение и  $b$  —

некоторое число,  $b > a$ . Положим  $M = \max_{a \leq t \leq b} |y(t)|$ . Из уравнения (9.5.4) мы видим, что

$$M \leq |C_1| + |C_2| + M \int_a^b |g(\tau)| d\tau \leq |C_1| + |C_2| + \frac{1}{2} M,$$

и значит,  $M \leq 2|C_1| + 2|C_2|$  независимо от величины  $b$ . Это доказывает, что решение ограничено.

Из ограниченности следует сходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} g(\tau) y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau,$$

и поэтому мы можем переписать уравнение (9.5.4) в виде

$$(9.5.5) \quad y(t) = C_3 \cos t + C_4 \sin t - \int_0^{\infty} g(\tau) y(\tau) \sin(\tau - t) d\tau$$

с новыми постоянными  $C_3$  и  $C_4$ , а именно:

$$C_3 = C_1 + \int_a^{\infty} g(\tau) y(\tau) \sin \tau d\tau,$$

$$C_4 = C_2 - \int_a^{\infty} g(\tau) y(\tau) \cos \tau d\tau.$$

Мы показали, что для любого решения уравнения (9.5.3) найдутся такие постоянные  $C_3$  и  $C_4$ , что справедливо равенство (9.5.5). Теперь мы покажем, что каждому выбору пары чисел  $C_3$  и  $C_4$  отвечает точно одно решение уравнения (9.5.3).

Пусть решение  $y_1(t)$  определяется начальными условиями  $y_1(a) = 1$ ,  $y_1'(a) = 0$ , а решение  $y_2(t)$  — условиями  $y_2(a) = 0$ ,  $y_2'(a) = 1$ . Тогда каждое решение уравнения (9.5.3) является линейной комбинацией функций  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ :

$$y(t) = y(a) y_1(t) + y'(a) y_2(t),$$

причем  $y(a)$  и  $y'(a)$  могут быть заданы произвольно.

Постоянные  $C_3$  и  $C_4$ , соответствующие решению  $y(t)$ , легко определить дифференцированием уравнения (9.5.5)

при  $t = a$ . Для простоты допустим, что  $a$  равно целому кратному  $2\pi$ . Тогда получим

$$C_3 = y(a) + y(a) \int_a^{\infty} g(\tau) y_1(\tau) \sin \tau d\tau + \\ + y'(a) \int_a^{\infty} g(\tau) y_2(\tau) \sin \tau d\tau,$$

$$C_4 = y'(a) - y(a) \int_a^{\infty} g(\tau) y_1(\tau) \cos \tau d\tau - \\ - y'(a) \int_a^{\infty} g(\tau) y_2(\tau) \cos \tau d\tau.$$

Заметим, что  $C_3$  и  $C_4$  являются линейными комбинациями величин  $y(a)$  и  $y'(a)$ . Мы должны показать, что эти комбинации линейно независимы. Другими словами, мы должны доказать, что  $C_3 = C_4 = 0$  возможно лишь при  $y(a) = y'(a) = 0$ , т. е. если  $y(t)$  — тождественный нуль.

Пусть  $y(t)$  — решение, для которого  $C_3 = C_4 = 0$ . Поскольку  $y(t)$  ограничено при  $a \leq t < \infty$ , мы выводим из равенства (9.5.5), что

$$\sup_{\infty > t \geq a} |y(t)| \leq \sup_{\infty > t \geq a} |y(t)| \cdot \int_a^{\infty} |g(t)| dt.$$

Так как интеграл в правой части, по предположению, меньше  $1/2$ , то мы видим, что  $y(t) \equiv 0$ .

Интегральное уравнение (9.5.5) можно использовать для точного решения дифференциального уравнения в виде так называемого ряда Неймана<sup>1)</sup>. Мы не будем этого делать, поскольку наша цель состоит в получении лишь асимптотической информации об  $y(t)$ . Этого можно добиться методом итераций, который используется и при выводе ряда Неймана. Возьмем решение, скажем,  $y_3$ , определенное условиями  $C_3 = 1$ ,

<sup>1)</sup> См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, М., 1934, § 11.4.

$C_4 = 0$ . Мы уже знаем, что  $y(t)$  ограничено, так что равенство (9.5.5) дает нам

$$(9.5.6) \quad y_3(t) = \cos t + O\left(\int_t^\infty |g(\tau)| d\tau\right) = \cos t + o(1).$$

Затем подставим этот результат в интеграл правой части равенства (9.5.5). Тогда получим

$$y_3(t) = \cos t - \int_t^\infty g(\tau) \cos \tau \sin(\tau - t) d\tau + \\ + O\left(\int_t^\infty |g(s)| ds \int_s^\infty |g(\tau)| d\tau\right),$$

и т. д.

Для выкладок удобнее иметь дело с комплексными комбинациями решений

$$y_3(t) + iy_4(t) = e^{it} + o(1), \\ y_3(t) - iy_4(t) = e^{-it} + o(1),$$

где  $y_4$  — решение, отвечающее  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = 1$ .

Рассмотрим характерный пример. В дифференциальном уравнении для функции Бесселя  $n$ -го порядка положим  $y = t^{1/2} J_n(t)$ ,  $\lambda = \frac{1}{4} - n^2$ . Тогда мы приходим к уравнению<sup>1)</sup>

$$(9.5.7) \quad y''(t) + (1 + \lambda t^{-2}) y(t) = 0,$$

принадлежащему к рассмотренному выше типу ( $\lambda$  — постоянная). Мы знаем, что это уравнение имеет решение вида  $e^{it} + o(1)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Обозначая его через  $y(t)$ , получаем

$$y(t) = e^{it} + O\left(\int_t^\infty \tau^{-2} d\tau\right) = e^{it} + O(t^{-1}).$$

На следующей ступени из равенства (9.5.5) ( $C_3 = 1$ ,  $C_4 = i$ ) находим

$$(9.5.8) \quad y(t) = e^{it} - \lambda \int_t^\infty \tau^{-2} e^{i\tau} \sin(\tau - t) d\tau + O\left(\int_t^\infty \tau^{-3} d\tau\right).$$

<sup>1)</sup> См. Айнс Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939, § 7.32.

Сначала рассмотрим интегралы

$$f_k(t) = \int_t^{\infty} \tau^{-k} e^{i\tau} \sin(\tau - t) d\tau$$

с целым фиксированным  $k \geq 2$ . Так как  $2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}$ , то мы имеем

$$\begin{aligned} e^{-it} f_k(t) &= \int_0^{\infty} (x+t)^{-k} e^{ix} \sin x dx = \\ &= \frac{1}{2} i (k-1)^{-1} t^{-k+1} - \frac{1}{2} i \int_0^{\infty} (x+t)^{-k} e^{2ix} dx. \end{aligned}$$

Для последнего интеграла можно получить асимптотический ряд повторным интегрированием по частям или методом перевала. При этом асимптотическое разложение имеет вид

$$e^{-it} f_k(t) \approx t^{-k+1} (c_0 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \dots) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Теперь соотношение (9.5.8) дает  $y(t) = e^{it} (1 + a_1 t^{-1} + O(t^{-2}))$  (с  $a_1 = -i\lambda/2$ ). Снова подставляя это в равенство (9.5.5), мы получаем формулу вида  $y(t) = e^{it} (1 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + O(t^{-3}))$ . Продолжая этот процесс, мы получаем асимптотический ряд

$$(9.5.9) \quad y(t) \approx e^{it} (1 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \dots) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Раз мы уже знаем, что асимптотический ряд такого вида существует, то его коэффициенты легко определить непосредственно из дифференциального уравнения. Если мы положим  $y(t) e^{-it} = \varphi(t)$ , то  $\varphi$  удовлетворяет уравнению  $\varphi'' + 2i\varphi' + \lambda t^{-2}\varphi = 0$ . Формально подставляя

$$(9.5.10) \quad \varphi(t) \approx 1 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \dots$$

и приравнявая коэффициенты, мы можем найти  $a_k$ . Чтобы обосновать эти действия, достаточно показать, что существуют асимптотические ряды для  $\varphi'(t)$  и  $\varphi''(t)$  [действительно, тогда эти ряды автоматически являются формальными производными ряда для  $\varphi(t)$ ]. Из формул (9.5.7) и (9.5.9) следует, что

$$\varphi''(t) \approx -e^{it} (1 + \lambda t^{-2}) (1 + a_1 t^{-1} + \dots) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Из асимптотических формул для функций

$$\int_t^{\infty} e^{i\tau} \tau^{-k} d\tau \quad (k = 1, 2, \dots)$$

мы можем теперь получить, что интеграл  $\int_t^{\infty} (y''(\tau) + e^{i\tau}) d\tau$

сходится и имеет асимптотический ряд вида  $e^{it}(b_0 + b_1 t^{-1} + \dots)$ . С другой стороны, этот интеграл равен  $-y'(t) + ie^{it} + C$ , где  $C$  — постоянная. Еще раз интегрируя, мы видим, что поскольку  $y(t)$  ограничено, то  $C = 0$ . Отсюда следует, что  $\varphi'(t)$  и  $\varphi''(t)$  имеют асимптотические ряды требуемого вида.

Таким образом, чтобы определить коэффициенты ряда (9.5.10), мы имеем право формально подставить этот ряд в уравнение  $\varphi'' + 2i\varphi' + \lambda t^{-2}\varphi = 0$ . Сравнивая коэффициенты, приходим к соотношениям

$$a_{k+1} = a_k \frac{k^2 + k + \lambda}{2i(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

причем  $a_0 = 1$ .

Наше дифференциальное уравнение (9.5.7) имеет также решение вида  $e^{-it} + O(1)$ . Для него тоже справедливы аналогичные утверждения, и легко видеть, что его асимптотическим рядом является  $e^{-it}(1 - a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} - \dots)$ . Таким образом, каждое решение уравнения (9.5.7) имеет асимптотическое разложение вида

$$Ae^{it}(1 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \dots) + \\ + Be^{-it}(1 - a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} - \dots).$$

Содержание этого раздела не дает нам метода для определения значений  $A$  и  $B$ , отвечающих частному решению  $t^{1/2}J_n(t)$ . Выбор этого частного решения из всех решений определяется его поведением при  $t \rightarrow 0$ , а там наша осведомленность о поведении при  $t \rightarrow \infty$  не помогает. С другой стороны, совсем грубая оценка для  $t^{1/2}J_n(t)$ , полученная каким-либо другим методом, может оказаться достаточной для определения значений  $A$  и  $B$ .

### 9.6. Более общие случаи осцилляции

В разд. 9.5 мы выяснили, что уравнение  $y'' + (1 + g(t))y = 0$  имеет решения вида  $e^{it} + o(1)$  и  $e^{-it} + o(1)$  ( $t \rightarrow \infty$ ) в предположении, что интеграл  $\int_0^{\infty} |g(t)| dt$  сходится. Сейчас мы

попытаемся свести более общее уравнение

$$(9.6.1) \quad y''(t) + p^2(t)y(t) = 0$$

к этому частному случаю. Предполагается, что  $p(t)$  — положительная непрерывная функция.

Заменим переменные  $t$  и  $y$  новыми переменными  $x$  и  $z$ , положив

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)z.$$

Здесь  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  — функции  $t$ , которые мы определим несколько позднее. Сейчас мы предположим только, что  $\varphi(t)$  монотонно стремится к  $+\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Имеем (штрих означает дифференцирование по  $t$ )

$$y' = \psi\varphi' \frac{dz}{dx} + z\psi',$$

$$y'' = \psi(\varphi')^2 \frac{d^2z}{dx^2} + (\psi\varphi'' + 2\psi'\varphi') \frac{dz}{dx} + \psi''z.$$

Наше дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{\varphi'} \left( \frac{\varphi''}{\varphi'} + 2 \frac{\psi'}{\psi} \right) \frac{dz}{dx} + \left\{ \left( \frac{p}{\varphi'} \right)^2 + \frac{\psi''}{\psi\varphi'^2} \right\} z = 0.$$

Если мы выберем теперь  $\varphi$  и  $\psi$  так, чтобы

$$(9.6.2) \quad \frac{\varphi''}{\varphi'} + 2 \frac{\psi'}{\psi} = 0, \quad \int_0^{\infty} \left| \left( \frac{p}{\varphi'} \right)^2 + \frac{\psi''}{\psi\varphi'^2} - 1 \right| dx < \infty,$$

то из наших результатов относительно уравнения (9.5.3) мы получим, что уравнение (9.6.1) имеет решения вида

$$\psi(t) \{e^{i\varphi(t)} + o(1)\} \quad \text{и} \quad \psi(t) \{e^{-i\varphi(t)} + o(1)\} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Принимая во внимание, что  $\psi''/\psi = (\psi'/\psi)' + (\psi'/\psi)^2$ , а  $dx = \varphi' dt$ , мы можем заменить условия (9.6.2) условием

$$(9.6.3) \quad \int_0^{\infty} \left| \frac{p^2}{\varphi'^2} - \frac{1}{2} \frac{\varphi''}{\varphi'^3} + \frac{3}{4} \left( \frac{\varphi''}{\varphi'^2} \right)^2 - 1 \right| \varphi' dt < \infty.$$

Кроме того, у нас есть еще условие  $\varphi(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , которое означает, что  $\int_0^{\infty} \varphi'(t) dt = \infty$ . Если, например,

$$(9.6.4) \quad \int_0^{\infty} |3p'^2 p^{-3} - 2p'' p^{-2}| dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} p dt = \infty,$$

то можно взять  $\varphi' = p$ , т. е.  $\varphi(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau$ , и тогда усло-

вие (9.6.3) выполнено<sup>1)</sup>. Кроме того, возьмем  $\psi(t) = (p(t))^{-1/2}$ .

Если выполнены условия (9.6.4), то из разд. 9.5 мы знаем, что уравнение (9.6.1) имеет решения  $y_1$  и  $y_2$  со следующим асимптотическим поведением:

$$(9.6.5) \quad \begin{aligned} y_1 &\sim (p(t))^{-1/2} \exp \left\{ i \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} & (t \rightarrow \infty), \\ y_2 &\sim (p(t))^{-1/2} \exp \left\{ -i \int_0^t p(\tau) d\tau \right\} & (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Замена  $x = \varphi(t)$ ,  $y = z(p(t))^{-1/2}$ , которую мы должны сделать в этом случае, преобразует уравнение к виду  $d^2 z/dx^2 + (1+g(x))z = 0$  с относительно малой функцией  $g(x)$ . Во многих случаях для получения асимптотических разложений функций  $y_1$  и  $y_2$  можно применить метод разд. 9.5.

Замену  $\varphi' = p$  можно использовать в весьма широком классе случаев. Условие (9.6.4) выполняется, например, при  $p(t) = t^\lambda$  ( $\lambda > -1$ ). Однако при  $p(t) = t^{-1}$  оно не выполняется. Условию (9.6.3) в этом случае еще удовлетворяет  $\varphi'(t) = \sqrt{3}/2t$ . При этом подинтегральная функция в нера-

<sup>1)</sup> См. Wintner A., *Phys. Rev.*, 72 (1947), 516—517.



венстве (9.6.3) тождественно равна нулю в соответствии с тем, что уравнение  $y'' + t^{-2}y = 0$  имеет простые решения  $y = t^\lambda$ ,  $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{3}$ .

Если  $c$  — некоторая положительная постоянная,  $c \leq 1/4$ , то решения уравнения  $y'' + ct^{-2}y = 0$  уже не осциллируют и то же самое можно сказать о решениях уравнения  $y'' + t^{2\lambda}y = 0$  при  $\lambda < -1$ .

Выводы этого раздела можно легко применить к уравнению (9.5.1), являющемуся частным случаем уравнения (9.6.1), с  $p(t) = (1 + t^{-1})^{1/2}$ . Легко видеть, что условие (9.6.4) в этом случае выполнено, если заменить интервал интегрирования  $(0, \infty)$  интервалом  $(1, \infty)$ , что, очевидно, не имеет значения. Таким образом, мы можем взять

$$\varphi(t) = \int_1^t \sqrt{1 + \tau^{-1}} d\tau, \quad \psi(t) = (1 + t^{-1})^{-1/4}.$$

Это означает, что

$$\varphi(t) = t + \frac{1}{2} \ln t + C + O(t^{-1}), \quad \psi(t) = 1 + O(t^{-1}),$$

где  $C$  — постоянная. Отсюда следует, что уравнение (9.5.1) имеет решения  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  со следующим асимптотическим поведением при  $t \rightarrow \infty$ :

$$y_1(t) \sim e^{it + \frac{i}{2} \ln t}, \quad y_2(t) \sim e^{-it - \frac{i}{2} \ln t}.$$

Если нас интересует асимптотический ряд для  $y_1$  и  $y_2$ , то мы можем рассуждать следующим образом. Пусть

$$S(t) = 1 + \frac{1}{2} t^{-1} + s_2 t^{-2} + \dots$$

— формальный ряд, удовлетворяющий уравнению

$$(9.6.6) \quad (1 + t^{-1}) S^{-2} = \frac{1}{2} S'' S^{-3} - \frac{3}{4} (S' S^{-2})^2 + 1.$$

Тогда подинтегральная функция в неравенстве (9.6.3) обращается в нуль при формальной подстановке  $\varphi' = S$ . Сущест-

вание  $S$  легко установить. Если подставить в правую часть равенства (9.6.6) выражение

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} t^{-1} + s_2 t^{-2} + \dots + s_n t^{-n},$$

то можно найти  $S_{n+1}$ .

Далее, возьмем  $\varphi(t)$  так, чтобы  $\varphi'(t) = S_n(t)$  при некотором  $n$ . Тогда легко видеть, что подинтегральная функция в неравенстве (9.6.3) равна  $O(t^{-n-1})$ . Отсюда следует [ср. (9.5.6)], что мы имеем решение

$$y_1(t) = \psi(t) e^{i\varphi(t)} (1 + O(t^{-n})),$$

где  $\psi(t)$  связано с  $\varphi(t)$  соотношениями (9.6.2). Теперь уже совсем легко доказать, что имеются асимптотические разложения

$$y_1(t) \approx e^{it + \frac{i}{2} \ln t} (S(t))^{-1/2} \exp\left(-is_2 t^{-1} - \frac{i}{2} s_3 t^{-2} - \dots\right),$$

$$y_2(t) \approx e^{-it - \frac{i}{2} \ln t} (S(t))^{-1/2} \exp\left(is_2 t^{-1} + \frac{i}{2} s_3 t^{-2} + \dots\right)$$

при  $t \rightarrow \infty$ .

Эти формулы нужно понимать в следующем смысле.

Функция  $y_1(t) e^{-it - \frac{i}{2} \ln t}$  имеет асимптотический ряд, получающийся в результате формального перемножения формальных рядов  $(S(t))^{-1/2}$  и  $\exp\left(-is_2 t^{-1} - \frac{i}{2} s_3 t^{-2} - \dots\right)$ ; аналогичное справедливо для  $y_2(t)$ .

Узнав о существовании такого разложения, мы можем, конечно, определить его коэффициенты непосредственно из уравнения Риккати (см. начало разд. 9.5).

## 9.7. Упражнения

1. Пусть  $\rho(t)$  — действительная и дифференцируемая на интервале  $1 < t < \infty$  функция, и пусть

$$t\rho'(t) + \rho(t) - t^{-1}\rho^2(t) = O(1) \quad (t \rightarrow \infty),$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1}\rho(t) < 1.$$

Показать, что  $\rho(t) = O(1)$  ( $t \rightarrow \infty$ ).

2. Дать другое доказательство оценки (9.2.7) [предполагая (9.2.1), (9.2.2), (9.2.3),  $k \geq 0$  и  $\rho(t) = O(1)$ ], основанное на интегрировании выражения

$$\{\psi(t)(b_0\rho(t) + a_0)\}' = \psi(t)O(t^{k-1}),$$

где  $\psi(t) = \exp(-b_0 t^{k+1}/(k+1))$ .

3. Показать, что если  $\rho(t) \not\equiv 0$  — некоторое действительное решение уравнения

$$\rho'(t) = \rho(t) + \rho^2(t) + t^{-1}\rho^4(t)$$

в некотором интервале  $t_0 \leq t < \infty$ , то найдутся такие постоянные  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , не зависящие ни от  $\rho(t)$ , ни от  $t_0$ , что

$$\rho(t) \approx a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \dots \quad (t \rightarrow \infty).$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<i>Глава 1.</i> Введение . . . . .	9
1.1. Что такое асимптотика? . . . . .	9
1.2. Символ $O$ . . . . .	11
1.3. Символ $o$ . . . . .	19
1.4. Асимптотическое равенство . . . . .	19
1.5. Асимптотические ряды . . . . .	20
1.6. Элементарные действия с асимптотическими рядами	24
1.7. Асимптотические оценки и вычислительная математика	28
1.8. Упражнения . . . . .	30
<i>Глава 2.</i> Неявные функции . . . . .	32
2.1. Введение . . . . .	32
2.2. Формула обращения Лагранжа . . . . .	33
2.3. Применения . . . . .	34
2.4. Более сложный случай . . . . .	36
2.5. Метод итераций . . . . .	41
2.6. Корни уравнений . . . . .	42
2.7. Асимптотические итерации . . . . .	44
2.8. Упражнения . . . . .	46
<i>Глава 3.</i> Суммирование . . . . .	47
3.1. Введение . . . . .	47
3.2. Случай $a$ . . . . .	48
3.3. Случай $b$ . . . . .	50
3.4. Случай $c$ . . . . .	51
3.5. Случай $d$ . . . . .	52
3.6. Формула суммирования Эйлера — Маклорена . . . . .	55
3.7. Пример . . . . .	58
3.8. Замечание . . . . .	58
3.9. Другой пример . . . . .	59

3.10. Формула Стирлинга для $\Gamma$ -функции в комплексной плоскости . . . . .	63
3.11. Знакопеременные суммы . . . . .	66
3.12. Применение формулы суммирования Пуассона . . . . .	71
3.13. Преобразование Абеля . . . . .	76
3.14. Упражнения . . . . .	79
<i>Глава 4. Метод Лапласа для оценки интегралов . . . . .</i>	<i>81</i>
4.1. Введение . . . . .	81
4.2. Общий случай . . . . .	85
4.3. Максимум на границе . . . . .	87
4.4. Асимптотические разложения . . . . .	88
4.5. Асимптотическое поведение гамма-функции . . . . .	92
4.6. Кратные интегралы . . . . .	94
4.7. О применениях . . . . .	96
4.8. Упражнения . . . . .	100
<i>Глава 5. Метод перевала . . . . .</i>	<i>102</i>
5.1. Метод . . . . .	102
5.2. Геометрическая интерпретация . . . . .	105
5.3. Поверхности без вершин . . . . .	107
5.4. Наиболее быстрый спуск . . . . .	109
5.5. Наиболее быстрый спуск в концевой точке . . . . .	111
5.6. Второй этап . . . . .	112
5.7. Простой общий случай . . . . .	113
5.8. Контур постоянной высоты . . . . .	115
5.9. Замкнутый контур . . . . .	117
5.10. Область влияния точки перевала . . . . .	117
5.11. Примеры . . . . .	119
5.12. Малые возмущения . . . . .	124
5.13. Упражнения . . . . .	130
<i>Глава 6. Применения метода перевала . . . . .</i>	<i>131</i>
6.1. Число разбиений конечного множества на классы . . . . .	132
6.2. Асимптотическое поведение $d_n$ . . . . .	133
6.3. Другой метод . . . . .	138
6.4. Сумма $S(s, n)$ . . . . .	139
6.5. Асимптотическое поведение $P$ . . . . .	143
6.6. Асимптотическое поведение $Q$ . . . . .	147
6.7. Окончательная оценка $S(s, n)$ . . . . .	151
6.8. Обобщенная гамма-функция . . . . .	152

---

6.9. Целая функция $G_0(s)$ . . . . .	156
6.10. Окончательная оценка $G(s)$ . . . . .	165
6.11. Упражнения . . . . .	167
<i>Глава 7. Непрямые методы</i> . . . . .	168
7.1. Прямые и не прямые асимптотические методы . . . . .	168
7.2. Тауберовы теоремы . . . . .	171
7.3. Дифференцирование асимптотических формул . . . . .	174
7.4. Аналогичная задача . . . . .	176
7.5. Метод Караматы . . . . .	179
7.6. Упражнения . . . . .	183
<i>Глава 8. Итерации функций</i> . . . . .	185
8.1. Введение . . . . .	185
8.2. Итерации функции . . . . .	185
8.3. Быстрая сходимость . . . . .	188
8.4. Медленная сходимость . . . . .	191
8.5. Подготовка . . . . .	192
8.6. Итерации синуса . . . . .	195
8.7. Другой метод . . . . .	198
8.8. Окончание исследования итераций синуса . . . . .	203
8.9. Об одном неравенстве, содержащем бесконечные ряды . . . . .	206
8.10. Итерационная задача . . . . .	209
8.11. Упражнения . . . . .	216
<i>Глава 9. Дифференциальные уравнения</i> . . . . .	217
9.1. Введение . . . . .	217
9.2. Уравнение Риккати . . . . .	219
9.3. Случай неустойчивости . . . . .	226
9.4. Применение к линейному уравнению второго порядка . . . . .	229
9.5. Случай осцилляции . . . . .	232
9.6. Более общие случаи осцилляции . . . . .	240
9.7. Упражнения . . . . .	243