ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
1222

PUBLICATIONS
DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE
L'UNIVERSITÉ DE NANCAGO

III

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

FORMES, COURANTS, FORMES HARMONIQUES

Par

GEORGES DE RHAM

Professeur aux Universités
de Genève et de Lausanne

PARIS
HERMANN & C^ie^, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6
1955

Ж. де РАМ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Перевод с французского
Д. А. ВАСИЛЬКОВА

С предисловием
П. С. АЛЕКСАНДРОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва — 1956

АННОТАЦИЯ

Теория, излагаемая в книге, охватывает широкую область современной математики, в которой стираются традиционные грани между алгеброй, геометрией и аиализом (в широком смысле слова). Основным во всей книге является введенное автором понятие «потока», которое включает в себя как частные случан топологическое понятие цепи, поиятие дифференциальной формы, являющееся одним из основных в современной дифференциальной геометрии, и понятие обобщенной функции, приобретающее все большее значение в функциональном анализе.

Книга рассчитана на широкий круг читателей-математиков: студентов старших курсов, аспирантов и научиых работииков. Она написана ясно и доступно и предполагает от читателя, помимо знаний в пределах первых трех курсов университета, только знакомство с простейшимн понятиями топологни и тензорного нсчисления.

Редакция литературы по математическим наукам

Заведующий редакцией профессор А. Г. КУРОШ.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В наши дни происходит большая перестройка всего здания математики, и сейчас даже трудно сказать, куда она приведет, какие очертания это здание примет по истечении ближайших 10—20 лет. Ясно одно: развитие математики не дает повода ни к какому скептицизму, ни к каким опасениям, что пора больших математических идей миновала, что математика захлебнется в потоке отдельных теорий с их отдельными, мелкими задачами.

Конец прошлого и начало текущего столетия стояли под знаком зарождения и развития теоретико-множественной математики. Теория множеств и ее ближайшие приложения не только образовали новый предмет математического исследования; значение теории множеств оказалось неизмеримо большим: она дала универсальный новый метод, быстро захвативший всю математику. Далее, теория множеств, возникшая первоначально в связи с задачей—кажущейся в настоящее время скромной—поставить на твердое основание математический анализ, создала возможность по существу нового, аксиоматического подхода к математике. Наконец, теория множеств породила те сомнения в ее собственной достоверности, из которых далее развились все исследования по основаниям математики и математической логике; они переплелись в настоящее время с конкретными проблемами самой математики.

Аксиоматический метод и аппарат теории множеств привели к построению большого количества новых математических понятий, исследование которых стало предметом новых математических дисциплин. Так возникли современная абстрактная алгебра и прежде всего теория групп в ее сегодняшнем виде[1], абстрактная топология (тео-

[1]) Заметим, что полвека назад в теории групп не умели как следует сформулировать даже так называемую теорему о гомоморфизмах!

рия топологических пространств), общая теория меры и др.

Вскоре стали раздаваться голоса (и притом со стороны таких широко мыслящих математиков, как, например, Герман Вейль), предупреждающие против чрезмерного увлечения самодовлеющими аксиоматическими построениями. Надо сказать, что конкретное содержание математики давало критерии, способные направить абстрактное исследование по путям, предохраняющим от самодовлеющего построения новых понятий: достаточно вспомнить, что тут же, на рубеже столетий, возникла теория интегральных уравнений, а появившееся вслед за нею и в связи с нею понятие гильбертова пространства открыло математическому исследованию целый новый мир! Одним словом, возник линейный функциональный анализ. В то же время также связанные с именем Гильберта прямые методы вариационного исчисления означали возникновение и нелинейного функционального анализа. Все это было по существу торжеством теоретико-множественной точки зрения в области конкретного математического анализа.

Быстрое развитие функционального анализа повлекло за собой, с одной стороны, рост интереса к теории абстрактных пространств, а вместе с нею и к топологии, а с другой стороны—большой сдвиг математики в сторону алгебры, и притом линейной алгебры. Когда оказалось, что именно линейный функциональный анализ представляет собой основной математический аппарат квантовой физики, то его положение как одной из центральных дисциплин современной математики уже совсем укрепилось. В то же время замкнулся и некоторый круг в идейном развитии математики как таковой. Так называемая «классическая» математика всегда сознавала свои связи с естествознанием и гордилась ими. Новая, «абстрактная», теоретико-множественная математика первое время как будто чуждалась этих связей. Но вот она стала сама одним из основных орудий физики (и, замечу в скобках, общей механики—теории динамических систем). И если сейчас можно, а мне кажется и должно, говорить о некотором «неоклассицизме» в математике, то именно в том смысле, что математика с той же силой, как во времена Ньютона, Бернулли и Лапласа, осознала свои жизненные связи с естествознанием, а отнюдь не в смысле отказа от тех ее больших абстрактных завоеваний, которыми было ознаменовано ее развитие в последние десятилетия. Наоборот, поразительно, насколько эти именно абстрактные завоевания оказываются решающими для новейшей математики, вновь повернутой к изучению окружающего нас действительного мира. Правда, не всегда, скажем, физики нуждаются именно в тех алгебраических и топологических понятиях, которые с особой любовью культивировали сами алгебраисты и топологи. Но не будь этой любви и этой широкой разработки в с е й почвы данной области, не были бы найдены и те принадлежащие ей понятия и методы, которые оказались плодотворными и важными для других областей науки. Несомненно, что генеральная линия развития математики определяется ее связями с естествознанием. Однако нельзя представлять себе развития математики в виде простого поступательного движения по этой линии: в действительности движение математики вперед в каждый момент времени слагается как бы из двух компонент, из которых лишь одна идет непосредственно по главной линии развития, а другая действует в сторону и на первый взгляд отклоняет науку от ее прямого движения. В действительности же на этих боковых путях создаются те идеи, которые оказываются необходимыми на следующем этапе развития науки. Такой боковой линией развития были в начале XIX века, например, теория Галуа и неэвклидова геометрия, а в конце того же века—теория множеств. Этих примеров достаточно, чтобы понять, как на этих «боковых» путях рождаются идеи, имеющие часто основополагающее значение для направления главного потока развития в последующую эпоху.

* * *

При таком сложном процессе развития математики в каждую эпоху возникают очаги взаимодействия различных дисциплин, различных методов, различных направлений. Эти очаги указывают перекрестки больших путей науки, на которых куются орудия ее дальнейшего прогресса.

В настоящее время можно видеть особенно мощно разгоревшееся пламя такого взаимодействия: оно захватывает алгебру, топологию, дифференциальную и алгебраическую геометрию, группы Ли. Чтобы понять всю переплавляющую силу этого пламени, вспомним, что комбинаторная топология, возникшая как отдельная математическая дисциплина в девяностых годах прошлого века в знаменитых мемуарах Пуанкаре, первоначально лежала в стороне как от собственно алгебры, так и от всей теоретико-множественной математики; дифференциальная геометрия даже служила (и служит) примером области математики, устоявшей от наступления теоретико-множественного метода: ее основные объекты до недавнего времени не улавливались теоретико-множественными концепциями, так же, надо сказать, как основной объект классической теории групп Ли — то, что мы сейчас называем локальной группой Ли. Между тем признанная к жизни потребностями физики, а именно общей теории относительности, многомерная дифференциальная геометрия и ее аппарат—тензорный анализ во всех его разновидностях—составляют существенную часть математики сегодняшнего дня.

Основные понятия алгебраической геометрии сравнительно давно (тридцать лет назад) оказались включенными в круг идей абстрактной алгебры; в этом—большая заслуга школы Эмми Нётер. При этом, однако, вся топологическая часть алгебраической геометрии была далеко не полностью принята во внимание.

То, что теория гомологий на поверхностях имеет свое независимое от топологии толкование внутри алгебраической геометрии, было давно известно. Но то обстоятельство, что гомологическая теория замкнутых дифференцируемых многообразий может быть изложена в терминах теории дифференциальных форм на этих многообразиях, привело (одновременно—в 1934 году—и независимо друг от друга) Дж. Александера в Америке и А. Н. Колмогорова у нас к фундаментальному топологическому открытию—так называемых верхних или ∇-гомологий (теперь называемых обычно когомологиями), — открытию, в значительной степени преобразовавшему всю современную топологию. При этом следует отметить, что до некоторой степени это открытие было подготовлено выдающимися работами автора этой книги[1]) де Рама, в которых рассматривались кратные ин-

[1]) Работы эти указаны в библиографии, помещенной в конце настоящей книги.

тегралы на замкнутых многообразиях и, повидимому, впервые был придан точный смысл аналогиям между основными понятиями гомологической топологии многообразий—граница и пересечение цепей—и теории интегрирования на многообразиях—внешняя производная и произведение.

Книга, лежащая сейчас перед читателем, имеет своими первыми истоками только что упомянутые ранние работы ее автора и должна рассматриваться как далеко идущее развитие идей, зародыш которых имелся в этих работах, но которые получили чрезвычайное обогащение от соприкосновения с новыми идеями, заимствованными из функционального анализа. Получившаяся в результате **теория потоков**, как ее называет автор, охватывает как гомологическую топологию на дифференцируемых многообразиях, так и теорию определенных на них дифференциальных форм. Но теория потоков в смысле де Рама содержит и многое другое: например, она содержит в качестве нульмерного частного случая потока понятие обобщенной функции («распределения» по терминологии Л. Шварца). Уже отсюда ясны широкие контуры теории, изложение которой представляет собой предмет этой книги.

Что же такое представляет собою в самых общих чертах понятие потока?

На бесконечно дифференцируемом n-мерном многообразии определяются дифференциальные формы степени (или «размерности») $p \leqslant n$,

$$\varphi = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

где знаком $\wedge$ обозначено действие внешнего умножения (ассоциативного, антикоммутативного и дистрибутивного по отношению к сложению). Для формы можно определить носитель—наименьшее замкнутое множество, за пределами которого форма (в естественном смысле слова) равна нулю; формы можно дифференцировать (инвариантным по отношению к выбору систем координат образом).

Рассматриваются формы с компактными носителями; они, очевидно, образуют линейное пространство. Линейные функционалы на этом пространстве, подчиненные дополнительному условию непрерывности (заимствованному из теории распределений), и суть потоки по определению де Рама.

Если в многообразии дана цепь c (в смысле комбинаторной топологии), то по ней можно интегрировать форму φ; полученный интеграл $\int\limits_c \varphi$ является линейным функционалом в пространстве форм, т. е. потоком; с этим потоком и можно отождествить данную цепь c:

$$c[\varphi] = \int\limits_c \varphi.$$

С другой стороны, если дана форма α, то она определяет поток

$$\alpha[\varphi] = \int \alpha \wedge \varphi$$

и может быть отождествлена с этим потоком.

Потоки можно дифференцировать (повышая при этом на 1 их «размерность»); для них можно определять и границу, причем в основном случае однородного потока оба получаемых потока (граница и дифференциал данного потока) совпадают с точностью до знака. Уже это наводит на мысль (которая вполне и подтверждается), что для потоков можно строить и гомологическую теорию и «анализ», причем обе теории будут развиваться параллельно. Однако на этом дело не останавливается: вводится также понятие гомотопии, и в конце концов достигается полное примыкание к классическому построению топологии многообразий.

В связи с этим мне хочется сказать несколько слов об одной стороне развития методов топологии многообразий за 60 лет ее существования. Как известно, Пуанкаре в своем первом основном мемуаре Analysis Situs рассматривал по существу дифференцируемые многообразия, заданные в эвклидовых пространствах системами уравнений. Но уже во втором своем топологическом мемуаре он перешел к триангуляциям (разбиениям на симплексы) и таким образом впервые ввел в топологию симплициальные комплексы как основной аппарат той части топологии, которая после этого получила все основания называться комбинаторной. Симплициальные комплексы оказались орудием, пригодным не только для изучения многообразий и полиэдров (т. е. множеств, допускающих разбиения на симплексы), но и точечных множеств и даже топологических пространств весьма общей природы. Это было впервые показано мною и развито затем многими другими математиками. Но в топологии многообразий наметилось и встречное течение—отказа от применения триангуляций, во-первых, и большей концентрации на простейшем понятии n-мерной топологии, понятии многообразия, во-вторых. Это течение вылилось в конце концов в исследование—даже в пределах самой топологии—многообразий, стесненных требованием дифференцируемости и даже наличия римановой метрики. Этот подход можно найти у Хопфа и, с другой стороны, у Л. С. Понтрягина, который в некоторых случаях требованием дифференцируемости и аппроксимации любых отображений дифференцируемыми с большим успехом заменял рассмотрение триангуляций и симплициальных отображений, аппроксимирующих данное непрерывное отображение. Повидимому, эти новые методы, идущие опять-таки по пути сближения топологии с анализом и дифференциальной геометрией, имеют перед собою большое будущее; книга де Рама, как кажется, очень подтверждает такой прогноз и подтверждает вместе с тем те «неоклассические» тенденции, о которых я уже упоминал выше.

В последней, пятой главе (самой длинной—она занимает треть всей книги) предполагается, что многообразие снабжено римановой метрикой, что позволяет с новой точки зрения рассматривать гармонические формы (в смысле Ходжа) и гармонические потоки, к которым автор приходит посредством обобщенного оператора Лапласа

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

(в нем, кроме дифференцирования d, участвует еще «кодифференцирование» δ). Доказывается теорема Ходжа о существовании на замкнутом римановом многообразии гармонической формы, имеющей заданные периоды на данных гомологически независимых циклах, и обобщается теорема Кодаиры таким образом, что получается однозначная разложимость в римановом многообразии каждого потока «с суммируемым квадратом» на три взаимно ортогональных потока, из которых первый гомологичен нулю, второй когомологичен нулю, а третий одновременно замкнут и козамкнут (следовательно, гармоничен).

Ограничиваюсь этими беглыми замечаниями, касающимися содержания книги: более подробное изложение здесь, в предисловии, было бы излишним, так как книга написана очень обозримо и можно легко ориентироваться в ее содержании, не подвергая ее систематическому изучению.

* * *

В настоящее время традиционное деление математики на алгебру, геометрию, анализ и т. д. в значительной степени утратило свой смысл: именно сейчас делается очень много такой математики, и притом самой первоклассной, которая одновременно есть и алгебра, и топология, и анализ (в том числе функциональный), и дифференциальная и алгебраическая геометрия. Книга де Рама принадлежит именно к этой «ко́мплексной математике». Можно не сомневаться, что во всем этом направлении потенциально сосредоточена значительная часть будущего прогресса всей математической науки в целом; много впечатлений, подтверждающих эту точку зреиия, можно было, в частности, получить в работах последнего международного математического конгресса (Амстердам, 1954), а также на только что состоявшейся Всесоюзной конференции по функциональному анализу (Москва, январь 1956).

Большим достоинством сочинения де Рама является его доступность в смысле предполагаемого им запаса знаний читателя—действительно минимального, если иметь в виду сложность излагаемых вопросов. Как я уже говорил, книга композиционно очень ясна и обозрима. Сделано все для того, чтобы облегчить труд читателя—тщательные формулировки всех основных понятий, аккуратное выделение определений и теорем, полно и удобно составленные указатели терминов и обозначений, наконец, библиографический указатель, хотя и не претендующий на полноту, но, повидимому, достаточно вводящий читателя в литературу излагаемых вопросов. Говоря о доступности книги в смысле предполагаемых ею предварительных познаний, не следует, конечно, недооценивать тот уровень общей математической культуры, который при данном содержании сочинения предполагается и не может не предполагаться.

Думаю, что можно с уверенностью сказать, что издаваемое сочинение представляет собою выдающееся произведение новейшей математической литературы и что выход его в свет на русском языке будет полезен очень многим советским математикам самых различных математических специальностей и всех научных возрастов—от только приступающих к научной работе до находящихся уже на ее закате, но не утративших еще интереса к значительным явлениям, происходящим в наши дни в нашей науке.

Болшево, Комаровка, *П. Александров.*

27 января 1956 г.

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге, в основу которой положены лекции, читанные в Гарвардском университете (1949), в Принстонском Institute for Advanced Study (1950) и в университетах Женевы и Лозанны, я попытался дать связное изложение теории дифференциальных форм на многообразии и теории гармонических дифференциальных форм на римановом пространстве.

Ключ к пониманию того, почему гомологические свойства многообразия находят свое отражение и в теории дифференциальных форм и в теории цепей, дает понятие *потока*, охватывающее в качестве частных случаев понятия как дифференциальной формы, так и цепи. Эта мысль руководила мной в моих исследованиях, начиная с 1928 г. Но к точному определению, принятому в настоящей книге, меня привело понятие *распределения*, введенное Л. Шварцем в 1945 г. Согласно нашей терминологии, распределение представляет собой поток степени 0, а поток можно рассматривать как дифференциальную форму, коэффициентами которой служат распределения

Автору этой книги большую пользу принесли сами работы Л. Шварца, в особенности его прекрасный труд по теории распределений. Однако от читателя не требуется знакомства с ними. Оставив в стороне приложения теории, я ограничился тем, что отобрал теоремы, казавшиеся мне существенными, и постарался снабдить их простыми и исчерпывающими доказательствами, доступными читателю, обладающему минимальной математической культурой. Помимо материала, входящего в любую программу экзаменов на степень лицинциата, читателю достаточно владеть самыми основными понятиями общей топологии и тензорного анализа, а для чтения последней главы нужно знать теоремы Фредгольма.

В главе I вводится понятие дифференцируемого многообразия, после чего устанавливаются некоторые результаты, необходимые для дальнейшего, в частности существование «разбиения единицы» и теорема Уитнея о погружении многообразия в эвклидово пространство.

В главе II излагаются основы теории дифференциальных форм и дифференцируемых цепей, а также исчисления внешних дифференциальных форм Э. Картана и устанавливается общая формула Стокса. Здесь же я ввожу и в дальнейшем систематически использую понятия многообразия и формы «четного рода» и «нечетного рода», благодаря чему теория оказывается применимой и к неориентируемым многообразиям. Для других обобщений оказывается полезным понятие «двойной формы».

Глава III посвящена определению и изучению общих свойств потоков. Попутно упоминаются, с соответствующими доказательствами, некоторые необходимые сведения о топологических векторных пространствах. Вводятся «двойные потоки», обобщающие «ядра-распределения» Л. Шварца, и регуляризирующие операторы, позволяющие представить, в некотором точно указанном смысле, любой поток в виде предела последовательности форм.

В главе IV с помощью понятия потока определяются и исследуются группы гомологий многообразия. Здесь читатель найдет полные доказательства теорем, устанавливающих связь между дифференциальными формами и цепями, а также теорему двойственности Пуанкаре для дифференцируемого многообразия.

В главе V излагаются основы теории гармонических дифференциальных форм в римановом пространстве. Доказывается теорема Ходжа, сначала методом интегральных уравнений, который в случае компактных пространств приводит к окончательным результатам. Как леммы, лежащие в основе этого метода, так и свойства геодезического расстояния, которыми в дальнейшем приходится пользоваться, подробно доказываются. Затем излагается метод ортогонального проектирования в гильбертовом пространстве, который дает возможность распространить теорему Ходжа на некомпактные пространства, и обобщается, с помощью понятия потока, теорема Кодаира о разложении. Отсюда выводятся формулы, представляющие в виде интегралов индекс Кронекера пары цепей. Наконец, с помощью метода, принадлежащего Э. Леви, доказывается аналитичность гармонических дифференциальных форм в аналитическом римановом пространстве.

Гг. Андре Вейль и Лоран Шварц любезно согласились прочесть рукопись в ее первоначальном виде и высказали ряд весьма полезных замечаний и предложений. Приношу им за это свою живейшую благодарность.

Лозанна, август 1953 г.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Понятия многообразия и дифференцируемой структуры

Многообразие n измерений представляет собой топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной открытой n-мерной сфере. Мы всегда будем предполагать, что в этом пространстве существует *счетная база*, т. е. счетная система открытых множеств, обладающая тем свойством, что всякое открытое множество может быть представлено как соединение множеств, входящих в эту систему.

Многообразие n измерений V наделено *дифференцируемой структурой бесконечного порядка*, или, как мы условимся кратко говорить, *структурой C^∞*, если для любой точки x из V определена некоторая совокупность действительных функций, называемых функциями класса C^∞ в x, причем выполняется следующая аксиома:

Аксиома структур C^∞. *Для каждой точки u из V существуют ее окрестность U и n действительных функций $x_1(x), \ldots, x_n(x)$, заданных на U, такие, что*

a) *отображение $x \to (x_1(x), \ldots, x_n(x))$ есть гомеоморфизм окрестности U на некоторое открытое множество в эвклидовом пространстве R^n; следовательно, всякая функция f, заданная на U или на подмножестве U, может быть выражена как функция переменных $x_1, \ldots, x_n$,*

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n);$$

b) *$f(x)$ есть функция класса C^∞ в некоторой точке, принадлежащей U, тогда и только тогда, когда существует заключенная в U окрестность W этой точки, такая, что $f(x)$ определена на W и $f(x_1, \ldots, x_n)$ при $x_1, \ldots, x_n$, соответствующих точкам окрестности W, имеет непрерывные производные всех порядков.*

Будем говорить, что $f(x)$ — функция класса C^∞, если она принадлежит к классу C^∞ в каждой точке многообразия V; аналогично определяется функция класса C^∞ на каком-либо подмножестве A многообразия V. Из самого определения вытекает, что точки, в которых заданная функция принадлежит к классу C^∞, образуют открытое множество.

Всякая система n функций $x_1, \ldots, x_n$, заданных в открытом множестве U и обладающих свойствами a) и b), называется *системой локальных координат в* U. Наша аксиома обеспечивает существование такой системы в окрестности произвольной точки.

Согласно b), эти координаты являются функциями класса C^∞ в U. Если $f_1, \ldots, f_n$ — какая-нибудь другая система локальных координат в U, то f_i также представляют собой функции класса C^∞ в U, причем их якобиан по переменным $x_1, \ldots, x_n$ не обращается в нуль в U. Обратно, в силу классической теоремы о неявных функциях, если $f_1, \ldots, f_n$ — функции класса C^∞ в U и их якобиан отличен от нуля в какой-либо точке u', принадлежащей U, то в некоторой окрестности U' точки u' функции $f_1, \ldots, f_n$ образуют систему локальных координат.

В конкретных случаях структура C^∞ чаще всего задается посредством открытого покрытия $\{U_i\}$ многообразия V с системой локальных координат в каждом U_i. При этом, согласно условию b), нужно, чтобы в пересечении $U_i \cap U_j$ координаты одной системы были бесконечно дифференцируемы по координатам другой системы.

В координатном эвклидовом пространстве R^n существует каноническая структура C^∞, заданная координатами $x_1, \ldots, x_n$, определяющими R^n; функциями класса C^∞ являются функции, бесконечно дифференцируемые по $x_1, \ldots, x_n$.

Говорят, что функция, заданная на многообразии, наделенном структурой C^∞, есть функция класса C^r, где r — целое неотрицательное число, если, будучи выражена через локальные координаты, она имеет непрерывные производные по ним порядка $\leqslant r$. Функция класса C^0 есть не что иное, как непрерывная функция.

Под *многообразием класса* C^∞ будем понимать многообразие, наделенное структурой C^∞. Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только многообразия класса C^∞, то условимся называть их просто *многообразиями*[1]).

Аналогичным образом определяются понятия дифференцируемой структуры порядка r и действительной аналитической структуры: для этого достаточно изменить условие b) в приведенной выше аксиоме, потребовав, чтобы $f(x_1, \ldots, x_n)$ имела непрерывные производные порядка $\leqslant r$ или, соответственно, чтобы она была действительной аналитической функцией. Таким образом мы получим многообразия класса C^r и действительные аналитические многообразия.

§ 2. Разбиение единицы. Функции на произведении пространств[2])

Возьмем функцию $f(x)$, равную e^{-1/x^2} при $x > 0$ и равную 0 при $x \leqslant 0$, и положим

$$g(x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(t) f(1-t)\, dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) f(1-t)\, dt}.$$

Тогда функция $h(x) = g(x+1) - g(x)$ будет принадлежать к классу C^∞; она неотрицательна, равна нулю вне интервала $(-1, 1)$, и как легко видеть,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(x-j) = 1.$$

Придав x последовательно значения $\frac{x_1}{\varepsilon}, \ldots, \frac{x_n}{\varepsilon}$ и перемножив почленно соответствующие равенства, получим

$$\sum_{j_1, \ldots, j_n} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - j_1\right) \ldots h\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - j_n\right) = 1.$$

---

[1]) Это определение дифференцируемого многообразия эквивалентно определению, принадлежащему Уитнею, и по своей форме весьма близко к определению, данному Шевалле (Whitney [1]; Chevalley [1], гл. III).

[2]) В связи с этим параграфом см. Dieudonné [1] и Schwartz [2], стр. 23.

Перенумеровав всевозможные системы целочисленных значений n индексов $j_1, \ldots, j_n$ целыми положительными числами j, $j = j(j_1, \ldots, j_n)$, обозначив x точку $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства R^n и положив

$$\varphi_j(x) = h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - j_1\right) \ldots h\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - j_n\right),$$

мы запишем полученное соотношение в виде

$$\sum_j \varphi_j(x) = 1. \qquad (1)$$

Функция $\varphi_j(x)$ принадлежит к классу C^∞, неотрицательна и равна нулю вне куба с центром в $(j_1\varepsilon, \ldots, j_n\varepsilon)$, определяемого неравенствами $|x_i - j_i\varepsilon| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Носителем непрерывной функции называется наименьшее замкнутое множество, вне которого эта функция равна нулю. Так, описанный выше куб является носителем функции $\varphi_j(x)$.

Пусть A — какое-либо компактное множество в R^n, а B — некоторое открытое множество, содержащее A. При достаточно малом ε диагональ куба с ребром 2ε окажется меньше расстояния от A до границы множества B, и если такой куб пересекается с A, то он целиком заключен в B. Рассмотрим функции $\varphi_j(x)$, носители которых имеют общие точки с множеством A. Таких $\varphi_j(x)$ — конечное число. Их сумма будет функцией класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в B, все ее значения заключены между 0 и 1, и на A она равна 1. Таким образом, доказано следующее предложение:

Лемма. *Если A — компактное множество в R^n и B — открытое множество, содержащее A, то существует функция класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в B, со значениями, заключенными между* 0 *и* 1, *равная* 1 *на* A.

Этой леммой мы воспользуемся для доказательства следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие многообразия V, где i пробегает какое-либо множество индексов. Тогда существует конечная или счетная система функ-*

ций φ_j, *обладающая следующими свойствами:*

1°. $$\varphi_j \geqslant 0, \qquad \sum_j \varphi_j = 1.$$

2°. *Каждая функция* φ_j *принадлежит к классу* C^∞ *и обладает компактным носителем, содержащимся в одном из* U_i.

3°. *Каждая точка многообразия* V *обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом носителей функций* φ_j.

В том случае, когда выполняется условие 1°, выражение $\sum\limits_j \varphi_j$ называется *разбиением единицы*. Условие 2° формулируют, говоря, что это разбиение *подчинено* покрытию $\{U_i\}$, а условие 3° — что оно *локально конечно*. В силу теоремы Бореля — Лебега, условие 3° эквивалентно следующему:

3′°. *Любое компактное множество пересекается лишь с конечным числом носителей функций* φ_j.

Множество функций φ_j конечно, если V компактно, и только в этом случае.

Для доказательства этой теоремы покажем, что существует открытое покрытие $\{G_i\}$ многообразия V, обладающее такими свойствами:

a) Оно подчинено покрытию $\{U_i\}$, т. е. замыкание $\overline{G}_i$ каждого G_i заключено в одном из U_j.

b) Покрытие $\{G_i\}$ локально конечно, т. е. любое компактное множество пересекается лишь с конечным числом множеств G_i.

c) Замыкание $\overline{G}_i$ любого G_i заключено в области определения некоторой системы локальных координат.

Мы предположили, что многообразие V имеет счетную базу открытых множеств, поэтому из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное или счетное покрытие. Для любой точки существует содержащее ее открытое множество U' с компактным замыканием $\overline{U}'$, заключенным в одном из U_i и одновременно в области определения некоторой системы локальных координат; следовательно, существует конечное или счетное покрытие $\{U'_j\}$, образованное такими множествами и обладающее свойствами a) и c). Если оно не будет удовлетворять условию b), то его можно сделать локально конечным, уменьшив U'_j следующим образом.

Рассмотрим последовательность компактных множеств $K_1, K_2, \ldots$ и последовательность целых чисел $j_1, j_2, \ldots$, определенные по индукции:

$$K_1 = \overline{U}'_1, \qquad j_1 = 1;$$

$j_m =$ наименьшее целое $> j_{m-1}$, такое, что $K_{m-1} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{j_m} U'_j$,

$$K_m = \bigcup_{j=1}^{j_m} \overline{U}'_j.$$

Множество K_{m-1} лежит внутри множества K_m, и любое компактное множество заключено в K_m с достаточно большими номерами m. Определим теперь множества G_i, положив

$$G_i = U'_i, \text{ если } i \leqslant j_2,$$

$$G_i = U'_i \cap \complement K_{m-1}, \text{ если } j_m < i \leqslant j_{m+1} \quad (m > 1),$$

где $\complement$ обозначает дополнение.

Для того чтобы показать, что G_i образуют покрытие многообразия V, достаточно проверить при всех m равенство

$$\bigcup_{i=1}^{j_{m+1}} G_i = \bigcup_{i=1}^{j_{m+1}} U'_i.$$

При $m = 1$ оно справедливо, так как $G_i = U'_i$, когда $i \leqslant j_2$. Если мы допустим, что

$$\bigcup_{i=1}^{j_m} G_i = \bigcup_{i=1}^{j_m} U'_i = A,$$

то, в силу соотношения $K_{m-1} \subset A$, получим $G_i \cup A = U'_i \cup A$ при $j_m < i \leqslant j_{m+1}$, откуда и будет следовать требуемое равенство для $m+1$.

Так как $G_i \subset U'_i$, то покрытие $\{G_i\}$ обладает свойствами a) и c); свойством b) оно также обладает, т. е. является локально конечным, потому что любое компактное множество содержится во всех K_m с достаточно большими m и при $i > j_{m+1}$ множества G_i и K_m не пересекаются.

Теперь мы строим другое открытое покрытие $\{H_i\}$, такое, что $\overline{H}_i \subset G_i$. Согласно лемме, существует функция ψ_i класса C^∞ со значениями между 0 и 1, равная 1 на H_i, носитель которой содержится в G_i. Сумма $\psi = \sum_i \psi_i$ всюду принимает значения $\geqslant 1$. Положим $\varphi_j = \psi_j/\psi$. Это — функция класса C^∞, ее носитель содержится в G_j и

$$\varphi_j \geqslant 0, \qquad \sum_i \varphi_j = 1.$$

Таким образом, все утверждения теоремы 1 доказаны.

В качестве следствия мы получаем предложение, сводящееся в случае $V = R^n$ к приведенной выше лемме.

Следствие 1. *Если A — компактное множество в V, а B — открытое множество, содержащее A, то существует функция класса C^∞ с носителем, содержащимся в B, со значениями между 0 и 1, равная 1 на A.*

В самом деле, если $1 = \sum \varphi_j$ — разбиение единицы, которое подчинено покрытию, образованному множеством B и дополнением множества A, то требуемыми свойствами обладает сумма тех φ_j, носители которых пересекаются с A.

Следствие 2[1]). *Пусть $\{U_i\}$ — открытое покрытие многообразия V. Существует система функций φ_i, где i пробегает то же множество индексов, обладающая следующими свойствами:*

1°. $$\varphi_i \geqslant 0, \qquad \sum_i \varphi_i = 1.$$

2°. *Каждая φ_i — функция класса C^∞, и ее носитель содержится в U_i.*

3°. *Каждая точка многообразия V обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом носителей функций φ_i.*

Заметим, что следствие 2, легко вытекающее из теоремы 1, содержит следствие 1 в качестве частного случая, который соответствует покрытию, образованному множествами $U_1 = \complement A$ и $U_2 = B$. Сама теорема 1 является его частным случаем, получающимся в предположении, что U_i относительно компактны. Очевидно, в силу свойства 1°,

---

[1]) Формулировку этого следствия сообщил мне Л. Шварц.

что число функций φ_i, не равных нулю тождественно, конечно или счетно.

Теорема 2. *Пусть U и W — ограниченные открытые интервалы в пространствах R^l и R^m, а y, z и $x=(y, z)$ — переменные точки соответственно пространств R^l, R^m и $R^n=R^l\times R^m$ $(n=l+m)$. Тогда любая функция $\varphi(x)$ класса C^∞ с носителем, заключенным в $U\times W$, может быть аппроксимирована последовательностью функций $\sigma_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, каждая из которых представляет собой сумму конечного числа произведений вида $\varphi_1(y)\,\varphi_2(z)$, где $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(z)$ — функции класса C^∞ с носителями, содержащимися соответственно в U и W, таким образом, что $\sigma_k(x)$ при $k\to\infty$ стремится равномерно к $\varphi(x)$ и любая производная функции $\sigma_k(x)$ стремится равномерно к соответствующей производной функции $\varphi(x)$.*

С помощью этой теоремы ниже будет доказана другая, более общая (теорема 6, § 7), содержащая эту в качестве частного случая. Для доказательства координаты точки x обозначим через $x_1, \ldots, x_n$, а координаты точек y и z — соответственно через $x_1, \ldots, x_l$ и $x_{l+1}, \ldots, x_n$; можно предположить, что $U\times W$ есть интервал $0<x_i<1$ $(i=1, \ldots, n)$.

Пусть $f(x)$ — функция, полученная дифференцированием $\varphi(x)$ p раз по каждому аргументу,

$$f(x)=\frac{\partial^{np}}{\partial x_1^p\ldots\partial x_n^p}\varphi(x).$$

Воспользуемся разбиением единицы, заданным формулой (1), причем заметим, что каждая $\varphi_j(x)$ является произведением двух функций, одной — переменного y, другой — переменного z. Так как носитель функции $\varphi(x)$, представляющий собой компактное множество, лежащее внутри $U\times W$, содержит носитель функции $f(x)$, то можно выбрать настолько малое ε, чтобы любой куб с ребром 2ε, пересекающийся с носителем $f(x)$, был целиком заключен в $U\times W$ и чтобы колебание функции $f(x)$ на таком кубе было меньше заранее заданного положительного η.

Пусть c_j — центр куба, служащего носителем функции φ_j. Положим

$$P(x) = \sum_j f(c_j)\, \varphi_j(x).$$

Число слагаемых в правой части конечно, так как $f(c_j) = 0$ для c_j, лежащих вне $U \times W$. С другой стороны,

$$|f(c_j) - f(x)| < \eta,$$

когда x принадлежит носителю функции $\varphi_j(x)$, поэтому

$$|f(c_j) - f(x)|\, \varphi_j(x) \leqslant \eta\, \varphi_j(x),$$

откуда

$$|P(x) - f(x)| \leqslant \eta, \qquad (2)$$

так как $P(x) - f(x) = \sum_j [f(c_j) - f(x)]\, \varphi_j(x)$.

Заметим, что $P(x)$ представляет собой сумму конечного числа произведений функции класса C^∞ переменного y с носителем, заключенным в U, и функции класса C^∞ переменного z с носителем, заключенным в W.

Пусть $Q(x)$ — функция, полученная последовательным интегрированием $P(x)$ от 0 до x_i, p раз по каждому аргументу x_i,

$$Q(O) = 0, \qquad \frac{\partial^{np}}{\partial x_1^p \ldots \partial x_n^p} Q(x) = P(x).$$

Если D — произвольный оператор дифференцирования, порядок которого по каждому переменному не превышает p, то в силу неравенства (2),

$$|DQ(x) - D\varphi(x)| \leqslant \eta \quad \text{при } x \in U \times W. \qquad (3)$$

Функция $Q(x)$, так же как $P(x)$, представляет собой сумму конечного числа произведений функций от y класса C^∞ на функции от z класса C^∞, но ее носитель, вообще говоря, не компактен, и указанное неравенство не выполняется, вообще говоря, вне $U \times W$.

Можно указать компактные множества A и B, содержащиеся соответственно в U и W, такие, что носитель функции $\varphi(x)$ заключен в $A \times B$. Согласно лемме, существуют функция $L_1(y)$ класса C^∞ с носителем, заключенным в U, со значениями между 0 и 1, равная 1 на A, и функция $L_2(z)$ класса C^∞ с носителем, заключенным в W, со значениями между 0 и 1, равная 1 на B. Положим $L(x)=L_1(y)L_2(z)$ и

$$\sigma(x)=L(x)Q(x).$$

Функция $\sigma(x)$ является суммой конечного числа произведений функций от y класса C^∞ с носителями, заключенными в U, на функции от z класса C^∞ с носителями, заключенными W. Так как $L(x)=1$ на носителе функции $\varphi(x)$, то $\varphi(x)=L(x)\varphi(x)$ и

$$\sigma(x)-\varphi(x)=L(x)[Q(x)-\varphi(x)].$$

Пусть M — максимум модулей производных $DL(x)$ функции $L(x)$ порядка $\leqslant p$ по каждому из переменных (включая саму $L(x)$ — производную порядка 0). Согласно правилам дифференцирования, каждая из производных $D[\sigma(x)-\varphi(x)]$ представляет собой сумму не более 2^{np} произведений производных от $L(x)$ на производные от $Q(x)-\varphi(x)$, причем порядки тех и других по каждому из переменных не превосходят p. В силу (3),

$$|D\sigma(x)-D\varphi(x)|\leqslant 2^{np}M\eta$$

в любой точке $x\in U\times W$. А так как $\sigma(x)-\varphi(x)$ равна нулю вне $U\times W$, то это неравенство выполняется всюду.

Положим $p=k$, $\eta=(k2^{nk}M)^{-1}$ и обозначим соответствующую функцию $\sigma(x)$ через $\sigma_k(x)$. Последнее неравенство показывает, что разность $\sigma_k(x)-\varphi(x)$ и все ее производные порядка $\leqslant k$ будут по абсолютной величине меньше $\frac{1}{k}$. Следовательно, $\sigma_k(x)$ стремится к $\varphi(x)$ требуемым образом, и теорема доказана.

§ 3. Отображения и вложения многообразий

Пусть V и W — два многообразия. Рассмотрим отображение μ многообразия W в многообразие V, $\mu y=x$, $y\in W$, $x\in V$. Будем говорить, что μ принадлежит к классу C^r, если локальные координаты точки $x=\mu y$ являются функциями класса C^r локальных координат точки y.

Некоторое множество в R^n имеет *меру нуль* (в смысле Лебега), если оно может быть покрыто конечным или счетным числом сфер, сумма объемов которых сколь угодно мала. Соединение конечного или счетного числа множеств меры нуль также представляет собой множество меры нуль, и любое множество меры нуль имеет всюду плотное дополнение.

Если μ — отображение класса C^1 пространства R^n в себя, то образ μA произвольного множества $A \subset R^n$ меры нуль также имеет меру нуль. В самом деле, μ удовлетворяет условию Липшица, поэтому для заданной ограниченной области D существует такое положительное число a, что для любых двух точек x и y области D выполняется неравенство $|\mu x - \mu y| < a|x-y|$, где $|x-y|$ означает расстояние между точками x и y. Следовательно, образ сферы радиуса r, заключенной в области D, содержится в некоторой сфере радиуса $\leqslant ar$, откуда вытекает, что образ любого ограниченного множества меры нуль имеет меру нуль; то же верно и по отношению к неограниченному множеству меры нуль, так как такое множество может быть представлено как соединение счетного числа ограниченных множеств меры нуль.

Таким образом, множества меры нуль образуют систему, инвариантную относительно гомеоморфизмов класса C^1. Будем говорить, что *множество A в n-мерном многообразии есть множество меры нуль*, если A есть соединение конечного или счетного числа множеств A_i, для каждого из которых существует гомеоморфизм класса C^1 некоторой области, содержащей A_i, в пространство R^n, отображающий A_i в множество меры нуль в R^n.

Следующая теорема вытекает из перечисленных выше свойств множеств меры нуль в пространствах R^n.

Теорема 3. *Пусть μ — отображение класса C^1 m-мерного многообразия W в n-мерное многообразие V. Если $m=n$ и если A есть множество меры нуль в W, то μA есть множество меры нуль в V. Если $m < n$, то μW есть множество меры нуль в V и, следовательно, его дополнение всюду плотно в V.*

Заметим, что утверждение, относящееся к случаю $m < n$, является следствием первого утверждения. Действительно, возьмем отображение μ_1 многообразия $W \times R^{n-m}$ в V, положив $\mu_1(y, z) = \mu y$; μ_1 служит продолжением отображения μ, и μW совпадает с образом при отображении μ_1 множества всех элементов вида (y, z_0), где z_0 фиксировано, а это множество имеет меру нуль в $W \times R^{n-m}$.

Предположим снова, что размерности многообразий W и V совпадают. Точка многообразия W называется *критической точкой* отображения μ многообразия W в V, если в этой точке обращается в нуль якобиан локальных координат точки $x = \mu y$ по локальным координатам точки y.

Теорема 4 (А. Сард[1]). *Пусть V и W — многообразия одинакового числа измерений и μ — отображение класса C^1 многообразия V в W. Образ μE множества E критических точек отображения μ представляет собой множество меры нуль в W.*

Эта теорема вытекает из следующего предложения, которое сейчас будет доказано: если μ — отображение класса C^1 пространства R^n в себя и E — множество критических точек этого отображения, которые лежат в кубе C, определяемом неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, то μE есть множество меры нуль.

Зная верхнюю границу модулей первых производных координат точки μx по координатам точки x в C, мы можем указать постоянную Липшица, т. е. такое a, что $|\mu x - \mu y| \leqslant a|x - y|$, каковы бы ни были точки x и y из C. Далее, так как эти производные непрерывны, то, если M_x — линейное отображение, касательное к μ в точке x, можно указать функцию $b(r)$, определенную и положительную при $r > 0$, стремящуюся к нулю вместе с r, такую, что $|\mu y - M_x y| \leqslant |y - x| \, b(|y - x|)$.

В том случае, когда $x \in E$, отображение M_x имеет определитель, равный нулю, и если изменяется только y, $M_x y$ остается в некоторой $(n-1)$-мерной плоскости Π. Далее, если $|y - x| \leqslant \varepsilon$, то $|\mu x - \mu y| \leqslant a\varepsilon$, а расстояние от μy до Π не превосходит $\varepsilon b(\varepsilon)$. Таким образом, точка μy оказывается в области, которую вырезают из шара радиуса $a\varepsilon$ с центром в μx две плоскости, параллельные диаметральной плоскости и отстоящие от нее на расстояние $\varepsilon b(\varepsilon)$. Объем такой области не превосходит $A b(\varepsilon) \varepsilon^n$,

[1]) Sard [1].

где A — постоянная (равная объему шара радиуса 1 в пространстве R^{n-1}, умноженному на $2a^{n-1}$).

Разобьем C на h^n кубов с ребром h^{-1} и диагональю $d=\sqrt{n}\,h^{-1}$. Каждый из них, если он содержит точки из E, отображается в множество, заключенное в объеме $\leqslant A\,b(d)\,d^n$. Образ совокупности всех таких кубов, а следовательно, и образ самого множества E, будет заключен в объеме $\leqslant A\,b(d)\,n^{n/2}$. Последний сколь угодно мал, коль скоро целое число h достаточно велико. Таким образом, μE представляет собой множество меры нуль.

Рассмотрим бесконечномерное пространство R^ω, образованное точками $x=(x_1, x_2, \ldots)$, у каждой из которых лишь конечное число координат отлично от нуля. Будем говорить, что отображение $\mu y = x$, $y \in V$, $x \in R^\omega$, многообразия V в R^ω принадлежит к классу C^∞, если все координаты x_i точки μy представляют собой функции класса C^∞ на V.

Отображение $\mu y = x$ класса C^∞ n-мерного многообразия V в R^ω (в R^m) называется *локально регулярным вложением* многообразия V в R^ω (соотв. в R^m), если для любого $y \in V$ существуют такие n индексов $i_1, \ldots, i_n$, что функции $x_i(y)$ $(i=i_1, \ldots, i_n)$ в некоторой окрестности $U \subset V$ точки y образуют систему локальных координат. Функции $x_i(y)$ обладают этим свойством, если их якобиан по локальным координатам точки y отличен от нуля. Таким образом, μ представляет собой локально регулярное вложение тогда и только тогда, когда ранг матрицы, образованной первыми производными координат точки $x=\mu y$ по локальным координатам точки y, всюду принимает наибольшее значение n.

Отображение μ называется *регулярным вложением*, если оно представляет собой локально регулярное вложение и взаимно однозначно, т. е. $\mu y \neq \mu z$ при $y \neq z$.

Отображение μ, в частности, вложение, одного многообразия в другое, называется *собственным*, если прообраз любого компактного множества компактен. Это условие выражают иногда, говоря, что $x=\mu y \to \infty$ при $y \to \infty$.

Теорема 5 (Уитней[1]). *Любое n-мерное многообразие V допускает собственное регулярное вложение в пространство R^{2n+1}.*

Сначала мы покажем, что существует регулярное вложение многообразия V в R^{ω}; это явится содержанием леммы 1. Далее, с помощью операторов проектирования, существование которых обеспечивается леммой 2 и теоремой 3, строится регулярное вложение в R^{2n+1}; последнее используется для построения собственного регулярного вложения многообразия V в пространство R^{2n+1}.

Лемма 1. *Существует регулярное вложение $x = fy$ многообразия V в пространство R^{ω}, при котором носители функций $x_i = x_i(y)$, равных координатам точки $x = fy$, компактны и любое компактное множество $K \subset V$ пересекается лишь с конечным числом этих носителей.*

Возьмем открытое покрытие $\{G_i\}$ многообразия V, рассмотренное в доказательстве теоремы 1. Это покрытие локально конечно, и любое G_i содержится в области определения одной из систем локальных координат. Возьмем новое покрытие $\{U_i\}$, такое, что $\overline{U}_i \subset G_i$, и функции $\rho_{i,0}(y)$ класса C^{∞}, обладающие такими свойствами: $0 \leqslant \rho_{i,0}(y) \leqslant 1$ при всех $y \in V$, $\rho_{i,0}(y) = 1$ при $y \in U_i$ и носитель функции $\rho_{i,0}(y)$ содержится в G_i.

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — локальные координаты в G_i; положим

$$\rho_{i,j}(y) = \begin{cases} \rho_{i,0}(y)\, y_j & \text{при } y \in G_i, \\ 0 & \text{при } y \notin G_i. \end{cases}$$

С помощью равенства

$$h = (n+1)(i-1) + j + 1$$

[1]) Whitney [1]. В действительности Уитней доказал более сильную теорему, так как он предполагает лишь, что многообразие — класса C^1, и получает в качестве образа аналитическое подмногообразие в R^{2n+1}. Соответствующее доказательство более сложно. Мне известно другое доказательство той же теоремы. Бурбаки (Bourbaki), которым оно принадлежит, пользуются вместо множеств меры нуль множествами первой категории в смысле Бэра.

установим взаимно однозначное соответствие между множеством целых положительных h и множеством пар целых чисел (i, j), таких, что $i \geqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant n$, и положим

$$x_h = \rho_{i,j}(y).$$

Отображение f многообразия V в R^ω, определенное формулой $fy = (x_1, x_2, \ldots)$, обладает всеми требуемыми свойствами.

Действительно, функции $\rho_{i,j}(y)$ $(j = 1, \ldots, n)$ образуют систему локальных координат в U_i, и любая точка $y \in V$ попадает в одно из U_i. Если $y \in U_i$ и $fz = fy$, то $\rho_{i,0}(z) = \rho_{i,0}(y) = 1$, откуда следует, что $z \in G_i$, и так как z имеет в G_i те же координаты $\rho_{i,j}(z) = y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, что и y, то $y = z$. Наконец, любое компактное множество $K \subset V$ может пересекаться лишь с конечным числом носителей функций $\rho_{i,j}(y)$, так как оно пересекается лишь с конечным числом множеств G_i.

Совокупность направлений всевозможных прямых в R^m, как известно, представляет собой $(m-1)$-мерное многообразие P^{m-1}, которое принято называть бесконечно удаленной плоскостью в R^m; при этом точку многообразия P^{m-1}, изображающую направление какой-либо прямой, называют бесконечно удаленной точкой этой прямой. Совокупность направлений всевозможных прямых в R^ω мы условимся обозначать символом P^ω. Если $R^m \subset R^\omega$, то $P^{m-1} \subset P^\omega$.

Лемма 2. *Пусть f — регулярное вложение многообразия V в R^ω, R^{2n+2} — некоторое $(2n+2)$-мерное подпространство пространства R^ω и P^{2n+1} — его бесконечно удаленная плоскость. Тогда множество точек в P^{2n+1}, через которые не проходит ни одна касательная к fV и ни одна секущая, соединяющая какие-либо две точки множества fV, всюду плотно в P^{2n+1}.*

Точки (x, y) пространства $V \times V$, обладающие тем свойством, что проекция на R^{2n+2} вектора, соединяющего fx и fy, равна нулю, образуют замкнутое множество. Его дополнение D представляет собой многообразие $2n$ измерений. Отображение φ этого многообразия в P^{2n+1}, которое ставит в соответствие точке (x, y) бесконечно удаленную точку ортогональной проекции прямой, соединяющей fx и fy, на R^{2n+2}, представляет собой отображение класса C^∞, и φD содержит те точки бесконечно удаленной плоскости P^{2n+1}, через которые проходит хотя бы одна секущая множества fV. Такие точки образуют множество меры нуль, так как само φD является множеством меры нуль в силу теоремы 3.

Пусть теперь V' — пространство направлений касательных векторов к V. V' представляет собой многообразие $2n-1$ измерений, являющееся расслоенным пространством с базой V. Так как вложение f локально регулярно, то всякий ненулевой вектор, касательный к V, преобразуется им в некоторый ненулевой вектор в R^ω. Таким образом f определяет некоторое отображение f' пространства V' в P^ω. Точки из V', отображаемые посредством f' в направления, ортогональные к R^{2n+2}, образуют замкнутое множество, дополнение которого D' представляет собой $(2n-1)$-мерное многообразие. Если каждому $Y \in V'$ поставить в соответствие направление ортогональной проекции на R^{2n+2} какой-нибудь прямой, проходящей через $f'Y$, то мы получим отображение ψ класса C^∞ многообразия D' в P^{2n+1}. При этом $\psi D'$ будет содержать те точки P^{2n+1}, через которые проходят касательные к fV. Так же, как и выше, мы убеждаемся в том, что такие точки образуют множество меры нуль в P^{2n+1}.

Соединение двух множеств меры нуль само имеет меру нуль, поэтому точки многообразия P^{2n+1}, через которые проходят касательные к fV или секущие этого множества, образуют множество меры нуль. Дополнение этого множества всюду плотно, и лемма 2 доказана.

Заметим, что существуют собственные отображения класса C^∞ многообразия V в R^{2n+1} и даже в R^1. В самом деле, если $1 = \sum_1^\infty \varphi_i$ — разбиение единицы в V, удовлетворяющее условиям теоремы 1, то такое отображение мы получим, положив $x_1 = \sum_1^\infty i\varphi_i$.

Поэтому вместо теоремы 5 мы можем установить следующее более общее предложение:

Если задано собственное отображение f класса C^∞ многообразия V в пространство R^{2n+1}, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует регулярное вложение g многообразия V в R^{2n+1}, такое, что для любого $y \in V$ расстояние между fy и gy меньше ε.

Вложение g будет непременно собственным, так же как и f.

Пусть $\overline{R}^\omega$ — подпространство пространства R^ω, определенное уравнениями $x_i = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant 2n+1$; тогда $R^\omega = R^{2n+1} \times \overline{R}^\omega$. Пусть, далее, f' — регулярное вложение V в $\overline{R}^\omega$, удовлетворяющее условиям леммы 1 и, кроме того, обладающее тем свойством, что расстояния от точек $f'y$ до $(0, 0, \ldots)$ ограничены. Последнему требованию можно всегда удовлетворить, разделив каждую координату точки $f'y$ на произведение максимума ее абсолютной величины на ее номер. При этом $f_0 = (f, f')$ будет регулярным вложением многообразия V в R^ω, а fy будет ортогональной проекцией точки f_0y на R^{2n+1}.

Выделим в пространстве R^ω подпространства R^h и R^ω_k, определяемые соответственно уравнениями $x_i = 0$ при всех $i > h$ и $x_i = 0$ при $2n+1 < i \leqslant 2n+1+k$; их бесконечно удаленные плоскости обозначим соответственно P^{h-1} и P^ω_k.

Пусть f_1y — проекция точки f_0y на R^ω_1, причем направление проектирования определяется некоторой точкой $p_0 \in P^{2n+1}$ — бесконечно удаленной точкой пространства R^{2n+2}, не принадлежащей P^ω_1; иначе говоря, направление проектирования не параллельно R^ω_1. Для того, чтобы вложение f_1 многообразия V в R_1 было локально регулярным, достаточно, чтобы ни одна касательная к f_0V не проходила через p_0; для того, чтобы f_1 было взаимно однозначным, достаточно, чтобы ни одна хорда множества f_0V не проходила через p_0. Согласно лемме 2, этим условиям можно удовлетворить, выбрав точку p_0 в P^{2n+1} сколь угодно близко к бесконечно удаленной точке какой-нибудь прямой в R^{2n+2}, ортогональной к R^{2n+1}. Таким образом можно добиться, чтобы f_1 представляло собой регулярное вложение многообразия V в R^ω_1, обладающее тем свойством, что расстояние между ортогональными проекциями на R^{2n+1} точек f_1y и f_0y (вторая из них совпадает с fy) меньше $\varepsilon 2^{-1}$. Заметим еще, что, так как направление проектирования, определяемое точкой p_0, параллельно R^{2n+2}, то при $f_0y \in R^{2n+1+k}$ $(k \geqslant 0)$ имеем $f_1y \in R^{2n+1+k}$.

Точно так же, отправляясь от f_1 вместо f_0, получим регулярное вложение f_2 многообразия V в $R_2^{(\omega)}$, обладающее теми свойствами, что расстояние между ортогональными проекциями точек f_1y и f_2y на R^{2n+1} меньше $\varepsilon 2^{-2}$ и $f_2y \in R^{2n+1+k}$ при $fy \in R^{2n+1+k}$. Точка f_2y получится из f_1y проектированием, если должным образом выбрать бесконечно удаленную точку, определяющую направление проектирования.

Продолжив такое построение, мы получим для любого целого $h > 0$ регулярное вложение f_h многообразия V в $R_h^{(\omega)}$, обладающее теми свойствами, что ортогональные проекции точек f_hy и $f_{h-1}y$ на R^{2n+1} отстоят друг от друга меньше чем на $\varepsilon 2^{-h}$ и $f_hy \in R^{2n+1+k}$ при $fy \in R^{2n+1+k}$. Точка f_hy может быть получена из $f_{h-1}y$ проектированием при соответствующем подборе бесконечно удаленной точки.

В силу свойств f', для всякого $y \in V$ можно подобрать целое k, зависящее от y, такое, что $fy \in R^{2n+1+k}$; при этом

$$f_ky \in R^{2n+1+k} \cap R_k^{(\omega)} = R^{2n+1}$$

и

$$f_ky = f_{k+1}y = f_{k+2}y = \ldots .$$

Вложение g многообразия V в R^{2n+1}, определенное равенством $gy = f_ky$, будет обладать всеми требуемыми свойствами.

Действительно, в некоторой окрестности произвольной точки многообразия V мы будем иметь $gy = f_hy$ при достаточно большом h, зависящем только от этой окрестности; следовательно, поскольку f_h локально регулярно, g также локально регулярно. Далее, если $y \neq z$, то, так как $gy = f_hy$ и $gz = f_hz$ при достаточно большом h и $f_hy \neq f_hz$, получим $gy \neq gz$, так что g взаимно однозначно. Наконец, расстояние между fy и gy, т. е. расстояние между ортогональными проекциями f_0y и f_ky на R^{2n+1}, меньше $\varepsilon(2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-k}) < \varepsilon$. Теорема 5, таким образом, доказана.

Рассмотрим такое вложение g, собственное и регулярное, многообразия V в R^{2n+1}. Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие

$2n+1$ измерений, состоящее из всевозможных пар вида (x, ξ), где $x \in gV$, а ξ — вектор в пространстве R^{2n+1} с начальной точкой x, направленный по нормали к множеству gV в точке x. Рассмотрим отображение μ многообразия $\mathcal{N}$ в R^{2n+1}, определенное равенством $\mu(x, \xi) = x + \xi$; элементу (x, ξ) оно ставит в соответствие конечную точку вектора ξ. Нетрудно убедиться в том, что якобиан этого отображения в точке $(x, 0)$ отличен от нуля. В силу теоремы о неявных функциях, в V существует строго положительная функция $\rho(y)$, которую мы вправе считать принадлежащей к классу C^∞, такая, что в области $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$, образованной элементами (gy, ξ) с $|\xi| < \rho(y)$, якобиан отображения μ отличен от нуля, и само μ, если его рассматривать лишь в $\mathcal{N}_1$, не имеет критических точек и представляет собой локально топологическое отображение. Приняв во внимание, что g — вложение собственное и взаимно однозначное, мы придем к заключению, что при соответствующем выборе функции $\rho(y)$ отображение μ, ограниченное областью $\mathcal{N}_1$, окажется взаимно однозначным в целом.

При этом $D = \mu\mathcal{N}_1$ будет представлять собой окрестность множества gV в R^{2n+1}, так называемую *трубчатую окрестность*. Пусть N_y — множество в подпространстве, нормальном к gV в точке $x = gy$, образованное точками, отстоящими от x на расстоянии $< \rho(y)$. Когда точка y пробегает V, N_y заметает множество D, которое оказывается, таким образом, расслоенным пространством. Отображение p множества D в V, определяемое равенством $pz = y$, где $z \in N_y$, представляет собой проектирование этого расслоенного пространства на его базу V. Отображение p_t множества D в себя, определенное формулой $p_t z = z + t(gpz - z)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, и сводящееся к тождественному преобразованию при $t = 0$ и к gp при $t = 1$, отображает D на gV таким образом, что каждый слой N_y стягивается в точку gy.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

§ 4. Четные дифференциальные формы

Дифференциальные формы степени 1 на многообразии представляют собой суммы произведений одних функций g на дифференциалы df других функций f,

$$\sum g\,df.$$

Посредством локальных координат $x^1, \ldots, x^n$ такая форма выражается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,dx^i,$$

где

$$a_i = \sum g\,\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

При переходе от одной системы локальных координат к другой коэффициенты a_i преобразуются так, как компоненты ковектора.

По определению, форма равна нулю в некоторой точке, если в этой точке все ее коэффициенты обращаются в нуль. Две формы тождественны тогда и только тогда, когда их разность равна нулю во всех точках. Условимся говорить, что форма принадлежит к классу C^r, если все ее коэффициенты представляют собой функции класса C^r.

Исходя из форм степени 1, можно получить внешние дифференциальные формы высших степеней — мы будем называть их просто формами, так как опасность путаницы исключена, — посредством операции, называемой внешним умножением, в сочетании со сложением[1]). Эта операция, обозначаемая значком $\wedge$, подчиняется обычным

[1]) Подробности, относящиеся к внешним (или грассмановским) алгебрам и внешним дифференциальным формам, читатель найдет в книгах N. Bourbaki [2] и É. Cartan [1], [2].

законам ассоциативности и дистрибутивности и следующим законам псевдокоммутативности:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \quad dx^i \wedge dx^i = 0,$$
$$a \wedge dx^i = dx^i \wedge a = a\,dx^i, \quad dx^i \wedge a\,dx^j = a\,dx^i \wedge dx^j,$$

где a – скаляр.

Благодаря этому всякая внешняя дифференциальная форма, выраженная посредством локальных координат, может быть записана в виде

$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Этот вид мы будем называть *приведенным выражением* дифференциальной формы в заданной системе координат. Приведенное выражение единственно; это является следствием того, что грассмановская алгебра, построенная на формах степени 1, подчиняется перечисленным правилам[1]). Всякая форма степени $> n$ приводится к нулю.

Говорят, что форма α равна нулю в некоторой точке, если в этой точке обращаются в нуль все коэффициенты ее приведенного выражения; две формы тождественны тогда и только тогда, когда их разность равна нулю во всех точках. Говорят, что α есть форма класса C^r, если все ее коэффициенты представляют собой функции класса C^r. *Носителем* формы класса C^0 называется наименьшее замкнутое множество, вне которого эта форма равна нулю.

Ясно, что законы ассоциативности, дистрибутивности и псевдокоммутативности не зависят от системы координат. Если α и β — формы соответственно степени p и q, то

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_p}$ формы в заданной системе локальных координат определены для значений индексов $i_1 < \ldots < i_p$. Определяя коэффициенты для произвольных систем значений $i_1, \ldots, i_p$, мы потребуем, чтобы выполнялось условие *кососимметричности*, т. е. положим

---

[1]) Достаточно убедиться в том, что этим правилам подчиняется алгебра, порожденная приведенными выражениями форм, если их произведение определено написанной ниже формулой (2).

$\alpha_{j_1 \ldots j_p} = 0$, если не все $j_1, \ldots, j_p$ различны, и $\alpha_{j_1 \ldots j_p} = \pm \alpha_{i_1 \ldots i_p}$, если $j_1, \ldots, j_p$—перестановка индексов $i_1, \ldots, i_p$, причем знак $+$ или $-$ берется в зависимости от того, четной или нечетной является эта перестановка. Тогда можно записать

$$\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \ldots, i_p} \alpha_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

где все индексы независимо друг от друга принимают значения от 1 до n.

Если $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ — какая-нибудь другая система локальных координат, то

$$dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$$

и, в силу перечисленных выше правил действий над формами,

$$\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \ldots, j_p} \bar{\alpha}_{j_1 \ldots j_p} d\bar{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{x}^{j_p},$$

где

$$\bar{\alpha}_{j_1 \ldots j_p} = \sum_{i_1, \ldots, i_p} \alpha_{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar{x}^{j_p}}. \tag{1}$$

Таким образом, при переходе от одной системы локальных координат к другой коэффициенты формы степени p преобразуются, как компоненты *p-ковектора* или ковариантного кососимметричного тензора ранга p.

Такой p-ковектор оказывается определенным во всякой точке многообразия V, коль скоро задана форма степени p. Обратно, задав в каждой точке многообразия V некоторый p-ковектор, мы определим некоторую форму степени p. Эту последнюю всегда можно представить как сумму членов вида

$$g\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_p,$$

где g — некоторая функция с компактным носителем, а f_i — функции класса C^∞, причем число таких членов конечно, если форма имеет компактный носитель, и лишь локально конечно в противном случае. В этом легко убедиться с помощью соответствующего разбиения единицы.

Формы, которые мы сейчас определили, называются формами *четного рода*, или просто *четными*, в отличие от нечетных форм, вводимых в следующем параграфе.

Дифференциал формы α степени p, принадлежащей к классу C^1, представляет собой форму $d\alpha$ степени $p+1$, определяемую с помощью приведенного выражения формы α в области определения заданной системы локальных координат посредством равенства

$$d\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_p} d\alpha_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Из этого определения, которое на первый взгляд зависит от выбора системы координат, вытекают следующие правила:

$$d(\alpha_1 + \alpha_2) = d\alpha_1 + d\alpha_2,$$
$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta,$$

где p — степень формы α, и

$$d^2\alpha = 0$$

для любой формы класса C^2.

Из этих правил, в частности, вытекает, что определение $d\alpha$ не зависит от выбора системы координат. Дифференциал заданной формы оказывается, таким образом, определенным на всем многообразии.

Иногда нам будет удобно пользоваться *символами Кронекера* $\delta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}$. Они определяются для любого p ($0 \leqslant p \leqslant n$) следующими условиями:

1) $\delta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p}$ кососимметрично как по i_k, так и по j_k.

2) При $i_1 < \ldots < i_p$ и $j_1 < \ldots < j_p$

$$\delta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} = \begin{cases} 1, & \text{если } i_k = j_k \quad (k = 1, \ldots, p), \\ 0, & \text{если } i_k \neq j_k \text{ хотя бы при одном } k. \end{cases}$$

В частности, когда $p = 1$, $\delta^i_i = 1$, и $\delta^j_i = 0$, если $i \neq j$.

Условие 2) эквивалентно следующему:

2′) Для любой системы $\binom{n}{p}$ чисел $a_{i_1 \ldots i_p}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n)$

$$a_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} \delta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} a_{j_1 \ldots j_p}.$$

В силу условия кососимметричности, свойство 2′), в свою очередь, эквивалентно такому:

2″) Для любого p-ковектора $a_{i_1 \ldots i_p}$

$$a_{i_1 \ldots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{j_1, \ldots, j_p} \delta^{j_1 \ldots j_p}_{i_1 \ldots i_p} a_{j_1 \ldots j_p}.$$

Последнее тождество делает очевидным тензорный характер символов Кронекера; они представляют собой компоненты некоторого тензора, не изменяющего своих компонент при преобразовании координат.

Если формы α и β в заданной системе локальных координат имеют соответственно коэффициенты $\alpha_{i_1 \ldots i_p}$ и $\beta_{j_1 \ldots j_q}$, то коэффициенты $(\alpha \wedge \beta)_{k_1 \ldots k_{p+q}}$ их произведения $\alpha \wedge \beta$ выражаются следующим образом:

$$(\alpha \wedge \beta)_{k_1 \ldots k_{p+q}} = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ j_1 < \ldots < j_q}} \delta^{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_{p+q}} \alpha_{i_1 \ldots i_p} \beta_{j_1 \ldots j_q}. \tag{2}$$

Если α — форма класса C^1, то форма $d\alpha$, как нетрудно вычислить, имеет коэффициенты

$$(d\alpha)_{k_1 \ldots k_{p+1}} = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ j}} \delta^{j i_1 \ldots i_p}_{k_1 k_2 \ldots k_{p+1}} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^j}. \tag{3}$$

Иначе можно записать

$$(d\alpha)_{k_1 \ldots k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu} \partial_{k_\nu} \alpha_{k_1 \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_{p+1}}, \tag{3′}$$

где $\partial_{k_\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{k_\nu}}$, а $k_1 \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_{p+1}$ есть система индексов, получающаяся из $k_1 \ldots k_{p+1}$ изъятием индекса k_ν.

Пусть V и W — два многообразия, μ — отображение класса C^r $(r \geqslant 1)$ многообразия W в V. Каждой точке y из W соответствует точка $x = \mu y$ многообразия V, локальные координаты которой представляют собой функции класса C^r локальных координат точки y.

Пусть f - функция, определенная на V; ее *прообраз* определяется как функция μ^*f на W, заданная равенством

$$\mu^*f(y)=f(\mu y).$$

Очевидно, что $\mu^*(f+g)=\mu^*f+\mu^*g$, $\mu^*(fg)=(\mu^*f)(\mu^*g)$ и что, если f принадлежит к классу C^1 и

$$df=\sum_i a_i\,dx^i,$$

то

$$d(\mu^*f)=\sum_i(\mu^*a_i)\,d(\mu^*x^i).$$

Отсюда следует, что если форма

$$\alpha=\sum f\,dg\wedge\ldots\wedge dh$$

обращается в нуль в некоторой точке $x=\mu y$, то форма

$$\bar{\alpha}=\sum(\mu^*f)\,d(\mu^*g)\wedge\ldots\wedge d(\mu^*h)$$

обращается в нуль в точке y. Отсюда мы заключаем, что форма $\bar{\alpha}$ вполне определяется заданием отображения μ и формы α и не зависит от выбора представления α посредством функций $f, g, \ldots, h$. Форма $\bar{\alpha}$ называется *прообразом* формы α и обозначается $\mu^*\alpha$.

Определенная таким образом линейная операция μ^* обладает следующими свойствами:

1) Если α – (четная) форма степени p на V, то $\mu^*\alpha$ также представляет собой (четную) форму степени p на W; если форма α – класса C^r, а μ – класса C^{r+1}, то $\mu^*\alpha$ – форма класса C^r; если α и μ – класса C^∞, то $\mu^*\alpha$ – форма класса C^∞.

2) Носитель формы $\mu^*\alpha$ заключен в прообразе (относительно μ) носителя формы α. В самом деле, этот прообраз представляет собой замкнутое множество, и если точка y ему не принадлежит, то $\mu^*\alpha$ обращается в нуль в y, так как α равна нулю в μy.

3) $\mu^*\,d\alpha=d\mu^*\alpha,\qquad \mu^*(\alpha\wedge\beta)=\mu^*\alpha\wedge\mu^*\beta.$

§ 5. Нечетные дифференциальные формы. Ориентация многообразий и отображений

Наряду с p-ковекторами и формами, введенными в § 4, мы рассмотрим p-ковекторы и формы *нечетные*, или нечетного рода, которые будут сейчас определены.

Нечетный p-ковектор определяется в точке n-мерного многообразия V посредством своих компонент $a_{i_1 \ldots i_p}$ в заданной системе локальных координат $x^1, \ldots, x^n$; эти компоненты кососимметричны по p индексам i_k $(1 \leqslant i_k \leqslant n)$. Компоненты $\bar{a}_{j_1 \ldots j_p}$ в какой-либо другой системе локальных координат $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ связаны с $a_{i_1 \ldots i_p}$ формулами

$$\bar{a}_{j_1 \ldots j_p} = \frac{J}{|J|} \sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial \bar{x}^{j_p}}, \tag{1}$$

где

$$J = \frac{D(x^1, \ldots, x^n)}{D(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)}$$

— якобиан координат одной системы по координатам другой.

Единственное различие между этими формулами и формулами, относящимися к четным p-ковекторам (см. § 4), состоит в том, что здесь перед знаком $\sum$ стоит множитель ± 1, знак которого совпадает со знаком якобиана J.

Так же, как в области определения четного p-ковектора, мы задавали четную форму степени p, соответствующую этому p-ковектору, в области определения нечетного p-ковектора мы зададим соответствующую этому p-ковектору внешнюю дифференциальную форму нечетного рода степени p или, как мы условимся кратко ее называть, *нечетную форму степени p*.

Определения внешнего произведения и дифференциала, а также формулы (2) и (3) предыдущего параграфа приложимы и к нечетным формам. Заметим, что *дифференциал $d\alpha$ формы α имеет ту же четность, что α, и произведение двух форм одинаковой четности есть четная форма, а произведение двух форм различной четности — форма нечетная.*

Нечетная форма степени 0, или *скаляр нечетного рода*, определяется в каждой точке одной компонентой, и лишь ее знак зависит от выбора системы координат. Мы приходим к понятию ориентации: будем говорить, что многообразие V *ориентируемо*, если на нем может быть определен непрерывный скаляр ε нечетного рода, такой, что $\varepsilon^2 = 1$. Если ε_1 — какой-нибудь другой непрерывный скаляр нечетного рода, удовлетворяющий тому же условию $\varepsilon_1^2 = 1$, то $\varepsilon\varepsilon_1$ будет непрерывным скаляром четного рода со значениями ± 1 в любой точке. В том случае, когда многообразие V связно, $\varepsilon\varepsilon_1$ постоянно и $\varepsilon_1 = \varepsilon$ или $\varepsilon_1 = -\varepsilon$. Итак, *на связном ориентируемом многообразии V существуют в точности два непрерывных скаляра нечетного рода, ε и $-\varepsilon$, квадраты которых равны* 1. Каждый из этих двух скаляров называется *ориентацией* многообразия V.

Если ориентация ε выбрана, то все системы локальных координат в V распадаются на два класса: к одному из них относятся те системы координат, в которых $\varepsilon = +1$, к другому — те, в которых $\varepsilon = -1$. Якобиан одной системы локальных координат по другой, в пересечении их областей определения, положителен, если обе системы принадлежат к одному и тому же классу, и отрицателен в противном случае. Обратно, если все системы координат могут быть разбиты на два класса, обладающие указанными свойствами, то многообразие ориентируемо, так как в нем можно задать скаляр ε, равный, по определению, $+1$ в системах координат одного класса и -1 в системах координат другого класса. Когда мы говорим об *ориентации, определенной некоторой системой координат*, то подразумеваем ориентацию ε, такую, что $\varepsilon = +1$ в указанной системе координат.

Если многообразие V *ориентировано*, т. е. оно ориентируемо и на нем выбрана определенная ориентация ε, то на нем каждой нечетной форме α соответствует четная форма $\varepsilon\alpha$. Следовательно, в случае ориентируемого многообразия мы можем, выбрав раз навсегда определенную ориентацию, избежать употребления нечетных форм. В применении же к неориентируемым многообразиям понятие нечетной формы оказывается полезным и естественным.

Для того, чтобы распространить на нечетные формы понятие прообраза, мы определим *ориентацию отображения*.

Рассмотрим сначала два *ориентируемых* и *связных* многообразия V и W, вообще говоря, различного числа измерений. Мы можем *сопоставить* их ориентации, т. е. поставить в соответствие ориентации ε многообразия V ориентацию ε_1 многообразия W, а ориентации $-\varepsilon$ ориентацию $-\varepsilon_1$. Ясно, что это можно осуществить двояким образом, сопоставив либо ε с ε_1 и $-\varepsilon$ с $-\varepsilon_1$, либо ε с $-\varepsilon_1$ и $-\varepsilon$ с ε_1. Отображение μ многообразия W в V назовем *ориентированным*, если ориентации W и V сопоставлены.

Пусть отображение μ ориентировано так, что сопоставленными друг другу оказываются ориентации ε и ε_1; если α — нечетная форма на V, то $\mu^*\alpha$ мы определим, положив

$$\mu^*\alpha = \varepsilon_1\mu^*(\varepsilon\alpha).$$

При этом $\mu^*(\varepsilon\alpha)$ имеет смысл, так как $\varepsilon\alpha$ — форма четная. Заметим также, что $\mu^*\alpha$ имеет ту же степень, что и α.

В общем случае, когда многообразия V и W не предполагаются ориентируемыми, мы назовем отображение μ *ориентируемым*, если можно сопоставить ориентации всевозможных пар (U, U') ориентируемых областей $U \subset V$ и $U' \subset W$, для которых $\mu U' \subset U$, причем, если (U_1, U_1') и $(U_2 U_2')$ - две такие пары, что $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, то ориентациям U_1 и U_2, совпадающим в $U_1 \cap U_2$, будут сопоставлены ориентации U_1' и U_2', совпадающие в $U_1' \cap U_2'$. Если это осуществимо, то в случае, когда W связно, осуществимо в точности двумя способами, каждый из которых определяет некоторую *ориентацию* отображения μ.

Легко убедиться в том, что отображение μ ориентируемо тогда и только тогда, когда ориентации некоторых окрестностей точки y в W и точки $x = \mu y$ в V могут быть сопоставлены так, чтобы они зависели от y непрерывно (в очевидном смысле). Если это невозможно, отображение μ называется неориентируемым.

Если отображение μ *постоянно*, т. е. μW сводится к единственной точке в V, то μ ориентируемо тогда, когда ориентируемо многообразие W, и только в этом случае. Вообще, ориентируемость W эквивалентна ориентируемости μ тогда, когда множество μW имеет в V ориентируемую окрестность, в частности, когда V само ориентируемо.

Если μ представляет собой гомеоморфизм класса C^∞, а $y^1, \ldots, y^n$ — локальные координаты в области $U' \subset W$, то функции $\mu^* y^1, \ldots, \mu^* y^n$ образуют систему локальных координат в $U = \mu^{-1} U' \subset V$, и, сопоставив ориентации U и U', определенные этими координатами, мы получим некоторую ориентацию гомеоморфизма μ, так называемую *каноническую ориентацию*. Вообще, если W и V — многообразия одинакового числа измерений, то отображение μ класса C^1 одного в другое, не имеющее критических точек, ориентируемо, и его каноническая ориентация может быть определена аналогичным образом.

Предположим, что отображение μ многообразия W в V ориентировано. Если α — нечетная форма на V, то в окрестности любой точки $y \in W$ можно определить форму $\mu^* \alpha$, положив

$$\mu^* \alpha = \varepsilon_1 \mu^* (\varepsilon \alpha),$$

где ε_1 и ε — соответствующие друг другу ориентации окрестностей точки y в W и точки $x = \mu y$ в V. Таким образом форма $\mu^* \alpha$ определяется на всем многообразии W. Ясно, что операция μ^*, распространенная на нечетные формы, обладает свойствами 1), 2) и 3), сформулированными в конце § 4, и сохраняет четность форм.

Если многообразие V ориентируемо, ε — некоторая его ориентация и μ ориентировано, то $\mu^* \varepsilon$ представляет собой некоторую ориентацию многообразия W. Это последнее оказывается, таким образом, ориентируемым. Если μ и $U \subset V$ ориентируемы, то $\mu^{-1} U$ также ориентируемо.

Пусть α — нечетная форма степени n с компактным носителем, заключенным в области определения системы координат $x^1, \ldots, x^n$,

$$\alpha = a_{12\ldots n} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Интеграл формы α определяется равенством

$$\int \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} a_{12\ldots n} dx^1 dx^2 \ldots dx^n.$$

Так как носитель формы α компактен, то этот интеграл сходится, разумеется, если коэффициент $a_{12\ldots n}$ представляет собой локально интегрируемую функцию. Покажем, что значение интеграла не зависит от выбора системы координат. Если $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ — какая-нибудь другая система координат и если

$$\alpha = \bar{a}_{12\ldots n}\, d\bar{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{x}^n,$$

то, согласно (1),

$$\bar{a}_{12\ldots n} = \frac{J}{|J|} \sum a_{i_1\ldots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^1} \ldots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial \bar{x}^n}.$$

Так как $a_{i_1\ldots i_n} = \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} a_{1\ldots n}$ и

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^1} \ldots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial \bar{x}^n} = J,$$

то $\bar{a}_{12\ldots n} = |J|\, a_{12\ldots n}$, и совпадение значений интеграла в той и другой системах координат следует из известного правила замены переменных в кратном интеграле.

В случае произвольной нечетной формы α степени n воспользуемся каким-нибудь локально конечным разбиением единицы $1 = \sum \varphi_i$, таким, чтобы носитель каждой φ_i был заключен в области определения одной из систем локальных координат. Мы скажем, что интеграл $\int \alpha$ *сходится*, и положим

$$\int \alpha = \sum_i \int \varphi_i \alpha,$$

если ряд в правой части равенства сходится, каково бы ни было разбиение единицы, удовлетворяющее только что высказанным требованиям и условиям теоремы 1.

Если это условие выполнено, то такой ряд сходится абсолютно, так как он остается сходящимся при любой перестановке его членов, и сумма ряда оказывается одинаковой для любых двух разбиений единицы $1 = \sum_i \varphi_i$ и $1 = \sum_j \psi_j$, в чем нетрудно убедиться, сравнив оба значения суммы со значением, соответствующим третьему разбиению $1 = \sum_{i, j} \varphi_i \psi_j$.

Когда α обладает компактным носителем, число функций φ_i, для которых $\varphi_i \alpha$ не равно тождественно нулю, конечно, и ряд непременно сходится, если, разумеется, α локально интегрируема.

Если μ — канонически ориентированный гомеоморфизм класса C^1, то

$$\int \mu^* \alpha = \int \alpha.$$

Действительно, это равенство достаточно установить в предположении, что носитель формы α заключен в области задания некоторой системы локальных координат, а в этом случае оно следует прямо из соответствующих определений.

Если β — нечетная форма класса C^1 степени $n-1$ с компактным носителем в n-мерном многообразии, то

$$\int d\beta = 0.$$

Воспользовавшись некоторым разбиением единицы, мы сведем доказательство к случаю, когда носитель формы β содержится в области задания какой-либо системы локальных координат $x^1, \ldots, x^n$. Пусть при этом

$$\beta = b_{23\ldots n}\, dx^2 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots;$$

тогда

$$d\beta = \frac{\partial b_{23\ldots n}}{\partial x^1}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \ldots \wedge dx^n + \ldots,$$

$$\int d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial b_{23\ldots n}}{\partial x^1}\, dx^1 \ldots dx^n + \ldots$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial b_{23\ldots n}}{\partial x^1}\, dx^1 = 0,$$

так как $b_{23\ldots n}$ обладает компактным носителем. Таким образом, первое слагаемое в выражении интеграла обращается в нуль, и точно так же все остальные.

Полезно ввести еще *неоднородные формы*, т. е. суммы однородных форм. Будем говорить, что форма однородна, если она имеет определенную степень и определенную четность или если она тождественно равна нулю. На n-мерном многообразии всякая форма α допускает единственное представление в виде суммы $2n+2$ однородных форм; последние называются *однородными составляющими* формы α.

Интеграл $\int \alpha$ произвольной формы α определяется как интеграл ее нечетной однородной составляющей степени n. В частности, интеграл любой однородной формы, не являющейся нечетной формой степени n, всегда будет равен нулю.

На неоднородные формы непосредственно распространяются понятия внешнего произведения и дифференциала.

Определим линейный оператор w, положив

$$w\varphi = (-1)^p\varphi,$$

где p — степень формы φ. Тогда правило дифференцирования произведения произвольных неоднородных форм мы сможем записать в виде

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (w\alpha)\wedge d\beta.$$

Условимся писать

$$\alpha \doteq \beta,$$

если формы α и β имеют одинаковые нечетные составляющие степени n. Очевидно, что, если $\alpha \doteq \beta$, то $f\alpha \doteq f\beta$, какова бы ни была функция f, и $\int f\alpha = \int f\beta$.

§ 6. Цепи. Формула Стокса

Элемент c нечетной цепи p измерений в многообразии V определяется некоторым выпуклым p-мерным полиэдром Π в пространстве R^p, ориентацией пространства R^p и отображением π полиэдра Π в V,

$$c = (\Pi,\ \pi,\ \text{ориентация } R^p \supset \Pi).$$

Если π — отображение класса C^r, точнее говоря, рассматриваемое на Π отображение пространства R^p класса C^r, то мы скажем, что элемент c цепи принадлежит к классу C^r. Мы всегда будем предполагать рассматриваемые цепи принадлежащими к классу C^r, $r \geqslant 1$.

Пусть f — характеристическая функция множества П в R^p, равная 1 на П и 0 вне П, а ε — некоторая ориентация пространства R^p. Если α — четная форма на V, то $\pi^*\alpha$ — четная, а $\varepsilon f\pi^*\alpha$ — нечетная форма на R^p, носитель которой заключен в П. Интеграл последней формы, в том смысле, как он был определен в § 5, называется *интегралом формы* α *на элементе* c *цепи*,

$$\int\limits_c \alpha = \int \varepsilon f\pi^*\alpha.$$

Если форма α однородна, то ее интеграл на c может быть отличен от нуля только в том случае, когда ее степень равна p. Условимся считать, что интеграл *нечетной* формы α на c всегда равен нулю.

Элемент c' *четной цепи*[1]) p *измерений* в многообразии V определяется p-мерным выпуклым полиэдром П в пространстве R^p, отображением π полиэдра П в V и ориентацией отображения π,

$$c' = (\text{П}, \pi, \text{ориентация } \pi).$$

Интеграл формы α на c' определяется равенством

$$\int\limits_{c'} \alpha = \int f\pi^*\alpha.$$

Этот интеграл считается равным 0, если форма α однородна и не является нечетной формой степени p.

Множество πП в V называется *множеством точек элемента* (c *или* c') *цепи*. Ясно, что, если форма α равна нулю во всех точках этого множества, то ее интеграл на c (на c') равен нулю, так как при этом $f\pi^*\alpha$ равна нулю тождественно.

Конечная цепь c в V определяется линейной комбинацией с действительными коэффициентами конечного числа элементов цепи в V,

$$c = \sum_i k_i c_i.$$

---

[1]) В статье автора [3] четные цепи названы «полями второго рода» («champs de seconde espèce»).

Интеграл формы α на c, по определению, равен

$$\int_c \alpha = \sum_i k_i \int_{c_i} \alpha.$$

Условимся считать, что две такие комбинации определяют *одну и ту же цепь*, если на них совпадают значения интегралов любой формы α. Одна и та же цепь допускает бесчисленное множество различных представлений в виде линейных комбинаций элементов цепи.

Если в одном из таких представлений все элементы цепи c имеют одинаковую размерность и одинаковую четность, то цепь c называется *однородной*. Если в одном из представлений все k_i — целые числа, то c называется *цепью с целыми коэффициентами*. Наконец, цепь называется *элементарной*, если она может быть представлена единственным элементом, взятым с коэффициентом $+1$.

Мы будем рассматривать также *бесконечные цепи*, определяемые линейными комбинациями бесконечного множества элементов цепи, но при условии, что эти последние образуют *локально конечную* систему, т. е. что любое компактное множество может содержать точки, принадлежащие лишь конечному числу элементов цепи.

Интеграл формы α, *обладающей компактным носителем*, на бесконечной цепи c определяется той же формулой

$$\int_c \alpha = \sum_i k_i \int_{c_i} \alpha;$$

при этом лишь конечное число слагаемых в правой части может быть отлично от нуля.

В том случае, когда носитель формы α не компактен, а $c = \sum k_i c_i$ — бесконечная цепь, интеграл $\int_c \alpha$ называется *сходящимся* и определяется равенством

$$\int_c \alpha = \sum_i \int_c \varphi_i \alpha,$$

если ряд в правой части сходится при любом выборе разбиения единицы $1 = \sum \varphi_i$, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Как и в § 5, мы видим, что при этом ряд сходится абсолютно и значение интеграла не зависит от выбора разбиения единицы.

Пусть μ — отображение многообразия W в многообразие V. Если $c = (\Pi, \pi, \varepsilon)$ — элемент нечетной цепи в W, то элемент нечетной цепи $(\Pi, \mu\pi, \varepsilon)$ в V мы назовем *образом элемента c при отображении* μ и обозначим μc. Если как π, так и μ ориентированы, то отображение $\mu\pi$ будет естественным образом ориентировано и определит в V образ любого элемента четной цепи в W, в определении которого участвует отображение π.

Образ (при отображении μ) конечной цепи c, представленной в виде $c = \sum k_i c_i$ посредством элементов цепи c_i, определяется равенством

$$\mu c = \sum k_i (\mu c_i);$$

отображение μ предполагается при этом ориентированным, за исключением того случая, когда c — нечетная цепь. Очевидно, что

$$\int_{\mu c} \alpha = \int_{c} \mu^* c,$$

чем и оправдывается определение цепи μc, которая оказывается зависящей лишь от самой цепи c, а не от ее представления.

Пусть μ — собственное отображение, а $c = \sum k_i c_i$ — бесконечная цепь. Если система $\{c_i\}$ локально конечна, то и система $\{\mu c_i\}$ локально конечна и образ цепи c при отображении μ определяется той же формулой $\mu c = \sum k_i (\mu c_i)$. В том случае, когда μ не является собственным отображением, система $\{\mu c_i\}$ может не быть локально конечной и образ c при этом не определяется.

Сумма двух цепей и произведение цепи на действительное число определяются очевидным образом, и всевозможные цепи в заданном многообразии образуют векторное пространство над полем действительных чисел.

Мы определим еще *произведение элемента цепи на ориентацию произвольной содержащей его области*, предположив, разумеется, что рассматриваемый элемент заключен в некоторой ориентируемой области. Пусть ε_1 —

какая-нибудь ориентация области D, охватывающей $\pi\Pi$. Если ε — какая-нибудь ориентация R^p, то существует ориентация отображения π, такая, при которой сопоставляются ε_1 и ε, так что $\pi^*\varepsilon_1 = \varepsilon$; обратно, если π ориентировано, то существует вполне определенная ориентация $\pi^*\varepsilon_1$ пространства R^p, соответствующая ориентации ε_1. Определим теперь произведение ε_1 на элемент нечетной цепи $c = (\Pi, \pi, \varepsilon)$ как элемент четной цепи

$$c' = (\Pi, \pi, \text{ориентация отображения } \pi,$$

$$\text{сопоставляющая } \varepsilon \text{ и } \varepsilon_1);$$

произведение c' на ε_1 равно c, так что $c' = \varepsilon_1 c$; $c = \varepsilon_1 c'$, в согласии с условием $\varepsilon_1^2 = 1$. При этом

$$\int\limits_{\varepsilon_1 c} \alpha = \int\limits_{c} \varepsilon_1 \alpha.$$

Пусть I — тождественное отображение, иначе говоря, *вложение* полиэдра Π в R^p. Элемент четной цепи в пространстве R^p

$$(\Pi, I, \text{каноническая ориентация } I)$$

условимся обозначать той же буквой Π. Заметим, что, по самому определению, всякий элемент цепи в V служит образом при некотором отображении π пространства R^p в V какого-то элемента цепи вида Π или $\varepsilon\Pi$.

Теперь мы введем понятие границы цепи и установим *общую формулу Стокса*. Для удобства определим сначала понятие границы элемента цепи.

Пусть R^{p-1} — какая-нибудь $(p-1)$-мерная плоскость в пространстве R^p, а e_1 — произвольный вектор в R^p, не параллельный R^{p-1}. Пусть, далее, $e_2, \ldots, e_p$ — система $p-1$ линейно независимых векторов в R^{p-1}. Сопоставив ориентацию ε_1 плоскости R^{p-1}, определенную системой координат с базисом $e_2, \ldots, e_p$, с ориентацией ε пространства R^p, определенной системой координат с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_p$, мы получим определенную ориентацию вложения (иначе, тождественного или канонического отображения) R^{p-1} в R^p, зависящую лишь от вектора e_1. Будем говорить, что эта *ориентация определена вектором* e_1. Легко видеть, что два вектора e_1 и e_1' определяют одну и ту же ориентацию такого вложения тогда и только тогда, когда в предположении, что начальные точки этих векторов лежат в R^{p-1}, их концы оказываются в одном и том же полупространстве, ограниченном плоскостью R^{p-1}.

Каждая $(p-1)$-мерная грань Π_i выпуклого полиэдра Π в R^p лежит в некоторой $(p-1)$-мерной плоскости R_i^{p-1}; рассмотрим вложение I_i плоскости R_i^{p-1} в R^p с ориентацией, определенной каким-либо вектором, начальная точка которого лежит внутри Π, а конечная—на Π_i. Тогда (Π_i, I_i) будет $(p-1)$-мерным элементом четной цепи в R^p. Сумма таких элементов цепи, соответствующих всевозможным граням полиэдра Π, представляет собой $(p-1)$-мерную цепь, которую мы назовем *границей* полиэдра Π и обозначим $b\Pi$:

$$b\Pi = \sum_i (\Pi_i, I_i).$$

Граница цепи $\varepsilon\Pi$ определяется равенством $b(\varepsilon\Pi) = \varepsilon b\Pi$.

Далее, граница элемента цепи $c = \pi\Pi$ или $c' = \pi(\varepsilon\Pi)$ в многообразии V определяется соответственно равенствами

$$bc = \pi b\Pi, \qquad bc' = \pi b(\varepsilon\Pi).$$

Теперь, располагая этими определениями, мы сформулируем следующее предложение:

Для любой формы β класса C^1 в R^p

$$\int_{\Pi} d\beta = \int_{b\Pi} \beta. \tag{1}$$

Доказательство достаточно провести для частного случая, когда Π представляет собой симплекс, так как произвольный выпуклый полиэдр Π может быть разбит на симплексы, причем граница Π, как легко видеть, будет равна сумме границ этих симплексов. Если наша формула будет доказана для симплексов, то она окажется справедливой и для произвольного выпуклого полиэдра.

Далее, мы вправе допустить, что форма β однородна; кроме того, можно ограничиться случаем, когда она четна и степень ее равна $p-1$, так как иначе интегралы в обеих частях равенства (1) обратятся в нуль.

Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_p$—вершины симплекса Π; рассмотрим в пространстве R^p систему координат $t_1, \ldots, t_p$, определяемую равенством

$$P = P_0 + \sum_{i=1}^{p} t_i (P_i - P_0),$$

или

$$P = \sum_{i=0}^{p} t_i P_i,$$

где $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^{p} t_i$.

В этих координатах форма β представляется в виде суммы p членов, и нам достаточно будет доказать формулу только для одного из них. Итак, предположим, что

$$\beta = a(t_1, t_2, \ldots, t_p)\, dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_p.$$

Пусть Π_i—грань симплекса, противоположная вершине P_i, а I_i—вложение в R^p плоскости $t_i = 0$, содержащей эту грань, ориентированное так, как описано выше. Тогда

$$\int_{b\Pi} \beta = \sum_{i=0}^{p} \int_{\Pi_i} I_i^* \beta.$$

При $i > 1$ имеет место равенство $I_i^* \beta = 0$. В каждой из плоскостей $t_0 = 0$ и $t_1 = 0$ переменные $t_2, \ldots, t_p$ образуют систему координат. В первой из них эти координаты порождают ориентацию, соответствующую, при отображении I_0, ориентации R^p, определяемой координатами $t_1, \ldots, t_p$, а так как в плоскости $t_0 = 0$ координата t_1 принимает значения

$$\tau = 1 - \sum_{i=2}^{p} t_i,$$

то

$$I_0^* \beta = a(\tau, t_2, \ldots, t_p)\, dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_p.$$

В плоскости $t_1 = 0$ ориентация, определяемая координатами $t_2, \ldots, t_p$, противоположна той, которая соответствует (при отображении I_1) ориентации R^p, определяемой координатами $t_1, \ldots, t_p$. Поэтому

$$I_1^* \beta = -a(0, t_2, \ldots, t_p)\, dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_p$$

Заметив еще, что в этих координатах Π_0 и Π_1 имеют одну и ту же характеристическую функцию $f(t_2, \ldots, t_p)$, мы получим равенство

$$\int\limits_{b\Pi} \beta = \int\limits_{\Pi_0} I_0^* \beta + \int\limits_{\Pi_1} I_1^* \beta =$$

$$= \int \ldots \int f(t_2, \ldots, t_p) [a(\tau, t_2, \ldots, t_p) - \\ - a(0, t_2, \ldots, t_p] \, dt_2 \ldots dt_p.$$

С другой стороны, $d\beta = \frac{\partial a}{\partial t_1} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p$ и, так как характеристическая функция множества Π равна произведению $f(t_2, \ldots, t_p)$ на характеристическую функцию $g(t_1, \ldots, t_p)$ области, определенной неравенствами $0 < t_1 < \tau$, то

$$\int\limits_{\Pi} d\beta = \int \ldots \int f(t_2, \ldots, t_p) \, g(t_1, \ldots, t_p) \frac{\partial a}{\partial t_1} dt_1 \ldots dt_p.$$

Осуществив интегрирование по t_1, мы придем как раз к выражению $\int\limits_{b\Pi} \beta$, полученному выше. Наша теорема тем самым доказана.

Пусть теперь c—какой-нибудь элемент цепи класса C^1 в многообразии V и α — форма класса C^1 в V. Покажем, что

$$\int\limits_{bc} \alpha = \int\limits_{c} d\alpha. \tag{2}$$

Элемент цепи c имеет вид $\pi\Pi$ или $\pi(\varepsilon\Pi)$. Предположим сначала, что π представляет собой отображение класса C^2. Тогда $\beta = \pi^*\alpha$ будет формой класса C^1, и мы получим

$$\int\limits_{bc} \alpha = \int\limits_{b\Pi} \beta \quad \text{или} \quad \int\limits_{bc} \alpha = \int\limits_{b\Pi} \varepsilon\beta$$

и

$$\int\limits_{c} d\alpha = \int\limits_{\Pi} d\beta \quad \text{или} \quad \int\limits_{c} d\alpha = \int\limits_{\Pi} d(\varepsilon\beta),$$

так что (2) вытекает из (1),

Если отображение π—класса C^1, а не C^2, то его можно представить как предел последовательности отображений π_h $(h=1, 2, \ldots)$ класса C^2, такой, что локальные координаты точек $x=\pi_h t$ (где $x \in V$, $t \in \Pi$) и их первые производные по локальным координатам точки t равномерно сходятся на Π к локальным координатам и к их соответствующим производным точки $x=\pi t$ [1]). Формула (2) справедлива для $\pi_h \Pi$ и $\pi_h(\varepsilon\Pi)$, а на элементы цепи $\pi\Pi$ и $\pi(\varepsilon\Pi)$ она распространяется посредством предельного перехода.

Рассмотрим теперь произвольную цепь

$$c=\sum_i k_i c_i$$

в V; c_i представляют собой элементы цепи. Ее *граница* определяется равенством

$$bc=\sum_i k_i \, bc_i.$$

Так как bc_i есть сумма конечного числа элементов цепи, то bc представляет собой цепь, конечную, если конечна цепь c, и, может быть, бесконечную, но непременно локально конечную, если цепь c бесконечна. Для того, чтобы оправдать это определение, надо показать, что bc зависит только от c, или, что равносильно этому утверждению, $bc=0$ при $c=0$. Действительно, если α—форма класса C^1 с компактным носителем, то

$$\int_{bc_i} \alpha = \int_{c_i} d\alpha.$$

---

[1]) Эта теорема о приближении может быть доказана следующим образом. Рассмотрим собственное и регулярное вложение g многообразия V в R^{2n+1} и трубчатую окрестность D, состоящую из слоев N_y (см. § 3). Возьмем отображение p, проектирующее расслоенное пространство D на его базу V таким образом, что $px=y \in V$ при $x \in N_y$. Тогда $g\pi$ представляет собой отображение класса C^1 полиэдра Π в D, и, так же, как в доказательстве теоремы 2 (§ 2), можно получить последовательность отображений ρ_h $(h=1, 2, \ldots)$ класса C^∞ полиэдра Π в D, такую, что координаты точки $\rho_h t$ и их первые производные по координатам точки t сходятся равномерно (в Π) к соответствующим координатам и к соответствующим производным координат точки $g\pi t$. Тогда последовательность отображений $\pi_h=p\rho_h$ $(h=1, 2, \ldots)$ будет обладать требуемыми свойствами.

Сложив эти равенства почленно и заметив, что эти интегралы отличны от нуля лишь при конечном числе значений i, мы получим

$$\int_{bc} \alpha = \int_{c} d\alpha. \tag{3}$$

Отсюда следует, что при $c=0$ правая часть обращается в нуль, а обращение в нуль левой части влечет за собой равенство $bc=0$.

Итак, мы определили границу произвольной цепи и одновременно установили общую формулу Стокса (3)[1]), справедливую для любой цепи, конечной или бесконечной, имеющей компактный носитель. Если носитель формы α не компактен, то она справедлива для любой конечной цепи.

Очевидно, что операция b линейна и что границей однородной p-мерной цепи служит некоторая однородная $(p-1)$-мерная цепь той же четности, конечная, если конечна исходная цепь. Далее, граница границы есть нуль; это легко проверить для элемента цепи, но можно вывести и из формулы (3).

Четная форма нулевой степени представляет собой функцию $f(x)$, а нечетная цепь c^0 нулевой степени — линейную комбинацию точек, $c^0 = \sum k_i x_i$, следовательно,

$$\int_{c^0} f(x) = \sum_i k_i f(x_i).$$

Если c — одномерная нечетная цепь с границей $bc = x_2 - x_1$, то формула Стокса сводится к

$$\int_c df = f(x_2) - f(x_1).$$

Заметим, наконец, что в том случае, когда носитель формы α не компактен, и правая и левая части формулы (3) оказываются, вообще говоря, неопределенными. Однако

---

[1]) Эта формула содержит в качестве частных случаев классические теоремы Грина, Ампера — Стокса и Остроградского. Общий случай рассматривали Вольтерра, Пуанкаре и Брауэр (см. Volterra [1], Poincaré [1], Brouwer [1]. Ср. Segre [1], стр. 202).

может случиться, что обе они конечны, но не равны; например, если c — бесконечная цепь, образованная интервалом $-\infty < x < 0$ в R^1 (граница ее сводится к точке $x = 0$), а $f(x)$ — функция с непрерывной производной, равная -1 при $x \leqslant -1$ и равная 0 при $x \geqslant 0$, то левая часть формулы (3) примет значение 0, тогда как правая — значение 1.

§ 7. Двойные формы

Мы до сих пор рассматривали формы с действительными коэффициентами. Можно было бы ввести коэффициенты комплексные. Кроме того, можно было бы рассмотреть более общие *формы с коэффициентами из векторного пространства* E над полем действительных чисел или, что равнозначно, p-ковекторы, компоненты которых принадлежат E. При этом сохранятся формулы (1) § 4 — формулы преобразования компонент при переходе от одной системы координат к другой.

Внешнее произведение формы с коэффициентами из E и формы с коэффициентами из R будет попрежнему определено формулами (2) § 4. Внешнее произведение двух форм с коэффициентами из E определится теми же формулами, если только в E определено умножение элементов.

Без труда распространяется на формы с коэффициентами из E понятие прообраза.

Наконец, понятия дифференциала и интеграла также могут быть определены, если предположить, что в E задана топология, позволяющая определить производную и интеграл абстрактной функции действительного переменного со значениями в E.

Мы рассмотрим случай, когда векторное пространство E образовано дифференциальными формами (с действительными коэффициентами) на некотором другом многообразии.

Пусть V и W — многообразия соответственно n и m измерений. Переменные точки того и другого обозначим соответственно x и y. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ означают локальные координаты в $U \subset V$, а $y^1, \ldots, y^m$ — локальные координаты в $U' \subset W$. Дифференциальная форма γ степени p на V с коэффициентами, являющимися дифференциальными формами (с действительными коэффициентами) степени q на W, в области U представляется в виде

$$\gamma = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \beta_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

и коэффициенты $\beta_{i_1 \ldots i_p}$ выражаются в области U' равенствами

$$\beta_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{j_1 < \ldots < j_q} c_{i_1 \ldots i_p,\, j_1 \ldots j_q} dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q},$$

где $c_{i_1 \ldots i_p,\, j_1 \ldots j_q}$ — действительные функции точки (x, y) произведения $U \times U'$.

Если фиксировать точку y и индексы $j_1, \ldots, j_q$, то

$$\alpha_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} c_{i_1, \ldots i_p,\, j_1 \ldots j_q} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

будет формой с действительными коэффициентами на многообразии V. Следовательно,

$$\sum_{j_1 < \ldots < j_q} \alpha_{j_1 \ldots j_q} dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}$$

будет представлять собой форму на многообразии W с коэффициентами, являющимися формами на V. *Мы условимся отождествлять эту форму с формой γ и называть двойной формой на $V \times W$.* В отличие от таких форм, ранее рассмотренные формы будем называть *простыми*.

Таким образом, двойная форма на $V \times W$ представляет собой форму на V с коэффициентами, являющимися формами на W, и одновременно формой на W с коэффициентами, являющимися формами на V. Часто двойную форму γ мы будем обозначать $\gamma(x, y)$, а простые формы α на V и β на W — соответственно $\alpha(x)$ и $\beta(y)$.

В $U \times U'$ двойная форма $\gamma(x, y)$ представляется в виде

$$\gamma = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_p \\ j_1 < \ldots < j_q}} c_{i_1 \ldots i_p,\, j_1 \ldots j_q} (dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p})(dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}). \tag{1}$$

В согласии с принятым отождествлением, dx^i перестановочны с dy^j: это очевидным образом необходимо для того, чтобы в предыдущих выражениях γ коэффициенты $\beta_{i_1 \ldots i_p}$ были перестановочны с dx^i, а коэффициенты $\alpha_{j_1 \ldots j_q}$ — с dy^j.

Назовем $\gamma(x, y)$ формой класса C^r, если ее коэффициенты $c_{i_1 \ldots i_p,\, j_1 \ldots j_q}$ принадлежат к классу C^r; будем говорить, что она обращается в нуль в некоторой точке произведения $V \times W$, если в этой точке обращаются в нуль все ее коэффициенты. *Носителем* формы γ называется наименьшее замкнутое множество, вне которого γ равна нулю. Форма γ называется *однородной*, если она обладает не только определенными степенями p по x и q по y, но также определенной четностью по x и определенной четностью по y. Мы будем рассматривать также *неоднородные* двойные формы; любую из них можно представить, притом единственным образом, в виде суммы $4(n+1)(m+1)$ однородных двойных форм всевозможных степеней и четностей.

Внешнее произведение $\gamma \wedge \gamma'$ двойных форм γ и γ' на $V \times W$ строится по следующим правилам, приводящим к вполне определенному результату: dx^i перемножаются между собой как простые формы, так же как dy^j между собой, в то время как dx^i и dy^j перестановочны. Если p и p' — степени форм γ и γ' по x, а q и q' — их степени по y, то форма $\gamma \wedge \gamma'$ имеет степень $p+p'$ по x и степень $q+q'$ по y; кроме того,

$$\gamma \wedge \gamma' = (-1)^{pp'+qq'} \gamma' \wedge \gamma.$$

Такое произведение будет четным или нечетным по x в зависимости от того, одинакова или нет четность по x обоих множителей; то же относится и к четности по y.

Двойная форма γ, если она принадлежит к классу C^1, имеет два дифференциала, один по x, обозначаемый $d_x\gamma$, другой, $d_y\gamma$, по y. Если γ — форма класса C^2, то

$$d_x^2\gamma = d_y^2\gamma = 0 \quad \text{и} \quad d_x d_y \gamma = d_y d_x \gamma.$$

Двойная форма $\gamma = \gamma(x, y)$ может быть проинтегрирована по x на некоторой цепи c в V. Полученный интеграл, обозначаемый

$$\int\limits_{x \in c} \gamma(x, y),$$

представляет собой простую форму на W. Отметим еще

$$\int\limits_{x} \gamma(x, y)$$

— интеграл формы $\gamma(x, y)$ по x на V, равный нулю, если форма γ однородна, за исключением тех случаев, когда по x она нечетна, а степень ее по x равна n. Можно также интегрировать γ по y на W и, при обычных условиях, менять порядок интегрирования по x и по y.

Пусть $\alpha(x)$ — простая форма на V и $\beta(y)$ — простая форма на W; их *тензорным произведением* называется двойная форма $\alpha(x)\beta(y)$ на $V \times W$. В силу высказанных выше определений, тензорное умножение коммутативно.

Для того, чтобы двойная форма γ на $V \times W$ представлялась в $U \times U'$ в виде суммы конечного числа таких тензорных произведений, необходимо и достаточно, чтобы каждый коэффициент $c_{i_1 \ldots i_p,\, j_1 \ldots j_q}$ в выражении γ в этой области был суммой конечного числа произведений функции от x на функцию от y. Имея это в виду, мы сформулируем следующую теорему, вытекающую из теоремы 2.

Теорема 6. *Пусть $\gamma(x, y)$ — двойная форма класса C^∞ в $V \times W$, обладающая компактным носителем. Тогда существует последовательность двойных форм $\sigma_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, обладающая следующими свойствами:*
1) Каждая из $\sigma_k(x, y)$ есть сумма конечного числа тензорных произведений $\alpha(x)\beta(y)$ формы $\alpha(x)$ класса C^∞ с носителем, заключенным в фиксированном компактном множестве в V, и формы $\beta(y)$ класса C^∞ с носителем, заключенным в фиксированном компактном множестве в W.
2) При $k \to \infty$ в окрестности произвольной точки из $V \times W$ любая производная любого коэффициента формы $\sigma_k(x, y)$ (представленной посредством локальных координат, заданных в этой окрестности) стремится равномерно к соответствующей производной соответствующего коэффициента формы $\gamma(x, y)$.

В самом деле, с помощью некоторого разбиения единицы теорема сводится к случаю, когда носитель формы $\gamma(x, y)$ содержится в области вида $U \times U'$, а в этом случае утверждение теоремы прямо следует из теоремы 2.

Понятие двойной формы может быть очевидным образом обобщено: на произведении трех многообразий мы имеем тройные формы, на произведении r многообразий — формы кратности r.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПОТОКИ

§ 8. Определение потока

Поток [1]) на n-мерном многообразии V представляет собой, по определению, некоторый функционал $T[\varphi]$ на векторном пространстве всевозможных форм класса C^∞ с компактными носителями в V. Функционал $T[\varphi]$ предполагается линейным, т. е. удовлетворяющим условию

$$T[k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2] = k_1 T[\varphi_1] + k_2 T[\varphi_2]$$

при любых формах φ_1 и φ_2 из этого пространства и любых действительных k_1 и k_2, и непрерывным, в том смысле, что если φ_h $(h = 1, 2, \ldots)$ — последовательность форм класса C^∞, такая, что носители φ_h содержатся в одном и том же компактном множестве, лежащем внутри области задания какой-либо системы локальных координат $x^1, \ldots, x^n$, и любая производная любого из коэффициентов формы φ_h (выраженной посредством $x^1, \ldots, x^n$) равномерно стремится к нулю при $h \to \infty$, то $T[\varphi_h] \to 0$ [2]).

В этом определении среди производных коэффициентов форм φ_h фигурируют и производные нулевого порядка, т. е. сами коэффициенты.

Говорят, что поток T — *однородный, р-мерный и нечетного* (*четного*) *рода*, если $T[\varphi]$ может быть отлично от нуля только в том случае, когда φ — четная (соответственно

---

[1]) Понятие потока в менее точной и менее общей форме было введено в моих статьях [5] и [6]; см. также [2] (введение) и [4]. К определению, принятому в [10], [11] и здесь, меня привело понятие распределения, введенное Л. Шварцем (Schwartz [1], [2]).

[2]) Это понятие непрерывности, анализируемое ниже, введено Л. Шварцем (Schwartz [1], [2]) в его определении распределения в R^n. Распределения в R^n представляют собой потоки степени 0 и одновременно потоки степени n, так как поток нулевой степени отождествляется с потоком степени n, умноженным (в определенном ниже смысле) на элемент объема в пространстве R^n.

нечетная) форма степени p. Число $n-p$, где n—размерность многообразия V, называется *степенью* потока. Любой поток T, очевидно, допускает единственное представление в виде суммы $2(n+1)$ однородных потоков[1]), называемых *однородными составляющими* потока T.

Пример 1. Цепь c в V определяет поток

$$c[\varphi]=\int_c \varphi.$$

Мы будем говорить, что *этот поток равен цепи* c.

Пример 2. Локально интегрируемая форма α на V определяет поток

$$\alpha[\varphi]=\int \alpha\wedge\varphi.$$

Будем говорить, что *этот поток равен форме* α.

Понятие однородности, четности и размерности или степени, определенные ранее для цепей и форм, согласуются с соответствующими понятиями, введенными здесь для потоков.

Пример 3. Пусть v — контравариантный p-вектор в определенной точке многообразия V с компонентами $v^{i_1 \dots i_p}$ в некоторой системе локальных координат, а φ — четная однородная форма степени p с коэффициентами $a_{i_1 \dots i_p}$ в той же точке. Положим

$$v[\varphi]=\sum_{i_1<\dots<i_p} a_{i_1 \dots i_p} v^{i_1 \dots i_p}$$

и $v[\varphi]=0$, если φ однородна и либо нечетна, либо имеет степень, отличную от p. О потоке, так определенном, говорят, что он *равен контравариантному p-вектору* v.

Условимся говорить, что *поток T равен нулю в открытом множестве D, если $T[\varphi]=0$ для любой формы φ с компактным носителем, заключенным в D.*

Теорема 7. *Если $T=0$ в окрестности каждой точки открытого множества D, то $T=0$ в D.*

---

[1]) Выбор термина «поток» (courant) мотивирован тем, что в обычном трехмерном пространстве «одномерные потоки» могут быть интерпретированы как электрические токи (см. de Rham [5], [6]).

В самом деле, окрестности, в которых $T=0$, образуют покрытие $\{U_i\}$ множества D. В силу теоремы 1, в D существует подчиненное этому покрытию локально конечное разбиение единицы $1=\sum \varphi_i$, такое, что $T[\varphi_i\varphi]=0$. Так как носитель формы φ представляет собой компактное множество, заключенное в D, то $\varphi=\sum \varphi_i\varphi$, где в правой части равенства отлично от нуля лишь конечное число слагаемых. Отсюда следует, что $T[\varphi]=\sum\limits_i T[\varphi_i\varphi]=0$.

Из этой теоремы вытекает существование наибольшего открытого множества, в котором $T=0$. Дополнение этого множества называется *носителем* потока T. В том случае, когда T равен некоторой форме класса C^0, это определение согласуется с определением носителя формы.

Если поток T равен некоторой цепи c, представленной посредством элементов цепи c_i в виде $c=\sum k_i c_i$, то его носитель содержится в соединении множеств точек всех c_i, но, вообще говоря, не совпадает с этим соединением, которое к тому же меняется вместе с представлением c.

Будем говорить, что T — поток *класса* C^r $(0\leqslant r\leqslant\infty)$ *в открытом множестве* D, если T равен в D некоторой форме α класса C^r, т. е. в этом множестве $T-\alpha=0$.

Поток T назовем *локальной цепью*, если для любой точки многообразия V существует ее окрестность U и цепь c_U, такие, что $T=c_U$ в U. Всякая цепь является локальной цепью. Вопросом о том, верно ли обратное, т. е. можно ли локальную цепь представить в целом в виде локально конечной линейной комбинации элементов цепи, мы заниматься не будем.

Например, поток, равный единице,

$$1[\varphi]=\int\varphi,$$

представляет собой, как легко видеть, локальную цепь.

Пусть φ — форма класса C^∞ с *некомпактным* носителем. Мы скажем, что $T[\varphi]$ *сходится*, и положим

$$T[\varphi]=\sum_i T[\varphi_i\varphi],$$

если такой ряд сходится при любом разбиении единицы $1=\sum\varphi_i$, удовлетворяющем условиям теоремы 1. Если это имеет место, то так же, как в частном случае $T = 1$, рассмотренном в § 5, легко убедиться в том, что этот ряд сходится абсолютно и его сумма не зависит от выбора разбиения единицы.

Этот ряд всегда сходится, когда T обладает компактным носителем, так как в этом случае лишь конечное число членов ряда отлично от нуля. При этом функционал $T[\varphi]$ определен на векторном пространстве всевозможных форм класса C^∞.

Внешнее произведение $T\wedge\alpha$ потока T и формы α класса C^∞ на одном и том же многообразии есть поток, определяемый равенством

$$(T\wedge\alpha)[\varphi] = T[\alpha\wedge\varphi].$$

В том случае, когда T равен некоторой форме β, это произведение есть $\beta\wedge\alpha$.

Определим еще произведение $\alpha\wedge T$, положив, если α и T однородны, а степени их соответственно равны p и q,

$$\alpha\wedge T = (-1)^{qp}\, T\wedge\alpha.$$

В частности, какова бы ни была функция f класса C^∞,

$$fT[\varphi] = Tf[\varphi] = T[f\varphi].$$

Предположим, что мы имеем $\binom{n}{p}$ потоков $T_{i_1\ldots i_p}$ $(i_1 < \ldots < i_p)$ степени 0, определенных в области D задания координат $x^1, \ldots, x^n$; тогда

$$T = \sum_{i_1<\ldots<i_p} T_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$$

есть поток степени p в области D.

Обратно, всякий поток степени p в области D допускает такое представление. В самом деле, для заданного T равенства

$$T_{i_1\ldots i_p}[a\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n] =$$
$$= \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_p\, j_1\ldots j_{n-p}}\, T[a\,dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{n-p}}],$$

где $i_1\ldots i_p\, j_1\ldots j_{n-p}$ — перестановка номеров $1, \ldots, n$ и a — функция класса C^∞ с носителем, заключенным в D, определяют потоки $T_{i_1\ldots i_p}$ степени 0, посредством которых осуществляется искомое представление потока T. Мы видим, таким образом, что в области определения системы координат *любой поток представляется в виде дифференциальной формы, коэффициентами которой служат потоки нулевой степени.*

В дальнейшем будут полезны следующие обозначения. Если $T[1]$ сходится (это заведомо имеет место, когда T обладает компактным носителем), условимся вместо $T[1]$ писать $\int T$, т. е. так же, как в том частном случае, когда T равен некоторой форме. Если $T[\varphi]=(T\wedge\varphi)[1]$, мы также будем писать

$$T[\varphi]=\int T\wedge\varphi.$$

В частности, для цепи c

$$c[\varphi]=\int_c \varphi=\int c\wedge\varphi=(c\wedge\varphi)[1].$$

§ 9. Векторные пространства $\mathscr{E}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}^p$ и $\mathscr{D}^p$[1]

Пространство всевозможных форм класса C^p на V с действительными коэффициентами (т. е. с коэффициентами, являющимися действительными функциями с непрерывными производными порядка $\leqslant p$, если p — конечное число $\geqslant 0$, или с непрерывными производными всех порядков, если $p=\infty$) будем обозначать $\mathscr{E}^p$, или $\mathscr{E}_V^p$, или еще $\mathscr{E}^p(V, R)$.

Векторное пространство, образованное теми формами из $\mathscr{E}^p$, которые обладают компактными носителями, будем обозначать $\mathscr{D}^p$, или $\mathscr{D}_V^p$, или же $\mathscr{D}^p(V, R)$.

При $p=\infty$ будем писать $\mathscr{E}$, или $\mathscr{E}_V$, или же $\mathscr{E}(V, R)$ вместо $\mathscr{E}^\infty$, а также $\mathscr{D}$, или $\mathscr{D}_V$, или $\mathscr{D}(V, R)$ вместо $\mathscr{D}^\infty$.

Очевидно, что

$$\mathscr{E}^p\supset\mathscr{E}^{p+1},\quad \mathscr{D}^p\supset\mathscr{D}^{p+1},\quad \mathscr{E}^p\supset\mathscr{D}^p,$$

$$\mathscr{E}=\bigcap_{0\leqslant p<\infty}\mathscr{E}^p,\quad \mathscr{D}=\bigcap_{0\leqslant p<\infty}\mathscr{D}^p.$$

---

[1]) В связи с содержанием этого параграфа см. Schwartz [2], гл. III.

В каждом из этих пространств мы введем понятие *ограниченного множества*, которое понадобится нам для того, чтобы проанализировать условие непрерывности, входящее в определение потока[1]).

Некоторое множество форм из $\mathscr{E}^p$ называется *локально ограниченным до порядка* p $(0 \leqslant p < \infty)$ *в окрестности точки и многообразия* V, если существует компактная окрестность U точки u, содержащаяся в области определения некоторой системы координат $x^1, \ldots, x^n$, такая, что производные по x^i порядка $\leqslant p$ любого коэффициента любой из форм рассматриваемого множества ограничены по абсолютной величине в U. Ясно, что если это условие выполнено при какой-нибудь одной системе координат, область определения которой содержит U, то оно выполнено и при любой другой.

Некоторое множество форм в $\mathscr{E}^p$ $(0 \leqslant p < \infty)$ называется *локально ограниченным до порядка* p, или *ограниченным в* $\mathscr{E}^p$, если оно локально ограничено до порядка p в окрестности любой точки многообразия V.

Множество форм в $\mathscr{E}$ называется *локально ограниченным*, если оно ограничено в $\mathscr{E}^p$ при любом целом p.

Некоторое множество форм называется ограниченным в $\mathscr{D}^p$ $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$, если оно ограничено в $\mathscr{E}^p$ и, кроме того, носители всех форм, входящих в это множество, заключены в одном и том же компактном множестве $K \subset V$.

Рассмотрим какое-нибудь разбиение единицы $1 = \sum_i \phi_i$, удовлетворяющее условиям теоремы 1 и обладающее тем свойством, что носитель каждой из функций ϕ_i заключен в области определения некоторой системы координат $\mathscr{S}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Фиксируем такое разбиение и такие системы

---

[1]) В векторном пространстве, в котором определены ограниченные множества, будет введена топология, если условиться считать $\mathscr{V}^0$ окрестностью элемента 0 тогда и только тогда, когда всякое ограниченное множество заключено в некотором множестве, гомотетичном $\mathscr{V}^0$. Обратно, если векторное пространство наделено топологией, совместимой с его векторными свойствами, то множество $\mathscr{B}$ называется ограниченным, если для любой окрестности элемента 0 существует гомотетичное ей множество, содержащее $\mathscr{B}$ (ср. Schwartz [2]). В дальнейшем мы не будем пользоваться этой топологией в явном виде, но позволим себе назвать такие пространства «топологическими векторными пространствами».

координат; пусть $l_{i,p}(\varphi)$ *означает верхнюю грань модулей производных порядка* $\leqslant p$ *коэффициентов формы* $\psi_i\varphi$, *представленной посредством* $\mathscr{S}_i$.

Легко видеть, что для ограниченности множества форм φ в $\mathscr{E}^p$ необходимо и достаточно, чтобы $l_{i,p}(\varphi)$ было ограничено при любом i (причем граница может зависеть от i, но не от φ), а для ограниченности в $\mathscr{E}$ необходимо и достаточно, чтобы $l_{i,p}(\varphi)$ было ограничено при любых i и p (причем граница может зависеть от i и от p, но не от φ).

Для заданного компактного множества $K \subset V$ существует целое число h, такое, что при $i > h$ носитель функции ψ_i не пересекается с K. Следовательно, если носитель функции φ содержится в K, то $l_{i,p}(\varphi) = 0$ при $i > h$. Обратно, если существует такое h, что $l_{i,p}(\varphi) = 0$ при $i > h$, то $\psi_i\varphi = 0$ при этих значениях i и носитель функции φ заключен в носителе функции $\sum_{i=1}^{h} \psi_i$. Последний представляет собой компактное множество; следовательно, для ограниченности множества форм φ в пространстве $\mathscr{D}^p$ необходимо и достаточно, чтобы $l_{i,p}(\varphi)$ было ограничено (причем граница не должна зависеть ни от i, ни от φ) и обращалось в нуль при всех достаточно больших i.

Любое из пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^p$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^p$ обозначим $\mathscr{H}$ и скажем, что *последовательность форм* φ_h $(h = 1, 2, \ldots)$, *принадлежащих* $\mathscr{H}$, *сходится в* $\mathscr{H}$ *к нулю, если существует последовательность чисел* $m_h \to \infty$, *такая, что последовательность форм* $m_h\varphi_h$ *ограничена в* $\mathscr{H}$ [1]). Последовательность форм φ_h называется сходящейся в $\mathscr{H}$, если $\mathscr{H}$ содержит форму φ, такую, что $\varphi_h - \varphi \to 0$ в $\mathscr{H}$.

Предложение 1. *Последовательность форм* φ_h *сходится к нулю в* $\mathscr{E}^p$ *тогда и только тогда, когда* $l_{i,p}(\varphi_h) \to 0$ *при любом* i.

Необходимость этого условия очевидна, так как если $m_h \to \infty$ и $l_{i,p}(m_h\varphi_h) = m_h l_{i,p}(\varphi_h)$ остается ограниченным, то $l_{i,p}(\varphi_h) \to 0$ при $h \to \infty$.

---

[1]) Пусть вообще индекс h пробегает произвольное множество H, в котором выделен некоторый фильтр $\mathscr{F}$; говорят, что $\varphi_h \to 0$ в $\mathscr{H}$ вдоль $\mathscr{F}$, если на H существует числовая функция m_h, такая, что $m_h \to \infty$ вдоль $\mathscr{F}$ и множество $m_h\varphi_h$ ограничено в $\mathscr{H}$.

Чтобы доказать достаточность этого условия, допустим, что оно выполнено, и положим $m_{h,i} = l_{i,p}^{-1}(\varphi_h)$ при $l_{i,p}(\varphi_h) \neq 0$ и $m_{h,i} = h$ при $l_{i,p}(\varphi_h) = 0$. Тогда, каково бы ни было i, $m_{h,i} \to \infty$ при $h \to \infty$ и $l_{i,p}(m_{h,i}\varphi_h) \leqslant 1$.

В том случае, когда многообразие V компактно, индекс i принимает лишь конечное число значений; если при этом наименьшее из $m_{h,i}$ мы обозначим m_h, то получим $m_h \to \infty$ и $l_{i,p}(m_h\varphi_h) \leqslant 1$. Последовательность $m_h\varphi_h$ оказывается ограниченной в $\mathscr{E}^p$, и наше предложение доказано.

Тогда, когда V не компактно, индекс i принимает всевозможные целые значения $\geqslant 1$, и в этом случае мы прибегнем к следующей лемме.

Лемма. *Пусть $m_{h,i}$ — целые числа, определенные для всевозможных целых $h > 0$ и $i > 0$ таким образом, что $m_{h,i} \to \infty$ при $h \to \infty$, каково бы ни было i (сходимость может не быть равномерной относительно i). Тогда существует последовательность целых чисел m_h, такая, что $m_h \to \infty$ при $h \to \infty$ и, каково бы ни было i, $m_{h,i} \geqslant m_h$ при достаточно больших h (т. е. превосходящих некоторое число, которое может зависеть от i).*

В самом деле, пусть $e(p, k)$ — наименьшее целое число $\geqslant 0$, такое, что $m_{h,i} \geqslant k$ при $i \leqslant p$ и $h \geqslant e(p, k)$. Так как $e(0, 0) = 0$ и $e(m, m) \to \infty$ при $m \to \infty$ (ибо $e(m, m) \geqslant e(1, m) \to \infty$), то для любого $h > 0$ существует наибольшее целое $m_h \geqslant 0$, такое, что $e(m_h, m_h) \leqslant h$; $m_h \geqslant m$ при $h \geqslant e(m, m)$, так что $m_h \to \infty$ при $h \to \infty$. С другой стороны, в силу определения $e(p, k)$, $m_{h,i} \geqslant m_h$ при $i \leqslant m_h$, так как $h \geqslant e(m_h, m_h)$; следовательно, $m_{h,i} \geqslant m_h$, когда h достаточно велико, и лемма доказана.

Теперь легко установить достаточность высказанного условия. Действительно, $l_{i,p}(m_h\varphi_h) \leqslant 1$ при $m_h \leqslant m_{h,i}$, т. е. при достаточно больших h, откуда вытекает, что последовательность форм $m_h\varphi_h$ ограничена в пространстве $\mathscr{E}^p$.

Предложение 2. *Последовательность форм φ_h сходится к нулю в $\mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда для любого целого p она сходится к нулю в $\mathscr{E}^p$ (или, что сводится к тому же, когда $l_{i,p}(\varphi_h) \to 0$ при любых i и p).*

Необходимость этого условия очевидна. Для доказательства достаточности допустим, что оно выполнено.

Тогда, каково бы ни было p, существует последовательность чисел $m_{h,p} \to \infty$, такая, что последовательность форм $m_{h,p}\varphi_h$ ограничена в $\mathscr{E}^p$. Согласно лемме, существует последовательность чисел $m_h \to \infty$, такая, что, каково бы ни было p, $m_h \leqslant m_{h,p}$ при достаточно больших h. Таким образом, последовательность форм $m_h\varphi_h$ ограничена в $\mathscr{E}^p$ при любом p. Следовательно, она ограничена в $\mathscr{E}$, и наше предложение доказано.

Согласно предложениям 1 и 2, последовательность форм φ_h сходится к нулю в $\mathscr{E}$ (в $\mathscr{E}^p$) тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки многообразия V любая производная (соответственно любая производная порядка $\leqslant p$) любого коэффициента формы φ_h равномерно стремится к нулю. Отсюда, согласно классической теореме о дифференцировании последовательности функций, вытекает, что *последовательность форм* φ_h $(h = 1, 2, \ldots)$ *сходится в* $\mathscr{E}$ *(в* $\mathscr{E}^p$*) тогда и только тогда, когда* $\varphi_h - \varphi_k \to 0$ *в* $\mathscr{E}$ *(соответственно в* $\mathscr{E}^p$*) при* $h, k \to \infty$. Другими словами, в пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}^p$ всякая последовательность Коши сходится, т. е. эти пространства *полны*.

Для того, чтобы последовательность форм, принадлежащих пространству $\mathscr{D}$ *(пространству* $\mathscr{D}^p$*), сходилась в* $\mathscr{D}$ *(соответственно в* $\mathscr{D}^p$*), необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в* $\mathscr{E}$ *(соответственно в* $\mathscr{E}^p$*) и чтобы носители всех этих форм были заключены в одном и том же компактном множестве* $K \subset V$. В самом деле, это вытекает непосредственно из определения ограниченности множества в $\mathscr{D}$ и в $\mathscr{D}^p$ и из нашего определения сходящейся последовательности. Отсюда мы можем сделать вывод, что пространства $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^p$ также *полны*: всякая последовательность Коши в любом из этих пространств сходится.

Заметим, что последовательность форм из $\mathscr{E}$, носители которых неограниченно «удаляются» (т. е. для любого компактного множества $K \subset V$ можно указать такой номер N, что носители функций φ_h с номерами $h > N$ не пересекаются с K), ограничена в $\mathscr{E}$ и даже сходится к нулю в этом пространстве, так как при этом $\psi_i\varphi_h = 0$, когда h достаточно велико. Мы видим, что в том случае, когда V не компактно, последовательность форм из $\mathscr{D}$ может сходиться к нулю в $\mathscr{E}$, не будучи сходящейся, и даже ограниченной, в $\mathscr{D}$.

Векторное пространство $\mathscr{D}$ плотно в любом из пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^p$ и $\mathscr{D}^p$, т. е. какова бы ни была форма φ, принадлежащая любому из пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^p$ и $\mathscr{D}^p$ — назовем его $\mathscr{H}$, — можно в $\mathscr{D}$ найти последовательность форм φ_h, сходящуюся к φ в $\mathscr{H}$. Для доказательства в случае $\mathscr{H} = \mathscr{E}$ достаточно взять разбиение единицы $1 = \sum \psi_i$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, и положить $\varphi_h = \sum_{i=1}^{h} \psi_i\varphi$. В случае, когда $\mathscr{H} = \mathscr{E}^p$ или $\mathscr{D}^p$, можно, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 2 (см. § 2), построить последовательность форм $\varphi_{h,i}$ из $\mathscr{D}$, сходящуюся к $\psi_i\varphi$ в $\mathscr{D}^p$ при $h \to \infty$; после этого останется положить $\varphi_h = \sum_{i=1}^{h} \varphi_{h,i}$.

§ 10. Векторные пространства $\mathscr{D}'$, $\mathscr{E}'$, $\mathscr{D}'^p$ и $\mathscr{E}'^p$ [1])

Пусть $\mathscr{H}$ — одно из векторных пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}^p$ и $\mathscr{D}^p$. Линейный функционал $T[\varphi]$ на пространстве $\mathscr{H}$ называется *непрерывным на* $\mathscr{H}$, если $T[\varphi_h] \to 0$, когда $\varphi_h \to 0$ в $\mathscr{H}$. Эквивалентно этому условие, что $T[\varphi]$ ограничено (по абсолютной величине) на любом ограниченном множестве в $\mathscr{H}$. В самом деле, если последнее условие выполнено и $\varphi_h \to 0$ в $\mathscr{H}$, то существует такая последовательность $m_h \to \infty$, что $m_h\varphi_h$ ограничены в $\mathscr{H}$; тогда

$$T[m_h\varphi_h] = m_h T[\varphi_h]$$

ограничено по абсолютной величине и, следовательно, $T[\varphi_h] \to 0$. Обратно, если $|T[\varphi]|$ оказывается неограниченным на каком-нибудь ограниченном множестве $\mathscr{B} \subset \mathscr{H}$, то для любого целого $h > 0$ найдется форма $\varphi_h \in \mathscr{B}$, для которой $|T[\varphi_h]| > h$; тогда $h^{-1}\varphi_h \to 0$ в $\mathscr{H}$, но $|T[h^{-1}\varphi_h]| > 1$, и непрерывность $T[\varphi]$ в $\mathscr{H}$ нарушается.

Таким образом, *непрерывный линейный функционал на $\mathscr{H}$ есть не что иное, как линейный функционал, ограниченный на любом ограниченном множестве в $\mathscr{H}$*, т. е. линейное отображение пространства $\mathscr{H}$ на числовую пря-

[1]) В связи с материалом всего этого параграфа см. Schwartz [2], гл. III.

мую, которое переводит множества, ограниченные в $\mathscr{H}$, в множества, ограниченные в R.

Совокупность всех непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{H}$ представляет собой векторное пространство; оно называется *дуальным* (к $\mathscr{H}$) пространством и обозначается $\mathscr{H}'$ [1]).

Учитывая результаты, полученные в § 9, мы можем следующим образом сформулировать определение потока:

Поток есть непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathscr{D}$.

Всевозможные потоки на многообразии V образуют векторное пространство, обозначаемое $\mathscr{D}'$, или $\mathscr{D}'_V$, или, наконец, $\mathscr{D}'(V, R)$.

Если T — поток с компактным носителем, то $T[\varphi]$ сходится при любой форме $\varphi \in \mathscr{E}$, т. е. функционал $T[\varphi]$ определен на всем пространстве $\mathscr{E}$. Этот функционал непрерывен. В самом деле, предположим, что φ находится в ограниченной части пространства $\mathscr{E}$. Воспользовавшись снова разбиением единицы $1 = \sum_i \phi_i$, рассмотренным в § 9, мы убедимся в том, что $\phi_i\varphi$ находятся в ограниченной части пространства $\mathscr{D}$ и $|T[\phi_i\varphi]|$ остается ограниченным; так как $T[\phi_i\varphi] = 0$, когда i настолько велико, что носители ϕ_i не пересекаются с носителем T, то $T[\varphi] = \sum_i T[\phi_i\varphi]$ также ограничено.

Пусть, обратно, $T[\varphi]$ — непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathscr{E}$. Он непрерывен и на $\mathscr{D}$, следовательно, представляет собой поток. Покажем, что этот поток обладает компактным носителем. В самом деле, в противном случае существовала бы последовательность форм φ_h с неограниченно удаляющимися носителями, такая, что $T[\varphi_h] \neq 0$. Снабдив φ_h постоянными множителями, подобранными соответствующим образом, мы добьемся выполнения неравенств $T[\varphi_h] > h$, а это вместе с соотношением $\varphi_h \to 0$ означает, что функционал T не непрерывен в $\mathscr{E}$.

Потоки с компактными носителями образуют векторное

[1]) В теории нормированных векторных пространств в русской литературе чаще употребляют термин «сопряженное пространство». — *Прим. перев.*

пространство, а именно пространство, дуальное к $\mathscr{E}$; будем обозначать его $\mathscr{E}'$, или $\mathscr{E}'_V$, или, наконец, $\mathscr{E}'(V, R)$.

Условимся говорить, что поток T обладает *непрерывностью порядка* p (p - целое число $\geqslant 0$), если $|T(\varphi)|$ ограничено на любом множестве форм $\varphi \in \mathscr{D}$, ограниченном в $\mathscr{D}^p$. Согласно сделанному выше замечанию, этому условию эквивалентно следующее: $T[\varphi_h] \to 0$ для любой последовательности форм $\varphi_h \in \mathscr{D}$, сходящейся к нулю в пространстве $\mathscr{D}^p$.

Если поток T имеет непрерывность порядка p, то, как функционал на $\mathscr{D}$, T имеет продолжение, притом единственное, на пространство $\mathscr{D}^p$.

Пусть $\varphi \in \mathscr{D}^p$. Существует последовательность форм $\varphi_h \in \mathscr{D}$, сходящаяся к φ в $\mathscr{D}^p$. Следовательно, $\varphi_h - \varphi_k \to 0$ в $\mathscr{D}^p$ при $h, k \to \infty$, поэтому $T[\varphi_h] - T[\varphi_k] \to 0$ и $T[\varphi_h]$ стремится к некоторому пределу; значение $T[\varphi]$, по определению, полагаем равным этому пределу. Последний не зависит от выбора форм, сходящихся к φ, так как если одновременно с φ_h и $\varphi'_h \to \varphi$, то $\varphi_h - \varphi'_h \to 0$ в $\mathscr{D}^p$ и $T[\varphi_h] - T[\varphi'_h] \to 0$.

Функционал $T[\varphi]$, продолженный таким образом на $\mathscr{D}^p$, очевидно, линеен. Покажем теперь, что он непрерывен на $\mathscr{D}^p$, т. е. ограничен на любой ограниченной части пространства $\mathscr{D}^p$. Достаточно рассмотреть T на ограниченном множестве $\mathscr{B}(a, b)$ форм $\varphi \in \mathscr{D}^p$, для которых $l_{i,p}(\varphi) < a$ (в обозначениях § 9) и носители которых не пересекаются с носителями функций ψ_i при $i > b$, так как любое ограниченное множество в пространстве $\mathscr{D}^p$ содержится в некотором $\mathscr{B}(a, b)$ при достаточно больших a и b. Итак, если $\varphi_h \in \mathscr{D}$ и $\varphi_h \to \varphi$ в $\mathscr{D}^p$, то $\varphi'_h = \sum_{i=1}^{b} \psi_i \varphi_h \in \mathscr{D}$, $\varphi'_h \to \varphi$ в $\mathscr{D}^p$ и $\varphi_h \in \mathscr{B}(a+1, b)$ при достаточно больших h. Так как $T[\varphi']$ ограничено на множестве форм $\varphi' \in \mathscr{D} \cap \mathscr{B}(a+1, b)$, то $T[\varphi]$ ограничено также на множестве форм $\varphi \in \mathscr{B}(a, b)$.

Замечание. Проведенное рассуждение дает несколько больший результат, а именно: если некоторое множество потоков T таково, что $T[\varphi]$ ограничены в совокупности на любом множестве форм $\varphi \in \mathscr{E}$, ограниченном в $\mathscr{E}^p$, то $T[\varphi]$ ограничены в совокупности на любом множестве форм, ограниченном в $\mathscr{E}^p$.

Выше мы рассматривали потоки с компактными носителями; применив те же рассуждения к потокам, обладающим непрерывностью порядка p и имеющим компактные носители, мы придем к выводу, что *потоки с непрерывностью порядка p, обладающие компактными носителями, образуют векторное пространство, представляющее собой не что иное, как пространство, дуальное к $\mathscr{E}^p$. Условимся обозначать его $\mathscr{E}'^p$, или $\mathscr{E}'^p_V$, или, наконец, $\mathscr{E}'^p(V, R)$.*

Ясно, что непрерывность порядка p влечет за собой непрерывность порядка $p+1$, но обратное неверно. Наиболее сильной из этих непрерывностей является непрерывность нулевого порядка. С другой стороны, очевидно, что потоки, определенные формами, принадлежащими пространству $\mathscr{D}^0$, всегда обладают непрерывностью порядка 0. Таким образом, мы имеем следующие включения:

$$\mathscr{E}'^p \subset \mathscr{E}'^{p+1} \subset \mathscr{E}', \quad \mathscr{D}'^p \subset \mathscr{D}'^{p+1} \subset \mathscr{D}',$$

$$\mathscr{E}'^p \subset \mathscr{D}'^p, \quad \mathscr{E}' \subset \mathscr{D}', \quad \mathscr{D}^0 \subset \mathscr{D}'^0, \quad \mathscr{E}^0 \subset \mathscr{E}'^0.$$

Теперь мы введем понятие ограниченного множества в пространстве $\mathscr{H}'$, дуальном к $\mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ — любое из векторных пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}^p$ и $\mathscr{D}^p$.

Множество $\mathscr{B}$ в пространстве $\mathscr{H}'$ называется ограниченным в $\mathscr{H}'$, если $T[\varphi]$ остается ограниченным, когда T пробегает $\mathscr{B}$, а φ пробегает любое ограниченное множество в $\mathscr{H}$.

Если в качестве $\mathscr{H}$ взять два различных пространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$, таких, что $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}_2$ и всякая ограниченная часть пространства $\mathscr{H}_1$ ограничена и в $\mathscr{H}_2$, то $\mathscr{H}'_1 \supset \mathscr{H}'_2$ и любая ограниченная часть пространства $\mathscr{H}'_2$ будет ограниченной в $\mathscr{H}'_1$. Следовательно, любое множество, ограниченное в $\mathscr{E}'^p$, ограничено в $\mathscr{E}'^{p+1}$ и в $\mathscr{E}'$; любое множество, ограниченное в $\mathscr{D}'^p$, ограничено в $\mathscr{D}'^{p+1}$ и в $\mathscr{D}'$.

По той же причине множество $\mathscr{B} \subset \mathscr{E}'$, ограниченное в $\mathscr{E}'$, ограничено и в $\mathscr{D}'$. Далее, потоки, принадлежащие $\mathscr{B}$, таковы, что все их носители заключены в одном и том же компактном множестве. В самом деле, если допустить противное, то можно было бы найти последовательность форм $\varphi_h \in \mathscr{D}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ и последовательность потоков $T_h \in \mathscr{B}$, такие, что носители форм φ_h неограниченно удаляются, но $T_h[\varphi_h] \neq 0$. Снабдив φ_h надлежащими постоянными множителями, мы получили бы неравенства $T_h[\varphi_h] > h$; но это невозможно, так как последовательность форм φ_h ограничена в $\mathscr{E}$. Обратно, если $\mathscr{B}$ ограничено в $\mathscr{D}'$ и носители потоков, входящих в $\mathscr{B}$, все заключены в одном и том же компактном множестве K, то множество $\mathscr{B}$ ограничено в $\mathscr{E}'$. Действительно, если функция ψ входит в $\mathscr{D}$ и равняется 1 на K, то $|T[\varphi]|$ остается ограниченным, когда φ пробегает произвольное ограниченное в $\mathscr{E}$ множество, а T пробегает $\mathscr{B}$, так как $T[\varphi] = T[\psi\varphi]$ и $\psi\varphi$ принадлежит множеству, ограниченному в $\mathscr{D}$. Итак, мы пришли к следующему выводу:

Часть $\mathscr{B}$ пространства $\mathscr{E}'$ ограничена в $\mathscr{E}'$ тогда и только тогда, когда она ограничена в $\mathscr{D}'$ и, кроме того, носители потоков, входящих в $\mathscr{B}$, все заключены в одном и том же компактном множестве.

Для пространств $\mathscr{E}'^p$ и $\mathscr{D}'^p$ справедливо аналогичное предложение.

Теорема 8. *Любая ограниченная часть пространства $\mathscr{E}'$ ограничена в $\mathscr{E}'^p$, если p достаточно велико.*

Пусть $\mathscr{B}$ — какая-нибудь ограниченная часть $\mathscr{E}'$. Сначала покажем, что при фиксированном i и при достаточно больших p значение $T[\psi_i\varphi]$ ограничено, когда T принадлежит $\mathscr{B}$, а φ пробегает множество форм из $\mathscr{E}$, для которых $l_{i,p}(\varphi) < 1$ (в обозначениях § 9). Если бы это было неверно, то для всякого целого p существовали бы поток $T_p \in \mathscr{B}$ и форма $\varphi_p \in \mathscr{E}$, для которых $l_{i,p}(\varphi_p) < 1$ и $T_p[\psi_i\varphi_p] > p$. Но это невозможно, так как последовательность форм $\psi_i\varphi_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ была бы ограничена в $\mathscr{E}$, в силу того, что абсолютные величины производных порядка $\leqslant q$ коэффициентов формы $\psi_i\varphi_p$ в системе координат $\mathscr{S}_i$ (см. § 9), будучи $\leqslant l_{i,p}(\varphi_p)$, были бы $\leqslant 1$ при $p \geqslant q$.

Пусть N — такое целое число, что при $i > N$ носитель функции ψ_i не пересекается с компактным множеством K, содержащим носители всех потоков $T \in \mathscr{B}$. Так как $\psi_i\varphi = 0$ при $i > N$, то можно выбрать столь большое целое p, чтобы высказанное выше условие выполнялось при всех i.

Тогда $T[\varphi] = \sum_{i=1}^{N} T[\psi_i\varphi]$ будет ограничено на множестве форм $\varphi \in \mathscr{E}$, для которых $l_{i,p}(\varphi) < 1$ при $i \leqslant N$, а следовательно, будет ограничено и на любом множестве форм $\varphi \in \mathscr{E}$, ограниченном в $\mathscr{E}^p$, так как каждое такое множество гомотетично некоторой части предыдущего. Согласно сделанному выше замечанию, отсюда следует, что $\mathscr{B}$ ограничено в $\mathscr{E}'^p$.

Из этой теоремы вытекает, что всякая ограниченная часть пространства $\mathscr{E}'$ заключена, при достаточно больших p, в $\mathscr{E}'^p$. Отсюда $\mathscr{E}' = \bigcup\limits_{1 \leqslant p < \infty} \mathscr{E}'^p$, и мы приходим к такому выводу:

Следствие. *Любой поток с компактным носителем обладает непрерывностью порядка p при достаточно большом p.*

Пусть $\mathscr{H}$ — какое-либо из пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^p$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}^p$, а $\mathscr{H}'$ — дуальное пространство. Будем говорить, что *последовательность потоков T_h сходится к нулю в пространстве $\mathscr{H}'$, если существует последовательность чисел $m_h \to \infty$, такая, что $m_h T_h$ ограничены в $\mathscr{H}'$*. Будем говорить, что *последовательность потоков T_h сходится в $\mathscr{H}'$, если существует поток $T \in \mathscr{H}'$, такой, что $T_h - T$ сходится к нулю в $\mathscr{H}'$.*

Сейчас мы покажем, что $T_h \to 0$ *в $\mathscr{E}'$ тогда и только тогда, когда $T_h[\varphi] \to 0$ равномерно на любом множестве форм φ, ограниченном в $\mathscr{E}$.*

Необходимость этого условия очевидна: если последовательность потоков $m_h T_h$ ограничена в $\mathscr{E}'$ и множество $\mathscr{B}$ ограничено в $\mathscr{E}$, то, поскольку $m_h T_h[\varphi]$ ограничено при $\varphi \in \mathscr{B}$, ясно, что, когда $\varphi \in \mathscr{B}$ и $m_h \to \infty$, $T_h[\varphi] \to 0$ равномерно.

Теперь предположим, что $T_h[\varphi] \to 0$ равномерно на любом ограниченном в $\mathscr{E}$ множестве форм φ. Тогда $T_h[\psi_i \varphi] \to 0$ равномерно на множестве форм $\varphi \in \mathscr{E}$, для которых $l_{i,p}(\varphi)$ ограничено при любом p (причем граница может зависеть от p), так как множество $\psi_i \varphi$ при этом ограничено в $\mathscr{E}$. Но более того, эта сходимость равномерна и на множестве тех $\varphi \in \mathscr{E}$, для которых $l_{i,p}(\varphi) \leqslant 1$ при *одном* достаточно большом p. В самом деле, если допустить противное, то для любого целого $p \geqslant 0$ можно было бы найти число $\varepsilon_p > 0$, целое число $h_p > p$ и форму

$\varphi_p \in \mathcal{E}$, такие, что $T_{h_p}[\psi_i\varphi_p] > \varepsilon_p$ и $l_{i,p}(\varphi_p) < 1$; при этом последовательность $\varepsilon_p^{-1}\psi_i\varphi_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ была бы ограничена в $\mathcal{E}$ и, в противоречие с нашим предположением, сходимость $T_h[\varphi] \to 0$ была бы неравномерна на этой последовательности, так как $T_h[\varepsilon_p^{-1}\psi_i\varphi_p] > 1$.

Мы вправе предположить, что это достаточно большое значение p не зависит от i, потому что $T_h[\psi_i\varphi] = 0$ при $i > N$, где N таково, что носители функций ψ_i с номерами $i > N$ не пересекаются с компактным множеством K, содержащим носители всех T_h. Верхняя грань $s_{h,i}$ значений $|T_h[\psi_i\varphi]|$ на множестве $\mathcal{E}_N$ форм $\varphi \in \mathcal{E}$, для которых $l_{j,p}(\varphi) \leqslant 1$ при $j \leqslant N$, стремится к нулю, когда $h \to \infty$, равномерно относительно i, так как $s_{h,i} = 0$ при $i > N$. Отсюда следует, что существует последовательность $m_h \to \infty$, такая, что $m_h s_{h,i} \leqslant 1$ для всех i и h и

$$|m_h T_h[\varphi]| \leqslant \sum_{i=1}^{N} m_h |T_h[\psi_i\varphi]| \leqslant N$$

при $\varphi \in \mathcal{E}_N$. Но это означает, что $T_h \to 0$ в $\mathcal{E}'$, так как любое ограниченное в $\mathcal{E}$ множество гомотетично некоторой части множества $\mathcal{E}_N$. Достаточность высказанного условия установлена.

Докажем еще аналогичное предложение, относящееся к $\mathcal{D}'$: *$T_h \to 0$ в $\mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда $T_h[\varphi] \to 0$ равномерно на любом множестве форм φ, ограниченном в $\mathcal{D}$.*

Необходимость этого условия очевидна. Для того, чтобы доказать его достаточность, заметим, что если $T_h[\varphi] \to 0$ равномерно на любом ограниченном в $\mathcal{E}$ множестве форм φ, то также равномерна сходимость

$$\psi_i T_h[\varphi] = T_h[\psi_i\varphi] \to 0.$$

Следовательно, в силу только что доказанного, $\psi_i T_h \to 0$ в $\mathcal{E}'$ и существует последовательность чисел $m_{h,i} \to \infty$, такая, что последовательность потоков

$$m_{h,i} T_h \psi_i \quad (h = 1, 2, \ldots)$$

ограничена в $\mathcal{E}'$.

Воспользовавшись леммой § 9, мы получим последовательность $m_h \to \infty$, обладающую тем свойством, что

$m_h \leqslant m_{h,i}$ при достаточно больших h; тогда последовательность потоков

$$m_h T_h \psi_i \quad (h=1, 2, \ldots)$$

будет ограничена в $\mathscr{E}'$ при любом i, а отсюда будет вытекать, что последовательность $m_h T_h$ ограничена в $\mathscr{D}'$, и наше утверждение доказано.

Подобным же образом доказываются аналогичные предложения относительно $\mathscr{E}'^p$ и $\mathscr{D}'^p$, и мы можем высказать следующее

Предложение. *Если $\mathscr{H}$ — любое из векторных пространств $\mathscr{E}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}^p$ и $\mathscr{D}^p$, а $\mathscr{H}'$ — дуальное пространство, то $T_h \to 0$ в $\mathscr{H}'$ тогда и только тогда, когда $T_h[\varphi] \to 0$ равномерно на любом ограниченном в $\mathscr{H}$ множестве форм φ.*

С помощью этого предложения легко доказать, что пространство $\mathscr{H}'$ *полно*: если последовательность потоков T_h такова, что $T_h - T_k \to 0$ в $\mathscr{H}'$ при h, $k \to \infty$, то существует поток $T \in \mathscr{H}'$, к которому эта последовательность сходится, т. е. $T_h - T \to 0$ в $\mathscr{H}'$ при $h \to \infty$.

Любой форме $\varphi \in \mathscr{D}$ ($\varphi \in \mathscr{E}$) соответствует непрерывный линейный функционал Φ на $\mathscr{D}'$ (соответственно на $\mathscr{E}'$), определенный равенством $\Phi[T] = T[\varphi]$. В § 17 мы покажем, что таким образом могут быть получены все непрерывные линейные функционалы на $\mathscr{D}'$ (соответственно на $\mathscr{E}'$), т. е. дуальным к $\mathscr{D}'$ (соответственно к $\mathscr{E}'$) пространством служит само $\mathscr{D}$ (соответственно $\mathscr{E}$); иными словами, рассматриваемые пространства *рефлексивны*.

Прибавим еще несколько замечаний, касающихся функций одного или нескольких вещественных переменных со значениями в топологических векторных пространствах, таких, как $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}^p$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^p$, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{D}'^p$, $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}'^p$.

Такая функция является элементом пространства $\mathscr{H}$ (т. е. формой или потоком), зависящим от одного или нескольких параметров t. Говорят, что она непрерывна в точке $t = t_0$, если $f(t) \to f(t_0)$ в $\mathscr{H}$, когда $t \to t_0$ (или, если угодно, для любой последовательности значений t, сходящейся к t_0). Функция $f(t)$ имеет производную в точке $t = t_0$, если при $t \to t_0$ отношение

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

сходится в $\mathscr{H}$. Предел является элементом пространства $\mathscr{H}$ (т. е. формой или потоком); он называется производной функции $f(t)$ и обозначается $f'(t_0)$ или $\frac{df}{dt}$.

Обычные определения распространяются также на функции нескольких переменных и даже на функции, определенные на многообразии, так что можно ввести понятие *функции класса C^∞ со значениями в $\mathscr{H}$.*

Если $\mathscr{L}$ — непрерывное линейное отображение (т. е. линейное отображение, переводящее любое ограниченное множество в ограниченное множество) векторного пространства $\mathscr{H}_1$ в другое векторное пространство $\mathscr{H}_2$, и если $f_1(t)$ — функция со значениями в $\mathscr{H}_1$, то $\mathscr{L} f_1(t) = f_2(t)$ представляет собой функцию со значениями в $\mathscr{H}_2$. Из линейности и непрерывности $\mathscr{L}$ непосредственно следует, что, когда f_1 имеет производную, f_2 также имеет производную, причем

$$\frac{d}{dt} \mathscr{L} f_1(t) = \mathscr{L} \frac{d}{dt} f_1(t).$$

Вообще, *отображение $\mathscr{L}$ перестановочно с любым дифференцированием, и если f — функция класса C^∞ со значениями в $\mathscr{H}_1$, то $\mathscr{L}f$ — функция класса C^∞ со значениями в $\mathscr{H}_2$.*

§ 11. Граница потока. Образ потока при отображении

Согласно формуле Стокса, $bc[\varphi] = c[d\varphi]$ для любой формы φ из $\mathscr{D}$ и для любой цепи c, конечной или бесконечной. *Граница bT произвольного потока T* определяется равенством

$$bT[\varphi] = T[d\varphi].$$

Линейный функционал $bT[\varphi]$, так определенный, представляет собой поток. В самом деле, d есть непрерывное линейное преобразование пространств $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ в себя, при котором ограниченные в $\mathscr{D}$ (соответственно в $\mathscr{E}$) множества переходят в ограниченные (в соответствующем пространстве) множества. Оператор b, сопряженный к d, осуществляет, следовательно, непрерывное линейное преобразование дуального пространства $\mathscr{D}'$ (соответственно $\mathscr{E}'$)

в себя, переводящее любую ограниченную часть $\mathscr{D}'$ (соответственно $\mathscr{E}'$) в ограниченную часть $\mathscr{D}'$ (соответственно $\mathscr{E}'$).

Говоря точнее, d преобразует множество форм, локально ограниченное до порядка $p+1$, в множество, локально ограниченное до порядка p. Отсюда следует, что если T — поток с непрерывностью порядка p, то bT обладает непрерывностью порядка $p+1$.

Если T равен некоторой форме α класса C^1, то, в силу предложения, установленного в § 5,

$$\int d(\alpha \wedge \varphi) = 0.$$

Но

$$d(\alpha \wedge \varphi) = d\alpha \wedge \varphi + w\alpha \wedge d\varphi,$$

поэтому

$$d\alpha[\varphi] = -w\alpha[d\varphi],$$

откуда, взяв $w\alpha$ вместо α и заметив, что $dw = -wd$, получим $w\,d\alpha[\varphi] = \alpha[d\varphi]$. Таким образом, *границей формы* α является $b\alpha = w\,d\alpha$, и $d\alpha = w\,b\alpha$.

Определим теперь *дифференциал* dT потока T, положив

$$dT = w\,bT$$

и задав линейный оператор w для потоков условием, что он переводит однородный поток T степени p в $(-1)^p T$.

В случае однородного потока дифференциал и граница потока совпадают с точностью до знака. Правило дифференцирования немедленно приводит к равенству

$$b(\alpha \wedge \beta) = b\alpha \wedge w\beta + \alpha \wedge b\beta.$$

Это правило действует и тогда, когда вместо одной из форм берется поток, в то время как другая форма предполагается принадлежащей к классу C^∞:

$$d(T \wedge \beta) = dT \wedge \beta + wT \wedge d\beta,$$
$$b(T \wedge \beta) = bT \wedge w\beta + T \wedge b\beta.$$

Наконец, $d^2T = b^2T = 0$, каков бы ни был поток T.

Если поток T обладает *компактным* носителем, то формула $bT[\varphi] = T[d\varphi]$, определяющая границу, применима к любой форме φ, принадлежащей пространству $\mathscr{E}$. В частности, для любого потока T с компактным носителем

$$bT[1]=0,$$

что можно записать иначе:

$$dT[1]=0 \quad \text{или} \quad \int dT=0.$$

Если форма α класса C^1 в области определения D некоторой системы координат представлена в виде

$$\alpha=\sum a_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1}\wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то ее производная по x^i в D определяется равенством

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}=\sum \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^i} dx^{i_1}\wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Если φ — форма с компактным носителем, заключенным в D, то

$$\int \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha \wedge \varphi)=0;$$

в этом нетрудно убедиться, проинтегрировав сначала по x^i. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^i}[\varphi]=-\alpha\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right].$$

Частную производную $\frac{\partial T}{\partial x^i}$ в D любого потока теперь определим, положив

$$\frac{\partial T}{\partial x^i}[\varphi]=-T\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right],$$

где φ — произвольная форма, принадлежащая $\mathscr{D}$, с компактным носителем, заключенным в D. Вычисление частных производных произведения подчиняется обычному правилу

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(T\wedge\beta)=\frac{\partial T}{\partial x^i}\wedge\beta+T\wedge\frac{\partial \beta}{\partial x^i},$$

и оператор d, в применении как к потокам, так и к формам, имеет в D выражение

$$d = \sum_i dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Мы определим еще образ потока при отображении.

Пусть μ — отображение класса C^∞ многообразия W в многообразие V. Пусть далее, T — нечетный поток на W с компактным носителем. Назовем *образом потока T при отображении* μ нечетный поток μT, определенный на V равенством

$$\mu T[\varphi] = T[\mu^*\varphi],$$

где φ — произвольная четная форма класса C^∞.

Поток T обладает компактным носителем, а $\mu^*\varphi$ принадлежит к классу C^∞, поэтому $T[\mu^*\varphi]$ всегда сходится и μT удовлетворяет требованию непрерывности, предъявляемому к потокам, так как если множество $\{\varphi\}$ локально ограничено, то и $\{\mu^*\varphi\}$ локально ограничено.

Образ *четного* потока T с компактным носителем определяется той же формулой, но при этом предполагается, что отображение μ *ориентировано*. Если μ неориентируемо, то μT не определяется.

Известно, что если форма φ однородна, то $\mu^*\varphi$ также однородна и имеет ту же четность, что и φ. Следовательно, *если T однороден, то μT также однороден и имеет те же размерность и четность, что и T*. Однако в том случае, когда многообразия V и W — различного числа измерений, степени потоков T и μT различны.

Если T представляет собой цепь, то приведенное здесь определение согласуется с определением, сформулированным в § 6.

Носитель μT содержится в образе носителя T при отображении μ.

Если носитель потока T не компактен, то может случиться, что $T[\mu^*\varphi]$ не сходится, так как носитель формы $\mu^*\varphi$ может быть некомпактным, даже если φ обладает компактным носителем. Однако, если μ — *собственное* отображение, то носитель формы $\mu^*\varphi$, будучи заключен в прообразе носителя φ, компактен, когда компактен носитель формы φ, и *определение образа потока оказы-*

вается применимым также к потокам с некомпактными носителями.

Если μ не является собственным отображением, то μT может быть определен в открытом множестве $V_{\mu, T}$ точек многообразия V, лежащих внутри какого-нибудь компактного множества, прообраз которого имеет компактное пересечение с носителем потока T. Действительно, если носитель формы φ заключен в $V_{\mu, T}$ и компактен, то носитель потока $T \wedge \mu^* \varphi$ также компактен и $T[\mu^* \varphi]$ сходится.

Операция μ, так определенная, перестановочна с операцией взятия границы:

$$b\mu T = \mu b T.$$

В самом деле,

$$b\mu T[\varphi] = \mu T[d\varphi] = T[\mu^* d\varphi] = T[d\mu^* \varphi] = \mu b T[\varphi].$$

Заметим, что она, вообще говоря, не перестановочна с оператором d. Действительно, если m и n — соответственно размерности многообразий W и V и T — однородный поток степени p, то

$$d\mu T = \omega \mu \omega \, dT = (-1)^{m+n} \mu \, dT.$$

Если μ — *гомеоморфизм класса* C^∞, причем μ и μ^{-1} канонически ориентированы, то, согласно одному из предложений § 5,

$$(\mu^{-1})^* (\alpha \wedge \mu^* \varphi)[1] = \alpha \wedge \mu^* \varphi [1].$$

Так как

$$(\mu^{-1})^* (\alpha \wedge \mu^* \varphi) = ((\mu^{-1})^* \alpha) \wedge \varphi,$$

то левая часть равна $(\mu^{-1})^* \alpha [\varphi]$; правая же часть есть $\alpha[\mu^* \varphi] = \mu \alpha [\varphi]$, поэтому $\mu \alpha = (\mu^{-1})^* \alpha$, и точно так же $\mu^* \varphi = \mu^{-1} \varphi$. Итак, мы пришли к следующему результату:

Если μ — канонически ориентированный гомеоморфизм класса C^∞, то образ формы α при отображении μ совпадает с ее прообразом при отображении μ^{-1}.

В этом случае можно определить прообраз $\mu^* T$ произвольного потока T, положив

$$\mu^* T = \mu^{-1} T;$$

при этом

$$\mu^* T[\varphi] = T[\mu \varphi].$$

Вообще, μ^*T может быть определен во всех случаях, когда μ осуществляет непрерывное отображение $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{D}_V$. Ниже мы встретимся с другими случаями, когда это возможно. Но, вообще говоря, $\mu\varphi$ не принадлежит к классу C^∞, даже если φ — класса C^∞, и μ^*T не может быть определено.

Операторы w^* и $\bar{w}$. Пусть w^* — линейный оператор, такой, что $w^*T=(-1)^{n-p}T$ для любого потока T степени p на n-мерном многообразии, а $\bar{w}$ — оператор $\bar{w}=w^{n+1}$. Тогда

$$\bar{w}T=(-1)^{np+p}T$$

и

$$ww^*T=w^*wT=(-1)^nT.$$

Кроме того,

$$w^*T[\varphi]=T[w\varphi], \qquad wT[\varphi]=T[w^*\varphi],$$
$$\varphi[T]=\bar{w}T[\varphi]=T[\bar{w}\varphi].$$

§ 12. Двойные потоки

Векторное пространство, образованное всевозможными двойными формами класса C^∞ с компактными носителями на многообразии $V\times W$, обозначим $\mathscr{D}(V\times W)$, а векторное пространство всевозможных форм класса C^∞ на $V\times W$ обозначим $\mathscr{E}(V\times W)$. Ограниченные множества и сходящиеся последовательности в этих пространствах определяются так же, как в $\mathscr{D}_V$ и в $\mathscr{E}_V$, и обладают теми же свойствами.

Назовем *двойным потоком*[1]) на $V\times W$ всякий непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathscr{D}(V\times W)$.

Пусть n и m — размерности многообразий V и W, x и y — переменные точки соответственно того и другого. Скажем, что L — *однородный* поток на $V\times W$, степени p и четный (нечетный) по x, степени q и четный (нечетный) по y, если $L[\gamma]=0$ для любой однородной двойной формы γ степени $\neq n-p$ и нечетной (соответственно четной)

[1]) Понятие двойного потока является обобщением понятия ядра-распределения (noyau-distribution) Шварца (см. Schwartz [4]).

по x и степени $\neq m-q$ и нечетной (соответственно четной) по y. Всякий двойной поток на $V\times W$ единственным образом представляется в виде суммы $4(n+1)(m+1)$ однородных двойных потоков всевозможных степеней и четностей по x и по y.

Двойной поток L на $V\times W$ часто будет обозначаться $L(x, y)$, а простые потоки T на V и S на W соответственно $T(x)$ и $S(y)$, т. е. в обозначениях будет явно указана переменная точка соответствующего многообразия.

Понятие *носителя* двойного потока и сходимость $L[\gamma]$, когда $\gamma\in\mathscr{E}(V\times W)$, определяются так же, как в случае простого потока. Заметим еще, что $L[\gamma]$ сходится всегда, когда L обладает компактным носителем.

Векторные пространства всевозможных двойных потоков на $V\times W$ и всевозможных двойных потоков на $V\times W$ с компактными носителями обозначим соответственно $\mathscr{D}'(V\times W)$ и $\mathscr{E}'(V\times W)$. Ограниченные множества и сходящиеся последовательности в этих пространствах определяются так же, как в $\mathscr{D}'_V$ и в $\mathscr{E}'_V$, и обладают теми же свойствами.

Большинство линейных операций над простыми потоками распространяется на двойные потоки.

Произведение двойного потока L на двойную форму α класса C^∞ определяется равенством

$$L\wedge\alpha[\gamma]=L[\alpha\wedge\gamma].$$

Если U и U' — области определения систем координат $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^m$ соответственно в V и W, то любой двойной поток может быть представлен в $U\times U'$ в виде

$$\sum L_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_q}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\cdot dy^{j_1}\wedge\ldots\wedge dy^{j_q},$$

где коэффициенты $L_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_q}$ представляют собой двойные потоки, заданные в $U\times U'$, степени 0 как по x, так и по y.

Пусть ω_x, ω_x^* и $\overline{\omega}_x$ — линейные операторы, такие, что для однородного потока L степени p по x

$$\omega_x L=(-1)^p L,\qquad \omega_x^* L=(-1)^{n-p} L,\qquad \overline{\omega}_x L=(-1)^{p(n+1)} L,$$

где n — размерность многообразия V. Операторы b_x и d_x определяются равенствами

$$b_x L[\gamma] = L[d_x\gamma], \qquad d_x = w_x b_x.$$

Операторы w_y, w_y^*, $\overline{w}_y$, b_y и d_y определяются аналогично.

Предположим, что двойная форма $\gamma \in \mathcal{D}(V \times W)$ при $y \in U'$ представляется в виде

$$\gamma(x, y) = \sum \alpha_{j_1 \ldots j_q} dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}.$$

Коэффициенты $\alpha_{j_1 \ldots j_q}$ представляют собой формы на V, зависящие от y, т. е. функции точки y класса C^∞ со значениями в $\mathcal{D}_V$. Если $T = T(x)$ — простой поток на V, то на W можно определить простую форму, задав ее на U' выражением

$$\sum T[\alpha_{j_1 \ldots j_q}] dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}.$$

Эту форму мы обозначим $T(x)[\gamma(x, y)]$ или

$$\int_x T(x) \wedge \gamma(x, y).$$

Так как T непрерывно и линейно отображает $\mathcal{D}_V$ в R и $\alpha_{j_1 \ldots j_q}$ представляют собой функции от y класса C^∞ со значениями в $\mathcal{D}_V$, то $T[\alpha_{j_1 \ldots j_q}]$ — функции от y класса C^∞ со значениями в R. Таким образом,

$$\beta = T(x)[\gamma(x, y)]$$

— форма класса C^∞ на W.

Оператор T, переводящий $\gamma(x, y)$ в β, перестановочен с операторами дифференцирования по координатам y (см. конец § 10), поэтому $d\beta = T(x)[d_y\gamma(x, y)]$, и если форма γ локально ограничена, то локально ограничена и форма β. Если носитель формы γ заключен в $K \times K'$, то носитель β заключен в K. Следовательно, если γ содержится в ограниченной части пространства $\mathcal{D}(V \times W)$, то β содержится в ограниченной части пространства $\mathcal{D}_W$. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 9. *Любой простой поток T на V определяет непрерывное линейное отображение пространства*

$\mathscr{D}(V\times W)$ в пространство $\mathscr{D}_W$, переводящее двойную форму $\gamma(x, y)$ в простую форму на W

$$\beta = T(x)[\gamma(x, y)] = \int_x T(x)\wedge\gamma(x, y).$$

При этом $d\beta = T(x)[d_y\gamma(x, y)]$. Когда γ изменяется в ограниченной части пространства $\mathscr{D}(V\times W)$, β остается в ограниченной части пространства $\mathscr{D}_W$.

Если $S = S(y)$ — поток на W, то, согласно этой теореме, $L[\gamma] = S(y)[T(x)[\gamma(x, y)]]$ представляет собой двойной поток на $V\times W$. Его называют *тензорным произведением*[1]) потоков T и S.

Теорема 10. *Тензорное произведение двух потоков обладает свойством коммутативности.*

В самом деле, рассмотрим двойные потоки

$$L[\gamma] = S(y)[T(x)[\gamma(x, y)]],\quad L'[\gamma] = T(x)[S(y)[\gamma(x, y)]].$$

Равенство $L[\gamma] = L'[\gamma]$ очевидно в том случае, когда γ — тензорное произведение $\alpha(x)\beta(y)$ двух простых форм. Следовательно, это равенство распространяется на всевозможные суммы таких произведений. Так как операторы L и L' непрерывны, то, в силу теоремы 6 (§ 7), это равенство справедливо для любой формы $\gamma\in\mathscr{D}(V\times W)$.

Для этого тензорного произведения мы будем употреблять следующие обозначения: $T(x)S(y)$, $S(y)T(x)$, TS и ST; будем также писать

$$L[\gamma] = T(x)S(y)[\gamma(x, y)] = \int_x\int_y T(x)S(y)\wedge\gamma(x, y).$$

§ 13. Преобразования двойных форм и потоков при отображениях

Операции $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^*$, $\mathscr{A}^{-1}$ и $\mathscr{A}^{*-1}$. Понятие двойной формы на $V\times W$ существенно опирается на строение про-

1) Для распределений (т. е. потоков степени 0) тензорное произведение тождественно прямому произведению Л. Шварца (см. Schwartz [2], гл. IV).

изведения $V \times W$. Но на $V \times W$, как на любом многообразии класса C^∞, можно также рассматривать простые формы и простые потоки.

Пусть $\tilde{\gamma}$ простая форма на $V \times W$. Если $U \subset V$ и $U' \subset W$ — области определения систем координат $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^m$, то в $U \times U'$ форма $\tilde{\gamma}$ представляется в виде

$$\tilde{\gamma} = \sum c_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}.$$

При преобразовании координат x^i в U и y^j в U' коэффициенты $c_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q}$ преобразуются как коэффициенты двойной формы, четной как по x, так и по y, если $\tilde{\gamma}$ четна, и как коэффициенты двойной формы, нечетной как по x, так и по y, если $\tilde{\gamma}$ — нечетная форма. Следовательно, форме $\tilde{\gamma}$ однозначно соответствует двойная форма γ на $V \times W$, представимая в $U \times U'$ в виде

$$\gamma = \sum c_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \cdot dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}.$$

Положим

$$\gamma = \mathcal{A}^* \tilde{\gamma}.$$

Операция $\mathcal{A}^*$ ставит в соответствие всякой простой четной (нечетной) форме на $V \times W$ двойную форму на $V \times W$, четную (соответственно нечетную) по каждому из аргументов.

Заметим, что это определение $\mathcal{A}^*$ зависит от того, в каком порядке взяты V и W. Если V и W поменять местами, то в составляющей формы $\mathcal{A}^* \tilde{\gamma}$ степени p по x и степени q по y появится множитель $(-1)^{pq}$, если форма $\tilde{\gamma}$ четная, и $(-1)^{pq+mn}$, если $\tilde{\gamma}$ нечетная; множитель $(-1)^{pq}$ появится за счет перестановок dx^i с dy^j, а множитель $(-1)^{mn}$ — от якобиана переменных $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m$ по переменным $y^1, \ldots, y^m, x^1, \ldots, x^n$.

Заметим еще, что операция $\mathcal{A}^*$ не мультипликативна. Если $\gamma = \mathcal{A}^* \tilde{\gamma}$ и $\gamma' = \mathcal{A}^* \tilde{\gamma}'$ и если γ имеет степень q по y, а γ' — степень p' по x, то

$$\mathcal{A}^* (\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\gamma}') = (-1)^{p'q} \mathcal{A}^* \tilde{\gamma} \wedge \mathcal{A}^* \tilde{\gamma}'. \tag{1}$$

Пусть теперь L — двойной поток на $V \times W$. *Определим простой поток $\mathcal{A}L$ на $V \times W$, положив*

$$\mathcal{A}L[\tilde{\gamma}] = L[\mathcal{A}^*\tilde{\gamma}].$$

Мы видим, что если L четен по x и по y, то $\mathcal{A}L$ — четный поток; если L нечетен по x и по y, то поток $\mathcal{A}L$ — нечетный. Если L четен по одному аргументу и нечетен по другому, то $\mathcal{A}L = 0$.

Применим, в частности, операцию $\mathcal{A}$ к $\mathcal{A}^*\tilde{\gamma}$. Предположив, что $\gamma = \mathcal{A}^*\tilde{\gamma}$ имеет степень p по x и степень q по y, и обозначив $\gamma' = \mathcal{A}^*\tilde{\gamma}'$, где $\tilde{\gamma}'$ — произвольная простая форма на $V \times W$, мы получим

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{\gamma}[\tilde{\gamma}'] = \mathcal{A}^*\tilde{\gamma}[\mathcal{A}^*\tilde{\gamma}'] = \gamma[\gamma'].$$

Мы вправе предположить, что γ' — однородная форма степени $n-p$ по x и степени $n-q$ по y (иначе обе части последнего равенства были бы равны нулю). Сравнив выражения $\gamma \wedge \gamma'$ и $\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\gamma}'$ и воспользовавшись формулой (1), мы придем к равенству

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\tilde{\gamma} = (-1)^{q(n-p)}\,\tilde{\gamma}.$$

Для оператора $\mathcal{A}$ существует *правый обратный* $\mathcal{A}^{-1}$, а для оператора $\mathcal{A}^*$ — *левый обратный* $\mathcal{A}^{*-1}$, которые определяются однозначно, если потребовать, чтобы $\mathcal{A}^{*-1}\gamma = 0$ для любой однородной двойной формы различной четности по x и по y и чтобы при любом простом потоке $\tilde{L}$ на $V \times W$ двойной поток $\mathcal{A}^{-1}\tilde{L}$ на $V \times W$ не содержал составляющих различной четности по x и по y. Тогда

$$\mathcal{A}^{-1}\tilde{L}[\gamma] = \tilde{L}[\mathcal{A}^{*-1}\gamma].$$

Для однородных по x и по y форм и потоков оператор $\mathcal{A}^{-1}$ с точностью до знака совпадает с $\mathcal{A}^*$; в самом деле, из приведенной выше формулы следует, что если $\mathcal{A}^*\tilde{\gamma}$ — степени p по x и степени q по y, то

$$\mathcal{A}^*\tilde{\gamma} = (-1)^{q(n-p)}\,\mathcal{A}^{-1}\tilde{\gamma}. \qquad (2)$$

В силу определения $\mathcal{A}^*$ и правил дифференцирования произведения,

$$\mathcal{A}^*d = (d_x + w_x d_y)\,\mathcal{A}^*, \qquad (3)$$

откуда следует

$$b\mathcal{A} = \mathcal{A}(b_x + w_x^* b_y). \qquad (4)$$

Пусть теперь μ — отображение класса C^∞ произведения $V \times W$ в простое многообразие Z. Отображения μ и μ^* устанавливают между простыми формами и потоками на $V \times W$ и Z соотношения, определенные в §§ 4, 5 и 11. Таким образом, *операции $\mu\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*\mu^*$, так же как $\mathcal{A}^{-1}\mu^*$ и $\mu\mathcal{A}^{*-1}$, устанавливают вполне определенные соотношения между формами и потоками на Z и двойными формами и потоками на $V \times W$.*

Рассмотрим, в частности, *оператор проектирования P*, определенный равенством $P(x, y) = y$ и отображающий $V \times W$ на W. Если $\beta = \beta(y)$ — четная форма на W, то $\mathcal{A}^*P^*\beta$ есть не что иное, как тензорное произведение формы β и функции на V, равной 1, которую мы обозначим $1(x)$:

$$\mathcal{A}^*P^*\beta = 1(x)\,\beta(y) \qquad (\beta \text{ — четная форма}).$$

Пусть T — нечетный простой поток на $V \times W$, обладающий тем свойством, что пересечение его носителя с прообразом $P^{-1}K$ произвольного компактного множества $K \subset W$ есть компактное множество. Потоку T соответствует двойной поток $\mathcal{A}^{-1}T(x, y)$, нечетный как по x, так и по y, и

$$PT[\beta] = T[P^*\beta] = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}T[P^*\beta] = \mathcal{A}^{-1}T[\mathcal{A}^*P^*\beta].$$

Отсюда, в силу предыдущей формулы,

$$PT[\beta] = \mathcal{A}^{-1}T[1(x)\,\beta(y)],$$

и для нечетного T можно написать

$$PT = \int_x \mathcal{A}^{-1}T(x, y),$$

или

$$PT = 1(x)[\mathcal{A}^{-1}T(x, y)].$$

Для того, чтобы распространить эти формулы на случай нечетной β и четного T, надо предположить, что отображение P ориентировано. Сначала покажем, что *если P ориентируемо, то ориентируемо и многообразие V, и наоборот.*

Итак, допустим, что P ориентировано. Если $\varepsilon_1(y)$ — какая-либо ориентация области $U' \subset W$, то $P^*\varepsilon_1(x, y)$ представляет собой ориентацию области $P^{-1}U' = V \times U'$ и $\mathcal{A}^*P^*\varepsilon_1(x, y)$ есть скаляр, нечетный как по x, так и по y, квадрат которого равен 1 в $V \times W'$, так что существует определенная ориентация $\varepsilon(x)$ многообразия V, при которой $\mathcal{A}^*P^*\varepsilon_1(x, y) = \varepsilon(x)\,\varepsilon_1(y)$. Обратно, если $\varepsilon(x)$ — ориентация многообразия V, то P можно ориентировать, потребовав, чтобы для любого нечетного скаляра $\varepsilon_1(y)$ на W выполнялось равенство $P^*\varepsilon_1(x, y) = \mathcal{A}^{*-1}\varepsilon(x)\,\varepsilon_1(y)$. Итак, *ориентации P и V канонически сопоставлены.*

Поэтому, если $\mathcal{A}^*P^*\beta$ — прообраз нечетной формы $\beta = \beta(y)$ на W, то, как легко видеть,

$$\mathcal{A}^*P^*\beta = \varepsilon(x)\,\beta(y).$$

Отсюда следует, что для всякого простого четного потока T на $V \times W$, носитель которого имеет компактное пересечение с прообразом $P^{-1}K$ любого компактного множества $K \subset W$, выполняется равенство

$$PT = \int_x \varepsilon(x)\,\mathcal{A}^{-1}T(x, y) = \varepsilon(x)\,[\mathcal{A}^{-1}T(x, y)].$$

Вообще, заметив, что $1(x)\,[\mathcal{A}^{-1}T(x, y)] = 0$, когда T четно, и $\varepsilon(x)\,[\mathcal{A}^{-1}T(x, y)] = 0$, когда T нечетно, мы придем к заключению, что для всякого простого потока T на $V \times W$, носитель которого имеет компактное пересечение с прообразом $P^{-1}K$ любого компактного множества $K \subset W$,

$$PT = \int_x \{1(x) + \varepsilon(x)\}\,\mathcal{A}^{-1}T(x, y) \tag{5}$$

и для всякой формы β на W

$$P^*\beta = \mathcal{A}^{*-1}\{1(x) + \varepsilon(x)\}\,\beta(y). \tag{6}$$

Формула (5) показывает, что, если T — класса C^r, то PT — также класса C^r; если T — класса C^∞ и ограничен в $\mathcal{D}_{V \times W}$, то и PT — класса C^∞ и ограничен в $\mathcal{D}_W$. Другими словами, P порождает непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{D}_{V \times W}$ в пространство $\mathcal{D}_W$.

Регулярные отображения. Пусть μ — отображение класса C^∞ $(m+n)$-мерного многообразия W в n-мерное многообразие V. Будем говорить, что μ *регулярно в точке u многообразия* W, если в некоторой окрестности точки u существует система координат $x^1, \ldots, x^n$, $y^1, \ldots, y^m$, а в некоторой окрестности точки μu — система координат $z^1, \ldots, z^n$, такие, что из

$$\mu(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) = (z^1, \ldots, z^n)$$

следует

$$z^1 = x^1, \ \ldots, \ z^n = x^n.$$

При этом мы скажем, что μ имеет *ранг n* в точке u. Отображение μ назовем *регулярным*, если оно регулярно во всех точках многообразия W.

В окрестности точки, где μ регулярно, оно ведет себя как определенный выше оператор проектирования P. При таком отображении образ потока класса C^r, носитель которого заключен в рассматриваемой окрестности, будет принадлежать к классу C^r. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме.

Теорема 11. *Если μ — регулярное отображение W в V и φ — форма класса C^r на W, носитель которой имеет компактное пересечение с прообразом $\mu^{-1}K$ любого компактного множества $K \subset V$, то $\mu\varphi$ представляет собой форму класса C^r на V. Если φ изменяется, оставаясь ограниченной в $\mathscr{D}_W$, то $\mu\varphi$ ограничена в $\mathscr{D}_V$.*

Другими словами, отображение μ порождает некоторое непрерывное линейное отображение пространства $\mathscr{D}_W$ в пространство $\mathscr{D}_V$.

Если μ регулярно, то для любого потока T на V можно определить его прообраз μ^*T, положив $\mu^*T[\overline{\omega}\varphi] = T[\overline{\omega}\mu\varphi]$. Разумеется, если μ не ориентировано, то форму φ следует считать нечетной, а поток T — четным.

Эта теорема применима, в частности, к тому случаю, когда μ представляет собой проекцию расслоенного пространства на его базу.

Преобразование форм и потоков при отображении f многообразия Z в произведение $V \times W$. Операции $\ddot{f}$ и $\ddot{f}^*$. Пусть f_1 и f_2 — отображения класса C^∞ одного и того же многообразия Z соответственно в V и в W и $f=(f_1, f_2)$ — результирующее отображение Z в $V\times W$. Операции f^* и f, определенные согласно §§ 4, 5 и 11, ставят в соответствие простой форме $\tilde{\gamma}$ на $V\times W$ некоторую форму $f^*\tilde{\gamma}$ на Z и потоку T на Z — некоторый простой поток fT на $V\times W$ (в тех случаях, когда это нужно, f предполагается ориентированным или собственным). Сейчас мы введем операции $\ddot{f}^*$ и $\ddot{f}$, из которых первая каждой двойной форме γ на $V\times W$ поставит в соответствие форму $\ddot{f}^*\gamma$ на Z (причем, если γ не является четной по x или по y, то f_1, соответственно f_2, предполагается ориентированным), а вторая каждому потоку T на Z (с компактным носителем, если f не является собственным отображением) поставит в соответствие двойной поток $\ddot{f}T$ на $V\times W$.

Может случиться, что f_1 и f_2 ориентируемы, тогда как f неориентируемо. Если, например, $Z=V=W$ — неориентируемое многообразие, то тождественные отображения f_1 и f_2 ориентируемы, а f неориентируемо (так как в произведении $V\times V$ диагональ всегда имеет ориентируемую окрестность, и если бы отображение $x\to(x, x)$ было ориентируемо в этой окрестности, то было бы ориентируемо само V). Может быть и так, что f ориентируемо, хотя f_1 или f_2 неориентируемо. Например, если $Z=V\times W$ и f есть тождественное отображение, то f_2 проектирует Z на W, а такое проектирование, как мы видели, ориентируемо только тогда, когда ориентируемо V.

Рассмотрим сначала случай, когда форма γ четна как по x, так и по y; положим

$$\ddot{f}^*\gamma=f^*\mathcal{A}^{*-1}\gamma.$$

Ориентируемость f_1 и f_2 в этом случае не нужна.

Теперь предположим, что форма γ нечетна по x и четна по y, а f_1 ориентируемо. Прибегнув к разбиению единицы, мы сведем задачу к случаю, когда носитель формы γ содержится в произведении $D_1\times W$ ориентируемой области $D_1\subset V$ и многообразия W. Пусть ε_1 — какая-нибудь ориентация области D_1 и $\varepsilon=f_1^*\varepsilon_1$ — соответствующая ориентация множества $f_1^{-1}D_1 \subset Z$. Тогда форма $\varepsilon_1\gamma$ (равная нулю вне $D_1 \times W$) четна как по x, так и по y, и, согласно предыдущему, мы полагаем

$$\ddot{f}^*\gamma = \begin{cases} \varepsilon\ddot{f}^*(\varepsilon_1\gamma) & \text{в } f_1^{-1}D_1, \\ 0 & \text{вне } f_1^{-1}D_1. \end{cases}$$

Подобным же образом мы поступаем тогда, когда γ четна по x и нечетна по y, а f_2 ориентируемо.

Предположив, наконец, что γ нечетна и по x и по y, а f_1 и f_2 оба ориентируемы, и снова воспользовавшись разбиением единицы, мы сможем допустить, что носитель формы γ заключен в произведении $D_1 \times D_2$ двух ориентируемых областей $D_1 \subset V$ и $D_2 \subset W$; пусть ε_1 и ε_2 — ориентации D_1 и D_2, которым в силу отображений f_1 и f_2 соответствует одна и та же ориентация ε области $f_1^{-1}D_1 \cap \cap f_2^{-1}D_2 = f^{-1}(D_1 \times D_2)$. Тогда форма $\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma$ (равная нулю вне $D_1 \times D_2$) четна как по x, так и по y, и, согласно первому из рассмотренных случаев, мы положим

$$\ddot{f}^*\gamma = \begin{cases} \ddot{f}^*(\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma) & \text{в } f^{-1}(D_1 \times D_2), \\ 0 & \text{вне } f^{-1}(D_1 \times D_2). \end{cases}$$

Форма $\ddot{f}^*\gamma$ определена теперь для любой двойной формы γ; она четна, если γ одинаковой честности по x и по y, и нечетна в противном случае. Эту форму мы назовем сопряженным образом формы γ.

Заметим, что определение операции $\ddot{f}^*$ зависит от того, в каком порядке берутся V и W, так как от этого зависит $\mathcal{A}^{*-1}$. Если γ представляет собой тензорное произведение $\gamma(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, то $\ddot{f}^*\gamma = f_1^*\alpha \wedge f_2^*\beta$. Важно фиксировать порядок V и W именно потому, что, вообще говоря, $f_1^*\alpha \wedge f_2^*\beta \neq f_2^*\beta \wedge f_1^*\alpha$, хотя $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Формулу $\ddot{f}^*(\alpha\beta) = f_1^*\alpha \wedge f_2^*\beta$ можно было бы положить в основу определения $\ddot{f}^*\gamma$ в том случае, когда γ представляет собой тензорное произведение; на суммы таких произведений операцию $\ddot{f}^*$ можно распространить, считая ее линейной, а на общий случай — по непрерывности.

Пусть теперь T — поток на Z; двойной поток $\ddot{f}T$ определим, положив

$$\ddot{f}T[\gamma] = T[\ddot{f}^* \gamma].$$

Если отображение f не является собственным, то мы предположим, что носитель потока T компактен или хотя бы имеет компактное пересечение с прообразом любого компактного множества. Далее, если отображение f_1 не ориентировано, то будем предполагать, что γ четна по x; тогда будет определена нечетная по x составляющая потока $\ddot{f}T$, что же касается его составляющей, четной по x, то мы условимся считать ее равной нулю. Подобным же образом, если f_2 неориентировано, то четная по y составляющая потока $\ddot{f}T$ непосредственно не определяется, и мы условимся считать ее равной нулю.

Для $\ddot{f}$ и $\ddot{f}^*$ справедливы формулы

$$d\ddot{f}^* = \ddot{f}^* (d_x + w_x d_y), \tag{7}$$

$$\ddot{f}b = (b_x + w_x^* b_y)\, \ddot{f}. \tag{8}$$

Из них первую легко доказать, воздействовав операторами, стоящими в ее правой и левой частях, на тензорное произведение. Равенство обеих частей, примененных к произвольным формам, получим в силу линейности и непрерывности. Что касается второй формулы, то она двойственна первой и потому прямо из нее следует.

Интересен частный случай отображения $jz = (z, z)$ многообразия Z на диагональ произведения $Z \times Z$; оно образуется посредством пары тождественных преобразований Z в себя. К этому частному случаю можно свести наши определения, относящиеся к различным V, W и Z.

В самом деле, рассмотрим двойную форму γ как форму на W с коэффициентами, представляющими собой формы на V. Применив к этим последним операцию f_1^*, мы получим формы на Z, и тем самым форма γ преобразуется в форму $f_1^* \gamma$ на W, коэффициентами которой служат формы на Z, а это означает, что $f_1^* \gamma$ есть двойная форма на $Z \times W$. Точно так же $f_2^* \gamma$ есть двойная форма на $Z \times V$ или на $V \times Z'$; штрихом мы отметим «второй экземпляр» многообразия Z и условимся считать, что f_1 отображает Z в V, а f_2 — Z' в W. Тогда $f_1^* f_2^* \gamma$ и $f_2^* f_1^* \gamma$ будут двойными формами на $Z \times Z'$, т. е. на $Z \times Z$, и легко видеть, что эти формы равны: когда γ представляет собой тензорное произведение, это проверяется непосредственно, а в общем случае вытекает из линейности и непрерывности рассматриваемых отображений.

Этой двойной форме на $Z \times Z$ операция $\ddot{f}^*$ ставит в соответствие некоторую форму на Z, а именно,

$$\ddot{f}^* \gamma = \ddot{j}^* (f_1^* f_2^* \gamma).$$

Аналогично, если T — поток на Z, то $\ddot{j}T$ представляет собой двойной поток на $Z \times Z$, носитель которого содержится в диагонали этого произведения, и

$$\ddot{f}T = f_1 f_2 \ddot{j} T = f_2 f_1 \ddot{j} T.$$

§ 14. Формулы гомотопии

Предварительные формулы. Рассмотрим произведение $R \times W$ прямой R — области изменения параметра t — и многообразия W. Возьмем отображение C_{t_0} многообразия W в $R \times W$, определенное формулой $C_{t_0} y = (t_0, y)$; оно образовано с помощью отображения W в фиксированную точку t_0 на прямой R и тождественного отображения W на себя. Это последнее будем считать канонически ориентированным. Напротив, отображение W в t_0 не будем предполагать ориентированным, тем более, что оно ориентируемо лишь в том случае, когда ориентируемо само W. Что касается отображения C_{t_0}, то оно ориентируемо: мы выберем такую его ориентацию, чтобы ориентация какой-либо области $D \subset W$, определенная локальными координатами $y^1, \ldots, y^m$, соответствовала в $R \times D$ ориентации, определенной локальными координатами $t, y^1, \ldots, y^m$.

Если $\alpha = \alpha(t, y)$ — двойная форма на $R \times W$, *четная* по t, то на W ей соответствует форма $\ddot{C}_{t_0}^* \alpha$. Последняя четна или нечетна в зависимости от того, четна или нечетна α по y, а ее выражение мы получим, взяв в выражении α фиксированное t_0 вместо t и 0 вместо dt. Пусть Q_{t_0} означает 0-мерный нечетный поток на R (или элемент нечетной цепи), равный точке $t = t_0$; тогда

$$\ddot{C}^*_{t_0} \alpha = Q_{t_0}(t)[\alpha(t, y)].$$

Следовательно, для любого потока $T = T(y)$ на W

$$\ddot{C}_{t_0} T = Q_{t_0}(t)\, T(y),$$

и это тензорное произведение представляет собой поток, нечетный по t.

Пусть $i(t)$ — характеристическая функция интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $I(t) = \varepsilon(t)\, i(t)$, где $\varepsilon(t)$ — ориентация R, определяемая параметром t. Поток $I = I(t)$ есть не что иное, как нечетная одномерная цепь, образованная ориентированным интервалом $0 \leqslant t \leqslant 1$, и его граница $bI = Q_1 - Q_0$.

Рассмотрим тензорное произведение $IT = I(t)\, T(y)$; для него

$$(b_t + w_t^* b_y)(IT) = (bI)\, T - IbT = Q_1 T - Q_0 T - IbT,$$

откуда

$$\ddot{C}_1 T - \ddot{C}_0 T = (b_t + w_t^* b_y)(IT) + I(bT). \qquad (1)$$

Приравняв значения обеих частей этого равенства, соответствующие произвольной двойной форме α на $R \times W$, четной по t, получим

$$T[\ddot{C}^*_1 \alpha - \ddot{C}^*_0 \alpha] = T[I(t)[(d_t + w_t d_y)\alpha] + I(t)[d_y \alpha]].$$

Так как это равенство выполняется при любом T (причем мы вправе предположить, что T обладает компактным носителем), то

$$\ddot{C}^*_1 \alpha - \ddot{C}^*_0 \alpha = I(t)[(d_t + w_t d_y)\alpha] + I(t)[d_y \alpha]. \qquad (2)$$

Можно было бы формулу (2) доказать непосредственно и из нее вывести (1). Эти формулы дуальны; каждая из них вытекает из другой.

Формулы гомотопии. Рассмотрим отображение μ класса C^∞ многообразия $R \times W$ в V, $\mu(t, y) = x$. Тогда $\mu_t = \mu C_t$ будет представлять собой отображение W в V, зависящее от параметра t, и $\mu(t, y) = \mu_t y$.

Если T — нечетный поток на W с компактным носителем, то, в силу определений, приведенных в § 13,

$\ddot{\mathcal{A}C}_{t_0}T=C_{t_0}T$. Применив к обеим частям равенства (1) операцию $\mu\mathcal{A}$, получим

$$\mu_1T-\mu_0T=\mu\mathcal{A}(b_t+w_t^*b_y)(IT)+\mu\mathcal{A}(IbT),$$

или

$$\mu_1T-\mu_0T=b\mu\mathcal{A}(IT)+\mu\mathcal{A}(IbT),$$

так как, согласно формуле (4) § 13, $\mu\mathcal{A}(b_t+w_t^*b_y)=$ $=\mu b\mathcal{A}=b\mu\mathcal{A}$. Положив для любого нечетного потока T на W с компактным носителем

$$MT=\mu\mathcal{A}(IT),$$

мы запишем последнее соотношение в виде

$$\mu_1T-\mu_0T=bMT+MbT. \tag{3}$$

Если φ — четная форма на V, то $\mu^*\varphi$ — четная форма на $R\times W$, $\mu_{t_0}^*\varphi=C_{t_0}^*\mu^*\varphi$ — четная форма на W и, в силу § 13, $C_{t_0}^*\mu^*\varphi=\ddot{C}_{t_0}^*\mathcal{A}^*\mu^*\varphi$. Взяв $\mathcal{A}^*\mu^*\varphi$ вместо α в (2) и обозначив M^* оператор, заданный равенством

$$M^*\varphi=I(t)[\mathcal{A}^*\mu^*\varphi],$$

из которого следует, что $MT[\varphi]=T[M^*\varphi]$, получим

$$\mu_1^*\varphi-\mu_0^*\varphi=M^*d\varphi+dM^*\varphi. \tag{4}$$

Предположим теперь, что μ ориентировано. Так как C_{t_0} тоже ориентировано, то мы получим определенную ориентацию отображения $\mu_{t_0}=\mu C_{t_0}$. Если T — четный поток на W с компактным носителем, то, в силу § 13, $C_{t_0}T=\mathcal{A}\varepsilon(t)\ddot{C}_{t_0}T$. Следовательно, $\mu_{t_0}T=\mu\mathcal{A}\varepsilon(t)C_{t_0}T$. Умножив обе части равенства (1) на $\varepsilon(t)$, применив к ним операцию $\mu\mathcal{A}$ и положив

$$MT=\mu\mathcal{A}\varepsilon(t)(IT)=\mu\mathcal{A}(iT),$$

где T — любой четный поток на W с компактным носителем, мы получим формулу (3) для нечетных потоков.

Формулу (4) для нечетных форм φ получим, положив для таких φ

$$M^*\varphi=i(t)[\mathcal{A}^*\mu^*\varphi].$$

Заметим, что в том случае, когда μ ориентировано, MT можно определить для любого потока T с компактным носителем, а $M^*\varphi$ — для любой формы φ, положив

$$MT = \mu\mathcal{A}(iT + IT)$$

и

$$M^*\varphi = \{i(t) + I(t)\}[\mathcal{A}^*\mu^*\varphi];$$

при этом $MT[\varphi] = T[M^*\varphi]$.

Семейство отображений μ_t многообразия W в многообразие V, непрерывно зависящее от параметра t, изменяющегося в заданном промежутке (здесь им является $0 \leqslant t \leqslant 1$), называется *гомотопией*. Говорят, что гомотопия принадлежит к классу C^∞, если отображение μ произведения $R \times W$ в V, определенное равенством $\mu(t, y) = \mu_t y$, представляет собой отображение класса C^∞. M и M^* называются *операторами, связанными с этой гомотопией*. Формулы (3) и (4) называются *формулами гомотопии* [1]).

Оператор M увеличивает размерность на единицу, оператор M^* понижает степень на единицу. Если T — элемент цепи, то $\mathcal{A}(IT + iT)$ также есть элемент цепи; следовательно, *если T — цепь, то MT также представляет собой цепь*, и если T — цепь с целыми коэффициентами, то такова же и MT.

Траекторией множества $A \subset M$ называется соединение образов $\mu_t A$ множества A при отображениях μ_t, отвечающих всевозможным t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, *обратной траекторией* множества $B \subset V$ — соединение прообразов $\mu_t^{-1}B$ этого множества при всех t. Траектория множества A есть не что иное, как $\mu(I \times A)$, где I означает носитель потока I, т. е. интервал $0 \leqslant t \leqslant 1$. Обратная траектория множества B представляет собой $P((I \times W) \cap \mu^{-1}B)$, где P — проектирование $P(t, y) = y$ произведения $R \times W$ на W. Из замечаний о носителе образа потока, высказанных в § 4, следует, что *носитель потока MT содержится в траектории носителя T, а носитель $M^*\varphi$ содержится в обратной траектории носителя φ.*

---

[1]) Формула (3) в применении к цепям является классической топологической формулой. Формула (4) для форм встречается уже у Картана (см. E. Cartan [1], [4]).

Если носитель потока T не компактен, то не компактен и носитель IT, и MT, вообще говоря, не определен. MT всегда определен и формула (3) справедлива всегда, когда носитель потока T имеет компактное пересечение с обратной траекторией любого компактного множества. Этим свойством будет обладать всякий поток, если только обратная траектория любого компактного множества является компактным множеством; в этом случае рассматриваемую гомотопию условимся называть *собственной*.

Пусть при любом t отображение μ_t многообразия W в V представляет собой гомеоморфизм. Тогда отображение μ регулярно, и, согласно теореме 11, *в этом случае MT принадлежит к классу C^r, если T — класса C^r*. Строго говоря, условия этой теоремы в нашем случае не выполнены, так как $i(t)$ разрывна в точках $t=0$ и $t=1$, но если мы обратимся к самому доказательству, то легко увидим, что утверждение теоремы остается справедливым. Тот же вывод будет следовать из соотношения, которое мы сейчас установим, если заметить, что, коль скоро α принадлежит к классу C^r, то же верно и для $M^*\alpha$.

Если при любом t отображение μ_t *представляет собой гомеоморфизм* (канонически ориентированный), *то*

$$M = M'^*w, \tag{5}$$

где M' и M'^* — операторы, связанные с обратной гомотопией μ_t^{-1} $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Отображение $\lambda(t, y) = (t, \mu_t y)$ многообразия $R\times W$ в $R\times V$ обозначим λ. Если μ_t — гомеоморфизм, то λ также является гомеоморфизмом. Обозначив одной и той же буквой P операторы проектирования $R\times W$ в W и $R\times V$ в V, ориентации которых согласованы с заданной ориентацией $\varepsilon(t)$ прямой R, мы получим равенства $P(t, y) = y$, $P(t, x) = x$ и $\mu = P\lambda$ (где λ ориентировано канонически); при обратной гомотопии вместо μ надо взять $\mu' = P\lambda^{-1}$.

Тогда $MT = P\lambda\mathcal{A}(i+I)T$ или, если воспользоваться формулой (5) § 13,

$$MT = \int_I \{1(t) + \varepsilon(t)\}\, \mathcal{A}^{-1}\lambda\mathcal{A}(i+I)\,T.$$

С другой стороны, выразив P^* формулой (6) § 13, получим

$$M^*\varphi = \int_t \{i(t) + I(t)\} \mathcal{A}^*\lambda^*\mathcal{A}^{*-1} \{1(t) + \varepsilon(t)\} \varphi$$

или, заметив, что умножение на $i(t)$ перестановочно с операцией $\mathcal{A}^*\lambda^*\mathcal{A}^{*-1}$,

$$M^*\varphi = \int_t \{1(t) + \varepsilon(t)\} \mathcal{A}^*\lambda^*\mathcal{A}^{*-1} \{i + I\} \varphi.$$

Взяв λ^{-1} вместо λ, мы получим $M'^*\varphi$, откуда, в силу того, что $\lambda^{*-1} = \lambda$,

$$M'^*\varphi = \int_t \{1(t) + \varepsilon(t)\} \mathcal{A}^*\lambda\mathcal{A}^{*-1} \{i + I\} \varphi.$$

В форме, стоящей под знаком интеграла, можно опустить составляющую степени 0 по t, так как ее интеграл равен нулю; отсюда, в силу формулы (2) § 13, следует, что оператор $\mathcal{A}^*$, стоящий слева от λ, может быть заменен оператором $\mathcal{A}^{-1}$. Так как $\{i + I\}\varphi$ имеет степень 0 по t, то, согласно той же формуле (2) § 13, вместо $\mathcal{A}^{*-1}$ справа от λ можно поставить $\mathcal{A}w_y$. Следовательно, взяв еще $w\varphi$ вместо φ, мы получим

$$M'^*w\varphi = \int_t \{1(t) + \varepsilon(t)\} \mathcal{A}^{-1}\lambda\mathcal{A} \{i + I\} \varphi,$$

откуда вытекает равенство $M = M'^*w$.

Нетрудно убедиться в том, что при переходе к обратной гомотопии формулы (3) и (4) меняются ролями.

Попрежнему предполагая, что μ_t представляет собой гомеоморфизм, найдем другое выражение оператора M^*. Для упрощения допустим, что φ — четная форма. Тогда

$$M^*\varphi = \int_t I(t) \mathcal{A}^*\lambda^*\mathcal{A}^{*-1} 1(t) \varphi(x).$$

Выражение $\mathcal{A}^*\lambda^*\mathcal{A}^{*-1} 1(t) \varphi(x)$ получится из $\varphi(x)$, если локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ точки $x = \mu(t, y)$ выразить как функции переменного t и локальных координат $y^1, \ldots, y^m$ точки y, следя за тем, чтобы dt стоял перед другими дифференциалами; члены степени 0 по t, т. е, не содержащие dt, можно при этом опустить. Тогда, если

$$\varphi = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \varphi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то, как показывает несложный подсчет,

$$\mathcal{A}^* \lambda^* \mathcal{A}^{*-1} 1(t) \varphi(x) =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}} \sum_i dt \frac{\partial \mu^* x^i}{\partial t} \wedge \mu^* (\varphi_{i i_1 \ldots i_{p-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) + \ldots,$$

где члены, не записанные явно, имеют степень 0 по t (они сводятся к $\mu_t^* \varphi$); положив

$$X^i = \lambda^{*-1} \frac{\partial \mu^* x^i}{\partial t},$$

$$X\varphi = \sum_{i_1< \ldots <i_{p-1}} \sum_i X^i \varphi_{i i_1 \ldots i_{p-1}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}},$$

мы сможем записать

$$\mathcal{A}^* \lambda^* \mathcal{A}^{*-1} 1(t) \varphi(x) = dt \wedge \lambda^* X\varphi,$$

или, заметив, что $dt \wedge \lambda^* X\varphi = dt \wedge \mu_t^* X\varphi$,

$$M\varphi = \int_0^1 dt\, (\mu^* X\varphi). \tag{6}$$

Эта формула справедлива и для нечетных форм.

Функции $\lambda^* x^i = \mu^* x^i$ равны координатам x^i точки $\mu_t y$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda^* x^i = \lambda^* X^i (t, x^1, \ldots, x^n) = X^i (t, \lambda^* x^1, \ldots, \lambda^* x^n);$$

эти последние можно записать проще в виде

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i (t, x^1, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

В том случае, когда многообразия V и W совпадают, а отображения μ_t образуют однопараметрическую группу, т. е. $\mu_{t_1} \mu_{t_2} = \mu_{t_1+t_2}$, функции X^i не зависят от t. Поле вектора $X = (X^1, \ldots, X^n)$ определяет в этом случае инфинитезимальный оператор такой группы, и форма $X\varphi$ является сверткой (внутренним произведением) вектора X и формы φ.

§ 15. Регуляризация [1])

Выберем в пространстве R^n какую-нибудь точку y; пусть s_y — сдвиг $s_y x = x + y$, а S_y и S_y^* — операторы, связанные с гомотопией s_{ty}, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Возьмем неотрицательную функцию $f(x)$ класса C^∞, обладающую такими свойствами: ее носитель заключен в сфере с центром в O радиуса ε и, если dx обозначает элемент объема $dx = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, рассматриваемый как нечетная форма степени n, то

$$\int f(x)\, dx = 1.$$

Если $f_0(x)$ — такая функция, соответствующая значению $\varepsilon = 1$, то при произвольном ε можно взять $f(x) = \varepsilon^{-n} f_0(\varepsilon^{-1}x)$. Положим далее

$$\tau(x) = f(x)\, dx.$$

Форма $\tau(x)$ — нечетная, степени n, и ее носитель заключен в сфере радиуса ε с центром в O.

Формулы

$$R^*\varphi = \int\limits_y (s_y^*\varphi)\,\tau(y), \qquad A^*\varphi = \int\limits_y (S_y^*\varphi)\,\tau(y) \tag{1}$$

определяют линейные операторы R^* и A^*, применимые к произвольной форме φ в R^n.

Если

$$\varphi = \sum a_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$s_y^*\varphi = \sum a_{i_1 \ldots i_p}(x + y)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

С другой стороны, при переменном t сдвиги s_{ty}, заданные равенством $s_{ty} = x + ty$, образуют однопараметрическую группу, инфинитезимальный оператор которой определяется полем постоянного вектора с компонентами, равными координатам $y^1, \ldots, y^n$ точки y. Свертка этого вектора с формой φ имеет вид

$$X\varphi = \sum y^i a_{ii_1 \ldots i_{p-1}}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}};$$

---

[1]) Относительно регуляризации $\mathfrak{D}^n$ см. Schwartz [2], стр. 22, и [3], гл. VI.

отсюда с помощью формулы (6) § 14, выражающей связанный с гомотопией оператор M^*, получим выражение оператора S_y^*:

$$S_y^*\varphi = \sum \left\{ \int_0^1 y^i a_{ii_1 \dots i_{p-1}}(x + ty)\,dt \right\} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}.$$

Эти формулы показывают, что когда φ пробегает множество, локально ограниченное до порядка q, $s_y^*\varphi$ и $S_y^*\varphi$ также принадлежат множеству, локально ограниченному до порядка q; последнее не зависит от выбора y, если расстояние $|y|$ от y до O остается ограниченным. Отсюда следует, что $R^*\varphi$ и $A^*\varphi$ принадлежат также множеству, локально ограниченному до порядка q, не зависящему от положительного параметра ε, когда этот последний ограничен.

С другой стороны, носители $R^*\varphi$ и $A^*\varphi$ содержатся в ε-окрестности носителя φ (т. е. в множестве точек, расстояние которых до носителя формы φ меньше ε). Итак, *если φ пробегает множество, ограниченное до порядка q, то, при ограниченном ε, $R^*\varphi$ и $A^*\varphi$ также остаются в множестве, ограниченном до порядка q, не зависящем от ε.*

Отсюда вытекает, что *если T — поток, то линейные функционалы $RT[\varphi]$ и $AT[\varphi]$, определенные равенствами*

$$RT[\varphi] = T[R^*\varphi], \qquad AT[\varphi] = T[A^*\varphi], \tag{2}$$

также являются потоками. Действительно, тот и другой ограничены на любом ограниченном множестве. Далее, если T обладает непрерывностью порядка q, то RT и AT также обладают непрерывностью порядка q. *Носители RT и AT заключены в ε-окрестности носителя потока T.*

С помощью теоремы о конечном приращении нетрудно прийти к выводу, что если φ пробегает множество, ограниченное до порядка $q+1$, и $|y|$ положительно и ограничено, то формы

$$\frac{s_y^*\varphi - \varphi}{|y|} \quad \text{и} \quad \frac{1}{|y|} S_y^*\varphi$$

остаются в множестве, ограниченном до порядка q. Отсюда следует, что формы

$$\frac{R^*\varphi-\varphi}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varepsilon}A^*\varphi$$

остаются в множестве, ограниченном до порядка q, не зависящем от параметра ε, когда этот последний ограничен. Соответствующие значения потока T,

$$\frac{RT[\varphi]-T[\varphi]}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{AT[\varphi]}{\varepsilon},$$

ограничены, когда φ пробегает ограниченное множество. Следовательно, *если* $\varepsilon\to 0$, *то*

$$RT[\varphi]\to T[\varphi] \quad \textit{и} \quad AT[\varphi]\to 0$$

равномерно на всяком ограниченном множестве форм φ. *Если поток* T *обладает непрерывностью порядка* q, *то указанная сходимость равномерна на любом множестве, ограниченном до порядка* $q+1$.

Когда T равен форме α, $R\alpha$ и $A\alpha$ представляют собой формы, для которых возможны представления, аналогичные (1). В самом деле,

$$R\alpha[\varphi]=\alpha[R^*\varphi]=\int_y\int_x \alpha(x)\wedge s_y^*\varphi(x)\cdot\tau(y);$$

так как

$$\int_x \alpha(x)\wedge s_y^*\varphi(x)=\int_x s_y\alpha(x)\wedge\varphi(x),$$

то отсюда следует, что

$$R\alpha[\varphi]=\int_x\int_y s_y\alpha(x)\tau(y)\wedge\varphi(x),$$

т. е.

$$R\alpha=\int_y (s_y\alpha)\tau(y);$$

точно так же

$$A\alpha=\int_y (S_y\alpha)\tau(y).$$

С другой стороны, $s_y\alpha=s^*_{-y}\alpha$ и, в силу формулы (5) § 14, $S_y\alpha=S^*_{-y}w\alpha$.

Мы видим, что *если вместо* $\tau(y)$ *взять* $\tau(-y)$, *то* R^* *и* A^*w *превращаются в* R *и* A.

Таким образом, свойства, обнаруженные у R^* и A^*, присущи также R и A; благодаря этому операторы R^* и A^* распространяются на всевозможные потоки. Если выбрать функцию f, которую мы использовали для определения τ, симметричной относительно точки O, а это всегда возможно, то получим равенства $\tau(y)=\tau(-y)$ и $R=R^*$, $A=A^*w$.

Формула (4) § 14 для гомотопии s_{ty} $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ запишется в виде

$$s_y^*\varphi-\varphi=dS_y^*\varphi+S_y^*\,d\varphi;$$

умножив на $\tau(y)$ и взяв от обеих частей интегралы, получим равенство

$$R^*\varphi-\varphi=dA^*\varphi+A^*\,d\varphi,$$

откуда следует двойственное ему равенство

$$RT-T=bAT+AbT.$$

Теперь мы установим наиболее интересное свойство оператора R: *каков бы ни был поток* T, RT *принадлежит к классу* C^∞.

Сначала предположим, что поток T — нулевой степени и четный. Так как элемент объема dx (рассматриваемый как нечетная форма степени n) инвариантен относительно переносов, то

$$R^*(\varphi(x)\,dx)=dx\,R^*\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — степени n, откуда

$$RT(x)\,[\varphi(x)\,dx]=T(x)\,dx\,[R^*\varphi(x)].$$

С другой стороны, записав $\tau(y)=f(y)\,dy$, получим

$$R^*\varphi(x)=\int\limits_V f(y)\,\varphi(x+y)\,dy=\int\limits_V f(y-x)\,\varphi(y)\,dy=$$
$$=\varphi(y)\,dy\,[f(y-x)].$$

Так как тензорное произведение коммутативно, то

$$RT(x)\,[\varphi(x)\,dx]=T(x)\,dx\,[\varphi(y)\,dy\,[f(y-x)]]=$$
$$=\varphi(y)\,dy\,[T(x)\,dx\,[f(y-x)]]$$

и, положив $g(y)=T(x)\,dx\,[f(y-x)]$, мы получим окончательно

$$RT(x)\,[\varphi(x)\,dx]=g(y)\,[\varphi(y)\,dy]=g(x)\,[\varphi(x)\,dx],$$

т. е. $RT(x)$ равен функции $g(x)$, которая, согласно теореме 9, принадлежит к классу C^∞.

Тот же результат получится для нечетного потока T нулевой степени, так как оператор R перестановочен с умножением на ориентацию $\varepsilon(x)$. Случай, когда T — положительной степени, сводится к предыдущему. Дифференциалы dx^i декартовых координат инвариантны относительно переносов, поэтому $s_y^*(dx^i\wedge\varphi)=dx^i\wedge s_y^*\varphi$, откуда получаем последовательно

$$R^*(dx^i\wedge\varphi)=dx^i\wedge R^*\varphi$$

и

$$R(T\wedge dx^i)=RT\wedge dx^i.$$

Так как операция R и умножение на dx^i перестановочны, то, подвергнув действию R коэффициенты формы, представляющей T, мы получим соответствующие коэффициенты формы, представляющей RT. Эти последние принадлежат к классу C^∞, и наше утверждение тем самым доказано.

К тому же выводу можно прийти, рассмотрев прямо произвольный поток T.

Пусть σ — гомеоморфизм $\sigma(x, y)=(x, y-x)$ произведения $R^n\times R^n$ пространства R^n на себя, а P — оператор проектирования, $P(x, y)=y$; возьмем отображение $s=P\sigma$ пространства $R^n\times R^n$ в R^n, $s(x, y)=y-x$. Выберем ориентацию P так, чтобы она была сопоставлена с ориентацией $\varepsilon(x)$ пространства R^n; так как σ ориентировано канонически, то в результате возникнет определенная ориентация отображения s, о которой мы тоже скажем, что она сопоставлена с $\varepsilon(x)$. Тогда

$$\rho(x, y)=\omega_x^n\{\varepsilon(x)+\varepsilon(y)\}\mathcal{A}^*s^*\tau$$

— двойная форма класса C^∞ в $R^n\times R^n$ — не будет зависеть от выбора ориентации $\varepsilon(x)$, так как при замене $\varepsilon(x)$ на $-\varepsilon(x)$ мы получим $-\varepsilon(y)$ вместо $\varepsilon(y)$ и, в силу того, что τ нечетна, $-s^*\tau$ вместо $s^*\tau$.

Путем подсчета, воспроизводить который здесь нет смысла, можно убедиться в том, что

$$R^*\varphi(x) = \int_y \rho(x, y) \wedge \varphi(y)$$

и

$$RT(y) = \int_x T(x) \wedge \rho(x, y) = T(x)[\rho(x, y)],$$

откуда прямо следует, что RT представляет собой поток класса C^∞.

В том случае, когда τ симметрична,

$$\rho(x, y) = w_y^{n+1} \rho(y, x),$$

откуда следует, что операторы R и R^* тождественны.

Подытожим основные выводы, которые мы получили:

Предложение 1. *Линейные операторы R и A, зависящие от параметра ε, которые определены равенствами* (1) *и* (2), *обладают свойствами:*

1) *Если T — однородный p-мерный поток на R^n, то RT и AT представляют собой однородные потоки соответственно размерности p и $p+1$, той же четности, что T, и удовлетворяют уравнению*

$$RT - T = bAT + AbT.$$

2) *Носители потоков RT и AT заключены в ε-окрестности носителя T.*

3) *RT принадлежит к классу C^∞.*

4) *Если T — поток класса C^r, то к C^r принадлежит и AT.*

5) *Если φ пробегает множество, ограниченное до порядка q, а значения ε ограничены сверху, то $R\varphi$ и $A\varphi$ остаются в множестве, ограниченном до порядка q.*

6) *Когда $\varepsilon \to 0$, $RT[\varphi] \to T[\varphi]$ и $AT[\varphi] \to 0$ равномерно на любом ограниченном множестве форм φ; если T обладает непрерывностью порядка q, то сходимость равномерна на любом множестве форм, ограниченном до порядка $q+1$.*

Это предложение и его доказательство обобщаются на тот случай, когда вместо R^n рассматривается пространство произвольной группы Ли. Мы же распространим его на произвольное многообразие. Для этой цели прежде всего преобразуем операторы, заданные в R^n, посредством гомеоморфизма R^n внутрь открытой сферы B^n радиуса 1 с центром O.

Пусть $f(r)$ — функция класса C^∞, заданная на интервале $0 < r < 1$, равная r при $0 < r < \frac{1}{3}$, равная $\exp\{(r-1)^{-2}\}$ при $\frac{2}{3} < r < 1$ и имеющая строго положительную производную во всем интервале $0 < r < 1$. Когда r изменяется от 0 до 1, $\rho = f(r)$ возрастает от 0 до ∞. Обратную функцию обозначим $r(\rho)$.

Если точка ξ в пространстве R^n отстоит на ρ от точки O, то точка

$$x = h\xi = \frac{r(\rho)}{\rho}\xi$$

отстоит от O на расстоянии $r = r(\rho)$, и h представляет собой гомеоморфизм класса C^∞ пространства R^n в B^n.

Пусть опять s_η осуществляет перенос $s_\eta\xi = \xi + \eta$; введем отображение $\mathfrak{s}_\eta$ пространства R^n в себя, совпадающее с $hs_\eta h^{-1}$ в точках сферы B^n и переводящее остальные точки в себя:

$$\mathfrak{s}_\eta x = \begin{cases} hs_\eta h^{-1}x, & \text{если } x \in B^n, \\ x, & \text{если } x \notin B^n. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{s}_\eta$ *представляет собой гомеоморфизм класса C^∞ пространства R^n в себя.*

В этом предложении не очевиден и нуждается в доказательстве только тот факт, что $\mathfrak{s}_\eta$ есть отображение класса C^∞ в граничных точках сферы B^n. Отображения $\mathfrak{s}_\eta$ образуют абелеву группу, изоморфную группе переносов; инфинитезимальные операторы этой последней определяются полями векторов, которые равны нулю вне B^n, а в B^n получены преобразованием посредством h постоянных векторов в R^n. Нам достаточно будет доказать, что такие векторные поля принадлежат к классу C^∞ даже на границе сферы B^n.

Пусть $x^i=\xi^i$ $(i=1,\ldots,n)$ — координаты точек x и ξ. Согласно определению,

$$x^i=\frac{r}{\rho}\xi^i, \qquad \rho^2=\sum_j (\xi^j)^2, \quad \rho=f(r),$$

откуда

$$\frac{\partial\rho}{\partial\xi^j}=\frac{\xi^j}{\rho}=\frac{x^j}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial\xi^j}=\frac{1}{f'(r)}\frac{x^j}{r}$$

и

$$\frac{\partial x^i}{\partial\xi^j}+\delta^i_j\frac{r}{f(r)}-\frac{x^ix^j}{rf(r)}+\frac{x^ix^j}{r^2f'(r)}.$$

Задача сводится к тому, чтобы показать, что функция, равная этому выражению в B^n и равная нулю вне B^n, есть функция класса C^∞ на границе сферы B^n. Но это является прямым следствием того, что при $r\to 1$ функции $\frac{1}{f(r)}$ и $\frac{1}{f'(r)}$, так же, как все их производные, стремятся к нулю.

Пусть $\mathfrak{S}_\eta$ и $\mathfrak{S}^*_\eta$ — операторы, связанные с гомотопией $\mathfrak{s}_{t\eta}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$; положим

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{R}^*\varphi&=\int_\eta(\mathfrak{s}^*_\eta\varphi)\,\tau(\eta), \qquad \mathfrak{A}^*\varphi=\int_\eta(\mathfrak{S}^*_\eta\varphi)\,\tau(\eta),\\ \mathfrak{R}T[\varphi]&=T[\mathfrak{R}^*\varphi], \qquad \mathfrak{A}T[\varphi]=T[\mathfrak{A}^*\varphi].\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Предложение 2. *Линейные операторы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}$, определенные равенствами* (3), *обладают свойствами* 1), 4), 5) *и* 6), *из предложения* 1, *а также следующими свойствами:*

2′) *Носитель $\mathfrak{R}T$ заключен в множестве $E(T,\varepsilon)$, которое заметает носитель T при воздействии на него всевозможными $\mathfrak{s}_\eta$ с $|\eta|<\varepsilon$, а носитель $\mathfrak{A}T$ заключен в пересечении $\overline{B}^n\cap E(T,\varepsilon)$ этого множества с замыканием сферы B^n.*

3′) *$\mathfrak{R}T$ принадлежит к классу C^∞ в B^n и $\mathfrak{R}T=T$ вне $\overline{B}^n$; если T — класса C^r в окрестности какой-либо точки границы B^n, то таков же $\mathfrak{R}T$ в окрестности этой точки.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 1. Прежде всего заметим, что когда φ пробегает какое-либо множество, ограниченное до порядка q, и η меняется так, что $|\eta|$ остается ограниченным, то $\mathfrak{s}^*_\eta\varphi$ и $\mathfrak{S}^*_\eta\varphi$ остаются в множестве, ограниченном до порядка q. Отсюда следует, что формы $\mathfrak{R}^*\varphi$ и $\mathfrak{A}^*\varphi$ также остаются в некотором множестве, ограниченном до порядка q, когда φ пробегает такое множество, а ε ограничено. Следовательно, если T — поток, то $\mathfrak{R}T$ и $\mathfrak{A}T$ также представляют собой потоки; когда T обладает непрерывностью порядка q, то же можно утверждать о $\mathfrak{R}T$ и $\mathfrak{A}T$.

Точно так же, если φ пробегает какое-либо множество, ограниченное до порядка $q+1$, и $|\eta|>0$ ограничено, то формы

$$\frac{\mathfrak{s}^*_\eta\varphi-\varphi}{|\eta|} \quad \text{и} \quad \frac{1}{|\eta|}\mathfrak{S}^*_\eta\varphi$$

остаются в множестве, ограниченном до порядка q; то же можно утверждать о формах

$$\frac{\mathfrak{R}^*\varphi-\varphi}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{A}^*\varphi}{\varepsilon},$$

и свойство 6), таким образом, установлено. Свойство 5) будет следовать из наших рассмотрений, если заметить, что, взяв $\tau(-y)$ вместо $\tau(y)$, мы получим $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}$ вместо $\mathfrak{R}^*$ и $\mathfrak{A}^*w$; отсюда же получим свойство 4). Формула, фигурирующая в свойстве 1), вытекает из формулы гомотопии так же, как в предложении 1.

Пусть F — множество, заметаемое носителем формы φ, когда его подвергают воздействию всевозможных $\mathfrak{s}_\eta$, для которых $|\eta|<\varepsilon$. Согласно формулам (3), носители $\mathfrak{R}^*\varphi$ и $\mathfrak{A}^*\varphi$ содержатся в этом множестве F. Таким образом, $\mathfrak{R}T[\varphi]=\mathfrak{A}T[\varphi]=0$, если носитель потока T не пересекается с F или, что то же самое, если носитель φ не пересекается с $E(T,\varepsilon)$: это означает, что носители $\mathfrak{R}T$ и $\mathfrak{A}T$ содержатся в $E(T,\varepsilon)$. Далее, если носитель φ не пересекается с $\overline{B}^n$, то, так как вне B^n гомотопия $\mathfrak{s}_{t\eta}$ сводится к тождественному преобразованию, получим $\mathfrak{S}^*_\eta\varphi=0$, откуда $\mathfrak{A}^*\varphi=0$ и $\mathfrak{A}T[\varphi]=0$. Мы видим, что $\mathfrak{A}T$ равно нулю вне $\overline{B}^n$, следовательно, его носитель заключен в $E(T,\varepsilon)\cap\overline{B}^n$, и свойство 2') доказано.

Если T — класса C^r, то $\mathfrak{R}T$ и $\mathfrak{A}T$ также принадлежат к классу C^r. Если поток T — класса C^r в окрестности точки x_0 границы B^n, то T можно представить в виде суммы двух потоков, $T = T_1 + T_2$, из которых T_1 всюду принадлежит к классу C^r, а T_2 равен нулю в окрестности точки x_0. При этом $\mathfrak{R}T_1$ будет класса C^r (всюду), а $\mathfrak{R}T_2$ окажется равным нулю в окрестности x_0, следовательно, $\mathfrak{R}T$ принадлежит к классу C^r в окрестности x_0. Это справедливо при $0 \leqslant r \leqslant \infty$, и отсюда вытекает свойство 3'). Это свойство можно выразить, сказав, что $\mathfrak{R}$ регуляризирует внутри B^n и нигде не дерегуляризирует.

Если форма τ такова, что $\tau(\eta) = \tau(-\eta)$, то так же, как в предложении 1, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^*$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* \omega$.

Заметим еще, что *операторы* $\mathfrak{R}$ *и* b *перестановочны*, так же как R и b. В самом деле, если в формуле, фигурирующей в свойстве 1), вместо T взять bT, то получим $\mathfrak{R}bT - bT = b\mathfrak{A}bT$, а взяв в той же формуле границы обеих частей, придем к равенству $b\mathfrak{R}T - bT = b\mathfrak{A}bT$, откуда следует, что $\mathfrak{R}bT = b\mathfrak{R}T$.

Теорема 12. *В многообразии V можно построить линейные операторы R и A, зависящие от конечного или бесконечного числа (смотря по тому, компактно V или нет) положительных параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, обладающие следующими свойствами:*

1) *Если T — однородный p-мерный поток на V, то RT и AT представляют собой однородные потоки соответственно размерности p и $p+1$, той же четности, что T, и удовлетворяют уравнению*

$$RT - T = bAT + AbT.$$

2) *Носители потоков RT и AT заключены в любой наперед заданной окрестности носителя T, если параметры ε_i достаточно малы.*

3) *RT принадлежит к классу C^∞; если T — класса C^r, то AT — также класса C^r.*

4) *Если φ пробегает какое-либо множество, ограниченное до порядка q, а значения каждого ε_i ограничены сверху, то $R\varphi$ и $A\varphi$ пробегают множество, ограниченное до порядка q.*

5) *Если каждое ε_i стремится к нулю, то $RT[\varphi] \to T[\varphi]$ и $AT[\varphi] \to 0$ равномерно на любом ограниченном множестве форм φ; если T обладает непрерывностью порядка q,*

то сходимость равномерна на любом множестве форм, ограниченном до порядка $q+1$.

Для построения операторов R и A возьмем какое-либо локально конечное покрытие $\{U_i\}$ многообразия V, такое, что каждое U_i гомеоморфно сфере B^n, причем соответствующий гомеоморфизм h_i принадлежит к классу C^∞ и может быть продолжен на некоторые окрестности множеств $\bar{U}_i$ и $\bar{B}^n$. Посредством этих гомеоморфизмов операторы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}$, заданные в R^n, могут быть перенесены в V. В самом деле, пусть f — функция $\geqslant 0$ класса C^∞, относительно которой мы предположим, что ее носитель заключен в указанной окрестности множества $\bar{U}_i$, а сама она равна 1 на некоторой другой, более узкой, окрестности того же множества. Если T — поток на V, то $T' = fT$ представляет собой поток с носителем, заключенным в первой из этих окрестностей, а $h_i T'$ — поток, носитель которого заключен в соответствующей окрестности множества $\bar{B}^n$; что же касается потока $T'' = T - T'$, то его носитель не пересекается с $\bar{U}_i$. Взяв в $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}$ вместо ε параметр ε_i и положив

$$R_i T = h_i^{-1} \mathfrak{R} h_i T' + T'', \quad A_i T = h_i^{-1} \mathfrak{A} h_i T',$$

мы зададим в V операторы R_i и A_i, обладающие такими же свойствами, как операторы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{A}$ в пространстве R^n, причем роль сферы B^n будет играть U_i, а роль ε — параметр ε_i.

Положим

$$R^{(h)} = R_1 R_2 \ldots R_h \quad \text{и} \quad A^{(h)} = R_1 R_2 \ldots R_{h-1} A_h.$$

В окрестности любого компактного множества K операторы R_h сводятся к тождественному, а A_h — к нулю, когда h достаточно велико для того, чтобы $\bar{U}_h$ не пересекалось с K. Отсюда вытекает, что операторы

$$R = \lim_{h\to\infty} R^{(h)} \quad \text{и} \quad A = \sum_{h=1}^{\infty} A^{(h)}$$

определены, причем существует целое число h_0, зависящее только от выбора компактного множества K, такое, что при $h \geqslant h_0$

$$RT[\varphi] = R^{(h)}T[\varphi] \quad \text{и} \quad AT[\varphi] = \sum_{i=1}^{h} A^{(i)}T[\varphi]$$

для любого потока T и для любой формы φ с носителем, заключенным в K. Таким образом, RT и AT представляют собой вполне определенные потоки.

В силу свойств R_h и A_h, соответствующих утверждению 1) предложения 2,

$$R^{(h)}T - R^{(h-1)}T = bA^{(h)}T + A^{(h)}bT,$$

откуда, сложив почленно эти равенства при $h = 1, 2, \ldots$, получим

$$RT - T = bAT + AbT;$$

таким образом, установлено свойство 1).

Свойство 2) следует из соответствующего свойства операторов R_i и A_i: если носитель потока T заключен в открытом множестве U, то можно последовательно ограничить параметры ε_i $(i = 1, 2, \ldots)$ таким образом, что, когда ε_i не превосходят соответствующих границ, носители $R^{(h)}T$ и $A^{(h)}T$ остаются внутри U. То же можно утверждать о носителях RT и AT.

Тот факт, что RT — поток класса C^∞, вытекает из того, что $R^{(h)}T$ при $h \geqslant i$ принадлежит к классу C^∞ в U_i. Действительно, согласно предложению 2 (утверждение 3')), оператор R_i регуляризирует в U_i и нигде не дерегуляризирует. То, что AT — поток класса C^r, когда C^r принадлежит T, вытекает из соответствующего свойства операторов R_i и A_i. Так же доказывается и свойство 4).

Для того, чтобы доказать 5), заметим, что

$$RT[\varphi] - T[\varphi] = \sum_{h=1}^{\infty} (R^{(h)} - R^{(h-1)})T[\varphi],$$

$$AT[\varphi] = \sum_{h=1}^{\infty} A^{(h)}T[\varphi].$$

Если φ пробегает какое-нибудь ограниченное множество, то существует целое число h_0, зависящее только от этого множества, такое, что при $h > h_0$ члены обоих этих рядов равны нулю. Поэтому достаточно доказать, что при $\varepsilon_h \to 0$

$$(R^{(h)} - R^{(h-1)})\, T[\varphi] \to 0 \quad \text{и} \quad A^{(h)}T[\varphi] \to 0$$

равномерно на любом ограниченном множестве (ограниченном до порядка $q+1$, если поток T обладает непрерывностью порядка q) и равномерно относительно параметров ε_i $(i < h)$, которые также предполагаются ограниченными. Итак,

$$(R^{(h)} - R^{(h-1)})\, T[\varphi] = (R_h T - T)\,[R^{(h-1)*}\varphi],$$

$$A^{(h)}T[\varphi] = A_h T\,[R^{(h-1)*}\varphi],$$

где $R^{(h-1)*}\varphi = R^*_{h-1}R^*_{h-2}\dots R^*_1\varphi$ остается в множестве, ограниченном до порядка $q+1$, когда φ пробегает множество, ограниченное до того же порядка, а ε_i $(i < h)$ ограничены; наше утверждение следует из соответствующего свойства операторов R_h и A_h (предложение 1, утверждение 6)).

Вообще, назовем *регуляризатором* в многообразии V любой оператор R, зависящий от положительных параметров ε_i, которому соответствует оператор A, обладающий свойствами, выраженными в теореме 12.

Определенным выше операторам соответствуют сопряженные операторы

$$R^* = \lim_{h\to\infty} R^{(h)*} \quad \text{и} \quad A^* = \sum_{h=1}^{\infty} A^{(h)*},$$

где $R^{(h)*} = R^*_h R^*_{h-1} \dots R^*_1$ и $A^{(h)*} = A^*_h R^*_{h-1} \dots R^*_1$. Даже при $R^*_i = R_i$ оператор R^* не совпадает с R. Однако операторы R^* и $A^*\omega$ обладают всеми свойствами операторов R и A, выраженными теоремой 12: R^* является регуляризатором, и ему соответствует $A^*\omega$. Легко видеть, что операторы $R' = RR^*$ и

$$A' = \frac{1}{2}(A + AR^* + RA^*\omega + A^*\omega)$$

обладают теми же свойствами и, кроме того, $R' = R'^*$ и $A' = A'^*\omega$. Итак, мы приходим к такому выводу:

Существуют операторы R и A, обладающие свойствами 1)—5) *из теоремы* 12, *и такие, что $R^* = R$, $A = A^*\omega$.*

§ 16. Операторы, связанные с двойным потоком[1])

Пусть $L(x, y)$ — двойной поток на $V \times W$, $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(y)$ — формы, принадлежащие соответственно $\mathscr{D}_V$ и $\mathscr{D}_W$.

Фиксировав φ, получим линейный функционал

$$\int\limits_x \int\limits_y \varphi(x) \wedge L(x, y) \wedge \psi(y) = \bar{\omega}_x L(x, y)[\varphi(x)\psi(y)]$$

от ψ, непрерывный в $\mathscr{D}_W$, т. е. поток на W, который мы обозначим $\Lambda\varphi$.

То же выражение при фиксированном ψ представляет собой линейный функционал от φ, непрерывный в $\mathscr{D}_V$, другими словами, некоторый поток на V; обозначим его $\Lambda^*\psi$.

Равенства

$$\Lambda\varphi[\psi] = \varphi[\Lambda^*\psi] = \int\limits_x \int\limits_y \varphi(x) \wedge L(x, y) \wedge \psi(y)$$

запишем в виде

$$\Lambda\varphi = \int\limits_x \varphi(x) \wedge L(x, y), \qquad \Lambda^*\psi = \int\limits_y L(x, y) \wedge \psi(y).$$

Оператор Λ, так определенный, осуществляет непрерывное линейное отображение $\mathscr{D}_V$ в $\mathscr{D}'_W$. В самом деле, в силу непрерывности двойного потока L, когда φ остается в ограниченной части пространства $\mathscr{D}_V$, $\Lambda\varphi$ остается в ограниченной части $\mathscr{D}'_W$.

Оператор Λ^* мы назовем *сопряженным* по отношению к Λ, или *топологически сопряженным*, в отличие от метрически сопряженного оператора, который будет определен ниже; Λ^* отображает $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{D}'_V$ линейно и непрерывно.

Двойной поток $L(x, y)$ условимся называть *ядром* оператора Λ.

Если $\Lambda\varphi = 0$, какова бы ни была форма $\varphi \in \mathscr{D}_V$, то $\bar{\omega}_x L(x, y)[\varphi(x)\psi(y)] = 0$ при любых $\varphi \in \mathscr{D}_V$ и $\psi \in \mathscr{D}_W$; отсюда, в силу теоремы 6, вытекает, что двойной поток $L(x, y)$ равен нулю. Следовательно, различные двойные потоки служат ядрами различных операторов[2]).

---

[1]) См. Schwartz [4].

[2]) Согласно теореме, принадлежащей Шварцу ([4], теорема 1), которой мы здесь не пользуемся, любому непрерывному отображению $\mathscr{D}_V$ в $\mathscr{D}'_W$ взаимно однозначно соответствует двойной поток, являющийся его ядром.

Нетрудно видеть, что если $L(x, y)$ — ядро оператора Λ, то операторы, перечисленные в верхних строках следующей таблицы, имеют ядра, стоящие под ними в нижних строках:

Λ	$b\Lambda$	Λb	$\omega\Lambda$
$L(x, y)$	$b_y L(x, y)$	$d_x L(x, y)$	$\omega_y L(x, y)$

$\Lambda\omega$	$\bar{\omega}\Lambda$	$\Lambda\bar{\omega}$
$\omega_x^* L(x, y)$	$\bar{\omega}_y L(x, y)$	$\bar{\omega}_x L(x, y)$

Найдем для Λ^* сопряженный оператор Λ^{**}. Так как $T[\varphi] = \varphi[\bar{\omega}T]$, то

$$\Lambda^*\psi[\varphi] = \bar{\omega}\varphi[\Lambda^*\psi] = \Lambda\bar{\omega}\varphi[\psi] = \psi[\bar{\omega}\Lambda\bar{\omega}\varphi],$$

откуда

$$\Lambda^{**} = \bar{\omega}\Lambda\bar{\omega}.$$

Мы видим, что $\Lambda^{**} = \Lambda$ тогда и только тогда, когда Λ перестановочен с $\bar{\omega}$. В частности, это имеет место тогда, когда Λ не изменяет ни размерности, ни степени формы, на которую он воздействует.

Ядрами операторов Λ^* и $\Lambda^{**} = \bar{\omega}\Lambda\bar{\omega}$ служат соответственно $\bar{\omega}_y L(y, x)$ и $\bar{\omega}_x \bar{\omega}_y L(x, y)$.

Пусть f_1 и f_2 — отображения класса C^∞ одного и того же многообразия Z в V и W, а $f = (f_1, f_2)$ — результирующее отображение Z в $V \times W$. Если S — поток на Z, носитель которого имеет компактное пересечение с прообразом $f^{-1}K$ любого компактного множества $K \subset V \times W$, то $\ddot{f}S$ представляет собой двойной поток, определенный согласно § 13; при этом, за исключением того случая, когда S нечетно по x (по y), отображение f_1 (соответственно f_2)

предполагается ориентированным. Найдем оператор, обладающий ядром $\ddot{f}S$. Так как

$$\int_x \int_y \varphi(x) \wedge \ddot{f}S \wedge \psi(y) = \ddot{f}S[\bar{\omega}_x \varphi(x)\psi(y)] = S[f_1^* \bar{\omega}_x \varphi \wedge f_2^* \psi] =$$

$$= S \wedge f_1^* \bar{\omega} \varphi [f_2^* \psi] = f_2 \{S \wedge f_1^* \bar{\omega} \varphi\}[\psi],$$

то оператор, для которого $\ddot{f}S$ служит ядром, определяется равенством $A\varphi = f_2\{S \wedge f_1^* \bar{\omega}\varphi\}$, и мы запишем

$$A = f_2.(S\wedge) f_1^* \bar{\omega}.$$

Из приведенной выше таблицы мы видим, что ядром оператора $A\bar{\omega} = f_2.(S\wedge) f_1^*$ служит $\bar{\omega}_x \ddot{f}S$.

Для перестановочности оператора $f_2.(S\wedge) f_1^*$ с b достаточно, чтобы $bS = 0$.

В самом деле, известно, что оператор f_2 перестановочен с b; оператор f_1^*, будучи перестановочен с d и с $\bar{\omega}$, так как он не изменяет степени, перестановочен также с $b = \omega d$. Таким образом,

$$bf_2.S \wedge f_1^* \varphi = f_2.b(S \wedge f_1^* \varphi) = f_2.bS \wedge \omega f_1^* \varphi + f_2.S \wedge f_1^* b\varphi,$$

т. е.

$$bf_2.S \wedge f_1^* = f_2.bS \wedge \omega f_1^* + f_2.S \wedge f_1^* b,$$

откуда непосредственно следует наше утверждение.

В дальнейшем нам понадобится другая форма последнего соотношения. Разрешив его относительно первого слагаемого справа, умножив справа на ω и заметив, что $\omega f_1^* = f_1^* \omega$ и $b\omega = -\omega b$, мы получим

$$f_2.bS \wedge f_1^* = bf_2.S \wedge f_1^* \omega + f_2.S \wedge f_1^* \omega b. \qquad (1)$$

Рассмотрим частный случай, когда $V = W = Z$, f_1 и f_2 сводятся к канонически ориентированным тождественным преобразованиям, а S — поток, равный 1 на $Z = V$; при этом f сводится к отображению j, $jx = (x, x)$, многообразия V на диагональ произведения $V \times V$. В этом случае $A\bar{\omega} = f_2 f_1^*$ сводится к тождественному оператору, и его ядро представляет собой двойной поток $\bar{\omega}_x \ddot{j}1$, носитель которого, очевидно, совпадает с диагональю произведения $V \times V$, Обозначим этот двойной поток $J(x, y)$,

$$J(x, y) = \overline{w}_x \ddot{j} 1 = \text{ядро тождественного оператора.}$$

С помощью таблицы, приведенной выше, мы получим новую таблицу, в которой указаны ядра операторов b, w, $\overline{w}$ и d:

b	w	$\overline{w}$	$d = wb$
$b_y J = d_x J$	$w_y J = w_x^* J$	$\overline{w}_y J = \overline{w}_x J$	$d_y J = w_y d_x J$

Носители этих ядер совпадают с диагональю произведения $V \times V$.

§ 17. Рефлексивность пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{D}$. Регулярные и регуляризирующие операторы[1])

Для заданного топологического векторного пространства $\mathscr{H}$ и многообразия V мы условимся обозначать $\mathscr{E}(V, \mathscr{H})$ векторное пространство форм на V, коэффициенты которых представляют собой функции класса C^∞ со значениями в $\mathscr{H}$, а $\mathscr{D}(V, \mathscr{H})$ — его подпространство, состоящее из форм с компактными носителями.

Множество форм из $\mathscr{E}(V, \mathscr{H})$ назовем *локально ограниченным* или *ограниченным в* $\mathscr{E}(V, \mathscr{H})$, если, каково бы ни было компактное множество K, заключенное в области определения какой-либо системы координат $x^1, \ldots, x^n$ в V, все производные любого из коэффициентов любой формы, входящей в рассматриваемое множество (выраженные посредством x^i), остаются в ограниченной части пространства $\mathscr{H}$, когда x пробегает множество K. Множество форм из $\mathscr{D}(V, \mathscr{H})$ называется *ограниченным в* $\mathscr{D}(V, \mathscr{H})$, если оно ограничено в $\mathscr{E}(V, \mathscr{H})$ и, кроме того, носители всех форм, входящих в это множество, содержатся в одном и том же компактном подмножестве многообразия V.

---

[1]) В связи с материалом настоящего параграфа см. Schwartz [2] (гл. III) и [4]. Если не считать определения регулярного оператора, результаты этого параграфа понадобятся нам только в § 32.

Пусть $\mathscr{D}'(V, \mathscr{H})$ — векторное пространство потоков на V со значениями в $\mathscr{H}$, т. е. множество непрерывных линейных отображений $\mathscr{D}_V$ в $\mathscr{H}$, а $\mathscr{E}'(V, \mathscr{H})$ — подмножество пространства $\mathscr{D}'(V, \mathscr{H})$, состоящее из потоков с компактными носителями.

Множество потоков из $\mathscr{D}'(V, \mathscr{H})$ назовем *ограниченным в* $\mathscr{D}'(V, \mathscr{H})$ (в $\mathscr{E}'(V, \mathscr{H})$), если совокупность значений всех входящих в это множество потоков на любой ограниченной части пространства $\mathscr{D}_V$ (соответственно $\mathscr{E}_V$) ограничена в $\mathscr{H}$.

В каждом из этих пространств, так же, как в пространствах, рассмотренных в § 9, вводится топология, в которой окрестности $\mathscr{V}^0$ точки 0 определяются тем условием, что любое ограниченное множество содержится в некотором множестве, гомотетичном $\mathscr{V}^0$; впрочем, эта топология сама по себе нам не понадобится. Линейное отображение одного из таких пространств в другое мы условимся называть *непрерывным*, если любую ограниченную часть первого пространства оно отображает в ограниченную часть второго.

Вспомнив определения двойных форм и векторных пространств $\mathscr{D}(V \times W)$ и $\mathscr{E}(V \times W)$, мы заметим, что

$$\mathscr{E}(V, \mathscr{E}_W) = \mathscr{E}(V \times W) = \mathscr{E}(W, \mathscr{E}_V)$$

и

$$\mathscr{D}(V, \mathscr{D}_W) = \mathscr{D}(V \times W) = \mathscr{D}(W, \mathscr{D}_V).$$

Пусть P_1 и P_2 — операторы проектирования многообразия $V \times W$ соответственно на V и W, т. е. $P_1(x, y) = x$, $P_2(x, y) = y$. Возьмем в $\mathscr{E}(V \times W)$ какую-нибудь двойную форму γ и рассмотрим ее носитель $A \subset V \times W$. Та же форма, если ее рассматривать как элемент пространства $\mathscr{E}(V, \mathscr{E}_W)$, обладает в V носителем $P_1 A$; если же ее рассматривать как элемент пространства $\mathscr{E}(W, \mathscr{E}_V)$, то в W ее носителем служит $P_2 A$. Форма γ остается в ограниченной части пространства $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}_W)$ тогда и только тогда, когда она заключена в ограниченной части пространства $\mathscr{E}(V \times W)$ и, кроме того, ее носитель остается в замкнутом множестве $F \subset V \times W$, обладающем тем свойством, что $F \cap P_1^{-1} K$ компактно, каково бы ни было компактное множество $K \subset V$. Форма γ остается в ограниченной части пространства $\mathscr{D}(W, \mathscr{E}_V)$ тогда и только тогда, когда она заключена в ограниченной части пространства $\mathscr{E}(V \times W)$ и, кроме того, P_2A заключено в некотором компактном множестве $K' \subset W$.

Мы имеем соотношения

$$\mathscr{D}(W, \mathscr{E}_V) \subset \mathscr{E}(V, \mathscr{D}_W), \quad \mathscr{D}(W, \mathscr{D}_V) \subset \mathscr{D}(W, \mathscr{E}_V);$$

обратные включения, вообще говоря, не имеют места, за исключением случая, когда V и W компактны.

Пусть $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ – топологические векторные пространства, $\mathscr{L}$ — непрерывное линейное отображение $\mathscr{H}_1$ в $\mathscr{H}_2$, а Z — какое-нибудь многообразие. *Отображение $\mathscr{L}$ имеет в качестве естественного продолжения некоторое непрерывное линейное отображение пространства $\mathscr{E}(Z, \mathscr{H}_1)$ в пространство $\mathscr{E}(Z, \mathscr{H}_2)$, а также — пространства $\mathscr{D}(Z, \mathscr{H}_1)$ в $\mathscr{D}(Z, \mathscr{H}_2)$.* Это продолжение мы получим, если применим отображение $\mathscr{L}$ ко всем коэффициентам форм, принадлежащих пространству $\mathscr{E}(Z, \mathscr{H}_1)$ или $\mathscr{D}(Z, \mathscr{H}_1)$.

Другим естественным продолжением $\mathscr{L}$ является некоторое непрерывное линейное отображение $\mathscr{E}'(Z, \mathscr{H}_1)$ в $\mathscr{E}'(Z, \mathscr{H}_2)$ и $\mathscr{D}'(Z, \mathscr{H}_1)$ в $\mathscr{D}'(Z, \mathscr{H}_2)$. Действительно, любой элемент e пространства $\mathscr{D}'(Z, \mathscr{H}_1)$ представляет собой непрерывное линейное отображение $\mathscr{D}_Z$ в $\mathscr{H}_1$; взяв $\mathscr{L}e$, мы получим отображение, также непрерывное и линейное, пространства $\mathscr{D}_Z$ в $\mathscr{H}_2$, и соответствие $e \to \mathscr{L}e$ определит некоторое непрерывное линейное отображение $\mathscr{D}'(Z, \mathscr{H}_1)$ в $\mathscr{D}'(Z, \mathscr{H}_2)$; подпространство $\mathscr{E}'(Z, \mathscr{H}_1)$ отображается им в $\mathscr{E}'(Z, \mathscr{H}_2)$.

Лемма. *Отображение пространства $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{E}_V$, определенное элементом пространства $\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$, представляет собой отображение Λ^*, связанное с некоторым двойным потоком $L(x, y)$:*

$$\Lambda^*\psi(x) = \int L(x, y) \wedge \psi(y).$$

Всякий элемент пространства $\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$ представляет собой поток на W со значениями в $\mathscr{E}_V$, т. е. непрерывное линейное отображение $\mathscr{L}$ пространства $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{E}_V$. Согласно высказанному выше замечанию, для него существует продолжение — непрерывное линейное отображение $\mathscr{D}(Z, \mathscr{D}_W)$

в $\mathscr{D}(Z, \mathscr{E}_V)$, которое двойной форме $\gamma=\gamma(z, y)$ из $\mathscr{D}(Z, \mathscr{D}_W)$ $(=\mathscr{D}(Z\times W))$ ставит в соответствие двойную форму $\mathscr{L}\gamma=\mathscr{L}\gamma(z, x)$ из $\mathscr{D}(Z, \mathscr{E}_V)$. При этом, если $\gamma(z, y)=$ $=\alpha(z)\beta(y)$, то

$$\mathscr{L}\gamma(z, x)=\alpha(z)\mathscr{L}\beta(x).$$

Предположим, что $Z=V$. Выражение

$$\int_z\int_x J(z, x)\wedge\mathscr{L}\gamma(z, x)$$

всегда имеет смысл и представляет собой линейный функционал от $\gamma(z, y)$, непрерывный на $\mathscr{D}(Z\times W)$ $(=\mathscr{D}(V\times W))$, т. е. двойной поток $L(z, y)$, и

$$\int_z\int_x L(z, y)\wedge\gamma(z, y)=\int_z\int_x J(z, x)\wedge\mathscr{L}\gamma(z, x).$$

При $\gamma(z, y)=\overline{\omega}_z\alpha(z)\beta(y)$ это соотношение примет вид

$$\int_z\int_y \alpha(z)\wedge L(z, y)\wedge\beta(y)=\int_z\int_x \alpha(z)\wedge J(z, x)\wedge\mathscr{L}\beta(x),$$

или

$$\int_x\int_y \alpha(x)\wedge L(x, y)\wedge\beta(y)=\int_x \alpha(x)\wedge\mathscr{L}\beta(x).$$

Мы видим, что $\mathscr{L}\beta(x)=\int_y L(x, y)\wedge\beta(y)$, и лемма доказана.

Условимся *отождествлять* всякий элемент пространства $\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$ с тем двойным потоком, который оказывается с ним связанным. Тогда *$\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$ можно рассматривать как некоторый класс двойных потоков.* Для того чтобы двойной поток $L(x, y)$ входил в этот класс, необходимо и достаточно, чтобы связанное с ним отображение Λ^* пространства $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{D}'_V$ было непрерывным отображением $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{E}_V$.

Если $L(x, y)$ — двойной поток, удовлетворяющий этому условию, и если $\varphi\in\mathscr{D}_W$, то в области определения системы координат $x^1, \ldots, x^n$ в V можно записать

$$\Lambda^*\psi = \int\limits_y L(x, y) \wedge \psi(y) = \sum L_{i_1 \ldots i_p}[\psi]\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Коэффициенты $L_{i_1 \ldots i_p}[\psi]$ в этом выражении представляют собой потоки на W, зависящие от $x = (x^1, \ldots, x^n)$. При любом фиксированном ψ они являются функциями класса C^∞ от x, и в силу непрерывности Λ^*, каждая производная (по x^i) этих коэффициентов остается ограниченной, когда x заключено в какой-нибудь компактной части области определения координат, а ψ пробегает какую-либо ограниченную часть пространства $\mathscr{D}_W$. Это означает, что рассматриваемые коэффициенты представляют собой функции класса $C^{\infty'}$ от x со значениями в $\mathscr{D}'_W$, и любому потоку $L(x, y)$ тем самым ставится в соответствие некоторая форма из $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$. Обратно, любой форме из $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$ приведенная выше формула ставит в соответствие некоторое линейное отображение Λ^* пространства $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{E}_V$ и некоторый двойной поток, принадлежащий пространству $\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$.

Можно отождествить элементы пространств $\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$ и $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$, соответствующие друг другу указанным образом. Тогда *$\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$ и $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$ можно рассматривать как один и тот же класс двойных потоков.*

Обратившись к определениям, приведенным выше, читатель без труда убедится в том, что ограниченные множества в $\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$ отождествятся при этом с ограниченными множествами в $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$.

Векторные пространства $\mathscr{E}(V, \mathscr{E}'_W)$ и $\mathscr{E}'(W, \mathscr{E}_V)$, будучи заключены соответственно в $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$ и $\mathscr{D}'(W, \mathscr{E}_V)$, также представляют собой некоторые классы двойных форм. При этом $\mathscr{E}'(W, \mathscr{E}_V) \subset \mathscr{E}(V, \mathscr{E}'_W)$; обратное включение, когда W некомпактно, не имеет места.

Двойной поток $J(z, x)$ — ядро тождественного оператора — принадлежит к $\mathscr{E}(V, \mathscr{E}'_V)$. Возьмем два экземпляра Z и V одного и того же многообразия и будем рассматривать тождественное преобразование как гомеоморфизм V на Z. Тождественный оператор, о котором идет речь, преобразуя $\varphi(x)$ в $\varphi(z)$, определит отображение $\mathcal{D}_V$ на $\mathcal{D}_Z$. Коэффициенты ядра $J(z, x)$ этого оператора, если их рассматривать как формы, принадлежащие $\mathcal{E}(Z, \mathcal{D}'_V)$, представляют собой потоки, носители которых сводятся к точке $x=z$; отсюда следует, что $J(z, x)$ принадлежит к $\mathcal{E}(Z, \mathcal{E}'_V)$, и наше предложение доказано, так как $Z=V$.

Теорема 13. *Любое непрерывное линейное отображение Φ пространства $\mathcal{E}'_V$ (пространства $\mathcal{D}'_V$) в R определяется некоторой формой φ из $\mathcal{E}_V$ (соответственно из $\mathcal{D}_V$), если для любого $T \in \mathcal{E}'_V$ (соответственно $T \in \mathcal{D}'_V$) положить $\Phi T = T[\varphi]$.*

В самом деле, непрерывное линейное отображение Φ пространства $\mathcal{E}'_V$ в R может быть продолжено, как мы видели, до некоторого непрерывного линейного отображения пространства $\mathcal{E}(Z, \mathcal{E}'_V)$ в $\mathcal{E}(Z, R)=\mathcal{E}_Z$. Это последнее, в частном случае, когда $Z=V$, ставит в соответствие потоку $J(z, x)$ некоторую определенную форму $\varphi(z)$ из $\mathcal{E}_Z$, и если $\psi(z) \in \mathcal{D}_Z$, то Φ переводит $\psi(z) \wedge J(z, x)$ в $\psi(z) \wedge \varphi(z)$.

Пусть E — отображение $\mathcal{D}_Z$ в R, определяемое единичным потоком $1(z)$, который форме $\psi(z)$ ставит в соответствие $\int \psi(z)$. Это отображение может быть продолжено до некоторого непрерывного линейного отображения пространства $\mathcal{E}'_Z$ в R, которое всякому потоку $T(z)$ с компактным носителем ставит в соответствие число $\int T(z)$; оно же имеет в качестве продолжения непрерывное линейное отображение пространства $\mathcal{E}'(Z \times V)$ в $\mathcal{E}'_V$, которое любому двойному потоку $L(z, x)$ с компактным носителем ставит в соответствие простой поток $\int\limits_z L(z, x)$. Итак,

$$E\Phi\{\psi(z) \wedge J(z, x)\} = \int \psi(z) \wedge \varphi(z),$$

$$\Phi E\{\psi(z) \wedge J(z, x)\} = \Phi\{\psi(x)\}.$$

Покажем, что Φ и E перестановочны. Для этого заметим сначала, что ΦE и $E\Phi$ представляют собой непрерывные отображения $\mathscr{D}(Z, \mathscr{E}'_V)$ в R. Далее, так как $\mathscr{D}_V$ плотно в $\mathscr{E}'_V$, то $\mathscr{D}(Z, \mathscr{D}_V) = \mathscr{D}(Z \times V)$ плотно в $\mathscr{D}(Z, \mathscr{E}'_V)$, поэтому достаточно доказать, что ΦE и $E\Phi$ совпадают на $\mathscr{D}(Z \times V)$. А это последнее утверждение следует из теоремы 6, так же как коммутативность тензорного произведения (теорема 10).

В силу указанных выше равенств,

$$\Phi\{\psi(z)\} = \int \psi(z) \wedge \varphi(z)$$

для любой формы ψ, принадлежащей к $\mathscr{D}_Z$ (или $\mathscr{D}_V$). Таким образом, отображение Φ пространства $\mathscr{E}'_V$ в R совпадает на $\mathscr{D}_V$ с отображением, определяемым формой φ. Так как $\mathscr{D}_V$ плотно в $\mathscr{E}'_V$, то оба эти отображения совпадают в $\mathscr{E}'_V$ всюду. Чтобы закончить доказательство, заметим, что Φ может быть продолжено до некоторого непрерывного линейного отображения $\mathscr{D}'_V$ в R лишь в том случае, когда форма φ обладает компактным носителем.

Эта теорема показывает, что пространство, топологически сопряженное с $\mathscr{E}'_V$ (с $\mathscr{D}'_V$), может быть отождествлено с $\mathscr{E}_V$ (соответственно с $\mathscr{D}_V$); иначе говоря, топологические векторные пространства $\mathscr{D}_V$ и $\mathscr{E}_V$ *рефлексивны*[1]).

Будем говорить, что оператор Λ, отображающий $\mathscr{D}_V$ линейно и непрерывно в $\mathscr{D}'_W$, *регулярен*, если он может быть продолжен до некоторого непрерывного линейного отображения $\mathscr{E}'_V$ в $\mathscr{D}'_W$. Предположим, что это так. Если ψ — форма из $\mathscr{D}_W$, а T — переменный поток в $\mathscr{E}'_V$, то выражение $\Lambda T[\psi]$ представляет собой линейный непрерывный функционал от T в $\mathscr{E}'_V$; согласно теореме 13, он определяется некоторой формой φ, принадлежащей к $\mathscr{E}_V$. Положив $\varphi = \Lambda^*\psi$, мы получим $\Lambda T[\psi] = T[\Lambda^*\psi]$.

Так определенное отображение Λ^* пространства $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{E}_V$ линейно и непрерывно. Его непрерывность мы обнаружим, взяв в качестве T такой поток, для которого $T[\varphi]$ равно значению одной из производных какого-либо коэффициента формы φ в некоторой заданной точке. При этом, когда ψ

[1]) У Шварца (см. Schwartz [2], гл. III, теорема XIV) этот результат получен с помощью теоремы Банаха—Бурбаки—Маккей—Аренса о локально выпуклых топологических векторных пространствах.

остается в ограниченной части пространства $\mathscr{D}_W$, $\Lambda T[\varphi]$ остается ограниченным, следовательно, остается ограниченной любая производная любого коэффициента $\Lambda^*\varphi$, т. е. $\Lambda^*\varphi$ остается в ограниченной части пространства $\mathscr{E}_V$.

Приняв во внимание замечания, сделанные выше, мы сформулируем следующий вывод: *оператор Λ регулярен тогда, когда он связан с некоторым двойным потоком, принадлежащим к $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$, и только в этом случае*, или, иначе, *когда сопряженный оператор Λ^* отображает $\mathscr{D}_W$ в $\mathscr{E}_V$ линейно и непрерывно, и только в этом случае.*

Продолжение оператора Λ на $\mathscr{E}'_V$ задается явно равенством $\Lambda T[\varphi] = T[\Lambda^*\varphi]$, и ядро этого преобразования можно получить, воздействовав им на двойной поток $J(z, x)$, рассматриваемый как элемент пространства $\mathscr{E}(V, \mathscr{E}'_V)$, в результате чего получится элемент пространства $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$.

Будем говорить, что двойной поток $L(x, y)$ *регулярен слева*, если регулярен связанный с ним оператор Λ; что $L(x, y)$ *регулярен справа*, если регулярен сопряженный оператор Λ^*. Двойные потоки, регулярные слева, принадлежат к классу $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}'_W)$, регулярные справа — к классу $\mathscr{E}(W, \mathscr{D}'_V) = \mathscr{D}'(V, \mathscr{E}_W)$.

Например, если μ — отображение класса C^∞ многообразия V в W, то соответствующий оператор μ всегда регулярен, тогда как оператор μ^* регулярен только при условии, что отображение μ регулярно в смысле, определенном в § 13. Таким образом, ядро оператора μ всегда регулярно слева; оно регулярно справа, если отображение μ регулярно. Ядро $J(z, x)$ тождественного оператора регулярно как слева, так и справа.

Будем говорить, что Λ — *регуляризирующий* оператор, если он отображает $\mathscr{E}'_V$ в $\mathscr{E}_W$ линейно и непрерывно. Такой оператор непременно регулярен. Его ядро $L(x, y)$, получающееся из $J(z, x)$ по указанному выше правилу, принадлежит к $\mathscr{E}(V, \mathscr{E}_W) = \mathscr{E}(V \times W)$, так как Λ отображает $\mathscr{E}(V, \mathscr{E}'_V)$ в $\mathscr{E}(V, \mathscr{E}_W) = \mathscr{E}(V \times W)$; следовательно, оно представляет собой двойную форму класса C^∞. Обратно, в силу теоремы 9, операторы Λ и Λ^*, связанные с произвольной двойной формой класса C^∞, являются регуляризирующими операторами. Итак, *для того, чтобы* *оператор был регуляризирующим, необходимо и достаточно, чтобы его ядро было формой класса C^∞.*

Регуляризаторы, построенные в § 15 (теорема 12) и обозначенные R, представляют собой регуляризирующие операторы, обладающие некоторыми особыми свойствами. Из того, что RT обладает компактным носителем одновременно с T, следует, что R принадлежит как пространству $\mathscr{E}(V, \mathscr{D}_W)$, так и $\mathscr{E}(W, \mathscr{D}_V)$. Свойство R, состоящее в том, что носитель RT заключен в некоторой окрестности носителя T, эквивалентно тому, что носитель ядра оператора R содержится в некоторой окрестности диагонали.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ГОМОЛОГИИ

§ 18. Группы гомологий

Поток T на многообразии V называется *замкнутым*, если $bT=0$; он называется *гомологичным нулю*, если существует поток S, такой, что $T=bS$; при этом говорят, что T *ограничивает* поток S. Два потока называются *гомологичными*, если их разность гомологична нулю [1]).

Множество всех потоков, гомологичных некоторому замкнутому потоку, представляет собой *класс гомологий* многообразия V. Классы гомологий образуют аддитивную группу — фактор-группу аддитивной группы замкнутых потоков по подгруппе потоков, гомологичных нулю; ее называют *группой гомологий* многообразия V и обозначают $H(V)$ [2]).

Поток называется *компактно гомологичным нулю*, если он ограничивает некоторый поток с компактным носителем. Два потока *компактно гомологичны*, если их разность компактно гомологична нулю.

Множество потоков на V, компактно гомологичных некоторому замкнутому потоку с компактным носителем, образует *класс компактных гомологий* многообразия V. Классы компактных гомологий образуют аддитивную груп-

---

[1]) Обычное понятие гомологии, введенное Пуанкаре, применимо только к цепям. Картан (см. E. Cartan [3], [4]) и де Рам (de Rham [1], [2]) распространили это понятие на формы. Лишь введение понятия потока позволило удовлетворительным образом определить отношение гомологии между цепями и формами.

[2]) Введенные здесь группы гомологий в топологии называют «группами гомологий по действительной области коэффициентов» (для того, чтобы отличать от групп, которые строятся аналогичным образом с помощью цепей с коэффициентами, принадлежащими аддитивным группам, отличным от аддитивной группы целых чисел). Они обладают строением векторного пространства, и их можно было бы называть «векторными пространствами гомологий».

пу — фактор-группу аддитивной группы замкнутых потоков с компактными носителями по подгруппе потоков, компактно гомологичных нулю; ее называют *группой компактных гомологий* многообразия V и обозначают $H_c(V)$.

Класс гомологий (компактных или нет), содержащий какой-нибудь однородный поток, называется однородным; группа гомологий (компактных или нет) представляется в виде прямой суммы подгрупп, образованных однородными классами данной четности и данной степени или размерности.

Теорема 14. *Любой замкнутый поток на многообразии V гомологичен некоторой форме класса C^∞. Любой замкнутый поток с компактным носителем компактно гомологичен некоторой форме класса C^∞.*

Если форма класса C^r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ ограничивает некоторый поток, то она ограничивает и некоторую форму класса C^r. Если она ограничивает некоторый поток с компактным носителем, то она ограничивает и некоторую форму класса C^r с компактным носителем.

Воспользуемся регуляризатором R и связанным с ним оператором A (см. теорему 12). Если поток замкнут, т. е. $bT = 0$, то $RT - T = bAT$, так что T гомологичен форме RT класса C^∞. Если при этом носитель потока T компактен, то AT также обладает компактным носителем, так что T компактно гомологичен форме AT.

Для того, чтобы доказать вторую часть теоремы, предположим, что форма α ограничивает некоторый поток S, $\alpha = bS$. Тогда

$$\alpha = R\alpha - bA\alpha = RbS - bA\alpha = b\,(RS - A\alpha),$$

так как $Rb = bR$. Таким образом, α ограничивает форму $RS - A\alpha$, которая принадлежит к классу C^r, когда α — класса C^r, и имеет компактный носитель, когда этим свойством обладает S.

Следствие. *На связном многообразии любой замкнутый четный поток нулевой степени равен некоторой постоянной функции.*

Действительно, на n-мерном многообразии два гомологичных n-мерных потока равны, и, если многообразие связно, замкнутая четная форма нулевой степени представляет собой постоянную функцию. Мы приходим, таким образом, к теореме Л. Шварца, согласно которой распределение равно постоянной, если все его первые производные равны нулю.

Если замкнутые формы α_1 и α_2 гомологичны, так же как β_1 и β_2, то $\alpha_1\wedge\beta_1$ и $\alpha_2\wedge\beta_2$ также гомологичны, так как если $\alpha_1-\alpha_2=d\alpha$ и $\beta_1-\beta_2=d\beta$, то $\alpha_1\wedge\beta_1-\alpha_2\wedge\beta_2=$ $=d(\alpha\wedge\beta_1+\varpi\alpha_2\wedge\beta)$. Это свойство позволяет определить произведение классов гомологий.

Наделенная такой операцией умножения группа гомологий становится *кольцом гомологий*, а группа компактных гомологий — *кольцом компактных гомологий*.

Заметим, что произведение класса гомологий и класса компактных гомологий представляет собой класс компактных гомологий.

Рассмотрим ориентированное отображение μ класса C^∞ многообразия W в многообразие V. Потоки на W, принадлежащие к одному классу компактных гомологий, отображаются в потоки на V, также принадлежащие к одному классу компактных гомологий, т. е. μ *индуцирует некоторый гомоморфизм группы* $H_c(W)$ *в* $H_c(V)$, который мы обозначим тоже μ. Этот гомоморфизм сохраняет размерность и четность, но нарушает, вообще говоря, мультипликативные соотношения: μ не является гомоморфизмом кольца $H_c(W)$ в кольцо $H_c(V)$.

Если μ — *собственное* отображение, то любой поток на W (даже с некомпактным носителем) имеет определенный образ при отображении μ, и в этом случае μ *индуцирует гомоморфизм группы* $H(W)$ *в* $H(V)$, также сохраняющий размерность и четность.

Если отображение μ не ориентировано, то такие гомоморфизмы индуцируются лишь на подгруппах групп $H_c(W)$ и $H(W)$, образованных нечетными классами гомологий.

Прообразы $\mu^*\varphi$ форм φ, принадлежащих одному классу гомологий многообразия V, сами принадлежат одному классу гомологий многообразия W; следовательно, μ^* *индуцирует гомоморфизм группы* $H(V)$ *в* $H(W)$, сохраняющий степень и мультипликативные соотношения; условимся обозначать его через μ^* и называть *сопряженным гомоморфизмом, индуцированным отображением* μ.

Если μ — *собственное* отображение, то $\mu^*\varphi$ имеет компактный носитель, коль скоро компактным носителем обладает φ, и в этом случае μ индуцирует сопряженный гомоморфизм группы $H_c(V)$ в $H_c(W)$, сохраняющий степень, четность и мультипликативные соотношения.

Если μ не ориентировано, то сопряженные гомоморфизмы индуцируются лишь на подгруппах групп $H(V)$ и $H_c(V)$, образованных четными классами гомологий.

Формулы гомотопии (3) и (4) § 14 показывают, что *два гомотопных отображения W в V индуцируют один и тот же гомоморфизм $H_c(W)$ в $H_c(V)$ и один и тот же сопряженный гомоморфизм $H(V)$ в $H(W)$.*

Будем говорить, что два отображения μ_0 и μ_1 класса C^∞ многообразия W в многообразие V *гомотопны в собственном смысле*, если существует такая гомотопия μ_t, что отображение μ произведения $R \times W$ в V, определенное равенством $\mu(t, y) = \mu_t y$, является собственным и принадлежит к классу C^∞. Предположим, что μ ориентировано; тогда, как в § 14, и μ_t приобретет определенную ориентацию. Формулы гомотопии показывают при этом, что *два гомотопных в собственном смысле отображения W в V индуцируют один и тот же гомоморфизм $H(W)$ в $H(V)$ и один и тот же сопряженный гомоморфизм $H_c(V)$ в $H_c(W)$.*

Пусть отображение μ многообразия W в V — класса C^∞, собственное и ориентированное. Предположим, кроме того, что V связно и имеет ту же размерность, что W. Образ потока на W, равного 1, представляет собой четный замкнутый поток на V степени 0, т. е. функцию, равную некоторой постоянной g; число g называется *степенью отображения* μ.

Согласно одному из предложений § 5, если μ — канонически ориентированный гомеоморфизм, то $1[\mu^*\varphi] = 1[\varphi]$, т. е. $\mu 1 = 1$; итак, *степень канонически ориентированного гомеоморфизма равна* 1. Если выбрать ориентацию, противоположную канонической, то степень гомеоморфизма окажется равной -1.

Рассмотрим какую-нибудь точку x_0 многообразия V, не являющуюся образом критической точки отображения μ; согласно теореме 4, множество таких точек всюду плотно в V, так как его дополнение имеет меру нуль. Прообраз

$\mu^{-1}x_0$ выбранной точки представляет собой компактное множество, состоящее из изолированных точек, так как в окрестности каждой из них μ является локально топологическим отображением. Следовательно, $\mu^{-1}x_0$ — конечное множество; пусть $y_1, \ldots, y_r$ — его точки. Тогда существует окрестность U точки x_0, такая, что ее прообраз $\mu^{-1}U$ представляет собой соединение r попарно не пересекающихся окрестностей U_i точек y_i, в каждой из которых μ сводится к гомеоморфизму μ_i класса C^∞ множества U_i на U. Если φ — форма с носителем, заключенным в U, то $\mu^*\varphi = \sum \mu_i^*\varphi$, откуда $\mu 1 = \sum \mu_i 1$ в U: степень μ равна сумме степеней μ_i. Степень же отображения μ_i равна 1 или -1, в зависимости от того, совпадает ориентация μ_i (индуцированная ориентацией μ) с канонической или противоположна ей. Мы получили, таким образом, следующее предложение:

Если μ — собственное ориентированное отображение класса C^∞ многообразия W в связное многообразие V той же размерности, то множество точек x_0 в V, прообраз $\mu^{-1}x_0$ которых не содержит критических точек отображения μ, всюду плотно в V, и для каждой из них $\mu^{-1}x_0$ есть конечное множество; при этом разность между числом точек множества $\mu^{-1}x_0$, в окрестности которых μ имеет каноническую ориентацию, и числом остальных точек равна степени отображения μ [1]).

Справедливо также следующее предложение: *какова бы ни была форма α в V, $\mu\mu^*\alpha = g\alpha$.*

В самом деле, для любой формы φ с компактным носителем

$$\mu\mu^*\alpha[\varphi] = \mu^*\alpha[\mu^*\varphi] = \mu^*(\alpha\wedge\varphi)[1] =$$
$$= 1[\mu^*(\alpha\wedge\varphi)] = \mu 1[\alpha\wedge\varphi] = g[\alpha\wedge\varphi] = g\alpha[\varphi],$$

откуда

$$\mu\mu^*\alpha = g\alpha.$$

Из этого предложения непосредственно вытекает следующая теорема Хопфа [2]): *Если степень g отображения μ отлична от нуля, то сопряженные гомоморфизмы μ^**

[1]) Эти свойства могут быть приняты за исходный пункт теории степеней отображений (см. Nagumo [1]).

[2]) Hopf [1].

группы $H(V)$ в $H(W)$ и группы $H_c(V)$ в $H_c(W)$ взаимно однозначны.

Степень g отображения μ (собственного и ориентированного) многообразия W в V есть свойство гомоморфизма μ группы $H(W)$ в $H(V)$; оно означает, что образ класса гомологий (четного, степени 0) многообразия W, содержащего функцию, тождественно равную 1, представляет собой класс гомологий многообразия V, содержащий функцию, тождественно равную g. Следовательно, два гомотопных в собственном смысле отображения имеют одинаковые степени.

Если μ — локально топологическое канонически ориентированное отображение, то его степень равна числу точек многообразия W, из которых состоит прообраз произвольной точки многообразия V. Например, степень проектирования на неориентируемое многообразие его ориентируемого накрытия равна 2.

§ 19. Гомологии в R^n

Рассмотрим в пространстве R^n (канонически ориентированную) гомотопию μ_t, определенную равенством $\mu_t x = tx$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Так как μ_1 есть тождественное отображение, то $\mu_1^* \varphi = \varphi$ для каждой формы φ, а так как μ_0 отображает все пространство в точку O, то $\mu_0^* \varphi = 0$, если степень φ положительна, и $\mu_0^* \varphi = \varphi(O)$, если степень φ равна нулю. Если φ замкнута и четна, то формула гомотопии (4) § 14 сводится к $\varphi = dM^* \varphi$ или $\varphi - \varphi(O) = dM^* \varphi$ и показывает, что φ гомологична некоторой постоянной.

Если T — замкнутый нечетный поток с компактным носителем, то формула (3) § 14 сводится к $T - \mu_0 T = bMT$. Носитель MT, будучи заключен в траектории носителя T, компактен. Если размерность T положительна, то $\mu_0 T = 0$; если она равна нулю, то $\mu_0 T[\varphi] = T[\mu_0^* \varphi] = T[\varphi(O)] = \varphi(O) T[1]$, т. е. T гомологичен некоторому кратному точки O (0-мерного симплекса).

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 15. *В пространстве R^n всякий четный замкнутый поток гомологичен постоянной, всякий нечетный замкнутый поток с компактным носителем компактно гомологичен некоторому кратному точки.*

При указанной выше гомотопии μ_t обратная траектория точки x представляет собой полупрямую от точки x до бесконечности, описываемую точкой $t^{-1}x$, когда t убывает от 1 до 0. Ориентированная по направлению к x, эта полупрямая представляет собой цепь, которую ограничивает x.

Если какое-нибудь множество не имеет общих точек с некоторым выпуклым полиэдром П, содержащим точку O, то его обратная траектория не проникает внутрь П. Поэтому, если α — форма класса C^r в R^n, замкнутая в П, т. е. такая, что $d\alpha = 0$ в П, то носитель $M^*d\alpha$ не проникает в П, так как он заключен в обратной траектории носителя $d\alpha$; иначе говоря, $M^*d\alpha$ обращается в нуль в П. При этом форма $\omega = M^*\alpha$ принадлежит к классу C^r в R^n, и, в силу формулы гомотопии $\alpha = dM^*\alpha + M^*d\alpha$, мы получим равенство $\alpha = d\omega$ в П.

В дальнейшем нам понадобится следующее несколько более общее предложение.

Лемма[1]). *Пусть* П — *выпуклый q-мерный полиэдр, содержащийся в подпространстве R^q пространства R^n, и пусть α — форма степени > 0 класса C^r в R^n, такая, что $I^*\alpha$ замкнуто в* П, *где I — вложение R^q в R^n. Тогда существует форма ω класса C^r в R^n, обладающая тем свойством, что $I^*(d\omega - \alpha) = 0$ в* П.

В самом деле, предположим, что O находится в П, и рассмотрим в R^q гомотопию μ_t, $\mu_t x = tx$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. В силу замечания, сделанного выше, $\omega_1 = M^*I^*\alpha$ представляет собой форму класса C^r в R^q, такую, что $d\omega_1 = I^*\alpha$ в П. Пусть P — проектирование пространства R^n на R^q, параллельное ортогональному дополнению подпространства R^q. Тогда форма $\omega = P^*\omega_1$ будет обладать всеми требуемыми свойствами: так как PI — тождественное преобразование R^q в себя, то $I^*\omega = \omega_1$ и $I^*(d\omega - \alpha) = d\omega_1 - I^*\alpha = 0$ в П.

---

[1]) Эта лемма по существу сводится к предложению, которое Картан называет «обращением теоремы Пуанкаре» (E. Cartan [2], стр. 41; см. также E. Cartan [1], стр. 71—73) и которое восходит, впрочем, к Вольтерра (Volterra [1]).

§ 20. Индекс Кронекера

Мы определим теперь символ $T[S]$ или $T \wedge S[1]$ в более общих предположениях; до сих пор эти символы были определены лишь в тех случаях, когда T или S представляет собой форму класса C^∞.

Определение. *Пусть T и S — потоки на многообразии V. Условимся считать, что символ $T \wedge S[1]$ имеет смысл тогда, когда, каковы бы ни были регуляризаторы R и R' на V, обладающие свойствами, перечисленными в теореме* 12, *$RT \wedge R'S[1]$ имеет определенный предел, когда параметры обоих регуляризаторов стремятся к нулю; $T \wedge S[1]$ мы положим равным этому пределу.*

Если ε и ε' — верхние грани значений параметров, входящих соответственно в R и R', то

$$T \wedge S[1] = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon' \to 0}} RT \wedge R'S[1].$$

Согласно теореме 12, это условие всегда выполняется, когда один из потоков T и S принадлежит к классу C^∞ и, кроме того, один из них имеет компактный носитель.

Приведем некоторые следствия, непосредственно вытекающие из этого определения.

a) Если $T = \sum_i T_i$ и $S = \sum_k S_k$, где i и k принимают конечное число значений, и если $T_i \wedge S_k[1]$ имеет смысл при любых i и k, то $T \wedge S[1]$ также имеет смысл и

$$T \wedge S[1] = \sum_{i,k} T_i \wedge S_k[1].$$

Это следует из линейности операторов R и R'.

b) Если носители потоков T и S не пересекаются, то $T \wedge S[1]$ определено и равно нулю.

Действительно, в указанных предположениях $RT \wedge R'S$ равно нулю при достаточно малых ε и ε'.

Назовем *носителем особенностей* потока множество всех точек, в окрестности которых поток не принадлежит к классу C^∞.

Если U — какая-либо окрестность носител особенностей T, то можно найти неотрицательную функцию ρ

класса C^∞ с носителем, заключенным в U, равную 1 на некоторой более узкой окрестности носителя T. Положив $T' = \rho T$ и $T'' = (1-\rho)T$, мы получим $T = T' + T''$, где T'' — поток класса C^∞, а носитель T' заключен в U.

c) Если один из потоков T и S обладает компактным носителем, а носители особенностей того и другого не пересекаются, то $T \wedge S[1]$ имеет смысл.

В самом деле, T и S допускают представления в виде $T = T' + T''$, $S = S' + S''$, где T'' и S'' — потоки класса C^∞, а носители T' и S' не пересекаются, и наше утверждение вытекает из a) и b).

d) Если один из потоков T и S обладает компактным носителем и один из символов $bT \wedge S[1]$ и $T \wedge dS[1]$ имеет смысл, то имеет смысл и другой, и оба они равны:

$$bT \wedge S[1] = T \wedge dS[1].$$

Это является следствием того, что b и d перестановочны с R и R' и поэтому $RbT[R'S] = RT[R'dS]$.

Отсюда вытекает, что $T \wedge S[1] = 0$ *всякий раз, когда один из потоков T и S замкнут и обладает компактным носителем, а другой гомологичен нулю, или когда один из них компактно гомологичен нулю, а другой замкнут.*

e) $T \wedge S[1]$ имеет смысл, если один из потоков T и S обладает компактным носителем и носитель особенностей каждого из этих потоков не пересекается с границей другого.

Воспользуемся каким-либо регуляризатором R и связанным с ним оператором A. Если U — окрестность носителя особенностей T, то носитель особенностей AT заключен в U при достаточно малых значениях параметров регуляризатора. В самом деле, если $T = T' + T''$, где T'' — класса C^∞, а носитель T' заключен в U, то AT'' принадлежит к классу C^∞ и носитель особенностей AT содержится в носителе AT', который сам заключен в U, когда значения параметров достаточно малы.

Отсюда следует, что при достаточно малых значениях параметров носители особенностей T и bS не пересекаются; то же можно утверждать о носителях особенностей AT и AbS, а также AbT и AS.

Положив $T_1 = RT$, $T_2 = -bAT$, $T_3 = -AbT$ и $S_1 = RS$, $S_2 = -bAS$, $S_3 = -AbS$, получим, в силу теоремы 12 §15,

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad S = S_1 + S_2 + S_3,$$

и $T \wedge S$ [1] будет иметь смысл, поскольку определен каждый из символов $T_i \wedge S_k$ [1]. В самом деле, при $i = 1$ или $k = 1$ это обусловлено тем, что T_1 и S_1 принадлежат к классу C^∞; при $i = k = 2$, в силу d), $T_2 \wedge S_2[1] = 0$; при $i = 2$, $k = 3$ действует случай c), так как носители особенностей T_2 и S_3 не пересекаются, и подобное же положение имеет место при $i = 3$, $k = 2$; наконец, $T_3 \wedge \wedge S_3[1] = 0$ в силу b).

Условие e) наверное выполняется, когда T и S замкнуты и, кроме того, T обладает компактным носителем. В силу d), значение $T \wedge S[1]$ зависит при этом только от класса гомологий потока S. Мы вернемся к операции $\wedge$, когда будем заниматься вопросами двойственности.

Условие e) выполняется и тогда, когда T и S представляют собой цепи, из которых хотя бы одна конечна и каждая не пересекается с границей другой. В этом случае символ $T \wedge S[1]$ называется *индексом Кронекера*.

Сейчас мы установим одно его геометрическое свойство.

Пусть V_1 и V_2 — подмногообразия n-мерного многообразия V размерности q и $n-q$, пересекающиеся лишь в конечном числе точек, причем в каждой из них V_1 и V_2 находятся в общем положении, т. е. так, что их касательные плоскости в точке пересечения сами больше нигде не пересекаются. Допустим, что вложение I многообразия V_1 в V ориентируемо; выбрав его ориентацию, мы тем самым зададим в V q-мерную цепь $c_1 = I1$ (локальную цепь в смысле § 8) — образ при отображении I потока, равного 1 на V_1. Предположим еще, что многообразие V_2 ориентируемо; ориентировав его, мы зададим в V четную $(n-q)$-мерную цепь c_2.

В общей точке x многообразий V_1 и V_2 возьмем n линейно независимых векторов v_i $(i = 1, \ldots, n)$, из которых первые q касаются V_1, а остальные $n-q$ касаются V_2. Эти последние пусть определяют в окрестности точки x в V_2 ту же ориентацию, которая была выбрана для того, чтобы определить цепь c_2. Если ориентация окрестности точки x в V_1, определенная q векторами $v_1, \ldots, v_q$, и ориентация окрестности точки x в V, определенная всеми векторами v_i, сопоставлены посредством отображения I, определенным образом ориентированного, то будем говорить, что ориентации I и V_2 *согласованы* в точке x. Легко проверить, что понятие согласованности не зависит от произвола, которым мы располагаем, выбирая векторы v_i. Итак, мы можем сформулировать следующее предложение:

Индекс Кронекера $c_1 \wedge c_2[1]$ равен разности числа точек пересечения многообразий V_1 и V_2, в которых ориентации I и V_2 согласованы, и числа точек пересечения, в которых эти ориентации не согласованы.

Именно на этом свойстве основано определение индекса Кронекера, данное Пуанкаре[1]). Доказательство сводит случай произвольного многообразия к частному, когда V_1 и V_2 представляют собой подпространства R^q и R^{n-q} пространства R^n; в дальнейшем только этот случай нам и понадобится.

R^n можно рассматривать как произведение $R^n = R^q \times R^{n-q}$, и в нем можно выбрать координаты так, чтобы переменные точки x, x' и x'' пространств R^n, R^q и R^{n-q} получили выражения $x' = (x^1, \ldots, x^q)$, $x'' = (x^{q+1}, \ldots, x^n)$ и $x = (x', x'') = (x^1, \ldots, x^n)$. Для того, чтобы определить c_2, выберем ориентацию R^{n-q}, определяемую координатами $x^{q+1}, \ldots, x^n$, и определим c_1, выбрав ориентацию вложения I подпространства R^q в R^n так, чтобы ориентации, определяемые координатами $x^1, \ldots, x^q$ и $x^1, \ldots, x^n$, были сопоставлены; эти ориентации I и R^{n-q} оказываются согласованными в точке O.

Пусть

$$dx' = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^q, \quad dx'' = dx^{q+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

$$dx = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

— элементы объема соответственно в R^q, R^{n-q} и R^n, рассматриваемые как нечетные формы.

---

[1]) Poincaré [1], [2]. Индекс Кронекера обозначен там $N(V, V')$.

Обозначив $\varphi_{i_1 \ldots i_{n-q}}(x', x'')$ коэффициенты произвольной четной формы φ степени $n-q$, запишем

$$c_2[\varphi] = \int\limits_{x''} \varphi_{q+1, \ldots, n}(0, x'')\, dx'';$$

если s_y — сдвиг, посредством которого O переводится в точку $y = (y', y'')$, то

$$s_y c_2[\varphi] = \int\limits_{x''} \varphi_{q+1, \ldots, n}(y', x'')\, dx''.$$

Пусть R — регуляризатор, фигурирующий в предложении 1 § 12. Значение $Rc_2[\varphi]$ можно получить, умножив $s_y c_2[\varphi]$ на $\tau(y) = f(y)\, dy$ и взяв интеграл по y. Записав

$$\tau(y) = f(y', y'')\, dy' \wedge dy'' = \tau(y', y'')$$

и положив

$$\tau_1(y') = \int\limits_{y''} \tau(y', y''),$$

мы сможем представить окончательный результат в виде

$$Rc_2[\varphi] = \int\limits_{y'} \int\limits_{x''} \tau_1(y')\, \varphi_{q+1, \ldots, n}(y', x'')\, dy' \wedge dx''$$

или

$$Rc_2[\varphi] = \int \tau_1(x) \wedge \varphi(x),$$

откуда следует, что $Rc_2 = \tau_1(x')$.

Далее, имеем

$$c_1[Rc_2] = \int \tau_1(x') = 1,$$

согласно определению форм τ и τ_1. Мы видим, что $c_1 \wedge \wedge c_2[1] = 1$, а это и требовалось доказать.

Способ, которым было определено $T \wedge S\, [1]$, применим и в более общем случае, когда речь идет о символе

$$T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_r[1].$$

Этот последний имеет смысл, в частности, когда хотя бы один из потоков T_i обладает компактным носителем и носитель границы любого из них не имеет общих точек с пересечением носителей всех остальных. При этом значение $T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_r[1]$ мы получим, взяв RT_i вместо T_i, где R — некоторый регуляризатор при достаточно малых значениях входящих в него параметров.

§ 21. Гомологии между формами и цепями в многообразии, в котором задано полиэдральное подразделение

Мы видели, что всякий замкнутый поток гомологичен некоторой форме класса C^∞. При помощи полиэдрального подразделения многообразия мы покажем, что замкнутые формы (а следовательно, и замкнутые потоки) гомологичны цепям. Напомним прежде всего понятие полиэдрального подразделения.

Говорят, что множество E в n-мерном многообразии V представляет собой q-мерную *правильную клетку* класса C^r, если существуют выпуклый q-мерный полиэдр Π, заключенный в некотором подпространстве R^q пространства R^n, и гомеоморфизм π класса C^r окрестности полиэдра Π в окрестность множества E, отображающий Π на E. Образы (при отображении π) внутренних и граничных точек Π назовем соответственно *внутренними* и *граничными точками клетки*. Так как в дальнейшем мы будем рассматривать только правильные клетки класса C^∞, то условимся называть их просто *клетками*.

Если R^q ориентировано, то отображение π полиэдра Π в V определит некоторую нечетную элементарную цепь, которую мы назовем *ориентированной клеткой нечетного рода*. Если отображение π полиэдра Π в V ориентировано, то π определит некоторую четную элементарную цепь, которую мы назовем *ориентированной клеткой четного рода*. Любая из этих двух клеток равна другой, умноженной на ориентацию окрестности множества E в V. Граница ориентированной клетки представляет собой линейную комбинацию с коэффициентами ± 1 ориентированных $(q-1)$-мерных клеток, получающихся путем применения отображения π к отдельным граням полиэдра Π.

Полиэдральное подразделение многообразия V определяется локально конечной системой S клеток (т. е. такой, что любое компактное множество в V пересекает лишь конечное число клеток, принадлежащих S), обладающей следующими свойствами: любая точка многообразия является внутренней точкой некоторой клетки, притом единственной, системы S; кроме того, граница (т. е. совокупность граничных точек) любой клетки должна быть соединением некоторых клеток, принадлежащих S. Ясно, что S состоит из конечного или бесконечного числа клеток, в зависимости от того, компактно V или нет.

Пусть a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — ориентированные клетки четного рода, которые мы получим, приписав определенную ориентацию каждому из отображений π, определяющих клетки системы S. *Потоком подразделения*, или, короче, *потоком в* S, назовем любую сумму потоков вида $a_i \wedge \alpha_i$, т. е. произведений ориентированных клеток a_i и форм α_i класса C^∞.

Носитель потока $a_i \wedge \alpha_i$, очевидно, заключен в клетке a_i, и если он не пуст, то он содержит внутренние точки клетки a_i. Следовательно, потоки $a_i \wedge \alpha_i$ и $a_j \wedge \alpha_j$ при $i \neq j$ могут быть равны только тогда, когда оба они равны нулю.

Назовем $a_i \wedge \alpha_i$ потоком *типа* (q, p), если размерность a_i равна q, а степень α_i есть p. Потоку системы S припишем *тип* (q, p), если он выражается в виде суммы членов, каждый из которых — типа (q, p). Так как

$$b(a_i \wedge \alpha_i) = a_i \wedge b\alpha_i + (-1)^p ba_i \wedge \alpha_i,$$

то граница потока типа (q, p) представляет собой, вообще говоря, сумму двух потоков, одного — типа $(q, p+1)$, другого — типа $(q-1, p)$. Размерность потока типа (q, p) равна $q - p$.

Четной цепью в S назовем любую линейную комбинацию $\sum c_i a_i$ клеток a_i с действительными коэффициентами; *нечетной цепью* в S назовем любую линейную комбинацию вида $\sum c_i \varepsilon_i a_i$, где ε_i — ориентация окрестности клетки a_i. Произвольная цепь в S выражается в виде суммы четной и нечетной цепей в S. Она представляет собой поток в S типа $(q, 0)$ с границей типа $(q-1, 0)$. Справедливо и обратное предложение:

Поток в S типа $(q, 0)$ с границей типа $(q-1, 0)$ является цепью в S.

В самом деле, если $T=\sum a_i \wedge \alpha_i$ — поток типа $(q, 0)$, с границей типа $(q-1, 0)$, то $a_i \wedge d\alpha_i = 0$ при любом i. Но эти равенства означают, что каждая функция α_i на клетке a_i принимает постоянное значение c_i, поэтому $T=\sum c_i a_i$. Аналогичное рассуждение применимо к нечетному потоку.

Далее, мы имеем следующее предложение:

Любой поток в S размерности q с границей типа $(q-1, 0)$ гомологичен некоторой цепи в S, причем гомология компактна, если поток S обладает компактным носителем.

Поток T в S имеет границу типа $(q-1, 0)$; значит, эта последняя, в силу предыдущего предложения, представляет собой некоторую цепь в S.

Предположим, что T содержит члены типа $(q+k, k)$, где $k>0$, и рассмотрим те из них, для которых k принимает наибольшее значение k_0; пусть $a_i \wedge \alpha_i$ — один из таких членов. Так как носитель bT не содержит внутренних точек клетки a_i, то $a_i \wedge b\alpha_i = 0$. Это означает, что $I^*\alpha_i$ замкнуто в a_i, где I — вложение a_i в V. Согласно лемме, приведенной в конце § 19, на V существует форма ω класса C^∞, такая, что $I^*(b\omega_i - \alpha_i) = 0$ на a_i, а это эквивалентно равенству $a_i \wedge \alpha_i = a_i \wedge b\omega_i$.

Поток в S, равный сумме всех членов вида $a_i \wedge \omega_i$, соответствующих членам $a_i \wedge \alpha_i$ типа $(q+k_0, k_0)$, обозначим T_1. Тогда bT_1 и T будут содержать одинаковые члены типа $(q+k_0, k_0)$, следовательно, T гомологичен потоку $T' = T - bT_1$ в S, содержащему лишь члены типа $(q+k, k)$, где $k<k_0$, причем гомология компактна тогда, когда носитель T компактен, так как в этом случае T_1 содержит конечное число членов и обладает компактным носителем.

Проделав над T' такое же построение, какое было только что проделано над T, мы выделим поток T'', затем таким же путем из T'' получим T''' и т. д. Повторив эту операцию k_0 раз, мы получим поток подразделения S типа $(q, 0)$, гомологичный T, притом компактно гомологичный, если T обладает компактным носителем. Так как его граница тождественна bT, а эта последняя — типа $(q-1, 0)$, то он представляет собой цепь в S, и наше предложение доказано.

Докажем еще, что *любая форма класса C^∞ на V равна некоторому потоку в S*. Положим $c_i=0$, если a_i имеет размерность $<n$, и $c_i=1$ или -1, если a_i есть n-мерная клетка, а отображение π, определяющее a_i, соответственно ориентировано канонически или нет. Тогда поток $c_i a_i$ будет равен характеристической функции клетки a_i, а поток $\sum c_i a_i$ — функции 1, следовательно, какова бы ни была форма α в V класса C^∞,

$$\alpha=\sum a_i \wedge c_i \alpha,$$

что и доказывает наше утверждение[1]).

Учитывая предыдущее предложение, мы сформулируем следующую теорему:

Теорема 16. *В многообразии с полиэдральным подразделением любая замкнутая форма α гомологична некоторой цепи подразделения, притом компактно гомологична, если α обладает компактным носителем.*

Говоря точнее, существует цепь подразделения c, такая, что $\alpha-c$ ограничивает некоторый поток подразделения, носитель которого заключен в наименьшем замкнутом множестве, образованном клетками подразделения и содержащем носитель формы α.

Это уточнение вытекает из доказательства предыдущего предложения.

Ниже мы получим, как следствие теоремы двойственности, предложение, что, если цепь в S ограничивает какой-нибудь поток, который не предполагается потоком подразделения S, то она ограничивает также некоторую цепь в S. Отсюда, а также из только что приведенной теоремы, будет следовать, что для определения групп гомологий многообразия V достаточно рассмотреть цепи

---

[1]) Предыдущее рассуждение близко к рассуждению А. Вейля (см. A. Weil [1], стр. 123—128), чьи «коэлементы двойной степени (m, p)» играют роль наших потоков подразделения. В статье de Rham [2], n° 25, подобным же образом доказывается, что всякая замкнутая форма гомологична линейной комбинации «элементарных форм».

полиэдрального подразделения. Отсюда также будет следовать, что если некоторый поток в S гомологичен нулю, то он ограничивает некоторый поток в S.

§ 22. Двойственность в многообразии с полиэдральным подразделением

Возьмем снова полиэдральное подразделение S в многообразии V. *Коцепью* (cochaîne) в S назовем любую линейную функцию (с действительными значениями) на множестве конечных цепей в S. Всевозможные коцепи в S образуют векторное пространство, дуальное по отношению к векторному пространству всевозможных конечных цепей в S.

Значение коцепи f на цепи c условимся обозначать через $c.f$. Коцепь f определяется значениями, которые она принимает на ориентированных клетках a_i системы S; если $c=\sum k_i a_i$, то $c.f=\sum k_i(a_i.f)$. Говорят, что f *конечна*, если существует лишь конечное число ориентированных клеток a_i, на которых f отлична от нуля; в этом случае $c.f$ определено даже для бесконечных цепей c, и векторное пространство всевозможных цепей в S оказывается дуальным по отношению к векторному пространству конечных коцепей в S.

Дифференциалом (или кограницей (cobord)) коцепи f на S называется коцепь df, определенная для любой конечной цепи c в S равенством $c.df=bc.f$. Цепь, граница которой есть нуль, называется *циклом*; коцепь, дифференциал которой есть нуль, называется *коциклом* (cocycle).

Предложение 1. *Конечная цепь c в S ограничивает некоторую конечную цепь в S тогда и только тогда, когда на c обращается в нуль любой коцикл.*

Пусть E—векторное пространство всех конечных цепей в S, B—его подпространство, образованное границами конечных цепей в S. Дуальное пространство E^* состоит из всевозможных коцепей в S. Формула $c.df=bc.f$, определяющая дифференциал, показывает, что подпространство B' пространства E^*, ортогональное к B, образовано всевозможными коциклами в S, откуда вытекает необходимость высказанного условия. Достаточность его обусловлена тем, что, когда оно выполняется, в силу известной теоремы (см. Bourbaki [1], стр. 50, предложение 10), B является подпространством пространства E, ортогональным к B'.

Предложение 2. *Цепь c в S ограничивает некоторую цепь в S тогда и только тогда, когда на c обращается в нуль любой конечный коцикл в S.*

Пусть теперь E — пространство конечных коцепей в S, а C—его подпространство, состоящее из конечных коциклов. Дуальным пространством E^* будет при этом пространство всевозможных цепей в S. Покажем, что его подпространство C', ортогональное к C, совпадает с множеством границ всевозможных цепей в S. C' содержит это множество, так как любая граница bc ортогональна любому конечному коциклу f, в силу того, что $bc.f = c.df$ равно нулю при $df = 0$. Обратно, если c ортогонально произвольному конечному коциклу, то значение $c.f$ зависит только от df, так как оно равно нулю при $df = 0$; положив $c_1.df = c.f$, мы определим линейную функцию c_1 на подпространстве D пространства E, образованном дифференциалами конечных коцепей; эту функцию можно продолжить на E (например, положив ее равной нулю на линейном дополнении подпространства D в E); при этом она определит некоторую цепь c_1 с границей c. Мы установили, таким образом, необходимость условия. Как и в предложении 1, достаточность является следствием того, что C служит подпространством пространства E, ортогональным к C'.

Сейчас мы изложим метод «обратного полиэдра», принадлежащий Пуанкаре, позволяющий любой коцепи f в S поставить в соответствие некоторую цепь в V, обозначаемую $(1, f)$, зависящую от f линейно и обладающую тем свойством, что $b(1, f) = -\varpi^*(1, df)$ и $(1, f) \wedge c[1] = c.f$ для любой цепи c в S.

Прежде всего выберем в каждой клетке a_i по точке O_i и возьмем «сжатие» некоторой окрестности клетки a_i в точку O_i, т. е. гомотопию $\mu_t^{(i)}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, такую, что $\mu_1^{(i)}$ является тождественным преобразованием, а $\mu_0^{(i)}$ отображает выбранную окрестность в точку O_i; при этом траекторией клетки a_i будет она сама. Если a_i служит образом выпуклого полиэдра Π_i в пространстве R^n при отображении π, то, считая, что точка O лежит внутри Π_i, $\mu_t^{(i)}$ можно задать, положив $\mu_t^{(i)}=\pi\mu_t\pi^{-1}$, где μ_t—гомотопия $\mu_t x = tx$ в R^n.

Операторы, связанные с этой гомотопией, обозначим M_i и M_i^*.

Скажем, что f—коцепь *степени* p, если $c.f=0$ для любой однородной цепи c в S размерности $\neq p$; f назовем *нечетной* (*четной*), если $c.f=0$, когда c нечетна (соответственно четна).

Теперь любой паре, состоящей из цепи c в S и коцепи f в S, поставим в соответствие цепь (c, f) в V, определенную следующими свойствами:

1) (c, f)—билинейная функция от c и f.

2) Если a_i—четная ориентированная q-мерная клетка системы S, f—однородная коцепь в S степени p и ε_i—некоторая ориентация окрестности a_i в V, то

a) при $q-p<0$

$$(a_i, f)=0;$$

b) при $q-p=0$

$$(a_i, f)=\begin{cases}(a_i\cdot f)\,O_i, & \text{когда } f \text{ нечетна},\\ (\varepsilon_i a_i\cdot f)\,\varepsilon_i O_i, & \text{когда } f \text{ четна},\end{cases}$$

и

$$(\varepsilon_i a_i, f)=\varepsilon_i(a_i, f);$$

c) при $q-p>0$

$$(a_i, f)=M_i(ba_i, f).$$

В этих формулах O_i означает нечетную нульмерную элементарную цепь, образованную точкой O_i с коэффициентом $+1$; при этом $\varepsilon_i O_i$—четная нульмерная элементарная цепь. При определении оператора M_i гомотопия $\mu_t^{(i)}$ предполагается ориентированной канонически.

Если c и f однородны и имеют соответственно степени q и p, то цепь (c, f) однозначно определяется посредством индукции по q p; (c, f) оказывается $(q-p)$-мерной цепью, четной или нечетной, в зависимости от того, одинаковы или различны четности c и f.

Мы покажем, что граница цепи (c, f) выражается формулой

$$b(c, f) = (bc, f) + (-1)^{q-p}(c, df). \qquad (1)$$

Так как размерность (c, df) равна $q-p-1$, то эту формулу можно записать так:

$$b(c, f) = (bc, f) - w^*(c, df);$$

в таком виде она справедлива и для неоднородных c и f.

Для доказательства заметим, что, в силу формулы гомотопии (3) § 14,

$$(ba_i, f) - \mu_0^{(i)}(ba_i, f) = bM_i(ba_i, f) + M_i b(ba_i, f);$$

разрешив относительно $bM_i(ba_i, f) = b(a_i, f)$, получим

$$b(a_i, f) = (ba_i, f) - \mu_0^{(i)}(ba_i, f) - M_i b(ba_i, f). \qquad (2)$$

Формула (1) очевидна при $q-p \leqslant 0$, так как в этом случае обе ее части равны нулю. Если $q-p=1$, то $b(ba_i, f) = 0$ и второе слагаемое в правой части (2) равно нулю. Пусть $ba_i = \sum \lambda_j a_j$; тогда, предположив, что f нечетна, получим

$$(ba_i, f) = \sum \lambda_j (a_j, f) = \sum \lambda_j (a_j . f) O_j,$$

и так как $\mu_0^{(i)} O_j = O_i$ при $\lambda_j \neq 0$ (O_j лежит на границе клетки a_i), то

$$\mu_0^{(i)}(ba_i, f) = \sum_j \lambda_j (a_j . f) O_i = (ba_i . f) O_i = (a_i . df) O_i$$

и, поскольку степень df равна размерности a_i,

$$(a_i . df) O_i = (a_i, df),$$

в предположении, что f нечетна. Отсюда $\mu_0^{(i)}(ba_i, f) = (a_i, df)$. Тот же результат получается и для четной цепи f: достаточно в этих формулах взять $\varepsilon_i O_i$ и $\varepsilon_j O$ вместо O_i и O_j. Итак, формула (2) свелась к

$$b(a_i, f) = (ba_i, f) - (a_i, df),$$

т. е. мы получили формулу (1) при $q-p=1$.

Для того, чтобы доказать ее для $q-p > 1$, воспользуемся методом индукции по $q-p$. Предположение индукции состоит в том, что

$$b(ba_i, f) = (-1)^{q-p-1}(ba_i, df).$$

Отсюда следуют равенства

$$M_i b(ba_i, f) = (-1)^{q-p-1} M_i(ba_i, df) = (-1)^{q-p-1}(a_i, df).$$

Так как в рассматриваемом случае $\mu_0^{(i)}(ba_i, f) = 0$, то, согласно формуле (2),

$$b(a_i, f) = (ba_i, f) + (-1)^{q-p}(a_i, df).$$

откуда формула (1) вытекает непосредственно.

Мы видели, что носитель (c, f) заключен в носителе c. Теперь мы посмотрим, как расположены носители (c, f) и f. Назовем *открытым носителем* коцепи f множество в V, состоящее из внутренних точек тех клеток, на которых f не обращается в нуль, а также тех клеток, границы которых содержат клетки, где f не обращается в нуль. Ясно, что это множество—открытое; если f — степени p, то ее открытый носитель не содержит клеток размерности $< p$. Справедливо следующее предложение:

Носитель (c, f) заключен в открытом носителе коцепи f.

Достаточно доказать это предложение для (a_i, f), предположив при этом, что f однородна. Если q – размерность клетки a_i, p — степень f, то при $q - p = 0$ это предложение следует из 2b), а при $q - p > 0$ может быть получено из 2c) с помощью индукции по $q - p$.

Пусть f_i — коцепь, принимающая значения $+1$ на a_i, -1 на $-a_i$ и равная нулю на всех остальных ориентированных клетках системы S; положим

$$(1, f_i) = e_i,$$

где 1 означает четную n-мерную цепь в S, которая, если рассматривать ее как поток, равна функции 1. Если a_i — q-мерная клетка, то размерность f_i есть q, цепь e_i имеет размерность $p = n - q$ и нечетна.

Формула (1) показывает, что be_i представляет собой линейную комбинацию цепей e_j, потому что df_i, как всякая коцепь в S, является линейной комбинацией коцепей f_j.

Покажем, что индекс Кронекера $e_i \wedge a_j[1]$ всегда имеет смысл и равен 0 при $i \neq j$ и 1 при $i = j$,

$$e_i \wedge a_j[1] = \delta_i^j. \tag{3}$$

Согласно нашим определениям, этот символ равен нулю, когда сумма размерностей e_i и a_j не равна n, иначе говоря, когда размерности a_i и a_j различны. Поэтому мы ограничимся случаем, когда a_i и a_j — q-мерные клетки; при этом размерность e_i есть $p = n - q$.

Носитель e_i содержится в открытом носителе f_i, т. е. совокупности внутренних точек клетки a_i и тех клеток, граница которых содержит a_i. Таким образом, открытый носитель f_i не пересекается с клетками a_j размерности $\leqslant q$, за исключением самой a_i. Отсюда вытекает равенство

$$e_i \wedge a_j[1] = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Отсюда же видно, что цепи ba_i и e_i, а также a_i и be_i не пересекаются, так что символ $e_i \wedge a_i[1]$ имеет смысл. С помощью индукции по p покажем, что он равен 1.

При $p = 0$ клетка a_i имеет размерность n, и в выражении $1 = \sum c_k a_k$ цепи 1 в S соответствующий коэффициент c_i равен 1. Поэтому

$$e_i = (1, f_i) = \sum_k c_k (a_k, f_i) O_i = c_i O_i.$$

Но a_i, если рассматривать ее как поток, представляет собой функцию, равную c_i внутри a_i и равную нулю во всех остальных точках; в точке O_i эта функция принимает значение $O_i \wedge a_i[1] = O_i[a_i]$, равное c_i, следовательно, $e_i \wedge a_i[1] = c_i^2 = 1$.

Если $p > 0$, то $q < n$, и существует $(q+1)$-мерная клетка a_h, границе которой принадлежит a_i. Коэффициент при a_i в выражении ba_h равен ± 1; не нарушая общности, можно считать его равным $+1$. Итак, $ba_h = a_i + \ldots$ и

$$e_i \wedge a_i[1] = e_i \wedge ba_h[1]. \tag{4}$$

Но $ba_h . f_i = 1$, откуда $a_h . df_i = 1$, следовательно, в выражении df_i как линейной комбинации f_k (любая нечетная коцепь так выражается: $f = \sum (a_k . f) f_k$) коэффициент при f_h равен 1,

$$df_i = f_h + \ldots \quad \text{и} \quad (1, df_i) = e_h + \ldots.$$

Заметив, что разность между размерностью n цепи 1 и степенью q коцепи f_i равна $n-q=p$, получим, согласно формуле (1),

$$be_i=b(1, f_i)=(-1)^p(1, df_i)=(-1)^p e_h+\ldots,$$

откуда

$$be_i \wedge a_h[1]=(-1)^p e_h \wedge a_h[1].$$

Но, в силу свойств индекса Кронекера (свойство d, § 20),

$$be_i \wedge a_h[1]=e_i \wedge da_h[1]=(-1)^p e_i \wedge ba_h[1],$$

так как, поскольку ba_h имеет степень p, $da_h=\omega ba_h=$ $=(-1)^p ba_h$ и, следовательно,

$$e_i \wedge ba_h[1]=e_h \wedge a_h[1].$$

Сопоставив полученное равенство с (4), получим $e_i \wedge a_i[1]=$ $=e_h \wedge a_h[1]$, а так как размерность e_h есть $p-1$, то, в силу предположения индукции, $e_i \wedge a_i[1]=1$.

Какова бы ни была нечетная коцепь f в S, $(1, f)$ представляет собой линейную комбинацию цепей e_i. Следовательно, если f конечна, то для любой четной цепи c в S, также конечной, индекс Кронекера $(1, f) \wedge c[1]$ определен и

$$(1, f) \wedge c[1]=c.f.$$

Эта формула, очевидно, справедлива также для f и c одинаковой четности, так как тогда обе ее части обращаются в нуль. В целях полноты ее еще нужно доказать для того случая, когда f четна, а c нечетна.

Заметим, что открытый носитель f_i представляет собой ориентируемую область, являющуюся окрестностью e_i, на которую можно распространить любую ориентацию ε_j окрестности a_j. Обозначим f'_j четную коцепь в S, принимающую на $\pm\varepsilon_j a_j$ соответственно значения ± 1, а на всех остальных ориентированных клетках системы S — значение 0. Посредством индукции по размерности цепи (c, f'_j) можно, воспользовавшись свойствами 2b) и 2c), доказать для любой цепи c в S равенство $(c, f'_j)=\varepsilon_j(c, f_j)$.

В частности, $(1, f'_j)=\varepsilon_j e_j$, следовательно, какова бы ни была коцепь f, $(1, f)$ является комбинацией цепей $\varepsilon_j e_j$. А так как любая нечетная цепь c в S является комбинацией цепей $\varepsilon_i a_i$ и, как уже доказано, $\varepsilon_j e_j \wedge \varepsilon_i a_i [1] = \delta_i^j$, то $(1, f) \wedge c[1] = c.f$.

Таким образом, мы доказали следующее предложение.

Предложение 3. *В многообразии V с заданным полиэдральным подразделением S любой коцепи f в S можно поставить в соответствие цепь $(1, f)$ в S таким образом, что*

$$b(1, f) = -\omega^*(1, df) \quad \text{и} \quad (1, f) \wedge c[1] = c.f$$

для любой цепи c в S, причем индекс Кронекера заведомо имеет смысл, когда c или f конечна.

С помощью предложений 1, 2 и 3 мы без труда установим для многообразия, снабженного полиэдральным подразделением, теорему двойственности, которая формулируется следующим образом.

Теорема 17. *На многообразии V замкнутый поток T_1 гомологичен нулю тогда и только тогда, когда $T_2 \wedge T_1[1] = 0$ для любого замкнутого потока T_2 с компактным носителем.*

Замкнутый поток T_1 с компактным носителем компактно гомологичен нулю тогда и только тогда, когда $T_2 \wedge T_1[1] = 0$ для любого замкнутого потока T_2.

Необходимость условий в обеих частях теоремы была установлена в § 20 (свойство d) символа $T \wedge S[1]$), где было показано (см. свойство e)), что $T_2 \wedge T_1[1]$ имеет смысл, когда потоки T_1 и T_2 замкнуты и один из них обладает компактным носителем. Отсюда следует, что, если, например, T_2 имеет компактный носитель, значение $T_2 \wedge T_1[1]$ зависит только от классов гомологий групп $H_c(V)$ и $H(V)$, которым принадлежат соответственно T_2 и T_1.

Чтобы доказать достаточность условия в первой части теоремы, допустим, что поток T_1 замкнут и не гомологичен нулю. Согласно теоремам 14 и 16, T_1 гомологичен некоторой цепи c полиэдрального подразделения S в V. Последняя не гомологична нулю, поэтому она не является границей какой бы то ни было цепи в S, и, в силу предложения 2, существует конечный коцикл f в S, не равный нулю на c, т. е. $c.f \neq 0$. В силу предложения 3, $T_2 = (1, f)$ является при этом замкнутым потоком с компактным носителем и $T_2 \wedge T_1[1] = c.f \neq 0$.

Достаточность условия во второй части теоремы доказывается точно так же, только вместо предложения 2 нужно воспользоваться предложением 1.

Если в этой теореме предположить дополнительно, что T_1 и T_2 *однородны*, то получится эквивалентная теорема. Действительно, для того, чтобы поток был замкнут, или имел компактный носитель, или был (компактно) гомологичен нулю, необходимо и достаточно, чтобы соответствующим свойством обладала каждая из его однородных составляющих. Можно также поменять местами T_1 и T_2 в символе Кронекера, так как $T_1 \wedge T_2[1] = \pm T_2 \wedge T_1[1]$.

Приняв во внимание теорему 14, мы заметим, что теорема 17 эквивалентна следующей:

Теорема 17′. *Поток T гомологичен нулю тогда и только тогда, когда $T[\varphi] = 0$, какова бы ни была замкнутая форма φ класса C^∞ с компактным носителем.*

Поток T с компактным носителем компактно гомологичен нулю тогда и только тогда, когда $T[\varphi] = 0$, какова бы ни была замкнутая форма φ класса C^∞.

В силу теорем 14 и 16, можно получить еще одну эквивалентную теорему, заменив форму φ цепью c и взяв $T \wedge c[1]$ вместо $T[\varphi]$.

В § 23 мы распространим доказательство теоремы на произвольное многообразие, отказавшись от предположения о наличии полиэдрального подразделения. Пока же мы дополним теорему 16, установив следующее предложение:

Пусть в многообразии задано некоторое полиэдральное подразделение S. Тогда, если цепь в S ограничивает некоторый поток, то она ограничивает некоторую цепь в S; если она ограничивает некоторый поток с компактным носителем, то она ограничивает некоторую конечную цепь в S.

В самом деле, если цепь c в S гомологична нулю, то

$$(1, f) \wedge c[1] = 0$$

для любого конечного коцикла f в S, так как $(1, f)$ является при этом некоторым замкнутым потоком с компактным носителем; таким образом, $c.f=0$ и, в силу предложения 2, c ограничивает некоторую цепь в S. Если c ограничивает некоторый поток с компактным носителем, то она конечна, и мы придем к заключению, что $c.f=0$ для любого коцикла f в S; отсюда, в силу предложения 1, вытекает, что c ограничивает некоторую конечную цепь в S.

§ 23. Двойственность в произвольном дифференцируемом многообразии

Для того, чтобы распространить теорему 17 на произвольное многообразие V, отказавшись от предположения, что в V задано полиэдральное подразделение[1]), мы воспользуемся теоремой 5 (теоремой Уитнея), согласно которой существует собственное регулярное вложение g многообразия V в пространство R^{2n+1} $(x=gy,\ y\in V,\ x\in R^{2n+1})$.

Рассмотрим трубчатую окрестность D множества gV в R^{2n+1}, определенную в конце § 3. Так как D — открытое множество, то, как известно, в нем может быть задано некоторое подразделение. Осуществляется это следующим образом. Пусть $\mathscr{E}_m$ — совокупность кубов в R^{2n+1}, определенных неравенствами

$$2^{-m}h_i\leqslant x_i\leqslant 2^{-m}(h_i+1)\quad (i=1,\ \ldots,\ 2n+1),$$

где $x_1,\ \ldots,\ x_{2n+1}$ — декартовы координаты в R^{2n+1}, h_i — произвольные целые числа. При любом целом $m\geqslant 0$ мы выбираем кубы из $\mathscr{E}_m$, заключенные внутри D, но не попавшие (при $m>0$) внутрь каких-либо кубов из $\mathscr{E}_j$, заключенных внутри D $(0\leqslant j<m)$. Все эти кубы и их пересечения образуют полиэдральное подразделение множества D.

Следовательно, теорема двойственности применима к D. Для того, чтобы распространить ее на V, предположим сначала, что V ориентируемо. Рассмотрим отображение P множества D на V (см. конец § 3), такое, что $Pz=y$ для

[1]) Согласно теореме Уайтхеда (J. H. C. Whitehead [1]), в любом дифференцируемом многообразии можно задать полиэдральное подразделение. Однако доказательство ее весьма сложно, поэтому мы предпочли не обращаться к этой теореме. В аналогичных целях теоремой Уитнея пользовались уже Федерер (Federer [1], предисловие) и Ху (Hu [1]).

$z \in N_y$. P и g ориентируем так, чтобы Pg — тождественное отображение V на себя — оказалось ориентированным канонически.

Сопряженный гомоморфизм P^* группы $H(V)$ в группу $H(D)$ взаимно однозначен, так как g^*P^* представляет собой тождественное отображение, следовательно, g^* служит левым обратным для P^*. Пусть теперь T_1 — замкнутый поток на V, такой, что $T_2 \wedge T_1[1] = 0$ для любого замкнутого потока T_2 с компактным носителем. T_1 гомологичен некоторой форме α. Допустим, что T_1 не гомологичен нулю. Тогда $P^*\alpha$ не гомологично нулю в D, а так как в D теорема двойственности справедлива, то на D существует замкнутый поток T с компактным носителем, такой, что $T \wedge P^*\alpha[1] \neq 0$; отсюда $PT \wedge \alpha[1] \neq 0$, что противоречит нашему предположению, так как PT представляет собой замкнутый поток в V с компактным носителем. Итак, T_1 гомологичен нулю, что доказывает первую часть теоремы 17.

Для того, чтобы доказать вторую часть, заметим, что гомоморфизм g группы $H_c(V)$ в группу $H_c(D)$, индуцированный отображением g многообразия V в D, взаимно однозначен, так как Pg представляет собой тождественное отображение, следовательно, P служит для g левым обратным. Пусть теперь T — замкнутый поток в V с компактным носителем, такой, что $T[\varphi] = 0$, какова бы ни была замкнутая форма φ. Если бы T не был компактно гомологичен нулю в V, то gT не было бы компактно гомологично нулю в D, и так как в D теорема двойственности справедлива, то в D существовала бы замкнутая форма ϕ, такая, что $gT[\phi] \neq 0$. Отсюда следовало бы, что $T[g^*\phi] \neq 0$, в противоречие с нашим предположением, так как $g^*\phi$ — замкнутая форма в V. Итак, поток T компактно гомологичен нулю, и мы доказали второе утверждение в том виде, как оно сформулировано в теореме 17′.

В том случае, когда V неориентируемо, P и g также неориентируемы, PT и gT определены лишь для нечетных T, а $P^*\varphi$ и $g^*\varphi$ лишь для четных φ, поэтому только что проведенное доказательство полностью в этом случае не проходит. Рассмотрим ориентируемое накрытие многообразия V, т. е. ориентируемое многообразие W, дважды накрывающее V, и отображение p, проектирующее

W на V. При любом $y \in V$ множество $p^{-1}(y)$ состоит из двух точек. Отображение p — собственное и локально топологическое. Если ориентировать его канонически, то степень его будет равна 2; для любого потока T на V будет выполняться равенство $pp^*T = 2T$. Отсюда следует, что сопряженные гомоморфизмы p^* групп $H(V)$ и $H_c(V)$ соответственно в $H(W)$ и $H_c(W)$ взаимно однозначны.

Пусть T_1 — замкнутый поток на V, для которого $T_2 \wedge T_1[1] = 0$, каков бы ни был поток T_2 с компактным носителем. Если бы T_1 не был гомологичен нулю на V, то p^*T_1 не был бы гомологичен нулю на W, и, так как к ориентируемому многообразию W теорема двойственности применима, то на W существовал бы замкнутый поток T_3 с компактным носителем, такой, что $T_3 \wedge p^*T_1[1] \neq 0$. Отсюда следовало бы, что $pT_3 \wedge T_1[1] \neq 0$, но это невозможно, так как pT_3 представляет собой поток на V с компактным носителем. Итак, T_1 гомологичен нулю на V, и мы доказали первую часть теоремы. Вторая часть доказывается подобным же образом.

Рассмотрим снова регулярное собственное вложение g многообразия V в R^{2n+1}. Пусть $\mathscr{E}$ — множество клеток выбранного подразделения D, пересекающихся с gV, а также всех их граничных точек. Внутренность D' точечного множества, получаемого соединением всех клеток системы $\mathscr{E}$, представляет собой окрестность множества gV, замыкание которого $\overline{D'}$ содержится в D. Предположим, кроме того, что V ориентируемо, а g и P ориентированы таким образом, чтобы отображение Pg оказалось ориентированным канонически. Пусть T — замкнутый поток на V, тогда gT будет замкнутым потоком на D с носителем, заключенным в gV и, следовательно, в D'. Если R — регуляризатор в D, параметры которого принимают достаточно малые значения, то форма $\alpha = RgT$, гомологичная gT, обладает носителем, заключенным в D'. Согласно теореме 16, существует цепь c выбранного подразделения, такая, что $\alpha - c$ ограничивает некоторый поток этого подразделения с носителем, заключенным в наименьшем замкнутом множестве, которое образовано клетками подразделения и содержит носитель формы α. Это множество содержится в D' и компактно, когда поток T, а следовательно, и форма α обладают компактными носителями. А отсюда вытекает, что c представляет собой линейную комбинацию клеток системы $\mathfrak{C}$, гомологичную gT, и, следовательно, $T=PgT$ гомологичен цепи Pc, причем, та и другая гомологии компактны, если компактен носитель потока T. Мы получили следующую теорему:

Теорема 18. *Любой замкнутый поток T на многообразии V гомологичен некоторой цепи, притом компактно гомологичен, если T обладает компактным носителем.*

В том случае, когда V компактно, множество $\mathfrak{C}$ содержит лишь конечное число клеток, и аддитивная группа цепей вида Pc, где c — линейная комбинация клеток из $\mathfrak{C}$, имеет конечную базу. То же верно в применении к подгруппе, состоящей из замкнутых цепей, и к фактор-группе, представляющей собой группу гомологий $H(V)$. Итак, доказана следующая теорема:

Теорема 19. *Группа гомологий компактного многообразия имеет конечную базу.*

Мы предполагали, что V ориентируемо. На неориентируемые многообразия последние две теоремы можно без труда распространить, прибегнув к ориентируемому накрытию W.

Хотя это и не понадобится в дальнейшем, мы дополним теорему 18 следующим предложением:

Если цепь в V гомологична нулю, то она ограничивает некоторую цепь в V; если она компактно гомологична нулю, то ограниченная ею цепь в V конечна.

Тогда, когда в многообразии V задано полиэдральное подразделение, для любой замкнутой цепи c посредством хорошо известного метода деформации можно построить цепь $\bar{c}$, конечную, если c конечна, такую, что $b\bar{c}=c=c'$, где c' — некоторая цепь подразделения. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда заданная цепь принадлежит подразделению, а в этом случае мы располагаем предложением, доказанным в конце § 22. Наконец, с помощью теоремы Уитнея, так же, как при доказательстве теоремы двойственности, мы освобождаемся от предположения, что V снабжено полиэдральным подразделением [1]).

---

[1]) См. Eilenberg [1] и Hu [1]. Следует заметить, что понятие дифференцируемой цепи, которым пользуется Эйленберг, не тождественно нашему.

Заметим, наконец, что при нашем определении групп гомологий очевидна их инвариантность относительно гомеоморфизмов класса C^∞ и далеко не очевидна их инвариантность относительно гомеоморфизмов класса C^0, так как определения опираются на структуру C^∞ многообразия и неизвестно, всегда ли C^∞-гомеоморфны два C^0-гомеоморфных многообразия. Однако такую инвариантность нетрудно установить. Действительно, пусть h — гомеоморфизм класса C^0 многообразия V на W. С помощью теоремы Уитнея (теорема 5, § 3) и теоремы 12 из § 15 легко показать, что существуют собственные отображения k класса C^∞, в собственном смысле C^0-гомотопные отображению h; все такие k C^∞-гомотопны друг другу в собственном смысле и, следовательно, индуцируют одни и те же гомоморфизмы групп гомологий многообразия V в группы гомологий многообразия W, те же, которые индуцируются отображением h. Гомоморфизмы, индуцированные отображениями h и h^{-1}, являются изоморфизмами, так как их произведение представляет собой тождественный изоморфизм.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

§ 24. Риманово пространство. Сопряженная форма

Римановым пространством[1]) называется дифференцируемое многообразие V, на котором задан ковариантный тензор с двумя индексами g_{ij}, обладающий тем свойством, что квадратичная дифференциальная форма

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

всюду является положительно определенной. Везде в дальнейшем предполагается, что V представляет собой многообразие класса C^∞ и тензор g_{ij} также принадлежит к классу C^∞.

В этой главе мы будем употреблять общепринятое обозначение суммирования: если не оговорено противное, всякое выражение, содержащее дважды один и тот же индекс, один раз сверху, другой снизу, должно суммироваться по этому индексу от 1 до n, где n — размерность многообразия V. Так, например, мы будем писать

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Тензору g_{ij} соответствует контравариантный тензор с двумя индексами, g^{ij}, определенный равенствами

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

---

[1]) Из многочисленных трудов, посвященных римановой геометрии и тензорному исчислению, упомянем E. Cartan, [5], Levi-Civita [1], Lichnerowicz [1], Veblen [1]. (См. также Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Гостехиздат, М.—Л., 1953.— *Прим. перев.*).

и любому ковариантному тензору $a_{i_1 \dots i_p}$ соответствует контравариантный тензор $a^{i_1 \dots i_p}$, такой, что

$$a^{i_1 \dots i_p} = g^{i_1 k_1} \dots g^{i_p k_p} a_{k_1 \dots k_p},$$

$$a_{i_1 \dots i_p} = g_{i_1 k_1} \dots g_{i_p k_p} a^{k_1 \dots k_p}.$$

Система локальных координат называется *ортонормальной* в некоторой точке, если в этой точке $g_{ij} = \delta_i^j$. В такой точке также $g^{ij} = \delta_i^j$ и $a^{i_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p}$. Ясно, что в любой заданной точке существует ортонормальная система координат: их можно получить, взяв линейные комбинации координат произвольной системы с постоянными коэффициентами, должным образом подобранными.

Из p тензоров, равных g_{ij}, и тензора Кронекера можно составить тензор

$$g_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p} = g_{i_1 k_1} \dots g_{i_p k_p} \delta_{j_1 \dots j_p}^{k_1 \dots k_p} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & \dots & g_{i_1 j_p} \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ g_{i_p j_1} & \dots & g_{i_p j_p} \end{vmatrix},$$

симметричный относительно двух групп индексов,

$$g_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p} = g_{j_1 \dots j_p, i_1 \dots i_p},$$

и кососимметричный по индексам каждой группы.

При $p = n$ все компоненты этого тензора определяются его первой компонентой:

$$g_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_n} = \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} \delta_{j_1 \dots j_n}^{1 \dots n} g_{1 \dots n, 1 \dots n};$$

при преобразовании координат эта первая компонента преобразуется по формуле

$$\overline{g}_{1 \dots n, 1 \dots n} = J^2 g_{1 \dots n, 1 \dots n},$$

где

$$J = \frac{D(x^1, \dots, x^n)}{D(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n)}$$

— якобиан преобразования.

В ортонормальной системе координат значение $g_{1 \dots n, 1 \dots n}$ равно 1; следовательно, эта компонента положительна в любой системе координат. Приняв

$$e_{1 \dots n} = +\sqrt{g_{1 \dots n, 1 \dots n}},$$

получим формулу преобразования

$$\bar{e}_{1\ldots n} = |J|\, e_{1\ldots n},$$

которая показывает, что $e_{1\ldots n}$ представляет собой первую компоненту некоторого нечетного n-ковектора, другими компонентами которого являются

$$e_{i_1\ldots i_n} = \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} e_{1\ldots n}.$$

Связанная с этим n-ковектором нечетная форма степени n

$$e_{1\ldots n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

называется *элементом объема* в V. Ее интеграл, распространенный на область $D \subset V$, называется *объемом* этой области.

Определение. Формой, *сопряженной* форме

$$\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \alpha_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

называется

$$*\alpha = \sum_{j_1<\ldots<j_{n-p}} (*\alpha)_{j_1\ldots j_{n-p}}\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{n-p}},$$

где

$$(*\alpha)_{j_1\ldots j_{n-p}} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} e_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_{n-p}}\, \alpha^{i_1\ldots i_p}.$$

Заметим, что в этой сумме может быть отличен от нуля только член, соответствующий значениям $i_1, \ldots, i_p$, отличным от $j_1, \ldots, j_{n-p}$, так что если $i_1, \ldots, i_p$ выбраны, то

$$(*\alpha)_{j_1\ldots j_{n-p}} = \pm e_{1\ldots n}\, \alpha^{i_1\ldots i_p},$$

где знак $+$ или $-$ зависит от того, равно ли $\delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_{n-p}}$ $+1$ или -1.

Если α — однородная форма степени p, то $*\alpha$ также однородна, степень ее равна $n-p$, а четность противоположна четности α, так как элемент объема представляет собой нечетную форму.

Форма, сопряженная форме нулевой степени, равной постоянной 1, есть элемент объема:

$$*1 = e_{1\ldots n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Форма, сопряженная какой-либо функции, рассматриваемой как форма нулевой степени, есть произведение этой функции на элемент объема.

Операция $*$ линейна: для любых двух функций f, g и форм α, β

$$*(f\alpha+g\beta)=f*\alpha+g*\beta.$$

Далее, если α — однородная форма степени p, то $**\alpha=$ $=(-1)^{pn+p}\alpha$; в этом легко убедиться, воспользовавшись какой-либо ортонормальной системой координат. Следовательно, для произвольной формы α

$$**\alpha=\overline{\omega}\alpha.$$

Таким образом, для оператора $*$ обратным служит $*^{-1}=$ $=*\overline{\omega}=\overline{\omega}*$.

Если α и β — однородные формы одинаковой степени и одинаковой четности, то

$$\alpha\wedge*\beta=\beta\wedge*\alpha=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\alpha^{i_1\ldots i_p}\beta_{i_1\ldots i_p}*1,$$

в чем легко убедиться опять-таки с помощью ортонормальной системы координат. Отсюда следует, что

$$*(\alpha\wedge*\beta)=*(\beta\wedge*\alpha)=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\alpha^{i_1\ldots i_p}\beta_{i_1\ldots i_p}$$

и

$$*(\alpha\wedge*\alpha)=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\alpha^{i_1\ldots i_p}\alpha_{i_1\ldots i_p}\geqslant 0,$$

причем равенство $*(\alpha\wedge*\alpha)=0$ достигается в иекоторой точке лишь тогда, когда в этой точке $\alpha=0$ (форма α предполагается действительной).

Для произвольных, вообще говоря, неоднородных, форм α и β

$$\alpha\wedge*\beta\doteq\beta\wedge*\alpha,$$

где знак $\doteq$, введенный в § 5, указывает, что обе части этого соотношения имеют одинаковую нечетную составляющую степени n. Отсюда следует, что

$$\alpha[*\beta]=\beta[*\alpha],\quad *\alpha[\beta]=\beta[\overline{\omega}*\alpha],$$

и мы видим, что оператор, топологически сопряженный с $*$, совпадает с обратным $*^{-1} = *\overline{\omega} = \overline{\omega}*$.

Теперь мы определим поток $*T$, *сопряженный* с потоком T, положив

$$*T[\varphi] = T[\overline{\omega}*\varphi].$$

Определение, эквивалентное этому, можно получить, непосредственно применив к дифференциальной форме, представляющей T, формулу, которая определяет $*$.

Определение. *Скалярным произведением* форм α и β называется число

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge * \beta = \alpha[*\beta] = \alpha \wedge * \beta[1],$$

разумеется, если этот интеграл сходится; в противном случае скалярное произведение не определяется.

Скалярное произведение симметрично, т. е. $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$, и $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$ для любой формы α. Если α — класса C^0, то из равенства $(\alpha, \alpha) = 0$ следует, что α тождественно равна нулю.

Так как $(*\alpha, *\beta) = *\alpha[\overline{\omega}\beta] = \beta[*\alpha] = (\alpha, \beta)$, то

$$(*\alpha, *\beta) = (\alpha, \beta).$$

Мы определим еще *скалярное произведение потока T и формы $\varphi \in \mathscr{D}$*, положив

$$(T, \varphi) = (\varphi, T) = T[*\varphi] = T \wedge *\varphi[1].$$

Заметим, что скалярное произведение потока и формы различных степеней или различной четности всегда равно нулю.

Компоненты относительно базиса. Условимся говорить, что n дифференциальных форм степени 1, определенных в некоторой области D, образуют *базис* в D, если они линейно независимы в каждой точке этой области. От одного базиса к другому можно перейти посредством линейного преобразования (с коэффициентами, изменяющимися в области D). Дифференциалы координат в произвольной системе локальных координат всегда образуют базис в области определения этой системы.

Пусть x^1, x^2, ..., x^n — координаты в области D, ω^1, ω^2, ..., ω^n — произвольный базис в D; тогда

$$\omega^i = a^i_k dx^k, \qquad dx^k = b^k_j \omega^j,$$

где $a^i_k b^k_j = \delta^i_j$.

Пусть $A^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — компоненты некоторого *четного* тензора в системе координат x^1, ..., x^n; компонентами этого тензора относительно базы ω^1, ..., ω^n назовем числа

$$\bar{A}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = a^{i_1}_{k_1} \dots a^{i_p}_{k_p} b^{l_1}_{j_1} \dots b^{l_q}_{j_q} A^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}.$$

Для *нечетного* тензора перед правыми частями этих формул надо еще написать знак $\pm$ определителя, образованного элементами a^i_k.

В том случае, когда ω^i представляют собой дифференциалы координат какой-либо другой системы, эти формулы превращаются в обычные формулы преобразования.

При этом определении, если $\bar{g}_{ij}$ — компоненты тензора g_{ij} относительно базиса ω^1, ..., ω^n, то

$$ds^2 = \bar{g}_{ij} \omega^i \omega^j,$$

и если $\bar{\varphi}_{i_1 \dots i_p}$ — компоненты p-ковектора, связанного с формой φ, то

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \bar{\varphi}_{i_1 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} = \frac{1}{p!} \bar{\varphi}_{i_1 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}.$$

Применение базисов, более общих, чем доставляемые различными системами координат, основано на существовании в окрестности D произвольной точки базиса, ортонормального в каждой точке этой окрестности. Относительно любого такого базиса ω^1, ..., ω^n

$$ds^2 = \sum_i (\omega^i)^2,$$

а элемент объема есть $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$. Упрощается также выражение сопряженной формы; если $i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p}$ — какая-нибудь перестановка номеров 1, ..., n, то

$$*(\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}) = \pm \omega^{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{j_{n-p}},$$

где справа берется знак + или —, в зависимости от того, четна или нечетна перестановка $i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p}$.

§ 25. Метрически сопряженный оператор. Операторы δ и Δ

Оператор Λ^*, сопряженный с Λ, был определен посредством тождества

$$\Lambda\alpha[\beta]=\alpha[\Lambda^*\beta].$$

В римановом пространстве целесообразно также рассматривать связанный с Λ оператор Λ', удовлетворяющий тождеству

$$(\Lambda\alpha,\ \beta)=(\alpha,\ \Lambda'\beta).$$

Назовем оператор Λ' *метрически сопряженным* с Λ, а Λ^* — *топологически сопряженным.*

В силу симметрии скалярного произведения, если оператор Λ' метрически сопряжен с Λ, то Λ метрически сопряжен с Λ'. Выше мы видели, что топологически сопряженным с Λ^* служит оператор $\Lambda^{**}=\overline{w}\Lambda\overline{w}$, не совпадающий, вообще говоря, с Λ.

Легко найти соотношение между Λ' и Λ^*. Действительно,

$$(\Lambda\alpha,\ \beta)=\Lambda\alpha[*\beta]=\alpha[\Lambda^* * \beta]=(\alpha,\ *^{-1}\Lambda^* * \beta),$$

откуда

$$\Lambda'=*^{-1}\Lambda^* *,\qquad \Lambda^*=*\,\Lambda'\,*^{-1}.$$

Таким образом, метрически сопряженный с Λ оператор Λ' получается из топологически сопряженного Λ^* трансформированием посредством $*^{-1}$.

Оператор w, действие которого состоит в умножении формы степени p на $(-1)^p$, метрически сопряжен самому себе. Его топологически сопряженным является оператор, умножающий форму степени p на $(-1)^{n-p}$, так что

$$w^*=*\,w\,*^{-1}=*^{-1}\,w\,*$$

или

$$w^* * = * w,\qquad * w^* = w *.$$

Оператор $\overline{w}=w^{n+1}$, совпадающий как со своим метрически сопряженным, так и со своим топологически сопряженным, перестановочен с $*$.

Топологически сопряженным с $b=wd$ является d, топологически сопряженным с $d=wb$ служит dw^*, следовательно, *оператор, метрически сопряженный с d, который мы обозначим* δ, выражается следующим образом:

$$\delta = *^{-1} dw^* * = *^{-1} d * w = \overline{w} * d * w.$$

Оператор δ понижает степень формы на единицу; так же, как d, он обладает тем свойством, что квадрат его равен нулю, и если α имеет степень p, то

$$\delta\alpha = (-1)^{(n+1)(p-1)+p} * d * \alpha = (-1)^{np+n+1} * d * \alpha.$$

Если размерность n многообразия четна, то $\delta = - * d *$.

Легко вывести формулы

$$* \delta d = d\delta *, \qquad \delta d * = * d\delta,$$

которые показывают, что операторы $d\delta$ и δd топологически сопряжены друг с другом и в то же время каждый из них метрически сопряжен самому себе. Следовательно, оператор

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

одновременно метрически и топологически сопряжен самому себе. Этот оператор перестановочен с $*$, d и δ:

$$* \Delta = \Delta *, \qquad d\Delta = \Delta d = d\delta d,$$

$$\delta\Delta = \Delta\delta = \delta d\delta.$$

Определение. δT называется *кодифференциалом* потока T. Поток T называется *козамкнутым*, если $\delta T = 0$. Если существует поток S, такой, что $T = \delta S$, то поток T называется *когомологичным нулю*; если S можно выбрать так, чтобы он имел компактный носитель, то поток T называется *компактно когомологичным нулю*. Если $\Delta T = 0$ в области D, то поток T называется *гармоническим* в D[1]).

---

[1]) Это определение отличается от определения, предложенного Ходжем (см. Hodge [4]), согласно которому гармоническими называются формы, по нашей терминологии, одновременно замкнутые и козамкнутые. Из теоремы 20 будет следовать, что эти два определения эквивалентны в случае компактного пространства; в общем же случае они не эквивалентны. Оператор Δ ввели независимо Кодаира и Бидаль (Bidal) и де Рам (см. Kodaira [1], de Rham [7], [8]). Ранее операторы δ и Δ определили Брауэр для случая эвклидова пространства и Вейтценбек для римановых пространств (см. Brower [1] и Weitzenböck [1], стр. 393—397). Еще ранее, для случая эвклидова пространства, их ввел и рассмотрел Вольтерра (Volterra [2]). Ср. Segre [1], стр. 201—202.

Выбор последнего термина будет оправдан в следующем параграфе, где будет показано, что Δ служит обобщением лапласиана.

Заметим, что если T козамкнут, то $*T$ замкнут, и наоборот. Если поток T (компактно) когомологичен нулю, то $*T$ (компактно) гомологичен нулю, и наоборот. Ясно, что поток, одновременно замкнутый и козамкнутый, является гармоническим.

Если T или φ обладает компактным носителем, то

$$(dT,\ \varphi)=(T,\ \delta\varphi), \qquad (\delta T,\ \varphi)=(T,\ d\varphi), \tag{1}$$

откуда

$$(\delta\, dT,\ \varphi)=(dT,\ d\varphi)=(T,\ \delta\, d\varphi),$$

$$(d\delta T,\ \varphi)=(\delta T,\ \delta\varphi)=(T,\ d\delta\varphi)$$

и

$$(\Delta T,\ \varphi)=(dT,\ d\varphi)+(\delta T,\ \delta\varphi)=(T,\ \Delta\varphi). \tag{2}$$

В частности, если α — форма класса C^∞ с компактным носителем, то

$$(\Delta\alpha,\ \alpha)=(d\alpha,\ d\alpha)+(\delta\alpha,\ \delta\alpha),$$

так что из $\Delta\alpha=0$ следует, что $d\alpha=\delta\alpha=0$. Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 20. *Если форма класса C^∞ с компактным носителем является гармонической, то она замкнута и козамкнута.*

Эта теорема интересна главным образом в случае компактного пространства. В § 34 мы увидим, что в некомпактном аналитическом пространстве гармоническая форма с компактным носителем тождественно равна нулю, так как она аналитична.

Формулы (1) и (2) справедливы тогда только, когда T или φ обладает компактным носителем. Для случая, когда ни тот, ни другой носитель не компактен, соответствующие формулы можно получить, исходя из формулы дифференцирования произведения

$$d(\mu\wedge *\nu)=d\mu\wedge *\nu+\varpi\mu\wedge d*\nu.$$

Легко видеть, что

$$\varpi\mu\wedge d*\nu=\varpi\mu\wedge **^{-1}d*\nu\doteq *^{-1}d*\nu\wedge *\varpi\mu\doteq-\delta\nu\wedge *\mu,$$

откуда

$$d(\mu \wedge *\nu) \doteq d\mu \wedge *\nu - \delta\nu \wedge *\mu.$$

Взяв вместо μ и ν сначала α и $d\beta$, а затем β и $d\alpha$ и вычтя почленно одно равенство из другого, получим

$$d(\alpha \wedge *d\beta - \beta \wedge *d\alpha) \doteq \delta d\alpha \wedge *\beta - \delta d\beta \wedge *\alpha.$$

Теперь, взяв вместо μ и ν сначала $\delta\alpha$ и β, а затем $\delta\beta$ и α, таким же путем получим

$$d(\delta\alpha \wedge *\beta - \delta\beta \wedge *\alpha) \doteq d\delta\alpha \wedge *\beta - d\delta\beta \wedge *\alpha.$$

Сложив два полученных соотношения, придем к формуле

$$d(\alpha \wedge *d\beta - \beta \wedge *d\alpha + \delta\alpha \wedge *\beta - \delta\beta \wedge *\alpha) \doteq \\ \doteq \Delta\alpha \wedge *\beta - \Delta\beta \wedge *\alpha, \quad (3)$$

проинтегрировав которую можно получить соотношение типа формулы Грина.

Взяв вместо μ и ν сначала β и $d\alpha$, а затем $\delta\alpha$ и β и вычтя почленно одно полученное соотношение из другого, будем иметь

$$d(\beta \wedge *d\alpha - \delta\alpha \wedge *\beta) \doteq d\beta \wedge *d\alpha + \delta\beta \wedge *\delta\alpha - \Delta\alpha \wedge *\beta, \quad (4)$$

откуда с помощью интегрирования можно получить другое соотношение типа формулы Грина.

§ 26. Выражения операторов d, δ и Δ через ковариантные производные

Рассмотрим ковариантный тензор класса C^∞ и ранга p, компонентами которого служат $\alpha_{i_1 \ldots i_p}$. Его ковариантной производной называется, как известно, новый ковариантный тензор ранга $p+1$ с компонентами

$$\nabla_i \alpha_{i_1 \ldots i_p} = \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_p}}{\partial x^i} - \sum_{\nu=1}^{p} \alpha_{i_1 \ldots i_{\nu-1} a i_{\nu+1} \ldots i_p} \Gamma^a_{i_\nu i},$$

где

$$\Gamma^a_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}\right) g^{ak}$$

— символы Кристофеля. Суммирование производится по повторяющимся индексам, по a в первом выражении, по k во втором.

Аналогичные формулы определяют ковариантные производные контравариантного и смешанного тензоров. Известно, что вычисление ковариантных производных суммы и произведения производится по обычным правилам и что ковариантные производные тензоров g_{ij}, g^{ij}, $\delta^{j_1 \dots j_p}_{i_1 \dots i_p}$ и $e_{i_1 \dots i_n}$ равны нулю.

Но в отличие от обычных производных вторые ковариантные производные $\nabla_i \nabla_j$, вообще говоря, не симметричны относительно индексов i и j. Тензор

$$\nabla_i \nabla_j \alpha_{i_1 \dots i_p} - \nabla_j \nabla_i \alpha_{i_1 \dots i_p} = (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) \alpha_{i_1 \dots i_p},$$

вообще говоря, отличен от нуля; его компоненты выражаются в виде линейных комбинаций компонент $\alpha_{k_1 \dots k_p}$ заданного тензора и не содержат их производных. Отсюда следует, что для любого скаляра f

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) f \alpha_{i_1 \dots i_p} = f (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) \alpha_{i_1 \dots i_p}.$$

Положив далее, как обычно,

$$\nabla^i \alpha_{i_1 \dots i_p} = g^{ik} \nabla_k \alpha_{i_1 \dots i_p},$$

мы получим следующую формулу:

$$(\nabla_l \nabla^k - \nabla^k \nabla_l) f \alpha_{i_1 \dots i_p} = f (\nabla_l \nabla^k - \nabla^k \nabla_l) \alpha_{i_1 \dots i_p}. \tag{1}$$

Вспомнив это, возьмем формулу (3′) § 4, дающую коэффициенты дифференциала произвольной формы. Воспользовавшись симметричностью символов Кристофеля, $\Gamma^a_{ij} = \Gamma^a_{ji}$, мы получим, что, не изменяя ее правой части, можно заменить в ней обычные производные ковариантными, так что

$$(d\alpha)_{k_1 \dots k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \nabla_{k_\nu} \alpha_{k_1 \dots \hat{k}_\nu \dots k_{p+1}}. \tag{2}$$

Для того, чтобы получить выражение δ, рассмотрим контравариантный вектор γ^i класса C^∞ с компактным носителем и определим нечетную форму α степени $n-1$, положив

$$\alpha_{i_1 \dots i_{n-1}} = \gamma^i e_{i i_1 \dots i_{n-1}}.$$

Тензор $e_{i_1 \dots i_n}$ кососимметричен, поэтому, в силу (2),

$$(d\alpha)_{1 \dots n} = \nabla_i \gamma^i e_{1 \dots n}$$

или

$$d\alpha = \nabla_i \gamma^i * 1;$$

отсюда, так как α имеет компактный носитель,

$$\int d\alpha = \int \nabla_i \gamma^i * 1 = \int \nabla^i \gamma_i * 1 = 0.$$

Пусть теперь α и β — тензоры класса C^∞ ранга p и $p+1$, из которых по крайней мере один обладает компактным носителем. Для них

$$\int \nabla_i (\alpha_{i_1 \dots i_p} \beta^{i i_1 \dots i_p}) * 1 = 0,$$

откуда

$$\int (\nabla_i \alpha_{i_1 \dots i_p}) \beta^{i i_1 \dots i_p} * 1 = - \int \alpha_{i_1 \dots i_p} \nabla_i \beta^{i i_1 \dots i_p} * 1.$$

Это равенство справедливо, в частности, когда α и β кососимметричны, т. е. представляют собой формы. При этом левая часть приводится к $p!\,(d\alpha, \beta)$, и если положить

$$(d'\beta)_{i_1 \dots i_p} = - \nabla^i \beta_{i i_1 \dots i_p},$$

то правой части можно придать вид $p!\,(\alpha, d'\beta)$. Таким образом, для любой формы α с компактным носителем

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d'\beta),$$

откуда следует, что $d'\beta = \delta\beta$, и мы получаем общую формулу

$$(\delta\alpha)_{k_1 \dots k_{p-1}} = - \nabla^i \alpha_{i k_1 \dots k_{p-1}}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) непосредственно вытекает формула

$$(d\delta\alpha)_{k_1 \dots k_p} = \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \nabla_{k_\nu} \nabla^i \alpha_{i k_1 \dots \hat{k}_\nu \dots k_p}. \tag{4}$$

С другой стороны, в силу (3),

$$(\delta d\alpha)_{k_1 \dots k_p} = - \nabla^i (d\alpha)_{i k_1 \dots k_p},$$

а в силу (2),

$$(d\alpha)_{i k_1 \dots k_p} = \nabla_i \alpha_{k_1 \dots k_p} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu \nabla_{k_\nu} \alpha_{i k_1 \dots \hat{k}_\nu \dots k_p},$$

откуда

$$(\delta d\alpha)_{k_1\ldots k_p} = -\nabla^i\nabla_i\alpha_{k_1\ldots k_p} - \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^\nu\nabla^i\nabla_{k_\nu}\alpha_{ik_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает формула

$$(\Delta\alpha)_{k_1\ldots k_p} = -\nabla^i\nabla_i\alpha_{k_1\ldots k_p} + \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^\nu(\nabla_{k_\nu}\nabla^i - \nabla^i\nabla_{k_\nu})\,\alpha_{ik_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p}. \tag{6}$$

В частности, есла f — форма нулевой степени, т. е. скаляр, то $d\delta f = 0$ и

$$\Delta f = \delta df = -\nabla^i\nabla_i f. \tag{7}$$

Мы видим, что в этом случае Δ сводится к оператору Лапласа — Бельтрами с противоположным знаком.

С помощью соотношения

$$(\nabla^i\nabla_i f\alpha)_{k_1\ldots k_p} = f\nabla^i\nabla_i\alpha_{k_1\ldots k_p} + 2(\nabla^i f)\;(\nabla_i\alpha_{k_1\ldots k_p}) + (\Delta f)\,\alpha_{k_1\ldots k_p}$$

из (1) и (6) можно получить следующую формулу, которая нам понадобится в дальнейшем:

$$(\Delta(f\alpha))_{k_1\ldots k_p} = f(\Delta\alpha)_{k_1\ldots k_p} - 2(\nabla^i f)(\nabla_i\,\alpha_{k_1\ldots k_p}) + (\Delta f)\,\alpha_{k_1\ldots k_p}. \tag{8}$$

Другое непосредственное следствие формулы (6) относится к случаю *эвклидова* пространства. Введя декартовы координаты, мы увидим, что, так как g_{ij} постоянны, символы Кристофеля обращаются в нуль и ковариантные производные сводятся к обычным производным по координатам. *При этом*, согласно формуле (6), *коэффициенты формы $\Delta\alpha$ равны лапласиану, с противоположным знаком, от соответствующих коэффициентов формы α.*

Отметим еще формулу, вытекающую из (3). Если f — скаляр, то

$$(\delta(f\alpha))_{k_1\ldots k_{p-1}} = -\nabla^i f.\alpha_{ik_1\ldots k_{p-1}} - f\nabla^i\alpha_{ik_1\ldots k_{p-1}}.$$

Обозначив $\gamma \lrcorner \alpha$ свертку, или внутреннее произведение, формы γ степени 1 на α, определенное равенствами

$$(\gamma \lrcorner \alpha)_{k_1\ldots k_{p-1}} = \gamma^i\alpha_{ik_1\ldots k_{p-1}},$$

мы сможем записать последнюю формулу в виде

$$\delta(f\alpha) = -df \rfloor \alpha + f\delta\alpha. \qquad (9)$$

Хотя без этого можно в дальнейшем обойтись, мы преобразуем формулу (6) при помощи тензора кривизны и формул Риччи

$$(\nabla_l \nabla^k - \nabla^k \nabla_l)\, \alpha_{r_1 \ldots r_p} = \sum_{\mu=1}^{p} R^{h\cdot k\cdot}_{\cdot r_\mu \cdot l}\, \alpha_{r_1 \ldots r_{\mu-1} h r_{\mu+1} \ldots r_p}.$$

Свернув по $k = r_1 = i$ и отделив слагаемые, соответствующие значению $\mu = 1$, получим

$$(\nabla_l \nabla^i - \nabla^i \nabla_l)\, \alpha_{i r_2 \ldots r_p} = R^{h\cdot i\cdot}_{\cdot i \cdot l}\, \alpha_{h r_2 \ldots r_p} + \\ + \sum_{\mu=2}^{p} R^{h\cdot i\cdot}_{\cdot r_\mu \cdot l}\, \alpha_{i r_2 \ldots r_{\mu-1} h r_{\mu+1} \ldots r_p}$$

или, если учесть, что $\alpha_{i_1 \ldots i_p}$ кососимметричны,

$$(\nabla_l \nabla^i - \nabla^i \nabla_l)\, \alpha_{i r_2 \ldots r_p} = R^{h\cdot i\cdot}_{\cdot i \cdot l}\, \alpha_{h r_2 \ldots r_p} + \\ + \sum_{\mu=2}^{p} (-1)^{\mu} R^{h\cdot i\cdot}_{\cdot r_\mu \cdot l}\, \alpha_{i h r_2 \ldots \hat{r}_\mu \ldots r_p}.$$

Для того, чтобы получить сумму, фигурирующую в правой части формулы (6), в этом выражении надо вместо 1, $r_2, \ldots, r_p$ взять $k, k_1, \ldots, \hat{k}_\nu, \ldots, k_p$, умножить на $(-1)^\nu$ и просуммировать по ν от 1 до p. Первые слагаемые дадут

$$\sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu R^{h\cdot i\cdot}_{\cdot i \cdot k_\nu}\, \alpha_{h k_1 \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_p}.$$

В сумме по μ вместо r_μ надо взять $k_{\mu-1}$ для значений $\mu \leqslant \nu$ и k_μ для $\mu > \nu$, после чего члены этой суммы примут вид

$$(-1)^{\mu+\nu} R^{h\cdot i\cdot}_{\cdot k_\mu \cdot k_\nu}\, \alpha_{i h k_1 \ldots \hat{k}_\nu \ldots \hat{k}_\mu \ldots k_p} \quad \text{при } \mu > \nu,$$

$$(-1)^{\mu+\nu} R^{h\cdot i\cdot}_{\cdot k_{\mu-1} \cdot k_\nu}\, \alpha_{i h k_1 \ldots \hat{k}_{\mu-1} \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_p} \quad \text{при } \mu \leqslant \nu.$$

В этом последнем выражении возьмем μ вместо $\mu - 1$; после этого, просуммировав по μ от 1 до $\nu - 1$, получим

$$-(-1)^{\mu+\nu} R^{h\cdot i\cdot}_{\cdot k_\mu \cdot k_\nu}\, \alpha_{i h k_1 \ldots \hat{k}_\mu \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_p}$$

или, в силу того, что $R^{l\cdot k\cdot}_{\cdot j\cdot l} = R^{k\cdot l\cdot}_{\cdot l\cdot j}$,

$$(-1)^{\mu+\nu} R^{l\cdot h\cdot}_{\cdot k_\nu \cdot k_\mu} \alpha_{hik_1 \ldots \hat{k}_\mu \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_p}.$$

Мы видим, что найденное выражение получается из соответствующего выражения при $\mu > \nu$ простой перестановкой индексов μ и ν. Следовательно, сумма всех таких выражений приводится к

$$2 \sum_{\mu<\nu}^{1\ldots p} (-1)^{\mu+\nu} R^{h\cdot l\cdot}_{\cdot k_\nu \cdot k_\mu} \alpha_{lhk_1 \ldots \hat{k}_\mu \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_p},$$

где суммирование распространяется на все системы целых μ и ν, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant \mu < \nu \leqslant p$.

Наконец, для $(\Delta\alpha)_{k_1 \ldots k_p}$ мы получим следующее выражение[1]):

$$-\nabla^i \nabla_i \alpha_{k_1 \ldots k_p} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu R^{h\cdot l\cdot}_{\cdot l\cdot k_\nu} \alpha_{hk_1 \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_p} +$$
$$+ 2 \sum_{\mu<\nu}^{1\ldots p} (-1)^{\mu+\nu} R^{h\cdot l\cdot}_{\cdot k_\nu \cdot k_\mu} \alpha_{lhk_1 \ldots \hat{k}_\mu \ldots \hat{k}_\nu \ldots k_p}.$$

Мы видим, что в первой сумме появился тензор Риччи

$$R^h_k = R^{h\cdot l\cdot}_{\cdot l\cdot k}.$$

Для формы нулевой степени, т. е. для скаляра f, все слагаемые этой суммы, кроме первого, обратятся в нуль, и мы получим, как и раньше, $\Delta f = -\nabla^i \nabla_i f$. В случае формы степени 1 останутся два первых члена, т. е.

$$(\Delta\alpha)_k = -\nabla^i \nabla_i \alpha_k - R^h_k \alpha_h.$$

Предположив, что α обладает компактным носителем, получим из последней формулы

$$(\alpha, \Delta\alpha) = -\int \alpha^k \nabla_i \nabla^i \alpha_k * 1 - \int R^h_k \alpha_h \alpha^k * 1,$$

откуда, интегрируя по частям в первом слагаемом справа, придем к равенству

$$(\alpha, \Delta\alpha) = \int \nabla_i \alpha^k \cdot \nabla^i \alpha_k * 1 - \int R_{hk} \alpha^h \alpha^k * 1. \qquad (10)$$

[1]) См. Weitzenböck [1], стр. 393—397.

Выражение $-R_{hk}\alpha^h\alpha^k$ называется *кривизной Риччи в направлении вектора* α^i. Из формулы (10) непосредственно вытекает следующая теорема, принадлежащая Бохнеру[1]): *если в компактном пространстве кривизна Риччи всюду* $\geqslant 0$, *то всякая гармоническая форма степени* 1 *имеет ковариантную производную, равную нулю, и кривизна Риччи в направлении, определяемом этой формой, всюду равна нулю; если во всех точках кривизна Риччи* >0 *в любом направлении, то всякая гармоническая форма степени* 1 *тождественно равна нулю.*

§ 27. Свойства геодезического расстояния

Вспомним некоторые свойства геодезических в римановом пространстве; эти свойства нам понадобятся в дальнейшем[2]). Пусть $t \longrightarrow x(t)$ — отображение класса C^∞ интервала $0 \leqslant t \leqslant 1$ в рассматриваемое риманово пространство. Если трактовать t как время, то такое отображение определяет движение некоторой частицы за время от $t=0$ до $t=1$. В произвольной системе локальных координат $x^1, \ldots, x^n$ компоненты вектора скорости $\dot{x}(t)$ и связанного с ним ковектора выражаются в виде

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \quad \text{и} \quad \dot{x}_i = g_{ik}\dot{x}^k = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}^i},$$

где $\mathcal{T} = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ — кинетическая энергия частицы, масса которой предполагается равной 1.

Движение называется *естественным*, если оно удовлетворяет уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

которые, если их разрешить относительно вторых производных $\ddot{x}^i = \frac{d^2x^i}{dt^2}$, принимают вид

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

[1]) Bochner [1]. См. также Lichnerowicz [2], Yano [1], [2].

[2]) Подробности, относящиеся к классическим понятиям, перечисленным в начале этого параграфа, читатель сможет найти, например, в книгах E. Cartan [5], Lichnerowicz [1] или Levi-Civita [1].

Геодезические линии представляют собой траектории естественных движений.

Согласно классической теореме существования в теории дифференциальных уравнений, заданному начальному положению и заданной начальной скорости отвечает некоторое естественное движение, притом единственное. Пусть $z(t)$ — такое движение, $x = z(0)$ и $\xi = \dot{z}(0)$ — начальное положение и начальная скорость, $y = z(1)$ и $-\eta = \dot{z}(1)$ — положение и скорость в момент $t = 1$. Так как это движение определяется параметрами x и ξ, то мы можем записать

$$z(t) = z(t;\ x,\ \xi).$$

Координаты $z^i(t)$ точки $z(t)$ представляют собой функции класса C^∞ от t, x и ξ, удовлетворяющие уравнениям (1), если в них вместо x написать z.

Конечное положение $y = z(1;\ x,\ \xi)$ также является функцией класса C^∞ от x и ξ, принимающей значение x при $\xi = 0$. Покажем, что *якобиан координат точки y по компонентам вектора ξ равен 1 при $\xi = 0$.*

Имеем тождество

$$z(ct;\ x,\ \xi) = z(t;\ x,\ c\xi),$$

в справедливости которого можно убедиться, заметив, что обе его части представляют собой движения, соответствующие одним и тем же начальным данным. Взяв 1 вместо t и t вместо c, придем к соотношению

$$z(t;\ x,\ \xi) = z(1;\ x,\ t\xi);$$

взяв производные по t от i-х координат обеих частей, получим

$$\dot{z}^i(t;\ x,\ \xi) = \xi^j \frac{\partial z^i(1;\ x,\ t\xi)}{\partial \xi^j},$$

откуда, так как $z(1;\ x,\ \xi) = y = y(x,\ \xi)$, при $t = 0$ получим

$$\xi^i = \xi^j \frac{\partial z^i(1;\ x,\ 0)}{\partial \xi^j} = \xi^j \frac{\partial y^i(x,\ 0)}{\partial \xi^j} \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n).$$

Эти соотношения выполняются по ξ^j тождественно, поэтому

$$\frac{\partial y^i(x,\ 0)}{\partial \xi^j} = \delta^i_j, \tag{2}$$

откуда следует наше утверждение.

Таким образом, этот якобиан отличен от нуля при достаточно малом ξ. В силу теоремы о неявных функциях, существует положительная непрерывная функция ρ от x на V, такая, что при отображении $\xi \to y = y(x, \xi)$ множество векторов длины $< \rho(x)$ в векторном пространстве, касательном в точке x, топологически отображается на некоторую окрестность S_x точки x в V[1]). Следовательно, *каждая точка y окрестности S_x является концом дуги геодезической линии, имеющей начало в точке x и содержащейся в S_x, притом единственной.* Эта дуга представляет собой траекторию, описываемую за промежуток времени (0, 1) частицей в естественном движении, при котором в момент $t=0$ она находится в точке x и имеет скорость ξ, определенную условиями

$$\xi_i \xi^i < \rho^2, \qquad y(x, \xi) = y.$$

Длину этой дуги обозначим $r(x, y)$. Так как касательными векторами длины 1, направленными внутрь самой дуги в ее начальной и конечной точках, являются $\frac{1}{r}\xi$ и $\frac{1}{r}\eta$, то, согласно формуле вариационного исчисления, выражающей вариацию длины,

$$-r(x, y)\, dr(x, y) = \xi_i dx^i + \eta_i dy^i. \tag{3}$$

Если мы x фиксируем, а y будем перемещать по гиперповерхности $r(x, y) = \mathrm{const}$ (т. е. по геодезической сфере с центром в x), то получим $\eta_i dy^i = 0$, т. е. *геодезические линии, выходящие из x, в окрестности S_x ортогональны геодезическим сферам с центрами в x.*

Если обозначить $a^i = \frac{1}{r}\xi^i$, то положение точки y в S_x можно будет определить $n+1$ координатами $r, a^1, \ldots, a^n$, подчиненными условиям

$$0 \leqslant r(x, y) < \rho(x), \qquad g_{ij}(x) a^i a^j = 1.$$

На геодезической, выходящей из точки x, a^i постоянны,

---

[1]) Этот вывод можно сделать, рассуждая так же, как в конце § 3, из того факта, что отображение (рассматриваемое ниже) многообразия V', пространства касательных к V векторов (x, ξ), в $V \times V$, которое точке (x, ξ) ставит в соответствие точку $(x, y(x, \xi))$, имеет отличный от нуля якобиан в точке $(x, 0)$.

изменяется лишь r, и ds^2 сводится к dr^2. На геодезической сфере с центром в x постоянно r, и ds^2 сводится к некоторой квадратичной форме ds_0^2 от da^i. Так как вектор $(dr, da^1, \ldots, da^n)$ слагается из ортогональных векторов $(dr, 0, \ldots, 0)$ и $(0, da^1, \ldots, da^n)$, то ds^2 — квадрат его длины — является суммой квадратов длин слагаемых, $ds^2 = ds_0^2 + dr^2$, и неравенство $ds \geqslant |dr|$ показывает, что *геодезическая линия, соединяющая точки x и y в S_x, действительно служит кратчайшим путем из x в y.*

Мы установим здесь некоторые свойства *геодезического расстояния*, т. е. функции $r(x, y)$, которые понадобятся нам ниже[1]).

Пусть W — множество точек (x, y) произведения $V \times V$, таких, что геодезическое расстояние от x до y меньше $\rho(x)$, или, что то же, таких, для которых $y \in S_x$. Это — открытое множество в $V \times V$, содержащее диагональ. Множество всех (x, ξ) представляет собой многообразие V', называемое пространством касательных к V векторов; оно расслаивается на векторные пространства, касательные в различных точках x. Пусть W' — множество точек (x, ξ) из V', подчиненных условию, что длина ξ меньше $\rho(x)$, $\xi_i \xi^i < \rho^2(x)$. W' представляет собой открытое множество в V, которое содержит *центральное сечение* пространства V', состоящее из точек (x, ξ) с $\xi = 0$. Отображение $(x, \xi) \to (x, y(x, \xi))$ представляет собой гомеоморфизм класса C^∞ множества W в W', преобразующий центральное сечение в диагональ. В силу этого гомеоморфизма, любую функцию, заданную на W, можно рассматривать либо как функцию от (x, y), либо как функцию от (x, ξ). При фиксированном x компоненты вектора ξ определяют локальные координаты точки y; они образуют систему так называемых *нормальных координат* с началом в точке x.

Любой системе локальных координат в V с областью определения D в $V \times V$ соответствует система локальных координат с областью определения $D \times D$: точке $(x, y) \in D \times D$ относятся расположенные подряд координаты точек x и y относительно заданной (в области D) систе-

1) В связи с дальнейшим содержанием этого параграфа см. Bochner [2], Kodaira [1], de Rham [7], [10].

мы. О такой системе координат в $V \times V$ говорят, что она согласована с диагональю. Ясно, что множество W может быть покрыто областями определения таких систем координат.

Определение. Говорят, что функция $f(x, y)$, заданная на W или на $D \times D$ всюду, кроме, быть может, точек диагонали, имеет порядок $O(r^k)$, и пишут $f(x, y) = O(r^k)$, где k — действительное число, если $r^{-k} f(x, y)$ ограничено.

Условимся говорить, что форма γ, простая или двойная, определенная на W или на $D \times D$ всюду, кроме, быть может, точек диагонали, имеет порядок $O(r^k)$, и писать $\gamma = O(r^k)$, если все коэффициенты этой формы в какой-либо системе координат, согласованной с диагональю, имеют порядок $O(r^k)$.

Так как $r^2(x, y) = g_{ij}\xi^i\xi^j$ — положительно определенная квадратичная форма, то

$$\xi^i = O(r).$$

Формула Тейлора показывает, что функция класса C^∞ имеет порядок $O(r^k)$, где $k > 0$, тогда и только тогда, когда ее производные по ξ^i порядка $< k$ (включая производную нулевого порядка, т. е. саму функцию) обращаются в нуль при $\xi = 0$. Итак, в силу формулы (2),

$$y^i - x^i = O(r), \qquad y^i - x^i - \xi^i = O(r^2),$$

откуда

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = -\delta^i_j + O(r), \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial y^j} = \delta^i_j + O(r), \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^i}{\partial y^j} = O(r).$$

Отсюда вытекает, что, если функция $F(x, y)$ класса C^∞ имеет порядок $O(r^k)$, где $k \geqslant 1$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = O(r^{k-1}), \quad \frac{\partial F}{\partial y^i} = O(r^{k-1}), \quad \frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial y^i} = O(r^k).$$

Рассмотрим, в частности, функцию

$$A(x, y) = -\frac{1}{2} r^2(x, y).$$

В силу (3),

$$\frac{\partial A}{\partial x^i} = \xi_i, \qquad \frac{\partial A}{\partial y^i} = \eta_i,$$

откуда, так как $A=O(r^2)$,

$$\frac{\partial A}{\partial x^i}+\frac{\partial A}{\partial y^i}=\xi_i+\eta_i=O(r^2). \tag{4}$$

С другой стороны, так как $\xi_i=g_{ik}(x)\xi^k$, то

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^i\,\partial y^j}=\frac{\partial \xi_i}{\partial y^j}=g_{ik}(x)\frac{\partial \xi^k}{\partial y^j}=g_{ij}(x)+O(r). \tag{5}$$

Лемма 1. *Если $G(x, y)$ представляет собой произведение функции класса C^∞ на некоторую степень функции $r(x, y)$ и если $G(x, y)=O(r^p)$, то $\frac{\partial G}{\partial x^i}$ и $\frac{\partial G}{\partial y^i}$ являются такого же рода произведениями, причем*

$$\frac{\partial G}{\partial x^i}=O(r^{p-1}), \qquad \frac{\partial G}{\partial x^i}+\frac{\partial G}{\partial y^i}=O(r^p).$$

В самом деле, пусть

$$G(x, y)=r^h(x, y)F(x, y),$$

где h — действительное число, а $F(x, y)$ — функция класса C^∞. Так как $G=O(r^p)$, то $F=O(r^{p-h})$, откуда следует, что $F=O(r^k)$, где k — наименьшее целое число $\geqslant 0$ и $\geqslant p-h$. Далее,

$$\frac{\partial G}{\partial x^i}=r^{h-2}(x, y)F_1(x, y),$$

$$\frac{\partial G}{\partial x^i}+\frac{\partial G}{\partial y^i}=r^{h-2}(x, y)F_2(x, y),$$

где

$$F_1=r^2\frac{\partial F}{\partial x^i}+hr\frac{\partial r}{\partial x^i}F=r^2\frac{\partial F}{\partial x^i}-h\frac{\partial A}{\partial x^i}F,$$

$$F_2=r^2\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}+\frac{\partial F}{\partial y^i}\right)-h\left(\frac{\partial A}{\partial x^i}+\frac{\partial A}{\partial y^i}\right)F.$$

Мы видим, что F_1 и F_2 принадлежат к классу C^∞ и, в силу сделанных выше замечаний,

$$F_1=O(r^{k+1}) \quad \text{и} \quad F_2=O(r^{k+2});$$

тем самым лемма доказана.

Лемма 2. *Если V — пространство размерности $n>2$, то*

$$\Delta_y r^{2-n}(x, y)=O(r^{2-n}).$$

Фиксировав x, возьмем $\xi^1, \ldots, \xi^n$ в качестве координат точки y. Пусть $\bar{g}_{ij}$ и $\bar{\Gamma}^i_{kl}$ — коэффициенты ds^2 и символы Кристофеля в этой системе координат. Так как при любом выборе постоянных a^i функции $\xi^i=a^i t$ $(i=1, \ldots, n)$ удовлетворяют уравнениям геодезических

$$\ddot{\xi}^i+\bar{\Gamma}^i_{kl}\dot{\xi}^k\dot{\xi}^l=0 \qquad (i=1, \ldots, n),$$

то при $t=0$, т. е. когда $y=x$, имеем $\bar{\Gamma}^i_{kl}a^k a^l=0$ и, следовательно, $\bar{\Gamma}^i_{kl}=0$, откуда вытекает, что

$$\bar{\Gamma}^i_{kl}=O(r).$$

Символы Кристофеля в выбранной системе координат (называемых нормальными) обращаются в нуль в начале. Таким образом,

$$\nabla_i(r^{2-n})=\frac{\partial}{\partial\xi^i}r^{2-n}=O(r^{1-n}),$$

$$\nabla_j\nabla_i(r^{2-n})=\frac{\partial^2}{\partial\xi^j\,\partial\xi^i}r^{2-n}-\bar{\Gamma}^h_{ij}\frac{\partial}{\partial\xi^h}r^{2-n}=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\xi^j\,\partial\xi^i}r^{2-n}+O(r^{2-n}).$$

С другой стороны, так как $r^2=g_{ij}(x)\xi^i\xi^j$,

$$r\frac{\partial r}{\partial\xi^i}=g_{ij}(x)\xi^j,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi^i}r^{2-n}=(2-n)r^{-n}g_{ij}(x)\xi^j,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^j\,\partial\xi^i}r^{2-n}=(2-n)r^{-n}g_{ij}(x)-$$

$$-n(2-n)r^{-n-2}g_{ih}(x)\xi^h g_{jk}(x)\xi^k=$$

$$=(2-n)r^{-n}(g_{ij}(x)-nr^{-2}\xi_i\xi_j).$$

В точке x, т. е. при $\xi=0$, имеем $dy^i=d\xi^i$, следовательно, $\bar{g}_{ij}(x)=g_{ij}(x)$. С другой стороны, так как $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ обращаются в нуль при $y=x$, то обращаются в нуль также первые производные $\bar{g}_{ij}$ по ξ^k, откуда вытекает, что

$$\bar{g}_{ij}(y)=g_{ij}(x)+O(r^2)$$

и

$$\bar{g}^{ij}(y)=g^{ij}(x)+O(r^2).$$

Согласно предыдущему,

$$-\Delta_y r^{2-n}=\nabla^i\nabla_i r^{2-n}=\bar{g}^{ij}(y)\nabla_j\nabla_i r^{2-n}=$$
$$=\bar{g}^{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial\xi^j\,\partial\xi^i}r^{2-n}+O(r^{2-n})=$$
$$=(2-n)r^{-n}(g_{ij}(x)-nr^{-2}\xi_i\xi_j)\bar{g}^{ij}(y)+O(r^{2-n})=$$
$$=(2-n)r^{-n}(g_{ij}(x)g^{ij}(x)-nr^{-2}\xi_i\xi_j g^{ij}(x))+O(r^{2-n}).$$

Так как

$$g_{ij}(x)g^{ij}(x)=n \quad \text{и} \quad \xi_i\xi_j g^{ij}(x)=g_{ij}(x)\xi^i\xi^j=r^2,$$

то последняя скобка равна нулю, и доказательство закончено.

В случае $n=2$ аналогичным способом получается оценка

$$\Delta_y \log r(x, y)=O(1).$$

Лемма 3. *Ковариантные производные ковектора*

$$B_j(y)=\frac{\partial^2 A}{\partial x^i\,\partial y^j}$$

при фиксированных x и i имеют порядок $O(r)$.

Действительно, так как $\xi_i=g_{ik}(x)\xi^k$ и $B_j=\frac{\partial\xi_i}{\partial\xi^j}$, то компоненты этого ковектора в нормальных координатах $\xi^1, \ldots, \xi^n$ точки y равны $B_j=g_{ij}(x)$ и не зависят от y. Следовательно,

$$\nabla_k B_j=\frac{\partial B_j}{\partial\xi^k}-B_h\bar{\Gamma}^h_{jk}=-B_h\bar{\Gamma}^h_{jk}=O(r).$$

Лемма 4. *Если $L(x, y)$ — двойная форма на $V\times V$, имеющая порядок $O(r^{2-n})$ и равная произведению двойной* *формы класса C^∞ на $r(x, y)$ в какой-либо степени, то оператор Λ, для которого $L(x, y)$ служит ядром, отображает любое множество форм φ, ограниченное до порядка p, в множество, локально ограниченное до порядка $p+1$.*

Прибегнув к разбиению единицы, мы сведем теорему к случаю, когда носители форм φ заключены все в некотором компактном множестве K, содержащемся в области определения некоторой системы координат. Достаточно изучить $\Lambda\varphi$ в окрестности множества K, так как для локальной ограниченности $\Lambda\varphi$ вне K достаточно условия, что носители φ заключены в K и φ ограничены в $\mathscr{E}'$. Кроме того, мы вправе допустить, что в рассматриваемой системе координат все коэффициенты формы φ равны нулю, за исключением одного, который мы обозначим $c(x)$.

Тогда каждый коэффициент формы $\Lambda\varphi$ будет иметь вид

$$C(x) = \int G(x, y)\, c(y)\, dy^1 \ldots dy^n,$$

где $G(x, y)$ представляет собой произведение $r(x, y)$ в некоторой степени на функцию класса C^∞ и имеет порядок $O(r^{2-n})$.

Покажем, что любая производная $DC(x)$ порядка p функции $C(x)$ в области определения рассматриваемой системы координат имеет вид

$$DC(x) = \int \sum_k G_k(x, y)\, D_k c(y)\, dy^1 \ldots dy^n, \tag{6}$$

где $G_k(x, y)$ — функция порядка $O(r^{2-n})$, представляющая собой произведение r в некоторой степени на функцию класса C^∞, а $D_k c(y)$ — некоторые производные порядка $\leqslant p$ от $c(y)$.

Формула (6) верна при $p=0$, поэтому достаточно показать, что если она верна при каком-либо p, то она распространяется и на $p+1$.

Пусть $D' = \dfrac{\partial}{\partial x^i} D$ означает операцию взятия какой-либо производной $(p+1)$-го порядка. Из (6) сразу следует, что

$$D'C(x)=\int\sum_k \frac{\partial G_k(x, y)}{\partial x^i} D_k c(y)\, dy^1\ldots dy^n. \tag{7}$$

Согласно лемме 1, $\frac{\partial G_k}{\partial x^i}=O(r^{1-n})$ и

$$\frac{\partial G_k(x, y)}{\partial x^i}=-\frac{\partial G_k(x, y)}{\partial y^i}+H_k(x, y),$$

где

$$H_k(x, y)=O(r^{2-n}).$$

Подставив это выражение в формулу (7) и применив формулу интегрирования по частям

$$-\int\frac{\partial G_k}{\partial y^i} D_k c(y)\, dy^1\ldots dy^n=$$
$$=\int G_k \frac{\partial}{\partial y^i} D_k c(y)\, dy^1\ldots dy^n,$$

получим

$$D'C(x)=\int\sum_k\Big[H_k(x, y) D_k c(y)+$$
$$+G_k(x, y)\frac{\partial}{\partial y^i} D_k c(y)\Big]\, dy^1\ldots dy^n.$$

Наше утверждение доказано, так как это выражение имеет тот же вид, что (6).

Отсюда непосредственно вытекает лемма 4: если $c(x)$ и ее производные порядка $\leqslant p$ ограничены, то $C(x)$ и ее производные порядка $\leqslant p$ остаются ограниченными в силу (6); ограниченность же ее $(p+1)$-х производных следует из (7).

Лемма 5. *Пусть $L(x, y)$ — двойная форма на $V\times V$, непрерывная вне диагонали и имеющая порядок $O(r^{n-e})$, где $e>0$; если φ — форма класса C^0 с компактным носителем, то*

$$\Lambda\varphi(y)=\int_x \varphi(x)\wedge L(x, y)$$

представляет собой форму класса C^0; далее, когда φ изменяется, оставаясь ограниченной до порядка 0, $\Lambda\varphi$

равностепенно непрерывны в окрестности любой точки и локально ограничены до порядка 0.

Интеграл, представляющий $\Lambda\varphi(y)$, разобьем на два интеграла: один — распространенный на некоторую окрестность D' точки y_0, другой — на ее дополнение. Пусть $\Lambda'\varphi(y)$ и $\Lambda''\varphi(y)$ — значения этих интегралов, так что

$$\Lambda\varphi(y) = \Lambda'\varphi(y) + \Lambda''\varphi(y).$$

Когда D' стягивается в точку, все коэффициенты $\Lambda'\varphi(y)$ стремятся к нулю равномерно относительно y в окрестности любой точки, в частности, в окрестности точки y_0, и равномерно относительно φ на любом ограниченном до порядка 0 множестве. Коэффициенты формы $\Lambda''\varphi$ непрерывны в точке y_0 и притом равностепенно непрерывны, если φ изменяется в ограниченном до порядка 0 множестве, поэтому то же можно утверждать о коэффициентах $\Lambda\varphi(y)$. Локальная ограниченность $\Lambda\varphi$ до порядка 0 очевидна.

Лемма 6. *Пусть $L_1(x, y)$ и $L_2(x, y)$ — двойные формы на $V\times V$, непрерывные вне диагонали. Предположим, что*

$$L_1(x, y) = O(r^{e_1-n}), \quad L_2(x, y) = O(r^{e_2-n}),$$

где $e_1 > 0$, $e_2 > 0$, и если P — оператор проектирования $V\times V\times V$ на $V\times V$, $P(x, y, z) = (x, y)$, то носитель тройной формы $L_1(x, z)\wedge L_2(z, y)$ имеет компактное пересечение с прообразом $P^{-1}K$ любого компактного множества $K\subset V\times V$. Тогда двойная форма

$$L(x, y) = \int_z L_1(x, z)\wedge L_2(z, y)$$

на $V\times V$ непрерывна на диагонали. Кроме того, при $e_1+e_2-n > 0$ она непрерывна даже на диагонали; если же $e_1+e_2-n < 0$, то $L(x, y) = O(r^{e_1+e_2-n})$.

Заметим сначала, что, в силу высказанных предположений, интеграл, определяющий $L(x, y)$, всегда имеет смысл при $x\neq y$, а когда $e_1+e_2-n > 0$, то и при $x = y$.

Чтобы изучить свойства $L(x, y)$ вне диагонали, рассмотрим две непересекающиеся области D' и D'' в V; дополнение их соединения обозначим D'''. Пусть

$L'(x, y)$, $L''(x, y)$ и $L'''(x, y)$ — значения рассматриваемого интеграла, распространенного соответственно на D', D'' и D'''; тогда

$$L(x, y) = L'(x, y) + L''(x, y) + L'''(x, y).$$

При $x \in D'$ и $y \in D''$ $L'(x, y)$ и $L''(x, y)$ непрерывны, в силу леммы 5, а непрерывность $L'''(x, y)$ очевидна. Отсюда следует непрерывность $L(x, y)$ вне диагонали.

Рассмотрим теперь поведение $L(x, y)$ в окрестности диагонали. Возьмем какую-нибудь точку $v \in V$ и систему нормальных координат с началом в v, которую мы будем предполагать ортонормальной в точке v. Область определения этой системы координат охватывает некоторую геодезическую сферу S_ρ радиуса ρ с центром в v. Положим

$$L_\rho(x, y) = \int\limits_{z \in S_\rho} L_1(x, z) \wedge L_2(z, y).$$

Ясно, что $L(x, y) - L_\rho(x, y)$ непрерывно при $x \in S_\rho$ и $y \in S_\rho$; достаточно поэтому рассмотреть поведение $L_\rho(x, y)$.

Пусть x^i, y^i и z^i $(i = 1, \ldots, n)$ — координаты точек x, y и z в рассматриваемой системе, а

$$d(x, y) = \left[\sum (x^i - y^i)^2\right]^{1/2}$$

— эвклидово расстояние. Когда x и y содержатся в S_ρ, отношение $r(x, y)$ к $d(x, y)$ ограничено сверху и снизу двумя фиксированными положительными числами, так что всякая функция порядка $O(r^k)$ в то же время имеет порядок $O(d^k)$, и наоборот. Следовательно, каждый коэффициент формы $L_\rho(x, y)$ в $S_\rho \times S_\rho$ представляется в виде суммы конечного числа членов вида

$$\int\limits_{z \in S_\rho} F_1(x, z) F_2(z, y) d^{e_1 - n}(x, z) d^{e_2 - n}(y, z) dz^1 \ldots dz^n,$$

где $F_1(x, z)$ и $F_2(z, y)$ — ограниченные функции. Таким образом, эти коэффициенты могут быть мажорированы функцией, равной, с точностью до постоянного множителя,

$$A_\rho = \int\limits_{S_\rho} d^{e_1 - n}(x, z) d^{e_2 - n}(y, z) dz^1 \ldots dz^n.$$

Чтобы доказать утверждение леммы, относящееся к случаю $e_1+e_2-n<0$, достаточно убедиться в том, что

$$A_\rho(x, y)=O(d^{e_1+e_2-n}).$$

Для этого разделим область интегрирования на две части, отнеся к одной точки, лежащие в сфере D' радиуса $2d(x, y)$ с центром в x; тогда другая, D'', будет представлять собой часть S_ρ, внешнюю по отношению к этой сфере. Пусть $A_\rho=A_\rho'+A_\rho''$ — соответствующее разложение функции A_ρ. Первое слагаемое мажорируется соответствующим интегралом, распространенным на всю сферу D', равным, с точностью до постоянного множителя, $d^{e_1+e_2-n}(x, y)$; в этом нетрудно убедиться, преобразовав интеграл посредством гомотетии с центром в x и с отношением $d^{-1}(x, y)$. Таким образом,

$$A_\rho'=O(d^{e_1+e_2-n}).$$

Далее, когда z изменяется вне D', отношение

$$\frac{d(y, z)}{d(x, z)}$$

достигает своей верхней и нижней граней, равных $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$, в концах диаметра сферы D', проходящего через точки x и y. С другой стороны, D'' заключено в области B, ограниченной эвклидовыми сферами с радиусами $2d(x, y)$ и 2ρ и с центром в x (предполагается, что точки x и y лежат в S_ρ). Отсюда следует, что A_ρ'' мажорируется, с точностью до постоянного множителя, интегралом

$$\int d^{e_1+e_2-2n}(x, z)\, dz^1 \ldots dz^n;$$

этот последний равен, с точностью до числового множителя,

$$\frac{\rho^{e_1+e_2-n}-d^{e_1+e_2-n}(x, y)}{e_1+e_2-n}.$$

В случае, когда $e_1+e_2-n<0$, мы получим

$$A_\rho''=O(d^{e_1+e_2-n}),$$

откуда следует, что $A_\rho=O(d^{e_1+e_2-n})$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $e_1+e_2-n>0$. Рассмотрим интегралы $L_R(x, y)$ и $A_R(x, y)$, аналогичные $L_\rho(x, y)$ и $A_\rho(x, y)$, но распространенные на S_R, где $R < \rho$. Интеграл $A_R(x, y)$ представим в виде суммы двух интегралов, распространенных на множества, в которых соответственно

$$d(x, z) < d(y, z) \quad \text{и} \quad d(x, z) \geqslant d(y, z).$$

Оба эти интеграла мажорируем интегралами, в которых берем соответственно $d(x, z)$ вместо $d(y, z)$ и $d(y, z)$ вместо $d(x, z)$, а в качестве области интегрирования берем все S_R целиком. Получим

$$A_R < \int_{S_R} [d^{e_1+e_2-2n}(x, z) + d^{e_1+e_2-2n}(y, z)]\, dz^1 \ldots dz^n,$$

откуда следует, что, когда $R \to 0$, $A_R \to 0$ равномерно относительно x и y в S_ρ. Следовательно, коэффициенты формы $L(x, y) - L_R(x, y)$, непрерывные при $x = y = v$, сходятся при этом к соответствующим коэффициентам формы $L(x, y)$. Эти последние, таким образом, также непрерывны при $x = y = v$; на этом доказательство заканчивается.

§ 28. Параметрикс

Так как $A(x, y) = -\frac{1}{2} r^2(x, y)$ — функция класса C^∞ в окрестности W диагонали произведения $V \times V$, то тем же свойством обладают двойная форма $d_x d_y A(x, y)$ и ее степени в смысле внешнего умножения.

Положим

$$\alpha_p(x, y) = \frac{1}{p!}(d_x d_y A(x, y))^p.$$

Так как, в силу соотношения (5) § 27,

$$d_x d_y A(x, y) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial y^j} dx^i\, dy^j = g_{ij}(x)\, dx^i\, dy^j + O(r),$$

то

$$\alpha_p(x, y) = \frac{1}{(p!)^2} g_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dx^{i_p} . dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_p} + O(r).$$

Если φ — четная форма на V степени p, то

$$\alpha_p(x, y) \wedge * \varphi(y) =$$
$$= \frac{1}{(p!)^2} g_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} . \varphi^{j_1 \ldots j_p}(y) *_y 1 + O(r).$$

Так как $\varphi^{j_1 \ldots j_p}(y) = \varphi^{j_1 \ldots j_p}(x) + O(r)$ и

$$\frac{1}{p!} g_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_p}(x) \varphi^{j_1 \ldots j_p}(x) = \varphi_{i_1 \ldots i_p}(x),$$

то

$$\alpha_p(x, y) \wedge * \varphi(y) = \varphi(x) *_y 1 + O(r). \tag{1}$$

Для того, чтобы получить аналогичную формулу для нечетных форм, рассмотрим скаляр $\varepsilon(x, y)$, *нечетный* как по x, так и по y, который мы определим, положив его равным 1 на W в любой системе координат, согласованной с диагональю. При любой ориентации ε области $D \subset V$ будем в $D \times D$ иметь соотношение $\varepsilon(x, y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$.

Любая нечетная форма φ степени p допускает локальное представление $\varphi(y) = \varepsilon(y)\varphi_1(y)$, где $\varphi_1(y)$ — четная форма степени p; поэтому, в силу (1),

$$\varepsilon(x, y)\alpha_p(x, y) \wedge * \varphi(y) = \varphi(x) *_y 1 + O(r). \tag{2}$$

Положив далее

$$\alpha(x, y) = (1 + \varepsilon(x, y)) \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} (d_x d_y A(x, y))^p, \tag{3}$$

мы получим из (1) и (2) следующую общую формулу, применимую к любой форме φ класса C^∞:

$$\alpha(x, y) \wedge * \varphi(y) \mathrel{\underset{y}{\doteq}} \varphi(x) *_y 1 + O(r), \tag{4}$$

где $\underset{y}{\doteq}$ означает равенство нечетных составляющих степени n по y правой и левой частей.

Пусть $\sigma(x, y)$ — функция класса C^∞ на $V \times V$ со значениями $\geqslant 0$ и $\leqslant 1$, с носителем, заключенным в W, равная 1 в некоторой окрестности диагонали и симметричная: $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$. Назовем *параметриксом*[1]) двойную

[1]) Термин «параметрикс» введен Гильбертом и означает в теории уравнений с частными производными эллиптического типа своего рода грубое приближение к некоторому элементарному решению. В случае уравнения с постоянными коэффициентами элементарное решение отыскивается, вообще говоря, без труда; с его помощью можно получить параметрикс для соответствующего уравнения с переменными коэффициентами, и отыскание элементарного решения этого последнего сводится к решению некоторого интегрального уравнения. Такова идея «метода параметрикса» Леви и Гильберта (E. E. Levi [1], [2], Hilbert [1]). Применение этого метода в тео-

форму $\omega(x, y)$, равную нулю вне W, а на W определенную равенством

$$\omega(x, y)=\frac{r^{2-n}(x, y)}{(n-2)\, s_n}\, \sigma(x, y)\, \alpha(x, y), \tag{5}$$

где s_n — площадь ($(n-1)$-мерная) поверхности сферы радиуса 1 в R^n. Так мы поступаем при $n>2$. При $n=2$ вместо $\frac{r^{2-n}(x, y)}{n-2}$ мы вводим множитель $-\ln r(x, y)$.

Двойная форма $\omega(x, y)$ принадлежит к классу C^∞ вне диагонали, равна нулю вне W и симметрична: $\omega(x, y)=\omega(y, x)$.

Лемма 1. *Двойная форма $q(x, y)$, определенная при $x \neq y$ равенством $q(x, y)=-\Delta_x\omega(x, y)$, имеет порядок $O(r^{2-n})$.*

Согласно определению параметрикса, т. е. равенству (5), $\omega(x, y)=r^{2-n}(x, y)\, a(x, y)$, где $a(x, y)$ принадлежит к классу C^∞. Воспользовавшись формулой (8) § 26, мы получим $\Delta_x\omega(x, y)=r^{2-n}(x, y)\,\Delta_x a(x, y)+a(x, y)\,\Delta_x(r^{2-n}(x, y))-2\beta$, где β — форма с коэффициентами, определяемыми равенствами

$$\beta_{k_1\ldots k_p}=\nabla^i(r^{2-n})\,\nabla_i a_{k_1\ldots k_p},$$

в которых ковариантные производные берутся по x; индексы $k_1 \ldots k_p$ указывают, что речь идет о коэффициентах форм a и β при $dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_p}$.

В выражении для $\Delta_x\omega$ первое слагаемое справа, очевидно, имеет порядок $O(r^{2-n})$. Второе слагаемое — того же порядка, в силу леммы 2 § 27. Для того, чтобы убедиться в том, что и третье слагаемое имеет порядок $O(r^{2-n})$, в силу $\nabla^i(r^{2-n})=O(r^{1-n})$, достаточно показать, что $\nabla_i a_{k_1\ldots k_p}=O(r)$. Это же следует из того, что $a_{k_1\ldots k_p}$ являются линейными комбинациями произведений компонент ковекторов, подобных тем, которые рассмотрены в лемме 3 § 27. В то же время мы видим, что $r^n q(x, y)$ представляет собой функцию класса C^∞.

рии гармонических форм подсказал Кнезер и осуществили сначала Ходж и Вейль (Hodge [3], [4] и Weyl [2]), а затем, по-иному, Бидаль и де Рам (Bidal [1], de Rham [7], [8], [10]).

Операторы $\mathfrak{Q}$, Q и Q'. Пусть $L(x, y)$ служит ядром оператора Λ; условимся говорить при этом, что $l(x, y) = *_y^{-1} L(y, x)$ является его *метрическим ядром*. Из

$$\Lambda\varphi(y) = \int\limits_x \varphi(x) \wedge L(x, y) = \int\limits_x *_x^{-1} L(x, y) \wedge *\varphi(x),$$

поменяв местами x и y, получим

$$\Lambda\varphi(x) = \int\limits_y l(x, y) \wedge *\varphi(y).$$

В отличие от метрического ядра, $L(x, y)$, будем называть иногда *топологическим ядром* оператора Λ. Легко проверить, что оператор Λ', метрически сопряженный с Λ, имеет метрическое ядро $l'(x, y) = l(y, x)$.

Обозначим $\mathfrak{Q}$, Q и Q' операторы, метрическими ядрами которых служат соответственно $\omega(x, y)$, $q(x, y)$ и $q'(x, y) = q(y, x)$. В силу симметрии $\omega(x, y)$, *оператор $\mathfrak{Q}$ метрически сопряжен самому себе; в то же время Q и Q' метрически сопряжены друг другу.*

Пусть S — *носитель функции* $\sigma(x, y)$ в $V \times V$, фигурирующей в качестве множителя в выражении $\omega(x, y)$. Множество S содержится в окрестности W диагонали и, в силу симметрии $\sigma(x, y)$, симметрично, т. е. инвариантно относительно преобразования $(x, y) \to (y, x)$. Если $K \subset V$, то $S \circ K$ пусть обозначает множество точек x в V, для которых существует в K хотя бы одна точка y, такая, что $(x, y) \in S$. Если P_1 и P_2 — операторы проектирования, $P_1(x, y) = x$, $P_2(x, y) = y$, то $S \circ K = P_1(S \cap P_2^{-1} K)$. Отсюда следует, что $S \circ K$ компактно при компактном K. Так как S содержит диагональ, то $K \subset S \circ K$.

Множество S содержит носители $\omega(x, y)$ и $q(x, y)$, поэтому, *если носитель φ заключен в K, то носители $\mathfrak{Q}\varphi$, $Q\varphi$ и $Q'\varphi$ заключены в $S \circ K$*. Следовательно, если носитель φ компактен, то компактны носители $\mathfrak{Q}\varphi$, $Q\varphi$ и $Q'\varphi$.

Вообще говоря, под действием этих операторов носители форм расширяются. Но если S содержится в достаточно узкой окрестности диагонали, а этого всегда можно достигнуть, выбрав должным образом $\sigma(x, y)$, то такое расширение незначительно. Заметим еще, что, выбрав две различные функции $\sigma(x, y)$, мы получим формы $\omega(x, y)$, отличающиеся лишь на слагаемое класса C^∞, равное нулю в окрестности диагонали, поэтому все существенные свойства таких ω будут одинаковы.

Воспользовавшись леммой 4 § 27, мы придем к выводу, что каждый из операторов Ω, Q и Q' определяет отображение, линейное и непрерывное (т. е. переводящее ограниченные множества в первом пространстве в ограниченные множества во втором) пространств $\mathcal{D}^p$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}^p$ и $\mathcal{E}$ соответственно в $\mathcal{D}^{p+1}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}^{p+1}$ и $\mathcal{E}$. Сопряженные (метрически или топологически) операторы определяют линейные непрерывные отображения пространств $\mathcal{D}'^{p+1}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'^{p+1}$ и $\mathcal{E}'$ соответственно в $\mathcal{D}'^p$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'^p$ и $\mathcal{E}'$. Мы можем, таким образом, сформулировать следующую лемму:

Лемма 2. *Операторы Ω, Q и Q' регулярны, и при любом целом $p \geqslant 0$ каждый из них осуществляет некоторое линейное непрерывное отображение пространств $\mathcal{D}^p$, $\mathcal{E}^p$, $\mathcal{D}'^{p+1}$ и $\mathcal{E}'^{p+1}$ соответственно в $\mathcal{D}^{p+1}$, $\mathcal{E}^{p+1}$, $\mathcal{D}'^p$ и $\mathcal{E}'^p$.*

Установим еще два важных соотношения между этими операторами.

Лемма 3. *Справедливы следующие формулы, в которых* 1 *означает тождественный оператор*:

$$\Omega\Delta = 1 - Q', \tag{I}$$

$$\Delta\Omega = 1 - Q. \tag{II}$$

Достаточно доказать формулу (I), так как формула (II) получится из (I) переходом к сопряженным операторам. Итак, требуется доказать, что для любой формы φ из $\mathcal{D}$

$$\Omega\Delta\varphi + Q'\varphi = \varphi.$$

Пусть Σ — поверхность геодезической сферы радиуса ε с центром в x, D_1 и D_2 — области, соответственно внутренняя и внешняя по отношению к этой сфере. Взятые с каноническими ориентациями, D_1 и D_2 представляют собой нечетные n-мерные цепи. Пусть Σ одновременно обозначает нечетную $(n-1)$-мерную цепь, равную границе цепи D_1 и границе цепи D_2, взятой с обратным знаком. Будем писать ω вместо $\omega(x, y)$ и φ вместо $\varphi(y)$ и применять операции d, δ, $*$ и $\int$ по переменному y.

По самому определению операторов Ω и Q',

$$\Omega\Delta\varphi(x)+Q'\varphi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_2}\omega\wedge*\Delta\varphi-\Delta\omega\wedge*\varphi.$$

Выражение под знаком $\int$, в котором операторы $*$ и Δ, так же, как $\int$, действуют по переменному y, преобразуется посредством формулы (3) § 25 (формулы Грина) в интеграл, распространенный на Σ, и все предыдущее выражение примет вид

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma}\varphi\wedge*d\omega-\delta\omega\wedge*\varphi+\delta\varphi\wedge*\omega-\omega\wedge*d\varphi.$$

Последние два слагаемых имеют порядок $O(r^{2-n})$, их интегралы стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$, и так как r постоянно на Σ, то

$$-\int_{\Sigma}\varphi\wedge*d\omega-\delta\omega\wedge*\varphi=-r^{-n}\int_{\Sigma}\varphi\wedge*r^n d\omega-r^n\delta\omega\wedge*\varphi.$$

Теперь под интегралом стоит форма, регулярная в D_1, поэтому можно применить формулу Стокса и преобразовать этот интеграл в интеграл, распространенный на D_1. Получим

$$-\varepsilon^{-n}\int_{D_1}w\varphi\wedge d(*r^n d\omega)-d(r^n\delta\omega)\wedge*\varphi+\ldots,$$

где не выписаны явно члены порядка $O(r)$, дающие в пределе нуль. Так как

$$w\varphi\wedge d*(r^n d\omega)=w\varphi\wedge**^{-1}d*(r^n d\omega)\doteq$$
$$\doteq*^{-1}d*(r^n d\omega)\wedge*w\varphi\doteq w*^{-1}d*(r^n d\omega)\wedge*\varphi=$$
$$=-\delta(r^n d\omega)\wedge*\varphi,$$

то

$$\Omega\Delta\varphi(x)+Q'\varphi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-n}\int_{D_1}[\delta(r^n d\omega)+d(r^n\delta\omega)]\wedge*\varphi.$$

Объем D_1 равен $\frac{s_n}{n}\varepsilon^n+O(\varepsilon^{n+2})$, и $r\leqslant\varepsilon$ в D_1, поэтому, не изменив предела, можно под знаком $\int$ опустить члены порядка $O(r)$. Посредством формулы (9) § 26 получим

$$\delta(r^n d\omega)+d(r^n\delta\omega)=nr^{n-1}(-dr\ \lrcorner\ d\omega+dr\wedge\delta\omega)+r^n\Delta\omega,$$

где последним слагаемым порядка $O(r^2)$ можно пренебречь. Далее,

$$(d\omega)_{k_1\ldots k_{p+1}}=\sum_{\nu=1}^{p+1}(-1)^{\nu-1}\nabla_{k_\nu}\omega_{k_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_{p+1}},$$

$$(dr\ \lrcorner\ d\omega)_{k_1\ldots k_p}=\nabla^i r\,.\,(d\omega)_{ik_1\ldots k_p}=$$

$$=\nabla^i r\,.\,\nabla_i\omega_{k_1\ldots k_p}+\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^\nu\nabla^i r\,.\,\nabla_{k_\nu}\omega_{ik_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p},$$

$$(\delta\omega)_{k_1\ldots k_{p-1}}=-\nabla^i\omega_{ik_1\ldots k_{p-1}},$$

$$(dr\wedge\delta\omega)_{k_1\ldots k_p}=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}\nabla_{k_\nu}r\,.\,(\delta\omega)_{k_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^\nu\nabla_{k_\nu}r\,.\,\nabla^i\omega_{ik_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p},$$

откуда вытекает равенство

$$(-dr\ \lrcorner\ d\omega+dr\ \lrcorner\ \delta\omega)_{k_1\ldots k_p}=-\nabla^i r\,.\,\nabla_i\omega_{k_1\ldots k_p}-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^\nu\nabla^i r\,.\,\nabla_{k_\nu}\omega_{ik_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^\nu\nabla_{k_\nu}r\,.\,\nabla^i\omega_{ik_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p}.$$

Так как $\omega=\dfrac{r^{2-n}}{s_n(n-2)}\alpha$, то

$$\nabla_i\omega_{k_1\ldots k_p}=-\frac{r^{1-n}}{s_n}\nabla_i r\,.\,\alpha_{k_1\ldots k_p}+O(r^{2-n}),$$

так что последние две суммы в предыдущем выражении имеют порядок $O(r^{2-n})$ и

$$(-dr\ \lrcorner\ d\omega+dr\ \lrcorner\ \delta\omega)_{k_1\ldots k_p}=\frac{r^{1-n}}{s_n}\nabla^i r\,.\,\nabla_i r\,.\,\alpha_{k_1\ldots k_p}+O(r^{2-n}),$$

откуда, так как $\nabla^i r\,\nabla_i r=1$,

$$\delta(r^n d\omega)+d(r^n\delta\omega)=\frac{n}{s_n}\alpha+O(r).$$

Отсюда, в силу (4), получим

$$[\delta(r^n d\omega)+d(r^n\delta\omega)]\wedge*\varphi=\frac{n}{s_n}\varphi(x)\,.\,*_y+O(r)$$

и

$$\Omega\Delta\varphi(x)+Q'\varphi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{n}{s_n}\,\varepsilon^{-n}\varphi(x)\int\limits_{D_1} *_y\,1=\varphi(x),$$

и на этом доказательство заканчивается.

§ 29. Регулярность гармонических потоков

Теорема 21. *В римановом пространстве V всякое множество потоков T, ограниченное в $\mathscr{D}'$ и удовлетворяющее тому условию, что множество ΔT ограничено в $\mathscr{E}$, само ограничено в $\mathscr{E}$.*

Говоря, что некоторое множество потоков ограничено в $\mathscr{E}$, мы прежде всего подразумеваем, что оно содержится в $\mathscr{E}$, т. е. что все потоки, принадлежащие этому множеству, равны некоторым формам класса C^∞.

Прежде чем доказывать эту теорему [1]), мы отметим два ее следствия.

Следствие 1. *Поток T, такой, что ΔT принадлежит к классу C^∞ в некоторой области $D\subset V$, в частности, всякий гармонический поток, сам относится к классу C^∞ в области D.*

В самом деле, достаточно применить теорему к риманову пространству D и множеству, состоящему из единственного потока.

Следствие 2. *Если последовательность потоков T_h $(h=1,\ 2,\ \ldots)$ такова, что при $h\to\infty$ $T_h\to 0$ в $\mathscr{D}'$ и $\Delta T_h\to 0$ в $\mathscr{E}$, то $T_h\to 0$ в $\mathscr{E}$.*

Действительно, согласно §§ 9 и 10, высказанные предположения влекут за собой существование такой последовательности чисел $m_h\to\infty$, для которой m_hT_h ограничено в $\mathscr{D}'$ и $m_h\Delta T_h=\Delta m_hT_h$ ограничено в $\mathscr{E}$. В силу теоремы 21, m_hT_h ограничено в $\mathscr{E}$, а это и означает, что $T_h\to 0$ в $\mathscr{E}$.

---

[1]) В связи с этой теоремой и ее следствиями см. Schwartz [2], стр. 136—143, de Rham [10], стр. 36—39 и 61. См. также Kodaira [2], стр. 608—626.

Доказательство теоремы 21 [1]). Пусть $\mathscr{B}$ — какое-нибудь множество потоков T, обладающее тем свойством, что ΔT образуют множество, ограниченное в $\mathscr{E}$. Тогда

А. *Если $\mathscr{B}$ ограничено в $\mathscr{D}'^{p+1}$, то $\mathscr{B}$ ограничено также в $\mathscr{D}'^{p}$.* Это следует прямо из формулы (I) леммы 3 § 28, которую можно записать в виде

$$T = \Omega\Delta T + Q'T,$$

и из леммы 2 § 28.

Так же доказывается

В. *Если $\mathscr{B}$ ограничено в $\mathscr{E}^p$, то $\mathscr{B}$ ограничено в $\mathscr{E}^{p+1}$.*

Докажем еще следующее предложение:

С. *Если множество $\mathscr{B}$ ограничено в $\mathscr{D}'^0$, то оно ограничено и в $\mathscr{E}^0$.*

Воспользуемся формулой

$$T = (1 + Q' + \ldots + Q'^{m-1})\,\Omega\Delta T + Q'^m T,$$

которая сводится к (I) при $m = 1$ и доказывается индукцией по m, причем во второе слагаемое справа подставляется выражение T из (I). Мы видим, что для доказательства С достаточно установить следующее: *если T остается ограниченным в $\mathscr{D}'^0$, то при достаточно большом m $Q'^m T$ ограничены в $\mathscr{E}^0$.*

Пусть $q_m(x, y)$ — метрическое ядро оператора Q^m. Тогда $q_1(x, y) = q(x, y)$ и

$$q_m(x, y) = \int\limits_z q(x, z) \wedge *_z\, q_{m-1}(z, y).$$

Метрическим ядром оператора Q'^m служит $q'_m(x, y) = q_m(y, x)$. Согласно лемме 2 § 27, если $2m - n < 0$, то $q_m(x, y) = O(r^{2m-n})$; если $2m - n = 0$, то $q_m(x, y) = O(r^{\varepsilon})$; если же $2m - n > 0$, то $q_m(x, y)$ всюду непрерывно (даже на диагонали).

Предположим, что $m > \frac{n}{2}$, так что $q_m(x, y)$ непрерывно. Топологическое ядро $L(x, y)$ оператора Q'^m, которое есть не что иное, как $*_x\, q_m(x, y)$, является, следова-

[1]) Идею приведенного здесь доказательства сообщил мне Л. Шварц.

тельно, непрерывной двойной формой. Если рассматривать ее как форму по переменному y, то ее коэффициенты представляют собой формы по переменному x, принадлежащие $\mathscr{D}^0$ и непрерывно зависящие от y; другими словами, они являются непрерывными функциями от y со значениями в $\mathscr{D}^0$. Если $T \in \mathscr{D}'^0$, то форму $Q'^m T(y)$ можно получить, применив T к коэффициентам. Таким образом, коэффициенты формы $Q'^m T(y)$ представляют собой непрерывные функции от y (с действительными значениями), притом ограниченные, когда y остается в окрестности какой-либо точки и T заключено в ограниченной части пространства $\mathscr{D}'^0$, а это как раз и надо было установить.

Рассмотрим теперь какое-нибудь множество потоков T, ограниченное в $\mathscr{D}'$ и обладающее тем свойством, что ΔT ограничено в $\mathscr{E}$. Мы хотим показать, что множество таких T ограничено в $\mathscr{E}$.

Пусть D — область с компактным замыканием $\bar{D}$, а φ — функция класса C^∞ с компактным носителем, тождественно равная 1 на D. Множество потоков φT ограничено в $\mathscr{E}'$, потому что множество самих T ограничено в $\mathscr{D}'$. В силу теоремы 8 § 10, это множество ограничено в $\mathscr{E}'^s$ при достаточно больших s. Отсюда следует, что множество потоков T, если их рассматривать только на множестве D, ограничено в $\mathscr{D}'^s_D$. Если мы рассмотрим риманово пространство D и s раз подряд применим предложение A, то мы придем к выводу, что это множество ограничено также в $\mathscr{D}'^0_D$. В силу предложения C, оно ограничено также в $\mathscr{E}^0_D$, а предложение B показывает, наконец, что оно ограничено в $\mathscr{E}^p_D$ при любом p, т. е. ограничено в $\mathscr{E}_D$. Отсюда следует, что множество потоков T ограничено в пространстве $\mathscr{E}$, что и требовалось.

Тот же метод применим и к другим дифференциальным операторам. Рассмотрим, например, оператор $\Delta + c$, где c — постоянная или некоторая функция класса C^∞. Формулу (I) в лемме 3 § 28 можно записать в виде

$$T = \Omega(\Delta + c)T + (Q' - \Omega c)T,$$

и, рассуждая так же, как и выше, мы покажем, что *если некоторое множество потоков T ограничено в $\mathscr{D}'$ и обладает тем свойством, что $(\Delta + c)T$ образуют мно-*

жество, ограниченное в $\mathscr{E}$, то исходное множество также ограничено в $\mathscr{E}$.

Так как множество T ограничено в $\mathscr{D}'$, то, предположив только, что множество $(\Delta+c)T$ ограничено в $\mathscr{E}^p$ $(\mathscr{D}'^{p+1})$, можно заключить, что множество T ограничено в $\mathscr{E}^{p+1}$ (соответственно в $\mathscr{D}'^{p}$).

§ 30. Локальное исследование уравнения $\Delta\mu=\beta$. Элементарное ядро

Поставим перед собой задачу *для заданной формы β на V найти форму μ, удовлетворяющую уравнению $\Delta\mu=\beta$ в области $D\subset V$*. Мы покажем, что *при достаточно малой D эта задача всегда разрешима* [1]).

Пусть f — характеристическая функция области D; обозначим Ω_1 и Q_1 операторы, получаемые умножением справа на Ω и Q оператора, действие которого сводится к умножению на f. Мы получим

$$\Omega_1\xi=\Omega(f\xi)=\int\limits_{y\in D}\omega(x,y)\wedge *\xi(y)$$

и аналогичное выражение для Q_1. Формула (II) леммы 3 § 28 влечет за собой равенство

$$\Delta\Omega_1\xi=f\xi-Q_1\xi.$$

Заметив это, мы сможем заключить, что $\mu=\Omega_1\xi$ удовлетворяет в области D уравнению $\Delta\mu=\beta$ тогда и только тогда, когда ξ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\xi-Q_1\xi=\beta.$$

Но, когда D достаточно мала, это последнее разрешимо методом Лиувилля — Неймана, основанном на тождестве

$$(1-Q_1)(1+Q_1+\ldots+Q_1^{m-1})=1-Q_1^m.$$

В самом деле, предположим, что D заключено в области определения некоторой системы координат, и обозначим

---

[1]) Идея примененного здесь метода принадлежит Леви (E. E. Levi [2]); см. de Rham [10], стр. 60—61. Существование элементарного ядра в случае аналитического риманова пространства доказал Кодаира (Kodaira [2], стр. 612—618) посредством метода, принадлежащего Адамару.

$|\varphi|$ верхнюю грань абсолютных величин коэффициентов формы φ на D. Мы получим неравенство вида $|Q_1\varphi|\leqslant k|\varphi|$, где k зависит от D, но не от φ. Когда область D достаточно мала, $k<1$. Отсюда вытекают неравенства $|Q_1^m\beta|\leqslant k^m|\beta|$, и ряд

$$\xi=\sum_{m=0}^{\infty}Q_1^m\beta$$

будет сходиться и представит некоторое решение рассматриваемого интегрального уравнения.

Пусть $q_m(x, y)$ — метрическое ядро оператора Q_1^m (в § 29 так же обозначалось метрическое ядро оператора Q^m). Назовем *элементарным ядром относительно оператора* Δ *и области* D метрическое ядро $\gamma(x, y)$ оператора

$$\Gamma=\sum_{0}^{\infty}\Omega_1Q_1^m,$$

который, будучи применен к β, дает решение $\mu=\Omega_1\xi$ уравнения $\Delta\mu=\beta$; в области $D\times D$ оно выражается в виде

$$\gamma(x, y)=\omega(x, y)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{z\in D}\omega(x, z)\wedge *_z q_m(z, y).$$

Следовательно, согласно лемме 6 § 27,

$$\gamma(x, y)=O(r^{2-n});$$

точнее, при $n>4$

$$\gamma(x, y)=\omega(x, y)+O(r^{4-n}).$$

Отсюда можно извлечь доказательство теоремы 21, несколько отличающееся от приведенного выше; мы ограничимся тем, что лишь укажем его идею.

Прежде всего, из приведенного здесь выражения $\gamma(x, y)$ с помощью лемм 4 и 6 § 27 можно заключить, что на $D\times D$, но вне диагонали, $\gamma(x, y)$ относится к классу C^∞. Далее, введя функцию $\sigma(x, y)$, определенную на $D\times D$ так, как в § 28 функция $\sigma(x, y)$ была определена на $V\times V$, мы покажем, что оператор Γ_1 с метрическим ядром

$$\gamma_1(x, y)=\sigma(x, y)\gamma(x, y)$$

и оператор Γ_1', метрически сопряженный с Γ_1, преобразуют любое множество, ограниченное в $\mathscr{E}_D$, в множество того же типа. Из того, что $\Delta\Gamma = 1$, следует, что $\Delta_x\gamma(x, y) = 0$ при $x \neq y$, и форма $\gamma_2(x, y)$, равная $\Delta_x\gamma_1(x, y)$ вне диагонали и нулю на диагонали, относится к классу C^∞ на $D \times D$. Если Γ_2 — оператор с метрическим ядром $\gamma_2(x, y)$, то $\Delta\Gamma_1 = 1 + \Gamma_2$, откуда $\Gamma_1'\Delta' = 1 + \Gamma_2'$. Ядро оператора Γ_2' относится к классу C^∞, поэтому Γ_2' является регуляризирующим оператором, а так как оператор Γ_1' регулярен, то из соотношения $T = \Gamma_1'\Delta T - \Gamma_2'T$ прямо следует, что, если T остается ограниченным в $\mathscr{D}_D'$, а ΔT — ограниченным в $\mathscr{E}_D$, то T остается ограниченным в $\mathscr{E}_D$.

В тех случаях, когда, как в эвклидовых пространствах, мы располагаем элементарными ядрами, заведомо обладающими всеми требуемыми свойствами, это доказательство, несомненно, короче того, которое было дано в § 29. Последнее, однако, обладает тем преимуществом, что оно не требует предварительного знакомства с элементарными ядрами.

§ 31. Уравнение $\Delta S = T$ на компактном пространстве. Операторы H и G

Пусть на римановом пространстве V задан некоторый поток T. Если существует поток S, удовлетворяющий уравнению $\Delta S = T$, то, в силу соотношений (2) § 25, для любой гармонической формы φ с компактным носителем

$$(T, \varphi) = (\Delta S, \varphi) = (S, \Delta\varphi) = 0.$$

Таким образом, для того, чтобы уравнение $\Delta S = T$ было разрешимо, необходимо, чтобы поток T был ортогонален всем гармоническим формам, обладающим компактными носителями. Мы покажем, что в случае компактного V это условие не только необходимо, но и достаточно [1]).

Гармоническая форма φ, удовлетворяя уравнению $\Delta\varphi = 0$, служит также решением уравнения $\Omega\Delta\varphi = 0$; по-

[1]) Следующее ниже доказательство основано на методе Леви (E. E. Levi [1]) и опубликовано в статье de Rham [8]. Другое доказательство, связанное с методом Гильберта (Hilbert [1]), читатель найдет в статье Bidal et de Rham [1].

следнее, в силу формулы (I) леммы 3 § 28, может быть записано в виде $\varphi - Q'\varphi = 0$. Пространство V предположено компактным, поэтому, согласно теории Фредгольма, решения этого уравнения образуют конечномерное векторное пространство E. Следовательно, гармонические формы образуют некоторое подпространство E' пространства E. Ортогональное дополнение подпространства E' в E обозначим E''.

Пусть требуется найти решение уравнения $\Delta\mu = \beta$, где β — заданная форма, ортогональная всем гармоническим формам. Положив, так же, как в § 30, $\mu = \Omega\xi$, мы придем к интегральному уравнению $\xi - Q\xi = \beta$. Согласно теории Фредгольма [1]), это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда β ортогональна всем решениям однородного уравнения $\varphi - Q'\varphi = 0$, т. е. ортогональна пространству E. Мы же предположили только, что β ортогональна подпространству E'. Тем не менее, дифференциальное уравнение $\Delta\mu = \beta$ может быть решено следующим образом.

Если $\Phi_1 \in E''$ и $\Phi_1 \neq 0$, то $\Delta\Phi_1 \neq 0$ и $(\Delta^2\Phi_1, \Phi)$ не может обращаться в нуль при любом $\Phi \in E''$, так как, в силу равенств (2) § 25,

$$(\Delta^2\Phi_1, \Phi_1) = (\Delta\Phi_1, \Delta\Phi_1) \neq 0.$$

Отображение $\Phi_1 \to (\Delta^2\Phi_1, \Phi)$, ставящее в соответствие форме Φ_1 линейную функцию $(\Delta^2\Phi_1, \Phi)$ от Φ, является, таким образом, *изоморфным* отображением пространства E'' на его дуальное пространство. Следовательно, существует форма $\Phi_1 \in E''$, такая, что $(\Delta^2\Phi_1, \Phi) = (\beta, \Phi)$ при любой $\Phi \in E''$. Тогда форма $\beta - \Delta^2\Phi_1$ ортогональна E''; в то же время она ортогональна и E', так как этим свойством обладают β и $\Delta^2\Phi_1$. Следовательно, она ортогональна пространству E, так что интегральное уравнение $\xi - Q\xi = \beta - \Delta^2\Phi_1$ имеет решение ξ. При этом форма $\mu = \Omega\xi + \Delta\Phi_1$ удовлетворяет уравнению $\Delta\mu = \beta$. Итак, мы можем сформулировать следующую теорему:

---

[1]) Первоначальное доказательство Фредгольма применимо к уравнениям рассматриваемого типа, в которых неизвестным является дифференциальная форма на компактном пространстве (см. de Rham [7], Приложение). Применимы, разумеется, и доказательства, опирающиеся на понятие полной непрерывности.

Теорема 22. *На компактном римановом пространстве существует лишь конечное число линейно независимых гармонических форм, и уравнение $\Delta\mu = \beta$ разрешимо тогда и только тогда, когда β ортогональна всем гармоническим формам.*

Если гармоническая форма h_1 отлична от нуля, то (h_1, h) не может обращаться в нуль при любом выборе гармонической формы h, так как $(h_1, h_1) \neq 0$. Таким образом, отображение $h_1 \to (h_1, h)$ представляет собой изоморфизм векторного пространства гармонических форм на его дуальное пространство. Следовательно, *любому потоку T соответствует вполне определенная гармоническая форма, которую мы обозначим HT и назовем гармонической составляющей потока T, обладающая тем свойством, что $(HT, h) = (T, h)$, какова бы ни была гармоническая форма h.*

Оператор H, так определенный, *ортогонален d и δ и перестановочен с оператором $*$:*

$$dH = Hd = 0, \quad \delta H = H\delta = 0, \quad *H = H*.$$

Действительно, согласно теореме 20, форма HT, будучи гармонической, замкнута и козамкнута, поэтому $dHT = \delta HT = 0$, а в силу соотношений (2) § 25, dT и δT ортогональны любым гармоническим формам, следовательно, $H\,dT = H\,\delta T = 0$. Далее, так как форма $*h$ — гармоническая одновременно с h, то $*HT$ — гармоническая форма и $*T - *HT$ ортогонально любой гармонической форме, поскольку $(*T - *HT, *h) = (T - HT, h) = 0$; отсюда следует, что $*HT$ представляет собой гармоническую составляющую потока $*T$, т. е. $*HT = H*T$.

Оператор H метрически сопряжен самому себе, так как $(H\alpha, \beta) = (H\alpha, H\beta) = (\alpha, H\beta)$; в то же время, будучи перестановочен с $*$, *H топологически сопряжен самому себе.*

Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_s$ — ортогональный базис векторного пространства гармонических форм, так что $(h_i, h_j) = \delta^i_j$; положим

$$h(x, y) = \sum_i h_i(x)\, h_i(y).$$

Тогда гармоническая форма

$$\int\limits_y h(x, y) \wedge *_y T(y) = \sum_i (h_i, T)\, h_i(x)$$

представляет собой не что иное, как HT. Таким образом, двойная форма $h(x, y)$ *служит метрическим ядром оператора* H.

Если φ — форма класса C^∞, то уравнение $\Delta\mu = \varphi - H\varphi$ всегда разрешимо. Ясно, что его решение определяется однозначно с точностью до произвольного гармонического слагаемого. Следовательно, существует решение этого уравнения, притом единственное, ортогональное всем гармоническим формам; обозначим это решение $G\varphi$.

Так определенный оператор G удовлетворяет соотношениям

$$\Delta G\varphi = \varphi - H\varphi, \qquad HG\varphi = 0,$$

где φ — произвольная форма класса C^∞, и эти соотношения характеризуют оператор G. Согласно следствию 1 теоремы 21, $G\varphi$ относится к классу C^∞ в любой области, в которой этим свойством обладает φ.

Ясно, что $GH\varphi = 0$. Далее, *оператор G перестановочен с d*. В самом деле, так как $d\Delta = \Delta d$, то уравнениям

$$\Delta\mu = d\varphi, \qquad H\mu = 0$$

удовлетворяет форма $\mu = dG\varphi$. Но, по самому определению G, им удовлетворяет только форма $\mu = Gd\varphi$. Следовательно, $dG\varphi = Gd\varphi$. Так же можно убедиться в том, что

$$Gd = dG, \quad G\delta = \delta G, \quad G* = *G.$$

Отсюда следует, что G перестановочно с Δ: $G\Delta = \Delta G$.

Наконец, перейдя к метрически сопряженным операторам в равенствах $G\Delta = 1 - H$ и $GH = 0$, мы получим $\Delta G' = 1 - H$ и $HG' = 0$, откуда следует, что $G' = G$: так же, как H и Δ, G сопряжен сам себе метрически и топологически.

Согласно теории Фредгольма, решение интегрального уравнения $\xi - Q\xi = \alpha$ может быть представлено в виде $\xi = \alpha - P\alpha$, где P — оператор, метрическое ядро которого представляет собой двойную форму $p(x, y)$ класса C^∞ при $x \neq y$ и порядка $O(r^{2-n})$, так же, как $q(x, y)$. Точнее говоря, $\xi = \alpha - P\alpha$ удовлетворяет уравнению $\xi - Q\xi = \alpha$ всякий раз, когда последнее разрешимо, т. е. когда α ортогонально пространству E, образованному решениями уравнения $\varphi - Q'\varphi = 0$, но $P\alpha$ определено и для форм, не удовлетворяющих этому условию.

Пусть F — оператор, ставящий в соответствие произвольной форме β форму $F\beta = \Delta\Phi_1$, такую, что $\Phi_1 \in E''$ и $(\Delta^2\Phi_1, \Phi) = (\beta, \Phi)$ при всех $\Phi \in E''$. Нетрудно найти ядро оператора F. Формы вида $\Delta\Phi$, где $\Phi \in E''$, образуют векторное пространство такого же числа измерений, что и E'', так как из $\Delta\Phi = 0$ следует $\Phi = 0$, в силу ортогональности пространства E'' гармоническим формам. Выделим в E'' базис $f_1, \ldots, f_r$, такой, что $(\Delta f_i, \Delta f_j) = \delta^i_j$. Если положить $\Phi_1 = \sum c_i f_i$, то коэффициенты c_i определятся уравнениями $(\Delta^2\Phi_1, f_j) = (\beta, f_j)$ или $(\Delta\Phi_1, \Delta f_j) = (\beta, f_j)$, что сводится к $c_j = (\beta, f_j)$. Таким образом,

$$\Phi_1(x) = \int\limits_y \sum f_i(x) f_i(y) \wedge *\beta(y),$$

и ядром оператора F является

$$f(x, y) = \sum \Delta_x f_i(x) f_i(y).$$

Вернемся к уравнению $\Delta\mu = \varphi - H\varphi$. Метод отыскания его решения состоит в следующем: положив $\mu = \Omega\xi + F\varphi$, мы получим для ξ интегральное уравнение

$$\xi - Q\xi = \varphi - H\varphi - \Delta F\varphi,$$

решением которого является

$$\varphi - H\varphi - \Delta F\varphi - P\varphi + PH\varphi + P\Delta F\varphi;$$

последнее можно записать в виде $\varphi - K\varphi$, где K — оператор, метрическое ядро которого $k(x, y)$, очевидно, относится к классу C^∞ при $x \neq y$ и имеет порядок $O(r^{2-n})$, так же, как $p(x, y)$. Тогда

$$\mu = \Omega\varphi - \Omega K\varphi + F\varphi$$

и

$$G\varphi = \mu - H\mu = \Omega\varphi - (\Omega K - F + H\Omega - H\Omega K + HF)\varphi.$$

Мы видим, что если $g(x, y)$ — метрическое ядро оператора G, то оно представляется в виде $g(x, y)=\omega(x, y)+O(r^{4-n})$ и относится к классу C^∞ при $x \neq y$. Таким образом, ядро $g(x, y)$ имеет существенно ту же особенность при $x=y$, что $\omega(x, y)$.

Отсюда вытекает следствие, которое, впрочем, можно было бы вывести прямо из теоремы 21 (с помощью замечания в конце § 29): если φ, изменяясь, остается ограничено в $\mathscr{D}^p$, то $G\varphi$ ограничено в $\mathscr{D}^{p+1}$. Так как G метрически сопряжен самому себе, то GT определяется для любого потока T равенством

$$(GT, \varphi)=(T, G\varphi),$$

и мы видим, что если T обладает непрерывностью порядка $p+1$, то GT обладает непрерывностью порядка p. Итак, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 23. *В пространстве форм на компактном римановом пространстве существуют линейные операторы H и G, удовлетворяющие следующим соотношениям:*

$$dH=Hd=0, \quad \delta H=H\delta=0, \quad *H=H*, \quad H^2=H,$$
$$dG=Gd, \quad \delta G=G\delta, \quad *G=G*, \quad GH=HG=0,$$
$$\Delta G=G\Delta=1-H.$$

Каждый из этих операторов совпадает со своим метрически сопряженным и со своим топологически сопряженным.

Ядро $h(x, y)$ оператора H относится к классу C^∞, ядро $g(x, y)$ оператора G относится к классу C^∞ при $x \neq y$ и имеет порядок $O(r^{2-n})$; если поток T обладает непрерывностью порядка $p+1$, то GT представляет собой поток, обладающий непрерывностью порядка p.

Ядро $g(x, y)$ оператора G называется формой Грина.

Следствие 1. *Любой поток на римановом пространстве может быть представлен, притом единственным образом, в виде суммы потока, гомологичного нулю, потока, когомологичного нулю, и гармонической формы.*

Такое разложение

$$T=d\delta GT+\delta dGT+HT$$

вытекает непосредственно из соотношения $\Delta GT = T - HT$. Для того, чтобы доказать единственность, допустим, что

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T_1 гомологичен нулю, T_2 когомологичен нулю и T_3 гармоничен. Для любой формы φ

$$\varphi = d\delta G\varphi + \delta dG\varphi + H\varphi;$$

так как T_1 ортогонален козамкнутым формам, то, в силу формулы (1) § 25, $(T_1, \varphi) = (T_1, d\delta G\varphi)$; T_2 и T_3 ортогональны формам, гомологичным нулю, поэтому $(T_1, d\delta G\varphi) = (T, d\delta G\varphi)$; наконец, так как $(T, d\delta G\varphi) = (Gd\delta T, \varphi)$, то $(T_1, \varphi) = (Gd\delta T, \varphi)$, какова бы ни была φ, откуда следует, что $T_1 = Gd\delta T = d\delta GT$. Подобным же образом получим $T_2 = \delta dGT$ и $T_3 = HT$, чем и доказывается единственность разложения.

Следствие 2. *На компактном римановом пространстве любой замкнутый поток гомологичен некоторой гармонической форме; последняя однозначно определяется заданием потока.*

В самом деле, когда поток T замкнут, формула разложения сводится к $T = d\delta GT + HT$, и мы видим, что T гомологичен HT. Единственность является следствием того, что гомологичная нулю гармоническая форма, будучи ортогональна самой себе, равна нулю.

Таким образом, мы доказали, что векторное пространство гомологий компактного пространства изоморфно векторному пространству гармонических форм. Отсюда и из теоремы 22 следует, что это — конечномерное пространство; заметим, что это доказательство не зависит от того, которое было приведено в гл. IV. Отсюда получается также новое доказательство теоремы 17 (теоремы двойственности) для случая компактного пространства. В самом деле, если поток T замкнут и если $T \wedge S[1] = 0$ для любого замкнутого потока S, то, положив $S = {*HT}$, мы получим $(T, HT) = 0$ или $(HT, HT) = 0$, откуда $HT = 0$, и формула разложения сводится к $T = d\delta GT$ и показывает, что T гомологичен нулю.

Следствие 3. *На компактном римановом пространстве любой поток T, гомологичный нулю, ограничивает* *некоторый поток, когомологичный нулю, притом единственный. Последний принадлежит к классу C^∞ в любой области, где T принадлежит к классу C^∞.*

В самом деле, если T гомологичен нулю, то $dT = HT = 0$ и

$$T = d\delta GT = b\delta\omega GT,$$

так что T ограничивает поток $\delta\omega GT$, когомологичный нулю и относящийся, как и GT, к классу C^∞ в любой области, где этим свойством обладает T. Единственность является непосредственным следствием того, что поток, замкнутый и когомологичный нулю, сводится к нулю.

Из следствий 2 и 3 вытекает теорема 14 для компактных многообразий, так что и для нее мы получили новое доказательство (применимое, впрочем, лишь в случае компактного многообразия).

Назовем *периодом* замкнутой формы α относительно какого-либо цикла c значение интеграла $\int\limits_c \alpha = c[\alpha]$.

Следствие 4 (теорема Ходжа)[1]. *На компактном пространстве существует гармоническая форма, имеющая произвольные наперед заданные периоды относительно заданных циклов, никакая линейная комбинация которых не гомологична нулю.*

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_s$ — заданная система циклов, никакая линейная комбинация которых не гомологична нулю. Тогда $Hc_1, Hc_2, \ldots, Hc_s$ линейно независимы, и можно найти гармоническую форму h, удовлетворяющую условиям $(Hc_i, h) = p_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, где p_i — произвольные задан-

[1]) Доказательство этой теоремы намечено в статьях Hodge [1], [2], но полностью проведено впервые в его статье [3] (см. также [4]) и у Вейля (Weyl [2]); в этом доказательстве также используется параметрикс, но иначе, чем у нас. Доказательство, принадлежащее Кодаира (Kodaira [1], [2]), основано на методе ортогонального проектирования, изложенном ниже. Мильграму и Розенблюму (Milgram and Rosenbloom [1]) принадлежит другой метод, в котором используется уравнение $\Delta\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0$, аналогичное уравнению теплопроводности.

ные числа. При этом $*h$ будет гармонической формой, и для нее

$$\int_{c_i} *h = (c_i, h) = (Hc_i, h) = p_i.$$

§ 32. Формула разложения в некомпактном пространстве

Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{D}$ форм класса C^∞ с компактными носителями в римановом пространстве V, которое теперь не предполагается компактным. *Расстоянием в среднем*[1]) между формами α и β, принадлежащими $\mathcal{D}$, называется неотрицательное число

$$d(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta, \alpha - \beta)^{1/2}.$$

Расстояние в среднем подчиняется неравенству Коши — Шварца

$$|(\alpha, \beta)| \leqslant d(\alpha, 0)\, d(\beta, 0)$$

и неравенству треугольника

$$d(\alpha, \beta) \leqslant d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta).$$

Последовательность форм $\omega_h \in \mathcal{D}$ ($h = 1, 2, \ldots$) называется *сходящейся в среднем*, если она представляет собой последовательность Коши относительно расстояния в среднем, т. е. если

$$\lim_{m, k \to \infty} d(\omega_m, \omega_k) = 0.$$

Поток T называется *непрерывным в среднем*, если $(T, \varphi) \to 0$, когда $(\varphi, \varphi) \to 0$ и $\varphi \in \mathcal{D}$.

Предложение 1. *Если последовательность форм $\omega_h \in \mathcal{D}$ сходится в среднем, то она сходится в $\mathcal{D}'$ к некоторому непрерывному в среднем потоку T, причем сходимость $(\omega_h, \varphi) \to (T, \varphi)$ равномерна на любом множестве форм $\varphi \in \mathcal{D}$, на котором (φ, φ) ограничено.*

---

[1]) В начале этого параграфа напоминаются хорошо известные понятия. Подробности читатель найдет в прекрасных «Лекциях» Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надь [1].

Заметим сначала, что если последовательность форм ω_h сходится в среднем, то (ω_h, ω_h) ограничено. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $m \geqslant N$ и $k \geqslant N$

$$d(\omega_m, \omega_k) \leqslant \varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника, при $m \geqslant N$

$$d(\omega_m, 0) \leqslant d(\omega_m, \omega_N) + d(\omega_N, 0) \leqslant \varepsilon + d(\omega_N, 0),$$

откуда следует, что расстояния $d(\omega_h, 0) = (\omega_h, \omega_h)^{1/2}$ ограничены. Их верхнюю грань обозначим M.

Согласно неравенству Коши — Шварца,

$$|(\omega_m, \varphi) - (\omega_k, \varphi)| = |(\omega_m - \omega_k, \varphi)| \leqslant d(\omega_m, \omega_k)\, d(\varphi, 0),$$

откуда следует, что (ω_h, φ) при $h \to \infty$ сходится равномерно на любом множестве форм φ, для которого $d(\varphi, 0)$ ограничено. Таким образом, последовательность форм ω_h сходится в пространстве $\mathscr{D}'$, и предельный поток T, определенный равенством

$$(T, \varphi) = \lim_{h \to \infty} (\omega_h, \varphi),$$

непрерывен в среднем, так как

$$|(\omega_h, \varphi)| \leqslant d(\varphi, 0)\, d(\omega_h, 0) \leqslant M d(\varphi, 0),$$

откуда вытекает, что

$$|(T, \varphi)| \leqslant M d(\varphi, 0).$$

При этом мы будем говорить, что *последовательность* ω_h *сходится в среднем к* T.

Всякий поток, являющийся пределом сходящейся в среднем последовательности форм из $\mathscr{D}$, мы назовем *потоком с суммируемым квадратом*. Мы доказали, что такой поток непрерывен в среднем. В дальнейшем мы покажем, что, наоборот, всякий поток, непрерывный в среднем, является потоком с суммируемым квадратом.

Потоки с суммируемыми квадратами образуют, очевидно, векторное пространство, так как если φ_h и φ'_h сходятся в среднем соответственно к T и T', то $a\varphi_h + b\varphi'_h$ сходится в среднем к $aT + bT'$. Это пространство мы обозначим $\overline{\mathscr{D}}$.

Если поток S непрерывен в среднем и φ_h сходится в среднем к T, то, так как при $m, k \to \infty$

$$(S, \varphi_m) - (S, \varphi_k) = (S, \varphi_m - \varphi_k) \to 0,$$

последовательность (S, φ_h) имеет предел, который мы обозначим (S, T):

$$(S, T) = \lim_{h \to \infty} (S, \varphi_h);$$

ясно, что этот предел зависит только от S и T.

Таким образом, (S, T) определено, в частности, тогда, когда S и T — потоки с суммируемыми квадратами. Мы можем определить расстояние в среднем между такими потоками, положив $d(S, T) = (S - T,\ S - T)^{1/2}$. Неравенства треугольника и Коши — Шварца распространяются на этот случай простым переходом к пределу.

Мы покажем, что φ_h *сходятся в среднем к потоку* T *с суммируемым квадратом тогда и только тогда, когда* $d(\varphi_h, T) \to 0$.

Это условие необходимо, так как если φ_h при $h \to \infty$ сходится в среднем к T, то $(\varphi_h - T, \varphi_m) \to 0$ равномерно относительно m, поэтому $(\varphi_h - T, \varphi_h) \to 0$ и $(\varphi_h - T, T) \to 0$, откуда $(\varphi_h - T, \varphi_h - T) \to 0$.

В то же время это условие достаточно, так как если $d(\varphi_h, T) \to 0$, то, в силу неравенств треугольника и Коши — Шварца,

$$\lim_{m, k \to \infty} d(\varphi_m, \varphi_k) = 0$$

и

$$|(\varphi_h, \varphi) - (T, \varphi)| = |(\varphi_h - T, \varphi)| \leqslant d(\varphi_h, T)\, d(\varphi, 0) \to 0,$$

так что φ_h сходятся в среднем к T.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пространство* $\overline{\mathscr{D}}$ *с метрикой, которую определяет в нем расстояние в среднем, полно.*

Мы должны показать, что, если $T_h \in \overline{\mathscr{D}}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ и $d(T_m, T_k) \to 0$ при $m, k \to 0$, то существует поток $T \in \overline{\mathscr{D}}$, такой, что $d(T_h, T) \to 0$ при $h \to \infty$. При этом мы скажем, что последовательность потоков T_h сходится в среднем к T.

Для любого h существует форма $\varphi_h \in \mathscr{D}$, такая, что $d(T_h, \varphi_h) < h^{-1}$. В силу неравенства треугольника,

$$d(\varphi_m, \varphi_k) \leqslant d(T_m, \varphi_m) + d(T_m, T_k) + d(T_k, \varphi_k),$$

откуда

$$d(\varphi_m, \varphi_k) \leqslant \frac{1}{m} + d(T_m, T_k) + \frac{1}{k} \longrightarrow 0$$

при $m, k \longrightarrow \infty$. Таким образом, последовательность φ_h сходится в среднем. Если T — ее предел, то

$$d(T_h, T) \leqslant d(T_h, \varphi_h) + d(T, \varphi_h) \leqslant \frac{1}{h} + d(T, \varphi_h),$$

откуда $d(T_h, T) \longrightarrow 0$, и наше предложение доказано.

Таким образом, $\overline{\mathscr{D}}$ представляет собой действительное *гильбертово пространство*. Так называют любое векторное пространство над полем действительных чисел, в котором определена билинейная функция (S, T), такая, что $(T, T) > 0$ при $T \neq 0$, если это пространство полно относительно метрики, определяемой расстоянием $d(S, T) = (S-T, S-T)^{1/2}$. Отметим одно из свойств пространства $\overline{\mathscr{D}}$, которое в дальнейшем будет играть основную роль.

Предложение 3. *Если E — какое-нибудь замкнутое векторное подпространство пространства $\overline{\mathscr{D}}$, а E' — подпространство, образованное всеми векторами, ортогональными к E, то $\overline{\mathscr{D}} = E + E'$.*

Это означает, что для любого $T \in \overline{\mathscr{D}}$ существует такое $T_1 \in E$, что $(T - T_1, S) = 0$ при любом $S \in E$. Положив $T_2 = T - T_1$, мы получим $T_2 \in E'$ и $T = T_1 + T_2$.

В самом деле, зафиксируем какое-либо $T \in \overline{\mathscr{D}}$ и возьмем нижнюю грань m расстояний $d(S, T)$ для $S \in E$. Покажем, что эта нижняя грань достигается. Существует последовательность $S_h \in E$ $(h = 1, 2, \ldots)$, такая, что $d(S_h, T) \longrightarrow m$ при $h \longrightarrow \infty$. Прямая, проходящая через S_h и S_k, лежит в E и содержит точку S_{hk}, находящуюся на минимальном расстоянии m_{hk} от T. При этом $m_{hk} \geqslant m$ и $(S_h - S_{hk}, T) = 0$, так как S_{hk} служит основанием перпендикуляра, опущенного из точки T на рассматриваемую прямую. Треугольник с вершинами T, S_h и S_{hk} —

прямоугольный с прямым углом при S_{hk}, поэтому

$$d^2(S_h, S_{hk}) = d^2(S_h, T) - m_{hk}^2 \leqslant d^2(S_h, T) - m^2.$$

Отсюда и из подобного же неравенства для $d(S_k, S_{hk})$ мы получим

$$d(S_h, S_k) \leqslant \sqrt{d^2(S_h, T) - m^2} + \sqrt{d^2(S_k, T) - m^2}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $h, k \to \infty$, поэтому последовательность сходится в среднем к некоторому потоку T_1; последний принадлежит подпространству E, так как E замкнуто, и мы имеем $d(S_h, T_1) \to 0$ и $d(T_1, T) = m$.

Ясно, что $(T - T_1, S) = 0$ для любого $S \in E$, так как при действительном λ расстояние $d(T, T_1 + \lambda S)$ принимает свое наименьшее значение, когда $\lambda = 0$, так что треугольник с вершинами T, T_1 и $T_1 + S$ — прямоугольный с прямым углом при вершине T_1.

Следствие. *Всякий непрерывный в среднем поток является потоком с интегрируемым квадратом.*

В самом деле, если поток S непрерывен в среднем, то подпространство E пространства $\overline{\mathcal{D}}$, образованное теми $T \in \overline{\mathcal{D}}$, для которых $(S, T) = 0$, замкнуто. Последнее при $S \neq 0$ имеет одномерное ортогональное дополнение E'. Возьмем в E' базис T_0, такой, что $(T_0, T_0) = (S, T_0)$. Выбрав произвольно $\varphi \in \mathcal{D}$ и положив $a = (T_0, \varphi)/(T_0, T_0)$, мы получим $\varphi - aT_0 \in E$, откуда

$$(S, \varphi) = a(S, T_0), \qquad (T_0, \varphi) = a(T_0, T_0),$$

и, следовательно, $(S, \varphi) = (T_0, \varphi)$, так что S оказывается равным потоку T_0 с суммируемым квадратом.

Это следствие выражает классическую теорему, которая утверждает, что гильбертово пространство изоморфно своему дуальному пространству.

Выбор термина «с суммируемым квадратом» в применении к потокам оправдывается теоремой Ф. Рисса и Фишера, согласно которой потоки с суммируемыми квадратами оказываются равными тем формам, для которых интеграл (α, α) существует в смысле Лебега. Впрочем, эта теорема нам здесь не понадобится, и мы ограничимся тем, что установим следующее предложение:

Форма f с непрерывными коэффициентами тогда и только тогда равна некоторому потоку с суммируемым квадратом, когда сходится интеграл $\int f \wedge *f$; при этом

$$(f, f) = \int f \wedge *f.$$

Допустим, что f представляет некоторый поток с суммируемым квадратом. Тогда существует последовательность форм $f_h \in \mathcal{D}$ $(h = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся в среднем к f,

$$\lim_{m,\, k \to \infty} d(f_m, f_k) = 0, \quad \lim_{m \to \infty} d(f_m, f) = 0.$$

Пусть $1 = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i$ — разбиение единицы, удовлетворяющее условиям теоремы 1. Положив $\Phi_h = \sum_{j=1}^{h} \varphi_j$, получим

$$0 \leqslant \Phi_h \leqslant 1,$$

откуда

$$d(\Phi_h f_m, \Phi_h f_k) \leqslant d(f_m, f_k);$$

мы видим, что $\Phi_h f_m$ при $m \to \infty$ сходится в среднем к $\Phi_h f$ равномерно относительно h. Так как $\Phi_h f_m$ сходится в среднем к f_m при $h \to \infty$, то $\Phi_h f$ сходится в среднем к f и $(\Phi_h f, f) \to (f, f)$ при $h \to \infty$, а это и означает, что интеграл $\int f \wedge *f$ сходится и равняется (f, f).

Обратно, если $\int f \wedge *f$ сходится, то $(\Phi_m f, f) \to \int f \wedge *f$ при $m \to \infty$ и

$$\lim_{m,\, k \to \infty} (\Phi_m f - \Phi_k f, f) = 0.$$

Предположив для определенности, что $m > k$, получим неравенства

$$0 \leqslant (\Phi_m - \Phi_k)^2 \leqslant \Phi_m - \Phi_k$$

и

$$0 \leqslant (\Phi_m f - \Phi_k f, \Phi_m f - \Phi_k f) \leqslant (\Phi_m f - \Phi_k f, f),$$

откуда вытекает, что $\Phi_m f$ сходится в среднем, следовательно, f суммируема с квадратом и $(f, f) = \lim_{m\to\infty} (\Phi_m f, f) = \int f \wedge *f$.

Напомнив эти понятия, рассмотрим подпространства $\mathscr{D}_1$ и $\mathscr{D}_2$ пространства $\mathscr{D}$, состоящие из форм, соответственно компактно гомологичных нулю и компактно когомологичных нулю. Пусть $\overline{\mathscr{D}}_1$ и $\overline{\mathscr{D}}_2$ – их замыкания в $\overline{\mathscr{D}}$.

Формы, принадлежащие $\mathscr{D}_1$, являются дифференциалами форм, принадлежащих $\mathscr{D}$. Из теоремы 17′ (§ 22) вытекает непосредственно, что предел в $\mathscr{D}'$ последовательности потоков, гомологичных нулю, представляет собой поток, гомологичный нулю. Следовательно, *потоки, принадлежащие* $\overline{\mathscr{D}}_1$, *гомологичны нулю*. Таким же образом, формы, принадлежащие $\mathscr{D}_2$, являются кодифференциалами форм из $\mathscr{D}$, и *потоки, принадлежащие* $\overline{\mathscr{D}}_2$, *когомологичны нулю.*

Формулы (1) § 25 показывают, что поток T замкнут тогда и только тогда, когда он ортогонален $\mathscr{D}_2$, и козамкнут тогда и только тогда, когда он ортогонален $\mathscr{D}_1$. Отсюда следует, что $\overline{\mathscr{D}}_1$ *и* $\overline{\mathscr{D}}_2$ *взаимно ортогональны и ортогональное дополнение* $\mathscr{D}_3$ *в* $\overline{\mathscr{D}}$ *подпространства* $\overline{\mathscr{D}}_1 + \overline{\mathscr{D}}_2$ *состоит из потоков с суммируемыми квадратами, одновременно замкнутых и козамкнутых*, т. е. гармонических и принадлежащих к классу C^∞.

Заметим, что $\mathscr{D}_3$, вообще говоря, не содержится в $\mathscr{D}$, так как носители форм, принадлежащих $\mathscr{D}_3$, вообще говоря, некомпактны.

Теорема 24. (Кодаира)[1]. *В римановом пространстве V всякий поток α с суммируемым квадратом представляется, и притом единственным образом, в виде суммы трех потоков,*

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

таких, что $\alpha_1 \in \overline{\mathscr{D}}_1$, $\alpha_2 \in \overline{\mathscr{D}}_2$ *и* $\alpha_3 \in \mathscr{D}_3$. *При этом α_1 — поток класса C^∞ в любой области, где $\delta\alpha$ относится к классу C^∞,*

[1]) Kodaira [2]. В связи с методом доказательства см. Weyl [1].

α_2 — поток класса C^∞ в любой области, где $d\alpha$ относится к классу C^∞, и α_3 принадлежит к классу C^∞ всюду.

Существование такого разложения и его единственность следуют непосредственно из предшествующих замечаний и из предложения 3. Второе утверждение вытекает из следствия 1 теоремы 21, если заметить, что $\Delta\alpha_1 = d\delta\alpha$, $\Delta\alpha_2 = \delta d\alpha$ и $\Delta\alpha_3 = 0$, когда $d\alpha_1 = d\alpha_3 = \delta\alpha_2 = \delta\alpha_3 = 0$.

Обозначим H_1, H_2 и H_3 проекционные операторы, проектирующие $\overline{\mathscr{D}}$ ортогонально на $\overline{\mathscr{D}}_1$, $\overline{\mathscr{D}}_2$ и $\overline{\mathscr{D}}_3$ соответственно, так что $\alpha_i = H_i\alpha$ $(i = 1, 2, 3)$. В том случае, когда V компактно, согласно следствию 1 из теоремы 23,

$$H_1 = d\delta G, \quad H_2 = \delta dG, \quad H_3 = H.$$

Предложение 4. *Если α изменяется в $\overline{\mathscr{D}}$, оставаясь принадлежащей к классу C^∞ в некоторой области $D \subset V$ и локально ограниченной в D, и если (α, α) ограничено, то $H_i\alpha$ принадлежат к классу C^∞ в области D и локально ограничены в D и $(H_i\alpha, H_i\alpha)$ ограничено $(i = 1, 2, 3)$.*

Последнее утверждение очевидно, так как

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{3} (H_i\alpha, H_i\alpha)$$

и

$$(H_i\alpha, H_i\alpha) \leqslant (\alpha, \alpha).$$

Заметим, далее, что если (α, α) ограничено, то $H_i\alpha$ остается ограниченным в $\mathscr{D}'$, так как $H_i\alpha[\varphi] = (*H_i\alpha, \varphi)$ и

$$(*H_i\alpha, \varphi)^2 \leqslant (H_i\alpha, H_i\alpha)(\varphi, \varphi) \leqslant (\alpha, \alpha)(\varphi, \varphi),$$

где $(\alpha, \alpha)(\varphi, \varphi)$, очевидно, ограничено, когда φ ограничена в $\mathscr{D}$. Теперь остается применить теорему 21 к риманову пространству D, так как если α локально ограничена в $\mathscr{D}$, то, в силу равенств $\Delta H_1\alpha = d\delta\alpha$, $\Delta H_2\alpha = \delta d\alpha$ и $\Delta H_3\alpha = 0$, и $H_i\alpha$ локально ограничены в D.

Каждый из операторов H_i совпадает со своим метрически сопряженным, так как $(H_i\alpha, \beta) = (H_i\alpha, H_i\beta) = (\alpha, H_i\beta)$. С другой стороны, если $\varphi \in \overline{\mathscr{D}}_1$, то $*\varphi \in \overline{\mathscr{D}}_2$, и обратно. Следовательно, если $T \in \overline{\mathscr{D}}_1$, то $*T \in \overline{\mathscr{D}}_2$, и обратно.

Помножив тождество $1 = H_1 + H_2 + H_3$ на $*$, один раз справа, другой раз слева, и приравняв правые части, получим

$$*H_1 = H_2*, \quad H_1* = *H_2, \quad *H_3 = H_3*.$$

Таким образом, H_1 и H_2 топологически сопряжены друг с другом, а H_3 топологически сопряжен самому себе.

Теперь мы распространим операторы H_i на класс потоков, более широкий, чем класс потоков с суммируемыми квадратами, и включающий все потоки с компактными носителями.

Определение. Будем говорить, что поток T *непрерывен в среднем на бесконечности*, если $|(T, \varphi)|$ ограничено на любом множестве форм $\varphi \in \mathcal{D}$, локально ограниченном (т. е. ограниченном в $\mathcal{E}$) и обладающем тем свойством, что (φ, φ) ограничено.

Предложение 5. *Если поток T непрерывен в среднем на бесконечности, то $(T, \varphi) \to 0$, когда носитель формы $\varphi \in \mathcal{D}$ неограниченно удаляется и $(\varphi, \varphi) \to 0$.*

Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subset V$ и число $\eta > 0$, такие, что $|(T, \varphi)| < \varepsilon$ для любой формы $\varphi \in \mathcal{D}$, носитель которой не пересекается с K и для которой $(\varphi, \varphi) < \eta$.

Допустим, что это неверно. Пусть K_h $(h = 1, 2, \ldots)$ — последовательность компактных множеств, такая, что $K_h \subset K_{h+1}$ и $\bigcup\limits_{h=1}^{\infty} K_h = V$. Можно указать, таким образом, такое $\varepsilon > 0$ и для любого h такую форму $\varphi_h \in \mathcal{D}$ с носителем, не пересекающимся с K_h, что $(\varphi_h, \varphi_h) < h^{-2}$ и $(T, \varphi_h) > \varepsilon$. Множество форм $h\varphi_h$ будет тогда локально ограничено, будут выполняться неравенства $(h\varphi_h, h\varphi_h) < 1$, а $(T, h\varphi_h) > h\varepsilon$ не будет ограничено, так что поток T не будет непрерывен в среднем на бесконечности. Наше предложение доказано.

Предложение 6. *Если поток T непрерывен в среднем на бесконечности, то (T, φ) сходится, какова бы ни была форма φ, принадлежащая $\mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{D}}$; (T, φ) ограничено на любом множестве форм φ, ограниченном в $\mathcal{E}$ и обладающем тем свойством, что (φ, φ) ограничено.*

Возьмем снова какое-нибудь разбиение единицы $1=\sum_{1}^{\infty}\varphi_i$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, и положим $\Phi_m=\sum_{1}^{m}\varphi_i$. Если $\varphi\in\mathscr{E}\cap\overline{\mathscr{D}}$, то

$$(\Phi_m\varphi,\ \Phi_m\varphi)\leqslant(\varphi,\varphi),$$

и ясно, что когда φ принадлежит такому локально ограниченному множеству, на котором (φ,φ) ограничено, форма $\Phi_m\varphi$ принадлежит некоторому множеству, обладающему теми же свойствами; последнее не зависит от m, так как, каково бы ни было компактное множество K, на нем $\Phi_m\varphi=\varphi$, когда m достаточно велико. Следовательно, так как T непрерывен в среднем на бесконечности, $(T,\Phi_m\varphi)$ имеет конечную верхнюю грань, не зависящую от m.

Когда m и k стремятся к бесконечности, носитель формы $\Phi_m\varphi-\Phi_k\varphi$ неограниченно удаляется и, в силу предложения 5,

$$(T,\Phi_m\varphi)-(T,\Phi_k\varphi)=(T,\Phi_m\varphi-\Phi_k\varphi)\longrightarrow 0,$$

так что $(T,\varphi)=\lim\limits_{m\to\infty}(T,\Phi_m\varphi)$ сходится и ограничено по абсолютной величине на любом множестве форм $\varphi\in\mathscr{E}\cap\overline{\mathscr{D}}$, локально ограниченном в $\mathscr{E}$, на котором (φ,φ) ограничено.

Очевидно, что потоки, обладающие компактными носителями, и потоки с суммируемыми квадратами все непрерывны в среднем на бесконечности.

Непосредственно из предложения 4 следует, что каждый из линейных функционалов H_iT $(i=1, 2, 3)$, определенных для $\varphi\in\mathscr{E}\cap\overline{\mathscr{D}}$ равенствами

$$(H_iT,\varphi)=(T,H_i\varphi),$$

представляет собой поток, непрерывный в среднем на бесконечности. Действие операторов H_i распространяется, таким образом, на потоки, непрерывные в среднем на бесконечности.

Покажем теперь, что H_1T *гомологичен нулю*. В силу теоремы 17′ § 22, достаточно обнаружить, что $(H_1T,\psi)=0$

для любой козамкнутой формы $\psi \in \mathcal{D}$. Если ψ — такая форма, то $H_1\psi$ гомологично нулю (так как $H_1\psi \in \overline{\mathcal{D}}_1$, а потоки, принадлежащие $\overline{\mathcal{D}}_1$, как мы видели, гомологичны нулю) и $(H_1\psi, \psi) = 0$, откуда следует, что $H_1\psi = 0$ и $(H_1 T, \psi) = (T, H_1\psi) = 0$.

Так же доказывается, что $H_2 T$ *когомологичен нулю.*

Далее, поток $H_3 T$, будучи ортогонален к $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_1$, *замкнут и козамкнут*. Покажем еще, что $H_3 T \in \mathcal{D}_3$. Для этого достаточно проверить, что $H_3 T$ непрерывен в среднем или что $(H_3 T, \varphi)$ ограничено на любом множестве форм $\varphi \in \mathcal{D}$, на котором ограничено (φ, φ). Но, согласно теореме 21 § 29, так как $\Delta H_3\varphi = 0$, $H_3\varphi$ локально ограничено и $(H_3\varphi, H_3\varphi)$ ограничено, поскольку $(H_3\varphi, H_3\varphi) \leqslant (\varphi, \varphi)$; поэтому, так как T непрерывен в среднем на бесконечности, $(H_3 T, \varphi) = (T, H_3\varphi)$ ограничено по абсолютной величине. Таким образом, $H_3 T$ представляет собой замкнутую и козамкнутую форму с суммируемым квадратом.

Теорема 25. *На римановом пространстве V всякий поток T, непрерывный в среднем на бесконечности, может быть представлен, притом единственным образом, в виде суммы трех потоков, непрерывных в среднем на бесконечности,*

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

таких, что T_1 гомологичен нулю и ортогонален $\mathcal{D}_3$, T_2 когомологичен нулю и ортогонален $\mathcal{D}_3$ и $T_3 \in \mathcal{D}_3$.

Для того, чтобы T был замкнут (козамкнут), необходимо и достаточно условие $T_2 = 0$ (соответственно $(T_1 = 0)$).

Мы получим требуемое разложение, если положим $T_i = H_i T$ $(i = 1, 2, 3)$. Для того, чтобы доказать последнее утверждение, заметим, что, так как T_1 и T_3 замкнуты, $dT = dT_2$. Далее, если $dT_2 = 0$, то T_2 замкнут, козамкнут и непрерывен в среднем на бесконечности; путем рассуждения, примененного выше к $H_3 T$, мы придем к заключению, что поток T_2 принадлежит $\mathcal{D}_3$ и, поскольку он в то же время ортогонален к $\mathcal{D}_3$, равен нулю.

Если T изменяется так, что (T, φ) остается ограниченным на любом множестве форм $\varphi \in \mathcal{D}$, локально ограниченном и обладающем тем свойством, что на нем ограничено (φ, φ), то H_3T остается локально ограниченным, а (H_3T, H_3T) ограниченным. Если, кроме того, δT (соответственно dT) — класса C^∞ и локально ограничено в некоторой области $D \subset V$, то H_1T (соответственно H_2T) принадлежит к классу C^∞ и локально ограничено в D.

Если учесть, что $\Delta T_1 = d\delta T$, $\Delta T_2 = \delta dT$ и $\Delta T_3 = 0$, то это предложение будет следовать из теоремы 21 § 29, примененной к риманову пространству D.

Последнее предложение показывает, что H_3 представляет собой линейное непрерывное отображение пространства $\mathcal{E}'_V$ в $\mathcal{E}_V$. Таким образом, H_3 — *регуляризирующий* оператор и, согласно замечанию в конце § 17, *ядро оператора H_3 представляет собой двойную форму класса C^∞.*

Покажем еще, что *ядра операторов H_1 и H_2 вне диагонали произведения $V \times V$ равны некоторым формам класса C^∞.*

Возьмем две различные точки x и y пространства V и функции φ_1 и φ_2 с непересекающимися компактными носителями, такие, что φ_1 равна 1 в некоторой окрестности точки x, а φ_2 равна 1 в некоторой окрестности точки y. Рассмотрим оператор $H'_1 = \varphi_2 H_1 \varphi_1$, действие которого состоит в последовательном умножении на φ_1, применении оператора H_1 и умножении на φ_2. Согласно доказанному выше предложению, H'_1 — регуляризирующий оператор. Следовательно, его ядром служит некоторая двойная форма класса C^∞. Но в некоторой окрестности точки $(x, y) \in V \times V$ ядра операторов H_1 и H'_1 равны. Поэтому ядро оператора H_1 принадлежит классу C^∞ в окрестности точки (x, y) и, следовательно, всюду вне диагонали произведения $V \times V$. Для H_2 доказательство проводится так же.

Заметим еще, что, если T замкнут и непрерывен в среднем на бесконечности, то T гомологичен H_3T, так как $H_2T = 0$ и H_1T гомологичен нулю. Итак, *всякий замкнутый поток, непрерывный в среднем на бесконечности, гомологичен некоторой замкнутой и козамкнутой форме с суммируемым квадратом.*

В случае компактного пространства отсюда вытекает теорема Ходжа, для которой мы имеем, таким образом, доказательство, отличное от приведенного в § 31.

В некомпактном пространстве возможно нарушение единственности: в нем могут существовать замкнутые и козамкнутые формы с суммируемыми квадратами, гомологичные нулю, но не равные нулю тождественно. Так, например, если V — ограниченная область в R^n с метрикой, индуцированной эвклидовой метрикой пространства R^n, то дифференциал гармонической функции в R^n, если его рассматривать только в V, представляет собой форму, замкнутую, козамкнутую, гомологичную нулю и с суммируемым квадратом в V[1]).

§ 33. Явное выражение индекса Кронекера

Формула разложения в теореме 25 § 32 позволит нам получить интересное выражение индекса Кронекера для двух цепей.

Рассмотрим в римановом пространстве V две *конечные* цепи c и c', ни одна из которых не пересекается с границей другой. Для них, согласно § 20, индекс Кронекера $c \wedge c'[1]$ имеет смысл. Так как цепь c' представляет собой поток с компактным носителем и, следовательно, непрерывный в среднем на бесконечности, то, в силу теоремы 25,

$$c' = H_1 c' + H_2 c' + H_3 c',$$

откуда

$$c \wedge c'[1] = c \wedge H_1 c'[1] + c \wedge (H_2 + H_3) c'[1].$$

В правой части второе слагаемое имеет смысл, так как $H_2 c'$ принадлежит к классу C^∞ вне носителя dc', т. е. вне границы цепи c', а $H_3 c'$ — класса C^∞ всюду. Первое слагаемое также имеет смысл; в этом нетрудно убедиться, заметив, что, так как H_2 является топологически сопряженным с H_1, то $c \wedge H_1 c'[1] = H_2 c \wedge c'[1]$,

---

[1]) Другие исследования, относящиеся к гармоническим формам в некомпактном пространстве, содержатся в статьях Gaffney [1] и Spencer [1], [2], [3].

а этот последний символ имеет смысл, потому что H_2c — класса C^∞ вне границы цепи c. Таким образом,

$$c\wedge c'[1] = H_2c\wedge c'[1] + c\wedge(H_2+H_3)c'[1]. \qquad (1)$$

Пусть $h_i(x,y)$—метрическое ядро оператора H_i ($i=1, 2, 3$). Мы видели, что $h_3(x, y)$ — класса C^∞ всюду, а $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$ — класса C^∞ вне диагонали произведения $V\times V$, т. е. при $x\neq y$. При этом если $i(x, y)$ — метрическое ядро тождественного оператора, то

$$i(x, y) = h_1(x, y) + h_2(x, y) + h_3(x, y),$$

откуда

$$h_2(x, y) + h_3(x, y) = -h_1(x, y) \text{ при } x\neq y.$$

Для x, лежащих вне c',

$$H_2c'(x) = \int_V h_2(x, y)\wedge *_y c'(y) = \int_V c'(y)\wedge *_y h_2(x, y) =$$
$$= \int_{y\in c'} *_y h_2(x, y)$$

и, так как

$$H_3c'(x) = \int_{y\in c'} *_y h_3(x, y),$$

то

$$(H_2+H_3)c'(x) = \int_{y\in c'} *_y h_2(x, y) + *_y h_3(x, y) =$$
$$= -\int_{y\in c'} *_y h_1(x, y).$$

Обозначим $e(x, y)$ *форму*, определенную при $x\neq y$ равенством

$$e(x, y) = *_y h_1(x, y).$$

Тогда для x, лежащих вне c', получим

$$(H_2+H_3)c'(x) = -\int_{y\in c'} e(x, y). \qquad (2)$$

Теперь предположим, что цепи c и c' не содержат n-мерных составляющих. При этом каждая точка цепи c'

является предельной для точек, не принадлежащих c', и так как левая часть формулы (2) — класса C^∞ вне bc', то *эта формула оказывается справедливой всюду вне* bc', *если условиться распространить интеграл в правой части по непрерывности на точки цепи* c', *не принадлежащие* bc'.

Так как c не пересекается с bc', то это соотношение можно интегрировать по x на c, и мы получим

$$c \wedge (H_2 + H_3)\, c'[1] = -\int\limits_{x \in c} \int\limits_{y \in c'} e(x, y).$$

Первое слагаемое в правой части (1) можно записать в виде

$$H_2 c \wedge c'[1] = c' \wedge \overline{\omega} H_2 c[1].$$

Для x, лежащих вне c,

$$H_2 c(x) = \int\limits_{y \in c} *_y h_2(x, y)$$

и

$$\overline{\omega} H_2 c(x) = \int\limits_{y \in c} \overline{\omega}_x *_y h_2(x, y).$$

С другой стороны, из $*H_2 = H_1 *$ следует, что $H_2 = *^{-1} H_1 *$ и $\overline{\omega} H_2 = * H_1 *$, так как $\overline{\omega} *^{-1} = *$. Метрическими ядрами операторов $\overline{\omega} H_2$ и $* H_1 *$ служат соответственно $\overline{\omega}_x h_2(x, y)$ и $*_x *_y^{-1} h_1(x, y)$, поэтому

$$\overline{\omega}_x h_2(x, y) = *_x *_y^{-1} h_1(x, y)$$

и

$$\overline{\omega}_x *_y h_2(x, y) = *_x h_1(x, y),$$

откуда при $x \neq y$, в силу симметрии $h_1(x, y)$, имеем $\overline{\omega}_x *_y h_2(x, y) = e(y, x)$. Итак, для x, не принадлежащих c,

$$\overline{\omega} H_2 c(x) = \int\limits_{y \in c} e(y, x);$$

это соотношение справедливо и для точек цепи c, не принадлежащих bc, если интеграл в правой части распространить на такие точки по непрерывности. Следовательно,

$$c' \wedge \overline{\omega} H_2 c\,[1] = \int\limits_{x \in c'} \int\limits_{y \in c} e(y, x) = \int\limits_{y \in c'} \int\limits_{x \in c} e(x, y)$$

и, согласно (2), соотношение (1) примет вид

$$\boxed{c \wedge c'\,[1] = \int\limits_{y \in c'} \int\limits_{x \in c} e(x, y) - \int\limits_{x \in c} \cdot \int\limits_{y \in c'} e(x, y).} \qquad (3)$$

Это соотношение справедливо в любом римановом пространстве, компактном или некомпактном, для любых конечных цепей c и c' размерности, меньшей n, если только ни одна из них не пересекается с границей другой. Ясно, что, как это и должно быть, когда c и c' не пересекаются, правая часть обращается в нуль, так как в этом случае форма $e(x, y)$ принадлежит к классу C^∞ на двойной цепи (c, c') в $V \times V$, которая при этом не пересекается с диагональю, и порядок интегрирования может быть обращен. Если цепь c замкнута, то $H_2 c = 0$, и первое слагаемое справа обращается в нуль. Если цепь c' гомологична нулю, то $H_2 c' = 0$ и $H_3 c' = 0$, и второе слагаемое обращается в нуль.

В случае *компактного* риманова пространства можно, с помощью оператора G, определенного в § 31, получить другое выражение. Действительно, в ходе доказательства следствия 1 из теоремы 23 мы получили равенства $H_1 = d\delta G$, $H_2 = \delta d G$ и $H_3 = H$, поэтому формулу (1) можно записать в виде

$$c \wedge c'\,[1] = c \wedge \delta d G c'\,[1] + \delta d G c \wedge c'\,[1] + H c \wedge c'\,[1]. \qquad (4)$$

Если $g(x, y)$ — метрическое ядро оператора G, то мы имеем следующую таблицу, где в нижних строках помещены метрические ядра указанных над ними операторов:

δG	dG	$d\delta G$
$\delta_x g(x, y)$	$d_x g(x, y)$	$d_x \delta_x g(x, y)$
$\delta d G$	$*G$	$\overline{\omega} * G$
$\delta_x d_x g(x, y)$	$*_x g(x, y)$	$\overline{\omega}_x *_x g(x, y)$

Так как метрические ядра двух операторов, взаимно сопряженных метрически, получаются один из другого перестановкой аргументов, то метрическое ядро оператора, метрически сопряженного самому себе, симметрично, и мы получаем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &g(x, y)=g(y, x), && \delta_x g(x, y)=d_y g(x, y), \\ &d_x\delta_x g(x, y)=d_y\delta_y g(x, y), && \delta_x d_x g(x, y)=\delta_y d_y g(x, y), \\ &*_x g(x, y)=\bar{\omega}_y *_y g(x, y), && *_y *_x g(x, y)=g(x, y). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Из них последнее непосредственно следует из предпоследнего.

Аналогичным образом мы получим следующие соотношения, связывающие метрические ядра $h(x, y)$, $*_x h(x, y)$ и $\bar{\omega}_y *_y h(x, y)$ операторов H, $*H$ и $\bar{\omega}H$:

$$\left.\begin{aligned} h(x, y)=h(y, x), \quad *_x h(x, y)=\bar{\omega}_y *_y h(x, y), \\ *_y *_x h(x, y)=h(x, y). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Для цепи c получим

$$\delta dGc(y)=\int_x \delta_y d_y g(x, y)\wedge *_x c(x)=\int_x c(x)\wedge *_x\delta_y d_y g(x, y),$$

откуда, в силу равенств $*_x\delta_y d_y g(x, y)=*_x\delta_x d_x g(x, y)= = d_x\delta_x *_x g(x, y)$,

$$\delta dGc(y)=\int_x c(x)\wedge d_x\delta_x *_x g(x, y)=\int_x bc(x)\wedge\delta_x *_x g(x, y).$$

При y, лежащем вне c, предпоследнее выражение сводится к сходящемуся интегралу, взятому по c; последнее же выражение сводится к сходящемуся интегралу, распространенному на bc, если только y не лежит на bc:

$$\delta dGc(y)=\int_{x\in bc}\delta_x *_x g(x, y).$$

Аналогичным выражением обладает и $\delta dGc'$, следовательно,

$$c\wedge\delta dGc'[1]=\int_{x\in c}\int_{y\in bc'}\delta_y *_y g(x, y)$$

и

$$\delta dGc\wedge c'[1]=\int_{y\in c'}\int_{x\in bc}\bar{\omega}_y\delta_x *_x g(x, y),$$

или, так как $\overline{\omega}_y *_x g(x, y) = *_y g(x, y)$, согласно (5),

$$\delta dGc \wedge c'[1] = \int\limits_{y \in c'} \int\limits_{x \in bc} \delta_x *_y g(x, y).$$

Мы имеем также

$$Hc'(x) = \int\limits_{y} c'(y) \wedge *_y h(x, y) = \int\limits_{y \in c'} *_y h(x, y),$$

откуда

$$Hc \wedge c'[1] = c \wedge Hc'[1] = \int\limits_{x \in c} \int\limits_{y \in c'} *_y h(x, y).$$

Подставив в правую часть (4) найденные выражения, мы получим окончательно

$$\boxed{\begin{aligned} c \wedge c'[1] = &\int\limits_{x \in c} \int\limits_{y \in bc'} \delta_y *_y g(x, y) + \\ &+ \int\limits_{y \in c'} \int\limits_{x \in bc} \delta_x *_y g(x, y) + \int\limits_{x \in c} \int\limits_{y \in c'} *_y h(x, y). \end{aligned}} \tag{7}$$

Заметим, что все интегралы в этой формуле сходятся абсолютно и в каждом из них можно изменить порядок интегрирования.

Если обе формы c и c' замкнуты, то первые два слагаемых в правой части обращаются в нуль. Если одна из этих цепей гомологична нулю, то обращается в нуль третье слагаемое; если, например, гомологична нулю цепь c, то и второе слагаемое равно нулю, и $c \wedge c'[1]$ будет представлять собой не что иное, как *коэффициент зацепления* цепи c с c', который выражается первым слагаемым справа.

Формула (7) установлена нами для компактного риманова пространства. Однако ее можно обобщить и на некоторые некомпактные пространства. Рассмотрим случай эвклидова пространства.

Возьмем двойную форму

$$g(x, y) = \frac{r^{2-n}(x, y)}{(n-2)s_n} \alpha(x, y),$$

построенную, как параметрикс, где $r(x, y)$ означает теперь эвклидово расстояние между точками x и y эвклидова пространства $R^n (n > 2)$ и где $\alpha(x, y)$ определено формулой (3) § 28, в которой $A(x, y) = -\frac{1}{2} r^2(x, y)$. При $n=2$ вместо $\frac{r^{2-n}(x, y)}{n-2}$ нужно взять $-\ln r(x, y)$. Оператор с метрическим ядром $g(x, y)$ обозначим G.

Если мы воспользуемся ортогональной системой координат, то, как показано в § 26, каждый коэффициент формы $\Delta\varphi$ будет получаться из соответствующего коэффициента формы φ воздействием на него оператора Δ. Подобным же образом с помощью оператора G из коэффициентов φ получаются коэффициенты $G\varphi$. Иначе говоря, операторы Δ и G перестановочны с умножением на дифференциалы координат. Они перестановочны также с любым оператором частного дифференцирования по координатам. Далее, скалярный квадрат (φ, φ) формы φ равен сумме скалярных квадратов коэффициентов. Отсюда следует, что *для того, чтобы форма была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы были гармоническими все ее коэффициенты; для того, чтобы форма была с суммируемым квадратом, необходимо и достаточно, чтобы таковыми были все ее коэффициенты.*

Для любой формы $\varphi \in \mathscr{D}$ справедливы формулы

$$G\Delta\varphi = \varphi, \qquad \Delta G\varphi = \varphi.$$

Это — не что иное, как известные формулы Грина и Пуассона из теории потенциала, которые представляют собой частные случаи формул леммы 3 § 28. Таким образом,

$$\varphi = d\delta G\varphi + \delta dG\varphi.$$

Теперь мы покажем, что $d\delta G\varphi = H_1\varphi$, $\delta dG\varphi = H_2\varphi$ и $H_3\varphi = 0$. Для этого, в силу теорем 24 и 25, достаточно обнаружить, что любая гармоническая форма с суммируемым квадратом равна тождественно нулю и что $d\delta G\varphi$ и $\delta dG\varphi$ представляют собой формы с суммируемым квадратом.

Первое утверждение, т. е. что гармоническая форма с суммируемым квадратом есть нуль, следует непосредственно из соответствующего предложения, хорошо известного, о гармонических функциях с суммируемым квадратом. Оно доказывается очень просто. В самом деле, если $f(x)$ — гармоническая функция с суммируемым квадратом в R^n, S_R — внутренность сферы радиуса R с центром в 0 и $*1$ — элемент объема, то интеграл

$$\int\limits_{S_R} f^2(x) * 1 = \left(\frac{1}{R}\right)^n \int\limits_{S_1} f^2\left(\frac{x}{R}\right) * 1$$

ограничен при $R \to \infty$. Отсюда вытекает, что гармоническая функция $f_R(x) = f\left(\frac{x}{R}\right)$ сходится в среднем к нулю в S_1 и, следовательно, сходится к нулю равномерно на любой компактной части сферы S_1. Таким образом, $f(0) = 0$, а так как начало может быть выбрано где угодно, то f равна нулю тождественно.

Далее, коэффициенты форм $d\delta G\varphi$ и $\delta dG\varphi$ представляют собой линейные комбинации с постоянными коэффициентами вторых производных коэффициентов формы G; поэтому для того, чтобы доказать, что эти формы — с суммируемыми квадратами, достаточно установить, что, какова бы ни была *функция* φ, принадлежащая $\mathscr{D}$, вторые производные от $G\varphi$ — с суммируемым квадратом. Но это сразу следует из того, что эти производные имеют порядок $O(\rho^{-n})$ при $\rho \to \infty$, где ρ — расстояние от x до 0. (Легко видеть, что при $n > 2$ первые производные от $G\varphi$, а при $n > 4$ — сама $G\varphi$ суммируемы с квадратом.)

Отсюда следует, что в эвклидовом пространстве, так же как в компактном пространстве,

$$H_1 = d\delta G, \qquad H_2 = \delta dG,$$

откуда получаются явные выражения ядер операторов H_1 и H_2 и форм, фигурирующих в формулах (3) и (7).

В качестве примера рассмотрим формулу (3) для случая плоскости. Выбрав определенную ориентацию этой плоскости, мы ограничимся рассмотрением четных форм. В прямоугольных координатах будем иметь выражения

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(x, y)} (1 + dx^1 . dy^1 + dx^2 . dy^2 + \\ + dx^1 \wedge dx^2 . dy^1 \wedge dy^2)$$

и

$$e(x, y) = *_y d_x \delta_x g(x, y) = *_y d_x d_y g(x, y).$$

Для того, чтобы получить члены $e(x, y)$ степени 1 по x (и по y), достаточно взять члены нулевой степени формы $g(x, y)$. Если $\theta(x, y)$ — угол, образуемый вектором, соединяющим точки x и y, с первой координатной осью, то

$$*_y d_y \ln \frac{1}{r(x, y)} = -d_y \theta(x, y),$$

и совокупность членов $e(x, y)$ степени 1 сводится к

$$-\frac{1}{2\pi} d_x d_y \theta(x, y).$$

Пусть c и c' — плоские ориентированные кривые, расположенные так, что концы одной не попадают на другую. Для них формула (3) имеет вид

$$c \wedge c'[1] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x \in c} \int\limits_{y \in c'} d_x d_y \theta(x, y) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{y \in c'} \int\limits_{x \in c} d_x d_y \theta(x, y).$$

Интеграл $\int\limits_{y \in c'} d_y \theta(x, y)$, очевидно, представляет собой угол, под которым кривая c' видна из точки x. Это — функция от x, разрывная на c', но ее дифференциал может быть продолжен на c' по непрерывности, исключая конечные точки. Таким образом, наша формула выражает $c \wedge c'[1]$ в виде деленной на 2π разности между *непрерывной вариацией* вдоль c угла, под которым видна кривая c', и непрерывной вариацией вдоль c' угла, под которым видна кривая c; этот вывод нетрудно проверить непосредственно.

При $n = 3$ формула (7) дает классическую формулу Гаусса, выражающую коэффициент зацепления двух замкнутых пространственных кривых.

§ 34. Аналитичность гармонических форм

Риманово пространство V называется *аналитическим*, если многообразие V наделено действительной аналитической структурой и если коэффициенты g_{ij} квадратичной формы ds^2 в аналитических локальных координатах представляют собой действительные аналитические функции этих координат. Если эти условия выполнены, то в окрестности любой точки v пространства V нормальные координаты с началом в v являются аналитическими координатами; таким образом, коэффициенты ds^2, выраженные посредством нормальных координат с началом в точке v, являются в окрестности v аналитическими функциями этих координат.

Обратно, если риманово пространство V таково, что в окрестности любой точки v коэффициенты ds^2, выраженные в нормальных координатах с началом в точке v, представляют собой аналитические функции этих координат, то в V существует однозначно определенная действительная аналитическая структура, в которой действительными аналитическими функциями в точке v будут аналитические функции нормальных координат с началом в v. Мы видим, что аналитическая структура риманова пространства полностью определяется его метрикой.

Дифференциальная форма в аналитическом пространстве называется аналитической, если все коэффициенты этой формы, выраженные в аналитических локальных координатах, являются аналитическими функциями этих координат. Мы покажем, что в аналитическом пространстве гармонические формы аналитичны. Будет доказано даже более общее предложение:

Теорема 26. *В аналитическом римановом пространстве любой поток T, такой, что ΔT в области D равно какой-либо аналитической форме, сам равен некоторой аналитической форме в области D.*

Достаточно доказать[1]), что если ΔT аналитично в окрестности некоторой точки, то и T аналитично в этой же окрестности.

Пусть v — некоторая точка пространства V и D_1 — геодезическая сфера с центром в v радиуса R_1, настолько малого, что каждая точка сферы D_1 служит концом дуги геодезической, притом единственной, выходящей из v и заключенной в D_1. В нормальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ с началом в v, ортонормальных в точке v, D_1 определяет-

[1]) Аналитичность гармонических форм установил Кодаира (Kodaira [2]) методом Адамара; теорему 26 можно получить отсюда при помощи теоремы Коши—Ковалевской (см. Bochner [2]). Идея метода, примененного здесь, принадлежит Леви (E. Levi [2]).

ся неравенством $\sum (x^i)^2 < R_1^2$. Можно выбрать настолько малый радиус R_1, чтобы функция $\sigma(x, y)$, фигурирующая в качестве множителя в выражении параметрикса $\omega(x, y)$ (см. формулу (5) § 28), была равна 1, когда x и y заключены в D_1. Пусть, наконец, D и D_0 — геодезические сферы с центрами в v и радиусами R и R_0, подчиненными неравенствам $0 < R < R_0 < R_1$.

Достаточно будет показать, что если ΔT аналитично в D_1, то поток T аналитичен в сфере D со сколь угодно малым положительным радиусом R. Пусть ρ — функция класса C^∞ с носителем, заключенным в D_1, равная 1 на D_0. Согласно следствию 1 из теоремы 21 § 29, если ΔT аналитично в D_1, то T — класса C^∞ в D_1 и $\mu = \rho T$ представляет собой форму класса C^∞ всюду, с компактным носителем, заключенным в D_1, равную T в D_0, следовательно, $\Delta\mu$ аналитично в D_0. Таким образом, наша задача свелась к доказательству следующего предложения:

Если μ — форма класса C^∞ с носителем, заключенным в D_1, такая, что $\Delta\mu$ аналитично в D_0, то μ аналитична в D.

Доказательство будет основано на формуле (I) леммы 3 § 28: $\Omega\Delta\mu = \mu - Q'\mu$. Так как носители μ и $\Delta\mu$ заключены в D_1, то интегралы, определяющие $\Omega\Delta\mu$ и $Q'\mu$, можно распространить лишь на D_1. Разбив D_1 на D и $D_1 - D$, мы запишем эту формулу в виде

$$\mu(x) - \int_{y \in D} q(y, x) \wedge *_y\mu(y) = \phi(x),$$

где

$$\phi(x) = \int_{y \in D_1 - D} q(y, x) \wedge *_y\mu(y) + \int_{y \in D_1} \omega(x, y) \wedge *_y\Delta_y\mu(y). \quad (1)$$

Обозначив, для упрощения записи, P оператор, определенный равенством

$$P\varphi(x) = \int_{y \in D} q(y, x) \wedge *_y\mu(y), \quad (2)$$

запишем нашу формулу в виде

$$\mu - P\mu = \phi. \quad (3)$$

Выразить μ через ϕ можно методом итераций Лиувилля – Неймана, использованным в § 30.

Верхнюю грань в D модулей коэффициентов формы φ, выраженных в нормальных координатах $x^1, \ldots, x^n$, обозначим $|\varphi|$. Тогда

$$|P\varphi| \leqslant k|\varphi|,$$

где k — положительное число, не зависящее от φ, стремящееся к нулю вместе с радиусом R сферы D. Следовательно, $|P^m\phi| \leqslant k^m|\phi|$, и если R настолько мало, что $k < 1$, то, в силу тождества

$$(1+P+\ldots+P^{m-1})(1-P)=1-P^m,$$

из (3) получим выражение μ в виде суммы равномерно сходящегося ряда

$$\mu=\sum_{m=0}^{\infty} P^m\phi. \tag{4}$$

Возьмем пространство R^{2n} точек $x=(x^1, \ldots, x^n)$ с комплексными координатами. Его можно рассматривать как действительное $2n$-мерное эвклидово пространство, в котором расстояние $d(x, y)$ между точками x и y задано формулой

$$d^2(x, y)=\sum_i |x^i-y^i|^2.$$

Пусть R^n и J^n — подпространства пространства R^{2n}, образованные точками, имеющими соответственно действительные и чисто мнимые координаты. Они взаимно ортогональны и пересекаются в точке $(0, \ldots, 0)$, соответствующей точке v пространства V. Пусть $\tilde{D}$, $\tilde{D}_0$ и $\tilde{D}_1$ — внутренности сфер с центром в v (т. е. в нуле) в R^{2n} соответственно с радиусами R, R_0 и R_1. Пересечения этих сфер с R^n представляют собой соответственно D, D_0 и D_1.

Будем говорить, что функция голоморфна в некоторой области пространства R^{2n}, если в этой области она является голоморфной функцией координат $x^1, \ldots, x^n$. Дифференциальная форма, имеющая в этой области выражение

$$\sum \varphi_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

называется голоморфной, если голоморфны ее коэффициенты $\varphi_{i_1 \ldots i_p}$. Если эти последние ограничены, то сама форма называется ограниченной.

Ортогональные проекции точки x пространства R^{2n} на подпространства R^n и J^n обозначим x' и x''; назовем их соответственно действительной частью и мнимой частью точки x; тогда $x = x' + ix''$.

Пусть D^γ — множество точек x пространства R^{2n}, таких, что x' заключено в D и

$$d(x, x') < \gamma(R - d(x, x'')).$$

Прямолинейный отрезок (в R^{2n}), соединяющий точку x множества D^γ и произвольную точку границы B множества D в R^n, образует с R^n угол, синус которого $< \gamma$.

Сделав эти замечания, мы покажем, что когда положительные числа R и γ достаточно малы, справедливы следующие два предложения:

A. *Если форма φ голоморфна и ограничена в D^γ, то $P\varphi$ может быть продолжена до некоторой формы, голоморфной и ограниченной в D^γ, причем*

$$| P\varphi |_\gamma \leqslant k_\gamma | \varphi |_\gamma,$$

где $|\varphi|_\gamma$ — верхняя грань в D^γ модулей коэффициентов φ; положительное число k_γ, не зависящее от φ, стремится к нулю вместе с R.

B. *Форма ψ, определенная в D равенством* (1), *может быть продолжена до некоторой голоморфной ограниченной формы в D^γ.*

Покажем сначала, что предложение, которое мы имеем в виду, непосредственно вытекает из A и B. Действительно, из предложений A и B следует, что формы $P^m\psi$ продолжаются до голоморфных ограниченных форм в D^γ, удовлетворяющих неравенствам

$$| P^m\psi |_\gamma \leqslant k_\gamma^m | \psi |_\gamma,$$

причем можно предположить, что $k_\gamma < 1$. Тогда, согласно формуле (4), μ представится в виде суммы равномерно сходящегося в D^Υ ряда форм, голоморфных в D^Υ, откуда следует, что μ голоморфна в D^Υ и, следовательно, аналитична в D.

Итак, нам остается только доказать предложения А и В.

Для этого заметим, что коэффициенты g_{ij}, будучи аналитическими функциями в D_1, имеют голоморфные продолжения в некоторой области пространства R^{2n}, содержащей D_1. Выбрав достаточно малое R_1, мы сможем добиться того, чтобы g_{ij} были голоморфны в $\tilde{D}_1$. Символы Кристофеля Γ^i_{kl} также голоморфны в $\tilde{D}_1$, и, применив классические теоремы существования к дифференциальным уравнениям геодезических (1) § 27, мы придем к выводу, что существует естественное движение $z(t) = z(t; x, \xi)$, притом единственное, удовлетворяющее начальным условиям $z(0) = x$ и $\dot{z}(0) = \xi$ при любом выборе точки $x \in D_1$ и касательного вектора ξ в точке x. Точка z (точнее говоря, каждая из ее компонент) представляет собой голоморфную функцию от t, x и ξ, когда $|t|$ не превосходит некоторого положительного числа, зависящего непрерывно от x и ξ. Назовем *геодезической нитью* кривую, которую описывает $z(t)$, когда t изменяется, оставаясь действительным. Через каждую точку x области $\tilde{D}_1$ проходит геодезическая нить, имеющая в точке x заданный касательный вектор, и притом только одна.

Квадрат римановой длины касательного вектора ξ в точке x области $\tilde{D}_1$, определенный для комплексных x и ξ формулой

$$g_{ij}(x)\,\xi^i\xi^j,$$

принимает, вообще говоря, комплексные значения. Он может обращаться в нуль и при $\xi \neq 0$: векторы нулевой римановой длины, имеющие заданную начальную точку, образуют конус $2n-2$ измерений. Если вектор, касательный к некоторой геодезической нити в какой-либо точке, имеет риманову длину $= 0$, то тем же свойством обладают все касательные к этой геодезической нити; последнюю назовем в этом случае *геодезической нитью нулевой римановой длины*. Совокупность таких нитей, проходящих через заданную точку, также представляет собой некоторый $(2n-2)$-мерный конус.

Рассуждая так же, как в § 27, мы придем к заключению, что существует положительная непрерывная функция $\rho(x)$ точки x, такая, что любая точка эвклидовой сферы с центром в x радиуса $\rho(x)$ может быть единственным образом соединена с точкой x геодезической нитью, лежащей в этой сфере. С другой стороны, эвклидов радиус кривизны геодезических нитей в окрестности точки v имеет положительную нижнюю грань. Мы вправе предположить, что R_1 меньше этой нижней грани и в то же время меньше нижней грани функции $\frac{1}{2}\rho(x)$ в D_1. Возьмем теперь две точки x и y, принадлежащие $\tilde{D}_1$; так как эвклидово расстояние между ними $< 2R_1 < \rho(x)$, то их соединяет дуга геодезической нити, целиком лежащая в эвклидовой сфере радиуса $\rho(x)$ с центром в x. Эта дуга непременно заключена в $\tilde{D}_1$, так как иначе, приближая y к x, мы в какой-то момент заставим эту дугу коснуться изнутри сферы, ограничивающей $\tilde{D}_1$; но это невозможно, потому что при этом в точке касания радиус кривизны был бы меньше R_1. Итак, если R_1 достаточно мало, *существует дуга геодезической нити, заключенная в $\tilde{D}_1$, притом только одна, которая соединяет любые две заданные точки области $\tilde{D}_1$.*

Начальная скорость ξ, которую нужно сообщить точке для того, чтобы она в своем естественном движении за промежуток времени $0 \leqslant t \leqslant 1$ описала дугу геодезической нити, соединяющую точки x и y в $\tilde{D}_1$, представляет собой голоморфную функцию от x и y в $\tilde{D}_1$. То же можно утверждать о квадрате римановой длины этой дуги

$$r^2(x, y) = g_{ij}(x)\,\xi^i\xi^j,$$

который называется квадратом риманова расстояния между точками x и y. Эта функция обращается в нуль тогда и только тогда, когда геодезическая нить, соединяющая x и y, имеет нулевую риманову длину. Если ξ стремится к нулю, y стремится к x, и наоборот. Далее, разность $y - x - \xi$ между вектором с начальной точкой x и конечной точкой y и вектором ξ есть бесконечно малая второго порядка по сравнению с $d(x, y)$. Следовательно, выбрав достаточно малое R, мы добьемся того, что *для любых* *двух точек x и y из D угол между векторами $y-x$ и ξ будет меньше наперед заданного сколь угодно малого положительного числа.*

С другой стороны, в любой точке области D угол, образуемый векторами нулевой римановой длины с подпространством R^n, больше некоторого фиксированного положительного числа (вследствие положительной определенности ds^2 в действительной области). Это выполняется в каждой точке множества D^γ, если γ достаточно мало. Отсюда и из предыдущего вытекает, что при достаточно малом γ, *если x и y — точки из D^γ, такие, что угол, образуемый вектором $y-x$ с R^n, меньше* $\arcsin\gamma$, *то угол между вектором ξ и любым вектором нулевой римановой длины (имеющим то же начало) превосходит некоторое фиксированное положительное число.* Отсюда, в свою очередь, следует, что когда x и y удовлетворяют этому условию, отношение эвклидовой длины вектора ξ к модулю его римановой длины заключено между двумя фиксированными положительными числами. То же можно утверждать и относительно $|r(x, y)|/d(x, y)$.

В комплексной области $r(x, y)$ — двузначная функция. Для пар точек (x, y), удовлетворяющих высказанному выше условию, соответствующую «ветвь» этой функции выберем следующим образом. Будем одновременно перемещать точки x и y с постоянной скоростью по нормалям к подпространству R^n до тех пор, пока они не достигнут своих проекций x' и y'. Так как угол между $y-x$ и R^n стремится при этом к нулю, то он остается меньше $\arcsin\gamma$, и, следовательно, $r^2(x, y)$ не обращается в нуль. Следовательно, на траектории, которую описывает (x, y), нет точек ветвления функции $r(x, y)$, и мы выберем ту ветвь, которая положительна при $x=x'$ и $y=y'$. Выбранная ветвь представляет собой голоморфную функцию от x и y на множестве (x, y), удовлетворяющих высказанному выше условию.

Теперь для того, чтобы доказать предложение А, заметим, что каждый коэффициент формы $P\varphi$ представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$F(x)=\int\limits_{y\in D} p(x, y)\, f(y)\, dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n, \tag{5}$$

где $p(x, y)$ — коэффициент формы $q(y, x)$, а $f(y)$ — коэффициент $*\varphi(y)$.

Согласно нашему предположению, $f(y)$ обладает ограниченным голоморфным продолжением на D^γ, поэтому нам достаточно будет доказать, что $F(x)$ также обладает ограниченным голоморфным продолжением на D^γ и что верхние грани $|f(x)|_\gamma$ и $|F(x)|_\gamma$ модулей этих функций в D^γ связаны неравенством вида $|F(x)|_\gamma \leqslant l_\gamma |f(x)|_\gamma$, где положительный множитель l_γ не зависит от $f(x)$ и стремится к нулю вместе с радиусом R сферы D.

Из доказательства леммы 1 § 28 видно, что в частном случае, когда $r^2(x, y)$ — голоморфная функция от x и y, каждый коэффициент $p(x, y)$ формы $q(x, y)$ имеет вид

$$p(x, y) = r^{-n}(x, y)\, p_1(x, y),$$

где $p_1(x, y)$ — голоморфная функция от x и y в D_1, обращающаяся в нуль вместе со своими первыми производными при $x = y$, и следовательно, $p_1(x, y) = O(d^2(x, y))$. Отсюда вытекает, что

$$p(x, y) = O(d^{2-n}(x, y)), \tag{6}$$

когда x и y изменяются в D^γ так, что $x \neq y$ и угол между вектором $y - x$ и R^n остается меньше $\arcsin \gamma$.

Пусть $D(x)$ — n-мерный конус в R^{2n} с вершиной в точке x, заполненный прямолинейными отрезками, соединяющими точку x с точками границы B сферы D в подпространстве R^n; положим для $x \in D^\gamma$

$$F(x) = \int\limits_{y \in D(x)} p(x, y) f(y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n. \tag{7}$$

Ясно, что когда $x \in D$, выражение (7) сводится к (5), так как при этом $D(x) = D$.

Покажем, что интеграл (7) сходится, абсолютно и равномерно относительно x в D^γ, и ограничен. В качестве переменных интеграции возьмем координаты $y'^1, \ldots, y'^n$ проекции y' точки y в R^n (действительной части y). Когда y' пробегает множество D, точка y пробегает $D(x)$, и ее координаты y^i как функции от y'^i имеют ограниченный якобиан по этим переменным. Так как, с другой стороны, оценка (6) справедлива при $y \in D(x)$ и отношение $d(x, y)$ к $d(x', y')$ ограничено сверху и снизу фиксированными положительными числами, то интеграл (7) можно преобразовать, придав ему вид

$$F(x) = \int\limits_{y' \in D} d^{2-n}(x', y')\, p_2(x, y')\, f(y)\, dy'^1 \wedge \ldots \wedge dy'^n,$$

где $p_2(x, y')$ — некоторая ограниченная функция. Отсюда сразу следует, что этот интеграл сходится абсолютно и равномерно и что верхние грани $|F(x)|_\Upsilon$ и $|f(x)|_\Upsilon$ функций $F(x)$ и $f(x)$ в D связаны соотношением

$$|F(x)|_\Upsilon \leqslant l_\Upsilon |f(x)|_\Upsilon,$$

где

$$l_\Upsilon = \int\limits_{y' \in D} d^{2-n}(x', y')\, |p_2(x, y')|\, dy'^1 \wedge \ldots \wedge dy'^n$$

стремится к нулю вместе с радиусом R сферы D.

Для того, чтобы показать, что функция $F(x)$, определенная равенством (7), голоморфна в D^Υ, положим

$$y = x + t(Y - x),$$

где Y — переменная точка границы B сферы D. Когда Y пробегает B, а t изменяется от 0 до 1, точка y пробегает конус $D(x)$. Обозначив η элемент площади ($n-1$ измерений) поверхности B, мы запишем (7) в виде

$$F(x) = \int\limits_0^1 dt \int\limits_{y \in B} p_3(x, Y, t)\, f(x + t(Y - x))\, \eta,$$

где функция $p_3(x, Y, t) f(x + t(Y - x))$ под знаком интеграла голоморфна по x при $t > 0$. Функция

$$F_\varepsilon(x) = \int\limits_\varepsilon^1 dt \int\limits_{y \in B} p_3(x, Y, t)\, f(x + t(Y - x))\, \eta$$

будет тогда голоморфной по x в D^Υ, и так как она равномерно сходится к $F(x)$ при $\varepsilon \to 0$, то $F(x)$ также голоморфна в D^Υ. Предложение A, таким образом, доказано.

Для доказательства предложения B возьмем выражение (1) функции $\phi(x)$. Положив $\Delta\mu=\beta$, запишем

$$\phi(x)=\int\limits_{y\in D_1-D} q(y,x)\wedge *_y\mu(y)+$$
$$+\int\limits_{y\in D_1-D}\omega(x,y)\wedge *_y\beta(y)+\int\limits_{y\in D}\omega(x,y)\wedge *_y\beta(y).$$

При $y\in D_1-D$ и $x\in D^\gamma$ коэффициенты форм под знаками интеграла в первых двух слагаемых в правой части представляют собой голоморфные функции от x порядка $O(d^{2-n}(x,y))$. Следовательно, эти слагаемые представляют собой голоморфные и ограниченные в D^γ формы. Наконец, по предположению, $\beta=\Delta\mu$ голоморфна и ограничена в D^γ, если только γ достаточно мало, поэтому, рассуждая так же, как в доказательстве предложения A, мы придем к заключению, что третье слагаемое обладает голоморфным и ограниченным продолжением на D^γ. На этом доказательство предложения B заканчивается.

Изложенный метод применим и к другим уравнениям. Рассмотрим, например, уравнение

$$\Delta\mu+c\mu=\beta. \qquad (8)$$

Воспользовавшись формулой (I) леммы 3 § 28, мы покажем, что любое решение μ уравнения (8) в области D удовлетворяет интегральному уравнению вида

$$\mu(x)-\int\limits_{y\in D}\{q(y,x)-c\omega(x,y)\}\wedge *_y\mu(y)=\chi(x),$$

которое мы запишем короче:

$$\mu-P_c\mu=\chi.$$

Оператор P_c обладает свойством, которое в применении к P утверждается в предложении A, когда c либо постоянна, либо является аналитической функцией. Если и β аналитична, то, так же как и выше, можно убедиться в том, что χ обладает голоморфным и ограниченным продолжением на D^γ. Мы приходим к такому выводу:

В аналитическом римановом пространстве каждое решение μ уравнения (8) *аналитично в любой области, где аналитичны форма β и функция c.*

Из аналитичности гармонических форм вытекают такие следствия:

Следствие 1. *Гармоническая форма в связном аналитическом римановом пространстве, обладающая тем свойством, что в некоторой точке все производные каждого из ее коэффициентов* (*включая производные нулевого порядка*) *обращаются в нуль, равна нулю тождественно.*

Следствие 2. *В связном аналитическом римановом пространстве носитель любой гармонической формы, не равной нулю тождественно, заполняет все пространство.*

Такие же предложения применимы к решениям уравнения $\Delta\mu + c\mu = 0$, какова бы ни была постоянная c. Было бы интересно выяснить, справедливы ли они в случае риманова пространства класса C^∞, но не аналитического.

ЛИТЕРАТУРА

Этот список содержит все статьи и работы, упоминаемые в тексте, но не является полной библиографией по вопросам, затронутым в книге.

B i d a l P. et de R h a m G.

[1] Les formes différentielles harmoniques, Comm. Math. Helvetici, 19, 1—49 (1946).

B o c h n e r S.

[1] Vector fields and Ricci curvature, Bull. of the Amer. Math. Soc., 52, 776—797 (1946).

[2] Analytic mapping of compact Riemann spaces into euclidean space, Duke Math. Journ., 3, 339—354 (1937).

B o u r b a k i N.

[1] Algèbre linéaire, Paris, Hermann, 1947.

[2] Algèbre multilinéaire, Paris, Hermann, 1948.

B r o u w e r L. E. J.

[1] Polydimensional vector distributions, Proc. of the Royal Acad. of Sciences, Amsterdam, 9, 66—78 (1906).

C a r t a n E.

[1] Leçons sur les invariants intégraux, Paris, Hermann, 1922. [Русский перевод: К а р т а н Э., Интегральные инварианты, Гостехиздат, М.—Л., 1940.—*Прим. перев.*]

[2] Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, Hermann, 1945.

[3] Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos, Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences, Paris, 187, 196—198 (1928).

[4] Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, Ann. de la Soc. Polonaise de Math., 8, 181—225 (1929).

[5] Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2-ème ed., Paris, Gauthier-Villars, 1946.
[Русский перевод: К а р т а н Э., Геометрия римановых пространств, ОНТИ, М.—Л., 1936.—*Прим. перев.*]

D i e u d o n n é J.
[1] Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de deux espaces compacts, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **205**, 593—595 (1937).

D u f f G. F. D.
[1] Differential forms in manifolds with boundary, Annals of Math., **56**, 115—127 (1952).
[2] (and D. C. S p e n c e r) Harmonic tensors on Riemannian manifolds with boundary, Annals of Math., **56**, 128—156 (1952).

E i l e n b e r g S.
[1] Singular homology in differentiable manifolds, Annals of Math., **48**, 670—681 (1947).

F e d e r e r H.
[1] An introduction to differential geometry. Lectures given at Brown University, 1947—48.

G a f f n e y M. P.
[1] The harmonic operator for exterior differential forms, Proc. of the National Acad. of Sciences, 37, 48—50 (1951).

G i l l i s P.
[1] Sur les formes différentielles et la formule de Stokes, Mémoires de l'Acad. royale de Belgique, classe des Sciences, XX, 1943.

H i l b e r t D.
[1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig—Berlin, Teubner, 1912.

H o d g e W. V. D.
[1] A Dirichlet problem for harmonic functionals, with applications to analytic varieties, Proc. of the London Math. Soc., **36**, 257—303 (1934).
[2] Harmonic functionals in a Riemannian space, Proc. of the London Math. Soc., **38**, 72—95 (1935).
[3] The existence theorem for harmonic integrals, Proc. of the London Math. Soc., **41**, 483—496 (1936).
[4] The theory and applications of harmonic integrals, 2nd ed., Cambridge University Press, 1952.

H o p f H.
[1] Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Journ. für die reine und angew. Math., **163**, 71—88 (1930).

H u S. T.
[1] On singular homology in differentiable spaces, Annals of Math., **50**, 266—269 (1949).

Kodaira K.
[1] Über die harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Proc. of the imperial Acad. of Sciences, Tokyo, **20**, 186—198, 257—261, 353—358 (1944).
[2] Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), Annals of Math., **50**, 587—665 (1949).

Levi E. E.
[1] I problemi dei valori al contorno per le equazioni totalmente ellitique alle derivate parziali. Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle Scienze, 3a, XVI, 1909.
[2] Sulle equazione lineari totalmente ellitique alle derivate parziali, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, **24**, 257—317 (1907).

Levi-Civita T.
[1] Der absolute Differentialkalkül, Berlin, Springer, 1928.

Lichnerowicz A.
[1] Eléments de calcul tensoriel, Paris, Armand Colin, 1951.
[2] Courbure, nombres de Betti, et espaces symétriques, Proc. of the international Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts, USA, 1950, II, 216—223.

Milgram A. N. and Rosenbloom P. C.
[1] Harmonic forms and heat conduction. I, II. Proc. of the National Acad. of Sciences, 37, 180—184, 435—438 (1951).

Nagy B. Sz. (см. Riesz F. et Nagy B. Sz.)

Nagumo M.
[1] A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis, Amer. Journ. of Math., **73**, 486—496 (1951).

Poincaré H.
[1] Analysis situs, Journ. de l'École polytechnique, Paris (2), **1**, 1—121 (1895).
[2] Complément à l'Analysis situs, Rend. del Gircolo mat. di Palermo, **13**, 285—343 (1899).

de Rham G.
[1] Intégrales multiples et Analysis situs, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **188**, 1651—1653 (1929).
[2] Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions (Thèse), Journ. de math. pures et appl., **10**, 115—200 (1931).
[3] Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples, Commentarii Mathematici Helvetici, **4**, 151—157 (1932).
[4] Sur la notion d'homologie et les résidus d'intégrales multiples, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongress, Zürich, 195 (1932).
[5] Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples, L'Enseignement mathématique, **35**, 213—228 (1936).

[6] Über mehrfache Integrale. Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hansischen Univ., **12**, 313—339.
[7] См. B i d a l [1].
[8] Sur la théorie des formes différentielles harmoniques, Annales de l'Université de Grenoble, **22**, 135—152 (1946).
[9] Remarque au sujet de la théorie des formes différentielles harmoniques, Annales de l'Université de Grenoble, **23**, 55—56 (1947—1948).
[10] (and K o d a i r a K.) Harmonic Integrals. Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, Princeton, 1950 (Polycopié).
[11] Intégrales harmoniques et théorie des intersections, Proc. of the intern. Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts, USA, 1950, II, 209—215.

R i e s z F. et N a g y B. Sz.
[1] Leçons d'analyse fonctionnelle. Budapest, Académie des sciences de Hongrie, 1952. [Русский перевод: Р и с с Ф. и С е к е ф а л ь в и - Н а д ь Б., Лекции по функциональному анализу, Иноиздат, М.—Л., 1954.—*Прим. перев.*]

R o s e n b l o o m P. C. (см. M i l g r a m [1])

S a r d A.
[1] The measure of the critical values of differentiable maps, Bull. of the Amer. Math. Soc., **48**, 883—897 (1942).

S c h w a r t z L.
[1] Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques, Annales de l'Université de Grenoble, **21**, 57—74 (1945).
[2] Théorie des distributions, I, Paris, Hermann, 1950.
[3] Théorie des distributions, II, Paris, Hermann, 1951.
[4] Théorie des noyaux, Proc. of the intern. Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts, USA, 1950, I, 220—230.

Ś e g r e B.
[1] Forme differenziali e loro integrali. Vol. I. Docet, edizioni universitarie, Roma 1951.

S p e n c e r D. C.
[1] См. D u f f [2].
[2] A generalization of a theorem of Hodge, Proc. of the National Acad. of Sciences, **38**, 533—534 (1952).
[3] Real and complex operators on manifolds. Contributions to the theory of Riemann surfaces, 203—207. Annals of Math. Studies, № 30, Princeton, N. J., 1953.

V e b l e n O.
[1] Invariants of quadratic differential forms, Cambridge University Press, 1927.

Volterra V.
[1] Delle variabili complesse negli iperspazi, Atti della Reale Accademia dei Lincei (4), **5**, 158—165, 291—299 (1889)$_1$.
[2] Sulle funzioni coniugate. Atti della Reale Accademia dei Lincei (4), **5**, 599—611 (1889)$_1$.

Weil A.
[1] Sur les théorèmes de de Rham, Commentarii Mathematici Helvetici, **26**, 119—145 (1952).

Weitzenböck R.
[1] Invariantentheorie. Groningen, Noordhoff, 1923.

Weyl H.
[1] Method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. Journ., **7**, 411—444 (1940).
[2] On Hodge's theory of harmonic integrals, Annals of Math., **44**, 1—6 (1943).

Whitehead J. H. C.
[1] On C^1-complexes, Annals of Math., **41**, 809—824 (1940).

Whitney H.
[1] Differentiable manifolds, Annals of Math., **37**, 645—680 (1936).

Yano K.
[1] On harmonic and Killing vector fields, Annals of Math., **55**, 38—45 (1952).
[2] Some remarks on tensor fields and curvature, Annals of Math, **55** (1952).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ж. де РАМ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ*

Технический редактор *В. И. Шаповалов*

Переплет художника *В. К. Хлебовского*

Сдано в производство 24/VI 1956 г.
Подписано к печати 30/VIII 1956 г.
Т-08097. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$=3,9 бум. л.
12,9 печ. л.
Уч.-издат. л. 11,7. Изд. № 1/2864.
Цена 10 р. 20 к. Зак. 358.
Издательство иностранной литературы,
Москва, Ново-Алексеевская, 52

16-я типография Главполиграфпрома
Министерства культуры СССР, Москва,
Трехпрудный пер., д. 9