Г. ДЭЙВИД

ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ

Г. ДЭЙВИД

ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ

Перевод с английского
В. А. ЕГОРОВА и В. Б. НЕВЗОРОВА

под редакцией
В. В. ПЕТРОВА

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.172
Д 94
УДК 519.2

Порядковые статистики. Г. Дэйвид. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 336 стр.

Книга содержит современное изложение теории порядковых статистик и ее приложений. Большое внимание уделено распределениям порядковых статистик, моментам порядковых статистик, оценкам и приближениям для этих моментов. Рассмотрены приложения порядковых статистик к теории оценивания, проверке статистических гипотез, задаче исключения резко выделяющихся наблюдений. Главы книги сопровождаются дополнениями, отражающими многочисленные журнальные публикации.

Книга является ценным руководством в важной области математической статистики — теории порядковых статистик и ее приложений, позволяющим специалистам быстро ориентироваться в существующей литературе. Вместе с тем эта книга может быть рекомендована студентам и аспирантам, изучающим математическую статистику.

Д $\frac{20203\text{-}092}{053(02)\text{-}79}$ 35-79. 1702060000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Порядковые статистики встречаются во многих областях статистической теории и практики. В последние годы особенно заметен быстрый рост интереса к этому предмету, о чем свидетельствуют ссылки в конце этой книги. Становится все очевиднее, что значительная часть теории, технического аппарата и приложений порядковых статистик достойна изучения сама по себе, а не как простой придаток других областей таких, как непараметрические методы. Можно осуждать эту возросшую специализацию, и вполне уместно, чтобы наиболее фундаментальные понятия предмета были включены в общие учебники и курсы, как теоретические, так и прикладные. Вместе с тем во многих университетах имеется тенденция вводить курсы лекций, в которых шире представлены порядковые статистики. Впервые я прочитал короткий курс в 1955 г. в Мельбурнском университете и с тех пор периодически читал более обширные курсы в Вирджинском политехническом институте и особенно в университете Северной Каролины, где была апробирована значительная часть материала этой книги.

В этой книге сделана попытка изложить предмет порядковых статистик в комбинированном виде, сочетающем черты как учебника, так и указателя научной литературы. Изложение ведется на среднем уровне трудности, предполагающем у читателя знание обычных основ статистической теории и приложений. Однако некоторые части книги совершенно элементарны, в то время как другие, особенно главы 4 и 9, значительно труднее. Упражнения дополняют основной текст и так же, как в книгах Кендалла, обычно снабжены ссылками на оригинальные источники.

Необходимо сказать несколько слов об отношении этой книги к единственному существующему в литературе обзору общего характера, подготовленному в департаменте биостатистики университета Северной Каролины, а именно, к написанному рядом авторов «*Введению в теорию порядковых статистик*», изданному Сарханом и Гринбергом и появившемуся в этой же серии (Wiley Series) в 1962 г.[1]). Настоящая книга не предназначена заменить эту более раннюю монографию, которая к тому же почти в два раза больше ее. В частности, большой набор таблиц «*Введения*» позволит этой книге быть полезной еще долгое время. В настоящей работе имеется только небольшое число таблиц, необходимых для объяснения текста, но она содержит в виде приложения аннотированный указатель множества таблиц, разбросанных по ряду журналов и книг; такие таблицы необходимы для использования многих из описанных методов. «*Введение*» не было спланировано как учебник и, конечно, теперь несколько устарело. Однако ряд вопросов, хорошо разработанных к 1962 г., изложен там подробнее, чем здесь. Дублирование материала, кроме наиболее фундаментального, сведено к минимуму.

С другой стороны, размер этой книги был уменьшен также благодаря возможности сослаться на доступные специализированные монографии. Так, мы отказались от намерения рассмотреть роль порядковых статистик в совместных статистических выводах главным образом из-за наличия хорошо написанного обзора Миллера (1966). Некоторых читателей может отпугнуть обилие ссылок,

---

[1]) Имеется русский перевод: см. Сархан и Гринберг (1970).

как избыток добра. Тем не менее список литературы далеко не полон и ограничивается прямыми, часто краткими указаниями на литературу. Что касается статей, имеющих дело с такими центральными вопросами, как теория распределений и оценивание, то я стремился к разумной полноте, исключив устаревшие работы. В некоторых местах охват материала менее полный, особенно там, где можно сослаться на специальную библиографию. Принять это решение мне помогла информация о планах Хартера опубликовать обширную аннотированную библиографию статей по порядковым статистикам.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить Хартли, который с присущими ему энтузиазмом и проникновением познакомил меня с предметом порядковых статистик. Я также благодарен Э. Пирсону за его поддержку в течение многих лет. При написании этой книги я ощущал теплую поддержку Б. Гринберга. Я особенно признателен П. Джоши, который внимательно прочитал всю рукопись и сделал много замечаний. Полезные замечания также сделали Р. Бредли, Дж. Гаствирт и П. Сен. Большую помощь в качестве секретарей оказали мне Делорес Гольд и Джейн Скоуевил. Эта работа была поддержана Армейским исследовательским институтом (Дарэм, Северная Каролина).

Чепел Хилл, Северная Каролина, *Г. Дэйвид*

Декабрь 1969

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Предмет порядковых статистик

Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ расположены в порядке возрастания их значений

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)},$$

то мы называем $X_{(i)}$ i-й порядковой статистикой ($i = 1, 2, \ldots, n$). Обычно, хотя и не всегда, (неупорядоченные) X_i статистически независимы и одинаково распределены; величины же $X_{(i)}$ зависимы из-за неравенств между ними.

Предмет порядковых статистик имеет дело со свойствами и применениями этих упорядоченных случайных величин и функций от них. Примерами являются экстремальные значения $X_{(n)}$ и $X_{(1)}$, размах $W = X_{(n)} - X_{(1)}$, максимальное отклонение (от выборочного среднего) $X_{(n)} - \overline{X}$ и для случайной выборки из нормального $N(\mu, \sigma^2)$ распределения стьюдентизированный размах W/S_ν, где S_ν^2 — средне-квадратическая оценка для σ^2 с ν степенями свободы. Все эти статистики имеют важные применения. Экстремальные значения возникают при статистическом изучении наводнений и засух, а также в задачах изучения прочности на разрыв и проблемах, связанных с усталостью материалов. Как хорошо известно, размах является быстро вычисляемой оценкой для σ и находит особо широкое применение в задачах контроля качества. Экстремальные отклонения являются основным инструментом при обнаружении выбросов, большие величины $(X_{(n)} - \overline{X})/\sigma$ указывают на присутствие одного или нескольких аномальных наблюдений. Стьюдентизированный размах полезен в той же ситуации, когда выбросы возникают не только в одном направлении. Кроме того, он составляет основу многих быстрых критериев для малых выборок и особенно важен для ранжированных средних в задачах дисперсионного анализа.

С помощью теоремы Гаусса — Маркова о наименьших квадратах можно систематически использовать линейные функции порядковых статистик при оценивании параметров сдвига и масштаба. Такие применения особенно полезны, когда некоторые из наблюдений в выборке «цензурированы», так как в этом случае стандартные методы оценивания становятся трудоемкими или неудовлетворительными. Испытания на продолжительность жизни дают идеальную иллюстрацию преимуществ порядковых статистик для цензурированных данных. Так как такие эксперименты могут продолжаться очень долго до их полного окончания, то часто желательно остановиться после выхода из строя первых r из n (однородных) предметов, подвергаемых испытанию. Наблюдениями являются r моментов выхода из строя, которые, в отличие от большинства ситуаций, уже упорядочены для нас самим методом эксперимента; по ним мы можем оценить необходимые параметры такие, как средняя продолжительность жизни.

В последние годы изучение порядковых статистик получило новый толчок в ряде направлений. Вычислительные машины дали возможность взглянуть на одни и те же данные со многих различных точек зрения, позволяя применять многосторонние, часто довольно неформальные приемы, получившие общее название «анализ данных» (см. Тьюки (1962)). Находятся ли данные в соответствии с (а) предполагаемым распределением и (б) предполагаемой моделью? Ключ к решению задачи (а) можно получить, сравнивая упорядоченные наблюдения с некоторыми простыми функциями их рангов, желательно на вероятностной бумаге, соответствующей предполагаемому распределению. Прямая, соответствующая такому «вероятностному чертежу», указывает на то, что все более или менее благополучно, в то время как серьезные отклонения от прямой позволяют обнаружить присутствие аномальных наблюдений или других нарушений предполагаемого распределения. Подобным же образом, отвечая на вопрос (б), можно нанести на чертеже упорядоченные «остатки» от предполагаемой модели. Отчасти в этом духе проводится поиск статистик и критериев, которые хотя и не оптимальны в идеальных условиях (например, в нормальной теории), но хорошо работают при различных обстоятельствах, которые встречаются на практике. Примером таких «робастных методов» является использование для выборок из симметричных распределений «урезанного среднего», являющегося средним тех наблюдений, которые остаются после отбрасывания k $(k<n/2)$ максимальных и k минимальных. Потеря эффективности в нормальном случае при соответствующем выборе k будет компенсироваться отсутствием чувствительности к выбросам или другим отклонениям от предполагаемого распределения.

Наконец, мы можем обратить внимание на довольно специальное, но зато соответствующее космическому веку приложение. В больших выборках (например, при подсчете числа частиц на космическом корабле) имеются интересные возможности для сокращения данных (Эйзенбергер и Познер (1965)), так как выборку можно заменить (на компьютере космического корабля) достаточным числом порядковых статистик, чтобы произвести уже на Земле как удовлетворительное оценивание параметров, так и проверку предполагаемого вида распределения.

§ 1.2. Широта охвата материала в этой книге

Хотя мы и коснемся всех тех вопросов, о которых говорилось выше, а также многих других, порядковые статистики встречаются в столь различных областях статистики, что мы вынуждены ограничиться в охвате материала. Начнем с того, что, в отличие от Уилкса (1948), мы используем термин «порядковые статистики» в более узком смысле, который сейчас повсеместно принят: мы не будем иметь дела с «ранговыми порядковыми статистиками», примером которых служит двухвыборочная статистика Вилкоксона, хотя они также требуют упорядочения наблюдений. Различие состоит в том, что ранговые порядковые статистики зависят только от рангов упорядоченных наблюдений, а не от их действительных значений, и, следовательно, приводят к непараметрическим или свободным от распределения методам — по крайней мере для непрерывных случайных величин. С другой стороны, большинство процедур, основанных на порядковых статистиках, зависит от вида рассматриваемого распределения. Однако теория порядковых статистик полезна во многих непараметрических задачах, а также при исследовании свойств ранговых критериев при альтернативах, например при помощи функции мощности.

Остальные ограничения в книге носят более частный характер. Порядковые статистики играют важную вспомогательную роль при множественных сравнениях и в сложных процедурах принятия решений таких, как ранжирование средних. Заметим, что, по нашему мнению, не следует развивать здесь элементы теории статистического вывода для рассматриваемого предмета (хотя необходимая для этого теория порядковых статистик или приведена здесь явно, или может быть выведена с помощью совсем простых рассуждений) ввиду наличия полезной книги Миллера (1966) и, в меньшей степени, монографии Бекхофера и др. (1968). Однако некоторые сложные процедуры решения для обработки аномальных наблюдений рассмотрены в главе 8.

Больше, чем это сделано в главе 9, можно было бы сказать об асимптотических методах. Однако практическая сторона этого вопроса отражена в значительной степени в книге Гумбеля (1965). С другой стороны, теория, которую значительно продвинули в последние годы, становится все более математической, что оправдывает создание более сложной монографии по этой теории. Мы считаем, что лучше всего ограничиться детальным рассмотрением некоторых наиболее важных результатов и приведением резюме других исследований.

Эффективное применение техники порядковых статистик требует большого числа таблиц. Даже включение только наиболее полезных из них намного увеличило бы объем книги. Поэтому мы ограничились несколькими таблицами, необходимыми для иллюстрации; что касается остальных, то мы отсылаем читателя к общим сборникам таблиц таким, как таблицы Пирсона и Хартли (1966), Бейера (1968) и особенно к обширному набору таблиц в книге Сархана и Гринберга (1970). Много ссылок на таблицы, помещенные в оригинальных статьях, дано на протяжении всей книги, а комментарии к ним приводятся в Приложении.

§ 1.3. Обозначения

Хотя этот параграф служит для ссылок, читатель должен просмотреть его прежде, чем переходить к дальнейшему.

Насколько это возможно, случайные величины (или просто величины) будут обозначаться прописными буквами, а их реализации (наблюдения) соответствующими строчными буквами. Под порядковыми статистиками будем понимать либо упорядоченные величины, либо упорядоченные наблюдения. Таким образом,

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ — неупорядоченные величины;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неупорядоченные наблюдения;

$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$ — упорядоченные величины,
$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ — упорядоченные наблюдения
} порядковые статистики;

$X_{1:n} \leqslant X_{2:n} \leqslant \ldots \leqslant X_{n:n}$ — упорядоченные величины — более подробная форма записи.

Когда надо подчеркнуть объем выборки, мы используем более подробную форму обозначений, переходя довольно свободно от подробной к краткой форме.

$P(x) = \mathsf{P}(X \leqslant x)$ — функция распределения случайной величины X;

$p(x)$ — { плотность распределения для непрерывной случайной величины, вероятностная функция для дискретной случайной величины;

$F_r(x)$, $F_{r:n}(x)$ — функция распределения случайной величины X_r, $X_{r:n}$, $r = 1, 2, \ldots, n$;

$f_r(x)$, $f_{r:n}(x)$ — плотность распределения или вероятностная функция случайной величины X_r, $X_{r:n}$;

$F_{rs}(x, y) = \mathsf{P}(X_{(r)} \leqslant x,\ X_{(s)} \leqslant y)$ — совместная функция распределения случайных величин $X_{(r)}$ и $X_{(s)}$;

$f_{rs}(x, y)$ — совместная плотность распределения или вероятностная функция случайных величин $X_{(r)}$ и $X_{(s)}$;

ξ_p — квантиль порядка p для распределения, т. е. корень уравнения $P(\xi_p) = p$ или, что то же самое, $\xi_p = P^{-1}(p) = Q(p)$, $0 < p < 1$;

$\xi_{1/2}$ — медиана распределения;

$X_{([np]+1)}$ — выборочная квантиль порядка p, где $[np]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее np;

$X_{([n\lambda_i]+1)}$ — выборочная квантиль порядка λ_i, $0<\lambda_1 \wedge <\lambda_2<\ldots<\lambda_k<1$.

Но выборочная медиана — это

$X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, если n нечетное;

$\frac{1}{2}(X_{(n/2)}+X_{(n/2+1)})$, если n четное.

Далее,

W, $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ — (выборочный) размах;

$W_{(i)} = X_{(n-i+1)} - X_{(i)}$ — i-й квазиразмах ($W_{(1)} = W$);

$\overline{W}$, $\overline{W}_{n,k}$ — среднее из k размахов;

${}_jW$ — размах для j-й выборки;

$W_{rs} = X_{(s)} - X_{(r)}$;

$\mu = \mathsf{E}X$, $\sigma^2 = \mathsf{D}X$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины X;

$\mu_X = \mathsf{E}X$, $\mu_Y = \mathsf{E}Y$ — математические ожидания случайных величин X и Y (двумерный случай);

$\sigma_X^2 = \mathsf{D}X$, $\sigma_Y^2 = \mathsf{D}Y$ — дисперсии случайных величин X и Y;

$\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y)$, $\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$ — ковариация и коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y;

$\mu_{r:n} = \mathsf{E}X_{r:n}$ — математическое ожидание случайной величины $X_{r:n}$;

$\mu_{r:n}^k$ — момент k-го порядка случайной величины $X_{r:n}$;

$\mu_{rs:n} = \mathsf{E}X_{r:n}X_{s:n}$;

$\sigma_{r:n}^2 = \mathsf{D}X_{r:n}$;

$\sigma_{rs:n} = \operatorname{cov}(X_{r:n}, X_{s:n})$;

$Q(x) = P^{-1}(x)$ — функция, обратная к функции распределения P;

$p_r = r/(n+1)$, $q_r = 1 - p_r$;

$Q_r = Q(p_r)$, $f_r = p(Q_r)$;

$Q_r' = \frac{dQ(p_r)}{dp_r} = \frac{1}{f_r}$;

S_ν — оценка для σ с ν степенями свободы; для нормального $N(\mu, \sigma^2)$ распределения $\nu S_\nu^2/\sigma^2 \sim \chi^2$;

$Q_{n,\nu} = W_n/S_\nu$ — стьюдентизированный размах (W_n и S_ν независимы).

$S = [\Sigma(X_i - \overline{X})^2/(n-1)]^{1/2}$ — (внутренняя) оценка для σ;

$S^{(P)} = \{[(n-1)S^2 + \nu S_\nu^2]/(n-1+\nu)\}$ — суммарная оценка для σ;

${}_jS$ — значение S для j-й выборки;

$\mathrm{B}(a,\ b)=\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt,\ a>0,\ b>0$ — бета-функция,

$I_p(a,\ b)=\int\limits_0^p t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt/\mathrm{B}(a,\ b)$ — неполная бета-функция; (1.3.1)

$\mathrm{B}(a,\ b)$ — случайная величина X, имеющая бета-распределение с функцией распределения

$$\mathsf{P}(X\leqslant x)=I_x(a,\ b); \tag{1.3.2}$$

χ_ν^2 — случайная величина X, имеющая хи-квадрат распределение с ν степенями свободы;

$\varphi(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$, — плотность распределения стандартного нормального закона, $-\infty<x<\infty$;

$N(\mu,\ \sigma^2)$ — нормальная случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2;

$N(\mu,\ \Sigma)$ — многомерная нормальная случайная величина с вектором математических ожиданий μ и ковариационной матрицей Σ;

$n^{(k)}=n(n-1)\ldots(n-k+1)$,

$k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$;

$[x]$ — целая часть x (но $\mu_{[k]}=\mathsf{E}X^k$);

$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ — случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 (аналогичное обозначение применяется для случайных величин, имеющих другие вероятностные распределения);

п. р. — плотность распределения;

ф. р. — функция распределения;

н. к. оценки — оценки наименьших квадратов;

РНМ — равномерно наиболее мощный;

ПХ — Пирсон и Хартли (1966) — Биометрические таблицы 1;

СГ — Сархан и Гринберг (1970) — Введение в теорию порядковых статистик;

П.5.3 — Приложение, содержащее список таблиц, относящихся к § 5.3.

с. в. — случайная величина.

ГЛАВА 2

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 2.1. Распределение порядковых статистик

Предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — n независимых случайных величин с общей функцией распределения (ф. р.). Пусть $F_r(x)$ ($r=1, 2, \ldots, n$) обозначает ф. р. r-й порядковой статистики $X_{(r)}$. Тогда ф. р. наибольшей порядковой статистики $X_{(n)}$ дается формулой

$$F_n(x) = \mathsf{P}\{X_{(n)} \leqslant x\} = \mathsf{P}\{\text{все } X_i \text{ не превосходят } x\} = P^n(x). \tag{2.1.1}$$

Аналогично получаем

$$F_1(x) = \mathsf{P}\{X_{(1)} \leqslant x\} = 1 - \mathsf{P}\{X_{(1)} > x\} = \\ = 1 - \mathsf{P}\{\text{все } X_i > x\} = 1 - [1 - P(x)]^n. \tag{2.1.2}$$

Эти формулы — важные частные случаи следующей общей формулы для $F_r(x)$:

$$F_r(x) = \mathsf{P}\{X_{(r)} \leqslant x\} = \\ = \mathsf{P}\{\text{по крайней мере } r \text{ из } X_i \text{ меньше или равно } x\} = \\ = \sum_{i=r}^{n} C_n^i P^i(x)[1 - P(x)]^{n-i}, \tag{2.1.3}$$

так как i-е слагаемое в правой части этой суммы является биномиальной вероятностью того, что ровно i величин из $X_1, X_2, \ldots, X_n$ меньше или равно x. Перепишем (2.1.3) в виде

$$F_r(x) = E_{P(x)}(n, r) \tag{2.1.4}$$

и заметим, что функция E затабулирована во многих источниках (например, Гарвардская вычислительная лаборатория (1955), где используется обозначение $E(n, r, P(x))$). Кроме того, из хорошо известного соотношения между биномиальными суммами и неполной бета-функцией следует, что

$$F_r(x) = I_{P(x)}(r,\ n-r+1), \tag{2.1.5}$$

где $I_p(a,\ b)$ определено в (1.3.1). Таким образом, $F_r(x)$ может быть также вычислена по таблицам $I_p(a,\ b)$ (К. Пирсон (1934)). Процентные точки $X_{(r)}$ можно получить из этих таблиц обратным интерполированием или сразу из таблицы 16 Биометрических таблиц (Пирсон и Хартли (1966)), которая дает процентные точки неполной бета-функции.

Пример 2.1. Найдем верхнюю 5-процентную точку $X_{(4)}$ в выборке объема 5 из стандартного нормального распределения.

Мы ищем x, удовлетворяющее соотношению

$$I_{P(x)}(4,2) = 0{,}95 \quad \text{или} \quad I_{1-P(x)}(2,4) = 0{,}05.$$

Из последнего равенства следует, что $1 - P(x) = 0{,}7644$. Поэтому $x = 1{,}429$.

Необходимо заметить, что формулы (2.1.1)—(2.1.5) справедливы как для непрерывных, так и для дискретных величин. Теперь мы будем предполагать, что X_i — непрерывные величины с плотностью распределения (п. р.) $p(x) = P'(x)$, но мы вернемся к дискретному случаю в § 2.4. Если $f_r(x)$ — п. р. случайной величины $X_{(r)}$, то из (2.1.5) следует равенство

$$f_r(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(r,\ n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{P(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}(r,\ n-r+1)} P^{r-1}(x)\,[1-P(x)]^{n-r}\,p(x). \tag{2.1.6}$$

В силу важности этой формулы мы выведем ее еще раз другим способом. Событие $x < X_{(r)} < x + \delta x$ может быть реализовано следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} r-1 & \mid 1 \mid & n-r \\ \hline & x \mid \quad \mid x+\delta x & \end{array}$$

$X_i \leqslant x$ для $r-1$ из величин X_i, $x < X_i < x + \delta x$ для одной из X_i и $X_i > x + \delta x$ для остальных $n-r$ величин X_i.

Число способов, которыми n наблюдений можно разбить на три такие группы, равно

$$\frac{n!}{(r-1)!\,1!\,(n-r)!}=\frac{1}{\mathrm{B}(r,\,n-r+1)},$$

и каждый из них имеет вероятность

$$P^{r-1}(x)\,[P(x+\delta x)-P(x)]\,[1-P(x+\delta x)]^{n-r}.$$

Поэтому, считая δx малым, получим

$$\mathrm{P}\,\{x<X_{(r)}\leqslant x+\delta x\}=$$
$$=\frac{1}{\mathrm{B}(r,\,n-r+1)}\,P^{r-1}(x)\,p(x)\,\delta x\,[1-P(x+\delta x)]^{n-r}+O(\delta x^2),$$

где $O(\delta x^2)$ означает член порядка $(\delta x)^2$ и включает в себя вероятность тех реализаций события $x<X_{(r)}<x+\delta x$, при которых более чем одно из X_i попадает в интервал $(x,\,x+\delta x)$. Деля обе части этого равенства на δx и устремляя δx к нулю, получим опять (2.1.6).

§ 2.2. Совместное распределение двух или большего числа порядковых статистик

Совместную плотность $X_{(r)}$ и $X_{(s)}$ $(1\leqslant r<s\leqslant n)$ удобно обозначать $f_{rs}(x,\,y)$. Выражение, соответствующее (2.1.5), можно вывести, если заметить, что составное событие $x<X_{(r)}\leqslant x+\delta x$, $y<X_{(s)}\leqslant y+\delta y$ реализуется (с точностью до членов, имеющих более высокий порядок малости) в виде конфигурации

$$\begin{array}{ccccccccc} & r-1 & & 1 & & s-r-1 & & 1 & n-s \\ \hline & & x & & x+\delta x & & y & & y+\delta y \end{array}$$

Это означает, что $(r-1)$ из всех наблюдений меньше x, одно попадает в интервал $(x,\,x+\delta x)$ и т. д. Отсюда для $x\leqslant y$ следует, что

$$f_{rs}(x,\,y)=\frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}\times$$
$$\times\,P^{r-1}(x)\,p(x)\,[P(y)-P(x)]^{s-r-1}\,p(y)\,[1-P(y)]^{n-s}. \quad (2.2.1)$$

Теперь ясно, как выглядят обобщения (2.2.1). Совместная п. р. величин $X_{(r_1)},\,X_{(r_2)},\,\ldots,\,X_{(r_k)}$ $(1\leqslant r_1<r_2<\ldots$

$\ldots < r_k \leqslant n;\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ для $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k$ имеет вид

$$f_{r_1 r_2 \ldots r_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{(r_1-1)!\,(r_2-r_1-1)!\ldots(n-r_k)!} \times$$
$$\times P^{r_1-1}(x_1)\,p(x_1)\,[P(x_2)-P(x_1)]^{r_2-r_1-1}\,p(x_2)\ldots$$
$$\ldots[1-P(x_k)]^{n-r_k}\cdot p(x_k). \qquad (2.2.2)$$

Если определить $x_0 = -\infty$, $x_{k+1} = +\infty$, $r_0 = 0$, $r_{k+1} = n+1$, то правую часть (2.2.2) можно переписать в виде

$$n!\left[\prod_{i=1}^{k} p(x_i)\right]\prod_{i=0}^{k}\left\{\frac{[P(x_{i+1})-P(x_i)]^{r_{i+1}-r_i-1}}{(r_{i+1}-r_i-1)!}\right\}. \qquad (2.2.3)$$

В частности, совместная п. р. всех n порядковых статистик принимает простой вид

$$n!\ p(x_1)\,p(x_2)\ldots p(x_n).$$

Последний результат, конечно, непосредственно очевиден, так как имеется $n!$ равновероятных способов упорядочения значений x_i. Он может быть использован в качестве отправной точки для вывода совместного распределения k порядковых статистик $(k < n)$ в непрерывном случае.

Совместную ф. р. $F_{rs}(x, y)$ величин $X_{(r)}$ и $X_{(s)}$ можно получить как интегрированием (2.2.1), так и с помощью прямого доказательства, пригодного также и для дискретного случая. Для $x < y$ имеем

$F_{rs}(x, y) = \mathrm{P}\,\{$по крайней мере r из величин X_i не превосходят x, по крайней мере s из величин X_i не превосходят $y\} = \sum\limits_{i=r}^{n}\sum\limits_{j=s-i}^{n-i} \mathrm{P}\,\{$ровно i из величин X_i не превосходят x; ровно j из величин X_i удовлетворяет неравенству $x < X_i \leqslant y\}$.

В этих равенствах предполагается, что если $i > s$, то j начинается с 0. Таким образом, для $x < y$ имеем

$$F_{rs}(x, y) = \sum_{i=r}^{n}\ \sum_{\max(0,\, s-i)}^{n-i} \frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!} \times$$
$$\times P^i(x)\,[P(y)-P(x)]^j\,[1-P(y)]^{n-i-j}. \qquad (2.2.4)$$

Для $x \geqslant y$ из неравенства $X_{(s)} \leqslant y$ следует $X_{(r)} \leqslant x$, так что

$$F_{rs}(x, y) = F_s(y). \tag{2.2.5}$$

§ 2.3. Распределение размаха и других систематических статистик

Зная совместную п. р. k порядковых статистик, мы можем стандартными методами вывести п. р. любой «хорошей» функции порядковых статистик. Например, чтобы найти п. р. $W_{rs} = X_{(s)} - X_{(r)}$, положим в (2.2.1) $w_{rs} = y - x$ и заметим, что преобразование, переводящее x, y в x, w_{rs}, имеет якобиан, равный по модулю единице. Таким образом, обозначая постоянные в (2.2.1) через C_{rs} и интегрируя по x, получим

$$f(w_{rs}) = C_{rs} \int_{-\infty}^{\infty} P^{r-1}(x)\, p(x)\, [P(x+w_{rs}) - P(x)]^{s-r-1} \times$$
$$\times p(x+w_{rs})\, [1 - P(x+w_{rs})]^{n-s}\, dx. \tag{2.3.1}$$

Особого интереса заслуживает случай $r = 1$, $s = n$, когда W_{rs} становится размахом W и (2.3.1) принимает вид

$$f(w) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, [P(x+w) - P(x)]^{n-2}\, p(x+w)\, dx. \tag{2.3.2}$$

Ф. р. величины W имеет еще более простой вид. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$F(w) =$$
$$= n \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \int_{0}^{w} (n-1)\, p(x+w')\, [P(x+w') - P(x)]^{n-2}\, dw'\, dx =$$
$$= n \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, [P(x+w') - P(x)]^{n-1} \Big|_{w'=0}^{w'=w}\, dx =$$
$$= n \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, [P(x+w) - P(x)]^{n-1}\, dx. \tag{2.3.3}$$

Этот важный результат можно также получить, заметив, что $np(x)\,dx\,[P(x+w) - P(x)]^{n-1}$ равно вероятности того, что при известном x ровно одна из величин X_i лежит в интервале $(x, x+dx)$, а остальные $(n-1)$ попадают в интервал $(x, x+w)$.

При применении формул (2.3.1) — (2.3.3) следует учесть, что область изменения x может быть конечной.

Пример 2.3. Найдем распределение порядковых статистик и W_{rs} в случае, когда $p(x)$ — плотность равномерного распределения: $p(x)=1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $p(x)=0$ в противном случае. Из (2.1.6) немедленно получаем

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} x^{r-1}(1-x)^{n-r}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, в соответствии с определением (1.3.2) $X_{(r)}$ является бета $\beta(r, n-r+1)$ величиной. В силу (2.2.1)

$$f_{rs}(x, y) = \begin{cases} C_{rs}x^{r-1}(y-x)^{s-r-1}(1-y)^{n-s}, & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $p(x+w_{rs})=0$ для $x \geqslant 1-w_{rs}$, то из (2.3.1) следует, что

$$f(w_{rs}) = C_{rs} \int_0^{1-w_{rs}} x^{r-1} w_{rs}^{s-r-1}(1-x-w_{rs})^{n-s}\, dx.$$

Положив $x=y(1-w_{rs})$, получим

$$f(w_{rs}) = \frac{1}{\mathrm{B}(s-r, n-s+r+1)} w_{rs}^{s-r-1}(1-w_{rs})^{n-s+r} \tag{2.3.4}$$

$$(0 \leqslant w_{rs} \leqslant 1).$$

Этот простой результат показывает, что W_{rs} имеет бета-распределение, которое зависит только от $s-r$, а не от s и r по отдельности. (См. также § 5.4.)

Кроме размаха представляют интерес простые систематические статистики — квазиразмахи $W_{r, n-r+1}$ $\left(r = 2, 3, \ldots, \left[\frac{1}{2}n\right]\right)$, выборочная медиана для четного n, равная $\frac{1}{2}\left(X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right)$, и экстремальное отношение $X_{(n)}/X_{(1)}$. Последнее определяется для распределений, заданных на положительной полуоси.

§ 2.4. Порядковые статистики для дискретного распределения

Если $p(x)$ сосредоточена в точках $x=0, 1, 2, \ldots$, то положим $f_r(x)=\mathrm{P}\{X_{(r)}=x\}$. Последняя функция называется вероятностной функцией (в. ф.) величины $X_{(r)}$. Из (2.1.4) и (2.1.5) получаем для нее выражения

$$f_r(x)=F_r(x)-F_r(x-1)=E_{P(x)}(n, r)-E_{P(x-1)}(n, r)=$$
$$=I_{P(x)}(r, n-r+1)-I_{P(x-1)}(r, n-r+1). \qquad (2.4.1)$$

Выражение для двумерной в. ф. $f_{rs}(x, y)=\mathrm{P}(X_{(r)}=x, X_{(s)}=y)$ выводится из (2.2.4) и (2.2.5), так как

$$f_{rs}(x, y)=F_{rs}(x, y)-F_{rs}(x-1, y)-F_{rs}(x, y-1)+$$
$$+F_{rs}(x-1, y-1), \quad x\leqslant y.$$

Хотя с точки зрения вычислений это выражение кажется наиболее удобным, имеется другое представление, принадлежащее Кхатри (1962), более полезное для теоретической работы. С помощью рассуждений, подобных тем, которые привели нас к (2.2.1), в соответствии с приведенной типичной конфигурацией получим, что для $x<y$

$r-1-i$	$1+i+t$	$s-r-1-u-t$	$1+j+u$	$n-s-j$
	x		y	

$$f_{rs}(x, y)=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{n-s}\sum_{u, t}\times$$
$$\times\frac{n!}{(r-1-i)!\,(1+i+t)!\,(s-r-1-u-t)!\,(1+j+u)!\,(n-s-j)!}\times$$
$$\times[P(x-1)]^{r-1-i}[p(x)]^{1+i+t}[P(y-1)-P(x)]^{s-r-1-u-t}\times$$
$$\times[p(y)]^{1+j+u}[1-P(y)]^{n-s-j},$$

где $\sum\limits_{u, t}$ обозначает суммирование по всем неотрицательным целым u, t таким, что $u+t<s-r-1$. Обозначив

$$C_{rs}=n!/[(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!],$$

приходим к равенству

$$f_{rs}(x,\ y)=C_{rs}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{n-s}\sum_{u,\,t}C^i_{r-1}C^j_{n-s}\frac{(s-r-1)!}{(s-r-1-u-t)!\,u!t!}\times$$
$$\times[P(x-1)]^{r-1-i}[1-P(y)]^{n-s-j}[P(y-1)-P(x)]^{s-r-1-u-t}\times$$
$$\times[p(x)]^{1+i+t}[p(y)]^{1+j+u}\int_0^1\int_0^1 z^i(1-z)^t z'^j(1-z')^u\,dz\,dz'.$$

Меняя местами знаки суммирования и интегрирования и положив $v=P(y)-z'p(y)$, $w=P(x-1)+zp(x)$, получаем

$$f_{rs}(x,\ y)=C_{rs}\int_{P(x-1)}^{P(x)}\int_{P(y-1)}^{P(y)} w^{r-1}(v-w)^{s-r-1}(1-v)^{n-s}\,dv\,dw. \tag{2.4.2}$$

Если $x=y$, то аналогично имеем

$$f_{rs}(x,\ x)=C_{rs}\iint w^{r-1}(v-w)^{s-r-1}(1-v)^{n-s}\,dv\,dw, \tag{2.4.3}$$

где интегрирование ведется теперь по области $P(x-1)\leqslant w<v\leqslant P(x)$. Так как в (2.4.2) неравенство $w<v$ выполнено автоматически, то отсюда следует общий результат

$$f_{rs}(x,\ y)=C_{rs}\iint w^{r-1}(v-w)^{s-r-1}(1-v)^{n-s}\,dv\,dw, \tag{2.4.4}$$

где интегрирование ведется по области $w\leqslant v$,

$$P(x-1)\leqslant w\leqslant P(x),\quad P(y-1)\leqslant v\leqslant P(y).$$

§ 2.5. Непараметрические доверительные интервалы для квантилей

Предположим сначала, что X — непрерывная величина со строго возрастающей ф. р. $P(x)$. Тогда уравнение

$$P(x)=p\qquad (0<p<1) \tag{2.5.1}$$

имеет единственное решение, скажем $x=\xi_p$, которое мы называем (генеральной) *квантилью порядка* p. Таким образом, $\xi_{1/2}$ — *медиана* распределения. Если $P(x)$ не является строго возрастающей, то соотношение $P(x)=p$ может быть справедливым в некотором интервале. В этом случае любая точка этого интервала может служить квантилью порядка p.

Для дискретной с. в. X квантиль ξ_p можно определить с помощью следующего обобщения (2.5.1):

$$\mathsf{P}\{X<\xi_p\}\leqslant p\leqslant \mathsf{P}\{X\leqslant \xi_p\}. \tag{2.5.2}$$

Это соотношение определяет ξ_p единственным образом, если только $P(\xi_p)$ не равно p, в противном случае ξ_p опять лежит в некотором интервале.

Теперь мы покажем, что если X непрерывна, то случайный интервал $(X_{(r)}, X_{(s)})$ накрывает ξ_p с вероятностью, которая зависит от r, s, n и p, но не от $P(x)$, образуя, таким образом, для ξ_p непараметрический доверительный интервал. С этой целью заметим, что событие $X_{(r)}\leqslant \xi_p$ равно объединению несовместных составных событий $X_{(r)}\leqslant \xi_p$, $X_{(s)}\geqslant \xi_p$ и $X_{(r)}\leqslant \xi_p$, $X_{(s)}<\xi_p$. Таким образом, так как из $X_{(s)}<\xi_p$ следует $X_{(r)}\leqslant \xi_p$, то

$$\mathsf{P}\{X_{(r)}\leqslant \xi_p\}=\mathsf{P}\{X_{(r)}\leqslant \xi_p\leqslant X_{(s)}\}+\mathsf{P}\{X_{(s)}<\xi_p\},$$

или

$$\mathsf{P}\{X_{(r)}\leqslant \xi_p\leqslant X_{(s)}\}=\mathsf{P}\{X_{(r)}\leqslant \xi_p\}-\mathsf{P}\{X_{(s)}<\xi_p\}. \tag{2.5.3}$$

Из (2.5.1), (2.1.5) и (2.1.3) следует, что в непрерывном случае $(X_{(r)}, X_{(s)})$ накрывает ξ_p с вероятностью $\pi(r, s, n, p)$, равной

$$\pi(r, s, n, p)=I_p(r, n-r+1)-I_p(s, n-s+1)=\\ =\sum_{i=r}^{s-1} C_n^i p^i(1-p)^{n-i}. \tag{2.5.4}$$

Это и есть требуемый результат, по существу полученный Томпсоном (1936); еще одно доказательство имеется в упр. 2.5.1.

В дискретном случае из неравенств $\mathsf{P}\{X\leqslant \xi_p\}\geqslant p$ и $\mathsf{P}\{X<\xi_p\}\leqslant p$ следует, что

$$\mathsf{P}\{X_{(r)}\leqslant \xi_p\}\geqslant I_p(r, n-r+1),\ \mathsf{P}\{X_{(s)}<\xi_p\}\leqslant\\ \leqslant I_p(s, n-s+1), \tag{2.5.5}$$

так что из (2.5.3) вытекает неравенство

$$\mathsf{P}\{X_{(r)}\leqslant \xi_p\leqslant X_{(s)}\}\geqslant \pi(r, s, n, p). \tag{2.5.6}$$

С помощью аналогичных рассуждений получаем, что

$$\mathrm{P}\{X_{(r)} < \xi_p < X_{(s)}\} \leqslant \pi(r,\ s,\ n,\ p). \qquad (2.5.7)$$

Левые части неравенств (2.5.6) и (2.5.7) уже не являются независимыми от $P(x)$, но, как мы видим, они обладают нижней и верхней границами, не зависящими от распределения. Эти результаты были впервые получены (другим методом) Шеффе и Тьюки (1945).

Если n и p фиксированы, то доверительные интервалы с коэффициентом доверия $\geqslant 1-\alpha$ получаются при любом выборе r и s таком, что $\pi \geqslant 1-\alpha$. Конкретный выбор до некоторой степени произволен, но естественно попытаться сделать разность $s-r$ как можно меньше при условии, что $\pi \geqslant 1-\alpha$. При $p=1/2$ эта процедура, очевидно, приводит к значению $s=n-r+1$, и в этом случае π принимает вид

$$\pi\left(r,\ n-r+1,\ n,\ \frac{1}{2}\right) = 2I_{1/2}(r,\ n-r+1)-1 = 2^{-n}\sum_{i=r}^{n-r} C_n^i.$$

Доверительные интервалы для медианы тесно связаны с критерием знаков, причем одна и та же таблица служит для обоих целей. Подробные таблицы вместе с обзором таблиц, имеющих отношение к этому вопросу, имеются у Маккиннона (1964). Из нормальной аппроксимации биномиального распределения мы получаем очень простое практическое правило:

Для $n>10$ можно получить приближенный $(1-\alpha)$-доверительный интервал для медианы, если отсчитать от выборочной медианы влево и вправо по $\frac{1}{2}n^{1/2}u_\alpha$ наблюдений (округляя до следующего целого числа), где u_α — верхняя $\alpha\cdot\frac{1}{2}$-значимая точка стандартного нормального распределения.

Пример 2.5. Для $n=100$, $\alpha=0{,}05$ это правило дает $\frac{1}{2}n^{1/2}u_\alpha = 5\cdot(1{,}96) = 9{,}8$. Округляя $50{,}5 \pm 9{,}8$, мы получаем интервал $(x_{(40)},\ x_{(61)})$, который согласуется с рекомендациями Маккиннона.

Если известно, что $p(x)$ симметрична и непрерывна, то для $\xi_{1/2}$ можно построить доверительные интервалы, которые, вообще говоря, короче и имеют более широкий набор коэффициентов доверия. Вместо того, чтобы базироваться на отдельных порядковых статистиках, эти интервалы имеют своими концами два из $\frac{1}{2}n(n+1)$ средних вида $\frac{1}{2}(x_{(i)}+x_{(j)})$ $(i \geqslant j)$. Интересно отметить, что эти интервалы тесно связаны с ранговым критерием знаков. (См. работы Уолша (1949 a, b) и Тьюки (1949).)

Разности между порядковыми статистиками $X_{(s)}-X_{(r)}$ можно использовать таким же образом для построения доверительных интервалов для разностей квантилей $\xi_q-\xi_p$ $(q>p)$. Такие разности квантилей могут представлять интерес сами по себе, особенно *межквартильное расстояние* $\xi_{3/4}-\xi_{1/4}$; возможно, более важным является то, что если $P(x)$ — ф. р., зависящая только от параметров сдвига и масштаба, то доверительные интервалы для $\xi_q-\xi_p$ можно легко превратить в доверительные интервалы для стандартного отклонения. В последнем случае доверительные интервалы уже зависят от распределения (см. гл. 6). Покажем теперь, что

$$\mathrm{P}\{X_{(s)}-X_{(r)} \geqslant \xi_q-\xi_p\} \geqslant E_p(n, r)-E_q(n, s)=L, \tag{2.5.8}$$

$$\mathrm{P}\{X_{(v)}-X_{(u)} \leqslant \xi_q-\xi_p\} \geqslant E_q(n, v)-E_p(n, u)=L' \tag{2.5.9}$$

(Чу (1957)); сравните с упр. 2.5.5).

Доказательство. Имеем в силу (2.5.5)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_{(s)}-X_{(r)} \geqslant \xi_q-\xi_p\} &\geqslant \mathrm{P}\{X_{(s)} \geqslant \xi_q,\ X_{(r)} \leqslant \xi_p\} \geqslant \\ &\geqslant \mathrm{P}\{X_{(s)} \geqslant \xi_q\}+\mathrm{P}\{X_{(r)} \leqslant \xi_p\}-1= \\ &=\mathrm{P}\{X_{(r)} \leqslant \xi_p\}-\mathrm{P}\{X_{(s)}<\xi_q\} \geqslant E_p(n, r)-E_q(n, s).\end{aligned}$$

Так же доказывается неравенство (2.5.9).

Для достаточно больших n легко показать, что для любого α $(0<\alpha<1)$ найдется по крайней мере один набор целых r, s, u, v, для которого

$$L \geqslant 1-\alpha \quad \text{и} \quad L' \geqslant 1-\alpha. \tag{2.5.10}$$

Соответствующие разности $X_{(s)}-X_{(r)}$ и $X_{(v)}-X_{(u)}$ являются тогда верхней и нижней доверительными границами для $\xi_q-\xi_p$ с коэффициентом доверия не меньшим, чем $1-\alpha$. В симметричном случае $q=1-p$ кажется естественным использовать квазиразмахи[1]). Если положить $s=n-r+1$ и $v=n-u+1$, то условие (2.5.10) примет вид

$$E_p(n,\ r)\geqslant 1-\frac{1}{2}\alpha,\quad E_p(n,\ u)\leqslant\frac{1}{2}\alpha.$$

Последовательные процедуры построения доверительных интервалов для ξ_p изучались Фаррелом (1966). Некоторые доверительные множества для многомерных медиан предложены Хоэлом и Шейером (1961). Процедуры для расслоенных выборок рассмотрены Маккарти (1965) и Лойнесем (1966).

§ 2.6. Непараметрические толерантные интервалы

Как и доверительный интервал, толерантный интервал имеет случайные концы, скажем L и V. Однако, если доверительный интервал должен накрыть с заданной вероятностью параметр распределения такой, как математическое ожидание, дисперсия или квантиль, то требование к толерантному интервалу $(L,\ V)$ состоит в том, чтобы вероятностная мера, сосредоточенная на нем, была не меньше, чем γ, с вероятностью β, где β и γ — заранее выбранные постоянные $(0\leqslant\beta,\ \gamma\leqslant 1)$. Таким образом, если $p(x)$ непрерывна, то мы ищем L, V так, чтобы

$$\mathsf{P}\left\{\int\limits_L^V p(x)\,dx\geqslant\gamma\right\}=\beta. \tag{2.6.1}$$

Оказывается, что левая часть (2.6.1) имеет значение, не зависящее от $p(x)$, тогда (Уилкс (1942)) и только тогда (Роббинс, 1944), когда L и V являются порядковыми статистиками [включающими, возможно, $X_{(0)}=-\infty$ и $X_{(n+1)}=+\infty$]. Чтобы убедиться в первой части этого утверждения, заметим, что при $L=X_{(r)}$, $V=X_{(s)}$ $(s>r)$ левую часть (2.6.1) можно переписать в виде

$$\mathsf{P}\,\{P\,(X_{(s)})-P\,(X_{(r)})\geqslant\gamma\}. \tag{2.6.2}$$

---

[1]) Заметим, что Чу использовал термин «квазиразмах» для разности $X_{(s)}-X_{(r)}$ для любого $s>r$, в то время как мы распространяем этот термин только на случай $s=n-r+1$.

Но вероятностное интегральное преобразование $u=P(x)$ сохраняет порядок и преобразует $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ в $U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}$, где $U_{(i)}=P(X_{(i)})$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ теперь — порядковые статистики из равномерного на интервале (0,1) распределения. Вероятность (2.6.2) с помощью (2.3.4) преобразуется к виду

$$\mathsf{P}\{W_{rs} \geqslant \gamma\} = 1 - I_\gamma(s-r,\ n-s+r+1).$$

Очевидно, что в общем случае равенство (2.6.1) не может выполняться точно, но r и s можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $\mathsf{P}(W_{rs} \geqslant \gamma) \geqslant \beta$. Для одностороннего толерантного интервала мы выбираем либо $r=0$, либо $s=n+1$, для двухстороннего интервала полезно иметь равенство $s=n-r+1$. Тогда с помощью одной из величин r или s можно сделать так, чтобы $\mathsf{P}(W_{rs} \geqslant \gamma)$ превосходила β на сколь угодно малую величину. Задачу можно также обратить следующим образом: как велико должно быть n при заданных r, s (а также β, γ)?

Пример 2.6. Для $r=1$, $s=n$ (2.6.1) примет вид

$$1 - I_\gamma(n-1,\ 2) = \beta$$

или

$$\frac{n!}{(n-2)!} \int_0^\gamma z^{n-2}(1-z)\,dz = 1-\beta,$$

т. е.

$$n\gamma^{n-1} - (n-1)\gamma^n = 1-\beta.$$

Это уравнение можно решить численно относительно n и результат округлить до следующего целого. Для $\gamma=0{,}95$, $\beta=0{,}90$ найдем, что $n=77$.

Таблицы, полезные в общем случае, приведены Мерфи (1948) и Сомервиллом (1958).

Так же, как и в § 2.5, можно показать (Шеффе и Тьюки (1945)), что для дискретного распределения справедливо неравенство

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{x=X_{(r)}}^{X_{(s)}} p(x) \geqslant \gamma\right\} \geqslant 1 - I_\gamma(s-r,\ n-s+r+1) \geqslant$$

$$\geqslant \mathsf{P}\left\{\sum_{x=X_{(r+1)}}^{X_{(s-1)}} p(x) \geqslant \gamma\right\}.$$

Интересные обобщения непараметрических толерантных областей для многомерных распределений приведены, например, Фрейзером (1957) и Уилксом (1967). Сондерс (1963) рассмотрел последовательные процедуры. (См. также упр. 2.6.2.)

§ 2.7. Результаты, связанные с независимостью — порядковые статистики как цепь Маркова

Пусть $Z_{(1)} \leqslant Z_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant Z_{(n)}$ — порядковые статистики для выборки объема n из экспоненциального распределения с п. р.

$$p(z) = e^{-z} \qquad (0 \leqslant z < \infty). \tag{2.7.1}$$

В этом случае совместная п. р. величин $Z_{(r)}$ равна

$$n! \exp\left(-\sum_{r=1}^{n} z_r\right) \qquad (0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_n < \infty).$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$n! \exp\left[-\sum_{r=1}^{n} (n-r+1)(z_r - z_{r-1})\right],$$

где $z_0 = 0$ (Сукхатме (1937)). Положив

$$y_r = (n-r+1)(z_{(r)} - z_{(r-1)}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.7.2}$$

и заметив, что каждая из величин Y_r распределена в интервале $(0, \infty)$, видим, что Y_r — статистически независимые величины с общей п. р. (2.7.1).

Этот простой результат имеет важные применения в задаче испытания на продолжительность жизни, так как с точностью до масштабного множителя $Z_{(r)}$ можно интерпретировать как последовательные продолжительности жизни n одновременно подвергаемых испытанию предметов при условии, что время жизни каждого из этих предметов $X = \lambda Z$ $(\lambda > 0)$ имеет экспоненциальное распределение с математическим ожиданием λ. Тогда интервалы длины $X_{(r)} - X_{(r-1)}$ между последовательными моментами гибели независимы и распределены как $\lambda Z/(n-r+1)$. Мы вернемся к этому приложению в главе 6, § 6.4.

Соотношение (2.7.2) позволяет выразить $z_{(r)}$ в виде

$$z_{(r)}=\sum_{i=1}^{r}(z_{(i)}-z_{(i-1)})=\sum_{i=1}^{r}y_i/(n-i+1), \qquad (2.7.3)$$

т. е. как линейную функцию независимых экспоненциальных величин. Отсюда сразу следует, что распределение $Z_{(r)}$ при условии $Z_{(j)}=z_{(j)}$ для всех $j<r$ точно такое, как и распределение $Z_{(r)}$ при единственном условии $Z_{(r-1)}=z_{(r-1)}$; другими словами, $Z_{(1)}, Z_{(2)}, \ldots, Z_{(n)}$ образуют (аддитивную) марковскую цепь (Реньи (1953)).

Рассмотрим теперь порядковые статистики $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant \leqslant\ldots\leqslant x_{(n)}$ для выборки из непрерывного распределения со строго возрастающей ф. р. $P(x)$. Тогда, как отмечено в § 2.6, преобразование $u=P(x)$ переводит $X_{(r)}$ в $U_{(r)}$ $(r=1, 2, \ldots, n)$ — порядковые статистики из равномерного $R(0, 1)$ распределения. Так как $z=-\log u$ является убывающей функцией u и величина $-\log U$ имеет экспоненциальное распределение (2.7.1), то $Z_{(r)}$, определяемые равенствами

$$Z_{(r)}=-\log U_{(n-r+1)} \qquad (r=1, 2, \ldots, n),$$

являются порядковыми статистиками, введенными в начале параграфа. Поэтому с учетом (2.7.3) $X_{(n-r+1)}$ можно выразить в виде

$$\begin{aligned}X_{(n-r+1)}&=P^{-1}(U_{(n-r+1)})=P^{-1}\left(e^{-Z_{(r)}}\right)=\\&=P^{-1}\left(\exp-\left(\frac{Y_1}{n}+\frac{Y_2}{n-1}+\ldots+\frac{Y_r}{n-r+1}\right)\right).\end{aligned} \qquad (2.7.4)$$

Теперь можно записать

$$X_{(n-r)}=P^{-1}\left\{\exp\left[\log P\left(X_{(n-r+1)}\right)-\frac{Y_{r+1}}{n-r}\right]\right\},$$

откуда в силу независимости $X_{(n-r+1)}$ и $Y_{(r+1)}$ и равенства (2.7.4) следует, что величины $X_{(n)}, X_{(n-1)}, \ldots, X_{(1)}$ образуют цепь Маркова. Этим же свойством обладают и величины $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$, что становится очевидным, если заменить X на $-X$. Этот результат имеет следующее важное следствие:

Теорема 2.7. *Для случайной выборки объема n из непрерывного распределения условное распределение величины $X_{(s)}$ при условии $X_{(r)}=x_{(r)}$ $(s>r)$ совпадает* *с распределением $(s-r)$-й порядковой статистики в выборке объема $n-r$ из этого же распределения, усеченного слева точкой $x=x_{(r)}$* [2, 3]).

Из (2.7.4) следует, что отношения

$$\frac{U_{(r)}}{U_{(r+1)}}=\exp\left(-\frac{Y_{n-r+1}}{r}\right) \tag{2.7.5}$$

взаимно независимы ($r=1, 2, \ldots, n$; $U_{(n+1)}=1$). Отсюда вытекает, что

$$\left(\frac{U_{(r)}}{U_{(r+1)}}\right)^r=\exp(-Y_{n-r+1})$$

— взаимно независимые равномерные $R(0, 1)$ величины. Этот результат принадлежит Мальмквисту (1950).

Другую группу результатов, связанных с независимостью, можно получить для нормального распределения. Из хорошо известного свойства независимости совокупности величин $X_i-\bar{X}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ и среднего $\bar{X}$ следует, что $\bar{X}$ не зависит от любой статистики, которая может быть выражена в виде функции от разностей $X_i-\bar{X}$, т. е. от статистики, свободной от параметра сдвига, такой, например, как размах, который можно записать в виде $W=\max(X_j-\bar{X})-\min(X_j-\bar{X})$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ (см. работу Дэйли (1946)).

Характеризации. Независимость величин Y_r $(r=1, 2, \ldots, n)$ в (2.7.2) можно использовать для характеризации экспоненциального распределения. Наиболее простым из результатов такого рода является следующий: если X_1 и X_2 — независимые одинаково распределенные величины с абсолютно непрерывным распределением и если $X_{(1)}$ и $X_{(2)}-X_{(1)}$ независимы, то X_1 и X_2 имеют экспоненциальное распределение (общего вида).

Обсуждение характеризаций различных распределений свойствами порядковых статистик приведено у Фергюсона (1967), где можно найти дальнейшие ссылки. Работами в том же духе являются работы Россберга (1965а) и Говиндараюлу (1967). Интересная, хотя и другого рода, характеризация получена Ченом (1967с): пусть X и Y

---

[2]) Эта теорема следует из того, что Тьюки (1947) называет «принципом Вальда».

[3]) Точнее было бы сказать: из условного распределения X при условии, что $X\geqslant x_{(r)}$. (*Прим. перев.*)

имеют такие распределения, что $\mathsf{E}X$ и $\mathsf{E}Y$ существуют; тогда необходимое и достаточное условие для того, чтобы эти два распределения совпадали, состоит в том, что $\mathsf{E}X_{(n)} = \mathsf{E}Y_{(n)}$ для всех выборок объема $n \geqslant 1$.

Упражнения

2.1.1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые величины, такие, что X_i имеет геометрическое распределение с параметром p_i, т. е.

$$p(x_i) = q_i^{x_i - 1} \cdot p_i, \quad q_i = 1 - p_i, \quad x_i = 1, 2, \ldots$$

Показать, что $X_{(1)}$ имеет геометрическое распределение с параметром $1 - q_1 q_2 \ldots q_n$ (Марголин и Винокур (1967)).

2.1.2. Показать, что для случайной выборки объема n из непрерывного распределения с симметричной относительно μ п. р. величины $f_r(x)$ и $f_{n-r+1}(x)$ являются зеркальными образами друг друга при отражении относительно $x = \mu$, т. е.

$$f_r(\mu + x) = f_{n-r+1}(\mu - x).$$

Обобщить этот результат на совместные распределения порядковых статистик.

2.1.3. Показать, что для экспоненциального распределения с п. р.

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

ф. р. величины $X_{(n)}$ в случайной выборке объема n равна

$$F_n(x) = (1 - e^{-x})^n.$$

С помощью этого результата доказать, что при $n \to \infty$ ф. р. разности $X_{(n)} - \log n$ сходится к предельной функции $\exp\{-e^{-x}\}$ $(-\infty \leqslant x \leqslant \infty)$.

2.1.4. Пусть $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_N$ — элементы конечной генеральной совокупности, из которой извлекается выборка $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$ $(n \leqslant N)$ без возвращения. Показать, что

$$\mathsf{P}\{X_{(i)} = x'_t\} = \frac{C_{t-1}^{i-1} C_{N-t}^{n-i}}{C_N^n} \qquad (t = i,\ i+1,\ \ldots,\ N-n+i)$$

Уилкс (1967), стр. 255).

2.1.5. Показать, что для выборки нечетного объема из непрерывного распределения медиана распределения выборочной медианы равна медиане исходного распределения (ван дер Ваарт (1961b)).

2.1.6. Предположим, что частицы распределены на некотором интервале таким образом, что (а) число частиц на единичном интервале подчиняется закону Пуассона со средним λ, (б) частицы изменяются по величине так, что ф. р. их размера равна $P(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Показать, что n-я наименьшая частица в единичном интервале имеет размер, меньший x, с вероятностью

$$F_n(x)=\begin{cases} 1-\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda P(x)}\frac{[\lambda P(x)]^i}{i!}, & x<b, \\ 1, & x\geqslant b \end{cases}$$

(Эпстейн (1949a)).

2.2.1. Пусть $x_{r:n}$ обозначает r-ю порядковую статистику в случайной выборке объема n, а $x_{r+1,n+1}$ обозначает $(r+1)$-ю порядковую статистику в выборке обьема $n+1$, полученную добавлением еще одного наблюдения.

Показать, что если $P(x)$ — ф. р. элемента выборки, то для $x\leqslant y$ имеем

$$\mathrm{P}\{X_{r:n}\leqslant x,\ X_{r+1,n+1}>y\}=C_n^r P^r(x)[1-P(y)]^{n-r+1}.$$

2.3.1. (а) Найти п. р. $X_{(r)}$ для случайной выборки объема n из экспоненциального распределения с п. р.

$$p(x)=\begin{cases}\theta^{-1}e^{-x/\theta}, & \theta>0,\quad x\geqslant 0, \\ 0, & x<0.\end{cases}$$

(б)[1] Показать, что $X_{(r)}$ и $X_{(s)}-X_{(r)}$ $(s>r)$ независимы.

(в) Каково распределение $X_{(r+1)}-X_{(r)}$?

(г) Интерпретировать (б) и (в) в терминах задачи на испытание продолжительности жизни n объектов с экспоненциальным распределением времени жизни.

2.3.2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые величины, и пусть X_i имеют п. р. $p_i(x)$ и ф. р. $P_i(x)$. Доказать, что

(а) п. р. $X_{(n)}$ равна

$$f_n(x)=\left[\prod_{i=1}^{n} P_i(x)\right]\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i(x)}{P_i(x)}\right),$$

(б) ф. р. $W=X_{(n)}-X_{(1)}$ равна

$$F(w)=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} p_i(x)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[P_j(x+w)-P_j(x)]\,dx.$$

2.3.3. Пусть X_{ij} $(i=1, 2, \ldots, k;\ j=1, 2, \ldots, n)$ — k независимых случайных выборок объема n, причем X_{ij} имеет ф. р. $P_i(x)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. Показать, что максимум k-й выборки является k-м

---

[1]) Во всем упр. 2.3.1 имеется в виду показательное распределение пункта (а). (*Прим. перев.*)

максимальным членом среди kn величин с вероятностью

$$n^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{m=1}^{k} P_m^{n-1}(x)\right] \sum_{i=1}^{k} \left[\prod_{j\neq i}^{k} (1-P_j(x))\right] dP_i(x)$$

(Кон и др. (1960)).

2.3.4. Показать, что ф. р. средней точки (или середины размаха) $M=\frac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})$ случайной выборки объема n из непрерывного распределения с ф. р. $P(x)$ равна

$$F(m)=n \int\limits_{-\infty}^{m} [P(2m-x)-P(x)]^{n-1} p(x)\,dx$$

(Гумбель (1965), стр. 137).

2.3.5. (а) Показать, что совместная п. р. размаха W и средней точки M случайной выборки объема n из равномерного на $(-1/2, 1/2)$ распределения равна

$$f(w, m)=n(n-1)w^{n-2} \qquad (0 \leqslant w \leqslant 1-2|m| \leqslant 1).$$

(б) Используя этот факт, показать, что п. р. M равна $f(m)=$ $=n(1-2|m|)^{n-1}$ $\left(m \leqslant \frac{1}{2}\right)$ и что

$$\mathrm{D}(M)=\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

(Нейман и Пирсон (1928); Карлтон (1946)).

2.3.6. Показать, что п. р. размаха W для выборки объема 3 из нормального распределения с единичной дисперсией равна

$$f(w)=\frac{6e^{-1/4w^2}}{\pi\sqrt{2}} \int\limits_{0}^{w/\sqrt{6}} e^{-t^2/2}\,dt$$

(Маккей и Пирсон (1933)).

2.3.7. Показать, что для непрерывных распределений, симметричных относительно нуля, ф. р. размаха выборки объема n можно записать в виде

$$F(w)=[P(1/2w)-P(-1/2w)]^n+2n \int\limits_{w/2}^{\infty} p(x)[P(x)-P(x-w)]^{n-1}\,dx$$

(Хартли (1942)).

2.3.8. Показать, что для неограниченного, дифференцируемого, симметричного и унимодального распределения распределение средней точки также неограниченно, дифференцируемо, симметрично и унимодально (Гумбель и др. (1965)).

2.3.9. Пусть $V=X_{(n)}^{(1)}\cdot X_{(n)}^{(2)}\ldots X_{(n)}^{(k)}$ — произведение k-максимумов в независимых случайных выборках объема n из равномерного $R(0, 1)$

распределения. Показать, что п. р. V равна

$$f(v)=\frac{n^k}{\Gamma(k)}v^{n-1}(-\log v)^{k-1} \qquad (0\leqslant v\leqslant 1)$$

(Райдер (1955); Рахман (1964)).

2.3.10. Пусть W_1, W_2 — размахи независимых случайных выборок объемов n_1, n_2 ($n_1+n_2=N$) из равномерного $R(0, C)$ распределения. Доказать, что п. р. величины $U=W_1/W_2$ равна

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{n_1(n_1-1)\,n_2(n_2-1)}{N(N-1)(N-2)}\left[Nu^{n_1-2}-(N-1)\,u^{n_1-1}\right] & (0\leqslant u\leqslant 1),\\ \dfrac{n_1(n_1-1)\,n_2(n_2-1)}{N(N-1)(N-2)}\left[Nu^{-n_2}-(N-2)\,u^{-n_2-1}\right] & (1\leqslant u<\infty)\end{cases}$$

(Райдер (1951)).

2.3.11. Пусть W_1, W_2 — размахи независимых случайных выборок объемов 3 и 2 из нормального распределения. Доказать, что $R=W_1/W_2$ имеет ф. р.

$$F(r)=\frac{6}{\pi}\left[\operatorname{arctg}(3+4r^2)^{1/2}-\frac{\pi}{3}\right]$$

(Линк (1950)).

2.3.12. Пусть $X_{(n_1)}$, $Y_{(n_2)}$ — максимумы независимых случайных выборок объемов n_1, n_2 ($n_1+n_2=N$) из равномерного $R(0, C)$ распределения. Доказать, что п. р. $V=X_{(n_1)}/Y_{(n_2)}$ равна

$$f(v)=\frac{n_1n_2v^{n_1-1}}{N} \qquad (0\leqslant v\leqslant 1),$$

$$f(v)=\frac{n_1n_2v^{-n_2-1}}{N} \qquad (1\leqslant v\leqslant\infty)$$

(Мерти (1955)).

2.3.13. Доказать, что для выборки объема $2m+1$ (m — целое) с непрерывной ф. р. $P(x)$ ($0\leqslant a\leqslant x\leqslant b$) п. р. отношения максимального наблюдения к медиане $Z=X_{(2m+1)}/X_{(m+1)}$ равна

$$f(z)=\frac{(2m+1)!}{m!\,(m-1)!}\int\limits_a^{b/z} xP^m(x)\,[P(zx)-P(x)]^{m-1}\,p(x)\,p(zx)\,dx$$

(Моррисон и Тобиас (1965)).

2.3.14. Предположим, что точки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ случайно и независимо выбираются из интервала $0\leqslant x\leqslant L$.

Пусть

$$D=\min_j |X_i-X_j|$$

для некоторого фиксированного i.

Показать, что ф. р. D равна

$$F(d)=1-\left[1-\left(\frac{2d}{L}\right)\right]^n+\frac{2\{[1-d/L]^n-[1-(2d/L)]^n\}}{n} \qquad \left(0\leqslant d\leqslant \frac{1}{2}L\right),$$

$$F(d)=1-(2/n)[1-(d/L)]^n \qquad \left(\frac{1}{2}L\leqslant d\leqslant L\right)$$

(Гальперин (1960)).

2.3.15. Пусть в случайной выборке объема 3 из непрерывного распределения с п. р. $p(x)$ x', x'' $(x'\leqslant x'')$ — два самых близких наблюдения. Показать, что совместная п. р. X' и X'' равна

$$f(x',\ x'')=6p(x')\,p(x'')\,[1-P(2x''-x')+P(2x'-x'')].$$

Вывести из этого, что если $p(x)$ — п. р. стандартного нормального закона, то $U=X''-X'$, $V=U/(X_{(3)}-X_{(1)})$ имеют п. р. соответственно

$$f(u)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\int\limits_u^\infty e^{-1/4\,(3t^2+u^2)}\,dt \qquad (0\leqslant u<\infty),$$

$$f(v)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi(1-v+v^2)} \qquad \left(0\leqslant v\leqslant \frac{1}{2}\right)$$

(Сет (1950); Либлейн (1952)).

2.4.1. Доказать равенство **(2.4.3)**.

2.4.2. Пусть X — дискретная величина, принимающая значения $x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ C$, где C — положительное целое или ∞. Показать, что п. р. размаха выборки объема n равна

$$f(w)=\sum_{x=0}^{C-w}\{[P(x+w)-P(x-1)]^n-[P(x+w)-P(x)]^n-$$
$$-[P(x+w-1)-P(x-1)]^n+[P(x+w-1)-P(x)]^n\} \qquad (w>0),$$

$$f(w)=\sum_{x=0}^{C}[p(x)]^n \qquad (w=0)$$

(Абдель-Ати (1954); Барр (1955); Сиотани (1957)).

2.5.1. Получить (2.5.4), используя то, что из неравенства $X_{(r)}>\xi_p$ следует, что не более чем $r-1$ из величин X_i меньше ξ_p.

2.5.2. Найти наименьшее n, для которого (а) $(X_{(1)},\ X_{(n)})$, (б) $(X_{(2)},\ X_{(n-1)})$ содержат $\xi_{1/2}$ с вероятностью не меньшей, чем 0,99.

2.5.3. Доказать неравенство (2.5.7).

2.5.4. Пусть $(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — случайная выборка, образованная n парами наблюдений из непрерывного двумерного распределения с двумерной медианой $(\xi_{1/2},\ \eta_{1/2})$, где $\xi_{1/2}>0$. Пусть $z_i(\theta)=y_i-\theta x_i$ и $z_{(i)}(\theta)$ обозначают упорядоченные величины $z_i(\theta)$. Показать, что можно построить доверительные интервалы $(\underline{\theta},\ \overline{\theta})$ для

$\eta_{1/2}/\xi_{1/2}$ с коэффициентом доверия $2^{-n}\sum_{i=1}^{n-r} C_n^i$, находя $\underline{\theta}$ и $\bar{\theta}$ из соотношений

$$z_{(r)}(\underline{\theta}) = \inf_{\theta}\{z_{(r)}(\theta)\} = 0$$

и

$$z_{(n-r+1)}(\bar{\theta}) = \sup_{\theta}\{z_{(n-r+1)}(\theta)\} = 0$$

(Беннет (1966)).

2.5.5. Показать, что для случайной выборки объема n из непрерывного распределения

$$\mathsf{P}\{X_{(r)} < \xi_p < \xi_q < X_{(s)}\} = \int_0^p \int_q^1 f_{rs}(x, y)\,dx\,dy,$$

где $p < q$ и $f_{rs}(x, y)$ определена в прнмере 2.3. Используя это равенство, доказать, что интервал (ξ_p, ξ_q) содержится в $(X_{(r)}, X_{(s)})$ с вероятностью

$$\frac{n!}{(s-r)!}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{(-1)^i p^{r+i}}{i!\,(n-s+r-i)!}\,I_p(n-s+1,\ r-i)$$

(Уилкс (1967), стр. 341; сравните с работой Чу (1968)).

2.6.1. Для непрерывного распределения найти такое n, чтобы доля этого распределения, заключенная между $X_{(r)}$ и $X_{(n-r+1)}$, имела (а) среднее значение 0,99 и (б) вероятность того, что она находится между 0,985 и 0,995, равную прнблизительно 0,9 (ответ: $n = 999$) (Уилкс (1941)).

2.6.2. Пусть $P(x)$ — ф. р. непрерывной величины X, симметричной относительно $\xi_{1/2}$. Для случайной выборки объема n положим

$$V = \max(X_{(n)},\ 2\xi_{1/2} - X_{(1)}).$$

Показать, что для $\gamma \geqslant 1/2$ имеет место равенство

$$\mathsf{P}\{P(V) > \gamma\} = 1 - (2\gamma - 1)^n. \qquad \text{(A)}$$

Уолш (1962) использует этот и другие результаты для получения непараметрических толерантных интервалов для непрерывных симметричных распределений. У Уолша имеются неточности в доказательстве соотношения (А).

2.7.1. Возьмем две независимые случайные выборки $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ нз равномерного на $(0, C)$ распределения. Выборки таковы, что $x_{(1)} \leqslant y_{(1)}$. Рассматривая совместную п. р. величин $X_{(n_1)}$ и $Y_{(1)}$ при условии, что $X_{(1)} = x_{(1)}$, показать, что п. р. величины $T=(Y_{(1)}-X_{(1)})/(X_{(n_1)}-X_{(1)})$ равна

$$f(t)=\begin{cases}(n_1-1)\,n_2\sum\limits_{i=0}^{n_2-1}(-1)^i C_{n_2-1}^i\dfrac{t^i}{n_1+i}, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{(n_1-1)\,(n_1-1)!\,n_2!}{t^{n_1}(n_1+n_2-1)!}, & 1\leqslant t<\infty\end{cases}$$

(Хирениус (1953)).

2.7.2. k взаимно независимых случайных выборок объема n из непрерывного распределения с ф. р. $P(x)$ упорядочены по значениям наибольших членов в каждой выборке. Пусть Y_{ij} ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, k$) есть i-й по величине элемент выборки, наибольший член которой Y_{1j} имеет ранг j среди k максимумов $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1k}$. Показать, что

$$\mathsf{P}\,(Y_{ij}<x)=\sum_{\alpha=0}^{j-1}C_k^\alpha[1-P^n(x)]^\alpha[P^n(x)]^{k-\alpha}+$$
$$+\sum_{\alpha=0}^{j-1}\sum_{m=1}^{i-1}\sum_{\beta=0}^{m-1}jC_k^jmC_n^mC_{j-1}^\alpha C_{m-1}^\beta(-1)^{j+m-\beta-\alpha}\times$$
$$\times\frac{[P(x)]^{n-1-\beta}-[P(x)]^{nk-n\alpha}}{nk-n\alpha+1-n+\beta},$$

где тройная сумма равна нулю при $i=1$ (Коновер (1965); Дэйвид (1966)).

ГЛАВА 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ И МОМЕНТЫ

§ 3.1. Основные формулы

В этой главе мы рассмотрим моменты порядковых статистик, в основном математические ожидания, дисперсии и ковариации. Мы не раз убедимся в том, что линейные функции порядковых статистик, простым примером которых является размах, чрезвычайно полезны при оценивании параметров. Знание математических ожиданий, дисперсий и ковариаций рассматриваемых порядковых статистик дает возможность найти математические ожидания и дисперсии их линейных функций и, следовательно, позволяет найти оценки и их эффективности. Математические ожидания представляют интерес также в задачах о выборе (см., например, у пр. 3.2.2) и в так называемых процедурах «мечения» [1]). В этих процедурах истинное распределение неизвестно. Поэтому упорядоченные наблюдения $x_{(i)}$ заменяются их «метками» $\mathsf{E}Z_{(i)}$, где $Z_{(i)}$ — упорядоченные величины из некоторого стандартизованного распределения такого, как стандартное нормальное. Тогда при условии, что угадано правильное распределение, метки (с точностью до линейного преобразования) имеют самый большой квадрат коэффициента корреляции с $X_{(i)}$ из всех функций рангов i [2]) (Бриллинджер (1966)).

Иногда нам будет удобно подчеркивать в обозначениях объем выборки. Поэтому в оставшейся части этой главы мы пишем $X_{r:n}$ вместо $X_{(r)}$. Математическое ожидание величины $X_{r:n}$ мы обозначаем $\mu_{r:n}$. Для распределения

---

[1]) В оригинале scoring procedures.

[2]) Имеется в виду выборочный коэффициент корреляции. (*Прим. перев.*)

с непрерывной плотностью $p(x)$ (дискретный случай отличается от этого вплоть до § 3.3) имеем

$$\mu_{r:n} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_r(x)\,dx =$$

$$= nC_{n-1}^{r-1} \int_{-\infty}^{\infty} x\,[P(x)]^{r-1}\,[1-P(x)]^{n-r}\,dP(x). \qquad (3.1.1)$$

Поскольку $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$, справедливо неравенство $|\mu_{r:n}| \leqslant$ $\leqslant nC_{n-1}^{r-1} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dP(x)$, из которого следует, что $\mu_{r:n}$ существует, если существует $\mathsf{E}X$ [3]). Обратное не всегда верно. Чтобы убедиться в этом, заметим, что с помощью вероятностного интегрального преобразования $u = P(x)$ можно записать $\mu_{r:n}$ в виде

$$\mu_{r:n} = nC_{n-1}^{r-1} \int_0^1 P^{-1}(u)\,u^{r-1}\,(1-u)^{n-r}\,du,$$

где $P^{-1}(u)$ — функция, обратная к $P(x)$. Таким образом, если даже среднее

$$\mathsf{E}X = \int_0^1 P^{-1}(u)\,du$$

не существует из-за особенностей в точках $u=0$ или 1, $\mu_{r:n}$ тем не менее существует для некоторых (хотя и не всех) значений r. Например, в случае распределения Коши $\mu_{r:n}$ существует для всех r, кроме $r=1$ и $r=n$. (См. также по этому поводу упр. 3.1.7 и 3.1.11.)

Подобным же образом из существования $\mathsf{E}[g(X)]$, где $g(x)$ — некоторая функция x, вытекает существование $\mathsf{E}[g(X_{r:n})]$. Частные случаи $g(x) = x^k$, $(x-\mu_{r:n})^k$ и e^{tx} дают соответственно начальные моменты, центральные моменты и производящую функцию моментов (п. ф. м.)

---

[3]) Существование $\mathsf{E}X$ влечет сходимость по отдельности интегралов $\int_0^{\infty} x\,dP(x)$ и $\int_{-\infty}^{0} x\,dP(x)$ и, следовательно, также $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,dP(x)$.

для $X_{r:n}$. Момент k-го порядка записывается в виде

$$\mu^{(k)}_{r:n} = \mathsf{E}(X^k_{r:n})\text{ [4]}. \tag{3.1.2}$$

Подобным же образом можно определить и моменты произведения

$$\mu_{rs:n} = \mathsf{E}\,(X_{r:n} \cdot X_{s:n}). \tag{3.1.3}$$

Ковариацию $X_{r:n}$ и $X_{s:n}$ обозначаем соответственно

$$\sigma_{rs:n} = \mathsf{E}\,(X_{r:n} - \mu_{r:n})\,(X_{s:n} - \mu_{s:n}). \tag{3.1.4}$$

Как обычно, $\sigma_{rs:n} = \sigma_{sr:n}$ и $\sigma_{rr:n}$ или $\sigma^2_{r:n}$ является дисперсией $X_{r:n}$. Более подробно это записывается так:

$$\sigma^2_{r:n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{r:n})^2 f_r(x)\,dx$$

и для $r < s$

$$\sigma_{rs:n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} (x - \mu_{r:n})\,(y - \mu_{s:n})\,f_{rs}(x,\ y)\,dx\,dy, \tag{3.1.5}$$

где совместная п. р. $f_{rs}(x,\ y)$ определена в (2.2.1).

Пример 3.1.1. Для равномерной на (0, 1) п. р. $p(x)$ равенство (3.1.1) примет вид

$$\mu_{r:n} = nC^{r-1}_{n-1} \int\limits_0^1 xx^{r-1}(1-x)^{n-r}\,dx = \frac{nC^{r-1}_{n-1}}{(n+1)\,C^r_n} = \frac{r}{n+1}.$$

В силу вероятностного интегрального преобразования отсюда следует, что порядковые статистики делят область под кривой $y = p(x)$ на $n+1$ частей, математическое ожидание площади каждой из которых равно $1/(n+1)$.

Общий подход для вычисления моментов произведения можно проиллюстрировать на случае 4 переменных. В выражении

$$f_{rstu}(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4) = \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(t-s-1)!\,(u-t-1)!\,(n-u)!} \times$$
$$\times\, x_1^{r-1}\,(x_2 - x_1)^{s-r-1}\,(x_3 - x_2)^{t-s-1}\,(x_4 - x_3)^{u-t-1}\,(1 - x_4)^{n-u}$$

---

[4]) Сен (1959) показал, что из существования $\mathsf{E}\,|X|^\delta$ для некоторого $\delta > 0$ вытекает существование $\mu^{(k)}_{r:n}$ для всех r, удовлетворяющих неравенству $r_0 \leqslant r \leqslant n - r_0 + 1$, где $r_0\delta = k$.

при $r < s < t < u$ положим

$$x_4 = y_4, \quad x_3 = y_3 y_4, \quad x_2 = y_2 y_3 y_4, \quad x_1 = y_1 y_2 y_3 y_4.$$

Обозначая постоянную буквой C и замечая, что якобиан равен $y_2 y_3^2 y_4^3$, получим

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = C y_1^{r-1} (1-y_1)^{s-r-1} y_2^{s-1} (1-y_2)^{t-s-1} \cdot y_3^{t-1} \times$$
$$\times (1-y_3)^{u-t-1} y_4^{u-1} (1-y_4)^{n-u} \qquad (0 \leqslant y_i \leqslant 1;\ i = 1, 2, 3, 4).$$

Это равенство, кроме всего прочего, показывает, что величины, Y_i, а следовательно, и величины $X_{r:n}/X_{s:n}$, $X_{s:n}/X_{t:n}$, $X_{t:n}/X_{u:n}$ и $X_{u:n}$ статистически независимы. (Этот результат можно сравнить с (2.7.5).) Поэтому имеем

$$\mathsf{E}\left(X_{r:n}^a X_{s:n}^b X_{t:n}^c X_{u:n}^d\right) =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{B}(r, s-r)} \int_0^1 y_1^{r-1+a} (1-y_1)^{s-r-1} \, dy_1 \ldots \times$$
$$\times \frac{1}{\mathrm{B}(u, n-u+1)} \int_0^1 y_4^{u-1+a+b+c+d} (1-y_4)^{n-u} \, dy_4 =$$
$$\frac{(r-1+a)!\,(s-1+a+b)!\,(t-1+a+b+c)!\,(u-1+a+b+c+d)!\,n!}{(r-1)!\,(s-1+a)!\,(t-1+a+b)!\,(u-1+a+b+c)!\,(n+a+b+c+d)}$$

В общем случае, для порядковых статистик $X_{r_i:n}$ $(i = 1, 2 \ldots \ldots, k)$ результат принимает вид

$$\mathsf{E}\left(\prod_{i=1}^{k} X_{r_i:n}^{a_i}\right) = \frac{n!}{\left(n + \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right)!} \prod_{i=1}^{k} \frac{\left(r_i - 1 + \sum\limits_{j=1}^{i} a_j\right)!}{\left(r_i - 1 + \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_j\right)!} \tag{3.1.6}$$

(Дэйвид и Джонсон (1954)).

Следовательно, полагая $p_r = r/(n+1)$, $q_r = 1 - p_r$, мы можем, в частности, вывести, что для $r \leqslant s \leqslant t$ справедливы равенства

$$\mu_{r:n} = p_r, \quad \sigma_{rs:n} = \frac{p_r q_s}{n+2},$$

$$\mathsf{E}\left[(X_{r:n} - \mu_{r:n})(X_{s:n} - \mu_{s:n})(X_{t:n} - \mu_{t:n})\right] =$$
$$= \frac{2 p_r (q_s - p_s) q_t}{(n+2)(n+3)} \tag{3.1.7}$$

и

$$\mathsf{E}(X_{r:n}-\mu_{r:n})^4=\frac{3p_r^2q_r^2}{(n+2)^2}+\frac{6p_rq_r}{(n+2)(n+3)(n+4)}\times \\ \times\left[(q_r-p_r)^2-\frac{n+3}{n+2}p_rq_r\right].$$

Для экспоненциальной п. р. легко получить соответствующие явные формулы (упр. 3.1.1). Однако, для вычисления средних, дисперсий и ковариаций, вообще говоря, необходимо численное интегрирование. Как машинные вычисления, так и табулирование облегчаются, если $p(x)$ симметрична, например относительно $x=0$, так как справедливы равенства

$$\mu_{r:n}=-\mu_{n-r+1:n}, \tag{3.1.8}$$

$$\sigma_{rs:n}=\sigma_{n-s+1,\ n-r+1:n} \tag{3.1.9}$$

(сравните с упр. 2.1.2).

Для нормального $N(0,\ 1)$ распределения средние достаточно полно затабулированы (Хартер (1961а)), так же, как и дисперсии и ковариации для $n\leqslant 20$ (Тейкроу (1956); Сархан и Гринберг (1956)). Имеются также таблицы для гамма-распределения, логистического распределения, распределения экстремальных значений и хи-распределения с одной степенью свободы (см. также П.3.1).

Среди линейных функций порядковых статистик особый интерес вызывает размах. Справедливы равенства

$$\mathsf{E}W_n=\mu_{n:n}-\mu_{1:n},$$

$$\mathsf{D}W_n=\sigma_{n:n}^2-2\sigma_{n1:n}+\sigma_{1:n}^2,$$

которые в случае симметрии относительно $x=0$ приводят к соотношениям

$$\mathsf{E}W_n=2\mu_{n:n},$$

$$\mathsf{D}W_n=2(\sigma_{n:n}^2-\sigma_{n1:n}).$$

Пример 3.1.2. Для равномерного на (0, 1) распределения из (3.1.7) следует, что

$$\mathsf{D}W_n=\frac{2}{n+2}\,\frac{(n\cdot 1-1\cdot 1)}{(n+1)^2}=\frac{2(n-1)}{(n+2)(n+1)^2}.$$

Для проверки заметим, что из (2.3.4) с $r=1$, $s=n$ вытекает равенство

$$f(w_n)=\frac{1}{B(n-1,\,2)}\,w_n^{n-2}(1-w_n)\qquad (0\leqslant w_n\leqslant 1),$$

что дает

$$\mathsf{D}W_n=\frac{(n-1)\,n}{(n+1)\,(n+2)}-\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2=\frac{2\,(n-1)}{(n+2)\,(n+1)^2}.$$

Другое выражение для $\mu_{r:n}$ можно получить, интегрируя по частям выражение

$$\mu_{r:n}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,dF_r(x).$$

Заметим сначала, что для любой ф. р. $P(x)$ из существования $\mathsf{E}X$ следуют равенства

$$\lim_{x\to-\infty}xP(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}x\,[1-P(x)]=0,$$

так что

$$\mathsf{E}X=\int\limits_{-\infty}^{0}x\,dP(x)-\int\limits_{0}^{\infty}x\,d\,[1-P(x)]=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}[1-P(x)]\,dx-\int\limits_{-\infty}^{0}P(x)\,dx.\qquad (3.1.10)$$

Если в этой формуле заменить $P(x)$ на $F_r(x)$, то получим выражение для $\mu_{r:n}$. Полагая $r=n$ и $r=1$, мы получим после подстановки хорошо известную формулу

$$\mathsf{E}W_n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\{1-P^n(x)-[1-P(x)]^n\}\,dx\qquad (3.1.11)$$

(Типпет (1925); Кокс (1954)).

Имеем также

$$\mu_{r:n}=\int\limits_{0}^{\infty}[1-F_r(x)-F_r(-x)]\,dx,$$

и если $p(x)$ симметрична относительно $x=0$, то

$$\mu_{r:n}=\int\limits_{0}^{\infty}[F_{n-r+1}(x)-F_r(x)]\,dx.$$

Полезные общие способы проверки вычислений можно получить с помощью равенства

$$\left(\sum_{r=1}^{n} X_{r:n}^{k}\right)^{m} = \left(\sum_{r=1}^{n} X_{r}^{k}\right)^{m}, \qquad (3.1.12)$$

в котором слагаемые левой части только перестановкой отличаются от слагаемых правой части. Пусть μ и σ^2 — генеральные математическое ожидание и дисперсия. Взяв в (3.1.12) математические ожидания при (k, m), равных последовательно (1.1), (2.1), (1.2), получим

$$\sum_{r=1}^{n} \mu_{r:n} = n\mu, \qquad (3.1.13)$$

$$\sum_{r=1}^{n} \mathsf{E}X_{r:n}^2 = n\mathsf{E}X^2, \qquad (3.1.14)$$

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \mathsf{E}(X_{r:n}X_{s:n}) = n\mathsf{E}X^2 - n(n-1)\mu^2 \qquad (3.1.15)$$

и, подставляя (3.1.14) в (3.1.15), придем к равенству

$$\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=r+1}^{n} \mathsf{E}(X_{r:n}X_{s:n}) = \frac{1}{2}n(n-1)\mu^2. \qquad (3.1.16)$$

Возводя в квадрат обе части равенства

$$\sum (X_{r:n} - \mu_{r:n}) = \sum (X_r - \mu),$$

получим

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \sigma_{rs:n} = n\sigma^2. \qquad (3.1.17)$$

Из доказательства соотношений (3.1.12) — (3.1.17) следует, что они справедливы как для непрерывного, так и для дискретного распределений.

§ 3.2. Нормальное распределение

Таблицы Тейкроу (1956), о которых упоминалось в § 3.1, полезны для приложений, так как в них можно найти все необходимое для случая $n \leqslant 20$. Тем не менее более детальное рассмотрение нормального случая имеет значительный теоретический интерес. В этом параграфе мы полагаем

$$p(x) = \varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

$$P(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

В дополнение к общим соотношениям (3.1.13) — (3.1.17), справедливым при $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, соотношениям (3.1.8) и (3.1.9) для симметричных распределений имеем

$$\sum_{s=1}^{n} \mathsf{E}(X_{r:n} X_{s:n}) = 1 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.2.1}$$

что равносильно соотношению

$$\sum_{s=1}^{n} \sigma_{rs:n} = 1.$$

Доказательство. Из независимости $X_{r:n} - \bar{X}$ и $\bar{X}$ следует соотношение

$$\mathsf{E}(X_{r:n} - \bar{X})\bar{X} = 0$$

или

$$\mathsf{E}(X_{r:n}\bar{X}) = \mathsf{E}\bar{X}^2 = \frac{1}{n}.$$

Подставляя $n\bar{X} = \sum_{s=1}^{n} X_{s:n}$, получим (3.2.1). ▶

Для $n \leqslant 5$ обычные моменты и моменты произведений порядковых статистик можно выразить через элементарные функции (Джоунз (1948); Годвин (1949); Бозе и Гупта (1959). Как и у последних авторов, положим

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi(ax)\right]^n e^{-x^2} dx, \tag{3.2.2}$$

так что

$$I_0(a) = \pi^{1/2}.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi(ax) - \frac{1}{2}\right]^{2m+1} e^{-x^2} dx = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

так как под знаком интеграла стоит нечетная функция от x. Поэтому

$$I_{2m+1}(a) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2m+1} (-1)^{i+1} C_{2m+1}^{i} I_{2m-i+1}(a)}{2^i}.$$

В частности,

$$I_1(a) = \frac{1}{2} I_0(a) = \frac{1}{2} \pi^{1/2}$$

и

$$I_3(a) = \frac{3}{2} I_2(a) - \frac{3}{4} I_1(a) + \frac{1}{8} I_0(a) = \frac{3}{2} I_2(a) - \frac{1}{4} I_0(a).$$

Дифференцируя (3.2.2) по a, получим для $n=2$ равенство

$$(2\pi)^{1/2} I_2'(a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(ax)\, 2xe^{-\frac{x^2(a^2+2)}{2}}\, dx.$$

С помощью интегрирования по частям приходим к равенству

$$I_2'(a) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \frac{a}{(a^2+2)(a^2+1)^{1/2}}.$$

Поэтому

$$I_2(a) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \operatorname{arctg}[(a^2+1)^{1/2}],$$

$$I_3(a) = \frac{3}{2\pi^{1/2}} \operatorname{arctg}[(a^2+1)^{1/2}] - \frac{1}{4}\pi^{1/2}.$$

С помощью этих равенств можно вычислять моменты порядковых статистик. Так, для $n=5$, интегрируя по частям и используя равенство $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, имеем

$$\mathsf{E}X_{5:5} = 5 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^4(x)\, x\varphi(x)\, dx = 5 \int\limits_{-\infty}^{\infty} 4\Phi^3(x)\, \varphi(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Следовательно,

$$\mu_{5:5} = \frac{10}{\pi} I_3(1) = \frac{15}{\pi^{3/2}} \operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{5}{2\pi^{1/2}} =$$

$$= \frac{5}{4\pi^{1/2}} + \frac{15}{2\pi^{3/2}} \arcsin\frac{1}{3} = 1{,}16296.$$

Подобным же образом получаем

$$\mu_{4:5}=\frac{5}{2\pi^{1/2}}-\frac{15}{\pi^{3/2}}\arcsin\frac{1}{3}=0{,}49502$$

и

$$\mu_{3:5}=0\quad \mu_{2:5}=-\mu_{4:5}\quad \mu_{1:5}=-\mu_{5:5}.$$

Более общий, хотя и несколько громоздкий подход, применимый также и к моментам произведений, сводится к выражению всех интегралов с помощью функций

$$J_n=\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty e^{-Q}\,dx_1\ldots dx_n,$$

где Q — квадратичная форма относительно x. Для $n\leqslant 3$ J_n можно выразить с помощью элементарных функций, и мы имеем

$$n=1:\quad Q=ax_1^2,$$

$$J_1=\frac{\frac{1}{2}\pi^{1/2}}{a};$$

$$n=2:\quad Q=ax_1^2+2hx_1x_2+bx_2^2,$$

$$J_2=\frac{1}{(ab-h^2)^{1/2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{h}{(ab-h^2)^{1/2}}\right);$$

$$n=3:\quad Q=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+2fx_2x_3+2gx_3x_1+2hx_1x_2,$$

$$J_3=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{1/2}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{gh-af}{(a\Delta)^{1/2}}+\operatorname{arctg}\frac{hf-bg}{(b\Delta)^{1/2}}+\right.$$
$$\left.+\operatorname{arctg}\frac{fg-ch}{(c\Delta)^{1/2}}\right),$$

где $\Delta=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$ (Годвин (1949)).

Пример 3.2.1. Мы укажем шаги, использующие описанную выше процедуру, на примере вычисления $\mathsf{E}(X_{3:5}X_{5:5})$, которое равно

$$\mathsf{E}(X_{3:5}\cdot X_{5:5})=$$
$$=\frac{5!}{2!\,1!\,1!\,0!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}xy\,\Phi^2(x)\,\varphi(x)\,[\Phi(y)-\Phi(x)]\,\varphi(y)\,dx\,dy. \qquad \text{(A)}$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{y} \Phi^2(x)\,[\Phi(y)-\Phi(x)]\,x\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{y} [2\Phi(x)\Phi(y)-3\Phi^2(x)]\,\varphi^2(x)\,dx.$$

Подставляя это равенство в (А) и изменяя порядок интегрирования, получим

$$\mathsf{E}(X_{3:5}X_{5:5}) = 60\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)\int_{x}^{\infty} [2\Phi(x)\Phi(y)-3\Phi^2(x)]\,y\varphi(y)\,dy\,dx.$$

Внутренний интеграл равен

$$-\Phi^2(x)\,\varphi(x)+\int_{x}^{\infty} 2\Phi(x)\,\varphi^2(y)\,dy.$$

Нам остается вычислить

$$-60\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(x)\,\varphi^3(x)\,dx = -\frac{10\sqrt{3}}{\pi^{3/2}}\,I_2\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\right]$$

и

$$120\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-x^2}}{2\pi}\,\frac{e^{-y^2}}{2\pi}\left(1-\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{(2\pi)^{1/2}}\,dz\right)dy\,dx = \frac{15}{\pi}-\frac{15\sqrt{2}}{\pi^{5/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x}^{\infty}\int_{x}^{\infty}\exp-\left(x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2\right)dz\,dy\,dx.$$

Положив $y'=y-x$, $z'=z-x$, приведем тройной интеграл к виду

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\exp-\left(\frac{5}{2}x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2+2xy+xz\right)+ \exp-\left(\frac{5}{2}x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2-2xy-xz\right)dz\,dy\,dx.$$

Окончательно имеем

$$\mathsf{E}\,(X_{3:5}X_{5:5}) = -\frac{10\sqrt{3}}{\pi^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} + \\ + \frac{15}{\pi} - \frac{15\sqrt{2}}{\pi^{5/2}}\frac{1}{4}(2\pi)^{1/2}\left(\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}14815.$$

При помощи описанных методов можно выразить в терминах элементарных функций все моменты и моменты произведений для $n \leqslant 5$. Повторное интегрирование по частям позволяет таким же способом получить многие моменты более высокого порядка. Так, например, можно вычислить $\mathsf{E}X_{6:6}^2$, хотя метод не позволяет вычислить $\mathsf{E}X_{6:6}$.

Рубен (1954) указал остроумный, хотя и сложный подход, с помощью которого обычные моменты порядковых статистик можно выразить в виде линейных комбинаций объемов определенных гиперсферических симплексов (обобщенных сферических треугольников). Для размерностей больших, чем три, эти объемы нельзя выразить через элементарные функции, откуда, между прочим, следует то же утверждение для $I_4(a)$ и $\mathsf{E}X_{6:6}$. Аналогичные результаты для математического ожидания и дисперсии размаха получены Рубеном (1956b). (См. также работу Дэйвида (1963).) Конечно, отнесение функции к элементарным довольно произвольно. Ватанабе и др. (1957) с помощью длинных прямых вычислений выразили первые два момента и моменты произведений для $n \leqslant 7$ через обратные тригонометрические функции и некоторые интегралы вида $\int \arcsin\,[3/(8 - \operatorname{tg}^2\Psi)]^{1/2}\,d\Psi$. Моменты отдельных порядковых статистик и моменты произведения до четвертого порядка таким же образом выражены в работе Ватанабе и др. (1958).

§ 3.3. Дискретный случай

Для дискретных распределений $p(x)$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ k-й момент $X_{r:n}$, в соответствии с определением, равен

$$\mu_{r:k}^{(k)} = \sum_{x=0}^{\infty} x^k f_r(x),$$

где $f_r(x)$ определено в (2.4.1). Несколько более удобная формула, зависящая от «хвостов» $1-F_r(x)$, а не от $f_r(x)$, легко выводится из общих результатов для дискретных распределений. Так же, как у Феллера ((1967), стр. 271), положим

$$q(x)=p(x+1)+p(x+2)+\dots$$

и определим производящие функции моментов

$$\mathcal{P}(s)=\sum_{x=0}^{\infty} p(x)s^x, \quad \mathcal{M}(s)=\sum_{x=0}^{\infty} q(x)s^x. \tag{3.3.1}$$

Очевидно, что для $|s|<1$ производная k-го порядка от $\mathcal{P}(s)$ равна

$$\mathcal{P}^{(k)}(s)=\sum_{x=k}^{\infty} x(x-1)\dots(x-k-1)\,p(x)\,s^{x-k}.$$

Если у X существует k-й факториальный момент $\mu_{[k]}$, то можно положить $s=1$. Тогда

$$\mu_{[k]}=\mathcal{P}^{(k)}(1). \tag{3.3.2}$$

У Феллера доказано, что для $|s|<1$

$$\mathcal{M}(s)(1-s)=1-\mathcal{P}(s), \tag{3.3.3}$$

откуда с помощью k-кратного дифференцирования и теоремы Лейбница получим

$$\mathcal{M}^{(k)}(s)(1-s)+k\mathcal{M}^{(k-1)}(s)(-1)=-\mathcal{P}^{(k)}(s).$$

Если $\mu_{[k]}$ существует, то из (3.3.2) следует

$$\mu_{[k]}=k\mathcal{M}^{(k-1)}(1). \tag{3.3.4}$$

В частности,

$$\mu_{[1]}=\mu=\sum_{x=0}^{\infty} q(x)=\sum_{x=0}^{\infty}[1-P(x)],$$

$$\mu_{[2]}=\mathsf{E}[X(X-1)]=2\sum_{x=0}^{\infty} xq(x)=2\sum_{x=0}^{\infty} x[1-P(x)],$$

откуда получается выражение для дисперсии X:

$$\mathsf{D}X=\mu_{[2]}+\mu-\mu^2.$$

Чтобы применить эти результаты для моментов $X_{r:n}$, нужно только заменить $P(x)$ на $F_r(x)$. Используя (2.1.5), получим

$$\mu_{r:n} = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - I_{P(x)}(r, n-r+1)],$$
$$DX_{r:n} = 2\sum_{x=0}^{\infty} x[1 - I_{P(x)}(r, n-r+1)] + \mu_{r:n} - \mu_{r:n}^2. \tag{3.3.5}$$

В частности, из (3.3.5) получаем моменты экстремумов

$$\mu_{n:n} = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - P^n(x)], \quad \mu_{1:n} = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - P(x)]^n$$

и, следовательно,

$$EW_n = \sum_{x=0}^{\infty} \{1 - P^n(x) - [1 - P(x)]^n\},$$

что является прямым аналогом результатов для распределений, непрерывных на $(0, \infty)$.

Эти формулы могут быть получены также как предельные случаи соответствующих результатов для неотрицательных непрерывных величин. Действительно, положим

$$F_r(x) = I_{P(i)}(r, n-r+1) \qquad (i \leqslant x < i+1).$$

Тогда

$$\mu_{r:n} = \int_0^{\infty} [1 - F_r(x)]\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - F_r(i)] \int_i^{i+1} dx = \sum_{x=0}^{\infty} [1 - F_r(x)].$$

Аналогично

$$EX_{r:n}^2 = \int_0^{\infty} 2x[1 - F_r(x)]\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - F_r(i)] \int_i^{i+1} 2x\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)[1 - F_r(i)] = 2\sum_{x=0}^{\infty} x[1 - F_r(x)] + \mu_{r:n}$$

и т. д.

Из (2.4.5) также получим

$$\mu_{rs:n} = \\ = C_{rs} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=x}^{\infty} xy \iint w^{r-1} (v-w)^{s-r-1} \cdot (1-v)^{n-s}\, dv\, dw, \qquad (3.3.6)$$

где интегрирование распространяется на те v, w, для которых $w \leqslant v$, $P(x-1) \leqslant w \leqslant P(x)$, $P(y-1) \leqslant v \leqslant P(y)$.

Математическое ожидание и дисперсия наименьшей из двух биномиальных величин подробно рассмотрены Крейгом (1962) и Шахом (1966а).

§ 3.4. Рекуррентные соотношения

Многие авторы (см., например, Говиндараюлу (1963а)) изучали рекуррентные соотношения между моментами порядковых статистик, главным образом для сокращения ряда независимых выкладок, требуемых для вычисления моментов. Между прочим, можно заметить, что равенства (3.1.12)—(3.1.17) также можно использовать для этих целей, хотя они, несомненно, лучше подходят для проверки вычислений. При выводе рекуррентных соотношений распределение почти всегда будет предполагаться непрерывным. Как станет ясно ниже, большая часть результатов распространяется и на дискретные распределения[5]).

Соотношение 1. Для произвольного распределения имеем

$$(n-r)\,\mu_{r:n}^{(k)} + r\mu_{r+1:n}^{(k)} = n\mu_{r:n-1}^{(k)},$$

где $r = 1, 2, \ldots, n-1$, а $k = 1, 2, 3, \ldots$

Этот результат получен Коулем (1951) для непрерывного и Мельником (1964) для дискретного случая. Возможно общее доказательство, так как можно записать, соответственно, равенства

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{d}{dx} I_{P(x)}(r,\ n-r+1)\, dx, \qquad (3.4.1)$$

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \sum_{x=0}^{\infty} x^k \Delta I_{P(x)}(r,\ n-r+1)\, dx, \qquad (3.4.2)$$

где $\Delta I_{P(x)}(a,\ b) = I_{P(x)}(a,\ b) - I_{P(x-1)}(a,\ b)$.

---

[5]) Фактически, все рекуррентные соотношения, не зависящие от особенностей распределений таких, как нормальность, остаются справедливыми и для симметрично зависимых величин (см. § 5.5).

Из хорошо известной рекуррентной формулы для неполной B-функции

$$aI_y(a+1,\ b)+bI_y(a,\ b+1)=(a+b)\,I_y(a,\ b),$$

положив $a=r$, $b=n-r$, $y=P(x)$, получим

$$(n-r)\,I_{P(x)}(r,\ n-r+1)+rI_{P(x)}(r+1,\ n-r)=$$
$$=nI_{P(x)}(r,\ n-r).$$

Отсюда сразу следует соотношение 1. ▶

Следствие 1A. Для четных n имеем

$$\frac{1}{2}\left(\mu^{(k)}_{\frac{n}{2}+1:n}+\mu^{(k)}_{\frac{n}{2}:n}\right)=\mu^{k)}_{\frac{n}{2}:n-1}.$$

Доказательство. Положим в соотношении 1 $r=$ $=n/2$. ▶

Положив $k=1$, заметим, что математическое ожидание медианы в выборках объемов n (n — четное) и $n-1$ совпадают.

Следствие 1B. Для распределения, симметричного относительно нуля, и четного n имеем

$$\mu^{(k)}_{\frac{n}{2}:n}=\begin{cases}\mu^{(k)}_{\frac{n}{2}:n-1}, & \text{если } k \text{ четное,}\\ 0, & \text{если } k \text{ нечетное.}\end{cases}$$

Доказательство. Подставим в следствие 1A равенство

$$\mu^{(k)}_{\frac{n}{2}+1:n}=(-1)^k\,\mu^{(k)}_{\frac{n}{2}:n}. \quad ▶$$

Замечание. Поскольку доказательство соотношения 1 зависит только от свойства неполной B-функции, ясно, что точно такое же рекуррентное соотношение связывает плотности распределения, функции распределения, математические ожидания (если они существуют) любой функции $g(X_{r:n})$. Таким образом, справедливо равенство

$$(n-r)\,\mathrm{E}g(X_{r:n})+r\mathrm{E}g(X_{r+1:n})=n\mathrm{E}g(X_{r:n-1})$$

(Шрикантан (1962)).

Таким же образом можно обобщить следующие два соотношения, которые снова формулируются для наиболее важного случая моментов.

Соотношение 2. Для произвольного распределения

$$\mu_{r;n}^{(k)}=\sum_{i=r}^{n} C_{i-1}^{r-1}C_n^i(-1)^{i-r}\mu_{i:i}^{(k)}. \qquad (3.4.3)$$

Таким образом, моменты $X_{r:n}$ выражаются через моменты наибольших значений в выборках объемов $r, r+1, \ldots, n$.

Доказательство. Разложим $(1-t)^{n-r}$ в равенстве

$$I_{P(x)}(r,\ n-r+1)=\int_0^{P(x)}\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}t^{r-1}(1-t)^{n-r}\,dt.$$

Тогда подынтегральное выражение правой части примет вид

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-r}C_{n-r}^j(-1)^j t^{r-1+j}.$$

Положив $i=j+r$, получаем, что последнее выражение равно

$$\sum_{i=r}^{n}C_{i-1}^{r-1}C_n^i(-1)^{i-r}it^{i-1}.$$

Подставляя это выражение в (3.4.1) или (3.4.2), получим соотношение 2. ▶

Соответствующий результат для $\mu_{1:n}$ принимает вид

$$\mu_{r:n}^{(k)}=\sum_{i=n-r+1}^{n}C_{i-1}^{n-r}C_n^i(-1)^{i-n+r-1}\mu_{1:n}^{(k)}.$$

Замечание. С ростом $n-r$ формула (3.4.3) становится все более чувствительной к ошибкам округления. (См. также работу Шрикантана (1962).)

Соотношение 3. Для произвольного распределения при $1\leqslant r<s\leqslant n$ имеет место равенство

$$(r-1)\mu_{rs:n}+(s-r)\mu_{r-1,\,s:n}+(n-s+1)\mu_{r-1,\,s-1:n}=$$
$$=n\mu_{r-1,\,s-1:n-1}.$$

Доказательство (Говиндараюлу (1963а)). В формуле

$$n\mu_{r-1,\,s-1:n-1}=\frac{n!}{(r-2)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}xy\,[P(x)]^{r-2}\times$$
$$\times\,[P(y)-P(x)]^{s-r-1}[1-P(y)]^{n-s}\,dP(x)\,dP(y)$$

разобьем интеграл на сумму трех однотипных интегралов, соответствующих разложению

$$1 = P(x) + [P(y) - P(x)] + [1 - P(y)].$$

Отсюда следует непосредственно соотношение 3. С помощью (3.3.6) те же рассуждения проходят и для дискретного случая. Заметим, что соотношение 1 является частным случаем этого соотношения при $r = 1$, $s = r + 1$. ▶

Другие соотношения приведены в упражнениях. (См. также Кришнайя и Ризви (1966).)

Упражнения

3.1.1. Показать, что для случайной выборки объема n из экспоненциального распределения с п. р.

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

справедливо равенство

$$\mu_{r:n} = \sum_{i=n-r+1}^{n} i^{-1}$$

и что для $r < s$ справедливы равенства

$$\sigma_{rs:n} = \sigma^2_{r:n} = \sum_{i=n-r+1}^{n} i^{-2}.$$

3.1.2. Показать, что для случайной выборки объема n со степенной ф. р.

$$p(x) = va^{-v}x^{v-1} \qquad (0 \leqslant x \leqslant a,\ a > 0,\ v > 0)$$

справедливо равенство

$$\mu^{(k)}_{r:n} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\dfrac{k}{v} + r\right) a^k}{\Gamma(r)\,\Gamma(n + k/v + 1)}$$

и что для $r < s$ справедливо равенство

$$\mu_{rs:n} = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(1/v + r)\,\Gamma(2/v + s)\,a^2}{\Gamma(r)\,\Gamma(s + 1/v)\,\Gamma(n + 2/v + 1)}$$

(Малик (1967)).

3.1.3. Показать, что для случайной выборки из стандартного нормального распределения справедливы равенства

$$\mu_{2:2} = \pi^{-1/2}, \quad \mu_{3:3} = \frac{3}{2}\pi^{-1/2}.$$

3.1.4. Показать, что для случайной выборки объема n из непрерывного распределения с ф. р. $P(x)$ имеет место равенство

$$\mathsf{E}\left(X_{r+1:n}-X_{r:n}\right)=C_n^r\int\limits_{-\infty}^{\infty}[P(x)]^r[1-P(x)]^{n-r}\,dx$$

$$(r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

(Гальтон (1902); Пирсон (1902)).

3.1.5. Показать, что для случайной выборки из непрерывного распределения с ф. р. $P(x)$ справедливы равенства

а) $\mathsf{E}\left[X_{s:n}P\left(X_{r:n}\right)\right]=\dfrac{r}{n+1}\,\mu_{s+1:n+1}\qquad(r\leqslant s);$

б) $\mathsf{E}\left[X_{r:n}P\left(X_{s:n}\right)\right]=\mu_{r:n}-\dfrac{n+1-s}{n+1}\,\mu_{r;n+1}\qquad(r<s)$

(Говиндараюлу (1968а)).

3.1.6. Показать, что для случайной выборки объема n из непрерывного распределения справедливо равенство

$$\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=r+1}^{n}\mathsf{E}\left(X_{r:n}^kX_{s:n}^l\right)=C_n^2\,\mathsf{E}\left(X_{1:2}^kX_{2;2}^l\right)$$

(Говиндараюлу (1963а)).

3.1.7. Показать, что п. р. медианы в выборке объема $n=2k+1$ из распределения Коши с п. р.

$$p(x)=\frac{1}{\pi\left[1+(x-\theta)^2\right]}\qquad(-\infty<x<\infty)$$

равна

$$f_{k+1,\,n}(x)=\frac{n!}{(k!)^2\,\pi}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}^2(x-\theta)\right]^k\frac{1}{1+(x-\theta)^2}$$

и что дисперсия медианы равна

$$\frac{2\,(n!)}{(k!)^2\,\pi^n}\int\limits_0^{\pi/2}(\pi-y)^k\,y^k\operatorname{ctg}^2 y\,dy.$$

(Заметим, что она конечна для $k\geqslant 2$.) (Райдер (1960).)

3.1.8. Показать, что для распределения Коши с п. р.

$$p(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\qquad(-\infty<x<\infty)$$

для $r=3,\ 4,\ \ldots,\ n-2$ имеет место равенство

$$\sigma_{r:n}^2=\frac{n}{\pi}\left(\mu_{r:n-1}-\mu_{r-1:n-1}\right)-1-\mu_{r:n}^2$$

(Барнет (1966)).

3.1.9. Пусть распределение случайной величины X симметрично относительно нуля. Тогда случайная величина Y, полученная урезанием (folding) величины X в нуле, имеет ф. р. $P^*(x)=2P(x)-1$ $(x\geqslant 0)$. Если $\mu^{*(k)}_{r;n}$ обозначает k-й момент Y, то справедливо равенство

$$\mu^{(k)}_{r;n}=2^{-n}\left[\sum_{i=0}^{r-1} C_n^i \mu^{*(k)}_{r-i:n-i}+(-1)^k\sum_{i=r}^{n} C_n^i \mu^{*(k)}_{i-r+1:i}\right]$$

(Говиндараюлу (1963b)).

3.1.10. Статистика $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется нечетной статистикой параметра сдвига, если для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и для любого h справедливы равенства

$$T(x_1+h, x_2+h, \ldots, x_n+h)=T(x_1, x_2, \ldots, x_n)+h$$

и

$$T(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)=-T(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Аналогично $S(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется четной свободной от параметра сдвига статистикой, если для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и для любого h справедливы равенства

$$S(x_1+h, x_2+h, \ldots, x_n+h)=S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и

$$S(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)=S(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Доказать, что для случайной выборки объема n из симметричного распределения T и S некоррелированы (Хогг (1960)).

3.1.11. Пусть $X_1, X_2, \ldots X_n$ — случайная выборка из распределения с ф. р. $P(x)$ и п. р. $p(x)$, причем последняя непрерывна и строго положительна на $\{x \mid 0<P(x)<1\}$. Предположим, что $\mathsf{E}X^2_{i:n}+\mathsf{E}X^2_{j:n}<\infty$. Показать, что

$$\operatorname{cov}(X_{i:n}, X_{j:n})\geqslant 0. \tag{A}$$

(Достаточно показать, что $\mathsf{E}(X_{j:n}/X_{i:n})$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, так как справедлива следующая лемма: если X и Y — случайные величины такие, что $\mathsf{E}X^2+\mathsf{E}Y^2<\infty$ и $\mathsf{E}(Y/X)$ — монотонно возрастающая функция X, то $\operatorname{cov}(X, Y)\geqslant 0$.) (Бикел (1967); Тьюки (1958).)

3.2.1. Пусть (X, Y) — наблюдение из двумерного нормального $N(0, 0, 1, 1, \rho)$ закона. Показать, что математическое ожидание $\max(X, Y)$ равно $[(1-\rho)/\pi]^{1/2}$.

3.2.2. Можно считать, что для одного стада вес ежегодного начеса шерсти барана и ягненка подчиняется двумерному нормальному закону с коэффициентом корреляции ρ. В один сезон только 3 наилучших из 10 баранов были использованы для разведения потомства. Если от них родилось соответственно n_1, n_2, n_3 овцы, то найти ожидаемое возрастание среднего начеса шерсти овцы. Проверить, что для $n_1=n_2=n_3$ и $\rho=0{,}6$ ответ равен 0,64.

3.2.3. Пусть вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ распределение. Предположим, что в двумерной выборке объема n значения x расположены в порядке возрастания, а именно,

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}.$$

Обозначим соответствующие значения y, которые не обязаны располагаться в порядке возрастания, через

$$Y_{[1]},\ Y_{[2]},\ \ldots,\ Y_{[n]}.$$

Показать, что для $r,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ справедливы равенства

$$\mathsf{E}Y_{[r]}=\mu_y+\rho\sigma_y\mu_{r:n},$$

$$\mathsf{D}\left(Y_{[r]}\right)=(1-\rho^2)\,\sigma_y^2+\rho^2\rho_y^2\,\sigma_{r:n}^2,$$

$$\operatorname{cov}\left(X_{(r)},\ Y_{[r]}\right)=\rho\sigma_x\sigma_y\sigma_{rs:n},$$

$$\operatorname{cov}\left(Y_{[r]},\ Y_{[s]}\right)=\rho^2\sigma_y^2\sigma_{rs:n}\qquad (r\neq s),$$

где $\mu_{r:n}$, $\sigma_{rs:n}$ вычисляются для стандартного нормального распределения (Уоттерсон (1959)).

3.2.4. Пусть независимые нормальные величины X и Y имеют соответственно средние μ_x и μ_y и общую дисперсию σ^2. Показать, что

$$\mathsf{E}\,(X/X<Y)=\mu_x-\frac{\sigma}{\sqrt{2}}A_\zeta,$$

$$\mathsf{D}\,(X/X<Y)=\sigma^2\left(1+\frac{1}{2}\,\zeta A_\zeta-\frac{1}{2}\,A_\zeta^2\right),$$

где

$$\zeta=\frac{\mu_x-\mu_y}{\sqrt{2}\,\sigma},\qquad A_\zeta=\frac{e^{-\frac{\zeta^2}{2}}}{\int\limits_\zeta^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}$$

(Дэйвид (1957)).

3.2.5. Пусть из нормального распределения с единичной дисперсией выбирается n наблюдений. Нам указывают наблюдение, ближайшее к математическому ожиданию, остальные наблюдения отбрасываются. Показать, что дисперсия v_n оставшегося наблюдения имеет вид

$$v_n=n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_0^\infty x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int\limits_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)^{n-1}dx.$$

Проверить, что

$$v_2=1-\frac{2}{\pi},\quad v_3=1-\frac{2}{\pi}\left(3-\sqrt{3}\right),\quad v_4=1-\frac{12}{\pi}+\frac{16}{\pi\sqrt{3}},$$

$$v_5=1-\frac{20}{\pi}+\frac{240}{\pi^2\sqrt{3}}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{5}{3}\right)^{1/2}-\frac{\pi}{6}\right]$$

(Кендалл (1954)).

3.2.6. Показать, что для любого распределения с ф. р. $P(x)$, обладающего математическим ожиданием, $\mu_{r:n}$ можно выразить в виде

$$\mu_{r:n}=\sum_{j=0}^{n-1} c_j\varphi_j(r:n) \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\varphi_j(r:n)=\frac{(j!)^3}{(2j!)}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_{r-1}^{j-i} C_{2j-1}^{j} C_{n-j+i-1}^{i},$$

$$c_j=\frac{n!}{(n+j)!}\,\frac{(2j+1)!}{(j!)^2}\int_{-\infty}^{\infty} L_j\,[2P(x)-1]\,x\,dP(x), \qquad \text{(A)}$$

а $L_j(z)$ — полином Лежандра j-й степени. Как следствие этого факта, установить, что

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\mu_{r:n}^2=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n!\,(n-1)!}{(n+j)!\,(n-1-j)!}\,(2j+1)\,I_j^2,$$

где I_j — интеграл из (А) (Со и Чоу (1966); сравните с работой Рубена (1956a)).

3.3.1. Показать, что если у дискретной величины существует k-й момент, то также существует и $\mu_{r:n}^{(k)}$.

3.3.2. Показать, что размах W_n для выборки объема n из непрерывного распределения с ф. р. $P(x)$ имеет дисперсию

$$\mathrm{D}(W_n)=$$
$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}\{1-P^n(y)-[1-P(x)]^n+[P(y)-P(x)]^n\}\,dx\,dy-(\mathrm{E}W_n)^2$$

и что соответствующая формула в дискретном случае ($x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ \infty$) имеет вид

$$\mathrm{D}(W_n)=2\sum_{y\ 0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y}\{1-P^n(y)-[1-P(x)]^n+[P(y)-P(x)]^n\}-$$
$$-\mathrm{E}W_n(1+\mathrm{E}W_n)$$

(Типпет (1925); Сиотани (1957)).

3.3.3. Показать, что для случайной выборки объема n из любого распределения имеет место равенство

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{\substack{s=1\\ r\neq s}}^{n}\mathrm{E}\left(X_{r:n}^kX_{s:n}^l\right)=n(n-1)\,\mathrm{E}(X^k)\,\mathrm{E}(X^l)$$

и что, следовательно,

$$\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=r+1}^{n}\mathrm{E}\left(X_{r:n}^kX_{s:n}^k\right)=C_n^2\,[\mathrm{E}(X^k)]^2.$$

3.4.1. С помощью повторного применения соотношения 1 показать, что для любого распределения имеет место равенство

$$(n-r)_m \mu_{r:n}^{(k)} = \sum_{i=0}^{m} (-r)_i (n)_{m-i} C_m^i \mu_{r+i:n-m+i}^{(k)},$$

где $(n-r)_m$ обозначает $(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-m+1)$. Получить соотношение 2 как частный случай этого результата при $m=n-r$.

3.4.2. Показать, что для произвольного распределения при $n \geqslant m$ справедливо равенство

$$C_n^m \mu_{r:m} = \sum_{i=0}^{n-m} C_{n-r-i}^{m-r} C_{r+i-1}^{i} \mu_{r+i:n}$$

(Силлито (1964)).

3.4.3. С помощью прямого использования интегральных представлений для $\mu_{r:n}$ и $\mu_{rs:n}$ для непрерывного распределения показать, что для произвольного распределения выполнены равенства

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^{(k)} (n-i)^{(l)} \mu_{i:n} = k!\,l!\,C_n^{k+l+1} \mu_{k+1:k+l+1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^{(k)} (n-i)^{(l)} \mu_{ii:n} = k!\,l!\,C_n^{k+l+1} \mu_{k+1,\,k+1\,:\,k+l+1},$$

$$\sum_{i<j}\sum (i-1)^{(k)} (n-j)^{(l)} \mu_{ij:n} = k!\,l!\,C_n^{k+l+2} \mu_{k+1,\,k+2:k+l+2}.$$

(Заметим, что первое из этих равенств равносильно результату из упр. 3.4.2.) (Даунтон (1966b)).

3.4.4. Пусть $\chi_{n,r} = \mathsf{E}(X_{r+1:n} - X_{r:n})$, $\omega_n = \mathsf{E}W_n$. Показать, что для произвольного распределения справедливо равенство

$$\omega_n = \frac{1}{n}(\chi_{n,1} + \chi_{n,n-1}) + \omega_{n-1}.$$

Вывести, что

$$\mathsf{E}(X_{n-1:n} - X_{2:n}) = n\omega_{n-1} - (n-1)\omega_n$$

(Силлито (1951); Кэдуэлл (1953a)).

3.4.5. Доказать, что для произвольного распределения справедливо равенство

$$n\chi_{n-1,r-1} - (n-r+1)\chi_{n,r-1} = r\chi_{n,r}.$$

С помощью повторного применения этого результата показать, что для $\nu \leqslant r-1$ выполнено равенство

$$\chi_{n,r} = \frac{(n)_\nu}{(r)_\nu} \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i C_\nu^i \frac{(n-r+i)_i}{(n-\nu+i)_i} \chi_{n-\nu+i,\,r-\nu}$$

(Силлито (1951)).

3.4.6. Показать, что для произвольного распределения справедливо равенство

$$C_n^r \sum_{i=0}^{r} (-1)^{i+1} C_r^i \omega_{n-r+i} = \chi_{n,\, n-r} + \chi_{n,\, r}.$$

Используя это равенство, показать, что при нечетных n математическое ожидание размаха удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$2\omega_n = \omega_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i-1} C_{n-1}^i \omega_{n-i},$$

в частности,

$$\omega_3 = \frac{3}{2}\omega_2.$$

Получить также из (3.1.11) непосредственно следующие две формулы, равносильные (A):

$$2\omega_n = \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i-1} C_n^i \omega_{n-i}, \quad \text{если } n \text{ нечетное,}$$

и

$$\lambda_{2m} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m+i+1} C_m^i \lambda_{m+i} \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

где $\lambda_r = \omega_{r+1}/(2r+2)$ (Силлито (1951); сравните с работой Романовского (1933)).

ГЛАВА 4

ГРАНИЦЫ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

§ 4.1. Введение

В этой главе мы рассмотрим несколько общих подходов к нахождению границ и приближений для моментов порядковых статистик; некоторые из этих подходов представляют несомненный математический интерес. В §§ 4.2 и 4.3 используется неравенство Шварца и некоторые его обобщения. При наличии у величины X конечной дисперсии математические ожидания экстремальных значений $X_{(n)}$ и $X_{(1)}$ (и тем более других порядковых статистик) не могут быть произвольно большими, даже если величина X не ограничена. В случае экстремальных значений можно найти границы, достижимые для определенных классов ф. р. Несколько лучшие границы можно получить для симметричных ф. р. Для порядковых статистик, отличных от экстремальных, границы, получаемые таким способом, не являются точными, но их можно улучшить, используя обобщенное неравенство Шварца.

В случае распределения, для которого известно математическое ожидание наибольшего значения для малых выборок, различные уточнения приводят нас к аппроксимациям с известными границами ошибок математических ожиданий всех порядковых статистик.

Хорошо известно, что математическое ожидание порядковой статистики можно приблизить соответствующей квантилью, особенно в случае больших выборок. В § 4.4 мы рассмотрим условия, при которых можно утверждать, является ли такая аппроксимация оценкой сверху или оценкой снизу. Это позволит заменить асимптотические приближения неравенствами, справедливыми для всех объемов выборок. Кроме того, будут получены некоторые другие неравенства, имеющие отношение к этим вопросам.

§§ 4.2—4.4 представляют в основном теоретический интерес. Однако в § 4.5 мы имеем дело с простым техническим аппаратом, основанным на разложении Тейлора по степеням $1/n$, который часто приводит к приемлемым приближениям для математических ожиданий, дисперсий и ковариаций порядковых статистик. Первый член таких рядов дает тогда асимптотику соответствующих моментов. В случае $\mathsf{E}X_{(r)}$ он совпадает с упомянутым выше приближением квантилями, последующие члены дают (при соответствующих условиях) последовательные уточнения. С ними обращаться труднее. Поэтому мы рассмотрим для малых выборок также некоторые модификации аппроксимации квантилями.

§ 4.2. Непараметрические границы для моментов порядковых статистик и размаха

Мы начнем с рассмотрения математического ожидания наибольшей порядковой статистики в случайной выборке объема n с непрерывной строго возрастающей ф. р. $P(x)$. Вместо

$$\mathsf{E}X_{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} nx\,[P(x)]^{n-1}\,dP(x)$$

удобно использовать другую форму, получаемую с помощью вероятностного интегрального преобразования $u = P(x)$, а именно,

$$\mathsf{E}X_{(n)} = \int_0^1 nx(u)\,u^{n-1}\,du, \tag{4.2.1}$$

где $x(u)$ указывает на то, что x теперь рассматривается как функция от u. Предположим, что величина X имеет математическое ожидание, равное нулю, и единичную дисперсию, т. е.

$$\int_0^1 x(u)\,du = 0, \quad \int_0^1 [x(u)]^2\,du = 1. \tag{4.2.2}$$

Это предположение не умаляет общности при условии, что распределение обладает вторым моментом. Тогда оказывается, что $\mathsf{E}X_{(n)}$ ограничено, независимо от вида $P(x)$ (Гумбель (1954); Хартли и Дэйвид (1954)). Согласно вариационному исчислению экстремальное значение $x(u)$ можно получить, найдя стационарные значения (4.2.1) при условии (4.2.2). Этого можно достичь, получив сначала безусловный экстремум для

$$\int_0^1 \left(nxu^{n-1} - ax - \frac{1}{2} bx^2\right) du$$

и затем определяя постоянные a и b так, чтобы они удовлетворяли (4.2.2). Стационарное решение получается из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(nxu^{n-1} - ax - \frac{1}{2} bx^2\right) = 0,$$

откуда

$$bx = nu^{n-1} - a,$$

где

$$\int_0^1 (nu^{n-1} - a)\, du = 0, \quad \int_0^1 (nu^{n-1} - a)^2\, du = b^2.$$

Таким образом, $a = 1$, $b = (n-1)/(2n-1)^{1/2}$,

$$x(u) = \frac{(2n-1)^{1/2}(nu^{n-1} - 1)}{n-1}, \tag{4.2.3}$$

для экстремального значения справедливо равенство

$$\mathsf{E}X_{(n)} = \frac{n(2n-1)^{1/2}}{n-1} \int_0^1 u^{n-1}(nu^{n-1} - 1)\, du = \frac{n-1}{(2n-1)^{1/2}}.$$

Вариационное исчисление полезно для угадывания вида решения; этого недостаточно, чтобы показать, что (4.2.3) приводит к максимуму $\mathsf{E}X_{(n)}$, а не просто к стационарному значению, мы используем неравенство Шварца:

$$\int fg\, du \leqslant \left(\int f^2\, du \cdot \int g^2\, du\right)^{1/2}$$

при $f = x$, $g = nu^{n-1} - 1$. Оно примет вид

$$\mathsf{E}X_{(n)} \leqslant \left[1 \cdot \int_0^1 (n^2u^{2n-2} - 2nu^{n-1} + 1)\, du\right]^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\mathsf{E}X_{(n)} \leqslant \frac{n-1}{(2n-1)^{1/2}}. \tag{4.2.4}$$

Равенство в (4.2.4) достигается для $x(u)$, определяемого из (4.2.3). После обращения получаем

$$u = P(x) = \left(\frac{1+bx}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{для} \quad -\frac{(2n-1)^{1/2}}{n-1} \leqslant x \leqslant (2n-1)^{1/2}. \tag{4.2.5}$$

Хотя в этих рассуждениях, начиная с (4.2.2), мы не требовали, чтобы $P(x)$ была ф. р., из (4.2.5) видно, что она тем не менее обладает всеми свойствами ф. р. Соответствующая п. р. равна

$$p(x) = \frac{b}{n}\left(\frac{1+bx}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}-1} \quad \text{для} \quad -\frac{(2n-1)^{1/2}}{n-1} \leqslant x \leqslant (2n-1)^{1/2}$$

и ее график приведен на рис. 4.2.1 для различных n. Пусть математическое ожидание и дисперсия генерального распределения равны μ и σ^2. Тогда (4.2.4) примет вид

$$\mathsf{E}X_{(n)} \leqslant \mu + \frac{(n-1)\sigma}{(2n-1)^{1/2}} \tag{4.2.6}$$

и аналогично

$$\mathsf{E}X_{(1)} \geqslant \mu - \frac{(n-1)\sigma}{(2n-1)^{1/2}}.$$

Для класса симметричных распределений неравенство (4.2.4) можно уточнить. Поскольку (после того, как положим $\mu = 0$) $P(x) = 1 - P(-x)$, мы имеем

$$\mathsf{E}X_{(n)} = \int_0^\infty nx\,\{[P(x)]^{n-1} - [1-P(x)]^{n-1}\}\,dP(x) =$$

$$= \int_{1/2}^{1} nx\,[u^{n-1} - (1-u)^{n-1}]\,du. \tag{4.2.7}$$

Тот же подход, что и выше, примененный к (4.2.7), приведет нас к экстремуму

$$cx(u) = u^{n-1} - (1-u)^{n-1}, \tag{4.2.8}$$

где

$$c = \left\{\frac{2\left[1 - 1/C_{2n-2}^{n-1}\right]}{2n-1}\right\}^{1/2},$$

и неравенство примет вид

$$\mathsf{E}X_{(n)} \leqslant \frac{1}{2}nc. \tag{4.2.9}$$

Из (4.2.8) непосредственно видно, что значения x содержатся в интервале $\left(-\frac{1}{c}, \frac{1}{c}\right)$, т. е. $P(x)$ опять сосредоточено на конечном интервале. Интересно отметить, что из (4.2.5) и (4.2.8) следует, что равномерное на интервале $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ распределение является экстремальным для $n=2$, а в классе симметричных ф. р. также для $n=3$.

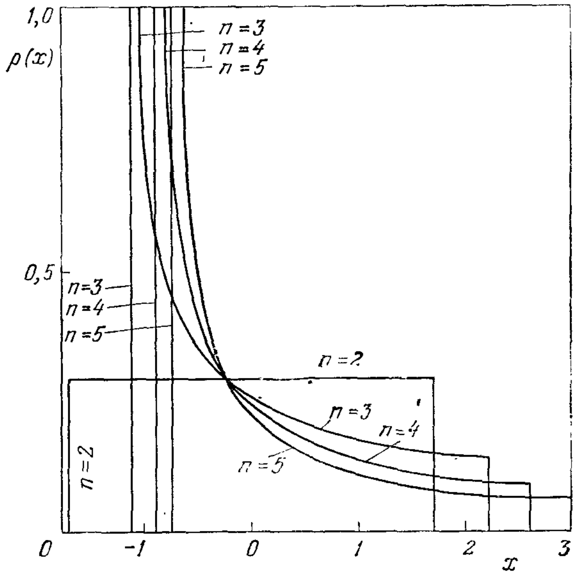


Рис. 4.2.1.

На рис. 4.2.2 приведены симметричные экстремальные п. р. при различных n. Таблица 4.2 содержит для $n \leqslant 20$ две верхние границы для $\mathsf{E}X_{(n)}$, которые сравниваются с математическим ожиданием этой величины для стандартного нормального распределения. Следует заметить, что для симметричного случая верхняя граница не намного превосходит соответствующую границу для нормального распределения.

Поскольку для любого непрерывного распределения

$$\mathsf{E} W_n = \int_0^1 nx\left[u^{n-1} - (1-u)^{n-1}\right] du,$$

из сравнения с (4.2.7) следует, что экстремальным распределением, приводящим к максимуму $\mathsf{E} W_n$, является (4.2.8),

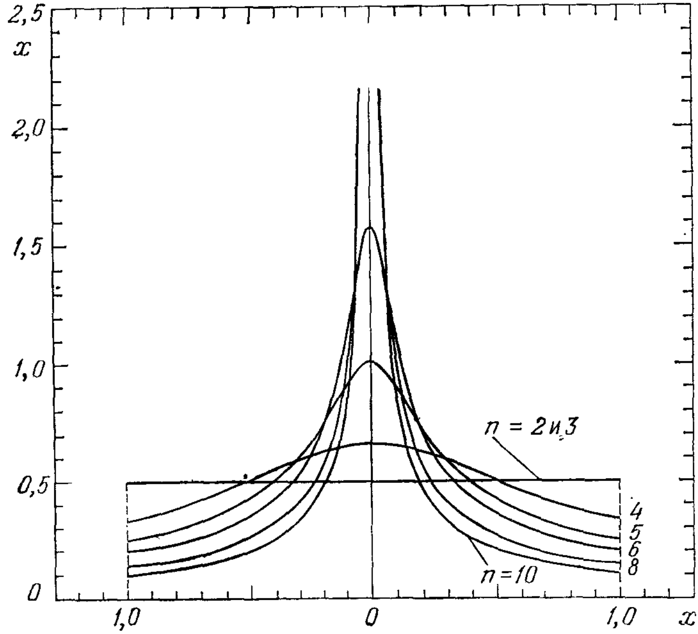


Рис. 4.2.2.

независимо от того, является распределение симметричным или нет, и что

$$\mathsf{E} W_n \leqslant nc.$$

Эта, хронологически первая, граница для описанной выше последовательности получена еще в 1947 г. Плэкеттом.

Мы начали с предположения о строгом возрастании и непрерывности ф. р. Однако ясно, что экстремумы и границы сохраняются для всех ф. р., обладающих дисперсией,

Таблица 4.2

Сравнение двух верхних границ для $\mathsf{E}(X_{(n)}-\mu)/\sigma$ с точными значениями для нормального и равномерного распределений (Из работы Моригути (1951); работы Хартли и Дэйвида (1954) и работы Типпета (1925).)

n	Верхняя граница для произвольного распределения	Верхняя граница для симметричного распределения	Нормальное распределение	Равномерное распределение
2	0,5774	0,5774	0,5642	0,5774
3	0,8944	0,8660	0,8463	0,8660
4	1,1339	1,0420	1,0294	1,0392
5	1,3333	1,1701	1,1630	1,1547
6	1,5076	1,2767	1,2672	1,2372
7	1,6641	1,3721	1,3522	1,2990
8	1,8074	1,4604	1,4236	1,3472
9	1,9403	1,5434	1,4850	1,3856
10	2,0647	1,6222	1,5388	1,4171
12	2,2937	1,7693	1,6292	1,4656
15	2,5997	1,9696	1,7359	1,5155
20	3,0424	2,2645	1,8673	1,5671
50	4,9247	3,5533	2,2491	1,6641
100	7,0179	5,0125	2,5076	1,6978
1000	22,3439	15,8153	3,2414	1,7286

даже для дискретных распределений, так как все ф. р. можно аппроксимировать с произвольной точностью строго возрастающими непрерывными ф. р.

Перейдем теперь к некоторым обобщениям. Моригути (1951, 1954) рассмотрел экстремальное значение и размах для симметричных распределений. В обоих случаях он нашел верхнюю границу для математического ожидания и нижние границы для дисперсии и коэффициентов вариации.

Все полученные выше результаты относятся только к экстремальным порядковым статистикам. Мы имеем для общего случая

$$\mathsf{E}X_{(r)}=\int_0^1 x(u)\,i_u\,du, \tag{4.2.10}$$

где

$$i_u=\frac{d}{du}I_u(r,\ n-r+1)=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}u^{r-1}(1-u)^{n-r}. \tag{4.2.11}$$

Применяя (4.2.2), найдем отсюда, как и раньше,

$$|\mathsf{E}(X_{(r)})| \leqslant \left[n \frac{C_{2n-2r}^{n-r} \cdot C_{2r-2}^{r-1}}{C_{2n-1}^{n-1}} - 1 \right]^{1/2}. \tag{4.2.12}$$

Кроме того, для $s > r$

$$\mathsf{E}(X_{(s)} - X_{(r)}) \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \frac{2n}{C_{2n}^{n}} \left[C_{2s-2}^{s-1} C_{2n-2s}^{n-s} + C_{2r-2}^{r-1} \cdot C_{2n-2r}^{n-r} - 2C_{r+s-2}^{r-1} \cdot C_{2n-r-s}^{n-s} \right] \right\}^{1/2} \tag{4.2.13}$$

(Людвиг (1960)).

Последний результат прямо следует из неравенства Шварца при $f = x$, $g = i_u(s, n-s+1) - i_u(r, n-r+1)$. Численные значения границ в (4.2.12) и (4.2.13) для $n \leqslant 10$ приведены у Людвига (1959). Однако, как это было впервые замечено Моригути (1953а), эти границы являются точными (т. е. достижимыми) только для экстремумов (т. е. при $r = n$ или $r = 1$ в (4.2.12) и $r = 1$, $s = n$ в (4.2.13)). Причина этого очевидна. Например, выражение (4.2.10) достигает своей верхней границы, только когда $x(u)$ пропорционально $i_u - 1$, но если $u = P(x)$ является ф. р., то $x(u)$, а следовательно, и i_u должны быть монотонны по u, что справедливо лишь при $r = 1$ или n.

Изучая этот вопрос более детально, Моригути показал, что точные границы для $\mathsf{E}X_{(r)}$ можно получить, если перед применением неравенства Шварца заменить $i_u - 1$ на «ближайшую» неубывающую функцию. Точнее, запишем (4.2.10) в виде

$$\mathsf{E}X_{(r)} = \int_0^1 x(u)\, dI_u(r, n-r+1).$$

Заменим теперь I_u на $\bar{I}_u$ его «наибольшую выпуклую миноранту» в интервале (0, 1); это означает, что $\bar{I}_u$ является супремумом всех выпуклых функций, мажорируемых функцией I_u на интервале $0 \leqslant u \leqslant 1$. (Выпуклая функция характеризуется тем, что любая хорда ее графика лежит на графике или выше него.) Можно показать, что $\bar{I}_u$ непрерывна и имеет правостороннюю производную $\bar{i}_u$, которая к тому же в силу выпуклости $\bar{I}_u$ не убывает и непрерывна, исключая, возможно, счетное множество значений u. Так как $\bar{I}_u$ не убывает и $\bar{I}_0=0$, $\bar{I}_1=1$, то $\bar{I}_u$ является функцией распределения, именно, функцией распределения величины, которая стохастически больше, чем $X_{(r)}$. Отсюда следует, что

$$\mathsf{E}X_{(r)} \leqslant \int_0^1 x(u)\,d\bar{I}_u = \int_0^1 x(u)\,\bar{i}_u\,du. \tag{4.2.14}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\mathsf{E}X_{(r)} - \int_0^1 x(u)\,d\bar{I}_u = \int_0^1 x(u)\,d(I_u - \bar{I}_u) = -\int_0^1 (I_u - \bar{I}_u)\,dx(u).$$

Отсюда вытекает, что равенство в (4.2.14) имеет место только тогда, когда $x(u)$ постоянна для всех u, для которых $I_u > \bar{I}_u$, и что

$$\mathsf{E}(X_{(r)} - \mu) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 x(u)(\bar{i}_u - 1)\,du = \int_0^1 [x(u) - \mu](\bar{i}_u - 1)\,du \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^1 [x(u) - \mu]^2\,du \int_0^1 (\bar{i}_u - 1)^2\,du\right\}^{1/2}. \tag{4.2.15}$$

Таким образом,

$$\frac{\mathsf{E}(X_{(r)} - \mu)}{\sigma} \leqslant \left(\int_0^1 (\bar{i}_u - 1)^2\,du\right)^{1/2}. \tag{4.2.16}$$

Для определения $\bar{I}_u$ (а следовательно, и $\bar{i}_u$) рассмотрим рис. 4.2.3, на котором сплошной линией изображена I_u как функция u. Наибольшая выпуклая миноранта $\bar{I}_u$ вначале совпадает с I_u и затем продолжается как пунктирная линия XZ, которая является касательной к I_u, проведенной из точки Z. Значение u_1 абсциссы u в точке касания x, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$1 - I_{u_1} = i_{u_1}(1 - u_1)$$

или

$$1 - I_{u_1} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\, u_1^{r-1} (1-u_1)^{n-r+1}, \qquad (4.2.17)$$

которое можно решить численно. Таким образом, $\bar{i}_u$ задается равенством

$$\left.\begin{aligned} \bar{I}_u &= i_u, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant u < u_1, \\ \bar{i}_u &= i_{u_1}, \quad \text{если} \quad u_1 \leqslant u \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.18)$$

Отсюда можно вычислить верхнюю границу в (4.2.14).

На этот раз равенство в (4.2.15) имеет место, если разности $x(u) - \mu$ и $\bar{i}_u - 1$ пропорциональны, так что $x(u)$ в этом случае — постоянная для $u_1 \leqslant u \leqslant 1$. Из этого, в свою очередь, следует равенство в (4.2.14). Таким образом, граница (4.2.16) достигается при $x(u) - \mu = c(\bar{i}_u - 1)$, где c — постоянная и, следовательно, максимизирующей ф. р. является ф. р. случайной величины, непрерывной в интервале $(\mu - c,\ \mu - c + ci_{u_1})$, причем остаточная вероятность концентрируется в точке $x = \mu - c + ci_{u_1}$.

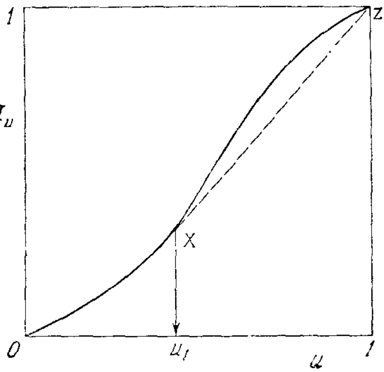


Рис. 4.2.3.

Пример 4.2. Рассмотрим простой случай медианы в выборке объема 3. В этом случае u_1 удовлетворяет уравнению

$$1 - I_{u_1}(2,\ 2) = 6u_1(1-u_1)^2,$$

которое приводится к виду

$$4u_1^3 - 9u_1^2 + 6u_1 - 1 = 0,$$

так что $u_1 = \frac{1}{4}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{i}_u &= 6u(1-u), \quad &\text{если} \quad 0 \leqslant u < \tfrac{1}{4}, \\ \bar{i}_u &= \frac{9}{8}, \quad &\text{если} \quad \tfrac{1}{4} \leqslant u \leqslant 1, \end{aligned}$$

и из (4.2.14) мы получаем

$$\frac{\mathsf{E}\,(X_{(2)}-\mu)}{\sigma}\leqslant 0{,}271.$$

Эта верхняя граница значительно ниже верхней границы 0,447, получаемой из (4.2.12).

Моригути (1953а) сравнивает эти две границы для математических ожиданий выборочной медианы для нечетных n до $n=19$ и находит, что расхождение возрастает с ростом n, при этом соответствующими значениями для $n=19$ являются 0,598 и 1,242. Можно предположить, что простое неравенство Шварца становится все более грубым по мере удаления статистики $X_{(r)}$ от экстремальных значений.

Для нижних границ величин $\mathsf{E}\,(X_{(r)}-\mu)/\sigma$ $(r>[n/2])$ или $\mathsf{E}\,(X_{(s)}-X_{(r)})/\sigma$ $(s>r)$ такие общие результаты невозможны. Действительно, для существования числителя достаточно существования μ, и очевидно, что нижняя граница может быть сколь угодно приближена к нулю за счет выбора ф. р. $P(x)$ с достаточно большой дисперсией. Более содержательные нижние границы можно получить, только налагая определенные условия на $P(x)$. Одно из возможных условий, которое отражает часто встречающуюся практическую ситуацию, состоит в ограниченности величины X, так что $a\leqslant x\leqslant b$, где a и b конечны. При этом ограничении Хартли и Дэйвид (1954) детально исследовали размах. Они обнаружили, что минимизирующим распределением является двухточечное распределение. При $a=-c$, $b=c$ они получают и приводят небольшую таблицу для значений нижней границы, а именно,

$$\mathsf{E}\left(\frac{W_n}{\sigma}\right)\geqslant\min\begin{cases}2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],\\ (1-p^n-q^n)/(pq)^{1/2},\end{cases}$$

где $p=c^2/(1+c^2)$, $q=1-p$. Можно заметить, что при $c\to\infty$ распределение становится все более асимметричным и нижняя граница стремится к 0.

Более подробное обсуждение границ (нижних и верхних) для случая $-c\leqslant X\leqslant c$ приведено у Рустаги (1957). По этому поводу см. также книгу Карлина и Стаддена (1976), гл. 14.

§ 4.3. Границы и приближения, задаваемые обратным ортогональным разложением

Интересный подход, дающий как границы, так и приближения для математических ожиданий, дисперсий и ковариаций порядковых статистик, был развит Сугиюрой (1962, 1964). Пусть $\{\psi_k(u)\}$ $(k=0, 1, \ldots)$ — ортонормированная система на интервале (0, 1), т. е. $\psi_0(u)=1$ и для всех натуральных k, k' $(k' \neq k)$

$$\int_0^1 \psi_k(u)\,du=0, \quad \int_0^1 \psi_k^2(u)\,du=1, \quad \int_0^1 \psi_k(u)\,\psi_{k'}(u)\,du=0.$$

Обозначим

$$a_k=\int_0^1 f(u)\,\psi_k(u)\,du, \quad b_k=\int_0^1 g(u)\,\psi_k(u)\,du,$$

где f, g — интегрируемые с квадратом функции на (0, 1). Тогда в немного упрощенных обозначениях получим из неравенства Шварца

$$\left|\int\left(f-\sum_{k=0}^{m} p_k\psi_k\right)\left(g-\sum_{k=0}^{m} g_k\psi_k\right)du\right| \leqslant$$
$$\leqslant\left\{\int\left(f-\sum_{k=0}^{m} a_k\psi_k\right)^2 du \int\left(g-\sum_{k=0}^{m} b_k\psi_k\right)^2 du\right\}^{1/2}$$

откуда непосредственно следует основное неравенство

$$\left|\int fg\,du-\sum_{k=0}^{m} a_k b_k\right| \leqslant$$
$$\leqslant\left(\int f^2\,du-\sum_{k=0}^{m} a_k^2\right)^{1/2}\left(\int g^2\,du-\sum_{k=0}^{m} b_k^2\right)^{1/2}. \quad (4.3.1)$$

Равенство имеет место, если разности $f-\sum_{k=0}^{m} a_k\psi_k$ и $g-\sum_{k=0}^{m} b_k\psi_k$ пропорциональны. Таким образом, $\sum_{k=0}^{m} a_k b_k$ дает приближение к $\int fg\,du$, причем максимальная погрешность является функцией только тех коэффициентов a_k, b_k

($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m$), которые используются в приближении. Если, кроме того, $\{\psi_k\}$ — полная ортонормированная система, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2=\int f^2\,du$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k^2=\int g^2\,du$. Поэтому правая часть (4.3.1) стремится к 0 при $m\to\infty$ и приближение можно сделать сколь угодно точным.

Теорема 4.3.1. *Пусть* $u=P(x)$ — *(строго возрастающая) непрерывная ф. р. нормализованной случайной величины, и пусть* $\psi_0=1,\ \psi_1,\ \ldots,\ \psi_m$ — *ортонормированная система на интервале* $(0,\ 1)$.

Положим

$$a_k=\int\limits_0^1 x(u)\,\psi_k(u)\,du,$$

$$b_k=\frac{1}{\mathrm{B}(r,\ n-r+1)}\int\limits_0^1 u^{r-1}(1-u)^{n-r}\,\psi_k(u)\,du.$$

Тогда

$$\left|\mathsf{E}X_{r:n}-\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left(1-\sum_{k=1}^{m}a_k^2\right)^{1/2}\left\{\frac{\mathrm{B}(2r-1,\ 2n-2r+1)}{[\mathrm{B}(r,\ n-r+1)]^2}-1-\sum_{k=1}^{m}b_k^2\right\}^{1/2}. \quad (4.3.2)$$

Доказательство. Положим в (4.3.1)

$$f=x(u),\quad g=\frac{1}{\mathrm{B}(r,\ n-r+1)}u^{r-1}(1-u)^{n-r}. \quad (4.3.3)$$

Тогда теорема является непосредственным следствием соотношений $a_0=0$, $b_0=1$ и

$$\int fg\,du=\mathsf{E}X_{r:n},\quad \int f^2\,du=1,$$
$$\int g^2\,du=\frac{\mathrm{B}(2r-1,\ 2n-2r+1)}{[\mathrm{B}(r,\ n-r+1)]^2}.\ \blacktriangleright \quad (4.3.4)$$

Примером полной ортонормированной системы на $(0,\ 1)$ является последовательность полиномов Лежандра [на интервале $(0,\ 1)$]

$$L_k(u)=\frac{(2k+1)^{1/2}}{k!}\frac{d^k}{du^k}u^k(u-1)^k \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если ортонормированная система состоит только из ψ_0, то это приближение, очевидно, сводится просто к применению неравенства Шварца, и (4.3.2) превращается в (4.2.12). С помощью выбора дополнительных членов ортонормированной системы можно уточнять границы, причем член $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k b_k$ будет давать нам желаемое приближение к $\mathsf{E}X_{r:n}$. Подробнее этот процесс будет проиллюстрирован для случая, когда $P(x)$ является ф. р. симметричной нормализованной случайной величины. Нам потребуется известный результат о том, что в классе (а) четных и (б) нечетных функций, интегрируемых с квадратом на интервале (0, 1), полные ортонормированные системы задаются соответственно функциями Лежандра

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(а)} & \{L_{2k}(u)\}, \\ \text{(б)} & \{L_{2k+1}(u)\}, \end{array}\right\} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4.3.5}$$

Теперь мы получим соотношение, соответствующее (4.3.2):

$$\left|\mathsf{E}X_{r:n} - \sum_{k=0}^{m} a_{2k+1} b_{2k+1}\right| \leqslant \left(1 - \sum_{k=0}^{m} a_{2k+1}^2\right)^{1/2} \times$$
$$\times \left[\frac{\mathrm{B}(2r-1,\ 2n-2r+1) - \mathrm{B}(n,\ n)}{2\,[\mathrm{B}(r,\ n-r+1)]^2} - \sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}^2\right]^{1/2}. \tag{4.3.6}$$

Доказательство. В силу наших предположений относительно $u=P(x)$ обратная функция $x(u)$ является нечетной и интегрируемой с квадратом на интервале (0, 1). Тогда, поскольку $L_k(1-u) = (-1)^k L_k(u)$, то

$$a_{2k} = \int_0^1 x(u)\,L_{2k}(u)\,du = \int_0^1 -x(1-u)\,L_{2k}(1-u)\,du =$$
$$= -\int_0^1 x(v)\,L_{2k}(v)\,dv = -a_{2k}, \qquad v = 1-u.$$

Таким образом, $a_{2k}=0$. Взяв f и g в соответствии с (4.3.3) и применяя (4.3.1) при $k=1,\ 3,\ \ldots,\ 2m+1,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,$

получим

$$\left|\int fg\,du - \sum_{k=0}^{m} a_{2k+1}b_{2k+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int f^2\,du - \sum_{k=0}^{m} a_{2k+1}^2\right)^{1/2} \left(\int g^2\,du - \sum_{k=0}^{m} b_{2k+1}^2 - \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^2\right)^{1/2}. \tag{4.3.7}$$

Для того чтобы вычислить член $\sum b_{2k}^2$, дающий понижение верхней границы, вызванное симметрией, положим

$$g^*(u) = \frac{1}{\mathrm{B}(r,\ n-r+1)} u^{n-r}(1-u)^{r-1}.$$

Тогда

$$b_{2k} = \int gL_{2k}\,du = \frac{1}{2}\int (g+g^*)\,L_{2k}\,du.$$

Так как $g(u)+g^*(u)$ является четной, интегрируемой с квадратом на интервале (0, 1) функцией, то из (4.3.5) (а) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^2 = \frac{1}{4}\int [g(u)+g^*(u)]^2\,du =$$

$$= \frac{1}{2\,[\mathrm{B}(r,\ n-r+1)]^2}\,[\mathrm{B}(2r-1,\ 2n-2r+1)+\mathrm{B}(n,\ n)].$$

Подставляя это выражение и (4.3.4) в (4.3.7), придем к (4.3.6). ■ ►

Для облегчения вычисления приближения $\sum_{k=0}^{m} a_{2k+1}\cdot b_{2k+1}$ и соответствующей ошибки заметим, что функции Лежандра равны

$$L_0(u) = 1,\quad L_1(u) = \sqrt{3}\,(2u-1),\quad L_2(u) = \sqrt{5}\,(6u^2-6u+1),$$
$$L_3(u) = \sqrt{7}\,(20u^3-30u^2+12u-1) \quad \text{и т. д.}$$

В общем случае положим

$$L_k(u) = \sum_{i=0}^{k} a_{k,\,i}u^i.$$

Тогда коэффициенты a_k и b_k равны

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} \int_0^1 u^i x(u)\, du = \sum_{i=0}^{k} a_{k,i} \frac{\mathrm{E}X_{i+1:i+1}}{i+1},$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} a_{ki} \frac{r(r+1)\dots(r+i-1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+i)}.$$

Поэтому для вычисления приближения требуется определить математические ожидания значений максимального члена в малых выборках. Как видно из столбца, озаглавленного «3-я граница» таблицы 4.3, в нормальном случае

Таблица 4.3

Верхние и нижние границы для $\mathrm{E}X_{r:n}$
(стандартное нормальное распределение)
(результаты для $n=10$ взяты из работы Сугиюры (1962))

r	1-я граница	2-я граница	3-я граница	Точное значение
		$n=10$		
6	$0{,}15 \pm 0{,}06$	$0{,}113 \pm 0{,}016$	$0{,}1246 \pm 0{,}0032$	0,12267
7	$0{,}46 \pm 0{,}13$	$0{,}357 \pm 0{,}028$	$0{,}3775 \pm 0{,}0024$	0,37576
8	$0{,}77 \pm 0{,}14$	$0{,}651 \pm 0{,}008$	$0{,}6527 \pm 0{,}0048$	0,65606
9	$1{,}08 \pm 0{,}09$	$1{,}030 \pm 0{,}035$	$1{,}0032 \pm 0{,}0026$	1,00136
10	$1{,}38 \pm 0{,}17$	$1{,}527 \pm 0{,}015$	$1{,}5384 \pm 0{,}0005$	1,53875
		$n=50$		
26	$0{,}03 \pm 0{,}04$	$0{,}020 \pm 0{,}020$	$0{,}0278 \pm 0{,}0112$	0,02496
30	$0{,}30 \pm 0{,}27$	$0{,}189 \pm 0{,}118$	$0{,}2468 \pm 0{,}0586$	0,22653
35	$0{,}63 \pm 0{,}28$	$0{,}444 \pm 0{,}092$	$0{,}5036 \pm 0{,}0321$	0,49354
40	$0{,}96 \pm 0{,}26$	$0{,}798 \pm 0{,}091$	$0{,}7770 \pm 0{,}0564$	0,80225
45	$1{,}29 \pm 0{,}26$	$1{,}302 \pm 0{,}133$	$1{,}2180 \pm 0{,}0479$	1,21846
50	$1{,}63 \pm 0{,}67$	$2{,}007 \pm 0{,}253$	$2{,}1556 \pm 0{,}1044$	2,24907

при $n=10$ и $n=50$ приближение $a_1b_1+a_3b_3+a_5b_5$ дает приемлемые результаты. Как и следовало ожидать, границы одной и той же степени более точны для меньших n.

Поведение соответствующих ошибок при данном n и различных r описывается довольно сложно. По этому поводу см. работу Джоши (1969).

§ 4.4. Границы для математического ожидания порядковых статистик, выраженные через квантили распределения

Хорошо известно и интуитивно ясно, что при достаточно большом n приближением к $\mathsf{E}X_{r:n}$ является значение x, удовлетворяющее уравнению

$$P(x)=\frac{r}{n+1}.$$

Если для большей ясности теперь обозначить обратную функцию $x(P)$ через $Q(P)$, т. е. $Q[P(x)]=x$, то получим асимптотическую формулу

$$\mathsf{E}(X_{r:n})\sim Q\left(\frac{r}{n+1}\right). \qquad (4.4.1)$$

Этот вид приближения с помощью квантили мы обсудим в следующем параграфе. Здесь мы, следуя ван Цвету (1964), установим несколько неравенств, близко примыкающих к (4.4.1), но применимых даже для малых выборок. Нам будут нужны следующие определения.

Развивая определение из § 4.2, мы назовем действительную функцию $g(x)$, определенную на некотором невырожденном интервале I, *выпуклой* на I, если для любых x_1, x_2 из I и $0\leqslant\lambda\leqslant 1$

$$g[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda g(x_1)+(1-\lambda)g(x_2). \qquad (4.4.2)$$

Ясно, что если $g(x)$ — выпукла, то $g'(x)$ не убывает и $g''(x)>0$ при условии, конечно, что эти производные существуют. Далее, для каждой внутренней точки x_0 интервала I существует прямая L, лежащая целиком под графиком или на графике функции g и удовлетворяющая условию $L(x_0)=g(x_0)$. Мы говорим, что L является *опорной линией* для g в точке x_0. Если (4.4.2) имеет место с противоположным знаком неравенства, то g называется вогнутой на I. Заметим, что линейная функция является как выпуклой, так и вогнутой. Функция g называется *антисимметрической* на I относительно x_0, если

$$g(x_0+x)+g(x_0-x)=2g(x_0)$$

для некоторого x_0 из I, и для всех x, для которых как x_0-x, так и x_0+x принадлежат I; в этом случае x_0 называется *центральной точкой* для g. Антисимметрическая функция g, заданная на I, называется *вогнуто-выпуклой*, если она вогнута для $x\leqslant x_0$, и выпукла для $x\geqslant x_0$ при условии, что x принадлежит I.

Из этих определений следует, что g является непрерывной функцией, исключая, возможно, концы интервала I, а в случае вогнуто-выпуклой функции — точку x_0. Если предположить, что g не убывает, то g будет непрерывной в x_0.

Теперь возьмем в качестве I наибольший интервал, для которого $0<P(x)<1$. (Случай X, равной постоянной, исключается в силу невырожденности I.) Теперь мы докажем важное

Неравенство Йенсена. *Если функция g выпукла на I, то*

$$g(\mathsf{E}X)\leqslant \mathsf{E}(g(X))$$

при условии, что оба эти математических ожидания существуют. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда g линейна на I.

Доказательство. Пусть L — опорная линия для g в точке $x=\mathsf{E}X$. В силу того, что $L(x)\leqslant g(x)$ на I и L линейна, имеем

$$\mathsf{E}[g(X)]\geqslant \mathsf{E}[L(X)]=L(\mathsf{E}X)=g(\mathsf{E}X).$$

Если g линейна на I, то, очевидно, имеет место равенство. Обратно, для равенства необходимо, чтобы $g(x)=L(x)$ почти всюду. В силу выпуклости g непрерывна на I и поэтому должна быть линейной на всем I.

Теперь рассмотрим класс $\mathcal{P}$ ф. р. $P(x)$, которые обладают положительной непрерывной производной $p(x)$ на некотором интервале I[1]). Теперь $Q(P)$ однозначно определена для $0<P<1$ и имеет положительную непрерывную производную в этом интервале.

---

[1]) Ван Цвет приводит и другие ограничения, которые излишни для наших целей.

Лемма A. *Для любой пары ф. р. P, P^* из $\mathscr{P}$ существует строго возрастающая функция g на I такая, что если X имеет ф. р. P, то $g(X)$ имеет ф. р. P^*. Функция g однозначно определена на I равенством $g(x) = Q^*[P(x)]$ и имеет на I непрерывную производную.*

Доказательство. Для справедливости утверждения леммы необходимо и достаточно, чтобы

$$P^*[g(x)] = \mathsf{P}\{g(X) \leqslant g(x)\} = \mathsf{P}\{X \leqslant x\} = P(x)$$

для всех x из I и чтобы эта функция строго возрастала на I. Очевидно, что $g(x) = Q^*[P(x)]$ является единственной функцией, удовлетворяющей первому требованию. Так как Q^* строго возрастает в области изменения своего аргумента $P(x)$, то она возрастает и как функция от x и, следовательно, $g(x)$ строго возрастает на I. В силу замечания, предшествующего лемме A, $g(x)$ также имеет непрерывную производную на I. ▶

Теперь мы определим отношение упорядоченности для ф. р. из $\mathscr{P}$. Если $P, P^* \in \mathscr{P}$, то $P \underset{c}{<} P^*$ тогда и только тогда, когда $Q^*(P)$ выпукла на I. Буква c стоит здесь для обозначения выпуклости, и мы говорим, что *P с-предшествует P^**. Из леммы, очевидно, следует, что $P \underset{c}{<} P^*$ тогда и только тогда, когда случайную величину с ф. р. $P(x)$ можно получить из случайной величины с ф. р. $P^*(x)$ с помощью возрастающего выпуклого преобразования. Очевидно, что $P \underset{c}{<} P$. Поскольку возрастающая выпуклая функция от выпуклой функции снова является выпуклой, то из $P \underset{c}{<} P^* \underset{c}{<} P^{**}$ следует $P \underset{c}{<} P^{**}$. Таким образом, отношение $\underset{c}{<}$ является отношением слабой упорядоченности на $\mathscr{P}$, и мы говорим в этом случае о *с-упорядоченности* или о *с-сравнении*. Теперь можно определить отношение эквивалентности $\sim$: если P, P^* принадлежат $\mathscr{P}$, то $P \sim P^*$ тогда и только тогда, когда $P \underset{c}{<} P^*$ и $P^* \underset{c}{<} P$.

Лемма B. *Если $P \in \mathscr{P}$ и $P^* \in \mathscr{P}$, то $P \sim P^*$ тогда и только тогда, когда $P(x) = P^*(ax + b)$ для некоторых постоянных $a > 0$ и b.*

Доказательство. $P \sim P^*$ тогда и только тогда, когда как $Q^*(P)$, так и $Q(P^*)$ выпуклы на I. Но выпуклость $Q(P^*)$ эквивалентна вогнутости $Q^*(P)$, следовательно, $Q^*(P)$, будучи одновременно выпуклой и вогнутой, должна быть линейной. Таким образом, $Q^*[P(x)]=ax+b$ или $P(x)=P^*(ax+b)$, причем $a>0$, так как P^* возрастает по x. ▶

Эта лемма утверждает, что c-упорядоченность не зависит от параметров сдвига и масштаба. Поэтому можно сосредоточить внимание на ф. р. нормализованных величин. Чтобы проверять соотношение $P \underset{c}{<} P^*$, полезно иметь удобный критерий выпуклости $Q^*(P)$.

Лемма С. *Если $P \in \mathscr{P}$ и $P^* \in \mathscr{P}$, то $P \underset{c}{<} P^*$ тогда и только тогда, когда $Q^{*'}(y)/Q'(y)$ не убывает в области $0<y<1$.*

Доказательство. Из равенства $g(x)=Q^*[P(x)]$, положив $x=Q(y)$, получим, что $Q^*(y)=g[Q(y)]$ для $0<y<1$. Следовательно, $P \underset{c}{<} P^*$ тогда и только тогда, когда $Q^*(y)$ является выпуклой функцией от $Q(y)$. Дифференцируя $Q^*(y)$ по отношению к $Q(y)$, получим утверждение леммы. ▶

Теперь мы в состоянии использовать эти результаты для получения неравенств для математических ожиданий порядковых статистик.

Теорема 4.4.1. *Если $P \in \mathscr{P}$ и $P^* \in \mathscr{P}$, то из соотношения $P \underset{c}{<} P^*$ следует, что*

$$P(\mathrm{E}X_{r:n}) \leqslant P^*(\mathrm{E}X^*_{r:n}) \tag{4.4.3}$$

для всех r $(r=1, 2, \ldots, n)$ и всех n, для которых $\mathrm{E}X_{r:n}$ и $\mathrm{E}X^*_{r:n}$ существуют.

Доказательство. Выпуклое преобразование $g(x)=Q^*[P(x)]$ переводит X с ф. р. P в $X^*=g(X)$ с ф. р. P^*. Так как g строго возрастает, то это преобразование переводит также $X_{r:n}$ с ф. р. F_r в $X^*_{r:n}$ с ф. р. F^*_r. Теперь получим из неравенства Йенсена неравенство

$$g(\mathrm{E}X_{r:n}) \leqslant \mathrm{E}g(X_{r:n}) = \mathrm{E}X^*_{r:n}.$$

Таким образом,

$$Q^*[P(\mathrm{E}X_{r:n})] \leqslant \mathrm{E}X^*_{r:n}$$

или

$$P(\mathrm{E}X_{r:n}) \leqslant P^*(\mathrm{E}X^*_{r:n}).$$ ▶

c-сравнение с равномерным распределением. Пусть $P^*(x)=x$ $(0<x<1)$. Тогда $Q^*(y)=y$ $(0<y<1)$. В силу того, что $Q^*(P)=P$, любая выпуклая функция P c-предшествует P^*. Далее,

$$P^*(\mathrm{E}X^*_{r:n})=\frac{r}{n+1}, \tag{4.4.4}$$

так что для любой выпуклой функции P

$$P(\mathrm{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r}{n+1}. \tag{4.4.5}$$

Для любой вогнутой P это неравенство справедливо с противоположным знаком.

c-сравнение с $P^*(x)=-\frac{1}{x}$ и $P^*(x)=\frac{x-1}{x}$. Для $P^*(x)=-1/x$ $(-\infty<x<-1)$ или $Q^*(y)=-1/y$ находим $\mathrm{E}X^*_{r:n}=-\frac{n}{r-1}$ для $r>1$. Таким образом, в случае, когда $1/P(x)$ вогнута на I и, следовательно, $Q^*(P)=-1/P(x)$ выпукла, мы имеем

$$P(\mathrm{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r-1}{n}\qquad(r>1). \tag{4.4.6}$$

В том случае, когда $1/P(x)$ выпукла, неравенство меняет знак на противоположный.

Таким же образом, c-сравнение с $P^*(x)=(x-1)/x$ дает нам неравенство

$$P(\mathrm{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r}{n}\qquad(r<n), \tag{4.4.7}$$

если $\frac{1}{[1-P(x)]}$ выпукла. Если $\frac{1}{[1-P(x)]}$ вогнута, то знак $\leqslant$ следует заменить знаком $\geqslant$.

Легко показать, что для нормального распределения с п. р. $p(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ $(-\infty<x<\infty)$ как $1/P(x)$, так и $1/[1-P(x)]$ выпуклы. Например, используя обозначения P вместо $P(x)$ и т. д., получим

$$\frac{d^2}{dx^2}P^{-1}=\frac{d}{dx}(-pP^{-2})=P^{-3}(2p^2+Pxp)=pP^{-3}(2p+Px)>0,$$

так как $2p+Px$ возрастает в области $x<0$ от 0 в точке $x=-\infty$ и имеет, очевидно, положительные значения при $x>0$.

Поэтому

$$\frac{r-1}{n} \leqslant P(\mathsf{E}X_{r:n}) < \frac{r}{n}. \tag{4.4.8}$$

c-сравнение с экспоненциальным распределением. Теперь $P^*(x) = 1 - e^{-x}$ $(0 < x < \infty)$ и, следовательно,

$$g(x) = Q^*[P(x)] = -\log[1 - P(x)].$$

Таким образом, для выпуклости $g(x)$ достаточно, чтобы функция

$$g'(x) = \frac{p(x)}{1 - P(x)}$$

была неубывающей. Интересно отметить, что $g'(x)$ является *функцией интенсивности отказов* (hazard rate) $h(x)$, часто встречающейся в задачах испытания на продолжительность жизни, или, другими словами, условной п. р. продолжительности жизни X объекта с ф. р. $P(x)$ при условии, что объект еще функционирует к моменту времени x. Поскольку $h(x)\,dx$ является соответствующей условной вероятностью гибели в промежутке $(x, x+dx)$, то часто разумно предполагать, что интенсивность отказов монотонно возрастает (см. также работу Барлоу и др. (1963)) или, что равносильно, что $P \underset{c}{<} P^*$. Далее,

$$\mathsf{E}X^*_{r:n} = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{n-i} < \int_{n-r+1/2}^{n+1/2} \frac{1}{x}\,dx = \log \frac{n+\frac{1}{2}}{n-r+\frac{1}{2}},$$

так что если $P(x)$ — ф. р. с возрастающей интенсивностью отказов, то

$$P(\mathsf{E}X_{r:n}) \leqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{n-i}\right) < \frac{r}{n+\frac{1}{2}}. \tag{4.4.9}$$

(См. также работу Барлоу (1965).)

Если ограничиться подклассом $\mathscr{S}$ симметричных распределений из $\mathscr{P}$, то можно получить более сильные неравенства. Это требование, которое мы будем предполагать во всей оставшейся части главы, состоит в том, что $P(x_0 - x) + P(x_0 + x) = 1$ для некоторого x_0 и всех x или, что равносильно,

$$Q(y) + Q(1-y) = 2x_0 \tag{4.4.10}$$

для всех y из интервала (0, 1). Применяя (4.4.10) к ф. р. P^* из $\mathscr{S}$ с $y=P(x_0-x)$, получим

$$Q^*[P(x_0-x)]+Q^*[P(x_0+x)]=2x_0^*,$$

где x_0^* — точка симметрии P^*. Это означает, что $Q^*(P)$ антисимметрична на I относительно x_0. Следовательно, из выпуклости (вогнутости) $Q^*(P)$ для $x>x_0$ следует вогнутость (выпуклость) $Q^*(P)$ для $x<x_0$. Из этого следует, что если P, P^* принадлежат $\mathscr{S}$, то из $P\underset{c}{<}P^*$ следует, что $P\sim P^*$, так что симметричные распределения не являются c-сравнимыми, если только они не эквивалентны. Теперь мы определим *s-упорядоченность* или *s-сравнение*: если P, $P^*\in\mathscr{S}$, то $P\underset{s}{<}P^*$ тогда и только тогда, когда $Q^*(P)$ выпукла для $x>x_0$. Буква s ставится для обозначения симметрии и говорят, что P *s-предшествует* P^*.

Теперь легко провести для s-упорядоченности рассуждения, проведенные ранее для c-упорядоченности, и, в частности, показать, что отношение $\underset{s}{<}$ является слабой упорядоченностью на $\mathscr{S}$. Если в лемме А $\mathscr{P}$ заменить на $\mathscr{S}$, то она останется справедливой; преобразование $g(x)=Q^*[P(x)]$ теперь, кроме того, является антисимметрическим вогнуто-выпуклым на I. В лемме В следует просто подставить $\mathscr{S}$ вместо $\mathscr{P}$. Вместо леммы С будем пользоваться следующей леммой:

Лемма С'. *Если P, $P^*\in\mathscr{S}$, то $P\underset{s}{<}P^*$ тогда и только тогда, когда $Q^{*\prime}(y)/Q'(y)$ не убывает в области $1/2<y<1$.*

Наконец, теореме 4.4.1 соответствует

Теорема 4.4.2. *Для P, $P^*\in\mathscr{S}$ из соотношения $P\underset{s}{<}P^*$ следует, что*

$$P(\mathrm{E}X_{r:n})\leqslant P^*(\mathrm{E}X^*_{r:n}) \qquad (4.4.11)$$

для всех r из $\frac{1}{2}(n+1)\leqslant r\leqslant n$ и всех n, для которых $\mathrm{E}X^*_{r:n}$ существует.

Мы отсылаем читателя к доказательству ван Цвета ((1964), стр. 67).

s-сравнение с равномерным распределением. Пусть P^* — равномерная ф. р. Тогда $Q^*(P)=P$ и любая вогнуто-выпуклая P из $\mathscr{S}$ s-предшествует P^*. Рассмотрим распределения из $\mathscr{S}$, либо имеющие U-образную форму, либо являющиеся унимодальными (п. р. имеет единственный максимум). Тогда P является соответственно вогнуто-выпуклой и выпукло-вогнутой. Отсюда вытекает, что при P, принадлежащем $\mathscr{S}$, и $r \geqslant \frac{1}{2}(n+1)$ справедливы следующие утверждения:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Для симметричного } U\text{-образного распределения}\\ \qquad P(\mathsf{E}X_{r:n}) \leqslant \dfrac{r}{n+1},\\ \text{для симметричного унимодального распределения}\\ \qquad P(\mathsf{E}X_{r:n}) \geqslant \dfrac{r}{n+1}.\end{array}\right\} \quad (4.4.12)$$

Эти результаты можно сравнить с (4.4.5). Прямое доказательство (4.4.12) приведено у Али и Чена (1965). (См. также упр. 4.4.3.)

s-сравнения нормального и логистического распределений. Пусть $P(x)$ — ф. р. стандартного нормального распределения, и пусть $P^*(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ $(-\infty < x < \infty)$. Очевидно, P, P^* принадлежат $\mathscr{S}$. Также легко показать, что функция

$$Q^*[P(x)] = \log P(x) - \log[1 - P(x)]$$

выпукла при $x \geqslant 0$, так что $P \underset{s}{<} P^*$. Далее, для $r \geqslant \frac{n+1}{2}$

$$\mathsf{E}(X^*_{r:n}) = \sum_{i=n+1-r}^{r-1} \frac{1}{i} < \log \frac{r-\frac{1}{2}}{n-r+\frac{1}{2}},$$

и в силу теоремы 4.4.2 получим

$$P(\mathsf{E}X_{r:n}) \leqslant \frac{1}{1+\exp\left(-\sum\limits_{i=n+1-r}^{r-1} \frac{1}{i}\right)} < \frac{r-\frac{1}{2}}{n}. \quad (4.4.13)$$

Для нормального случая эти два неравенства сильнее соответствующих неравенств из (4.4.9).

В таблице 4.4 проводится численное сравнение для $n=10$ и $r=6\,(1)\,10$ четырех верхних границ:

(1) $$\Phi^{-1}\left[1-\exp\left(-\sum_{i=n+1-r}^{n}\frac{1}{i}\right)\right],$$

(2) $$\Phi^{-1}\left(\frac{r}{n+\frac{1}{2}}\right),$$

(3) $$\Phi^{-1}\left[\frac{1}{1+\exp\left(-\sum\limits_{i=n+1-r}^{r-1}\frac{1}{i}\right)}\right],$$

(4) $$\Phi^{-1}\left(\frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right),$$

а также нижней границы, полученной из формулы (4.4.8),

(5) $$\Phi^{-1}\left(\frac{r-1}{n}\right),$$

приближения, предложенного Бломом (1958), которое мы обсудим в § 4.5,

(6) $$\Phi^{-1}\left(\frac{r-\frac{3}{8}}{n+\frac{1}{4}}\right),$$

и точного значения

(7) $$\mathrm{E}X_{r:n}.$$

Из этих верхних границ граница (3) лучше, чем (4), и является довольно точной. Нижняя граница (5) довольно

Таблица 4.4

Границы и приближения для $\mathrm{E}X_{r:n}$ при $n=10$

r	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
6	0,178	0,180	0,125	0,126	0	0,123	0,123
7	0,428	0,431	0,384	0,385	0,253	0,375	0,376
8	0,708	0,712	0,671	0,674	0,524	0,655	0,656
9	1,057	1,067	1,027	1,036	0,842	1,000	1,001
10	1,612	1,669	1,591	1,645	1,282	1,547	1,539

грубая. Эти результаты, особенно нижние границы, вообще говоря, не выдерживают сравнения с более сложными границами 3-го столбца таблицы 4.3. (См. также работу ван Цвета (1967).)

§ 4.5. Приближения моментов с помощью функций, обратных к ф. р., и их производных

Как мы уже видели, для непрерывного распределения вероятностное интегральное преобразование $u = P(x)$ переводит порядковую статистику $X_{(r)}$ в r-ю порядковую статистику $U_{(r)}$ выборки объема n из равномерного $R(0, 1)$ распределения. Теперь мы обратим соотношение $U_{(r)} = P(X_{(r)})$, записав $X_{(r)} = Q(U_{(r)})$, и разложим $Q(U_{(r)})$ в ряд Тейлора в точке

$$\mathsf{E}U_{(r)} = \frac{r}{n+1} = p_r. \tag{4.5.1}$$

Это приведет нас к равенству

$$X_{(r)} = Q(p_r) + (U_{(r)} - p_r)Q'(p_r) + \\ + \frac{1}{2}(U_{(r)} - p_r)^2 Q''(p_r) + \frac{1}{6}(U_{(r)} - p_r)^3 Q'''(p_r) + \ldots \tag{4.5.2}$$

Заменяя $Q(p_r)$ на Q_r и т. д. и полагая $q_r = 1 - p_r$, получим с помощью (3.1.7) с точностью до $(n+2)^{-2}$

$$\mathsf{E}X_{(r)} = Q_r + \frac{p_r q_r}{2(n+2)} Q_r'' + \\ + \frac{p_r q_r}{(n+2)^2}\left[\frac{1}{3}(q_r - p_r) Q_r''' + \frac{1}{8} p_r q_r Q_r''''\right], \tag{4.5.3}$$

$$\mathsf{D}X_{(r)} = \frac{p_r q_r}{n+2} Q_r'^2 + \\ + \frac{p_r q_r}{(n+2)^2}\left[2(q_r - p_r) Q_r' Q_r'' + p_r q_r \left(Q_r' Q_r''' + \frac{1}{2} Q_r''^2\right)\right], \tag{4.5.4}$$

$$\operatorname{cov}(X_{(r)}, X_{(s)}) = \frac{p_r q_s}{n+2} Q_r' Q_s' + \\ + \frac{p_r q_s}{(n+2)^2}\left[(q_r - p_r) Q_r'' Q_s' + (q_s - p_s) Q_r' Q_s'' + \frac{1}{2} p_r q_s Q_r''' Q_s' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} p_s q_s Q_r' Q_s''' + \frac{1}{2} p_r q_s Q_r'' Q_s''\right]. \tag{4.5.5}$$

Заметим, что так как $p_r = P(Q_r)$, то

$$Q'_r = \frac{1}{dp_r/dQ_r} = \frac{1}{p(Q_r)},$$

где $p(Q_r)$ — значение п. р. величины X в точке Q_r. Этот подход, по существу принадлежащий Пирсонам (1931), был систематически продолжен Дэйвидом и Джонсоном (1954), которые получили результаты с точностью до $(n+2)^{-3}$ для любых первых четырех кумулянтов, а также для совместных кумулянтов. Обратную функцию не обязательно разлагать по степеням $(n+2)$. (См. работу Кларка и Уильямса (1958)), хотя Дэйвид и Джонсон находят это выгодным. Условия, при которых оправдан этот подход, получены Бломом (1958, гл. 5) и ван Цветом (1964, гл. 3.) Со (1960) получил границы для остаточного члена в том случае, когда разложение $\mathsf{E}X_{(r)}$ содержит четное число членов. С практической точки зрения наиболее важная особенность этого разложения состоит в том, что сходимость может быть медленной или вообще отсутствовать, если r/n слишком близки к 0 или 1.

Пример 4.5. Для стандартного нормального распределения с ф. р. $\Phi(x)$ и п. р. $\varphi(x)$ имеем $Q(p_r) = \Phi^{-1}(p_r)$ и $Q'(p_r) = 1/\varphi(Q)$. Тогда

$$Q''(p_r) = \frac{d}{d\Phi(Q)}\left(\frac{1}{\varphi(Q)}\right) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{1}{\varphi(Q)}\right)\cdot\frac{dQ}{d\Phi(Q)} = \frac{Q}{\varphi^2(Q)},$$

так как $d\varphi(Q)/dQ = -Q\varphi(Q)$. Далее мы также найдем

$$Q'''(p_r) = \frac{1+2Q^2}{\varphi^3(Q)}, \quad Q''''(p_r) = \frac{Q(7+6Q^2)}{\varphi^4(Q)}.$$

Другой подход, основанный на логистическом, а не на равномерном распределении, был развит Плэкеттом (1958) (кроме того, см. работу Чена (1967b)). Хотя он и менее удобен, но имеются указания на то, что в нормальном случае при том же числе членов ряды Плэкетта для $\mathsf{E}X_{(r)}$ немного более точны, чем ряды Дэйвида и Джонсона (Со (1960)).

Применять формулы (4.5.3)—(4.5.5) довольно утомительно, особенно для распределений, которые не похожи на нормальное и для которых $dp(Q)/dQ$ не выражаются просто. Рассуждая, как в теореме о среднем, Блом (1958, гл. 6) предложил использовать полуэмпирические

«α, β-поправки» и писать

$$\mathsf{E}X_{(r)} = Q(\pi_r) + R,$$

где $\pi_r = (r - \alpha_r)/(n + 1 - \alpha_r - \beta_r)$, а R имеет порядок $1/n$. При подходящем выборе α_r и β_r (которые, вообще говоря, также зависят от n) остаток R можно сделать достаточно малым, так что $Q(\pi_r)$ можно использовать в качестве приближения к $\mathsf{E}X_r$. Этот подход упрощается в случае симметричного распределения, так как, если положить математическое ожидание равным нулю, то разумно потребовать, чтобы

$$Q(\pi_r) = -Q(\pi_{n-r+1}) \quad \text{или} \quad \pi_r + \pi_{n-r+1} = 1.$$

В свою очередь, это наводит на мысль положить $\alpha_r = \beta_r$ и, следовательно,

$$\pi_r = \frac{r - \alpha_r}{n + 1 - 2\alpha_r}.$$

Решая относительно α_r уравнение $\mathsf{E}X_{(r)} = Q(\pi_r)$, получим

$$\alpha_r = \frac{r - (n+1) P(\mathsf{E}X_{(r)})}{1 - 2P(\mathsf{E}X_{(r)})}.$$

Блом обнаружил, что в нормальном случае для $n \leqslant 20$ поправка α_r проявляет удивительную устойчивость при всех r, ее наименьшее и наибольшее значения равны, соответственно, 0,33 и 0,39. Поэтому он предложил взять $\alpha = 3/8$ в качестве удобного общего значения. Это приближение приведено в столбце (6) таблицы 4.4. Приближение довольно хорошее. Однако вычисления для больших n ($\leqslant 400$), проведенные Хартером (1961а), указывают на то, что $\alpha = 0,4$ лучше для $50 \leqslant n \leqslant 400$. За более детальными рекомендациями следует обращаться к статье Хартера.

Упражнения

4.2.1. Показать, что для любого распределения с ф. р. $u = P(x)$, симметричиого относительно иуля, справедливо иеравеиство

$$\mathsf{D}X_{(n)} \geqslant \lambda_n \sigma^2$$

и что эта иижняя граница достигается, если x пропорциоиалеи выражению

$$\frac{n\,[u^{n-1} - (1-u)^{n-1}]}{n\,[u^{n-1} + (1-u)^{n-1}] - 2\lambda_n},$$

где λ_n — единственный корень следующего уравнения (относительно λ):

$$\int\limits_{1/2}^{1} \frac{n^2\,[u^{n-2}-(1-u)^{n-1}]^2}{n\,[u^{n-1}+(1-u)^{n-1}]-2\lambda}\,du=1,$$

расположенный в интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant n/2^{n-1}$ (Моригути (1951)).

4.2.2. Положив в неравенстве Шварца

$$f = xn^{1/2}\,[u^{n-1}+(1-u)^{n-1}]^{1/2},$$

$$g = \frac{n^{1/2}\,[u^{n-1}-(1-u)^{n-1}]}{[u^{n-1}+(1-u)^{n-1}]^{1/2}},$$

показать, что для любого, симметричного относительно нуля распределения, имеющего дисперсию, имеет место неравенство

$$\frac{\mathsf{D}\,(X_{(n)})}{(\mathsf{E}X_{(n)})^2} \geqslant \frac{1}{M_n}-1, \qquad \text{(A)}$$

где

$$M_n = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{n\,[u^{n-1}-(1-u)^{n-1}]^2}{u^{n-1}+(1-u)^{n-1}}\,du,$$

и что равенство в (A) достигается тогда и только тогда, когда x пропорционален выражению

$$\frac{u^{n-1}-(1-u)^{n-1}}{u^{n-1}+(1-u)^{n-1}}$$

(Моригути (1951)).

4.2.3. Показать, что для любого распределения с конечной дисперсией имеет место неравенство

$$\mathsf{E}\,(X_{(r)}-X_{(n-r+1)}) \leqslant \sigma \left\{\int\limits_0^1 [\overline{\Psi}\,(u)]^2\,du\right\}^{1/2} \qquad (r > [n/2]),$$

где

$$\overline{\Psi}\,(u) = \begin{cases} -\Psi\,(u_1), & \text{если} \quad 0 \leqslant u < 1-u_1, \\ \Psi\,(u), & \text{если} \quad 1-u_1 \leqslant u \leqslant u_1, \\ \Psi\,(u_1), & \text{если} \quad u_1 \leqslant \; < 1, \end{cases}$$

$$\Psi\,(u) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\,[u^{r-1}\,(1-u)^{n-r}-u^{n-r}\,(1-u)^{r-1}],$$

а u_1 определяется из уравнения

$$(1-u_1)\,\Psi\,(u_1) = \int\limits_{u_1}^{1} \Psi\,(u)\,du \qquad \left(\frac{1}{2} < u_1 < 1\right)$$

(Моригути (1953a)).

4.3.1. Показать, что для любой нормированной симметричной случайной величины X с ф. р. $u=P(x)$ справедливо неравенство

$$|\mathsf{E}X_{(r)}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{B}(r,\ n-r+1)}[\mathrm{B}(2r-1,\ 2n-2r+1)-\mathrm{B}(n,\ n)]^{1/2},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$x(u)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{B}(2r-1,\ 2n-2r+1)-\mathrm{B}(n,\ n)]^{-1/2}\times$$
$$\times[u^{r-1}(1-u)^{n-r}-u^{n-r}(1-u)^{r-1}]$$

(Сугиюра (1962)).

4.4.1. С помощью (4.4.4)—(4.4.7) показать, что для гамма-распределения с п. р.

$$P'(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}e^{-x}x^{\alpha-1}\qquad(\alpha>0,\ 0<x<\infty)$$

справедливы неравенства

$$\frac{r-1}{n}\leqslant P(\mathsf{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r}{n},\quad\text{если}\quad\alpha>1,$$
$$\frac{r}{n+1}\leqslant P(\mathsf{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r}{n},\quad\text{если}\quad\alpha=1,$$
$$\frac{r}{n+1}\leqslant P(\mathsf{E}X_{r:n}),\quad\text{если}\quad\alpha<1$$

(ван Цвет (1964), стр. 56).

4.4.2. Показать, что для бета-распределения с п. р.

$$P'(x)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ (\alpha,\ \beta>0,\ 0<x<1)$$

справедливы неравенства

$$\frac{r-1}{n}\leqslant P(\mathsf{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r}{n},\quad\text{если}\quad\alpha>1,\ \beta>1,$$
$$\frac{r-1}{n}\leqslant P(\mathsf{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r}{n+1},\quad\text{если}\quad\alpha>1,\ \beta=1,$$
$$\frac{r}{n+1}\leqslant P(\mathsf{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r}{n},\quad\text{если}\quad\alpha=1,\ \beta>1,$$
$$P(\mathsf{E}X_{r:n})\leqslant\frac{r}{n+1},\quad\text{если}\quad\alpha\geqslant1,\ \beta<1,$$
$$\frac{r}{n+1}\leqslant P(\mathsf{E}X_{r:n}),\quad\text{если}\quad\alpha<1,\ \beta\geqslant1.$$

(ван Цвет (1964), стр. 57).

4.4.3. Пусть $P(x)$ — непрерывная строго возрастающая ф. р. симметричной относительно нуля случайной величины X. Определив i_u

как в (4,2,11), положим

$$C=\int_{1/2}^{1}(i_u-i_{1-u})\,du.$$

Показать, что для $r>(n+1)/2$ и $Q=P^{-1}$

а) $\quad 0<C<1,$

б) $\dfrac{\mathsf{E}X_{r:n}}{C}\geqslant Q\left\{\displaystyle\int_{1/2}^{1}\left[\frac{u\,(i_u-i_{1-u})}{C}\right]du\right\},$

в) $\mathsf{E}X_{r:n}\geqslant CQ\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{r}{n+1}-\dfrac{1}{2}\right)\right]\geqslant Q\left(\dfrac{r}{n+1}\right)$

(Али и Чен (1965)).

4.5.1. Показать, что для симметричной п. р. $p(x)$ с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 эффективность выборочной медианы M по отношению к выборочному среднему с точностью до членов порядка $\dfrac{1}{n}$ равна

$$4f^2\sigma^2\left(1+\frac{g+8}{4n}\right)\quad\text{для нечетных } n,$$

$$4f^2\sigma^2\left(1+\frac{g+12}{n}\right)\quad\text{для четных } n,$$

где

$$f=p(\mu),\quad g=\frac{p''(\mu)}{p^3(\mu)}.$$

Показать также, что с точностью до порядка $\dfrac{1}{n^2}$ справедливо равенство

$$\mathsf{D}M=\frac{1}{8mf^2}\left(1-\frac{g+12}{8mf^2}\right)$$

как для $n=2m$, так и для $n=2m+1$ (m целое).

Таким образом, с точностью до этой аппроксимации без потери эффективности можно основываться на медиане нечетного числа наблюдений; добавление еще одного наблюдения не изменяет дисперсии медианы (Ходжес и Леман (1967)).

ГЛАВА 5

ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 5.1. Введение

В главе 2 мы рассмотрели основные понятия теории распределений порядковых и простых систематических статистик. Цель этой главы — изучить более сложные величины, связанные с порядковыми статистиками. Сначала предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального $N(\mu, \sigma)$ распределения. Важный класс стьюдентизированных статистик состоит из функций вида $\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}/S_\nu$, где S_ν^2 — независимая от числителя среднеквадратичная оценка для σ^2, имеющая ν степеней свободы (т. е. $\nu S_\nu^2/\sigma^2$ распределено как χ^2 с ν степенями свободы). Наиболее важной статистикой этого класса является стьюдентизированный размах W/S_ν, используемый в задаче ранжировки «способов обработки» в дисперсионном анализе. Для проверки нормальности и присутствия аномальных наблюдений (гл. 8) представляют интерес статистики вида $\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}/S$, где S^2 (без индекса) обозначает среднеквадратичную оценку для σ^2, полученную по исходной выборке, т. е. $(n-1)S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2$. В этом случае мы будем говорить о внутренней стьюдентизации, в отличие от первого более знакомого процесса, который назовем внешней стьюдентизацией. Если у нас имеется в распоряжении внешняя информация о σ, то мы можем дополнить ее внутренней информацией, взяв в качестве знаменателя объединенную оценку $S^{(P)}$, где

$$(n-1+\nu)(S^{(P)})^2=(n-1)S^2+\nu S_\nu^2.$$

Использование $S^{(P)}$ приводит к еще одному виду стьюдентизации.

Многие статистики можно выразить в виде максимумов. Очевидно, что стьюдентизированный размах равен наибольшей среди $n(n-1)$ разностей $(X_i-X_j)/S_\nu$. Это свойство частично объясняет его большую роль в задачах ранжирования и сложных сравнений. В § 5.3 мы предлагаем подход, часто являющийся полезным для получения точных или приближенных верхних процентных точек таких статистик. Метод не слишком хорошо работает для стьюдентизированного размаха, но является эффективным для таких статистик, выявляющих аномальные наблюдения, как $X_{(n)}-\bar{X}$, $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n}|X_i-\bar{X}|$, и их стьюдентизированных вариантов, а также для многих других статистик, вообще говоря, без предположения о нормальности выборки. Другое применение этого подхода состоит в нахождении распределения наибольшего частичного интервала, получаемого в результате случайного разбиения единичного интервала.

Хотя в описанных примерах величины X_i независимы, все рассматриваемые статистики являются максимумами коррелированных величин; например, $X_{(n)}-\bar{X}$ является максимумом n коррелированных отклонений $Y_i=X_i-\bar{X}$. В § 5.5 рассматриваются более общие задачи, связанные с порядковыми статистиками для зависимых величин.

§ 5.2. Стьюдентизация

Мы будем иллюстрировать различные общие методы обращения со стьюдентизированными статистиками, рассматривая подробно стьюдентизированный размах.

Из независимости W_n и S_ν следует, что у (внешнего) стьюдентизированного размаха k-й момент равен

$$\mathsf{E}(Q_{n,\nu}^k)=\mathsf{E}(S_\nu^{-k})\cdot\mathsf{E}(W_n^k)=\frac{\nu^{k/2}\Gamma\left(\frac{\nu-k}{2}\right)\mathsf{E}\left(\frac{W_n}{\sigma}\right)^k}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \qquad (5.2.1)$$

$$(0\leqslant k<\nu).$$

Таким образом, зная k-й момент W_n/σ, можно найти k-й момент Q и использовать кривые Пирсона или кривые других типов для приближения распределения Q.

Другой подход возникает из процесса стьюдентизации Хартли (1944), который позволяет ф. р. величины $Q_{n,\nu}$ выразить через ф. р. величины W_n и ряды по степеням $1/\nu$, а именно,

$$\mathsf{P}\{Q_{n,\nu}<q\}=\mathsf{P}\{W_n<q\}+a_1\nu^{-1}+a_2\nu^{-2}+\ldots, \tag{5.2.2}$$

где a_1, a_2 зависят от n и q и табулированы Пирсоном и Хартли (1943) для $n\leqslant 20$ и $\nu\geqslant 10$. Приближение левой части только тремя членами не совсем удовлетворительно, особенно для $\nu\leqslant 20$. (См. также работы Моригути (1953b); Кудо (1956c) и Чемберса (1967).) Хартер и др. (1959) в своих известных таблицах вернулись (по существу) к простому соотношению

$$\mathsf{P}\{Q_{n,\nu}<q\}=\int_0^1 \mathsf{P}\{W_n<s_\nu q\}f(s_\nu)\,ds_\nu=$$

$$=\frac{2\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^\infty s^{\nu-1}e^{-\nu s^2/2}\mathsf{P}\{W_n<sq\}\,ds. \tag{5.2.3}$$

Изучение внутренне стьюдентизированного размаха W_n/S облегчается для нормальных выборок независимостью величин W_n/S и S. Этот результат немедленно вытекает из того, что W_n/S, имеющее распределение, не зависящее от μ и σ, не зависит от полной достаточной статистики $(\bar{X}, S)$ (Басу (1955)). Более элементарное доказательство приведено в упр. 5.2.1. Далее

$$\mathsf{E}(W_n^k)=\mathsf{E}\left[\left(\frac{W_n}{S}\right)^k\cdot S^k\right]=\mathsf{E}\left(\frac{W_n}{S}\right)^k\mathsf{E}S^k, \tag{5.2.4}$$

так что k-й момент отношения W_n/S имеет вид

$$\mathsf{E}\left(\frac{W_n}{S}\right)^k=\frac{\mathsf{E}(W_n^k)}{\mathsf{E}S^k}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]^{k/2}\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-1+k)\right]}\mathsf{E}\left(\frac{W_n}{\sigma}\right)^k. \tag{5.2.5}$$

Поэтому приближенное распределение можно снова получить, подбирая подходящую кривую. С помощью метода следующего параграфа также можно получить некоторые точные верхние процентные точки (Дэйвид и др. (1954)).

Точно таким же образом можно поступать с отношением размаха к $S^{(P)}$-объединенной оценке для σ^2. Действительно, равенство (5.2.4) останется справедливым, если S заменить на $S^{(P)}$. Чтобы убедиться в этом, предположим, без существенной потери общности, что S_ν^2 вычисляется по выборке объема $\nu+1$ с $N(\mu_1, \sigma^2)$ распределением. Тогда среднее $\bar{X}$ исходной выборки, среднее $\bar{X}_1$ выборки объема $\nu+1$ и $S^{(P)}$ представляют собой полную достаточную статистику для μ, μ_1 и σ^2. Так как распределение отношения $W_n/S^{(P)}$ не зависит от этих параметров, то оно не зависит от $S^{(P)}$ и т. д.

§ 5.3. Статистики, выражаемые в виде максимумов

Наиболее важной из статистик, которые нам предстоит рассмотреть, является максимальное отклонение (от выборочного среднего) $X_{(n)}-\bar{X}$. Для нормальных $N(\mu, 1)$ случайных величин мы найдем его распределение (Нэир (1948); Граббс (1950)). Для этого перейдем от $x_{(i)}$ к x_i' и затем к y_i с помощью соотношений

$$y_1 = n^{1/2}x_1' = \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)}-\mu) = n(\bar{x}-\mu),$$

$$y_2 = (2\cdot 1)^{1/2}x_2' = -x_{(1)}+x_{(2)} = 2\left(x_{(2)}-\frac{x_{(1)}+x_{(2)}}{2}\right),$$

$$y_3 = (3\cdot 2)^{1/2}x_3' = -x_{(1)}-x_{(2)}+2x_{(3)} = 3\left(x_{(3)}-\frac{x_{(1)}+x_{(2)}+x_{(3)}}{3}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = [n(n-1)]^{1/2}x_n' = -x_{(1)}-x_{(2)}\ldots-x_{(n-1)}+(n-1)x_{(n)} = n(x_{(n)}-\bar{x}).$$

Так как преобразование $x_{(i)}$ в x_i' ортогонально, то

$$f(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \frac{n!}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i'^2\right)$$

и, следовательно,

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{n} + \sum_{i=2}^{n} \frac{y_i^2}{i(i-1)}\right)\right], \tag{5.3.1}$$

$$f(y_2, \ldots y_n) = \frac{n^{1/2}}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \frac{y_i^2}{i(i-1)}\right].$$

Из соотношений $y_i - y_{i-1} = (i-1)(x_{(i)} - x_{(i-1)}) \geqslant 0$ ($i = 3, 4, \ldots, n$) видно, что (5.3.1) справедливо в области $0 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$.

Вводя функции H_n, получим для $n=2$, 3 равенства

$$\mathsf{P}\{X_{(2)} - \bar{X} < c\} = \sqrt{2} \int_0^{2c} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y_2^2}{2\cdot 1}\right) dy_2 = H_2(2c),$$

$$\mathsf{P}\{X_{(3)} - \bar{X} < c\} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \int_0^{3c} H_2(y_3) \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y_3^2}{3\cdot 2}\right) dy_3 = H_3(3c)$$

и точно таким же образом, последовательно интегрируя (5.3.1), получим равенство

$$\mathsf{P}\{X_{(n)} - \bar{X} < c\} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} \int_0^{nc} H_{n-1}(y_n) \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{y_n^2}{n(n-1)}\right] dy_n = H_n(nc).$$

Граббс использовал это соотношение для табулирования ф. р. величин $X_{(n)} - \bar{X}$ для $n \leqslant 25$.

Общий метод аппроксимации верхних процентных точек статистик, выражаемых в виде максимумов. Хотя мы только что показали, как для нормального распределения была успешно табулирована ф. р. $X_{(n)} - \bar{X}$, существует очень мало систематических статистик, для которых имеются такие таблицы. Нет большой нужды в подробных таблицах такого сорта, так как обычно достаточно знать верхние процентные точки только для нескольких уровней α. Теперь мы опишем метод, который часто дает возможность получить эти точки приближенно, а иногда и точно. Нижние процентные точки статистик, выражаемых в виде минимума, можно, конечно, получить таким же образом.

Пусть имеется n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда принцип включения и исключения приводит к хорошо известной булевской формуле для вероятности появления по крайней мере одного из A_i:

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} = \sum_i \mathsf{P}\{A_i\} - \sum_{i<j}\sum \mathsf{P}\{A_iA_j\} + \ldots (-1)^{n-1}\mathsf{P}\{A_1A_2\ldots A_n\}. \tag{5.3.2}$$

Более того, сумма нечетного числа членов правой части является верхней границей, а сумма четного числа членов — нижней границей левой части, причем точность границ возрастает с возрастанием числа учитываемых членов. Таким образом, у нас имеется последовательность неравенств (иногда приписываемых Бонферрони), первое из которых имеет вид

$$\sum_i \mathsf{P}\{A_i\} - \sum_{i<j}\sum \mathsf{P}\{A_iA_j\} \leqslant \mathsf{P}\{\cup A_i\} \leqslant \sum_i \mathsf{P}\{A_i\}\,^{1)}. \tag{5.3.3}$$

Отождествим теперь A_i с событием $Y_i > y$, где Y_i — случайные величины. Тогда $A_i = \{Y_i > y\}$, $A_iA_j = \{Y_i > y, Y_j > y\}$ и т. д., $\cup A_i = \{Y_{(n)} > y\}$. Если к тому же совместное распределение Y_i симметрично относительно Y_i, то (5.3.2) примет вид

$$\mathsf{P}\{Y_{(n)} > y\} = n\mathsf{P}\{Y_1 > y\} - C_n^2\mathsf{P}\{Y_1 > y,\ Y_2 > y\} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\mathsf{P}\{Y_1 > y,\ Y_2 > y,\ \ldots,\ Y_n > y\}. \tag{5.3.4}$$

Возможность использования этого результата основана на том, что часто при достаточно большом y (например, при $y > y_{n;\,0,1}$, где $y_{n;\,0,1}$ — верхняя 10-процентная точка для $Y_{(n)}$) слагаемые правой части быстро убывают. В этом случае верхняя граница $y^{(1)}$ для $y_{n,\alpha}$, получаемая из

---

1) Так как $\Sigma\mathsf{P}(A_i)$ может быть больше 1, то верхней границей является $\min(\Sigma\mathsf{P}\{A_i\},\ 1)$.

соотношения

$$nP\{Y_1 > y\} = \alpha, \tag{5.3.5}$$

может служить хорошим первым приближением. Таким образом, $y^{(1)}$ просто является верхней α/n-значимой точкой для Y_1. Положив, как в начале этого параграфа, $Y_i = X_i - \bar{X}$, получим

$$y^{(1)} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Чтобы судить о точности $y^{(1)}$ как общего приближения для $y_{n,\alpha}$, заметим, что в данном случае (5.3.3) принимает вид

$$\alpha - C_n^2 P\{Y_1 > y^{(1)},\ Y_2 > y^{(1)}\} \leqslant P\{Y_n > y^{(1)}\} \leqslant \alpha. \tag{5.3.6}$$

Далее, если для $y \geqslant y^{(1)}$ выполнено условие

$$P\{Y_1 > y,\ Y_2 > y\} \leqslant [P\{Y_1 > y\}]^2 \tag{5.3.7}$$

или эквивалентное условие

$$P\{Y_1 < y,\ Y_2 < y\} \leqslant [P\{Y_1 < y\}]^2,$$

справедливое для отрицательно коррелированных нормальных случайных величин $Y_1 = X_1 - \bar{X}$, $Y_2 = X_2 - \bar{X}$ и для многих других представляющих интерес случаев (Дорнбос и Принс (1956); Дорнбос (1966); Хьюм (1965) и особенно Леман (1966)) [2]), то (5.3.6) примет вид

$$\alpha - \frac{\alpha^2}{2} < \alpha - \frac{\frac{1}{2}(n-1)\alpha^2}{n} \leqslant P\{Y_{(n)} > y^{(1)}\} \leqslant \alpha. \tag{5.3.8}$$

Вторым приближением $y^{(2)}$, которое является нижней границей для $y_{n,\alpha}$, является решение относительно y уравнения

$$nP\{Y_1 > y\} - C_n^2 P\{Y_1 > y,\ Y_2 > y\} = \alpha.$$

Это уравнение не очень удобно, но если справедливо (5.3.7), то второе слагаемое можно заменить на $\frac{1}{2}(n-1)\alpha^2/n$ и получить простую и обычно только немного менее точную нижнюю границу.

---

[2]) Неравенство более общего вида $P\{Y_1 > y_1,\ Y_2 > y_2\} \leqslant P\{Y_1 > y_1\} P\{Y_2 > y_2\}$ также справедливо во многих случаях (см. Дорнбос (1966); Меллоус (1968)).

Интересное уточнение верхней границы в (5.3.3), несмотря на его простоту, по-видимому, было открыто только недавно (Куниас (1968)).

Очевидно, что

$$\mathsf{P}\{\bigcup A_i\} \leqslant \mathsf{P}(A_i) + \sum_i{}' \mathsf{P}\{\bar{A}_i A_j\},$$

где $\bar{A}_i$ — событие, дополнительное к A_i, а $\sum_j{}'$ обозначает суммирование по всем $j = 1, 2, \ldots, n$, $j \neq i$. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\bigcup A_i\} \leqslant \mathsf{P}(A_i) + \sum_j{}' \mathsf{P}\{A_j\} - \mathsf{P}\{A_i A_j\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{A_i\} - \sum_j{}' \mathsf{P}\{A_i A_j\},$$

так что

$$\mathsf{P}\{\bigcup A_i\} \leqslant \min_{i=1, 2, \ldots, n} \left(\sum \mathsf{P}\{A_i\} - \sum_j{}' \mathsf{P}\{A_i A_j\} \right).$$

В частности, если $\mathsf{P}\{A_i\} = \mathsf{P}\{A_1\}$, а $\mathsf{P}\{A_i A_j\} = \mathsf{P}\{A_1 A_2\}$ для всех i, j $(i \neq j)$, то

$$\mathsf{P}\{\bigcup A_i\} \leqslant n\mathsf{P}\{A_1\} - (n-1)\,\mathsf{P}\{A_1 A_2\}.$$

Можно получить обобщения (5.3.4) для порядковых статистик, отличных от экстремальных значений, хотя эти обобщения и менее полезны. Пусть $P_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ обозначает вероятность одновременного осуществления m $(m \leqslant n)$ событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$; пусть S_m — сумма C_n^m таких вероятностей с m различными индексами. Тогда вероятность $p_{r,n}$ осуществления по крайней мере r $(\leqslant n)$ из n событий равна

$$p_{r,n} = \sum_{m=r}^{n} (-1)^{m-r} C_{m-1}^{r-1} S_m. \tag{5.3.9}$$

Возьмем, как и выше, в качестве события A_i событие $Y_i > y$. Тогда $p_{r,n}$ будет равно вероятности события $Y_{(n-r+1)} > y$. Полагая $P_{12\ldots m}(y) = \mathsf{P}\{Y_1 > y, Y_2 > y, \ldots, Y_m > y\}$, получим следующее обобщение (5.3.4):

$$\mathsf{P}\{Y_{(n-r+1)} > y\} = \sum_{m=r}^{n} (-1)^{m-r} C_{m-1}^{r-1} C_n^m P_{12\ldots m}(y). \quad (5.3.10)$$

Другая интересная формулировка этих результатов, по существу принадлежащая Фреше, широко используется Бартоном и Дэйвидом (1959) при изучении распределения экстремальных значений с помощью комбинаторики. Пусть $R = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, где $\alpha_i = 1$ или 0 в соответствии с тем, появилось событие A_i или нет. Тогда $\mathsf{P}\{R = r\}$ совпадает с вероятностью того, что произойдет ровно r событий. Легко проверить, что для дискретных случайных величин таких, как R, принимающих значения $0, 1, 2, \ldots, n$, справедливо равенство

$$\mathsf{P}\{R = r\} = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{n-r} \frac{(-1)^i}{i!} \mu_{[r+i]},$$

где $\mu_{[m]}$ — m-й факториальный момент R, т. е. $\mu_{[m]} = \mathsf{E}R^{(m)}$. С помощью мультиномиального обобщения теоремы Вандермонда получим

$$R^{(m)} = \sum \frac{m!}{m_1!\, m_2! \ldots m_n!} \alpha_1^{(m_1)} \alpha_2^{(m_2)} \ldots \alpha_n^{(m_n)},$$

где суммирование распространяется на все разложения $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ числа m на целые неотрицательные слагаемые. В силу того, что $\alpha_i^{(m_i)} = 0$ для $m_i \geqslant 2$, имеем

$$R^m = m! \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_m},$$

где суммирование распространяется на все C_n^m наборов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ из $1, 2, \ldots, n$. Таким образом,

$$\mu_{[m]} = m! \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} \mathsf{E}(\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_m}) =$$

$$= m! \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} P\{A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m}\} = m!\, S_m.$$

Следовательно,

$$p_{r,n} = \mathsf{P}\{R \geqslant r\} =$$
$$= \sum_{j=r}^{n} \mathsf{P}\{R = j\} = \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{n-j} \frac{(-1)^i}{i!} = S_{j+i}(j+i)! =$$
$$= \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{m=j}^{n} \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!} S_m m! = \sum_{m=r}^{n} S_m \sum_{j=r}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j =$$
$$= \sum_{m=r}^{n} S_m (-1)^{m-r} C_{m-1}^{r-1},$$

что совпадает с (5.3.9). (См. также работу Такача (1967), которая содержит исторический обзор по методу включения — исключения.)

Обобщение в многомерном направлении было рассмотрено Сиотани (1959). Пусть $Y'_j = (Y_{1j}, Y_{2j}, \ldots, Y_{pj})$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) — n p-мерных случайных векторов с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей $\gamma\Lambda$ ($\gamma > 0$), и пусть $\delta\Lambda$ — ковариационная матрица векторов Y_α и Y_β ($\alpha \neq \beta$), где Λ — положительно определенная симметричная матрица, $\gamma > |\delta|$. Тогда

$$_j\chi^2 = \frac{1}{\gamma} Y'_j \Lambda^{-1} Y_j \tag{5.3.11}$$

можно назвать *обобщенным расстоянием* Y_j от начала координат. Заменяя Λ на L, где элементы L являются обычными несмещенными оценками ковариации с ν степенями свободы, независимыми от Y_j, получим стьюдентизированную форму этого расстояния. Сиотани применил формулы (5.3.2) — (5.3.4) для изучения распределений величин

$$\gamma\chi^2_{\max} = \max_j (Y'_j \Lambda^{-1} Y_j) \quad \text{и} \quad \gamma T^2_{\max} = \max_j (Y'_j L^{-1} Y_j)$$

в случае, когда Y_j имеют многомерное нормальное распределение и L имеет распределение Уишарта с ν степенями свободы. В этом случае $_j\chi^2$ имеет хи-квадрат распределение с ν степенями свободы, а

$$_jT^2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right) Y'_j L^{-1} Y_j$$

имеет распределение Хотеллинга с ν степенями свободы, так что п. р. отношения ${}_jT^2/\nu$ принимает вид

$$f\left(\frac{{}_jT^2}{\nu}\right)=\frac{1}{\mathrm{B}\left[\frac{1}{2}(\nu+1-p),\ \frac{1}{2}p\right]}\left(\frac{{}_jT^2}{\nu}\right)^{\frac{p}{2}-1}\left(1+\frac{{}_jT^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}.$$

Таким образом, первый член приближения равен

$$\mathrm{P}\{\gamma\chi^2_{\max}>a^2\}\doteq n\,\mathrm{P}\{\gamma_1\chi^2>a^2\}=n\int\limits_{a^2/\gamma}^{\infty}\frac{x^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{p/2}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\,dx,$$

$$\mathrm{P}\{\gamma T^2_{\max}>b^2\}\doteq n\mathrm{P}\left\{\frac{{}_1T^2}{\nu}>\frac{b^2}{\nu\gamma}\right\}=$$

$$=\frac{n}{\mathrm{B}\left[\frac{1}{2}(\nu+1-p,\ p/2)\right]}\int\limits_{b^2/\nu\gamma}^{\infty}x^{\frac{p}{2}-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}dx=$$

$$=n\bar{I}_{\nu\gamma/(\nu\gamma+b^2)}\Big/\mathrm{B}\left[\frac{1}{2}(\nu+1-p,\ p/2)\right].$$

Сиотани получил также двучленные приближения и использовал их при небольших p для табулирования верхних процентных точек многомерного максимального отклонения от выборочного среднего

$$\max_j\left[(X_j-\bar{X})'\,\Lambda^{-1}(X_j-\bar{X})\right]=\chi^2_{\max D}$$

и многомерного стьюдентизированного максимального отклонения

$$\max_j\left[(X_j-\bar{X})'\,L^{-1}(X_j-\bar{X})\right]=T^2_{\max D}.$$

Здесь X'_j — независимые p-мерные случайные векторы с математическим ожиданием μ' и ковариационной матрицей Λ, соответствующими $\gamma=(n-1)/n$ и $\delta=-1/n$ в (5.3.11).

Другой подход, предполагающий независимость. Для иллюстрации этого метода рассмотрим его применение к совместному распределению n дисперсионных отношений S_j^2/S_0^2, где $\nu_jS_j^2/\sigma^2\sim\chi^2_{\nu_j}$ $(j=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ и все S_j^2 независимы. Частным случаем будет являться распределение наибольшего дисперсионного отношения

$$F^*_{(n)}=\max_{i=1,\,2,\,\ldots,\,n}(S_i^2/S_0^2)$$

при $\nu_i = \nu$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Зависимость этих отношений вызывается здесь только наличием у них общего знаменателя и, можно ожидать, будет слабой, если ν_0 велико. Поэтому для аппроксимации можно попросту игнорировать зависимость и получить таким образом формулы (Хартли (1938); Финни (1941)):

$$\mathsf{P}\{S_i^2/S_0^2 \leqslant y_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\} \doteq \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{S_i^2/S_0^2 \leqslant y_i\}, \tag{5.3.12}$$

$$\mathsf{P}\{F_{(n)}^* \leqslant y\} \doteq [\mathsf{P}\{F_{\nu, \nu_0} \leqslant y\}]^n. \tag{5.3.13}$$

Точность (5.3.13) и соответствующие приближения были также исследованы Хартли (1955). Теперь мы покажем, что в формулах (5.3.12) и (5.3.13) знак $\doteq$ можно заменить знаком $\geqslant$. Чтобы сделать это, нам потребуется легко доказуемый результат (см., например, Кимболл (1951); Изари и др. (1967)) о том, что для любых n неотрицательных возрастающих функций $g_i(x)$ справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X)\right] \geqslant \prod_{i=1}^{n} \mathsf{E}[g_i(X)].$$

Положив $g_i(x) = \mathsf{P}\{S_i^2 < x\}$, получим

$$\mathsf{P}\{S_i^2/S_0^2 < y_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\} =$$

$$= \int_0^\infty \mathsf{P}\{S_i^2 < s_0^2 y_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\} f(s_0^2)\, ds_0^2 =$$

$$= \mathsf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(S_0^2 y_i)\right] \geqslant \prod_{i=1}^{n} \mathsf{E}[g_i(S_0^2 y_i)] = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}\{S_i^2/S_0^2 \leqslant y_i\}.$$

Обозначим $\mathsf{P}\{S_i^2/S_0^2 > y_i\} = \beta_i$. Тогда, как было показано выше,

$$\mathsf{P}\{S_i^2/S_0^2 \leqslant y_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\} \geqslant \prod_{i=1}^{n} (1 - \beta_i). \tag{5.3.14}$$

Можно отметить, что это более сильный результат, чем первое неравенство Бонферрони

$$\mathsf{P}\{S_i^2/S_0^2 \leqslant y_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\} \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

(Даннет и Собел (1955)), так как $\prod(1-\beta_i) > 1-\sum\beta_i$ для $0<\beta_i<1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Пусть при всех i $\nu_i=\nu$, $\beta_i=\beta$. Тогда (5.3.14) примет вид

$$\mathsf{P}\{F^*_{(n)} \leqslant y\} \geqslant (1-\beta)^n.$$

Положив $1-\alpha=(1-\beta)^n$, мы видим, что в качестве верхней границы для $F^*_{n,\alpha}$, верхней α-значимой точки величины $F^*_{(n)}$ можно взять верхнюю β-значимую точку для F_{ν,ν_0}, где $\beta=1-(1-\alpha)^{1/n}$. Если α мало, то можно аппроксимировать β величиной α/n, и это снова прямо возвращает нас к использованию всегда справедливой, но здесь несколько менее точной первой границы Бонферрони из (5.3.5).

Интересные многомерные версии рассмотренных выше неравенств разрабатывались рядом авторов, начиная с Данна (1958). Эти исследования достигли своей кульминации в работе Шидака (1968). Последние результаты включают в качестве частного случая следующее предложение: если $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ — многомерный нормальный вектор с математическим ожиданием, равным нулю, и произвольной корреляционной матрицей и если Z — положительная случайная величина, независимая от $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, то

$$\mathsf{P}\{|X_1|/Z<c_1, \ldots, |X_k|/Z<c_k\} \geqslant \prod_{i=1}^{k} \mathsf{P}\{|X_i|/Z<c_i\}.$$

В одностороннем случае Слепян (1962) установил, что $\mathsf{P}\{X_1/Z<c_1, \ldots, X_k/Z<c_k\}$ — неубывающая функция корреляций.

§ 5.4. Случайное разбиение интервала

Предположим, что на интервал (0, 1) случайным образом брошены $(n-1)$ точек. Обозначим, как показано на рис. 5.4, расстояния от этих точек до начала координат, взятые в порядке возрастания, через $u_{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, и пусть $y_i=u_{(i)}-u_{(i-1)}$ $(u_0=0)$. Тогда случайные величины $U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n-1)}$ распределены как $n-1$ порядковых статистик из равномерного $R(0, 1)$ распределения, т. е. с совместной плотностью, равной $(n-1)!$ на симплексе

$$0 \leqslant u_{(1)} \leqslant u_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant u_{(n-1)} \leqslant 1.$$

Соответственно п. р. величины Y_i равна

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = (n-1)!, \quad y_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} y_i \leqslant 1. \tag{5.4.1}$$

Распределение симметрично относительно y_i. Очевидно, что, полагая

$$y_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} y_i,$$

получим вырожденную совместную п.р.

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = (n-1)!, \quad y_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \tag{5.4.2}$$

по-прежнему симметричную относительно всех y_j. Поэтому

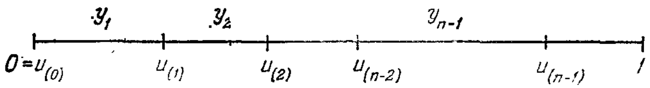


Рис. 5.4.

совместное распределение любых r из величин Y_j ($r = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$) совпадает с совместным распределением первых r из них и, в частности, распределение суммы любых r из величин Y_j совпадает с распределением

$$U_{(r)} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_r,$$

т. е.

$$f_r(u) = \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r)} u^{r-1} (1-u)^{n-r-1} \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1).$$

Пусть $P(x)$ — ф. р. непрерывной величины X. Тогда в силу вероятностного интегрального преобразования $P(X_{(j)})$ распределена так же, как и $U_{(j)}$, а $P(X_{(j)}) - P(X_{(j-1)})$ — как Y_j.

В этом контексте Y_j названы Уилксом (1948, 1967) «элементарными покрытиями». Уилкс показал, что они играют важную роль в теории непараметрических статистик.

Пусть теперь X_j имеют экспоненциальное распределение общего вида и $T = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Тогда легко показать, что отношения X_j/T имеют ту же совместную п. р. (5.4.2), что и Y_j. Случайное разбиение единичного интервала фактически может порождаться пуассоновским процессом при условии, что произошло $n-1$ событий в некотором временном интервале, который удобно считать единичным.

Благодаря этим двум указанным выше областям применения изучение случайного разбиения интервала представляет значительный интерес (см., например, Дарлинг (1953)). Мы сосредоточим внимание на нахождении распределения $Y_{(n)}$ — длины наибольшего интервала. Из (5.4.1) следует, что совместная п. р. величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ для $\sum_{i=1}^{r} y_i \leqslant 1$ равна

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_r) = (n-1)! \int_0^{1-y_1-\ldots-y_r} \ldots \int_0^{1-y_1-\ldots-y_{n-2}} dy_{n-1} \ldots$$

$$\ldots dy_{r+1} = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!}(1-y_1-\ldots-y_r)^{n-r-1} \quad (r=1, 2, \ldots, n-1).$$

Следовательно, для постоянных $c_i \geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, r)$, $\sum_{i=1}^{r} c_i \leqslant 1$, имеем

$$\mathrm{P}\{Y_1 > c_1, \ Y_2 > c_2, \ \ldots, \ Y_r > c_r\} = (1-c_1-c_2-\ldots-c_r)^{n-1}. \tag{5.4.3}$$

Взяв $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = y$, получим из (5.3.4)

$$\mathrm{P}\{Y_{(n)} > y\} = n(1-y)^{n-1} - C_n^2 (1-2y)^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{i-1} C_n^i (1-iy)^{n-1} + \ldots, \tag{5.4.4}$$

где суммирование продолжается до тех пор, пока $1-iy>0$. Этот результат был впервые получен Фишером (1929) с помощью тонких геометрических рассуждений и применен им к гармоническому анализу, в котором заданную гармонику можно проверить с помощью статистики вида X_j/T, определенной выше. На практике обычно желательно сначала проверить наибольшее из n таких отношений, что можно сделать с помощью (5.4.4). Фишер (1950, стр. 16) получил соответствующие верхние процентные точки, причем ему часто было достаточно использовать только первый член правой части (5.4.4) [3]).

Распределение $Y_{(n-1)}$ легко сводится к частному случаю (5.3.9) (Фишер (1940)). В этой последней работе Фишер также отмечает интересную связь с одним предложением о геометрических вероятностях, полученным Стивенсом (1939). Предположим, что на окружности единичной длины случайным образом отмечено n дуг равной длины y. Чему равна вероятность того, что дуги покроют всю окружность и (более общий вопрос) что останется не больше чем r пробелов? Ответом на первый вопрос является как раз $\mathrm{P}\{Y_{(n)} < y\}$ — вероятность, дополнительная к (5.4.4), а ответом на более общий вопрос является $\mathrm{P}\{Y_{(n-r)} < y\}$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что середины этих n дуг делят единичную окружность на n интервалов длины Y_i с совместной п. р. (5.4.2). Если $Y_{(n)} < y$, то пробелов не будет, а если $Y_{(n-r)} < y$, то будет не более чем r пробелов.

Кокрен (1941) обобщил некоторые результаты Фишера для того, чтобы исследовать отношение $\max {}_jS^2 \Big/ \sum\limits_{j=1}^{n} {}_jS^2$, где ${}_jS^2\nu/\sigma^2 \sim \chi^2_\nu$ и ν четно (сравните с упр. 5.4.4). Верхние процентные точки этой статистики, дающей возможность проверять равенство дисперсий n нормальных совокупностей, были затабулированы Эйзенхартом и Соломоном (1947). Блисс и др. (1956) получили верхние 5-процентные точки соответствующего «быстрого» критерия $\max {}_jW/\Sigma\, {}_jW$, где ${}_jW$ — размах j-й выборки.

Пайк (1965) дал обзор многих из обсуждаемых выше вопросов, а также более общую теорию распределений разностей (или спейсингов) между последовательными порядковыми статистиками в случае, когда теоретическое распределение непрерывно. (См. также Наус (1966).) Хотя главным направлением исследований Пайка являются непараметрические критерии согласия, основанные на удобным образом выбранных функциях спейсингов, они имеют при-

---

[3]) В качестве другого критерия значимости в гармоническом анализе Хартли (1949) использует отношение $X_{(n)}$ к независимой среднеквадратичной ошибке. Он также обсуждает приближенную мощность своего теста.

менения и к распределению круговых сериальных коэффициентов корреляции, так как выражаются в виде линейных функций спейсингов (сравните с работой Демпстера и Клейла (1968)). Мы отсылаем читателя также к элегантному изложению, данному Феллером (1967, гл. I и гл. III, § 3).

Можно также упомянуть о дискретном аналоге случайного разбиения интервала. Рассмотрим «прямую», состоящую из N элементов, разломанную в $n-1$ случайно выбранных точках. Каково распределение наибольшего интервала (упр. 5.4.7)? Или — близкий к этому вопрос — если белые и черные шары расположены на прямой, то каково распределение самой длинной серии белых шаров? Исследования этих задач комбинаторными методами можно проследить в литературе до работ Уитворта (см. Бартон и Дэйвид (1959)).

§ 5.5. Порядковые статистики для зависимых величин

Заметим сначала, что распределение упорядоченных зависимых величин Y_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ уже рассматривалось нами в § 5.3. Изложенные там результаты наиболее полезны для получения границ, приближений или вычисления $\mathrm{P}\{Y_{r:n}>y\}$ для больших y, особенно когда $r=n$. Чтобы дополнить эти результаты, обозначим совместную ф. р. величин $Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n$ через $P_n(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$. Очевидно,

$$\mathrm{P}\{Y_{n:n}\leqslant y\}=P_n\{y,\ y,\ \ldots,\ y\}. \tag{5.5.1}$$

Рассмотрим теперь (5.3.9), где A_i — это событие $Y_i\leqslant y$. Тогда

$$p_{r,n}=\mathrm{P}\left\{Y_{r:n}\leqslant y\right\}=\sum_{m=r}^{n}(-1)^{m-r}C_{m-1}^{r-1}S_m, \tag{5.5.2}$$

где S_m — это сумма C_n^m вероятностей $\mathrm{P}\left\{Y_{i_1}\leqslant y,\ Y_{i_2}\leqslant y,\ldots\right.$ $\left.\ldots,\ Y_{i_m}\leqslant y\right\}$ $(i_1<i_2<\ldots<i_m)$. В важном частном случае, когда Y_i — симметрично зависимые величины (т. е. P_n — симметрическая функция относительно $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$), равенство (5.5.2) примет вид

$$\mathrm{P}\left\{Y_{r:n}\leqslant y\right\}=\sum_{m=r}^{n}(-1)^{m-r}C_{m-1}^{r-1}C_n^m\mathrm{P}\left\{Y_{m:m}\leqslant y\right\}. \tag{5.5.3}$$

Это соотношение связывает ф. р. $F_{r:n}$ величины $Y_{r:n}$ с более простыми ф. р. максимума в выборках объема r, $r+1$, ..., n.

Дифференцируя (или вычитая), домножая на e^{ity} и затем интегрируя (или суммируя), получим подобные соотношения между п. р., характеристическими функциями и, следовательно, между моментами. Таким образом, (5.5.3) является обобщением (3.4.3) с независимых на симметрично зависимые величины. С помощью (5.5.3) можно вывести основное рекуррентное соотношение

$$(n-r)F_{r:n}(y)+rF_{r+1:n}(y)=nF_{r:n-1}(y). \qquad (5.5.4)$$

Это соотношение, обычно формулируемое в терминах моментов (соотношение 1 из § 3.4.), проверяется путем применения (5.5.3) к каждому члену (5.5.4). Теперь мы приведем более прямое доказательство этого результата, которое допускает дальнейшие обобщения.

Из n порядковых статистик $Y_{i:n}$, полученных перестановкой n симметрично зависимых величин, случайным образом отбрасывается одна. Оставшиеся $n-1$ величин являются порядковыми статистиками в выборке объема $n-1$ из симметрично зависимых величин. Если отброшена $Y_{i:n}$ $(i=1, 2, \ldots, r)$, то r-я величина в выборке объема $n-1$ была $(r+1)$-й величиной в выборке объема n, т. е.

$$Y_{r:n-1}=Y_{r+1:n}. \qquad (A)$$

Подобным же образом, если отброшена $Y_{i:n}$ $(i=r+1, r+2, \ldots, n)$, то

$$Y_{r:n-1}=Y_{r:n}. \qquad (B)$$

Поскольку (A) и (B) имеют, соответственно, вероятности r/n и $(n-r)/n$, для любого y справедливо равенство

$$\mathrm{P}\{Y_{r:n-1}\leqslant y\}=\frac{r}{n}\mathrm{P}\{Y_{r+1:n}\leqslant y\}+\frac{n-r}{n}\mathrm{P}\{Y_{r:n}\leqslant y\},$$

которое совпадает с (5.5.4).

Рассмотрим теперь $Y_{r:n-1}$ и $Y_{s:n-1}$ $(1\leqslant r<s\leqslant n-1)$ с совместной ф. р. $F_{rs:n-1}(y, z)$. Соответственно случайному отбрасыванию одной из (C) первых r, (D) следующих $s-r$, (E) последних $n-s$ порядковых статистик $Y_{i:n}$

получим

$$Y_{r:n-1} = Y_{r+1:n}, \quad Y_{s:n-1} = Y_{s+1:n}, \tag{C}$$

$$Y_{r:n-1} = Y_{r:n}, \quad Y_{s:n-1} = Y_{s+1:n}, \tag{D}$$

$$Y_{r:n-1} = Y_{r:n}, \quad Y_{s:n-1} = Y_{s:n}. \tag{E}$$

Поскольку события (C), (D), (E) имеют вероятности, соответственно, равные r/n, $(s-r)/n$ и $(n-s)/n$, для любых y, z $(y \leqslant z)$ мы имеем

$$nF_{rs:n-1}(y, z) = rF_{r+1, s+1:n}(y, z) + (s-r)F_{r, s+1:n}(y, z) + \\ + (n-s)F_{rs:n}(y, z). \tag{5.5.5}$$

Как и прежде, этот результат можно превратить в соотношение, связывающее соответствующие моменты произведения любого порядка и, в частности, получить соотношение 3 из § 3.4.

При соблюдении осторожности относительно ошибок округления, связанных с (3.4.3), с помощью равенства (5.5.3) можно вычислить ф. р. $Y_{r:n}$ в тех случаях, когда в нашем распоряжении имеется ф. р. максимальных членов для выборок объемов, не превосходящих n. К таким случаям относятся следующие (здесь Y_i — стандартные совместно нормальные величины с равными коэффициентами корреляции ρ):

(1) Гупта (1963а) привел вероятности $\mathrm{P}\{Y_{n:n} < y\}$ для $n = 1\,(1)\,12$ и большого числа положительных значений ρ.

(2) Кришнайя и Эрмитэдж (1965а) подробно затабулировали

$$\mathrm{P}\{Y^2_{n:n} \leqslant y\} \quad \text{для} \quad n = 1\,(1)\,10.$$

Для важного случая $r = n-1$ (5.5.3) принимает вид

$$\mathrm{P}\{Y_{n-1:n} \leqslant y\} = \\ = n\mathrm{P}\{Y_{n-1:n-1} \leqslant y\} - (n-1)\,\mathrm{P}\{Y_{n:n} \leqslant y\}. \tag{5.5.6}$$

Как отмечалось в § 5.4, Фишер (1940) привел верхние 5- и 1-процентные точки величины $X_{n-1:n} \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — независимые одинаково распределенные экспоненциальные величины. Такие таблицы требуются в том случае, когда критерий, основанный на $X_{n:n} \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, не позволяет прийти к заключению или ненадежен. Руководствуясь подобными мотивами, Янг (1967) и Дэйвид и Джоши (1968) использовали (5.5.6) для получения верхних процентных точек $Y_{n-1:n}$ из таблиц Гупты.

Следует отметить, что из таблиц ф. р. экстремального отклонения (от выборочного среднего) $Y_{n:n}$ с помощью (5.5.3) нельзя получить ф. р. величины

$$Y_{r:n} = \frac{1}{\sigma}\left(X_{r:n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right),$$

где X_i — независимые $N(\mu, \sigma^2)$ величины. Для $Y_{r:n}$, определенных таким образом, $Y_{m:m}$ в (5.5.3) является максимумом m равнокоррелированных нормальных величин с $\rho = -1/(n-1)$ и, следовательно, не является экстремальным отклонением для выборки объема m $(m < n)$ (сравните с работой Блэнда и Оуэна (1966)). Поэтому потребовалось бы расширение таблиц Гупты, учитывающее $\rho < 0$. Однако распределение $Y_{r:n}$ можно получить приближенно, так как кумулянты $Y_{r:n}$ можно выразить через кумулянты $X_{r:n}/\sigma$ (упр. 5.3.1). В свою очередь, с помощью соотношения (3.4.3) между соответствующими моментами эти кумулянты можно выразить через кумулянты $X_{n:n}/\sigma$. Кендалл (1954) использовал эти методы для решения следующей задачи Юдена: пусть дана выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из нормального распределения. Чему равна вероятность того, что $\bar{X}$ лежит между $X_{n-1:n}$ и $X_{n:n}$? (см. также работы Дэйвида (1962, 1963); Шаркади и др. (1962)).

Полезно иметь верхние процентные точки не только для случаев (1) и (2), описанных выше, но также и для следующих статистик, связанных с рассматриваемыми вопросами: $Y_{n:n}/S_\nu$ (стьюдентизированный максимум) и стьюдентизированные наибольшая и наименьшая величины хи-квадрат.

Теперь мы подробнее рассмотрим случай, когда Y_i — одинаково распределенные равнокоррелированные совместно нормальные случайные величины. Не умаляя общности, можно считать, что Y_i имеют стандартное нормальное распределение. Так как

$$0 \leqslant \mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = n\mathrm{D}Y_i + n(n-1)\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) \qquad (i \neq j),$$

го общий коэффициент корреляции должен удовлетворять условию $\rho \geqslant -1/(n-1)$. Легко проверить, что Y_i можно образовать из случайных величин X_i, Z_i следующим образом:

$$Y_i = \rho^{1/2} X_0 + (1-\rho)^{1/2} X_i \qquad (\rho \geqslant 0;\ i = 1, 2, \ldots, n), \quad (5.5.7)$$

где $X_0, X_1, \ldots, X_n$ — независимые $N(0, 1)$ величины, и

$$Y_i = (-\rho)^{1/2} Z_0 + (1-\rho)^{1/2} Z_i \qquad (\rho < 0;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ — независимые $N(0, 1)$ величины, Z_0 — также $N(0, 1)$ и

$$\mathsf{E}(Z_0 Z_i) = \frac{-(-\rho)^{1/2}}{(1-\rho)^{1/2}}$$

(Гупта и др. (1964)). Таким образом, при $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_{i:n}$ для $\rho \geqslant 0$ имеем

$$\mathsf{P}\{Y \leqslant y\} = \mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i X_{i:n} \leqslant -\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{1/2} \left(\sum a_i\right) X_0 + \frac{y}{(1-\rho)^{1/2}}\right\},$$

а для $\rho < 0$ имеем

$$\mathsf{P}\{Y \leqslant y\} = \mathsf{P}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i Z_{i:n} \leqslant -\left(\frac{-\rho}{1-\rho}\right)^{1/2} \left(\sum a_i\right) Z_0 + \frac{y}{(1-\rho)^{1/2}}\right\}.$$

В первом случае

$$\mathsf{P}\{Y \leqslant y\} = H(y;\ \rho) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} H\left[-\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{1/2} x \left(\sum a_i\right) + \frac{y}{(1-\rho)^{1/2}};\ 0\right] d\Phi(x).$$

Пусть $\sum a_i = 0$. Тогда, очевидно, для всех ρ имеем

$$H(y;\ \rho) = H\left[\frac{y}{(1-\rho)^{1/2}};\ 0\right].$$

Этот хорошо известный результат показывает, в частности, что размах величин Y_i распределен так же, как размах независимых одинаково распределенных нормальных величин с дисперсией $1-\rho$ (Хартли (1950а)). Распределение отношения $Y^{(1)}/Y^{(2)}$, где $Y^{(1)}=\sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} Y_{i:n}$ и т. д., очевидно, не зависит от ρ.

Приближения к распределению экстремального значения в общем случае многомерной нормальной выборки изучались Грейгом (1967). (По этому поводу см. также упр. 5.5.2—5.5.5.)

Распределение максимума и размаха частичных сумм

$$S_r=\sum_{i=1}^{r} X_i \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

n независимых одинаково распределенных величин X_i представляет интерес в задачах управления запасами, где X_i является поступлением в i-й год. Первые несколько моментов этих распределений для случая, когда X_i имеют стандартное нормальное распределение, можно найти специальными методами (см., например, работы Феллера (1951); Аниса и Ллойда (1953); Аниса (1955, 1956); Солари и Аниса (1957) и работу Морана (1964)).

Упражнения

5.2.1. Пусть $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ — случайная выборка из $N(\mu,\ \sigma^2)$ распределения. Хорошо известно, что существуют ортогональные преобразования, переводящие $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ в $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ так, что $y_n=\sqrt{n}\,\bar{x}$. Применяя к $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1}$ обобщенное сферическое полярное преобразование

$$\begin{aligned}
y_1&=R\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2},\\
y_2&=R\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2},\\
y_3&=R\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\sin\theta_{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1}&=R\sin\theta_1,
\end{aligned}$$

показать, что отношение любой линейной функции $\sum_{i=1}^{n} c_i X_{(i)}$, где $\sum c_i=0$, к величине S не зависит от S.

5.3.1. Пусть X_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — случайная выборка из нормального $N(\mu,\ \sigma^2)$ распределения. Показать, что кумулянты K_k' величин $X_{(r)}-\bar{X}$ связаны с кумулянтами K_k величин $X_{(r)}$ соотношениями

$$K_1'=K_1-\mu,$$
$$K_2'=K_2-\sigma^2/n,$$
$$K_k'=K_k \qquad (k>2).$$

В качестве следствия показать, как найти первые четыре момента статистик:

а) $$(X_{(n)}-\bar{X})/S_\nu,$$

б) $$(X_{(n)}-\bar{X})/S^{(P)}$$

(Маккей (1935); Рубен (1954)). (См. также работу Борениуса (1959, 1966), где детально исследовано отношение $(X_{(n)}-\bar{X})/[\sum(X_i-\bar{X})^2/n]^{1/2}$.)

5.3.2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из $N(\mu, \sigma^2)$ распределения, и пусть S_ν^2 — независимая оценка для σ^2 такая, что $\nu S_\nu^2/\sigma^2 \sim \chi_\nu^2$. Показать, что первое приближение к верхней α-значимой точке величины $(X_{(n)}-\bar{X})/S_\nu$ задается формулой

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2} t_\nu\left(\frac{\alpha}{n}\right),$$

где $t_\nu\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ обозначает верхнюю $\frac{\alpha}{n}$-значимую точку статистики t с ν степенями свободы (Дэйвид (1956)).

5.3.3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального $N(\mu, \sigma^2)$ распределения, и пусть $S^2=\sum(X_i-\bar{X})^2/(n-1)$.

(а) Показать, что $Y_i=(X_i-\bar{X})/S$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ распределена как

$$\frac{(n-1)\,t_{n-2}}{[n(t_{n-2}^2+n-2)]^{1/2}}, \tag{A}$$

где t_{n-2} обозначает статистику t с $(n-2)$ степенями свободы.

(б) Замечая, что Y_i ограничены, показать, что $Y_{(n-1)}$ — вторая наибольшая из величин Y_i, не может превосходить

$$y_{n-1}'=\left[\frac{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}{n}\right]^{1/2}.$$

(в) Используя этот факт, доказать, что для $y\geqslant y_{n-1}'$ справедливо равенство

$$\mathrm{P}\{Y_{(n)}>y\}=n\mathrm{P}\{Y_1>y\}$$

и что верхнюю α-значимую точку для $Y_{(n)}$ можно получить, положив в (А) $t_{n-2}=t_{n-2}\left(\frac{\alpha}{n}\right)$.

(Замечание. Этот метод приводит к точным 5-процентным точкам для $n\leqslant 14$ и 1-процентным точкам для $n\leqslant 19$.) (Пирсон и Чандрасекар (1936).)

5.3.4. Если $G(x)\geqslant 0$, $H(x)\geqslant 0$ — строго возрастающие функции случайной величины X с ф. р. $F(x)$ $(0\leqslant x\leqslant\infty)$ и если $G(X)$ и

$H(X)$ имеют конечные математические ожидания, то

$$\mathsf{E}[G(X)H(X)] > \mathsf{E}[G(X)]\,\mathsf{E}[H(X)].$$

В качестве следствия вывести, что (5.3.7) не имеет места, если

$$Y_1 = \chi_1^2/\chi^2, \qquad Y_2 = \chi_2^2/\chi^2,$$

где χ_1^2, χ_2^2, χ^2 — независимые χ^2-распределенные случайные величины (Кимболл (1951)).

Другие контрпримеры к (5.3.7) приведены в работах Гальперина (1967) и Изари и др. (1967).

5.3.5. Показать, что при любом выборе $i_1, i_2, \ldots, i_k$ таком, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ и $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_k}$, справедливы неравенства

$$\mathsf{P}\left\{X_{(i_1)} < x_{i_1}, \ldots, X_{(i_k)} < x_{i_k}\right\} \geqslant \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}\left\{X_{i_j} \leqslant x_{i_j}\right\},$$

$$\mathsf{P}\left\{X_{(i_1)} > x_{i_1}, \ldots, X_{(i_k)} > x_{i_k}\right\} \geqslant \prod_{j=1}^{k} \mathsf{P}\left\{X_{i_j} > x_{i_j}\right\}.$$

(Изари и др. (1967).)

5.3.6. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — равновероятное полиномиальное распределение с в. ф.

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{N!}{y_1!\,y_2! \ldots y_n!}\left(\frac{1}{n}\right)^N, \quad y_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = N.$$

Показать, что

$$S_1 - S_2 \leqslant \mathsf{P}\{Y_{(n)} > y\} \leqslant S_1,$$

где

$$S_1 = n \sum_{i=y+1}^{N} C_N^i \frac{(n-1)^{N-i}}{n^N},$$

$$S_2 = C_n^2 \sum \frac{N!}{i!\,j!\,(N-i-j)!} \frac{(n-2)^{N-i-j}}{n^N},$$

а суммирование распространяется на те i, j, для которых $y < i$, j, $i+j \leqslant N$.

Полагая

$$Z_i = \frac{Y_i - N/n}{[N(n-1)/n^2]^{1/2}},$$

показать, что приближением к верхней α-значимой точке для $Z_{(n)}$ является значение $\Phi^{-1}[1-\alpha/n]$ (Дэйвид и Бартон (1962); Козелка (1956)).

5.3.7. Положим $P_i = \mathsf{P}\{A_i\}$, $P_{ij} = \mathsf{P}\{A_iA_j\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ (так что $P_{ii} = P_i$). Пусть I_i — индикатор события A_i. Тогда $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} I_i$ является индикатором $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Пусть

$$P' = (P_1, P_2, \ldots, P_n), \quad Q = (P_{ij}), \quad I' = (I_1, I_2, \ldots, I_n),$$

и пусть Q^- обозначает обобщенную обратную для $n \times n$-матрицы Q, т. е. $QQ^-Q = Q$.

Замечая, что для любого вектора $a' = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$$(a'I)^2 + 2(a'I) + \max_{i=1, 2, \ldots, n} I_i \geqslant 0,$$

и взяв математическое ожидание, показать, что

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} \geqslant 2a'P - a'Qa$$

и, следовательно, что

$$\mathsf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} \geqslant P'Q^-P$$

(Куниас (1968)).

5.3.8. Пусть в упр. 5.3.7 A_i — это событие $Y_i > y$. Положим $V = a'I$. Замечая, что $\mathsf{P}\{V \neq 0\} \leqslant \mathsf{P}\{Y_{(n)} > y\}$, получить неравенство

$$\mathsf{P}\{Y_{(n)} > y\} \geqslant \frac{a'PP'a}{a'Qa}$$

и, в частности,

$$\mathsf{P}\{Y_{(n)} > y\} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} P_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} P_{ij}} \tag{A}$$

(Чжун и Эрдеш, Уиттл). Покажите также, что (A) сильнее неравенства Бонферрони

$$\mathsf{P}\{Y_{(n)} > y\} \geqslant \sum P_i - \sum_{i<j}\sum P_{ij}$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum P_i < 2 \sum_{i<j}\sum P_{ij},$$

в частности, для одинаково распределенных Y_i тогда и только тогда, когда $P_1 < (n-1) P_{12}$ (сравните с работой Галло (1966)).

5.4.1. Пусть $Y_{(1)} \leqslant Y_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant Y_{(n)}$ — упорядоченные значения спейсингов Y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ из (5.4.2), и пусть

$$Z_j = (n+1-j)(Y_{(j)} - Y_{(j-1)}), \quad Y_{(0)} = 0.$$

Показать, что совместное распределение величин Z_j совпадает с совместным распределением величин Y_j (Дурбин (1961)).

5.4.2. Показать, что если $n-1$ точек случайным образом делят единичный интервал, то вероятность того, что ровно r интервалов превосходят x, равна

$$C_n^r \left\{(1-rx)^{n-1} - (n-1)\,[1-(r+1)\,x]^{n-1} + \ldots \pm \frac{(n-1)!\,(1-kx)^{n-1}}{(k-r)!\,(n-k)!}\right\},$$

где k — наибольшее целое, меньшее $1/x$ (Стивенс (1939); Фишер (1940)).

5.4.3. С помощью (5.4.3) показать, что

(а) $\quad \mathrm{P}\,\{Y_{(1)} > c\} = (1-nc)^{n-1} \qquad (0 \leqslant c \leqslant 1/n)$,

(б) $\mathrm{P}\,\{Y_{(1)} > c_1,\ Y_{(2)} > c_2\} = n\,[1-c_1-(n-1)\,c_2]^{n-1} - (n-1)\,(1-nc_1)^{n-1} \qquad (0 \leqslant c_1 \leqslant c_2;\ c_1+(n-1)\,c_2 \leqslant 1)$,

(в) $\quad \mathrm{P}\,\{Y_{(1)} > c_1,\ \ldots,\ Y_{(r)} > c_r\} = C_n^{r-1}\,[1-c_1-\ldots-c_{r-1} - (n-r+1)\,c_r]^{n-1}$

минус члены, зависящие от меньшего, чем r, числа значений c_i.

(г) Совместная п. р. величин $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(r)}$ равна

$$C_{n-1}^{r-1} n^{(r+1)}\,[1-y_1-\ldots-y_{r-1}-(n-r+1)\,y_r]^{n-r-1}$$

$$(0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_r;\quad y_1+\ldots+y_{r-1}+(n-r+1)\,y_r \leqslant 1)$$

(сравните с работой Бартона и Дэйвида (1956)).

5.4.4. Предположим, что n случайных выборок объема m извлекаются независимо из нормальных $N\,(\mu_i,\ \sigma_i^2)$ распределений. Пусть ${}_iS^2$ — несмещенная среднеквадратичная оценка для σ_i^2. Положим

$$Y_{(n)} = \frac{\max {}_iS^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} {}_iS^2}.$$

Покажите, что при нулевой гипотезе

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2$$

верхние α-значимые точки y_α величины $Y_{(n)}$ можно приближенно вычислять из уравнения

$$I_{y_\alpha}\left[\frac{m-1}{2},\ \frac{(n-1)\,(m-1)}{2}\right] = 1 - \frac{\alpha}{n}, \tag{A}$$

где $I_x(a,\ b)$ — неполная бета-функция. Также показать, что по (А) y_α можно вычислить точно, если $y_\alpha > \frac{1}{2}$ (Кокрен (1941)).

5.4.5. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из непрерывного распределения с ф. р. $P(x)$, и пусть

$$Y = X_{(i)} - X_{(i-1)},\quad Z = X_{(j)} - X_{(j-1)} \qquad (i,\ j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Используя свойство марковости порядковых статистик (§ 2.7) или каким-либо другим способом, показать, что

$$f(y, z)=n!\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t+y}^{\infty}\frac{[P(t)]^{i-2}}{(i-2)!}\,\frac{[P(u)-P(t+y)]^{j-i-2}}{(j-i-2)!}\times$$

$$\times\frac{[1-P(u+z)]^{n-j}}{(n-j)!}\,p(t)\,p(t+y)\,p(u)\,p(u+z)\,du\,dt,\quad \text{если}\quad j>i+1,$$

$$f(y, z)=$$

$$=n!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[P(t)]^{i-2}}{(i-2)!}\,\frac{[1-P(t+y+z)]^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\,p(t)\,p(t+y)\,p(t+y+z)\,dt,$$

если $j=i+1$

(Пайк (1965)).

5.4.6. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с п. р. $p(x)$ $(x \geqslant 0)$.

(а) Показать, что совместная п. р. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ при условии, что $X_1 = X_{(n)}$, равна

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\begin{cases} np(x_1)\cdot p(x_2)\ldots p(x_n), & \text{если } x_1 = x_{(n)},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

(б) Пусть $Y_{(1)} = \sum X_i/X_{(n)}$. Записывая характеристическую функцию $\mathsf{E}e^{itY_{(1)}}$ в виде n-кратного интеграла, показать, что

$$\mathsf{E}e^{itY_{(1)}} = ne^{it}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\beta} e^{it\alpha/\beta}p(\alpha)\,d\alpha\right)^{n-1} p(\beta)\,d\beta.$$

(в) В качестве следствия вывести, что если X_i равномерно распределены на интервале $(0, a)$, то распределение $Y_{(1)}$ совпадает с распределением $1+U_1+U_2+\ldots+U_{n-1}$, где U_i — независимы и распределены равномерно на интервале $(0, 1)$.

(г) Доказать результат (в), используя свойство марковости порядковых статистик (Дарлинг (1952 a, b)).

5.4.7. «Прямая» из N элементов разламывается в $n-1$ случайно выбранных точках и получается n интервалов. Рассматривая коэффициенты при x^N в выражении $(x+x^2+\ldots+x^m)^n$, показать, что ф. р. длины M наибольшего интервала равна

$$\mathsf{P}\{M \leqslant m\} = \frac{1}{C_{N-1}^{n-1}}\sum_{i=0}^{a}(-1)^i C_n^i C_{N-mi-1}^{n-1},$$

где

$$a=\min\left(n, \left[\frac{N-n}{m}\right]\right), \qquad N-n+1 \geqslant m \geqslant \left[\frac{N+n-1}{n}\right]$$

(Бартон и Дэйвид (1959)).

5.5.1. Пусть $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с одинаковой дисперсией σ^2.

(а) Доказать, что величины Y_i, определяемые равенством

$$Y_i = X_i - aX_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

являются равнокоррелированными и что с помощью соответствующего выбора постоянной a можно сделать так, чтобы Y_i имели любые положительные равные корреляции.

(б) В качестве следствия доказать, что для любого множества из n нормированных совместно нормальных величин Y_i с равными положительными коэффициентами корреляции ρ ф. р. их максимума $Y_{n:n}$ равна

$$F_{n:n}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^n\left[(y + ax)(1 + a^2)^{1/2}\right] d\Phi\left[x(1 + a^2)^{1/2}\right],$$

где Φ — ф. р. стандартного нормального закона и $a = [\rho/(1-\rho)]^{1/2}$. В частности, показать, что если $\rho = 1/2$, то Y_i все положительны с вероятностью $1/(n+1)$.

(в) Показать, что для Y_i из (б) k-е кумулянты $K^*_{k,\,r}$ величины $Y_{r:n}$ связаны с k-ми кумулянтами r-й нормальной порядковой статистики соотношениями

$$K^*_{1,\,r} = (1-\rho)^{1/2} K_{1,\,r},$$

$$K^*_{2,\,r} = \rho + (1-\rho) K_{2,\,r},$$

$$K^*_{k,\,r} = (1-\rho)^{k/2} K_{k,\,r}, \quad \text{если} \quad k > 2$$

(Стьюарт (1958); Оуэн и Стек (1962)).

5.5.2. Пусть Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — стандартизованные совместно нормально распределенные величины с матрицей корреляций (ρ_{ij}) вида $(\rho_{ij}) = (\alpha_i\alpha_j)$, где $-1 \leqslant \alpha_i < 1$.

(а) Показать, что Y_i можно образовать из $n+1$ независимых стандартных нормальных величин $X_0, X_1, \ldots, X_n$, положив

$$Y_i = \left(1 - \alpha_i^2\right)^{1/2} X_i + \alpha_i X_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(б) В качестве следствия показать, что

$$\mathrm{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i < y_i)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{y_i - \alpha_i x_0}{\left(1-\alpha_i^2\right)^{1/2}}\right)\right] d\Phi(x_0)$$

(Даннет и Собел (1955); см. также Курноу и Даннет (1962)).

5.5.3. Если Y_1 и Y_2 — нормированные двумерные нормальные величины с коэффициентом корреляции ρ, то п. р. величины $Y = a_1 Y_{1:2} + a_2 Y_{2:2}$ равна

$$f(y) = 2\zeta^{-1/2}\varphi\left(\zeta^{-1/2} y\right)\Phi(\eta y),$$

где

$$\zeta = a_1^2 + a_2^2 + 2\rho a_1 a_2,$$

а

$$\eta = \frac{[2(1-\rho)]^{1/2}(a_2 - a_1)}{(1+\rho)(a_2 + a_1)^2}$$

(Гупта и Пиллаи (1965)).

5.5.4. Пусть Z_i ($i=1, 2, \ldots, k$) — минимум величин Y_{ij} ($j=1, 2, \ldots, n$) в случайной выборке объема n из k-мерного распределения с совместной п. р. или в. ф. $p(y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

(а) Показать, что

$$\mathrm{P}\{Z_1 > z_1, Z_2 > z_2, \ldots, Z_k > z_k\} = \\ = [\mathrm{P}\{Y_1 > z_1; Y_2 > z_2, \ldots; Y_k > z_k\}]^n.$$

(б) Совместная п. р. k-мерного распределения Парето первого типа имеет вид

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_k; \theta) = \\ = (\theta+k-1)^{(k)}\Big/\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{-1}y_i\right)-k+1\right]^{\theta+k} \quad (y_i > a_i > 0;\ \theta > 0).$$

Доказать, что совместным распределением величин Z_i является опять распределение Парето первого типа с п. р.

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_k; n\theta)$$

(Мардья (1964b)).

5.5.5. Пусть величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ образуют стационарную марковскую цепь. Положив

$$P_1(x) = \mathrm{P}\{X_i \leqslant x\},$$
$$P_2(x, y) = \mathrm{P}\{X_i \leqslant x, X_{i+1} \leqslant y\} \text{ для всех } i$$

и используя условие марковости

$$\mathrm{P}\{X_n \leqslant x \mid X_1 \leqslant x, X_2 \leqslant x, \ldots, X_{n-1} \leqslant x\} = \mathrm{P}\{X_n \leqslant x \mid X_{n-1} \leqslant x\}$$

(для всех x и всех положительных n), показать, что ф. р. наибольшей величины в выборке объема n равна

$$F_n(x) = [P_2(x, x)]^{n-1}/[P_1(x)]^{n-2}.$$

Эпстейн (1949b)).

ГЛАВА 6

ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ В ОЦЕНИВАНИИ И ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗ

§ 6.1. Введение и основные результаты

Порядковые статистики появляются в задачах проверки гипотез и оценивания различными путями. Наиболее частыми являются те ситуации, в которых границы величины X зависят на одном или обоих концах от оцениваемых параметров. Стандартные методы, какими бы они ни были, в этом случае неизбежно приводят к оценкам, включающим порядковые статистики. Лучшими примерами этого служат различные типы равномерного распределения.

После обсуждения этих ситуаций, в которых использование порядковых статистик неизбежно, мы перейдем в § 6.2 к рассмотренному Ллойдом (1952) (см. также Сархан и Гринберг (1970)) важному применению обобщенного метода наименьших квадратов, используя который можно найти линейные функции порядковых статистик («линейные оценки»), являющиеся оценками параметров распределений, зависящих только от сдвига и масштаба. Центральное положение здесь занимает нормальное распределение. Оценкой для μ в этом случае является, как обычно, выборочное среднее $\bar{X}$, являющееся также средним для величин $X_{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, но оценка для σ^2, имеющая вид $\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}$, резко отличается от обычной оптимальной среднеквадратичной оценки. Что можно сказать в пользу такой оценки? Фактически, очень немногое в случае нормального распределения, когда налицо все наблюдения, хотя всегда эффективность линейных оценок и близка к единице. Но для некоторых выборок, отличных от нормальной, более традиционные способы оценивания могут быть весьма трудоемкими. Что более важно в наш век компьютеров, такие способы могут дать оценки, свойства которых в случае малых выборок не совсем ясны и, возможно, далеки от удовлетворительных; вряд ли достаточно то, что (как в методе максимального правдоподобия) хорошими являются асимптотические свойства оценок. С другой стороны, подход Ллойда всегда дает оценки несмещенные и с минимальной дисперсией (для всех n) в классе несмещенных линейных оценок.

Если эксперимент такой, например, как испытание на продолжительность жизни изделий, заканчивается, как только разрушено предписанное число $N\,(<n)$ деталей, то полученные данные цензурированы и упорядочены, и оценки (максимального правдоподобия или Ллойда) будут зависеть от порядковых статистик. Последние оценки являются намного более удобными при условии, что имеются необходимые таблицы коэффициентов. Эти вопросы обсуждаются в § 6.3 и преимущественно на примере экспоненциального распределения в § 6.4.

Мы закончим эту главу некоторыми замечаниями по поводу интересного и в основном нового предмета — робастного оценивания. Наша цель здесь — найти оценки, удовлетворительные не только при идеальных условиях, но и в том случае когда предположения об исходном распределении нарушаются (в некоторых пределах).

Порядковые статистики давно играют важную роль в «быстрых» способах оценивания. Этот вопрос изучается в главе 7.

Сейчас мы вернемся к некоторым основным результатам. Как уже было показано в связи с непараметрическими доверительными интервалами и толерантными интервалами (§§ 2.5 и 2.6), порядковые статистики являются фундаментально важными в теории непараметрических выводов. С более теоретических позиций представляет интерес тот факт, что если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые[1]) непрерывные величины с общим распределением $P(x, \theta)$, где параметр θ может быть векторнозначным, то вектор порядковых статистик $T=(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ является

[1]) Вместо независимых с. в. можно рассматривать симметрично зависимые.

достаточным для θ. Чтобы убедиться в этом, заметим, что при фиксированном $T = t \equiv (x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})$ величины X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ могут принимать значения $x_{(j_i)}$ $(i = 1, 2 \ldots \ldots, n)$, причем, из соображений симметрии, все $n!$ перестановок $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ для $(1, 2, \ldots, n)$ должны быть равновероятными. Другими словами, для каждой перестановки $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$

$$\mathrm{P}\left\{X_1 = x_{(j_1)},\ X_2 = x_{(j_2)},\ \ldots,\ X_n = x_{(j_n)} \mid T = t\right\} = 1/n!$$

Так как эта вероятность не зависит от θ, достаточность T для θ установлена. Неформально этот результат просто утверждает, что порядок расположения X_i не влияет на выводы о параметре θ при нулевой гипотезе о независимости и одинаковой распределенности с. в. X_i, поскольку любой такой порядок приводит к одинаковым порядковым статистикам. Хотя свойства минимальной достаточности и полноты являются основными в теории непараметрических выводов, мы касаемся их только поверхностно, так как в дальнейшем они нам не потребуются. Заинтересованного читателя для более серьезного рассмотрения отсылаем к работе Белла и других авторов (1960) и ссылкам, приведенным там

Оценивание. Предположим, что функциональная форма P известна. Если при этом одна или обе границы для x зависят от θ, то в процессе оценивания участвуют порядковые статистики. Возникающие проблемы рассматриваются в ряде книг о параметрических выводах. Так как основные трудности здесь относятся главным образом к статистическим выводам, а не к порядковым статистикам, отсылаем читателя, например, к работам Хогга и Крейга (1959), Кендалла и Стьюарта (1973) или Лемана (1964). Однако мы приведем здесь некоторые из главных результатов, специально выделяя случай равномерного распределения. Рассмотрение экспоненциального распределения с неизвестной начальной точкой откладывается до § 6.4.

Предположим сначала, что только нижняя граница x зависит от скалярного параметра θ, т. е. $a(\theta) \leqslant x \leqslant b$. Тогда, если существует достаточная статистика для θ, то

(1) она должна быть монотонной функцией $X_{(1)}$

и

(2) плотность распределения должна иметь вид $p(x;\theta) = C(\theta)g(x)$, где $C(\theta)$, $g(x)$ неотрицательны (Питмен (1936);

Дэйвис (1951)). Чтобы доказать (1), нужно только заметить, что условная плотность распределения $f_1(x \mid T=t)$ с. в. $X_{(1)}$ при любой статистике T не может быть независимой от θ, если только T не определяет $X_{(1)}$ в (a, b) единственным образом. Что касается (2), то пусть X_t $(t=1, 2)$ — любые два члена выборки, отличные от $X_{(1)}$. Тогда $f(x_t \mid x_{(1)}) = p(x_t;\ \theta) / \int\limits_{x_{(1)}}^{b} p(x_t;\ \theta)\, dx_t$ не зависит от θ; поэтому $p(x_1;\ \theta)/p(x_2;\ \theta)$ также не зависит от θ, откуда следует (2). Результат остается справедливым и для случая $a \leqslant x \leqslant b(\theta)$, когда X достаточна для θ.

Пример 6.1.1. Пусть с. в. X равномерно распределена на $(0, \theta)$, т. е.

$$p(x;\ \theta) = \begin{cases} 1/\theta, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \theta, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0 \ \text{или} \ x > \theta, \end{cases} \quad \text{где} \quad \theta > 0.$$

Эта плотность удовлетворяет соотношению (2) с $g(x) = 1$. Для того чтобы показать, что $X_{(n)}$ — достаточная для θ статистика, поступим следующим образом. Определим $v(x,\ y) = 1$ для $x \leqslant y$ и $v(x,\ y) = 0$ для $x > y$. Тогда $p(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta} v(x,\ \theta)$ для всех $x \geqslant 0$ и $\theta > 0$. Функция правдоподобия имеет вид $L(\theta) = \theta^{-n} \prod\limits_{i=1}^{n} v(x_i,\ \theta) = \theta^{-n} v(x_{(n)},\ \theta)$, и критерий факторизации обеспечивает достаточность $X_{(n)}$.

Другие свойства $X_{(n)}$ легко выводятся из первых принципов. Ясно, что $X_{(n)}$ «недооценивает» θ. Действительно, $\mathsf{E}X_{(n)} = \frac{n\theta}{n+1} < \theta$, но уже $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ — несмещенная оценка для θ. Распределение $X_{(n)}$ дается формулой $\mathsf{P}\{X_{(n)} \leqslant x\} = (x/\theta)^n$ для $0 \leqslant x \leqslant \theta$, из которой следует, что асимптотическое распределение надлежащим образом нормированной с. в. $X_{(n)}$ (которая является оценкой максимального правдоподобия) не нормальное, а экспоненциальное, так как

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{n(\theta - X_{(n)}) \leqslant u\} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{u}{n\theta}\right)^n\right] = \\ = 1 - e^{-u/\theta} \qquad (u \geqslant 0),$$

представляет пример второго вида асимптотических распределений экстремумов (см. § 9.3). Наконец, $X_{(n)}$ полна для θ, так как если $u(X_{(n)})$ — некоторая функция $X_{(n)}$, то тождество $\mathsf{E}[u(X_{(n)})]=0$ для всех θ приводит к соотношению

$$\int_0^\theta u(x)\,x^{n-1}\,dx=0, \tag{6.1.1}$$

также справедливому при всех θ, что в свою очередь дает равенство $u(x)=0$, почти наверное для $x\geqslant 0$ (упр. 6.1.1). Это доказывает полноту $X_{(n)}$.

Из результатов для конечных выборок, приведенных выше следует, что $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ — единственная равномерно минимизирующая дисперсию несмещенная (РМДН) оценка θ. По теореме Басу (1955) статистика, достаточная и полная для некоторого параметра θ (который может быть и векторнозначным), не зависит от любой другой статистики, распределение которой не включает θ. Поэтому, в частности, $X_{(n)}$ статистически независима от $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i/X_{(n)}$. Следовательно, $f(y\,|\,x_{(n)})$ не зависит от значения $x_{(n)}$, которое можно положить равным 1. При условии, что $X_{(n)}=1$, по марковскому свойству порядковых статистик $n-1$ других величин X_i, а отсюда и отношения $U_i=X_i/X_{(n)}$ независимы и равномерно распределены на отрезке $(0,1)$. Таким образом, с. в. Y распределена как $1+\sum_{i=1}^{n-1}U_i$. Этот способ доказательства результата Дарлинга (упр. 5.4.6) принадлежит Хоггу и Крейгу (1956).

Пример 6.1.2. Пусть с. в. X равномерно распределена на $(\theta_1,\ \theta_2)$, т. е. $p(x;\ \theta_1,\ \theta_2)=1/(\theta_2-\theta_1)$ $(\theta_1\leqslant x\leqslant\theta_2,\ \theta_2>\theta_1)$. Оставляем читателю показать, что $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ совместно достаточны и полны для θ_1 и θ_2. Запишем плотность следующим образом:

$$p(x;\ \mu,\ \omega)=\begin{cases}1/\omega, & \text{если}\quad \mu-\frac{1}{2}\omega\leqslant x\leqslant\mu+\frac{1}{2}\omega,\quad \omega>0,\\ 0, & \text{если}\quad |x-\mu|>\frac{1}{2}\omega.\end{cases}$$

Тогда $M=\frac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})$ и $W'=\frac{n+1}{n-1}(X_{(n)}-X_{(1)})$ — несмещенные оценки μ и ω. Являясь функциями от X_1 и $X_{(n)}$, которые, конечно, тоже достаточны и полны для μ и ω, оценки M и W' — единственные РМДН (равномерно минимизирующие дисперсию несмещенные) оценки. Так как $\mathsf{D}M = \omega^2/2(n+1)(n+2)$ (упр. 2.3.5), то эффективность $\bar{X}$ относительно M, определенная как отношение дисперсий этих оценок, равна $6n/(n+1)(n+2)$ и стремится к 0 при $n\to\infty$[2]) (см. также упр. 6.1.2).

Пример 6.1.3. Пусть X равномерно распределена на $(\theta-1/2,\ \theta+1/2)$, т. е.

$$p(x;\ \theta)=1, \quad \text{если} \quad \theta-1/2\leqslant x\leqslant \theta+1/2.$$

Функция правдоподобия максимальна (и равна 1), если оба значения $x_{(1)}$ и $x_{(n)}$ лежат в $(\theta-1/2,\ \theta+1/2)$. Таким образом, пара статистик $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ совместно достаточна для параметра θ. Никаких одномерных достаточных статистик не существует, но $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ не являются полными, так как $\mathsf{E}\left(X_{(n)}-X_{(1)}-\frac{n-1}{n+1}\right)=0$ для всех θ. Однако M, будучи несмещенной оценкой и функцией минимальных достаточных статистик, по прежнему является МДН оценкой для θ.

Когда обе границы для x зависят от θ, т. е. $a(\theta)\leqslant x\leqslant b(\theta)$, необходимо, но уже не достаточно, чтобы выполнялось соотношение $p(x;\ \theta)=C(\theta)g(x)$. Теперь дополнительным требованием является монотонное возрастание $a(\theta)$ и монотонное убывание $b(\theta)$ или наоборот; в первом случае достаточной статистикой является $\hat\theta=\min\{a^{-1}(X_{(1)}),\ b^{-1}(X_{(n)})\}$, во втором $\hat\theta'=\max\{a^{-1}(X_{(1)}),\ b^{-1}(X_{(n)})\}$, где $a^{-1}(x)$, $b^{-1}(x)$ — функции, обратные к $a(x)$, $b(x)$. Вслед за Хузурбазаром (1955) мы сейчас выведем плотность распределения $\hat\theta$. Из рис. 6.1 видно, что

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{z\leqslant\hat\theta\leqslant z+dz\}=\\&\quad=\mathsf{P}\{a(z)\leqslant X_{(1)}\leqslant a(z+dz),\ a(z)\leqslant X_{(n)}\leqslant b(z)\}+\\&\quad+\mathsf{P}\{a(z)\leqslant X_{(1)}\leqslant b(z),\ b(z+dz)\leqslant X_{(n)}\leqslant b(z)\}. \qquad (6.1.2)\end{aligned}$$

---

[2]) Заметим, однако, что M не является асимптотически нормальной, так что понятие «эффективность» используется здесь в более широком смысле, чем обычно.

Так как в наших обычных обозначениях совместная плотность распределения $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ имеет вид

$$f_{1,n}(x,\ y) = n(n-1)\,p(x)\,[P(y)-P(x)]^{n-2}\,p(y), \quad \text{если } x \leqslant y,$$

то правую часть соотношения (6.1.2) можно переписать

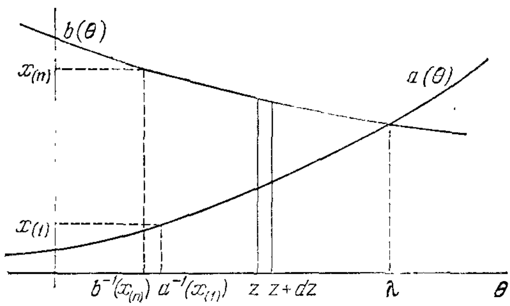


Рис. 6.1.

следующим образом:

$$f(z) = n(n-1)\,p[a(z)]\,a'(z)\int\limits_{a(z)}^{b(z)}\{P(y)-P[a(z)]\}^{n-2}p(y)\,dy -$$

$$- n(n-1)\,p[b(z)]\,b'(z)\int\limits_{a(z)}^{b(z)}\{P[b(z)]-P(x)\}^{n-2}p(x)\,dx, \tag{6.1.3}$$

где штрих обозначает дифференцирование. Далее,

$$1 = \int\limits_{a(\theta)}^{b(\theta)} p(y)\,dy = C(\theta)\int\limits_{a(\theta)}^{b(\theta)} g(y)\,dy,$$

так что

$$\int\limits_{a(z)}^{b(z)} p(y)\,dy = C(\theta)\int\limits_{a(z)}^{b(z)} g(y)\,dy = C(\theta)/C(z). \tag{6.1.4}$$

Отсюда

$$(n-1)\int\limits_{a(z)}^{b(z)}\{P(y)-P[a(z)]\}^{n-2}p(y)\,dy =$$

$$= \{P[b(z)]-P[a(z)]\}^{n-1} = [C(\theta)/C(z)]^{n-1},$$

и (6.1.3), учитывая (6.1.4), сводится к

$$\begin{aligned} f(z) &= n\{p[a(z)]\,a'(z) - p[b(z)]\,b'(z)\}\,C^{n-1}(\theta)/C^{n-1}(z) = \\ &= n\{-(d/dz)[C(\theta)/C(z)]\}\,C^{n-1}(\theta)/C^{n-1}(z) = \\ &= nC^n(\theta)\,C'(z)/C^{n+1}(z). \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Здесь z изменяется от θ до λ, где λ определяется условием $a(\lambda) = b(\lambda)$.

Пример 6.1.4. Предположим, что X равномерно распределена на $(-\theta, \theta)$, т. е.

$$p(x;\ \theta) = 1/(2\theta) \qquad (-\theta \leqslant x \leqslant \theta).$$

В этом случае $a(\theta) = -\theta$ убывает и $b(\theta) = \theta$ возрастает с ростом θ. Таким образом,

$$\hat{\theta}' = Z = \max\{-X_{(1)},\ X_{(n)}\} = \max\{|X_{(1)}|,\ |X_{(n)}|\},$$

и (6.1.5) выполняется со знаком минус в правой части, сводясь к соотношению

$$f(z) = -n\left(\frac{1}{2\theta}\right)^n\left(-\frac{1}{2z^2}\right)(2z)^{n+1} = nz^{n-1}\theta^{-n} \qquad (0 \leqslant z \leqslant \theta),$$

что легко вывести также из первых принципов. Доверительные интервалы для θ в ситуации (6.1.5) сразу можно найти, заметив, что $V = C(\theta)/C(Z)$ имеет плотность распределения $f(v) = nv^{n-1}$ на $(0,1)$ (упр. 6.1.4).

Проверка гипотез. Можно построить критерии значимости, соответствующие различным рассмотренным выше равномерным распределениям, но некоторые результаты могут с первого взгляда показаться несколько странными. Так, в простейшем случае $R(0, \theta)$ очевидным критерием для гипотезы H: $\theta \leqslant \theta_0$ против гипотезы K: $\theta > \theta_0$ является следующий: отвергнуть H, когда $x_{(n)}$ достаточно велико, выбирая точку $x_{n,\alpha}$, соответствующую уровню значимости α, так, чтобы

$$P\{X_{(n)} > x_{n,\alpha} \mid \theta = \theta_0\} = \alpha, \quad \text{т. е.} \quad x_{n,\alpha} = \theta_0(1-\alpha)^{1/n}.$$

Этот критерий равномерно наиболее мощный (РНМ), но, как указал Леман (1964, стр. 98), ни в коем случае не единственный. Действительно, любой критерий, который

(1) отвергает H, когда $x_{(n)} > \theta_0$;

(2) имеет уровень α, когда $\theta = \theta_0$,

(3) имеет уровень $\leqslant \alpha$ для $\theta < \theta_0$,

является также РНМ (таков, например, критерий, удовлетворяющий (1) и отвергающий гипотезу с вероятностью α, когда $x_{(n)} \leqslant \theta_0$). Однако существует единственный РНМ критерий для гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против K: $\theta \neq \theta_0$, а именно критерий, отвергающий H_0, если $x_{(n)} > \theta_0$ или $x_{(n)} < \theta_0 \alpha^{1/n}$, и принимающий H_0 в противном случае.

Далее, предположим, что взяты две независимые выборки $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ и $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ из генеральных совокупностей с распределением $R(0, \theta_1)$ и $R(0, \theta_2)$, соответственно. Для проверки гипотезы H_0: $\theta_1 = \theta_2$ (или H: $\theta_1 \leqslant \theta_2$) против гипотезы K: $\theta_1 > \theta_2$ нужно отвергнуть H_0 при больших значениях $V = X_{(n_1)}/Y_{(n_2)}$. Верхняя точка v_α, соответствующая уровню значимости α, для V дается выражением $v_\alpha(n_1, n_2) = \left[\frac{n_1}{\alpha(n_1+n_2)}\right]^{1/n_2}$ (см. нуль-распределение V, т. е. распределение при верной гипотезе H_0, в упр. 2.3.12). Для n_1, $n_2 \leqslant 10$ Мёрти (1955) привел таблицы $v_{0,05}$ (но подстрочным замечанием к этим таблицам следует пренебречь). Двухсторонняя форма этого критерия состоит в отвержении H_0 (против K: $\theta \neq \theta_0$), если

$$v > v_{1/2\alpha}(n_1, n_2) \quad \text{или} \quad v < 1/v_{1/2\alpha}(n_1, n_2) \tag{6.1.6}$$

Здесь просто используется факт, что нуль-распределение $1/V$ такое же, как и для V, но только с обратным порядком степеней свободы. Однако, как и в других подобных ситуациях, этот удобный критерий является смещенным (т. е. вероятность отвергнуть H_0 меньше α для некоторого $\theta_1 \neq \theta_2$), если только n_1 не равно n_2. Критерий отношения правдоподобия отвергает H_0, когда

$$v > \alpha^{-1/n_2} \quad \text{или} \quad v < \alpha^{1/n_1}, \tag{6.1.7}$$

и он РНМ и несмещенный. Для $n_1 = n_2$ критерии (6.1.6) и (6.1.7) совпадают и также являются РНМ (см. работу Берра (1966) по поводу этих и дальнейших результатов).

Для того чтобы проверить, будут ли две выборки из равномерного распределения иметь одинаковый размах (без предположения о равенстве математических ожиданий), необходимо использовать отношение размахов W_1/W_2 (см. упр. 2.3.10). Таблицы процентных точек для этой ситуации даны Райдером (1951) и Хирениусом (1953). Последний автор также рассматривал критерии для (а) разностей параметров сдвига, используя статистику

$T=(Y_{(1)}-X_{(1)})/(X_{(n_1)}-X_{(1)})$ (упр. 2.7.1), и (б) разностей параметров сдвига и масштаба, используя отношение $V=(Y_{(n_2)}-X_{(1)})/(X_{(n_1)}-X_{(1)})$ (отметим, что при этом выборки брались такими, что $X_{(1)}\leqslant Y_{(1)}$; поэтому отношение размахов $U=\frac{Y_{(n_2)}-Y_{(1)}}{X_{(n_1)}-X_{(1)}}$ не совпадает с таким же отношением Райдера, и его не стоит рекомендовать, за исключением, возможно, случаев совпадения U с T и V).

Обобщение для соответствующих проблем в случае k выборок рассматривалось Кхатри (1960, 1965).

Для проверки равенства величин θ_i, когда плотности распределения имеют вид $C(\theta)\,g(x)$ с границами для x, зависящими с обеих сторон от θ, можно применить также подход, связанный с отношением правдоподобия (см. упр. 6.1.6 и работу Хогга (1956)).

Оценивание параметров для логнормальной случайной величины X, т. е. такой, что $\log(X-\gamma)\sim N(\mu,\ \sigma^2)$, обсуждалось многими авторами (Хилл (1963); Ламберт (1964) и др.). Бейн и Томэн (1968) построили критерии для трехпараметрического распределения Вейбулла. Когда распределение усечено, скажем, справа, так что ф. р. усеченной с. в. X имеет вид

$$P_\theta(x)=\begin{cases} P(x)/P(\theta), & \text{если} \quad x\leqslant\theta, \\ 1 & \text{, если} \quad x>\theta, \end{cases}$$

то простой оценкой для θ является $X_{(n)}$. Эта величина, конечно, «недооценивает» θ и возникает вопрос: можно ли уменьшить смещение $X_{(n)}$ для каких-либо общих классов распределений? Робсон и Уитлок (1964) показали, что это можно сделать, применяя интересный метод Кэнуя (1956) для последовательного устранения смещения порядка $1/n$, $1/n^2$ и т. д. Кэнуй заметил, что если математическое ожидание оценки T_n имеет вид

$$\mathsf{E}T_n(X_1,\ \ldots,\ X_n)=\theta+a_1/n+a_2/n^2+\ldots, \tag{6.1.8}$$

то член смещения a_1/n уже отсутствует в оценке

$$T_{n,i}^{(1)}(X_1,\ \ldots,\ X_n)=nT_n(X_1,\ \ldots,\ X_n)-\\ -(n-1)\,T_{n-1,(i)}(X_1,\ \ldots,\ X_{i-1},\ X_{i+1},\ \ldots,\ X_n).$$

Усреднение по $i=1, 2, \ldots, n$ дает симметричную оценку

$$T_n^{(1)} = nT_n - \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} T_{n-1,(i)}.$$

Затем процесс можно повторить для a_2/n^2, что даст оценку $T_n^{(2)}$ и т. д. В нашем случае $T_n = X_{(n)}$, и мы имеем

$$T_{n-1,(i)} = \max(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n) = \begin{cases} X_{(n)}, & \text{если } X_i \neq X_{(n)}, \\ X_{(n-1)}, & \text{если } X_i = X_{(n)}. \end{cases}$$

Так,

$$T_n^{(1)} = nX_{(n)} - \frac{n-1}{n}[(n-1)X_{(n)} + X_{(n-1)}] = \frac{2n-1}{n} X_{(n)} - \frac{n-1}{n} X_{(n-1)}\ ^{3)}.$$

Оценка $T_n^{(2)}$ включала бы уже $X_{(n-2)}$ и, хотя и являлась бы несмещенной с точностью до членов порядка n^{-2}, по всей вероятности, была бы менее эффективной, чем $T_n^{(1)}$.

§ 6.2. Оценивание методом наименьших квадратов параметров сдвига и масштаба при помощи порядковых статистик

Предположим, что $\mathcal{P}$ — семейство непрерывных распределений с ф. р. вида $P(ax+b)$, где $a>0$, b — произвольные константы. Другими словами, $\mathcal{P}$ — семейство распределений, зависящих только от параметров сдвига и масштаба. Обозначим эти параметры μ и σ, хотя они и не обязаны быть математическим ожиданием и стандартным отклонением. Отсюда следует, что $p(x) = P'(x)$ можно записать в виде

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad (\sigma > 0)$$

и что стандартизированная с. в. $Y = (X-\mu)/\sigma$ имеет плотность распределения $g(y)$, не зависящую от μ и σ. Два важных примера представляют семейства нормальных

---

[3]) На самом деле Робсон и Уитлок получили более простой результат $T_n^{(1)} = 2X_{(n)} - X_{(n-1)}$, заменяя (6.1.8) рядами по $1/n^{(r)}$ вместо $1/n^r$ $(r=1, 2, \ldots)$.

и равномерных распределений. В последнем случае имеем $p(x)=1/\omega$ для $\mu-\frac{1}{2}\omega\leqslant x\leqslant\mu+\frac{1}{2}\omega$. Тогда плотность распределения с. в. $Y=(X-\mu)/\sigma$ имеет вид

$$g(y)=1, \quad \text{если} \quad -1/2\leqslant y\leqslant 1/2.$$

Так как упорядоченные с. в. X и Y (для выборок объема n) связаны соотношением

$$Y_{(r)}=(X_{(r)}-\mu)/\sigma \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то моменты с. в. $Y_{(r)}$ зависят только от вида g, но не от μ и σ. Обозначим

$$\mathsf{E}Y_{(r)}=\alpha_{(r)}, \qquad \operatorname{cov}(Y_{(r)},\ Y_{(s)})=\beta_{rs} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$\mathsf{E}X_{(r)}=\mu+\sigma\alpha_r, \qquad \operatorname{cov}(X_{(r)},\ X_{(s)})=\sigma^2\beta_{rs}, \tag{6.2.1}$$

где α_r, β_{rs} можно вычислить раз и навсегда (сравните с главой 3). Таким образом, $\mathsf{E}X_{(r)}$ является линейной комбинацией параметров μ и σ с известными коэффициентами и $\operatorname{cov}(X_{(r)},\ X_{(s)})$ известна с точностью до σ^2. Поэтому можно применить теорему Гаусса — Маркова из теории метода наименьших квадратов (в слегка обобщенном виде, так как ковариационная матрица не является диагональной) для получения несмещенных оценок параметров μ и σ, имеющих минимальную дисперсию в классе линейных несмещенных оценок. Чтобы убедиться в этом, запишем первое уравнение (6.2.1) как

$$\mathsf{E}\boldsymbol{X}=\mu\mathbf{1}+\sigma\boldsymbol{\alpha}$$

или

$$\mathsf{E}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta}, \tag{6.2.2}$$

где $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, соответственно, — векторы-столбцы $X_{(r)}$ и $\alpha_{(r)}$; $\mathbf{1}$ — столбец из n единиц и $\boldsymbol{A}=(\mathbf{1},\ \boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\theta}'=(\mu,\ \sigma)$. Ковариационную матрицу для $X_{(r)}$ обозначим через $\mathscr{V}(\boldsymbol{X})=\sigma^2\boldsymbol{B}$. Мы должны минимизировать по отношению к θ выражение $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta})'\,\boldsymbol{\Omega}\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\theta})$, где $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{B}^{-1}$, получая оценку

$$\boldsymbol{\theta}^*=(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}. \tag{6.2.3}$$

Ковариационная матрица для $\boldsymbol{\theta}^*$ имеет вид

$$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Omega}\cdot\sigma^2\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A})^{-1}=\sigma^2\,(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A})^{-1}, \tag{6.2.4}$$

где

$$(A'\Omega A)=\begin{pmatrix}1'\\ \alpha'\end{pmatrix}\Omega(1,\ \alpha)=\begin{pmatrix}1'\Omega 1 & 1'\Omega\alpha\\ \alpha'\Omega 1 & \alpha'\Omega\alpha\end{pmatrix},$$

причем все элементы матрицы являются скалярными.

Из (6.2.3) следует, что

$$\theta^*=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\alpha'\Omega\alpha & -\alpha'\Omega 1\\ -1'\Omega\alpha & 1'\Omega 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1'\Omega\\ \alpha'\Omega\end{pmatrix}X=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\alpha'\Omega\alpha 1'\Omega-\alpha'\Omega 1\alpha'\Omega\\ -1'\Omega\alpha 1'\Omega+1'\Omega 1\alpha'\Omega\end{pmatrix}X,$$

где

$$\Delta=|\boldsymbol{\Delta}|\quad\text{и}\quad \boldsymbol{\Delta}=A'\Omega A,$$

или

$$\mu^*=-\alpha'\Gamma X,\qquad \sigma^*=1'\Gamma X, \tag{6.2.5}$$

где Γ — кососимметричная матрица, определяемая равенством: $\Gamma=\frac{1}{\Delta}\Omega(1\alpha'-\alpha 1')\Omega$. Из (6.2.4) следует, что

$$\mathsf{D}\mu^*=\frac{\sigma^2}{\Delta}\alpha'\Omega\alpha, \tag{6.2.6}$$

$$\mathsf{D}\sigma^*=\frac{\sigma^2}{\Delta}1'\Omega 1, \tag{6.2.7}$$

$$\operatorname{cov}(\mu^*,\ \sigma^*)=-\frac{\sigma^2}{\Delta}1'\Omega\alpha. \tag{6.2.8}$$

Таким образом, μ^* и σ^* выражаются как линейные функции порядковых статистик, именно,

$$\mu^*=\sum_{i=1}^{n}\beta_i X_{(i)},\qquad \sigma^*=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i X_i, \tag{6.2.5'}$$

с коэффициентами, которые можно табулировать раз и навсегда (см. П. 6.3).

Упрощение для симметричных распределений. Теперь мы рассмотрим важный случай симметричных распределений и в качестве параметра μ возьмем математическое ожидание. Тогда распределение случайного вектора $(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots, Y_{(n)})$ совпадает с распределением вектора $(-Y_{(n)}, -Y_{(n-1)}, \ldots, -Y_{(1)})$. Пусть

$$\begin{pmatrix}-Y_{(n)}\\ -Y_{(n-1)}\\ \vdots\\ -Y_{(1)}\end{pmatrix}=-J\begin{pmatrix}Y_{(1)}\\ Y_{(2)}\\ \vdots\\ Y_{(n)}\end{pmatrix},$$

где

$$J=\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $J=J'=J^{-1}$, $J'1=1$. Так как Y и $-JY$ имеют одинаковое распределение, то $\mathsf{E}Y=\mathsf{E}(-JY)$, т. е. $\alpha=-J\alpha$ и

$$\mathcal{V}(Y)=\Omega^{-1}=\mathcal{V}(-JY),$$

т. е.

$$\Omega^{-1}=-J\Omega^{-1}(-J)=J^{-1}\Omega^{-1}J^{-1}, \quad \text{или} \quad \Omega=J\Omega J.$$

Отсюда следует, что $1'\Omega\alpha=1'(J\Omega J)(-J\alpha)=-(1'J)\times \times\Omega(J^2)\alpha=-1'\Omega\alpha$. Таким образом, $1'\Omega\alpha=-1'\Omega\alpha=0$, так что из (6.2.8) следует, что μ^* и σ^* некоррелированы. В этом случае вместо соотношений (6.2.5)—(6.2.7) получаем следующие:

$$\mu^*=\frac{\alpha'\Omega\alpha\cdot 1'\Omega X}{1'\Omega 1\cdot\alpha'\Omega\alpha}=\frac{1'\Omega X}{1'\Omega 1}, \tag{6.2.9}$$

$$\sigma^*=\frac{\alpha'\Omega X}{\alpha'\Omega\alpha}, \tag{6.2.10}$$

$$\mathsf{D}\mu^*=\frac{\sigma^2}{1'\Omega 1}, \quad \mathsf{D}\sigma^*=\frac{\sigma^2}{\alpha'\Omega\alpha}. \tag{6.2.11}$$

Заметим, что μ^* сводится к выборочному среднему, если

$$1'\Omega=1' \quad (\text{что эквивалентно условию } B1=1), \tag{6.2.12}$$

т. е. если элементы каждого столбца (или строки) ковариационной матрицы в сумме дают единицу. Такой, в частности, является единичная нормальная генеральная совокупность. Можно также показать, что μ^* имеет дисперсию меньшую, чем σ^2/n, за исключением случая, когда выполняется (6.2.12). Эти и подобные им результаты для несимметричных распределений можно найти в работах Ллойда (1952), Даунтона (1953) и Говиндараюлу (1968а).

Упрощенные линейные оценки. Процедура Ллойда требует знание вектора математического ожидания и ковариационной матрицы порядковых статистик. Особенно трудно находить ковариации. Гупта (1952) предложил следующий очень простой метод, применимый в случае, когда известны только математические ожидания: взять $B=I$, где I — единичная матрица. Тогда $\Omega=I$ и результаты сильно упрощаются. Так, $\Delta = \mathbf{1}'\Omega\mathbf{1}\cdot\alpha'\Omega\alpha - (\mathbf{1}'\Omega\alpha)^2 = n\sum\alpha_i^2 - (\sum\alpha_i)^2 = n\sum(\alpha_i - \bar{\alpha})^2$, и оценка для μ из (6.2.5) принимает вид

$$\mu^{**} = \frac{1}{\Delta}\left(\sum\alpha_i^2\cdot\sum X_{(i)} - \sum\alpha_i\cdot\sum\alpha_i X_{(i)}\right)$$

или

$$\mu^{**} = \sum_{i=1}^{n} b_i X_{(i)},$$

где

$$b_i = \frac{1}{\Delta}\left(\sum\alpha_i^2 - \alpha_i\sum\alpha_i\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\sum(\alpha_i - \bar{\alpha})^2 + \bar{\alpha}\sum\alpha_i - \alpha_i\sum\alpha_i\right) = \frac{1}{n} - \frac{\bar{\alpha}(\alpha_i - \bar{\alpha})}{\sum(\alpha_i - \bar{\alpha})^2}. \tag{6.2.13}$$

Для симметричных распределений получаем $\mu^{**} = \bar{X}$. Также

$$\sigma^{**} = \sum c_i X_{(i)},$$

где

$$c_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{\sum(\alpha_i - \bar{\alpha})^2}. \tag{6.2.14}$$

Это, как может показаться, грубое приближение дает удивительно хорошие результаты по крайней мере для нормального случая. Этот вопрос обсуждается в следующей главе. Так как в этом методе нет необходимости обращать ковариационную матрицу $n\times n$, его можно применять и в случае известной матрицы. Али и Чен (1964) показали, что в нормальном случае σ^{**} асимптотически нормальна и вполне эффективна и, более того, уменьшение эффективности σ^{**} по сравнению с σ^* пренебрежимо даже для малых выборок. Это ясно из таблицы 6.2 (Чернов и Либерман (1954); Сархан и Гринберг (1956); Али и Чен (1964)), которая дает дисперсию для $n = 2\,(1)\,10$ оценок σ^*, σ^{**} и несмещенной оценки максимального правдоподобия $\hat{\sigma} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\left[\sum(X_i - \bar{X})^2\right]^{1/2}$. Для $n \leqslant 10$ эффективность оценки σ^{**} (относительно $\hat{\sigma}$) самая маленькая при $n = 6$, когда она равна 98,7%.

Оценки Блома. Интересный и довольно общий подход к оценкам параметров масштаба и сдвига был предложен Бломом (1958) и в дальнейшем развит им же (1962). Его «несмещенные почти наилучшие линейные» оценки требуют, как и у Гупты, знание точных математических ожиданий порядковых статистик $Y_{(r)}$ для приведенной с. в. $Y=(X-\mu)/\sigma$ с ф. р. $P(y)$, но используют асимптотические приближения ковариационной матрицы. Если отказаться от точной несмещенности, то можно использовать асимптотику для математических ожиданий и получать «почти несмещенные, почти наилучшие» оценки.

Таблица 6.2

Сравнение трех несмещенных оценок параметра σ для нормальной совокупности

n	$D(\hat{\sigma}/\sigma)$	$D(\sigma^*/\sigma)$	$D(\sigma^{**}/\sigma)$
2	0,57080	0,57080	0,57080
3	0,27324	0,27548	0,27548
4	0,17810	0,18005	0,18013
5	0,13177	0,13332	0,13342
6	0,10447	0,10571	0,10580
7	0,08650	0,08750	0,08759
8	0,07379	0,07461	0,07469
9	0,06432	0,06502	0,06509
10	0,05701	0,05760	0,05766

Процедура Блома начинается с приближения ковариации с. в. $Y_{(r)}$ и $Y_{(s)}$ $(r \leqslant s)$ первым членом в (4.5.5), именно,

$$\operatorname{cov}(Y_{(r)}, Y_{(s)}) \sim \frac{p_r q_s}{(n+2)\, p(Q_r)\, p(Q_s)},$$

где $p_r = r/(n+1)$, $q_s = 1-p_s$, $Q_r = P^{-1}(p_r)$ и $p(Q_r)$ — плотность с. в. Y, вычисленная в точке Q_r. Теперь обозначим

$$f_i = p(Q_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$\operatorname{cov}(f_i Y_{(i)}, f_j Y_{(j)}) \sim \frac{p_i q_j}{n+2} \qquad (i \leqslant j).$$

Полагая

$$Z_{(i)}=f_{i+1}Y_{(i+1)}-f_iY_{(i)}, \quad f_0=f_{n+1}=0, \tag{6.2.15}$$

имеем (независимо от P) для $0\leqslant i\leqslant j\leqslant n$

$$\mathsf{D}Z_{(i)}\sim\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}, \quad \operatorname{cov}(Z_{(i)}, Z_{(j)})\sim-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}. \tag{6.2.16}$$

Для того чтобы оценить линейную комбинацию $\eta=k_1\mu+$ $+k_2\sigma$, запишем линейную оценку $\tilde{\eta}$ для η в виде

$$\tilde{\eta}=\sum_{i=1}^{n}g_iX_{(i)}=\sum_{i=1}^{n}g_i(\mu+\sigma Y_{(i)}).$$

Замечая с помощью (6.2.15), что

$$f_iY_{(i)}=\sum_{j=0}^{i-1}Z_{(j)},$$

и заменяя g_i новыми коэффициентами $h_0, h_1, \ldots, h_n$, определенными (с точностью до аддитивной постоянной) соотношением

$$g_i=f_i(h_i-h_{i-1}),$$

можем переписать $\tilde{\eta}$ как

$$\tilde{\eta}=\mu\sum_{i=1}^{n}f_i(h_i-h_{i-1})+\sigma\sum_{i=1}^{n}(h_i-h_{i-1})\sum_{j=0}^{i-1}Z_{(j)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}h_i[\mu(f_i-f_{i+1})-\sigma Z_i]. \tag{6.2.17}$$

Тогда $\mathsf{E}\,\tilde{\eta}=\mu\sum_{i=0}^{n}C_{1i}h_i+\sigma\sum_{i=0}^{n}C_{2i}h_i$, где

$$C_{1i}=f_i-f_{i+1}, \quad C_{2i}=f_i\alpha_i-f_{i+1}\alpha_{i+1}.$$

Кроме того,

$$\mathsf{D}\hat{\eta}=\sigma^2\left[\sum_{i=0}^{n}h_i^2\,D\,Z_{(i)}+\sum_{i\neq j}^{n}\sum h_ih_j\operatorname{cov}(Z_{(i)}, Z_{(j)})\right]\sim$$

$$\sim\frac{\sigma^2}{(n+1)(n+2)}\sum_{i=0}^{n}(h_i-\bar{h})^2 \tag{6.2.18}$$

ввиду (6. 2. 16), где $\bar{h}=\frac{1}{n+1}\sum h_i$. Таким образом, использованные приближения сводят проблему оценивания η к минимизации (6.2.18) при условии, что

$$\sum_{i=0}^{n} C_{1i} h_i = k_1, \quad \sum_{i=0}^{n} C_{2i} h_i = k_2.$$

Стандартными методами приходим к решению

$$h_i = \bar{h} + a_1 C_{1i} + a_2 C_{2i},$$

где a_1, a_2 — множители Лагранжа, имеющие вид

$$a_1 = d^{11}k_1 + d^{12}k_2, \quad a_2 = d^{21}k_1 + d^{22}k_2,$$

при этом $d^{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta = 1,\ 2)$ — элементы матрицы, обратной к матрице $2\times 2 \sim \boldsymbol{D} = (d_{\alpha\beta})$, где

$$d_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^{n} C_{\alpha i} C_{\beta i} \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2). \tag{6.2.19}$$

Величина $\tilde{\eta}$ из (6.2.17) с h_i, определенными таким образом, является несмещенной почти наилучшей линейной оценкой для η. Возвращаясь к первоначальным порядковым статистикам $X_{(i)}$, имеем, в частности, беря по очереди $k_1=1$, $k_2=0$ и $k_1=0$, $k_2=1$,

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{n} g_{1i} X_{(i)}, \quad \tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} g_{2i} X_{(i)}, \tag{6.2.20}$$

где

$$g_{\alpha i} = f_i\,[d^{\alpha 1}(C_{1,i} - C_{1,i-1}) + d^{\alpha 2}(C_{2,i} - C_{2,i-1})] \qquad (\alpha = 1,\ 2). \tag{6.2.21}$$

Из (6.2.18) получаем

$$\begin{pmatrix} D\tilde{\mu}, & \operatorname{cov}(\tilde{\mu},\ \tilde{\sigma}) \\ & D\tilde{\sigma} \end{pmatrix} \sim \frac{\sigma^2}{(n+1)(n+2)} \begin{pmatrix} d^{11} & d^{12} \\ & d^{22} \end{pmatrix}. \tag{6.2.22}$$

Таким образом, каким бы ни было n, задача сводится к обращению матрицы порядка 2×2. Хотя сделанные асимптотические приближения могут не быть особенно хорошими для малых выборок, по-видимому, оценки достаточно эффективны в большинстве случаев, так как значительное число накопленных примеров указывает, что эффективности линейных систематических статистик не очень чувствительны к изменению коэффициентов. Применения различных методов оценивания, описанных в этой главе, иллюстрируются в § 6.3 на примерах малых цензурированных выборок из нормальной совокупности.

Другие методы оценивания. Были и другие попытки получить линейные оценки для μ и σ, не зная матрицы B и, в некоторых случаях, вектора α. Так как эти величины сейчас становятся доступными для все большего числа распределений и для достаточно больших объемов выборок, то необходимость в методах, дополняющих метод Ллойда, становится меньшей, чем раньше. Однако эти методы остаются ценными для новых распределений, больших выборок и для теоретических целей.

«Асимптотически наилучшие линейные» оценки, являющиеся систематическими статистиками, определяемыми непрерывными весовыми функциями, изучались Беннетом (1952), Юнгом (1955, 1962), Черновым и др. (1967) и Ченом (1967a). Даунтон (1966a) предложил «линейные оценки с полиноминальными коэффициентами», в которых «общая структура коэффициентов выбирается удобной для математической обработки как с точки зрения определения этих коэффициентов, так и для вычисления стандартных уклонений получаемых оценок».

Несколько иная идея (Маккул (1965); Чу и Якоуб (1968)) заключается в том, чтобы оценивать параметры для больших выборок по средним значениям оценок μ^* и σ^*, получаемым для подвыборок объема достаточно малого, чтобы использовать таблицы. Недостаток этих приближений состоит в произвольности выбора подвыборок.

§ 6.3. Оценивание параметров сдвига и масштаба для цензурированных наблюдений

Говоря «цензурированные наблюдения», мы имеем в виду, что в потенциальной выборке объема n известное число наблюдений пропущено с одной стороны (простое цензурирование) или с обеих сторон (двойное цензурирование).

Важный пример цензурирования встречается в оценивании продолжительности жизни, когда решают остановить эксперимент, как только $N\ (<n)$ изделий, подвергнутых испытанию, выходят из строя. Здесь, цензурируя

справа, мы в состоянии получить достаточно хорошие оценки параметров много быстрее, чем если бы дожидались, пока все изделия не выйдут из строя. Особенно простой способ действия состоит в том, чтобы остановиться, как только будет получена выборочная медиана m (т. е. после $\left[\frac{1}{2}n\right]+1$ наблюдения), и использовать m в качестве оценки средней продолжительности жизни μ. Если продолжительность жизни распределена нормально (возможно, после некоторого преобразования наблюдений), то μ в больших выборках можно оценить с одинаковой точностью как при помощи m в выборке объема $n\cdot\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57n$, так и при помощи выборочного среднего в выборке объема n. С другой стороны, ожидаемое время проведения эксперимента равно, соответственно, μ и $\mu+\sigma\Phi^{-1}[n/(n+1)]$.

Только что описанный тип цензурирования часто называется *II типом цензурирования* (Гупта (1952)), чтобы отличать его от ситуации, когда выборка урезается ниже или/и выше фиксированной точки. При таком *I типе цензурирования* число отброшенных наблюдений — случайная величина. Оба вида цензурирования отличаются от «*усечения*», когда урезается не выборка, а генеральная совокупность, и число потерянных наблюдений неизвестно.

Методы § 6.2, развитые для полных выборок, применимы ко II типу цензурированных наблюдений. Все, что необходимо сделать, — это интерпретировать вектор α и матрицу $\boldsymbol{B}$ как вектор средних и ковариационную матрицу нецензурированных упорядоченных величин $Y_{(r)}$. (Действительно, наблюдения, опущенные в выборке, не приведут к другим трудностям.) Конечно, каждый пример цензурирования требует отдельных вычислений. Для нормальной совокупности обширные таблицы коэффициентов для порядковых статистик, дающих оценки μ^* и σ^*, были получены Сарханом и Гринбергом (1970, стр. 194—227). Эти таблицы включают все случаи простого и двойного цензурирования в выборках объема $n\leqslant 20$. Даны также дисперсии и ковариации этих оценок и их эффективности относительно наилучших линейных оценок для нецензурированных выборок. Неудивительно, что потеря эффективности, связанная с цензурированием, более резко выражена для σ^*, чем для μ^*. Например, для $n=10$ и по одному цензурированному с каждой стороны наблюдению относительные эффективности равны 95,85% для μ^* и 69,88% для σ^*. Следует отметить, что мы можем получить преимущества, связанные с упрощениями в случае симметричных распределений, только если цензурирование также симметричное.

Альтернативные оценки Гупты особенно просты для II типа цензурирования: суммирование в (6.2.13) и (6.2.14) берется по $n-r_1-r_2$ наблюдениям, где r_1 и r_2, соответственно, — числа отброшенных слева и справа наблюдений. Эффективности этих оценок относительно соответствующих наилучших линейных оценок даны в таблицах Сархана и Гринберга (1970, стр. 242—244) для всех случаев одностороннего или двустороннего цензурирования при $n=10$, 12, 15. В большинстве случаев эти величины $\geqslant 90\%$, наименьшее равно 84,66% для μ^{**} ($n=15$; r_1 или $r_2=10$) и 86,75% для σ^{**} ($n=15$; r_1 или $r_2=9$). Между прочим, для полных выборок $\mu^{**}=\mu^*$, и относительная эффективность σ^{**} равна 99,9% для $n\leqslant 15$.

Для некоторых простых генеральных распределений можно обращать матрицу $\boldsymbol{B}$ и получать таким образом общие выражения для μ^* и σ^*. Сархан (1955) рассмотрел равномерное и экспоненциальное распределения, а для $n\leqslant 5$ и некоторые другие распределения (см. упр. 6.3.1).

Очевидно, что I тип цензурирования не всегда хорошо исследуется с помощью порядковых статистик. Действительно, ван Цвет (1966) показал, что во многих практических случаях невозможны какие-либо несмещенные оценки. Здесь хорошее приближение (даже в случаях усечения) дает метод максимального правдоподобия, несмотря на то, что он сложен и приводит порой к оценкам с неизвестными свойствами в случае малых выборок.

Метод максимального правдоподобия. Следуя Коэну (1959, 1961), дадим единообразную трактовку для нормальной совокупности одностороннего цензурирования обоих типов и усечения. Начнем с усечения (слева) и предположим, что N наблюдений взяты из генеральной совокупности с распределением

$$\frac{(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp\left[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right]}{\int\limits_{x_0}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}\sigma^{-1}\exp\left[-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right]dx}\qquad (x\geqslant x_0).$$

Взяв $\xi = (x_0 - \mu)/\sigma$, получаем, что знаменатель равен $1 - \Phi(\xi)$ и функция правдоподобия может быть записана как

$$L = [1 - \Phi(\xi)]^{-N} (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}N} \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2/(2\sigma^2)\right].$$

Отсюда

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = -\frac{N\varphi(\xi)}{\sigma[1 - \Phi(\xi)]} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu), \tag{6.3.1}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = -\frac{N\xi\varphi(\xi)}{\sigma[1 - \Phi(\xi)]} - \frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2. \tag{6.3.2}$$

Полагая

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i/N, \quad s'^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2/N \quad \text{и} \quad A(y) = \frac{\varphi(y)}{1 - \Phi(y)},$$

получаем соответствующие уравнения правдоподобия

$$\bar{x} - \hat{\mu} = \hat{\sigma}A(\hat{\xi}), \tag{6.3.3}$$

$$s'^2 + (\bar{x} - \hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2[1 + \hat{\xi}A(\hat{\xi})]. \tag{6.3.4}$$

Исключая $\bar{x} - \hat{\mu}$ и записывая $\hat{A}$ вместо $A(\hat{\xi})$, имеем

$$\hat{\sigma}^2 = s'^2 + \hat{\sigma}^2\hat{A}(\hat{A} - \hat{\xi}). \tag{6.3.5}$$

Но $\hat{\sigma}\hat{\xi} = x_0 - \hat{\mu} = x_0 - \bar{x} + \hat{\sigma}\hat{A}$, так что

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{x} - x_0}{\hat{A} - \hat{\xi}}. \tag{6.3.6}$$

Совместно с (6.3.5) это дает

$$\hat{\sigma}^2 = s'^2 + \frac{\hat{A}(\bar{x} - x_0)^2}{\hat{A} - \hat{\xi}} = s'^2 + \hat{\theta}(\bar{x} - x_0)^2, \tag{6.3.7}$$

где

$$\hat{\theta} = \hat{A}/(\hat{A} - \hat{\xi}). \tag{6.3.8}$$

Тогда из (6.3.3), (6.3.6) и (6.3.8) имеем

$$\hat{\mu} = \bar{x} - \hat{\sigma}\hat{A} = \bar{x} - \hat{\theta}(\bar{x} - x_0), \tag{6.3.9}$$

а из (6.3.7) и (6.3.6) получаем

$$\frac{s'^2}{(\bar{x}-x_0)^2}=\frac{\hat{\sigma}^2}{(\bar{x}-x_0)^2}-\frac{\hat{A}}{\hat{A}-\hat{\xi}}=\frac{1-\hat{A}(\hat{A}-\hat{\xi})}{(\hat{A}-\hat{\xi})^2}. \qquad (6.3.10)$$

Теперь из (6.3.7) и (6.3.9) можно было бы определить $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, если бы мы знали вспомогательную функцию $\hat{\theta}$. Но $\hat{\theta}$ — функция $\hat{\xi}$ и, следовательно, функция правой части (6.3.10). Таким образом, из $s'^2/(\bar{x}-x_0)^2$ $(=\hat{\gamma}$ в обозначениях Коэна) мы можем найти $\hat{\theta}$ (таблица 1 Коэна (1961)) и отсюда $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$ (упр. 6.3.1). (Относительно двух других методов см. работы Плэкетта (1958) и Тайкью (1967а)).

I тип цензурирования. Пусть N теперь обозначает случайное число наблюдений $\geqslant x_0$, r — число отброшенных наблюдений $(<x_0)$ из общего числа n. Таким образом, $N+r=n$. Соответствующая функция правдоподобия имеет вид

$$L=\frac{n!}{r!N!}[\Phi(\xi)]^r(2\pi\sigma^2)^{-N/2}\exp\left[-\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)\right]. \qquad (6.3.11)$$

Тогда

$$\frac{\partial\log L}{\partial\mu}=-\frac{r\varphi(\xi)}{\sigma\Phi(\xi)}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu).$$

Отсюда, обозначая $h=r/n$, имеем

$$\bar{x}-\hat{\mu}=\frac{r}{N}\hat{\sigma}A(-\hat{\xi})=\frac{h}{1-h}\hat{\sigma}A(-\hat{\xi})=\hat{\sigma}\hat{B}$$

аналогично с (6.3.3), где $\hat{B}(h,\xi)=\frac{h}{1-h}A(-\hat{\xi})$. Подобно этому $s'^2+(\bar{x}-\hat{\mu})^2=\hat{\sigma}^2(1+\hat{\xi}\hat{B})$, так что аналогично (6.3.7), (6.3.9) и (6.3.10) имеем теперь

$$\hat{\sigma}^2=s'^2+\hat{\lambda}(\bar{x}-x_0)^2, \qquad (6.3.12)$$

$$\hat{\mu}=\bar{x}-\hat{\lambda}(\bar{x}-x_0), \qquad (6.3.13)$$

$$\hat{\gamma}=\frac{s'^2}{(\bar{x}-x_0)^2}=\frac{1-\hat{B}(\hat{B}-\hat{\xi})}{(\hat{B}-\hat{\xi})^2}, \qquad (6.3.14)$$

где $\hat{\lambda}=\hat{B}/(\hat{B}-\hat{\xi})$. Вспомогательная функция $\hat{\lambda}$ зависит от двух величин h и $\hat{\xi}$, или, что эквивалентно, от h и $\hat{\gamma}$. С помощью интерполяции $\hat{\lambda}$ может быть сразу получена из таблицы 2 Коэна (1961), воспроизведенной в нашей таблице 6.3. В других отношениях процедура оценивания такая же, как и в случае усечения.

II тип цензурирования. Обозначим $r = n - N$ наблюдений, цензурированных слева, через $x'_1 \leqslant x'_2 \leqslant \ldots \leqslant x'_r$, и пусть $\underline{x}$ — наименьшее наблюдаемое значение. Тогда функция правдоподобия имеет вид

$$L = \left[\prod_{i=1}^{N} p(x_i)\right] \int_{-\infty}^{\underline{x}} \int_{-\infty}^{x'_r} \ldots \int_{-\infty}^{x'_2} n!\, p(x'_1) \ldots$$

$$\ldots p(x'_{r-1})\, p(x'_r)\, dx'_1 \ldots dx'_{r-1}\, dx'_r = \frac{n!}{r!} P^r(\underline{x}) \prod_{i=1}^{N} p(x_i) =$$

$$= \frac{n!}{r!}\left[\Phi\left(\frac{\underline{x}-\mu}{\sigma}\right)\right]^r (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2\right].$$

Сравнивая с (6.3.11), видим, что ξ просто заменяется на $y = (\underline{x} - \mu)/\sigma$. В этом случае смещение оценки исследовалось Со (1961), который нашел, что для сильного цензурирования смещение может быть значительным, доходя, например, даже до 13% при $n = 19$, $N = 7$.

Ясно, что в случае усечения справа величина $1 - \Phi(\xi)$ должна быть заменена на $\Phi(\xi)$, т. е. ξ на $-\xi$. Это не приводит к отличиям в процедуре оценивания. Подобное замечание применимо и к цензурированию с тем отличием, что для II типа цензурирования $\underline{x}$ следует заменить наибольшим наблюдаемым значением.

Асимптотические дисперсии и ковариации для оценок максимального правдоподобия. Рассмотрим II тип цензурирования. Первая производная $\log L$ может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = -\frac{rA(-y)}{\sigma} + \sum_{i=1}^{N}\frac{x_i-\mu}{\sigma^2},$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = -\frac{ryA(-y)}{\sigma} - \frac{N}{\sigma} - \sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^3}.$$

Таблица 6.3

Вспомогательная оценочная функция $\lambda(h, \hat{\gamma})$ для односторонне цензурированных выборок из нормальной совокупности (из работы Коэна (1961))

$\hat{\gamma}$ \ h	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15
0,00	0,010100	0,020400	0,030902	0,041583	0,052507	0,063627	0,074953	0,086488	0,09824	0,11020	0,17342
0,05	0,010551	0,021294	0,032225	0,043350	0,054670	0,066189	0,077909	0,089834	0,10197	0,11431	0,17935
0,10	0,010950	0,022082	0,033398	0,044902	0,056596	0,068483	0,080568	0,092852	0,10534	0,11804	0,18479
0,15	0,011310	0,022798	0,034466	0,046318	0,058356	0,070586	0,083009	0,095629	0,10845	0,12148	0,18985
0,20	0,011642	0,023459	0,035453	0,047629	0,059990	0,072539	0,085280	0,098216	0,11135	0,12469	0,19460
0,25	0,011952	0,024076	0,036377	0,048858	0,061522	0,074372	0,087413	0,10065	0,11408	0,12772	0,19910
0,30	0,012243	0,024658	0,037249	0,050018	0,062969	0,076106	0,089433	0,10295	0,11667	0,13059	0,20338
0,35	0,012520	0,025211	0,038077	0,051120	0,064345	0,077756	0,091355	0,10515	0,11914	0,13333	0,20747
0,40	0,012784	0,025738	0,038866	0,052173	0,065660	0,079332	0,093193	0,10725	0,12150	0,13595	0,21139
0,45	0,013036	0,026243	0,039624	0,053182	0,066921	0,080845	0,094958	0,10926	0,12377	0,13847	0,21517
0,50	0,013279	0,026728	0,040352	0,054153	0,068135	0,082301	0,096657	0,11121	0,12595	0,14090	0,21882
0,55	0,013513	0,027196	0,041054	0,055089	0,069306	0,083708	0,098298	0,11308	0,12806	0,14325	0,22235
0,60	0,013739	0,027649	0,041733	0,055995	0,070439	0,085068	0,099887	0,11490	0,13011	0,14552	0,22578
0,65	0,013958	0,028087	0,042391	0,056874	0,071538	0,086388	0,10143	0,11666	0,13209	0,14773	0,22910
0,70	0,014171	0,028513	0,043030	0,057726	0,072605	0,087670	0,10292	0,11837	0,13402	0,14987	0,23234
0,75	0,014378	0,028927	0,043652	0,058556	0,073643	0,088917	0,10438	0,12004	0,13590	0,15196	0,23550
0,80	0,014579	0,029330	0,044258	0,059364	0,074655	0,090133	0,10580	0,12167	0,13773	0,15400	0,23858
0,85	0,014775	0,029723	0,044848	0,060153	0,075642	0,091319	0,10719	0,12325	0,13952	0,15599	0,24158
0,90	0,014967	0,030107	0,045425	0,060923	0,076606	0,092477	0,10854	0,12480	0,14126	0,15793	0,24452
0,95	0,015154	0,030483	0,045989	0,061676	0,077549	0,093611	0,10987	0,12632	0,14297	0,15983	0,24740
1,00	0,015338	0,030850	0,046540	0,062413	0,078471	0,094720	0,11116	0,12780	0,14465	0,16170	0,25022

Таблица 6.3 (*продолжение*)

$\hat{\gamma}$ \ h	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,80	0,90
0,00	0,24268	0,31862	0,4021	0,4941	0,5961	0,7096	0,8368	0,9808	1,145	1,336	1,561	2,176	3,283
0,05	0,25033	0,32793	0,4130	0,5066	0,6101	0,7252	0,8540	0,9994	1,166	1,358	1,585	2,203	3,314
0,10	0,25741	0,33662	0,4233	0,5184	0,6234	0,7400	0,8703	1,017	1,185	1,379	1,608	2,229	3,345
0,15	0,26405	0,34480	0,4330	0,5296	0,6361	0,7542	0,8860	1,035	1,204	1,400	1,630	2,255	3,376
0,20	0,27031	0,35255	0,4422	0,5403	0,6483	0,7678	0,9012	1,051	1,222	1,419	1,651	2,280	3,405
0,25	0,27626	0,35993	0,4510	0,5506	0,6600	0,7810	0,9158	1,067	1,240	1,439	1,672	2,305	3,435
0,30	0,28193	0,36700	0,4595	0,5604	0,6713	0,7937	0,9300	1,083	1,257	1,457	1,693	2,329	3,464
0,35	0,28737	0,37379	0,4676	0,5699	0,6821	0,8060	0,9437	1,098	1,274	1,476	1,713	2,353	3,492
0,40	0,29260	0,38033	0,4755	0,5791	0,6927	0,8179	0,9570	1,113	1,290	1,494	1,732	2,376	3,520
0,45	0,29765	0,38665	0,4831	0,5880	0,7029	0,8295	0,9700	1,127	1,306	1,511	1,751	2,399	3,547
0,50	0,30253	0,39276	0,4904	0,5967	0,7129	0,8408	0,9826	1,141	1,321	1,528	1,770	2,421	3,575
0,55	0,30725	0,39870	0,4976	0,6051	0,7225	0,8617	0,9950	1,155	1,337	1,545	1,788	2,443	3,601
0,60	0,31184	0,40447	0,5045	0,6133	0,7320	0,8625	1,007	1,169	1,351	1,561	1,806	2,465	3,628
0,65	0,31630	0,41008	0,5114	0,6213	0,7412	0,8729	1,019	1,182	1,366	1,577	1,824	2,486	3,654
0,70	0,32065	0,41555	0,5180	0,6291	0,7502	0,8832	1,030	1,195	1,380	1,593	1,841	2,507	3,679
0,75	0,32489	0,42090	0,5245	0,6367	0,7590	0,8932	1,042	1,207	1,394	1,608	1,858	2,528	3,705
0,80	0,32903	0,42612	0,5308	0,6441	0,7676	0,9031	1,053	1,220	1,408	1,624	1,875	2,548	3,730
0,85	0,33307	0,43122	0,5370	0,6515	0,7761	0,9127	1,064	1,232	1,422	1,639	1,892	2,568	3,754
0,90	0,33703	0,43622	0,5430	0,6586	0,7844	0,9222	1,074	1,244	1,435	1,653	1,908	2,588	3,779
0,95	0,34091	0,44112	0,5490	0,6656	0,7925	0,9314	1,085	1,255	1,448	1,668	1,924	2,607	3,803
1,00	0,34471	0,44592	0,5548	0,6724	0,8005	0,9406	1,095	1,267	1,461	1,682	1,940	2,626	3,827

Для всех значений $0 \leqslant \hat{\gamma} \leqslant 1$ полагаем $\lambda(0, \hat{\gamma}) = 0$.

Так как $A(-y)=\frac{\varphi(y)}{\Phi(y)}$, то

$$\frac{\partial A(-y)}{\partial y}=\frac{\Phi(y)[-y\varphi(y)]-\varphi^2(y)}{[\Phi(y)]^2}=-A^-(A^-+y),$$

где $A^-=A(-y)$. Отсюда

$$-\frac{\partial^2 \log L}{\partial\mu^2}=\frac{r}{\sigma^2}A^-(A^-+y)+\frac{N}{\sigma^2}=\frac{N}{\sigma^2}\left[\frac{h}{1-h}A^-(A^-+y)+1\right]$$

или

$$\omega_{11}=-\frac{\sigma^2}{N}\frac{\partial^2\log L}{\partial\mu^2}=B(A^-+y)+1.$$

Далее,

$$\omega_{12}=-\frac{\sigma^2}{N}\frac{\partial^2\log L}{\partial\mu\,\partial\sigma}=B[1+y(A^-+y)],$$

$$\omega_{22}=-\frac{\sigma^2}{N}\frac{\partial^2\log L}{\partial\sigma^2}=2+y\omega_{12}.$$

При $N\to\infty$ имеем $y\to y_0=\Phi^{-1}(h)$. С этой заменой асимптотическая ковариационная матрица может быть получена обращением матрицы $\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12}\\ \omega_{12} & \omega_{22}\end{pmatrix}$, например,

$$\mathsf{D}\hat\mu\sim\frac{\sigma^2}{N}\frac{\omega_{22}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}^2}=\frac{\sigma^2}{n}\mu_{11}$$

и т. д. Тем самым определяются μ_{11} и, аналогично, μ_{12} и μ_{22}. Коэн (1961) табулировал эти значения и $\rho(\hat\mu,\ \hat\sigma)$ как функции y_0. Чтобы получить оценки этих величин, нужно взять в таблицах $\hat y=(x_{\min}-\hat\mu)/\hat\sigma$. Те же таблицы применяются также при I типе цензурирования, если брать $\hat\xi=(x_0-\hat\mu)/\hat\sigma$. Подобные таблицы даны также для случая усечения. Свойства оценок максимального правдоподобия (МП) в случае больших односторонне цензурированных выборок изучались Гальпериным (1952).

Пример 6.3.1. Гупта (1952) привел следующие данные, где x' — дни смерти первых 7 из 10 мышей после вакцинации культуры туберкулеза:

x'	41	44	46	54	55	58	60
$x=\log_{10}x'$	1,613	1,644	1,663	1,732	1,740	1,763	1,778

Гупта предположил, что $\log x'$ — нормально распределенная с. в. Оценим математическое ожидание и стандартное отклонение различными методами этой главы.

1. Максимум правдоподобия. У нас случай II типа цензурирования справа. Имеем $r=3$, $n=10$, $h=0{,}3$, $\bar{x}=1{,}70471$, $s'^2=\frac{1}{7}\sum(x_i-\bar{x})^2=0{,}003514$. Тогда из (6.3.14) $\hat{\gamma}=\frac{s'^2}{(\bar{x}-1{,}778)^2}=0{,}654$. Из таблицы 6.3 находим $\hat{\lambda}=0{,}512$ и из (6.3.13) и (6.3.12) получаем $\hat{\mu}=1{,}742$ и $\hat{\sigma}=0{,}079$.

Таблица 3 Коэна (1961) дает приближенно

$$\mu_{11}=1{,}14,\quad \mu_{22}=0{,}82,\quad \rho=0{,}21,$$

приводя к следующим оценкам ошибки:

$$\text{ст. откл. } \hat{\mu}=0{,}079\times(1{,}14/10)^{1/2}=0{,}027,$$
$$\text{ст. откл. } \hat{\sigma}=0{,}079\times(0{,}82/10)^{1/2}=0{,}023.$$

2. Наилучшие линейные оценки. Из работы Сархана и Гринберга (1970, стр. 198) мы имеем, применяя (6.2.5′) к цензурированным наблюдениям,

$$\mu^*=0{,}0244\cdot1{,}613+0{,}0636\cdot1{,}644+\ldots+0{,}5045\cdot1{,}778=1{,}746,$$
$$\sigma^*=-0{,}3252\cdot1{,}613-0{,}1758\cdot1{,}644+\ldots+0{,}6107\cdot1{,}778=0{,}091.$$

Из той же работы (см. стр. 229) имеем

$$D\mu^*=0{,}1167\sigma^2,\quad D\sigma^*=0{,}0989\sigma^2,$$
$$\operatorname{cov}(\mu^*,\ \sigma^*)=0{,}0260\sigma^2,$$

что дает следующие оценки ошибок:

$$\text{ст. откл. } \mu^*=0{,}091\times(0{,}1167)^{1/2}=0{,}031,$$
$$\text{ст. откл. } \sigma^*=0{,}091\times(0{,}0989)^{1/2}=0{,}029.$$

3. Упрощенные линейные оценки. Здесь применимы коэффициенты (6.2.13) и (6.2.14), видоизмененные для случая цензурирования. Гупта (1952) получил

$$\mu^{**}=-0{,}0433\cdot1{,}613+0{,}0491\cdot1{,}644+\ldots+0{,}2861\cdot1{,}778=1{,}748,$$
$$\sigma^{**}=-0{,}4077\cdot1{,}613-0{,}2053\cdot1{,}644+\ldots+0{,}3136\cdot1{,}778=0{,}094,$$

$$\text{ст. откл. } \mu^{**}=0{,}033,\quad \text{ст. откл. } \sigma^{**}=0{,}031,$$

Коэффициенты в этом случае не табулированы, поэтому он более трудоемок, чем предыдущий. Удобство же его в том, что коэффициенты могут быть вычислены вне зависимости от того, даны или нет математические ожидания порядковых статистик. Следует отметить, что МП оценки имеют наименьшее стандартное отклонение. Это происходит главным образом потому, что $\hat{\sigma}$ получается меньшей, чем (несмещенные) оценки σ^* и σ^{**}. Эффективности μ^{**} относительно μ^* и σ^{**} относительно σ^* равны, соответственно, 0,960 и 0,920 (см. Сархан и Гринберг (1970), стр. 242).

Большинство результатов этого численного примера были получены Гуптой, который первым рассмотрел оценки параметров нормальной совокупности для II типа цензурированной выборки. Из-за ошибок Гупты в вычислениях, а также благодаря использованию нами более точных таблиц наши численные результаты в первом и втором случаях и результаты Гупты несколько отличаются друг от друга.

Наконец, те же самые наблюдения иллюстрируют метод Блома.

4. **Несмещенные почти наилучшие оценки Блома.** Оценки (6.2.20) продолжают работать в случае цензурирования при условии, что C_{1i}, C_{2i} в (6.2.21) заменяются на C_{1i}^*, C_{2i}^*, определенные следующим образом в случае r_1 цензурированных слева наблюдений и r_2 — справа:

$$C_{1i}^* = \begin{cases} -\dfrac{f_{r_1+1}}{r_1+1}, & \text{если} \quad 0 \leqslant i \leqslant r_1, \\ C_{1i}, & \text{если} \quad r_1+1 \leqslant i \leqslant n-r_2-1, \\ \dfrac{f_{n-r_2}}{r_2+1}, & \text{если} \quad n-r_2 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

$$C_{2i}^* = \begin{cases} -f_{r_1+1}\alpha_{r_1+1}, & \text{если} \quad 0 \leqslant i \leqslant r_1, \\ C_{2i}, & \text{если} \quad r_1+1 \leqslant i \leqslant n-r_2-1, \\ \dfrac{f_{n-r_2}\alpha_{n-r_2}}{r_2+1}, & \text{если} \quad n-r_2 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Из-за трудоемкости вычислительной работы приведем следующие вспомогательные таблицы для нашего примера:

i	f_i	c_{1i}	$f_i\alpha_i$	c_{2i}
0	0	—0,1636	0	0,2517
1	0,1636	—0,1004	—0,2517	0,0127
2	0,2640	—0,0683	—0,2644	—0,0464
3	0,3323	—0,0431	—0,2180	—0,0769
4	0,3754	—0,0209	—0,1411	—0,0925
5	0,3963	0	—0,0486	—0,0972
6	0,3963	0,0209	0,0486	—0,0925
7, 8, 9, 10	...	0,0938	0,1411	0,0353

Величины f_i удобнее получить из таблицы 5 Пирсона и Хартли (1966). Теперь имеем

$$d_{11}=0{,}0794, \quad d_{12}=-0{,}0227, \quad d_{22}=0{,}1031$$

и

$$d^{11}=13{,}44, \quad d^{12}=2{,}96, \quad d^{22}=10{,}35,$$

что дает $\tilde{\mu}=1{,}746$ и $\tilde{\sigma}=0{,}090$.

Из (6.2.22) находим также оценки стандартных отклонений:

$$\text{ст. откл. } \tilde{\mu}=0{,}029, \quad \text{ст. откл. } \tilde{\sigma}=0{,}025.$$

Группированные наблюдения. Так как группировка представляет собой частичное упорядочение, кажется вполне естественным выяснить, как широко различные предшествующие методы, соответствующим образом модифицированные, могут применяться к группированным наблюдениям. Уже в 1942 г. Хартли исследовал распределение размаха в группированных выборках из нормальной совокупности и нашел, что средний размах изменяется мало даже при довольно грубой группировке для $n \leqslant 20$. Подобные результаты были получены Дэйвидом и Мишрики (1968) для математических ожиданий всех порядковых статистик для $n \leqslant 100$, хотя эффект группировки (а) более важен для центральных порядковых статистик, чем для крайних (которые более разбросаны), и (б) возрастает с ростом n. Это приводит к тому, что дисперсии порядковых статистик в группированных выборках хорошо приближаются дисперсиями негруппированных выборок после применения поправки Шеппарда $h^2/12$, где h — интервал группировки первоначальных, а следовательно, и упорядоченных наблюдений. Из общей теории поправок Шеппарда следует, что ковариации не требуют никаких уточнений. Эти результаты, взятые вместе, дают основание предположить, что любой из методов, подходящий для негруппированной нормальной выборки, может быть применен и в случае группировки, т. е. веса для соответствующих порядковых статистик являются теперь весами для средних точек соответствующих интервалов группировки.

Пример 6.3.2. Первые 20 случайных чисел, имеющих стандартное $N(0,1)$ нормальное распределение, данные Бейером (1968), равны 0,464; 0,060; 1,486; 1,022; 1,394; 0,906; 1,179; — 1,501; — 0,690; 1,372; — 0,482; — 1,376; — 1,010; — 0,005; 1,393; — 1,787; — 0,104; — 1,339; 1,041; 0,279.

После группировки по интервалам шириной $h=0,5$, начинающимся в нуле, получаем следующие средние точки и соответственные частоты: — 1,75(2); — 1,25(3); — 0,75(1); — 0,25(3); 0,25(3); 0,75(1); 1,25(7). Выделяя случай группировки индексом g, имеем для средних значений и стандартных отклонений выборки

$$\bar{x}=0,115; \quad s=1,105; \quad \bar{x}_g=0,075;$$

$$s_g=1,066 \text{ (с учетом поправки Шеппарда).}$$

Конечно, $\bar{x}$ и $\bar{x}_g$ также являются оценками для μ (в данном случае $\mu=0$), использующими порядковые статистики. Наилучшая линейная оценка для σ ($=1$), использующая коэффициенты Сархана и Гринберга (стр. 224), равна

$$\sigma^*=(-1,787)\cdot(-0,1128)+(-1,501)\cdot(-0,0765)+\ldots$$
$$\ldots+1,486\cdot 0,1128=1,096.$$

Соответствующая оценка для группировки равна

$$\sigma_g^*=(-1,75)(-0,1128-0,0765)+\ldots$$
$$\ldots+1,25(0,0241+0,0318+0,0402+0,0497+0,0611+$$
$$+0,0765+0,1128)=1,067.$$

Конечно, нельзя говорить об оптимальных свойствах этой процедуры. В любом случае увеличение дисперсии оценки является платой за группировку. Тем не менее этот метод нередко оказывается полезным для генеральных совокупностей, отличных от нормальной, не только для случая полностью известных выборок, но и для цензурированных. Другой подход, также основанный на работе Ллойда, был дан Хаммерсли и Мортоном (1954). (См. также Гранди (1952) и Свами (1962).)

Цензурирование в случае многомерного нормального распределения. Возникают новые ситуации, если усечению или цензурированию подвергаются многомерные наблюдения. Для определенности рассмотрим II тип цензурирования и возьмем для иллюстрации двумерный случай. Прежде чем какое-то цензурирование проделано, мы, следуя обычному упорядочению первой координаты, скажем x, обозначим соответствующие y через $y_{[i]}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, где $y_{[i]}$ — значение y, соответствующее $x_{(i)}$. Величины $y_{[i]}$ не обязаны идти в возрастающем порядке. Некоторые свойства двумерной нормальной $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ с. в. можно найти в упр. 3.2.3. Здесь полезно различать три типа цензурирования (Уотерсон (1959)):

(A) — цензурирование некоторых $x_{(i)}$ и соответствующих $y_{[i]}$;

(B) — цензурирование только $y_{[i]}$;

(C) — цензурирование только $x_{(i)}$.

Например, случай B (или, точнее, тип II B) возникает, если x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — вступительные баллы, а $y_{[i]}$ $(i=r+1, r+2, \ldots, n)$ — последующие баллы кандидатов, успешно прошедших вступительный экзамен. С другой стороны, тип II C встречается в испытаниях, связанных с продолжительностью жизни после $n-r$ отказов в случае, когда измерения некоторой сопутствующей величины возможны для всех n изделий. Уотерсон получил оценки, основанные на коэффициентах для наилучших линейных оценок и упрощенных оценок в одномерном случае. Оценки несмещенные, но их дисперсии зависят от ρ. Оказывается, что использование упрощенных коэффициентов дает оценки более простые с точки зрения вычислений и, вообще говоря, с меньшей дисперсией (см. также Коэн (1955а, 1957) и Сингх (1960)).

Цензурирование в случаях распределений, отличных от нормального. Мы перечислим ряд работ, в которых рассматриваются оценки параметров сдвига и масштаба для цензурированных наблюдений в случае различных одномерных распределений. Литература слишком многочисленна, чтобы позволить здесь ее более детальный разбор, да и используемые методы представляют собой главным образом простые модификации методов для нормальных совокупностей. Как ясно из подхода Коэна, оценивание параметров из усеченных генеральных совокупностей производится подобным же образом, но никаких попыток не сделано, чтобы исследовать этот вопрос систематически. Случай экспоненциального распределения рассматривается отдельно в § 6.4 в связи с оцениванием продолжительности жизни. Для $n \leqslant 5$ наилучшие линейные оценки даны для некоторых генеральных совокупностей Сарханом и Гринбергом (1970, стр. 354—358). Библиография Федерера об отборе при селекции содержит список многих относящихся к нашему вопросу работ.

Усеченное нормальное: Коэн (1955c).

Логнормальное: Хартер и Мур (1966), Тайкью (1968a).

Гамма: Коэн (1955b), Хартер (1967), Хартер и Мур (1967b), Уилк и др. (1962b, 1963b, 1966).

χ-распределение (с одной степенью свободы): Говиндараюлу, Эйзенштат (1965).

Бета: Гнанадесикан и др. (1967).

Двойное экспоненциальное: Говиндараюлу (1966).

Распределение экстремального значения: Либлейн (1954a), Либлейн и Зилен (1956), Манн (1967b), Уайт (1964), Винер (1963).

Распределение Вейбулла: Бейн и Энтл (1967), Коэн (1965), Гумбель (1958), Хартер и Мур (1965, 1967b), Манн (1967a), Менон (1963).

Логистическое: Гупта и др. (1967), Хартер и Мур (1967c), Тайкью (1968b).

Пуассоновское: Коэн (1954), Досс (1963).

Степенное: Ликеш (1967).

Заметим, что если с. в. X имеет распределение Вейбулла с ф. р.

$$P(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^k\right] \qquad (x \geqslant 0),$$

то $\log X$ имеет распределение наименьшего значения с ф. р.

$$1 - \exp\{-\exp[(x-\mu)/\sigma]\}, \text{ где } \mu = \log\theta \text{ и } \sigma = 1/k.$$

Таким образом, МП оценки (не обязательно линейные) для этих двух распределений по существу одинаковые. Аналогично, если с. в. X имеет степенную ф. р. с плотностью

$$p(x)=k\theta^{-k}x^{k-1} \qquad (k>0;\ 0\leqslant x\leqslant\theta),$$

то с. в. $-\log X$ имеет экспоненциальное распределение с началом в точке $-\log\theta$ и параметром масштаба $1/k$.

§ 6.4. Испытания на продолжительность жизни с акцентом на экспоненциальное распределение

Если n изделий таких, как радиолампы, предохранители, колбы электроламп, подвергаются испытанию на продолжительность жизни (долговечность), то первым выйдет из строя наименее прочное изделие, затем следующее по прочности и т. д., пока не выйдут из строя все. Таким образом, если время жизни X случайно выбранного изделия имеет плотность распределения $p(x)$, то наше испытание образует ряд упорядоченных наблюдений $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$ из этого распределения. Переходя от физики к биологии, мы можем также интерпретировать X как, например, время, прошедшее до момента смерти после того, как n животных получат одинаковую дозу радиации. Практическая важность подобных экспериментов очевидна. Они дают идеальный пример применения порядковых статистик, так как по природе эксперимента наблюдения поступают в порядке возрастания значений, и нет необходимости упорядочивать их после получения всех данных. Более того, как уже упоминалось в § 6.3, появляется возможность прекращать эксперимент до его полного завершения, останавливаясь в фиксированный момент времени (I тип цензурирования) или после фиксированного числа отказов (II тип цензурирования). При условии, что вид $p(x)$ известен из подобных экспериментов, оценивание параметров часто может происходить с потерей эффективности менее существенной, чем выигрыш во времени. Имеется ряд удобных кандидатур для распределения X, включающий распределения Вейбулла, гамма, логнормальное и даже нормальное [4]).

Уже давно наибольшее внимание в литературе на эту тему уделялось экспоненциальному распределению (кото-

[4]) Так как X — неотрицательная с. в., то коэффициент вариации нормального распределения должен быть настолько мал, чтобы можно было пренебречь вероятностью $\mathrm{P}(X<0)$.

рое, конечно, является частным случаем как гамма, так и распределения Вейбулла). Экспоненциальное распределение играет такую же важную роль в оценивании продолжительности жизни, как и нормальное в параметрической теории. Следует признать, что в обоих случаях немалую роль играет вопрос удобства, так как здесь возможны простые и элегантные результаты. Как показали Зилен и Даннемиллер (1960), отход от экспоненциальности может серьезно изменить процедуры, пригодные для экспоненциального распределения. Однако экспоненциальность имеет место, когда моменты отказов представляют собой пуассоновский процесс, или, другими словами, когда интенсивность отказа[5]) (равная условной плотности распределения с. в. X при условии $X > x$) $p(x)/(1 - P(x))$ для данного изделия остается постоянной, как будто изделие остается новым в течение всей жизни. Практически это означает, между прочим, что износ изделия фактически не влияет на вероятность появления отказов.

Дальнейшее обсуждение этого вопроса читатель может найти у Барлоу и Прошана (1969), хотя главная цель их работы — заменить специфические предположения на распределения требованием, чтобы интенсивность отказа менялась монотонно со временем. Этого вопроса касается также монография Кокса и Льюиса (1969).

Вернемся теперь к более детальному обсуждению экспоненциального случая, но для большей общности возьмем плотность в двухпараметрической форме

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} \exp[-(x-\theta)/\sigma] \quad \text{для} \quad x \geqslant 0. \qquad (6.4.1)$$

Здесь с. в. X имеет среднее $\theta + \sigma$ и стандартное отклонение σ. С точки зрения испытания на продолжительность жизни θ можно интерпретировать как неизвестную точку, в которой начинается «жизнь», или как «гарантийный срок», во время которого не может случиться отказа (Эпстейн и Собел (1954)). Другая интерпретация возникает в так называемом «интервальном анализе»: θ можно представить как время «поломки» счетчика Гейгера, а с. в. X обозначает интервал между успешными регистрациями

---

[5]) В оригинале: failure rate. Синонимы: hazard rate, intensity function, force of mortality. (*Прим. перев.*)

частиц. Оставим читателю обоснование результатов, полученных Сукхатме еще в 1937 г., а именно, что для (полной) выборки объема n из генеральной совокупности с плотностью распределения (6.4.1) МП оценки для θ и σ имеют вид

$$\hat{\theta} = X_{(1)}, \quad \hat{\sigma} = \sum_{i=2}^{n} \frac{X_{(i)} - X_{(1)}}{n}, \tag{6.4.2}$$

что это совместно достаточные статистики и что наилучшими несмещенными оценками являются, соответственно, $\theta^* = X_{(1)} - \frac{\sigma^*}{n}$ и $\sigma^* = \frac{n\hat{\sigma}}{n-1}$. Более того (сравните с § 2.7), величины

$$Y_i = \frac{1}{\sigma}(n - i + 1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad (X_0 = \theta) \tag{6.4.3}$$

независимы и имеют плотность распределения

$$p(y) = \exp(-y) \quad (y \geqslant 0).$$

Так как $\sum_{i=2}^{n} Y_i = \sum_{i=2}^{n} \frac{X_{(i)} - X_{(1)}}{\sigma}$, то величина $\frac{2(n-1)\sigma^*}{\sigma}$ распределена как χ^2 с $2(n-1)$ степенями свободы[6]). Этот результат можно сразу использовать для построения доверительных интервалов и критериев значимости для σ, подчеркивая аналогию с нормальным случаем. Продолжая в том же духе, можно доверительные интервалы и критерии для θ основывать на отношении $T = n(X_{(1)} - \theta)/\sigma^*$, которое в силу (6.4.3) имеет F-распределение с 2 и $2(n-1)$ степенями свободы. Прямым продолжением аналогии с нормальной теорией являются обобщения, также полученные Сукхатме, для критериев, основанных на двух или нескольких выборках (см., например, упр. 6.4.1).

Почти нет изменений, учитывая (6.4.3), в случае II типа цензурирования справа. Мы просто работаем с имеющимися разностями первых N моментов неудач и оцениваем σ

---

[6]) Можно также получить общее распределение линейной функции $\sum_{i=1}^{n} c_i X_{(i)}$ (см. Ликеш (1967)).

с помощью

$$\sigma^* = \sum_{i=2}^{N} \frac{(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)})}{N-1} =$$

$$= \sum_{i=2}^{N} \frac{(X_{(i)}-X_{(1)})+(n-N)(X_{(N)}-X_{(1)})}{N-1},$$

где теперь $2(N-1)\sigma^*/\sigma$ имеет χ^2-распределение с $2(N-1)$ степенями свободы. Соответственно, $\theta^* = X_{(1)} - \frac{\sigma^*}{n}$. Читатель, если желает, может проверить, что $\hat{\sigma} = \frac{N-1}{N}\sigma^*$ и $X_{(1)}$ — МП оценки и что они совместно достаточны. Они являются полными (Эпстейн, Собел (1954)). Это формально устанавливает, что σ^* и θ^*, соответственно, единственные РМДН оценки для σ и θ. Различные критерии значимости исследовались Эпстейном и Цао (1953).

Важный случай $\theta = 0$ отдельно обсуждался в ряде работ и особенно у Эпстейна и Собела (1953). Цензурирование I типа и обобщение, связанное с окончанием испытания после N-го отказа или в некоторый момент x_0, в зависимости от того, что наступит раньше[7]), рассматривались Эпстейном (1954) (см. упр. 6.4.3). Идея здесь заключается в том, что во время проверки гипотезы $H: \sigma \leqslant \sigma_0$ против альтернативы $K: \sigma > \sigma_0$ мы можем высказаться за H, не дожидаясь времени x_0, если N-й момент отказа появляется слишком рано (см. также Бартоломью (1963) для оценивания σ при I типе цензурирования). Обзор этих и связанных с испытаниями на продолжительность жизни процедур дан Эпстейном (1960a, b).

Тесно связаны с этими задачами проблемы надежности. Надежность прибора при условии его работы по крайней мере в течение времени x (фиксированного) определяется как

$$R(x) = 1 - P(x) = \mathsf{P}\{X > x\},$$

что для однопараметрического экспоненциального распределения равно $\exp(-x/\sigma)$ $(x \geqslant 0)$. Поэтому гипотезы о R

[7]) Эпстейн называет такую процедуру усеченным испытанием на продолжительность жизни.

немедленно сводятся к гипотезам о σ. РМДН оценки R для усеченного экспоненциального распределения рассматривались Сатхе и Варде (1969). Отметим также, что «последовательная система» из n изделий (или «компонент») с индивидуальной надежностью $R_i(x)$ имеет надежность, равную $\prod_{i=1}^{n} R_i$, в то время как надежность «параллельной системы» равна $1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i)$. Эти общие формулы предполагают, что отказы появляются независимо друг от друга. Мы увидели, что для экспоненциального распределения время жизни X_s последовательной системы имеет плотность распределения

$$-\frac{d}{dx}\exp\left[-\sum\frac{x}{\sigma_i}\right]=\sum\frac{1}{\sigma_i}\exp\left[-x\sum\frac{1}{\sigma_i}\right],$$

т. е. X_s имеет однопараметрическое экспоненциальное распределение с математическим ожиданием $(\sum(1/\sigma_i))^{-1}$, которое в случае одинаковых «компонент» сводится к σ/n.

Цензурирование слева и двухстороннее цензурирование в экспоненциальном случае. Можно заметить, что в предыдущем обсуждении все цензурирования были справа Цензурирование слева (к счастью, менее важное) не дает столь элегантных результатов. Однако здесь можно прибегнуть к общему подходу Ллойда (Сархан (1955)) или использовать упрощенные оценки (Эпстейн (1956)), краткий перечень которых имеется в книге Сархана и Гринберга (1970) (см. также Тайкью (1967b)). Общие оценки для двухстороннего цензурирования даны в упр. 6.4.5. Следует отметить, что эти результаты включают и результаты, связанные с цензурированием справа, но предыдущий подход необходим, чтобы установить РМДН оценки в классе всех, а не только линейных, оценок. Обширные таблицы для $n\leqslant 10$ даны Сарханом и Гринбергом (1957).

Некоторые ссылки. Литература по испытаниям на продолжительность жизни и по теории надежности огромна. Работы, представляющие статистический интерес, можно найти в библиографическом справочнике Бакленда (1962) и в библиографии Менденхолла (1958) с добавлениями

Говиндараюлу (1964). Ниже следует краткий список ссылок (в добавление к уже имеющимся в этом параграфе), в которых важную роль играют порядковые статистики.

1. *Испытания на продолжительность жизни* (*параметрический случай*): Бейн и Уикс (1965), Барлоу и Прошан (1967), Барлоу и др. (1968), Бартоломью (1957), Басу (1965, 1968), Черчмэн и Эпстейн (1946), Коэн (1963, 1966), Кокс (1959, 1964), Дэйвид (1957), Доксам (1967), Гани и Йео (1962), Гарнер (1958), Гудмэн и Мадански (1962), Гупта (1962), Гупта и Гролл (1961), Гупта и Собел (1958), Хогг и Тэнис (1963), Джекобсон (1947), Ликеш (1962, 1967), Мадански (1962), Ментел и Пастернак (1966), Миллер (1960), Прошан и Пайк (1967), Рао (1962), Тэнис (1964), Тайкью (1968с), Зилен (1959).

2. *Испытания на продолжительность жизни* (*непараметрический случай*): Барлоу и Гупта (1966), Басу (1967), Эйльбот и Нэдлер (1965), Шорак (1967), Уолш (1956).

3. *Надежность*: Бэйбик (1968), Бирнбаум и Сондерс (1958), Бирнбаум и др. (1961), Изари и Прошан (1963), Джонс и Либерман (1966), Лентнер и Бюхлер (1963), Моррисон и Дэйвид (1960), Рутемиллер (1966), Сондерс (1968), Закс и Ивен (1966).

4. *Интервальный анализ*: Барнард (1953), Магуайр и др. (1952, 1953).

§ 6.5. Робастное оценивание

До сих пор в этой главе, кроме редких ссылок на непараметрические методы, мы рассматривали использование порядковых статистик в ситуациях, когда вид распределения генеральной совокупности был известен. На практике подобные допущения о распределениях встречаются редко, и возникают два типа вопросов:

1. Как построенные (и, возможно, оптимальные в некотором смысле) оценки для одного типа распределений будут себя вести, если на самом деле мы имеем дело с другими распределениями?

2. Можем ли мы построить оценки, которые ведут себя хорошо (т. е. являются робастными) для различных распределений и/или в случае загрязнения выборки посторонними наблюдениями?

Эти вопросы представляют значительный общий интерес и ни в коей мере не ограничиваются оценками, являющимися линейными функциями порядковых статистик. Тем не менее ясно, что загрязнение выборки или некоторое изменение исходного распределения скорее всего влияют на несколько наибольших и наименьших наблюдений. Наш подход (который будет продолжен в § 8.5) заключается в устранении таких экстремальных наблюдений при помощи некоторого критерия значимости и в построении оценок только на основе остающихся наблюдений. Здесь, однако, нас интересует робастность без такого предварительного отсева данных.

Рассмотрим вопросы 1 и 2 подробнее. Тьюки, которого, без сомнения, можно назвать основоположником робастного оценивания, убедительно показал (1960), что в то время как для выборки из нормальной совокупности $N(\mu, \sigma^2)$ среднее отклонение имеет асимптотическую эффективность 0,88 относительно стандартного отклонения в оценивании σ, ситуация меняется, если в нашей выборке присутствуют наблюдения из другой нормальной, скажем $N(\mu, 9\sigma^2)$, совокупности: уже 0,8-процентная примесь второй совокупности резко меняет картину. Результаты для оценивания μ не так наглядны, но тем не менее даже более важны. Для полной выборки из неизвестной генеральной совокупности никакая оценка для μ не применяется так широко, как $\bar{X}$, и не имеет таких впечатляющих достоинств: несмещенность для всех генеральных совокупностей, имеющих математическое ожидание, достаточность, полнота и отсюда полная эффективность для, скажем, нормального, пуассоновского, гамма-распределений и при достаточно широких условиях удобное асимптотически нормальное распределение, которое во многих случаях приближенно достигается даже при средних размерах выборок.

Тем не менее имеются и недостатки: эффективность среднего равна нулю для равномерного распределения, а для некоторых выборок уже одно постороннее наблюдение может сделать $\bar{X}$ бесполезным. Давно известно, что середина размаха оптимальна в первом случае, но много хуже, чем $\bar{X}$, во втором и что медиана, наоборот, предпочтительнее во втором случае, но хуже — в первом. Вывод очевиден: нельзя ожидать, что оценка будет хорошей при достаточно широких предположениях.

Кроу и Сиддики (1967) рассмотрели робастное оценивание параметра сдвига для класса $\mathscr{F}$, состоящего по крайней мере из двух представителей следующих симметричных распределений: равномерного (R), параболического (P), треугольного (T), нормального (N), двойного экспоненциального (DE) и Коши (C). Проблема состоит в исследовании различных классов оценок с целью нахождения тех из них, которые, возможно, не являясь оптимальными для любого из упомянутых выше распределений, ведут себя хорошо для всей или какой-то конкретной совокупности. Заметим, что Кроу и Сиддики не рассматривали специально случай загрязненной выборки, но оценки, которые ведут себя хорошо для распределений с «тяжелыми хвостами» (таких, как DE и C), по-видимому, являются робастными в случае присутствия аномальных наблюдений. Так как их исследования посвящены симметричным распределениям, то авторы рассматривают только оценки вида

$$Z_n(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}, \quad \text{где} \quad a_{n-i+1} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \tag{6.5.1}$$

и, в частности, для $p = \frac{1}{2} - \frac{r}{n}$ следующие оценки:

а) уинсоризованные средние

$$W_n(p) = \frac{1}{n}\left[(r+1)\left(X_{(r+1)} + X_{(n-r)}\right) + \sum_{i=r+2}^{n-r-1} X_{(i)}\right]$$

$$\left(0 < r < \frac{1}{2}(n-1)\right),$$

$W_n\left(\frac{1}{2n}\right) = X_{((n+1)/2)}$, если n нечетное; $\left(r = \frac{1}{2}(n-1)\right)$;

б) усеченные средние

$$T_n(p) = \sum_{i=r+1}^{n-r} \frac{1}{n-2r} X_{(i)};$$

в) линейно взвешенные средние

$$L_n(p)=$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n/2-r}\frac{(2j-1)\left(X_{(r+j)}+X_{(n-r+1-j)}\right)}{2\,(n/2-r)^2} & (n \text{ четное}),\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}-r}\frac{(2j-1)\left(X_{(r+j)}+X_{(n-r+1-j)}\right)+(n-2r)\,X_{((n+1)/2)}}{\left[\frac{1}{2}(n-1)-r\right]^2+\left[\frac{1}{2}(n+1)-r\right]^2} & (n \text{ нечетное});\end{cases}$$

г) медиана и две другие симметричные порядковые статистики:

$$Y_n(p,\ a)=$$
$$=\begin{cases}a\left(X_{(r+1)}+X_{(n-r)}\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(X_{(n/2)}+X_{(n/2+1)}\right) & (n \text{ четное}),\\ a\left(X_{(r+1)}+X_{(n-r)}\right)+(1-2a)\,X_{((n+1)/2)} & (n \text{ нечетное}).\end{cases}$$

Для $n=4$ возможно только $r=1$, так что (а) — (в) совпадают и представляют частный случай (г) при $a=1/2$, являющийся наиболее общей линейной систематической статистикой

$$Z_4(a)=a\left(X_{(2)}+X_{(3)}\right)+\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(X_{(1)}+X_{(4)}\right).$$

Легко показать, что $\mathsf{D}\,(Z_4(a))$ минимальна для

$$a=a_0=$$
$$=\frac{1}{2}\,(\sigma_{11}+\sigma_{14}-\sigma_{12}-\sigma_{13})/(\sigma_{22}+\sigma_{23}+\sigma_{11}+\sigma_{14}-2\sigma_{12}-2\sigma_{13}),$$

где дисперсии и ковариации для R, P, T и N предполагаются известными (глава 3)[8]).

График 6.5 дает эффективность $Z_4(a)$ относительно $Z_4(a_0)$ как функцию a. Рисунок показывает, что выборочное среднее ($a=1/4$) на самом деле является оценкой,

---

[8]) Для распределения Коши все вторые моменты бесконечны для $n=4$.

наиболее робастной для этих четырех распределений, и что оно гарантирует по крайней мере эффективность 0,8. С другой стороны, если мы допустим возможность аномальных наблюдений и ограничимся рассмотрением N и DE, то $a=0{,}36$ соответствует лучшая оценка и $Z_4(0{,}36)$ гарантирует эффективность 0,95 для этого узкого класса распределений. (Дальнейшие детали и результаты для случая $n=8, 16, \infty$ см. в работе Кроу и Сиддики (1967).) Дополнительные асимптотические результаты получены Сиддики и Раджанандананом (1967). Как асимптотические результаты, так и результаты для малых выборок в том же духе получены Гаствиртом и Коэном (1968), которые особенно обратили внимание на масштабно-загрязненные нормальные распределения (см. конец П.3.1). Филлибэн (1969) изучал робастность с помощью λ-распределения Тьюки. Несколько отличный подход к той же проблеме робастных оценок параметра сдвига для симметричных распределений был развит Бирнбаумом и Ласкои (1967) (упр. 6.5.1).

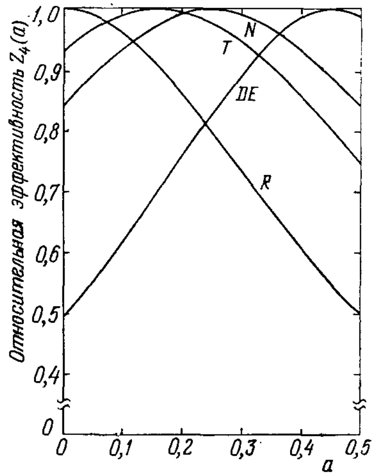


Рис. 6.5.

Ходжес и Леман (1963) указали, что для симметричных распределений любой ранговый критерий для параметра сдвига может быть преобразован в оценку для μ. Если, например, ранговым критерием является критерий Вилкоксона (для одной выборки), то оценкой будет $T = \operatorname*{med}_{i\leqslant j} M_{i,j}$, где $M_{i,j}=\frac{1}{2}(X_{(i)}+X_{(j)})$, т. е. T — медиана $\frac{1}{2}n(n+1)$ попарных средних, включающих сами наблюдения. Эта оценка имеет желаемые свойства (в случае больших выборок), и можно интуитивно ожидать, что она обладает значительной робастностью относительно аномальных наблюдений. Подобные статистики, изучаемые в интересной работе Ходжеса (1967), имеют вид

$$U = \operatorname*{med}_{i<j} M_{ij} \quad \text{и} \quad D = \operatorname*{med}_{1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]} M_{i,n-i+1}.$$

Статистика D значительно проще с точки зрения вычислений, чем две другие. Ясно, что средние значения симметрично расположенных порядковых статистик являются наиболее подходящими среди всех попарных средних для оценивания параметра μ в симметричном случае. Поэтому можно надеяться, что T ненамного эффективнее D. Ходжес показывает, что это так для $n=18$, с помощью тонкого выборочного эксперимента, находя эффективности и соответствующие стандартные отклонения $0{,}949 \pm 0{,}007$ для T, $0{,}956 \pm 0{,}006$ для U и $0{,}954 \pm 0{,}007$ для D. Как

Таблица 6.5

Эффективности усеченных и уинсоризованных средних для нормальных выборок объема 18 (из работы Ходжеса (1967))

r	Усеченные средние	Уинсоризованные средние	r	Усеченные средние	Уинсоризованные средние
0	1,00000	1,00000	5	0,82314	0,84749
1	0,97462	0,98116	6	0,78030	0,80021
2	0,94084	0,95581	7	0,73535	0,74649
3	0,90367	0,92501	8	0,68563	0,68563
4	0,86429	0,88896			

ведет себя D по сравнению с усеченными и уинсоризованными средними? Таблица 6.5 воспроизводит результаты Ходжеса для нормальных выборок объема 18, где эффективности получены из таблиц ковариаций нормальных порядковых статистик, $r=0$ соответствует выборочному среднему и $r=8$ — выборочной медиане. Мы видим, что D имеет почти такую же эффективность, как и уинсоризованное среднее W для $r=2$. Заметим, что W становится бесполезной, когда имеется $r>2$ отсутствующих или аномальных наблюдений с одной стороны, в то время как D может допускать 4 таких наблюдения. Ходжес формально определяет толерантность в этом смысле, показывая, что она равна $\frac{1}{4}(n-2)$ для D_n. Так, комбинируя эффективность для нормальных выборок и толерантность, находим, что D оказывается лучшей по крайней мере для $n=18$. Ни одна другая линейная оценка той же толерантности, что и W, не дает эффективности с точностью до трех десятичных знаков лучшей, чем W (Диксон (1960); сравните с § 7.2). Асимптотические результаты для D имеются у Бикела и Ходжеса (1967). Другой интересный подход к робастному оцениванию недавно был предложен Хоггом (1967). Примером его класса статистик является следующая оценка H центра симметричного распределения [9]):

$$H=\begin{cases} \bar{X}^C\left(\frac{1}{4}\right), & \text{если } b_2<2,\\ \bar{X}, & \text{если } 2\leqslant b_2\leqslant 4,\\ \bar{X}\left(\frac{1}{4}\right), & \text{если } 4<b_2\leqslant 5{,}5,\\ M, & \text{если } b_2>5{,}5,\end{cases}$$

где $\bar{X}^C\left(\frac{1}{4}\right)$ является средним $[n/4]$ наименьших и $[n/4]$ наибольших наблюдений, $\bar{X}\left(\frac{1}{4}\right)$ — среднее [10]) оставшихся внутренних наблюдений, $\bar{X}$ и M — выборочное среднее и медиана и b_2 — выборочный эксцесс:

$$b_2=n\sum(x_i-\bar{x})^4/\left[\sum(x_i-\bar{x})^2\right]^2.$$

Таким образом, выбор оценки зависит от предварительных вычислений (которые не обязаны ограничиваться b_2). Поскольку $\bar{X}^c\left(\frac{1}{4}\right)$ имеет хорошие свойства в области $\beta_2<2$, где β_2 — эксцесс генеральной совокупности, и т. д., можно ожидать, что H ведет себя хорошо и даже несколько лучше, чем статистика T Ходжеса и Лемана, что и показал Хогг с помощью выборочного эксперимента для 200

---

[9]) H — наш символ; у Хогга — T.

[10]) $\bar{X}\left(\frac{1}{4}\right)=T_n\left(\frac{1}{4}\right)$, когда $n/4$ целое. Это статистика пользуется признанием как общая робастная оценка в случае, когда имеется мало информации о генеральном распределении (Тьюки, Кроу, Сиддики, Гаствирт и Коэн).

выборок объема $n=7$ и 25 из каждого из четырех симметричных распределений с приближенными значениями $\beta_2=1{,}9$; 2,7; 3,9; 9,9. Другие работы по робастному оцениванию основаны на асимптотической теории. Следует отметить работы Бикела (1965), Гаствирта (1966), Гаствирта и Рубина (1969) и Хубера (1964). Для выборок объема 20 из нормального распределения, загрязненного другим нормальным распределением, Леони и др. (1969) сравнили при помощи метода Монте-Карло оценки Хубера с выборочным средним и оценками Ходжеса — Лемана. Уделялось внимание и распределению оценок. Упомянем здесь предложение Тьюки и Маклафлина (1963) оценивать математические ожидания симметричных распределений при помощи подходящим образом усеченного варианта (усечение и числителя, и знаменателя) статистики Стьюдента t. Они рекомендуют такую статистику для общего использования (в случае симметричных распределений), так как она защищает от влияния аномальных наблюдений и является обоснованно робастной для распределений с «тяжелыми хвостами», т. е. таких, которые часто встречаются на практике. Соответствующее уинсоризованное t исследовалось Диксоном и Тьюки (1968). (См. также обзорную статью Хубера (1968).)

Упражнения

6.1.1. Пусть $u(x)$ непрерывна. Дифференцированием по θ показать, что из (6.1.1) следует $u(x)=0$ для всех $x\geqslant 0$. Если $u(x)$, вообще говоря, не является непрерывной, то запишем $u(x)=u^+(x)-u^-(x)$, где u^+ и u^-, соответственно, положительная и отрицательная часть $u(x)$. Показать, что в этом случае из (6.1.1) следует, что $u(x)=0$ почти наверное для $x\geqslant 0$ (Леман (1964)).

6.1.2. Для равномерного распределения из примера 6.1.2 найти выражения для эффективности медианы как оценки μ в случаях четного и нечетного n. Показать, что в обоих случаях асимптотическая эффективность равна нулю.

6.1.3. Обсудить оценивание θ в следующем случае:

$$p(x,\ \theta)=1/\theta,\quad \text{если}\quad k\theta\leqslant x\leqslant(k+1)\,\theta;\quad \theta>0,\quad k>0$$

(Кендалл и Стьюарт (1973), стр. 52).

6.1.4. Показать, что наименьший доверительный интервал для θ в (6.1.5) для коэффициента доверия $1-\alpha$ имеет вид

$$C^{-1}\left[\alpha^{-1/n}C(z)\right]\leqslant\theta\leqslant z$$

(Хузурбазар (1955)).

6.1.5. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ — максимумы, соответственно, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$ с. в., независимых и имеющих общее $R(0, 1)$ распределение. Тогда плотность распределения с. в. Y_i имеет вид

$$f(y_i) = n_i y_i^{n_i - 1}, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant y_i \leqslant 1.$$

Пусть также

$$z = \max_i y_i, \quad u = \prod_{i=1}^{k} y_i^{n_i}, \quad v = u/z^n.$$

Доказать, что

(а) $$-2 \log U \sim \chi^2_{2k};$$

(б) $$-2 \log V \sim \chi^2_{2(k-1)}$$

(во втором случае показать вначале, что V и Z статистически независимы) (Хогг (1956)).

6.1.6. Пусть X имеет плотность распределения $p(x; \theta) = C(\theta) g(x)$, если $a \leqslant x \leqslant b(\theta)$, и $p(x, \theta) = 0$ для других x, где $g(x)$ — однозначная положительная непрерывная функция x и $b(\theta)$ строго возрастает по θ. Пусть Y_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и Z определены, как в упр. 6.1.5, за исключением того, что Y_i — теперь максимум n_i с. в. с плотностью $p(y_i, \theta_i)$. Показать, что отношение правдоподобия λ для проверки гипотезы H_0: $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k$ $(k > 1)$ против общей альтернативы равно $[C(t)]^n / \prod_{i=1}^{k} [C(t_i)]^{n_i}$, где $t_i = b^{-1}(y_i)$ и $t = b^{-1}(z)$, и что при условии H_0 величина $-2 \log \lambda$ имеет распределение $\chi^2_{2(k-1)}$ (Хогг (1956)).

6.2.1. Проверить, что для с. в. X, равномерной на отрезке $\left(\mu - \frac{1}{2}\omega, \mu + \frac{1}{2}\omega\right)$, метод Ллойда дает оптимальные оценки M и W' из примера 6.1.2 (Ллойд (1952)).

6.2.2. Показать, что для правотреугольного распределения с плотностью $p(x) = \frac{(x-\mu)/\sigma + 2\sqrt{2}}{9\sigma}$ для $\mu - 2\sqrt{2}\,\sigma \leqslant x \leqslant \mu + \sqrt{2}\,\sigma$ справедливы соотношения

$$\alpha_r = \frac{6\alpha'_r - 4}{\sqrt{2}}, \quad \text{где} \quad \alpha'_r = \frac{n(n-1)\ldots(r+1)\,r \cdot 2^{n-r+1}}{(2n+1)(2n-1)\ldots(2r+3)(2r+1)},$$

$$\beta_{rr} = 18\left(\frac{r}{n+1} - \alpha'^2_r\right),$$

$$\beta_{rs} = \frac{(s-1)(s-2)\ldots(r+1)\,r \cdot 2^{s-r} \cdot \beta_{ss}}{(2s-1)(2s-3)\ldots(2r+3)(2r+1)} \qquad (r < s),$$

и что оценками для μ и σ являются

$$\mu^* = \frac{n-1}{3}\left[\sum \frac{1}{i} X_{(i)} + 2X_{(1)} + \frac{2n+1}{n-1} X_{(n)} \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}\right] \Big/ \left(n \sum \frac{1}{i} - 1\right),$$

$$\sigma^* = \frac{2n-1}{6\sqrt{2}}\left[\left(\sum \frac{1}{i} + 2\right) X_{(n)} - 2X_{(1)} - \sum \frac{1}{i} X_{(i)}\right] \Big/ \left(n \sum \frac{1}{i} - 1\right)$$

(Даунтон (1954)).

6.2.3. Показать, что в случайной выборке из любой генеральной совокупности, зависящей только от параметров сдвига и масштаба, среднее и размах некоррелированы, если

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{in}$$

(Айяр (1963)).

6.2.4. Показать, что если σ в (6.2.1) известно, то наилучшая линейная несмещенная (НЛН) оценка $^*\mu$ для μ и ее дисперсия даются соотношениями

$$^*\mu = \mu^* - (\sigma^* - \sigma) \operatorname{cov}(\mu^*, \sigma^*)/D\sigma^*,$$

$$D^*\mu = D\mu^* - [\operatorname{cov}(\mu^*, \sigma^*)]^2/D\sigma^*,$$

и что соответствующие результаты для σ в случае, когда μ — известный параметр, получаются после перестановки μ и σ (Хадсон (1968)).

6.2.5. Показать, что когда одна из величин σ и μ известна, несмещенная почти наилучшая оценка Блома другой величины имеет вид, соответственно,

$$\bar{\mu} = \frac{1}{d_{11}}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i (C_{1i} - C_{1,\,i-1}) X_{(i)} - \sigma d_{12}\right]$$

и

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{d_{22}}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i (C_{2i} - C_{2,\,i-1}) X_{(i)} - \mu d_{12}\right]$$

(Блом (1958), стр. 121).

6.3.1. Для двухсторонне цензурированной (r_1 наблюдений слева и r_2 — справа) выборки из равномерного распределения с плотностью

$$p(x) = 1/\omega, \quad \text{если} \quad \mu - \omega/2 \leqslant x \leqslant \mu + \omega/2,$$

получить следующие результаты в обозначениях § 6.2:

$$\Omega=(n+1)(n+2)\begin{bmatrix} \frac{r_1+2}{r_1+1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & 2 & -1 & \dots & 0 \\ & & 2 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & \frac{n+1}{(n-r_2)(r_2+1)}+\frac{n-r_2-1}{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\mu^*=\frac{1}{2}\left[(n-2r_2-1)X_{(r_1+1)}+(n-2r_1-1)X_{(n-r_2)}\right]/(n-r_1-r_2-1),$$

$$\omega^*=\frac{n+1}{n-r_1-r_2-1}\left(X_{(n-r_2)}-X_{(r_1+1)}\right),$$

$$\mathsf{D}\mu^*=\frac{(r_1+1)(n-2r_2-1)+(r_2+1)(n-2r_1-1)}{4(n+1)(n+2)(n-r_1-r_2-1)}\,\omega^2,$$

$$\mathsf{D}\omega^*=\frac{r_1+r_2+2}{(n+2)(n-r_1-r_2-1)}\,\omega^2$$

(Сархаи (1955), Сархаи и Гринберг (1959)).

6.3.2. Для II типа цензурированной выборки $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\dots\leqslant x_{(N)}$ из распределения с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 положим

$$\bar{x}_{N-1}=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}x_{(i)},\qquad \zeta_{10}=\mathsf{E}\left((\bar{X}_{(N-1)}-\mu)/\sigma\right),$$

$$\zeta_{01}=\mathsf{E}\left((\bar{X}_{(N)}-\mu)/\sigma\right),$$

$$\eta_{ij}=\sigma^{-2(i+j)}\,\mathsf{E}\left\{\left[\sum_{t=1}^{N-1}(X_{(t)}-X_{(N)})^2\right]^i\left[\sum_{t=1}^{N-1}(X_{(t)}-X_{(N)})\right]^{2j}\right\}$$

$$(i,\ j=0,\ 1,\ 2).$$

Показать, что следующие оценки, симметричные относительно $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(N-1)}$, являются несмещенными, соответственно, для μ и σ^2:

$$\varepsilon\bar{X}_{N-1}+(1-\varepsilon)X_N,\qquad \text{где}\qquad \varepsilon=\zeta_{01}/(\zeta_{01}-\zeta_{10});$$

$$\alpha\sum_{i=1}^{N-1}(X_{(i)}-X_{(N)})^2+\beta\left[\sum_{i=1}^{N-1}(X_{(i)}-X_{(N)})\right]^2,$$

где

$$\alpha=(\eta_{10}\eta_{02}-\eta_{01}\eta_{11})/(\eta_{10}^2\eta_{02}+\eta_{01}^2\eta_{20}-2\eta_{10}\eta_{01}\eta_{11}),$$

$$\beta=(\eta_{01}\eta_{20}-\eta_{10}\eta_{11})/(\eta_{10}^2\eta_{02}+\eta_{01}^2\eta_{20}-2\eta_{10}\eta_{01}\eta_{11}),$$

и что вторая оценка имеет минимальную дисперсию по (α, β) (Со (1959)).

6.4.1. Пусть x_{ij} $\left(i=1, 2, \ldots, k;\ j=1, 2, \ldots, n_i;\ \sum_{i=1}^{k} n_i = N\right)$ — k независимых выборок с x_{ij}, имеющими плотность распределения $\frac{1}{\sigma}\exp(-(x-\theta_i)/\sigma)$ $(x \geqslant \theta_i)$. Пусть

$$x_{i(1)} = \min_j x_{ij} \quad \text{и} \quad x_{(1)(1)} = \min_{i,\, j} x_{ij}.$$

Показать, что равенство всех θ_i можно проверить с помощью выражения

$$\frac{\sum_i n_i (x_{i(1)} - x_{(1)(1)})/(k-1)}{\sum_i \sum_j (x_{ij} - x_{i(1)})/(N-k)}$$

и таблиц F-отношения с $2(k-1)$ и $2(N-k)$ степенями свободы (Сукхатме (1937)).

6.4.2. Пусть x_i $(i=1, 2, \ldots, m)$, y_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ — независимые выборки с плотностями распределения

$$p(x) = \sigma_x^{-1} \exp(-(x-\theta)/\sigma_x) \qquad (x \geqslant \theta)$$

и

$$p(y) = \sigma_y^{-1} \exp(-(y-\theta)/\sigma_y) \qquad (y \geqslant \theta),$$

соответственно. Пусть также $u = 2m(x_{(1)} - y_{(1)})/\sigma_x$ для $x_{(1)} > y_{(1)}$, $v = 2n(y_{(1)} - x_{(1)})/\sigma_y$ для $y_{(1)} > x_{(1)}$ и $w = v$ для $y_{(1)} > x_{(1)}$ и $w = u$ для $x_{(1)} > y_{(1)}$. Показать, что

(а) $\mathsf{P}\{Y_{(1)} > X_{(1)}\} = \dfrac{m/\sigma_x}{m/\sigma_x + n/\sigma_y}$;

(б) U, V, W имеют распределение χ^2 с 2 степенями свободы (Эпстейн и Цао (1953)).

6.4.3. Испытание на продолжительность жизни для n изделий с независимыми временами жизни X_i, имеющими плотность распределения

$$\frac{1}{\sigma}\exp(-x/\sigma) \qquad (x \geqslant 0),$$

кончается, как только N изделий выйдут из строя, или в момент x_0 (в зависимости от того, что наступит раньше). Показать, что при этой процедуре:

а) ожидаемое число отказов равно

$$np \sum_{i=1}^{N-1} C_{n-i}^{i} p^i (1-p)^{n-i-1} + N \sum_{i=N}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i},$$

где $p = 1 - \exp(-x_0/\sigma)$;

б) ожидаемая продолжительность испытания равна

$$\sum_{i=1}^{N-1} C_n^i p^i (1-p)^{n-1-i} \mathsf{E} X_{(i)} + \sum_{i=N}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \mathsf{E} X_{(N)},$$

где

$$\mathsf{E} X_{(r)} = \sigma \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-r+1} \right) \qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Вывести также соответствующие результаты, если изделие заменяется мгновенно после выхода из строя так, что в испытании всегда участвуют n изделий. (Эпстейн (1954)).

6.4.4. Показать, что для II типа цензурированной выборки из равномерного $R(0,\ 1)$ распределения статистика

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_{(i)} + (m-N) X_{(N)} \qquad (m > N-1)$$

имеет плотность распределения

$$f(y) = \frac{n}{(N-1)!} \left\{ C_{N-1}^0 \frac{(m-y)^{n-1}}{m^{n-N+1}} - C_{N-1}^1 \frac{(m-y-1)^{n-1}}{(m-1)^{n-N+1}} + \ldots \right\}$$

$$(0 \leqslant y \leqslant m),$$

где m не обязательно целое число и суммирование продолжается до тех пор, пока $m-y$, $m-1-y$, ... остаются положительными.

Указание. Показать вначале, что совместная плотность с. в. $V = X_{(N)}$ и $W = \sum_{i=1}^{N-1} X_{(i)}/X_{(N)}$ имеет вид

$$f(v,\ w) = f(v) f(w \mid v) =$$

$$= \frac{n!}{(N-1)!\,(n-N)!} v^{N-1} (1-v)^{n-N} \cdot \frac{1}{(N-2)!} \left\{ C_{N-1}^0 w^{N-2} - \right.$$

$$\left. - C_{N-1}^1 (w-1)^{N-2} + \ldots \right\} \qquad (0 \leqslant v \leqslant 1;\ 0 \leqslant w \leqslant N-1)$$

(Гупта и Собел (1958)).

6.4.5. Показать, что для выборки объема n из генеральной совокупности с плотностью $p(x) = \frac{1}{\sigma} \exp(-(x-\theta)/\sigma)$ $(x \geqslant 0)$ с r_1 наблюдением, опущенным слева и r_2 — справа, НЛН оценка имеет вид

$$\theta^* = C \left\{ \left[\frac{1}{C} + (n-r_1) \sum_{i=1}^{r_1+1} \frac{1}{n-i+1} \right] x_{(r_1+1)} - \right.$$

$$\left. - \left(r_2 \sum_{i=1}^{r_1+1} \frac{1}{n-i+1} \right) x_{(n-r_2)} - \sum_{i=1}^{r_1+1} \frac{1}{n-i+1} \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} x_{(i)} \right\}$$

и

$$\sigma^* = C\left[\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} x_{(i)} - (n-r_1)\,x_{(r_1+1)} + r_2 x_{(n-r_2)}\right],$$

где $1/C = n - r_1 - r_2 - 1$.

Получить также, что

$$\mathrm{D}\theta^* = \left[C\left(\sum_{i=1}^{r_1+1}\frac{1}{n-i+1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{r_1+1}\frac{1}{(n-i+1)^2}\right]\sigma^2$$

и $\mathrm{D}\sigma^* = C\sigma^2$ (Сархан (1955)).

6.4.6. Пусть $p(x) = \frac{1}{\sigma}\exp(-x/\sigma)$ $(x \geqslant 0)$ и C_L — с. в., равная $\int\limits_{L(X)}^{\infty} p(x)\,dx$, где $L(X)$ — функция выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Нужно найти толерантный интервал $(L(X), \infty)$ такой, что $\mathrm{P}\{C_L \geqslant \gamma\} = \beta$ и $\mathrm{P}\{C_L \geqslant \gamma'\} \leqslant \delta$ для $\gamma' > \gamma$. Показать, что

$$L(X) = 2(-\log\gamma)\left[\sum_{i=1}^{r} X_{i:n} + (n-r)\,X_{r:n}\right]\Big/\chi^2_{1-\beta}(2r)$$

удовлетворяет обоим требованиям, если r выбрано настолько большим, что $\frac{\log\gamma'}{\log\gamma}\chi^2_{1-\beta}(2r) \leqslant \chi^2_{1-\delta}(2r)$ (тогда можно выбрать $n \geqslant r$) (Фолкенберри и Уикс (1968)).

6.5.1. Пусть X имеет плотность $(1/\sigma)\,g((x-\mu)/\sigma, \lambda)$, где λ — неизвестный параметр формы. Предположим, что $g(y, \lambda)$ симметрична по $y = (x-\mu)/\sigma$ для данного $\lambda \in \Lambda$. Обозначим

$$\mathrm{E}(Y_{(r)} \mid \lambda) = \alpha_r^{\lambda}, \quad \operatorname{cov}(Y_{(r)}, Y_{(s)} \mid \lambda) = \beta_{rs}^{\lambda}.$$

Далее, предположим, что λ имеет ф. р. $H(\lambda)$, и определим

$$\alpha_r^H = \mathrm{E}\left(Y_{(r)} \mid H\right) = \int\limits_{\Lambda} \alpha_r^{\lambda}\,dH(\lambda),$$

и пусть β_{rs}^H — ковариация $Y_{(r)}, Y_{(s)}$ в этом виде смеси. Показать, что

(а) $B_{rs}^H = \int \beta_{rs}^{\lambda}\,dH(\lambda) + \int \alpha_r^{\lambda}\alpha_s^{\lambda}\,dH(\lambda) - \int \alpha_r^{\lambda}\,dH(\lambda)\int \alpha_s^{\lambda}\,dH(\lambda)$;

(б) если α_r^H, β_{rs}^H даны, то μ можно оценить в этой модели при помощи теоремы Гаусса — Маркова с помощью

$$\mu_H^* = \frac{1'\Omega^H X}{1'\Omega^H 1}, \quad \text{где} \quad \Omega^H = (B^H)^{-1} = \left(\beta_{rs}^H\right)^{-1},$$

и

$$\mathsf{D}\mu_H^* = \frac{\sigma^2}{\mathit{1}'\Omega^H \mathit{1}};$$

(в)
$$\mathsf{E}(\mu_H^* \mid \lambda) = \mu,$$

$$\mathsf{D}(\mu_H^* \mid \lambda) = \frac{\sigma^2 \mathit{1}'\Omega^H B^\lambda \Omega^H \mathit{1}}{(\mathit{1}'\Omega^H \mathit{1})^2}.$$

Взяв в качестве $H(\lambda)$ двухточечное распределение с $h = \mathsf{P}\{\lambda = 1\}$ и $1 - h = \mathsf{P}\{\lambda = 0\}$, указать, как, используя предыдущий подход, можно определить «наиболее робастную смесь» двух распределений, т. е. смесь, максимизирующую минимальную эффективность относительно НЛН оценки при каждом из распределений (Бирнбаум и Ласка (1967)).

6.5.2. Показать, что для выборок объема $n = 2m + 1$ ($m = 0$, 1, 2, ...) из распределения Коши с плотностью $p(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \mu)^2)}$ усеченное среднее

$$\frac{1}{n - 2[nk]} \sum_{i = m - [nk]}^{m + [nk]} X_{(i)} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 1/2)$$

является несмещенной оценкой для μ с асимптотической дисперсией

$$\frac{1}{nk}\left[\frac{1-k}{k}\operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\pi k\right) + \frac{2}{\pi k}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi k\right) - 1\right]$$

(минимум достигается при $k = 0{,}24$) (Ротенберг и др. (1964)).

ГЛАВА 7

«БЫСТРЫЕ» ПРОЦЕДУРЫ

§ 7.1. Введение

В то время как в главе 6 мы рассматривали главным образом процедуры оценивания и проверки гипотез, оптимальные в некотором смысле, мы теперь обратимся к методам, предназначенным главным образом для нормальных выборок; основным достоинством этих методов является их простота. В некоторых случаях учитываются и другие достоинства, такие, например, как робастность (см. ранние работы Бенсона (1949)). Цензурированные наблюдения, для которых оптимальные методы могут быть весьма трудоемкими, дают широкие возможности для существенного облегчения работы. В этом введении мы проиллюстрируем кратко ряд общих свойств «быстрых» *) методов на примере выборочного размаха w, пожалуй, наиболее широко используемой из всех «быстрых» статистик. Правда, вычислительные преимущества w, по сравнению с выборочным стандартным отклонением $s=[\Sigma(x_i-\bar{x})^2/(n-1)]^{1/2}$, становятся все менее важными ввиду появления быстродействующих вычислительных машин, но остаются преимущества, связанные с простотой w и возможностью для неспециалистов применять эту статистику. Так, w почти совсем вытеснила s из контроля качества, где выборки небольших объемов берутся через короткие интервалы времени и их средние значения и размахи отмечаются на графике (§ 7.9).

Хотя мы здесь и рассматриваем размах с точки зрения быстроты получения оценок, следует отметить, что имеются

*) В оригинале: short-cut. *(Прим. перев.)*

ситуации, в которых размах является единственно возможной или наиболее подходящей оценкой. Так, размах моментов появления n событий является наиболее подходящей оценкой одновременности событий (см. также работу Эйзенхарта и др. (1947), гл. 5), где описываются другие случаи применения размаха).

Таблицы процентных точек размаха и стьюдентизированного размаха приводятся в П.2.3 и П.5.2, соответственно. Независимость W (подобно независимости S) от $\bar{X}$ в случае нормальных выборок была отмечена в § 2.7. Можем ли мы, учитывая эти основные положения, использовать W широко в оценивании и проверке гипотез? Можем (хотя и не так широко, как S), правда, применяя при этом дополнительные таблицы, а иногда и приближения. Подходящие таблицы имеются для многих целей, делая очень простым математический аппарат, использующий размах (см. § 7.3 с точки зрения оценивания и § 7.7 с точки зрения проверки гипотез). В этих параграфах рассматриваются также вопросы эффективности, мощности и робастности. Спрашивается: в какой степени «быстрые» методы дают те же самые выводы, что и стандартные, когда и те и другие применяются к одним и тем же наблюдениям? Этот вопрос был экспериментально исследован еще в 1935 г. Пирсоном и Хэйнесом, которые построили графики для ряда небольших выборок реальных наблюдений. С помощью известного стандартного отклонения σ они нанесли на свои диаграммы значения нескольких верхних и нижних процентных точек как для W, так и для S, так что можно было получить для любой выборки соответствующие уровни значимости и непосредственно сделать выводы. Более теоретические подходы были развиты Коксом (1956) и Дэйвидом и Перезом (1960). Хотя W и S не являются нормально распределенными, ответ на поставленный вопрос, по крайней мере для нормальных выборок, можно получить, рассматривая коэффициент корреляции $\rho(W, S)$. Его легко найти из соотношения $\rho(W, S) = (\mathrm{eff}\,\hat{\sigma}_w)^{1/2}$, где $\mathrm{eff}\,\hat{\sigma}_w$ — эффективность оценки $\hat{\sigma}_w$, приведенная в таблице 7.3.1 (см. также упр. 7.1.1). «Быстрые» оценки разброса, отличные от размаха и его среднего значения, обсуждаются в § 7.4, «быстрые» же оценки параметра сдвига — в § 7.2 и, наконец, «быстрые» оценки для двумерных выборок — в § 7.5.

Наибольшее сомнение с точки зрения помещения в этой главе вызывают методы, использующие оптимальные наборы порядковых статистик (§ 7.6). Это «быстрые» процедуры для оценивания параметров в средних и больших выборках, основанные на k ($k \ll n$) порядковых статистиках, выбранных так, чтобы обеспечить асимптотическую оптимальность оценок в классе линейных функций k порядковых статистик.

Вероятностные графические методы (§ 7.8), несмотря на то, что они не новы, вновь обрели признание в последние годы и играют возрастающе важную роль в неформальных методах анализа наблюдений. Статистический контроль качества, во многом зависящий от использования размаха, вкратце рассмотрен в § 7.9.

§ 7.2. «Быстрые» оценки параметра сдвига

Если учитывать вычислительную простоту выборочного среднего, другие оценки параметра сдвига могут показаться несоответствующими содержанию этой главы, имеющей дело с «быстрыми» процедурами. Для полных выборок это, конечно, так, но положение меняется, если мы рассматриваем цензурированные наблюдения. Но даже и в полных выборках другие методы оценивания могут иметь преимущества с точки зрения робастности, как уже обсуждалось в § 6.5. Здесь мы ограничимся простыми оценками (старейшей, наиболее робастной и простейшей из них является выборочная медиана M). Для нормальных выборок исследования распределения и моментов M восходят к работам Хойо (1931, 1933), К. и М. Пирсонов (1931). Несколько позже Кэдуэлл (1952) исследовал приближения плотности распределения M, которые дают результаты, очень близкие к реальным значениям $\sigma^2(M)$ и $\beta_2(M)$, даже для малых выборок (см. упр. 7.2.1 для нечетных n).

Так как $\beta_2(M) = 3{,}0347$ для $n = 3$ и еще ближе к 3 для больших n, тенденция к нормальности проявляется довольно быстро. Чу (1955) подтвердил этот результат теоретически. Однако простая асимптотическая формула $\sigma^2(M) = [4n(p(\mu))^2]^{-1}$ не дает такого же хорошего приближения к точной дисперсии. Чу и Хотеллинг (1955) исследовали поэтому множество приближенных методов, применимых также к другим генеральным совокупностям. Один из этих методов в дальнейшем изучался Сиддики (1962), который сравнивал приближенные и точные значения $\sigma^2(M)$ в нечетных выборках для распределений: равномерного, нормального, экспоненциального, Коши и с плотностями $p_1(x)=\frac{1}{\pi}(1-x^2)^{-1/2}$ $(x^2\leqslant 1)$, $p_2(x)=\frac{3}{4}(1-x^2)$ $(x^2\leqslant 1)$ и $p_3(x)=\frac{1}{2}\exp(-|x|)$. Ходжес и Леман (1967) табулировали эффективность M для нормальных выборок в случае $n\leqslant 20$ как точно, так и с помощью обычных асимптотических формул, взятых с точностью до порядка $1/n$ (см. также упр. 4.5.1). Хотя эта эффективность больше, чем асимптотическое значение $2/\pi\approx 0{,}637$, она не является высокой, будучи равной 0,743 для $n=3$, 0,838 для $n=4$ и принимая еще меньшие значения для больших значений n. Это, конечно, основная причина для отыскания других оценок параметра сдвига, желательно еще и робастных.

Диксон (1957) дал для нормальных выборок объема $n\leqslant 20$ эффективности усеченного среднего $T=\frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1}X_{(i)}$ и двухточечного среднего $\frac{1}{2}(X_{(i)}+X_{(j)})$, где i и j выбраны из условий максимальной эффективности. Интересно отметить, что эффективность T относительно НЛНО (наилучшей линейной несмещенной оценки) всегда не меньше 0,99, в то время как для двухточечного среднего лишь немного выше своего асимптотического значения 0,81. Для $n>5$ оптимальные i и j близки 27- и 73-процентным точкам, которые находятся из асимптотической теории (§ 7.6). Для цензурированных наблюдений Диксон (1960) предложил рассматривать уинсоризованные средние

$$W=\frac{1}{n}[(i+1)X_{(i+1)}+X_{(i+2)}+\ldots+X_{(n-1-i)}+(i+1)X_{(n-i)}]$$

в случае, когда i наблюдений цензурировано с одной стороны и $j\leqslant i$ — с другой. Хотя эта оценка и не использует $i-j$ наблюдений, эффективность W относительно НЛНО, основанной на всех имеющихся $n-i-j$ наблюдениях, не меньше 0,956 для $n\leqslant 20$ и $i\leqslant 6$ $(n\geqslant 2i+1)$.

Другой оценкой параметра сдвига является середина размаха $\frac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})$. Эта оценка, конечно, не является робастиой к аномальным наблюдениям. Однако она оптимальна для равномерной генеральной совокупности (§ 6.1) и сохраняет хорошие свойства для других симметричных распределений с конечным диапазоном значений и малыми значениями эксцесса β_2 (Райдер (1957)).

Хартер (1961 b, 1964 a) обсудил оценивание параметров отрицательного экспоненциального распределеиия с помощью одной или двух порядковых статистик. Для однопараметрического экспоненциального распределения он дал как точные оценки, так и доверительные интервалы, основанные на наилучших одиночных порядковых статистиках. Так как выборочное среднее — оптимальная оценка, то наша основная цель, как и раньше, состоит в получении оценок, которые можно было бы использовать даже в том случае, когда некоторые из максимальных по величиие наблюдений цензурированы или иенадежны.

§ 7.3. Размах и средний размах как оценки разброса

Точное распределеиие размаха W в непрерывных выборках получено в § 2.3. Результаты для дискретных генеральных совокупностей даны в упр. 2.4.2. Для нормальиого $N(\mu, \sigma^2)$ случая, с которым мы главным образом будем здесь иметь дело, имеются обширные таблицы процентиых точек, ф. р. и моментов с. в. W (см. П.2.3 и П.3.2). Весьма простая несмещенная оценка $\hat{\sigma}_w$ для σ получается умножением W на $1/d_n$, где $d_n = \mathsf{E}(W/\sigma)$ для нормальной выборки объема n. В таблице 7.3.1 приведены значения $1/d_n$ вместе с

$$\text{eff}\ \hat{\sigma}_w = \mathsf{D}S'/\mathsf{D}\hat{\sigma}_w,$$

где S' — несмещенная среднеквадратичная оцеика для σ, которая, как известно, является РМДН (равномерно минимизирующей дисперсию несмещенной) оценкой, а именно,

$$S' = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\left[\sum (X_i - \bar{X})^2\right]^{1/2}. \tag{7.3.1}$$

Из таблицы видно, что эффективность $\hat{\sigma}_w$ приемлема для $n \leqslant 12$ и очень хорошая для выборок малого объема (обычио $n=5$), употребляемых, как правило, при контроле качества. Для $n>12$ эффективность можно увеличить случайным делением выборки объема n на малые подвыборки, оптимальным для которых является объем 8 (Граббс и Уивер (1947)). Однако, учитывая произвольность разбиения выборки, предпочтительиым является одии из методов следующей части. Средний размах $w_{n,k}$, являющийся средним из k размахов для выборок объема n, играет важиую роль в оценивании σ в однофакторной классификации k групп по n наблюдений $\left(\hat{\sigma}_{\bar{w}} = \bar{w}_{n,k}/d_n\right)$ и соответствующем дисперсионном анализе (см. § 7.7).

Таблица 7.3.1

Множители и эффективности для оценок $\hat{\sigma}_w = W/d_n$ параметра σ

n	$1/d_n$	eff $\hat{\sigma}_w$	d_n^2/V_n	n	$1/d_n$	eff $\hat{\sigma}_w$	d_n^2/V_n
2	0,886	1	1,75	12	0,307	0,814	17,5
3	0,591	0,992	3,63	13	0,300	0,797	18,8
4	0,486	0,975	5,48	14	0,294	0,781	19,9
5	0,430	0,955	7,25	15	0,288	0,766	21,1
6	0,395	0,933	8,93	16	0,283	0,751	22,2
7	0,370	0,911	10,53	17	0,279	0,738	23,3
8	0,351	0,890	12,06	18	0,275	0,725	24,3
9	0,337	0,869	13,52	19	0,271	0,712	25,3
10	0,325	0,850	14,91	20	0,268	0,700	26,3
11	0,315	0,831	16,2				

Приближения к среднему размаху. В то время как эффективность $\hat{\sigma}_{\bar{W}}$ для нормальных выборок можно легко найти из таблиц, точное распределение $\bar{W}_{n,k}$ (или для простоты $\bar{W}$) малопригодно для использования при $k>1$ (см., например, Блэнд и др. (1966)). Имеется, однако, ряд полезных приближений, а именно,

(1) $\bar{W}/\sigma = c\chi_\nu/\nu^{1/2}$ (Патнайк (1950));

(2) $\bar{W}/\sigma = c\chi_\nu^2/\nu$ (Кокс (1949));

(3) $\bar{W}/\sigma = (\chi_\nu^2/c)^\alpha$ (Кэдуэлл (1953b)).

Постоянные ν и c в (1) и (2) определяются из равенства первых двух моментов левой и правой частей. Для трехпараметрического приближения (3) используется также равенство третьих моментов. В общем, приближения становятся более точными с увеличением k (для данного n), так как все они, а также $\overline{W}$ асимптотически нормальны. Полагая $\overline{W}$ нормально распределенной, можно, конечно, получить точность, достаточную для некоторых целей. Для размаха (т. е. в случае $k=1$), когда приближения наиболее исследованы, Пирсон (1952) детально сравнил (1) и (2) для $n=4$, 6, 10, 15. Он вывел, что для $n<10$ более точно χ-приближение, при $n=10$ разница почти незаметна, а для $n>10$ уже лучше χ^2-приближение. Приближение (3) заметно точнее и используется всякий раз, когда требуется особенно хорошее представление размаха (см. также Пиллаи (1950)).

При таком разнообразии достаточно точных приближений возможна существенная гибкость. Наиболее популярно χ-приближение, так как в дополнение к его высокой точности при малых n оно делает $\overline{W}$ пропорциональным $S_\nu=\sigma\chi_\nu/\nu^{1/2}$. Оно сразу допускает упрощение таких критериев, как критерий Стьюдента t, путем замены обычных среднеквадратичных оценок для σ на $\overline{W}/c$, при этом единственным изменением является небольшое уменьшение числа степеней свободы (см. § 7.6). Все приближения позволяют заменить отношения дисперсий на отношения размахов или их степеней. Полезность этих трех приближений опирается, конечно, на доступность соответствующих таблиц. Их просто получить в случае (2), для которого ясно, что

$$c=d_n,\quad \nu=2kd_n^2/V_n, \tag{7.3.2}$$

где $V_n=\mathrm{D}\,(W/\sigma)$ для нормальных выборок объема n. Отношение d_n^2/V_n табулировано в таблице 7.3.1. Соответственно, (1) дает

$$\left.\begin{aligned} d_n&=\frac{c\sqrt{2}}{\nu^{1/2}}\,\frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)}=\\ &=c\left(1-\frac{1}{4\nu}+\frac{1}{32\nu^2}+\frac{5}{128\nu^3}-\frac{21}{2048\nu^4}-\ldots\right),\\ \frac{V_n}{k}&=\mathrm{E}\,(c\chi_\nu/\nu^{1/2})^2-(\mathrm{E}\,(c\chi_\nu/\nu^{1/2}))^2=c^2-d_n^2.\end{aligned}\right\} \tag{7.3.3}$$

Таким образом, c легко находится из (7.3.3), в то время как ν удобнее получать обращением разложения (по степеням $1/\nu$) выражения $A = 2V_n/kd_n^2$. Это дает

$$\nu = A^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16}A + \frac{3}{64}A^2 + \frac{33}{256}A^3 - \frac{105}{1024}A^4 \ldots \qquad (7.3.4)$$

Таблица 7.3.2 дает значения ν и c для $n \leqslant 10$ и всех k [1]). Заметим, что эта таблица сразу дает приближенную меру эффективности оценки $\hat{\sigma}_w$ через соответствующие эквивалентные степени свободы. Так, для $n = 6$, $k = 5$ мы имеем $\nu = 22{,}6$ против 25 степеней свободы для среднеквадратичной оценки.

Для размаха Граббс и др. (1966) оценили величины c и ν для приближения Патнайка другими методами такими, как приравнивание математических ожиданий и дисперсий для W^2/σ^2 в (1). Оказывается, что так можно получить гораздо лучшее, чем у Патнайка, приближение верхних процентных точек для W. По поводу приближений, а по существу интерполяционных формул, применимых также для больших n ко многим различным величинам, относящимся к размаху, например, d_n, V_n, $w_{0,05}$, см. работу Тьюки (1955).

Эффект отсутствия нормальности. В ряде элементарных учебников утверждается, что размах, поскольку он включает только экстремальные наблюдения, неизбежно связан с неэффективностью и большой чувствительностью к виду исходного распределения. Мы убедились, что первое утверждение вводит в заблуждение: потеря в эффективности не имеет практической важности в обычных применениях, в которых обычно рекомендуются оценки для σ, связанные с размахом. Второе утверждение даже еще менее обосновано: имеются основания полагать, что $\hat{\sigma}_w$ и $\hat{\sigma}_{\bar{w}}$ остаются в случае отсутствия нормальности такими же хорошими, как и среднеквадратичная оценка s, и, возможно, даже лучшими, по крайней мере для $n \leqslant 6$ (несмотря на то, что $\mathsf{E}S^2 = \sigma^2$ для всех распределений, имеющих дисперсии). Заметим, что мы не утверждаем, что размах

---

[1]) Коэффициент при A^4 в (7.3.4) указан неправильно в работе Дэйвида (1962, стр. 98) и правильно — в работе Гхоша (1963). Заметим, что часто продолжают ссылаться на менее удобный подход и менее точные таблицы Патнайка (1950).

Таблица 7.3.2

Масштабный множитель c и эквивалентные степени свободы ν, соответствующие однофакторной классификации k групп по n наблюдений (репродуцировано с расширением из работы Дэйвида (1951))

k \ n	2		3		4		5		6		7		8		9		10	
	ν	c	ν	c	ν	c	ν	c	ν	c	ν	c	ν	c	ν	c	ν	c
1	1,00	1,41	1,98	1,91	2,93	2,24	3,83	2,48	4,68	2,67	5,48	2,83	6,25	2,96	6,98	3,08	7,68	3,18
2	1,92	1,28	3,83	1,81	5,69	2,15	7,47	2,40	9,16	2,60	10,8	2,77	12,3	2,91	13,8	3,02	15,1	3,13
3	2,82	1,23	5,66	1,77	8,44	2,12	11,1	2,38	13,6	2,58	16,0	2,75	18,3	2,89	20,5	3,01	22.6	3,11
4	3,71	1,21	7,49	1,75	11,2	2,11	14,7	2,37	18,1	2,57	21,3	2,74	24,4	2,88	27,3	3,00	30,1	3,10
5	4,59	1,19	9,30	1,74	13,9	2,10	18,4	2,36	22,6	2,56	26,6	2,73	30,4	2,87	34,0	2,99	37,5	3,10
6	5,47	1,18	11,1	1,73	16,7	2,09	22,0	2,35	27,0	2,56	31,8	2,73	36,4	2,87	40,8	2,99	45,0	3,09
7	6,35	1,17	12,9	1,73	19,4	2,09	25,6	2,35	31,5	2,55	37,1	2,72	42,5	2,86	47,6	2,99	52,4	3,09
8	7,23	1,17	14,8	1,72	22,1	2,08	29,2	2,35	36,0	2,55	42,4	2,72	48,5	2,86	54,3	2,98	59,9	3,09
9	8,11	1,16	16,6	1,72	24,9	2,08	32,9	2,34	40,4	2,55	47,6	2.72	54,5	2,86	61,1	2,98	67,3	3,09
10	8,99	1,16	18,4	1,72	27,6	2,08	36,5	2,34	44,9	2,55	52,9	2,72	60,6	2,86	67,8	2,98	74,8	3,09
d_n		1,13		1,69		2,06		2,33		2,53		2,70		2,85		2,97		3,08
п. р.*	0,88		1,82		2,74		3,62		4,47		5,27		6,03		6,76		7,45	

* **п. р. — постоянные разности: например, $n=5$, $k=12$ дает $\nu=36,5+2\cdot 3,62=43,7$.**

очень робастен, а утверждаем лишь, что он вполне сравним с s даже в случае малых выборок.

Возможно, более интересным результатом является удивительная устойчивость отношения $\mathsf{E}W_n/\sigma$, значениями которого d_n (в случае нормальных выборок) определяется ширина контрольных полос в картах контроля качества для среднего (см. § 7.9). Работа Пирсона и Адьянтхайя (1928), в основном эмпирическая (см. также работу Пирсона (1950)), предсказывает этот факт. Как было показано в § 4.2, $\mathsf{E}(W_n/\sigma)$ действительно ограничено сверху, причем эта верхняя граница равна удвоенной верхней границе (для симметричной генеральной совокупности), данной в таблице 4.2. Эта таблица также показывает, что верхняя граница совсем немного превышает d_n ($n \leqslant 12$); даже для равномерной выборки $\mathsf{E}(W_n/\sigma)$ не очень отличается от d_n. То же самое имеет место для многих других распределений (Дэйвид (1962)), хотя, как указывалось в конце § 4.2, $\mathsf{E}(W_n/\sigma)$ может быть сделано произвольно малым для патологических распределений.

Для большого числа распределений Кокс (1954) показал как теоретически, так и эмпирически, что отношение $\mathsf{E}W_n/\sigma d_n$ чуть меньше единицы для $n \leqslant 5$. В предположении, что $\mathsf{E}W_n/\sigma d_n$ не зависит от β_1, Кокс табулировал средние значения этой величины как функцию β_2 *). Таким образом, W_n/d_n будет стремиться немного «переоценить» σ для большинства генеральных совокупностей, отличных от нормальной, но если пользоваться приближенным значением β_2, то использование таблиц Кокса во многом исправит это небольшое смещение [2]). (См. также Цукибаяши (1958), который рассмотрел поведение (для различных распределений, отличных от нормального) оценок для σ, связанных с размахом, а также оценок для σ^2, которые являются несмещенными в случае нормального распределения.)

Зависимость коэффициента вариации размаха от β_2 подобным же образом изучалась Коксом. Здесь зависимость от распределения гораздо более заметна, и это также

---

*) β_1 — коэффициент асимметрии, β_2 — эксцесс. (*Прим. перев.*)

[2]) Эмпирически d_n приближенно равно $n^{1/2}$ ($n \leqslant 10$). Поэтому отношение W_n/n дает сразу общую, иногда грубую, оценку для стандартного отклонения среднего, т. е. оценку для $\sigma/\sqrt{n}$ (Ментел (1951)).

имеет место для верхних процентных точек (см. также Белз и Хуке (1954)).

Некоторые из упомянутых выше результатов были подвергнуты сомнению Бхаттачарджи (1965). Он, например, утверждал на основе изучения вероятностей превышения верхних значений в нормальной теории, что на W, более чем на S, влияет отклонение от нормальности, особенно, когда n велико (действительно, в его таблицах для $\beta_2=4$ и 5 эффект наблюдается уже при $n=4$). Сомнительно, однако, что использование Бхаттачарджи первых четырех членов ряда Эджворта для того, чтобы представить отличное от нормального распределение, достаточно для его целей; во всяком случае, его результаты расходятся в ряде мест с более точными вычислениями. Подобный подход использовался Сингхом (1967) для того, чтобы изучить влияние ненормальности распределения на экстремальные значения, а также на размах.

Мы заканчиваем этот параграф указанием на то, что размах можно использовать для распознавания больших ошибок в вычислениях s для выборок из любой генеральной совокупности (Томсон (1955)). Это следует сразу из ограниченности отношения w/s. Верхняя граница достигается в случае выборки, имеющей $n-2$ наблюдения, совпадающих с выборочным средним, и два других наблюдения на равном расстоянии от среднего. Нижняя граница соответствует случаю, когда половина наблюдений совпадает с одним, а другая половина (плюс одно, если число наблюдений нечетно) — с другим экстремумом. Соответствующие границы имеют вид

$$w/s \leqslant [2(n-1)]^{1/2}, \tag{1}$$

$$w/s \geqslant \begin{cases} 2[(n-1)/n]^{1/2}, & \text{если } n \text{ четное}, \quad (2)\\ 2[n/(n+1)]^{1/2}, & \text{если } n \text{ нечетное}. \quad (3)\end{cases}$$

Эти значения совпадают также с верхней и нижней нуль-процентными точками W/S и в этом качестве приведены в таблице 29с Пирсона и Хартли (1966). Требует доказательства только соотношение (3). Пусть $\bar{x}(i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ обозначает среднее значение первых i наблюдаемых x_k.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i-\bar{x}(n)]^2=\sum_{i=1}^{n-1}[x_i-\bar{x}(n-1)]^2+$$
$$+(n-1)[\bar{x}(n-1)-\bar{x}(n)]^2+[x_n-(\bar{x}n)]^2.$$

Ясно, что каждый член справа максимален, если первые $n-1$ из x_k выбраны, как и в случае (2), а x_n взято равным $\bar{x}(n-1)\pm w/2$.

§ 7.4. Другие «быстрые» оценки разброса

Так как эффективность W как оценки для σ в нормальной выборке быстро падает с увеличением n, то возникает вопрос, когда квазиразмах $W_{(i)}=X_{(n+1-i)}-X_{(i)}$ $(2\leqslant i\leqslant[n/2])$ ведет себя лучше[3, 4]?

Кэдуэлл (1953а) показал, что $W_{(1)}=W$ более эффективен, чем любой другой квазиразмах для $n\leqslant 17$; после этого значения n более эффективным становится $W_{(2)}$; этот квазиразмах при $n\geqslant 32$ заменяет $W_{(3)}$ и т. д. (см. § 7.6). Он табулировал моменты и процентные точки $W_{(2)}$ и дал разложения в ряд для $f(w_{(2)})$. Квазиразмахи полезны в случае цензурированных выборок и, очевидно, имеют некоторую робастность к аномальным наблюдениям. Для полных выборок их эффективность не очень высока, но подходящие линейные комбинации W и $W_{(i)}$ могут дать весьма эффективные оценки. Простой способ получить их — использовать «нарастающий размах» $I_i=W+W_{(2)}+\ldots$ $\ldots+W_{(i)}$, который был введен Джоунзом (1946). Однако Диксон (1957) показал, что еще лучшие результаты можно получить суммированием подходящим образом выбранных (не обязательно последовательных) квазиразмахов, включая сам размах. Например, для $n=16$ статистика $W+$ $+W_{(2)}+W_{(4)}$ имеет эффективность 97,5%. Более общие результаты получены Хартером (1959).

Для цензурированных выборок различные упрощенные оценки для σ (как и для μ) были предложены Диксоном

---

[3]) Здесь $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$.

[4]) Множители, обеспечивающие несмещенность $W_{(i)}$ и других оценок, можно получить из таблиц математических ожиданий порядковых статистик. Хартер (1959) приводит значения $\mathsf{E}(W_{(i)}/\sigma)$ для $n\leqslant 100$ и $i\leqslant 9$.

(1960). Как указывалось в конце § 6.3, цензурирование дает заметную потерю в эффективности; дополнительная потеря для подходящим образом выбранных статистик Диксона становится малозаметной при сравнении с потерей за счет цензурирования. Когда цензурированы меньше, чем четверть наблюдений с каждой стороны, интерквартильный размах (уже давно принятая оценка) или даже его вариант для малых выборок $W_{(i)}$ при $i=[n/4]+1$ дает общую весьма простую, но обычно довольно неэффективную оценку.

Из приведенных соображений следует, что робастность к присутствию аномальных наблюдений, получаемая при отбрасывании экстремальных наблюдений, может быть обеспечена только за счет значительной потери в эффективности. Барнетт и др. (1967), изучавшие несмещенную оценку Даунтона (1966 b)

$$«\sigma» = \frac{2\sqrt{\pi}}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2}\right) X_{(i)}, \tag{7.4.1}$$

указывают, что она имеет высокую эффективность ($>97{,}79\%$) и «не так подвержена влиянию аномальных наблюдений, как размах или среднеквадратичное отклонение». Следует добавить, что в «σ» экстремальные значения входят с меньшими весами, чем в наилучшую линейную оценку σ^*, и поэтому эта оценка, подобно I_i или оценкам Диксона (1957), умеренно защищена от влияния аномальных наблюдений с небольшой при этом потерей в эффективности. Фактически, «σ» — другая форма (с точностью до постоянного множителя) статистики Джини (1912)

$$G = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,\, j=1}^{n} |X_i - X_j|,$$

изучавшейся еще Хелмертом (1876) и не производившей впечатления новизны даже тогда (см. упр. 7.4.1). Возможно, G более удобна для вычислений в форме

$$G = \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{n-2i+1}{n(n-1)} W_{(i)}$$

(фон Андрэ (1872)). Для $n \leqslant 10$ Нэир (1950) сравнил эффективности I_i, G среднего отклонения и наилучшей линейной оценки σ^*. Статистика G имеет почти такую же эффективность, что и σ^*, оставляя далеко позади среднее отклонение. Начиная с $n=6$, I_2 — наилучшая среди всех I-статистик. Например, для $n=10$ эффективности следующие:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	среднее откл.	G	σ^*
85,0	96,4	95,9	92,2	89,4	91,0	98,1	99,0

Барнетт и др. (1967) нашли, что III тип Пирсона является удовлетворительным приближением для распределения оценки «σ». Кажется вполне правдоподобным, что распределения различных оценок, рассмотренных в этом параграфе, могут быть надлежащим образом приближены при помощи методов, используемых для размаха (см. работы Кэдуэлла (1953b), Дэйвида и Джонсона (1956)). Оценивание σ при помощи измерения (взвешивания) групп ранжированных наблюдений рассматривалось Мидом (1966) в случае, когда индивидуальные измерения намного сложнее, чем упорядочение наблюдений. Упрощенные оценки параметров распределения Вейбулла, основанные на двух порядковых статистиках, получены Дьюби (1967).

Стандартные отклонения статистики $X_{(r)}$. На основе подхода Дэйвида и Джонсона (1954) Уолш (1958) предложил оценки для $[\mathsf{D}(X_{(r)})]^{1/2}$ вида

$$a\,(X_{(r+i)} - X_{(r-i)}),$$

где $i = (n+1)^{4/5}$ и $a = \frac{1}{2}(n+1)^{-3/10}\left[\frac{r}{n+1}\left(1-\frac{r}{n+1}\right)\right]^{1/2}$.

§ 7.5. «Быстрые» оценки для двумерных выборок

Разброс для кругового нормального распределения. Распределение точки (X, Y) поражения вертикальной мишени при стрельбе из ружья или горизонтальной мишени при стрельбе из орудия или ракетой описывается часто круговым нормальным распределением с плотностью

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x-\mu_x)^2+(y-\mu_y)^2\right]\right\},$$

где $\mu_x = \mathsf{E}X$, $\mu_y = \mathsf{E}Y$ и σ^2 — общая дисперсия. Хорошо известно, что РМДН оценка для σ^2 для выборки (X_i, Y_i) объема n имеет вид

$$S^2 = \frac{1}{2(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right]$$

и что $2(n-1)S^2/\sigma^2$ имеет χ^2-распределение с $2(n-1)$ степенями свободы. Тогда РМДН оценка для σ имеет вид

$$S' = \frac{\Gamma(n-1)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}\left[\sum(X_i-\bar{X})^2+\sum(Y_i-\bar{Y})^2\right]^{1/2}.$$

«Быстрые» оценки для σ включают: (1) радиус покрывающего круга, т. е. наименьший круг, содержащий все точки выборки (впервые эта оценка изучалась Дэниэльсом (1952)), (2) максимальный разброс или двумерный размах

$$R=\max_{i,\,j}\,[(X_i-X_j)^2+(Y_i-Y_j)^2]^{1/2} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

(3) диагональ $D=(W_x^2+W_y^2)^{1/2}$, где $W_x=X_{(n)}-X_{(1)}$, $W_y=Y_{(n)}-Y_{(1)}$. Эти и другие оценки рассмотрены Граббсом (1964) (см. также Моранда (1959), Какуллос и Де Чикко (1967)). Оценки (1) и (2) заманчиво просты с точки зрения вычислений, но менее эффективны, чем диагональ D. Информация о двумерном размахе получена, в основном, моделированием с помощью метода Монте-Карло. Распределение D можно получить с помощью приближения Патнайка (§ 7.3), в соответствии с которым D оказывается распределенным приближенно как $c\sigma\chi_{2\nu}/\nu^{1/2}$, где c и ν, соответственно, — масштабный множитель и эквивалентные степени свободы как W_x, так и W_y. Для $n\leqslant 20$ Граббс табулировал $\mathsf{E}(D/\sigma)$, $1/\mathsf{E}(D/\sigma)$, стандартное отклонение отношения D/σ и соответствующие величины для других оценок.

Коэффициент регрессии. Если регрессия Y на неслучайную величину x линейна, т. е.

$$\mathsf{E}(Y\mid x)=\alpha+\beta x, \tag{7.5.1}$$

то β можно оценить следующим отношением:

$$b'=(Y'_{[k]}-\bar{Y}_{[k]})/(\bar{x}'_{(k)}-\bar{x}_{(k)}), \tag{7.5.2}$$

где

$$\bar{X}'_{(k)}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{(n+1-i)},\quad \bar{X}_{(k)}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{(i)},\quad \bar{Y}'_{[k]}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}Y_{[n+1-i]},$$

$\bar{Y}_{[k]}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}Y_{[i]}$, а $Y_{[i]}$ — значение Y (не обязательно i-е по величине), соответствующее $x_{(i)}$ (см. упр. 3.2.3).

Если X — с. в., то мы можем интерпретировать (7.5.1) как условное ожидание при условии $X=x$ и получить из (7.5.2), что

$$\mathsf{E}\,(b' \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)=\beta. \tag{7.5.3}$$

Так как (7.5.3) имеет место при любых x_i, то оно также справедливо при отсутствии условий, т. е.

$$B'=(\bar{Y}'_{[k]}-\bar{Y}_{[k]})/(\bar{X}'_{(k)}-\bar{X}_{(k)}) \tag{7.5.4}$$

также является несмещенной оценкой для β. Заметим, что этот результат не требует одинаковой распределенности с. в. X и Y. Бартон и Кэсли (1958) показали, что B' имеет эффективность 75—80%, если вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное распределение, при условии, что k выбрано около $0{,}27n$.

Коэффициент корреляции. Так как $\rho=\beta\sigma_x/\sigma_y$, то из (7.5.4) получаем следующую оценку для ρ:

$$\hat{\rho}'=B'\,\frac{(\bar{X}'_{(k)}-\bar{X}_{(k)})/c_{n,x}}{(\bar{Y}'_{(k)}-\bar{Y}_{(k)})/c_{n,y}}=\frac{(\bar{Y}'_{[k]}-\bar{Y}_{[k]})/c_{n,x}}{(\bar{Y}'_{(k)}-\bar{Y}_{(k)})/c_{n,y}},$$

где $c_{n,x}=\mathsf{E}\,(\bar{X}'_{(k)}-\bar{X}_{(k)})/\sigma_x$ и т. д. Если X и Y имеют одинаковые маргинальные типы распределений (например, обе с. в. имеют нормальное распределение), то $\hat{\rho}'$ упрощается:

$$\hat{\rho}'=(\bar{Y}'_{[k]}-\bar{Y}_{[k]})/(\bar{Y}'_{(k)}-\bar{Y}_{(k)}). \tag{7.5.5}$$

Эту оценку предложил Цукибаяши (1962) для $k=1$, т. е. когда знаменатель равен W_y-размаху Y_i $(1\leqslant i\leqslant n)$. Он также предложил оценку со знаменателем, равным среднему размаху. Цукибаяши указал, что (7.5.5) можно вычислить, если только известны ранги X_i $(1\leqslant i\leqslant n)$. Если известны и X, и Y, то можно избавиться от несимметричности (7.5.5), заменив $\hat{\rho}'$ на

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{Y}'_{[k]}-\overline{Y}_{[k]}}{\overline{Y}'_{(k)}-\overline{Y}_{(k)}}+\frac{\overline{X}'_{[k]}-\overline{X}_{[k]}}{\overline{X}'_{(k)}-\overline{X}_{(k)}}\right).$$

Однако о свойствах этой оценки или даже оценки $\hat{\rho}'$ известно совсем немного. (Об оценке для $\operatorname{cov}(X, Y)$ см. упр. 7.5.1.)

§ 7.6. Оптимальный выбор порядковых статистик в больших выборках

Хотя более детальное рассмотрение теории порядковых статистик для больших выборок откладывается до главы 9, мы рассмотрим здесь следующую задачу: имеется выборка большого объема из генеральной совокупности с плотностью распределения $\frac{1}{\sigma}p\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$; мы хотим оценить параметры μ или σ (или оба сразу) при помощи фиксированного малого числа k порядковых статистик. Как следует нам выбрать порядковые статистики для того, чтобы получить хорошие оценки? Ясно, что в случае малых выборок эту проблему всегда можно решить численно при условии, что известны математические ожидания, дисперсии и ковариации с. в. $Y_{(i)}=(X_{(i)}-\mu)/\sigma$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — нам нужно только найти дисперсии C_n^k наилучших линейных несмещенных оценок (НЛНО) для μ, основанных на всевозможных наборах k порядковых статистик, и затем выбрать тот набор, которому соответствует оценка с минимальной дисперсией; аналогично для параметра σ. Если мы при помощи одного набора из k статистик хотим получить хорошие оценки сразу обоих параметров, то можем подобным же образом минимизировать сумму $D\mu^*+cD\sigma^*$, выбрав подходящую константу c, где μ^* и σ^* — НЛНО для параметров μ и σ, построенные по одному множеству из k порядковых статистик. Конечно, и в этом процессе возможны «быстрые» процедуры. Однако проблема более важна для средних и больших объемов выборок, когда экономия в вычислительной работе, особенно, если элементы выборки уже упорядочены, более существенна, чем плата за потерю эффективности. Имеются также интересные возможности для сокращения числа данных (Эйзенбергер и Познер (1965)), так как большую выборку (например, при подсчете частиц на космическом корабле) можно заменить достаточным числом порядковых статистик, позволяющих (уже на земле) получить удовлетворительные оценки параметров, а также проверить предполагаемый вид исходного распределения.

Начнем мы с совместного распределения (при $n \to \infty$) порядковых статистик $X_{(n_j)}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$, где $n_j = [n\lambda_j]+1$ и $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k<1$. При слабых ограничениях этим предельным распределением является k-мерное нормальное (см. § 9.2), которое можно записать следующим образом:

$$h=(2\pi\sigma^2)^{k/2} f_1 f_2 \ldots f_k [\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\ldots(1-\lambda_k)]^{-1\,2} n^{k/2} e^{nS/2\sigma^2}, \tag{7.6.1}$$

где f_j — плотность распределения с. в. Y, вычисленная в точке ξ_{λ_j} — квантили порядка λ_j для с. в. Y, и (полагая $\lambda_0=0$, $\lambda_{k+1}=1$)

$$S=\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_{j-1}}{(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_j-\lambda_{j-1})}f_j^2(x_{(n_j)}-\mu-\sigma\xi_{\lambda_j})^2-$$
$$-2\sum_{j=2}^{k}\frac{f_j f_{j-1}}{\lambda_j-\lambda_{j-1}}(x_{(n_j)}-\mu-\sigma\xi_{\lambda_j})(x_{(n_{j-1})}-\mu-\sigma\xi_{\lambda_{j-1}}). \tag{7.6.2}$$

Следуя работе Огавы (1951 или 1970), в которой можно найти дальнейшие детали, рассмотрим вначале случай, когда σ известно. НЛНО μ_0^* параметра μ, соответствующая порядковым статистикам $X_{(n_j)}$, дается соотношением $(\partial S/\partial\mu)_{\mu=\mu_0^*}=0$, т. е.

$$\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_{j-1}}{(\lambda_{j+1}-\gamma_j)(\lambda_j-\lambda_{j-1})}f_j^2-2\sum_{j=2}^{k}\frac{f_j f_{j-1}}{\lambda_j-\lambda_{j-1}}\right]\mu_0^*=$$
$$=-\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{f_{j+1}-f_j}{\lambda_{j+1}-\lambda_j}-\frac{f_j-f_{j-1}}{\lambda_j-\lambda_{j-1}}\right)f_j(x_{(n_j)}-\sigma\xi_{\lambda_j}), \tag{7.6.3}$$

где $f_0=f_{k+1}=0$. Имеем

$$\mu_0^*=(Z_1-\sigma K_3)/K_1, \tag{7.6.3'}$$

где

$$K_1=\sum_{j=1}^{k+1}(f_j-f_{j-1})^2/(\lambda_j-\lambda_{j-1}), \tag{7.6.4}$$

$$K_3=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{(f_j-f_{j-1})\left(f_j\xi_{\lambda_j}-f_{j-1}\xi_{\lambda_{j-1}}\right)}{\lambda_j-\lambda_{j-1}} \tag{7.6.5}$$

и

$$Z_1=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{(f_j-f_{j-1})\left(f_jX_{(n_j)}-f_{j-1}X_{(n_{j-1})}\right)}{\lambda_j-\lambda_{j-1}}. \tag{7.6.6}$$

Из (4.5.5) имеем асимптотическое соотношение

$$\operatorname{cov}\left(X_{(n_j)},\ X_{(n_{j'})}\right)\sim\frac{\lambda_j(1-\lambda_{j'})}{nf_jf_{j'}}.$$

Отсюда

$$\mathrm{D}\mu_0^*\sim\frac{\sigma^2}{n}\,\frac{1}{K_1}, \tag{7.6.7}$$

т. е. видим, что μ_0^* имеет асимптотическую эффективность K_1 относительно $\bar{X}$ — среднего для исходной выборки. Подобные результаты имеются для оценки σ при известном μ и для совместного оценивания μ и σ. Так, в первом случае получаем

$$\sigma_0^*=\frac{Z_2-\mu K_3}{K_2}, \tag{7.6.8}$$

где

$$K_2=\sum_{j=1}^{k+1}\left(f_j\xi_{\lambda_j}-f_{j-1}\xi_{\lambda_{j-1}}\right)^2/(\lambda_j-\lambda_{j-1}), \tag{7.6.9}$$

$$Z_2=\sum_{j=1}^{k+1}\left(f_j\xi_{\lambda_j}-f_{j-1}\xi_{\lambda_{j-1}}\right)\left(f_jX_{(n_j)}-f_{j-1}X_{(n_{j-1})}\right)/(\lambda_j-\lambda_{j-1}), \tag{7.6.10}$$

и

$$\mathrm{D}\sigma_0^*\sim\frac{\sigma^2}{n}\,\frac{1}{K_2}, \tag{7.6.11}$$

а во втором случае

$$\mu_1^*=\frac{1}{\Delta}(K_2Z_1-K_3Z_2),\qquad \sigma_1^*=\frac{1}{\Delta}(K_1Z_2-K_3Z_1), \tag{7.6.12}$$

где $\Delta = K_1K_2 - K_3^2$, и

$$\left.\begin{aligned} D\mu_1^* \sim \frac{\sigma^2}{n}\frac{K_2}{\Delta}, \quad D\sigma_1^* \sim \frac{\sigma^2}{n}\frac{K_1}{\Delta}, \\ \operatorname{cov}(\mu_1^*, \sigma_1^*) \sim -\frac{\sigma^2}{n}\frac{K_3}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \tag{7.6.13}$$

Если $p(y)$ — симметричная плотность и расположение порядковых статистик симметрично, то для всех j

$$\left.\begin{aligned} \lambda_j + \lambda_{k+1-j} = 1, \quad n_j + n_{k+1-j} = n, \\ \text{так что} \qquad \xi_{\lambda_j} + \xi_{\lambda_{k+1-j}} = 0, \quad f_j = f_{k+1-j}, \end{aligned}\right\} \tag{7.6.14}$$

откуда следует, что $K_3 = 0$. Таким образом, в этом важном случае

$$\mu_0^* = \mu_1^* = \frac{Z_1}{K_1}, \qquad \sigma_0^* = \sigma_1^* = \frac{Z_2}{K_2}.$$

Кроме того, μ_1^* и σ_1^* некоррелированы и асимптотически независимы.

Поскольку из (7.6.1) следует, что $\log h = -k \log \sigma - \frac{nS}{2\sigma^2} + h'$, где h' не зависит от μ и σ, то

$$-\frac{\partial^2 \log h}{\partial \mu^2} = \frac{n}{\sigma^2}K_1, \qquad -\frac{\partial^2 \log h}{\partial \sigma^2} = \frac{2k}{\sigma^2} + \frac{n}{\sigma^2}K_2.$$

Таким образом, асимптотические дисперсии (при $n \to \infty$, $k/n \to 0$) наиболее эффективных оценок, построенных по одним и тем же значениям $X_{(n_j)}$, для параметров μ_0^* и σ_0^* равны, соответственно, σ^2/nK_1 и σ^2/nK_2, что показывает полную эффективность μ_0^* и σ_0^* в смысле извлечения всей возможной информации из выбранных порядковых статистик. Ясно, что эти результаты сохраняются, если оба параметра μ и σ неизвестны, для ситуации (7.6.14).

До сих пор мы брали фиксированное n_j. Очевидно, что для оптимального оценивания μ (или σ) при известном другом параметре величины n_j нужно выбрать так, чтобы максимизировать K_1 (или K_2). Более того, если для симметричной генеральной совокупности этот выбор приводит к ситуации (7.6.14), то оптимальности можно добиться и в случае неизвестных μ и σ. Следует подчеркнуть, что при оптимизации проводят отдельно оценивание μ и σ, требующее двух различных наборов порядковых статистик.

Если рассматривать одинаковый набор, то мы вновь можем минимизировать $D\mu_0^* + cD\sigma_0^*$ для подходящего значения c.

Хотя процесс максимизации в принципе прост, вычислительные проблемы на практике могут оказаться существенными. Обратимся к нормальному случаю и рассмотрим значение $k=2$. Ясно, что для любой симметричной генеральной совокупности оптимальный набор порядковых статистик симметричен. Поэтому из (7.6.4) следует, что

$$K_1 = \frac{2f_1^*}{\lambda_1} = \frac{2p^2(x_{\lambda_1})}{P(x_{\lambda_1})}.$$

Таким образом, мы должны найти x, минимизирующий $P(x)/p^2(x)$, т. е. удовлетворяющий (для любого симметричного распределения) соотношению

$$2P(x)\,p'(x) = p^2(x).$$

Для $p(x) = \varphi(x)$ дело сводится к уравнению $xP(x) = -\frac{1}{2}p(x)$, которое дает $x = -0{,}6121$. Таким образом,

и
$$\left.\begin{aligned} x_{\lambda_1} &= -0{,}6121, & x_{\lambda_2} &= 0{,}6121 \\ \lambda_1 &= 0{,}2702, & \lambda_2 &= 0{,}7298 \end{aligned}\right\} \qquad (7.6.15)$$

(на этот результат ссылались в § 7.2). Так как X эффективна, то асимптотическая эффективность μ_0^* равна K_1 из (7.6.7), что дает для оценки $\frac{1}{2}(X_{(n\lambda_1)} + X_{(n\lambda_2)})$ 81-процентную эффективность. Как и обычно, $n\lambda_1$ интерпретируется как целая часть $n\lambda_1 + 1$ и т. д., так что для $n = 100$ мы используем $\mu_0^* = \frac{1}{2}(X_{(28)} + X_{(73)})$. Аналогично, так как $DS \sim \sim \sigma^2/2n$, эффективность σ_0^* в силу (7.6.11) равна $\frac{1}{2}K_2$. Для $k=2$ максимум достигается при $\lambda_1 = 0{,}0694$ и $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ [5]). Оценка σ_0^*, равная Z_2/K_2, сводится к $0{,}337(X_{(n\lambda_2)} - X_{(n\lambda_1)})$ и имеет эффективность 65%. Для $k > 2$ можно показать, что существует единственный оптимальный набор порядковых статистик для оценивания μ, и он симметричен. Кажется правдоподобным, что этот факт имеет место и при оценивании σ, хотя доказатель-

[5]) Этот результат, как и (7.6.15), получен Карлом Пирсоном в 1920 г.

ство в общем случае неизвестно. С практической точки зрения проблема решена, так как точные выражения, дающие оценки μ_0^* и σ_0^* для соответствующих оптимальных наборов порядковых статистик, имеются для большинства значений $k \leqslant 20$ (Огава (1962), Эйзенбергер и Познер (1965)).

В последней работе получены также оценки, минимизирующие сумму $D\mu_0^* + cD\sigma_0^*$ при $c = 1, 2, 3$.

Пример 7.6. Если $k = 4$, то оценки, минимизирующие $D\mu_0^*$, $D\sigma_0^*$, $D\mu_0^* + cD\sigma_0^*$ $(c = 1, 2, 3)$, вместе с их эффективностями, соответственно, равны:

оценки	*эффективности*
$0{,}1918\,(X_{(0{,}1068n)} + X_{(0{,}8932n)}) + 0{,}3082\,(X_{(0{,}3512n)} + X_{(0{,}6488n)})$	0,920
$0{,}116\,(X_{(0{,}9770n)} - X_{(0{,}0230n)}) + 0{,}236\,(X_{(0{,}8729n)} - X_{(0{,}1271n)})$	0,824
$0{,}1414\,(X_{(0{,}0668n)} + X_{(0{,}9332n)}) + 0{,}3786\,(X_{(0{,}2912n)} + X_{(0{,}7088n)})$	0,908
$0{,}2581\,(X_{(0{,}9332n)} - X_{(0{,}0668n)}) + 0{,}2051\,(X_{(0{,}7088n)} - X_{(0{,}2912n)})$	0,735
$0{,}0971\,(X_{(0{,}0389n)} + X_{(0{,}9611n)}) + 0{,}4029\,(X_{(0{,}2160n)} + X_{(0{,}7840)})$	0,857
$0{,}1787\,(X_{(0{,}9611n)} - X_{(0{,}0389n)}) + 0{,}2353\,(X_{(0{,}7840n)} - X_{(0{,}2160n)})$	0,792

Здесь оценки, объединенные фигурными скобками, построены по общим наборам порядковых статистик. Так, 3 и 4 строки дают наилучшие линейные четырехточечные оценки для μ и σ, когда минимальна сумма $D\mu_0^* + D\sigma_0^*$. Подобные результаты для $k = 2$ даны в упр. 7.6.2.

Огава (1962) рассматривал также однопараметрическое а Салех и Али (1966) — двухпараметрическое экспоненциальные распределения (см. также: Гупта и Гнанадесикан (1966) — логистическое; Блох (1966) — распределение Коши; Хассанейн (1968) — распределение экстремальных значений) Имеется ряд работ с результатами для экспоненциального распределения в случае малых выборок; они приведены в работе Салеха (1967).

Упрощенный приближенный подход, приводящий к «почти оптимальным» наборам порядковых статистик —

аналогу «почти наилучших» оценок Блома, был развит Серндалом (1962, гл. 4) и применялся им к различным генеральным совокупностям. Применив свои методы, Серндал (1964) рассмотрел в деталях оценивание (раздельное) параметров μ и σ для гамма-распределения с известным $p=1$, 2, 3, 4, 5, т. е. для плотностей распределения вида

$$\frac{1}{\sigma\Gamma(p)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{p-1}e^{-(x-\mu)/\sigma} \qquad (\mu\leqslant x<\infty).$$

Серндал (1962, гл. 7) указывает, как и другие, что проблема оптимального выбора порядковых статистик тесно связана со следующими двумя проблемами:

а) оптимальная группировка наблюдений;

б) оптимальные границы слоев в пропорциональной выборке.

Критерии значимости, использующие оптимальные наборы порядковых статистик, изучались Огавой (1962) и Эйзенбергером (1968).

§ 7.7. «Быстрые» критерии

Как станет ясно читателю, многие процедуры оценивания, обсуждаемые выше, легко можно преобразовать в «быстрые» критерии значимости, или такие критерии могут быть сконструированы на их основе. С точки зрения использования решающим является наличие подходящих таблиц: без них критерии не станут «быстрыми». Поэтому мы подчеркиваем практическую сторону. Однако для некоторых «быстрых» критериев возможны также дополнительные преимущества такие, как хорошая робастность, и поэтому ими не следует пренебрегать, как второсортными, даже если и имеются критерии, полученные теоретически оптимальными методами. В нормальном случае мы рассмотрим по очереди критерии изменчивости, заменители t-критериев и использование размаха в дисперсионном анализе (см. также работу Дэйвида и Джонсона (1956)).

Критерии изменчивости.

1. Одновыборочный критерий для гипотезы H_0: $\sigma=\sigma_0$ Таблицы Хартера (1946b), в которых приведены доверительные интервалы для σ, основанные на подходящим образом выбранных квазиразмахах, дают удобный способ проверки для нормальной выборки объема n нулевой гипо-

тезы H_0: $\sigma = \sigma_0$ против как одно-, так и двухсторонней альтернативы [6]). Например, для $n=40$ таблицы дают двухсторонние 95-процентные доверительные интервалы для σ вида $(0{,}267153w_{(3)},\ 0{,}419858w_{(3)})$. Если интервал содержит σ_0, мы принимаем H_0 на 5-процентном уровне против альтернативы $\sigma \neq \sigma_0$ и т. д.

2. Двухвыборочные критерии для гипотезы H_0: $\sigma_1 = \sigma_2$. Продолжая работу Линка (1950), Хартер (1963) подготовил, используя численное интегрирование, таблицы верхних процентных точек для ${}_1W/{}_2W$ — отношения размахов нормальных выборок объема n_1 и n_2, где $n_1, n_2 \leqslant 15$.

3. k-выборочные критерии для гипотезы H_0: $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_k$. Пусть ${}_tS^2$ $(t=1, 2, \ldots, k)$ — обычная несмещенная среднеквадратичная оценка σ_t^2 с ν степенями свободы. Тогда гипотезу H_0 очень легко проверить (Хартли (1950b)) сравнением выражения $s^2_{\max}/s^2_{\min}$ с таблицей 31 Пирсона и Хартли (1966). Отметим, что это отношение и другие «экстремальные величины» (Гумбель и Гербах (1951)) тесно связаны с размахом, так как $\log(s^2_{\max}/s^2_{\min})$ равен размаху для величин $\log {}_tS^2$ [7]).

Для малых выборок (скажем, в случае $\nu \leqslant 10$) хотелось бы получить дальнейшие упрощения и использовать отношение $W_{\max}/W_{\min}$ (Кэдуэлл (1953b)), верхние процентные точки которого были детально вычислены Лесли и Брауном (1966). В § 5.4 упоминались две другие статистики, которые можно использовать для проверки однородности дисперсий в выборках одинакового объема, именно,

$$S^2_{\max}\Big/\sum_{t=1}^{k} {}_tS^2 \quad \text{и} \quad W_{\max}\Big/\sum_{t=1}^{k} {}_tW.$$

Мощность и другие меры качества различных критериев, упомянутых здесь, рассматриваются в приведенных

---

[6]) Точнее, мы имеем три типа гипотез: $\sigma \leqslant \sigma_0$ против $\sigma > \sigma_0$, $\sigma \geqslant \sigma_0$ против $\sigma < \sigma_0$ и $\sigma = \sigma_0$ против $\sigma \neq \sigma_0$. Утверждение в основном тексте следует интерпретировать как эквивалентную краткую форму записи. Подобные замечания относятся и к другим критериям.

[7]) Об использовании $s^2_{\max}/s^2_{\min}$, когда наблюдения внутри выборки равнокоррелированы, и о проверке однородности дисперсий при двухфакторной классификации см. работы Хана (1968, 1969).

работах. Имеется существенная потеря мощности в связи с заменой величин $_tS^2$ размахами, но для $\nu \leqslant 10$ она мала. С другой стороны, так как хорошо известный критерий Бартлета M не обладает оптимальными свойствами, критерий Хартли (и предположительно, даже Кэдуэлла) не обязан быть хуже, хотя и может быть хуже в зависимости от конкретного вида σ_i^2. Интуитивно, эти два «быстрых» критерия, как можно ожидать, будут особенно хорошо работать при альтернативе $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_{k-1}^2 < \sigma_k^2$, если $\sigma_1\sigma_k = \sigma_2^2$. Этот результат был получен с помощью статистического моделирования Пирсоном (1966), который довольно неожиданно нашел, что критерий M никогда не является худшим. Можно ожидать, что и статистика $\frac{W_{\max}}{\Sigma_t W}$, подобно $S_{\max}^2/\Sigma_t S^2$, является хорошей против альтернативы сдвига $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_{k-1}^2 < \sigma_k^2$ (см. § 8.3, замечание 7). В отличие от всех «быстрых» критериев, критерий M, конечно, применим и для выборок неодинаковых объемов.

Как подчеркивалось Боксом (1953), все рассматриваемые выше критерии очень чувствительны к предположению нормальности. Это не лишает их ценности, но вряд ли их можно рекомендовать даже как простые предварительные критерии, предшествующие критериям для проверки однородности средних. (О более робастных процедурах см. Миллер (1968).)

Последовательные критерии, использующие размах, для проверки гипотезы H_0: $\sigma = \sigma_0$ против альтернативы H_1: $\sigma = \delta\sigma_0$ (δ фиксировано) и H_0: $\sigma_1 = \sigma_2$ против H_1: $\sigma_1 = \delta\sigma_2$ впервые рассматривались Коксом (1949). Двухвыборочная ситуация изучалась далее с различными подходами Раштоном (1952) и Гхошем (1963). Хотя размах удобен из-за его простоты, оценивание σ и σ_1, σ_2 должно в каждом случае выполняться поэтапно (для подгрупп, скажем, из 4 или 8 наблюдений), а не после каждого индивидуального наблюдения. Это легко сделать, имея сумму размахов по соответствующим последовательным подгруппам наблюдений.

Заменители t-критериев. Идея использования размаха вместо выборочного стандартного отклонения в одновыборочном t-критерии (H_0: $\mu = \mu_0$) была впервые выдвинута Дэйли (1946) и развита Лордом (1947), который также рассмотрел двухвыборочную ситуацию (H_0: $\mu_1 = \mu_2$). Лорд вычислил верхние процентные точки для статистик

$$R_1 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{W} \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\frac{1}{2}({}_1W + {}_2W)}$$

при $n \leqslant 20$, где ${}_1W$ и ${}_2W$ — размахи для двух выборок по n наблюдений. Обобщения на случай выборок различных объемов n_1 и $n_2 \leqslant 20$ даны Муром (1957). Для выборок больших объемов можно с некоторой долей произвольности использовать средние размахи вместо одиночных размахов. Этот способ также был рассмотрен Лордом, который использовал сложные квадратурные методы. Более удобные (хотя немного менее мощные) таблицы даны Джексоном и Россом (1955), которые получили верхние процентные точки для

$$G_1 = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\bar{W}_{n', k}} \quad \text{и} \quad G_2 = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\bar{W}_{n', k_1 + k_2}},$$

где n' — размер подгруппы (желательно $6 \leqslant n' \leqslant 10$) и k, k_1, k_2 — число подгрупп. Несколько наблюдений, возможно, следует отбросить, чтобы n' можно было бы выбрать соответствующим образом.

Потеря мощности от использования приведенных выше методов вместо оптимального t-критерия мала (см., например, Лорд (1950)). Заметим, что при помощи приближения Патнайка R_1, R_2, G_1, G_2 становятся приближенно t-статистиками с несколько меньшими степенями свободы, которые приведены в таблице 7.3.2 (с входами $n = n'$ и k (для G_1) или $k_1 + k_2$ (для G_2)).

Пример 7.7. Проверить, будут ли значимо отличаться средние следующих двух выборок.

Первая выборка: 35,5; 23,4; 45,0; 20,4; 74,4; 46,7; 27,6; 17,6; 35,4; 38,9 ($n_1 = 10$, $\bar{x}_1 = 39{,}49$; среднее 9 первых наблюдений: 39,56).

Вторая выборка: 46,5; 63,9; 48,6; 43,6; 33,3; 38,7; 49,6; 56,1. 43,7; 51,3; 69,1; 51,8; 78,1; 57,2; 72,5; 74,2; 53,4; 66,9 ($n_2 = 18$, $\bar{x}_2 = 55{,}47$).

Чтобы получить одинаковый размер подгрупп, мы отбрасываем последнее наблюдение первой выборки и находим три размаха для девяти наблюдений, равные, соответственно, 54,0; 30,6 и 26,8, получая $\bar{w} = 37{,}13$ и $G_2 =$

$=\frac{15,91}{37,13}=0,43$, что превышает 1-процентный уровень, равный 0,38. Для приближения Патнайка мы можем оставить все наблюдения в числителе и найти из таблицы 7.3.2 $c=3,01$, $\nu=20,5$, получая значение

$$\frac{15,98\times 3,01}{37,13\times\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{18}\right)^{1/2}}=3,29,$$

которое значимо при 1-процентном уровне (1-процентная точка равна 2,84). Как одновыборочные, так и двухвыборочные критерии, конечно, сразу преобразуются в доверительные утверждения (см. Нетер (1955)). Например, если $R_2(\alpha)$ — верхняя α-значимая точка для R_2, то интервал $(\bar{X}_1-\bar{X}_2)\pm\frac{1}{2}R_2(\alpha)({}_1W+{}_2W)$ содержит $\mu_1-\mu_2$ с вероятностью $1-\alpha$. Соответствующие последовательные критерии, основанные на средних размахах, рассматривались Гилкристом (1961). (О варианте критерия Стейна с использованием размахов см. работу Найта (1963).)

Другой возможный заменитель для одновыборочного t-критерия — следующая статистика, использующая размах и середину размаха:

$$\left[\frac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})-\mu_0\right]/(X_{(n)}-X_{(1)}).$$

Этот критерий, впервые предложенный Э. Пирсоном (1929), оказался достаточно эффективным и довольно робастным для очень малых выборок, что было найдено Уолшем (1949с), который нашел верхние процентные точки для $n\leqslant 10$.

«Быстрый» дисперсионный анализ. Для однофакторной классификации nk наблюдений x_{ij} ($i=1, 2, \ldots, k$; $j=1, 2, \ldots, n$) по k группам, каждая из которых содержит n наблюдений, обычную статистику F-критерия можно заменить статистикой

$$Q_{k,\nu}=n^{1/2}W(\bar{X})/S_\nu, \qquad (7.7.1)$$

где $W(\bar{X})$ — размах для величин $\bar{X}_i$, а S_ν — обычная среднеквадратичная оценка для σ с $\nu=k(n-1)$ степенями свободы. Принимая во внимание независимость S_ν и всех $\bar{X}_i$, получаем, что $Q_{k,\nu}$ — стьюдентизированный размах в том смысле, в котором он определен в § 5.2. Применение приведенного здесь критерия с использованием таблиц процентных точек для Q дает явную экономию в вычислениях по сравнению с F-критерием. Однако использование (7.7.1) имеет значительную ценность как первый шаг в множественных процедурах Тьюки и Дункана. Такие процедуры обычно не попадают в раздел «быстрых» критериев, и читателю следует обратиться к работе Миллера (1966, гл. 2). Заметим, что (7.7.1) применяется и в других ортогональных классификациях (например, рандомизированных блоки и латинские квадраты), если ν выбрано в соответствии со степенями свободы ошибки.

Для однофакторной классификации статистика критерия оказывается проще с вычислительной стороны, если S_ν в (7.7.1) заменить на $\overline{W}/c$, где $\overline{W}$ — среднее k внутригрупповых размахов и c — постоянная из таблицы 7.3.2. Если воспользоваться приближением Патнайка (1950), то отношение $cn^{1/2}W(\overline{X})/\overline{W}$ распределено приближенно как $Q_{k,\nu}$, где ν обозначает эквивалентные степени свободы, приведенные в таблице 7.3.2. Более удобной с точки зрения использования является эквивалентная статистика

$$Q' = \frac{W\left(\sum_{j} X_{ij}\right)}{\sum_{i} W} \tag{7.7.2}$$

(межгрупповой размах делится на сумму внутригрупповых размахов), пяти- и однопроцентные точки которой табулированы Бейером (1968, стр. 368)[8]). Обобщение на случай двухфакторных и некоторых других классификаций имеется у Хартли (1950a), Стауде (1959), Мардьи (1967)[9]) и Дэйвида (1951). Соответствующие множественные процедуры сравнения (в духе Тьюки) для сбалансированных одно- и двухфакторных классификаций детально изучались Курием и др. (1965a, b). Последовательные критерии, использующие размах, для компонент дисперсий были предложены Гхошем (1965).

Возвращаясь к мощности приведенных критериев, мы должны различать различные вероятностные модели. Для

---

[8]) Этот вариант критерия Патнайка был описан автором в книге Сархана и Гринберга (1970).

[9]) Эту работу следует читать в связи с работой Смита и Хартли (1968).

модели компонент дисперсии (или случайных факторов)

$$X_{ij}=\mu+A_i+Z_{ij}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ k;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{7.7.3}$$

где μ постоянная и A_i, Z_{ij} — независимые нормально распределенные ошибки с дисперсиями σ'^2 и σ^2, известно, что стандартный F-критерий является РНМ критерием для гипотезы H_0: $\sigma'^2=0$ против H_1: $\sigma'^2>0$. Критерии, использующие размах, несколько хуже (Дэйвид (1953), упр. 7.7.1). В модели с фиксированными факторами

$$X_{ij}=\mu+\alpha_i+Z_{ij},$$

где α_i — постоянные, удовлетворяющие условию $\sum\alpha_i=0$, ситуация не так проста. Мощность критерия, использующего размах, в отличие от F-критерия, не выражается как функция одного параметра $\sum\alpha_i^2$, а зависит от $k-1$ параметров (упр. 7.7.2). Пусть $\alpha_{(1)}\leqslant\alpha_{(2)}\leqslant\ldots\leqslant\alpha_{(k)}$ — упорядоченные значения α_i. Тогда при фиксированном значении $\sum\alpha_i^2$ (т. е. мощности F-критерия) максимум мощности стьюдентизированного критерия (7.7.1) достигается при $\alpha_{(1)}=-\alpha_{(k)}$, $\alpha_{(2)}=\ldots=\alpha_{(k-1)}=0$, а минимум мощности (если k четное) — при $-\alpha_{(1)}=\ldots=-\alpha_{(k/2)}=$ $=\alpha_{(k/2+1)}=\ldots=\alpha_{(k)}$. В первом случае критерий, использующий размах, лучше F-критерия, а во втором — хуже (Дэйвид (1953); Лахенбрук и Дэйвид (1968)). Использование (7.7.2) приводит, конечно, к несколько меньшей мощности критерия, чем при использовании (7.7.1), но никаких численных результатов нет.

Некоторые «быстрые» критерии для дискретных величин. Размах k независимых биномиальных $b(p,\ n)$ величин r_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ был предложен Сиотани (1957) для проверки гипотезы о том, что в k биномиальных $b(p_j,\ n)$ испытаниях вероятности равны, т. е. $p_1=p_2=\ldots$ $\ldots=p_k=p$. Таблицы получены Сиотани и Озавой (1958), которые предложили при неизвестных p брать в таблицах (которые ограничивались значениями $n\geqslant 10$) $p=\hat{p}=$ $=\sum r_i/kn$. Точное распределение размаха для неизвестного p, основанное на гипергеометрическом распределении соответствующем фиксированным числам n и $\sum_{i=1}^{k} r_i$, было табулировано Ишии и Ямасаки (1961) для $n \leqslant 10$.

Для полиномиального распределения с наблюдаемой частотой y_i и вероятностным параметром p_i для i-го класса ($i=1, 2, \ldots, k$; $\sum y_i = N$; $\sum p_i = 1$) критерий однородности ($p_i = 1/k$ при всех i) может быть основан на статистиках $\frac{\max Y_i}{N}$, $\frac{\min Y_i}{\max Y_i}$ или размахе величин Y_i/N. Джонсон и Янг (1960) рассмотрели различные приближенные методы для получения верхних процентных точек этих статистик (см. также упр. 5.3.6). Одно из этих приближений основано на том, что стандартизированные величины

$$Z_i = \left(Y_i - \frac{N}{k}\right) \Big/ \left[N \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{k-1}{k}\right]^{1/2} \qquad (i=1, 2, \ldots, k)$$

имеют (асимптотически при $N \to \infty$) то же вырожденное k-мерное нормальное распределение с коэффициентом корреляции $-1/(k-1)$, что и величины $\left(\frac{k}{k-1}\right)^{1/2} (Z_i - \bar{Z})$, где Z_i — независимые стандартные нормальные величины. Таким образом, приближенно размах величин Y_i/N равен размаху величин Z_i, умноженному на $(Nk)^{-1/2}$. Некоторые точные таблицы процентных точек были построены Беннетом и Накамурой (1968). Так как условное распределение k независимых одинаково распределенных пуассоновских величин X_i при условии, что $\sum X_i = N$, совпадает с совместным распределением вышеупомянутых Y_i, то отсюда следует, что условное распределение размаха для X_i при условии, что $\bar{X} = \frac{N}{k}$, приближенно такое же, что и распределение $W \cdot (N/k)^{1/2}$. (Об использовании этого результата см. работу Петтигру и Молера (1967).)

§ 7.8. Вероятностная бумага

Графический метод оценивания параметров непрерывных распределений, известных с точностью до сдвига и масштаба, состоит в следующем: зафиксируем упорядоченные наблюдения $x_{(i)}$ ($i=1, 2, \ldots, n$) против точек $v_i = P^{*-1}(p_i)$, где P^* — ф. р. стандартизированной величины $Y = (X-\mu)/\sigma$ и p_i — интуитивно правдоподобные и простые вероятностные уровни, например, такие, как $p_i = \frac{i}{n+1}$ или $p_i = \frac{i-1/2}{n}$. Работа облегчается, если имеется вероятностная бумага, соответствующая P^*, но можно обойтись и без нее. Теперь на глаз соединим точки $(v_i, x_{(i)})$. (Если полученный график далек от прямолинейности, то следует проверить допущения об исходном распределении. Это является одним из достоинств вероятностной бумаги, и к нему мы еще вернемся.) Эту линию можно рассматривать как приближение к (невзвешенной) линии регрессии $x_{(i)}$ на v_i, т. е.

$$x = \dot{\mu} + \dot{\sigma} v, \tag{7.8.1}$$

где оценки для μ и σ имеют вид

$$\dot{\mu} = \bar{x} - \dot{\sigma}\bar{v} \quad \text{и} \quad \dot{\sigma} = \left(\sum x_{(i)} (v_i - \bar{v})\right) / \sum (v_i - \bar{v})^2. \tag{7.8.2}$$

Графически $\dot{\sigma}$ — наклон линии регрессии; тогда $\dot{\mu}$ можно найти из (7.8.2). Если Y имеет симметричное распределение, то $\bar{v} = 0$ и $\dot{\mu} = \bar{x}$ — ординате в (7.8.1), соответствующей $v = 0$ или $p = 1/2$. В этом случае σ удобно получить как разность ординат в (7.8.1) для $v = 0$ и $v = 1$, где последнее значение в нормальном случае соответствует значению $p = 0{,}8413$.

Чернов и Либерман изучили теоретически этот метод как для нормальной (1954), так и обобщенной (1956) вероятностной бумаги [10]). В нормальном случае они показали, что выбор часто рекомендуемых для построения графика точек $p_i = \frac{i}{n+1}$ приводит к намного худшим оценкам для σ с точки зрения среднеквадратичного отклонения, чем те, которые получаются при использовании величин $p_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)/n$. Конечно, оба метода (как и все другие разумные методы) дают $\dot{\mu} = \bar{x}$. Авторы поднимают интересный вопрос: при каком выборе p_i получаются наилучшие (т. е. с минимальным среднеквадратичным отклонением) оценки для σ (а) среди несмещенных оценок и (б) среди оценок, имеющих смещение? Для $n \leqslant 10$ они табулировали p_i,

---

[10]) Заметим, что Чернов и Либерман взяли $x_{(i)}$ в качестве абсциссы, а v_i — в качестве ординаты, в отличие от приведенного здесь.

соответствующие (а) и (б), и сравнили среднеквадратичные отклонения шести оценок (таблица 7.8). В частности, следует отметить, что выбор $p_i=\left(i-\frac{1}{2}\right)/n$, приводящий к некоторому смещению, оказался очень удачным (см. также работу Блома (1958, стр. 143), который указывает, что этот выбор восходит к Блиссу и Стивенсу (1937) и что величины $p_i=\left(i-\frac{3}{8}\right)\Big/\left(n+\frac{1}{4}\right)$ приводят к практически несмещенной оценке для σ со среднеквадратичным отклонением почти таким, как у НЛНО). Дальнейшее обсуждение этого вопроса со специальным обращением к распределению экстремальных значений дается Кимболлом (1960).

Использование вероятностной бумаги в качестве быстрого способа проверки предполагаемого вида распределения дает ценную и многостороннюю помощь всем тем, кто занимается прикладной статистикой. Кроме нормального распределения и распределения экстремальных значений с этой точки зрения изучалось также гамма-распределение с тремя параметрами (Уилк и др. (1962а)).

Для предположительно нормальных наблюдений за визуальным исследованием вероятностных графиков может (но часто не обязан) следовать критерий нормальности (см. упр. 7.8.1) или критерий для выявления аномальных наблюдений (§ 8.2). Для выявления отклонения от экспоненциального распределения с плотностью $p(x)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}$ при $x\geqslant 0$ Джексон (1967) предложил статистику $\sum \mu_{i:n}x_{(i)}/\sum x_{(i)}$, т. е. подходящим образом нормированную сумму произведений упорядоченных наблюдений и математических ожиданий $\mu_{i:n}=\mathrm{E}\,(X_{(i)}/\sigma)$.

Аккуратное развитие графического подхода дано Дэниэлем (1959), который предложил нанесение на вероятностную бумагу 2^n-1 упорядоченных абсолютных контрастов в 2^n-факторном эксперименте. При стандартных предположениях для таких экспериментов контрасты при нулевой гипотезе об отсутствии эффектов обработки являются независимыми правосторонне нормальными величинами с одинаковыми дисперсиями. Отмеченные отклонения наибольших контрастов от прямой линии, проходящей через начало координат на правосторонне нормальной вероятностной бумаге указывают на наличие соответ-

Таблица 7.8

Сравнение среднеквадратичных отклонений от σ различных оценок для σ (репродуцировано из работы Чернова и Либермана (1954))

n	1	2	3	4	5	6
2	0,57080	0,57081	0,36338	0,36340	1,07533	0,42611
3	0,27324	0,27549	0,21460	0,21599	0,49856	0,22649
4	0,17810	0,18006	0,15117	0,15259	0,31559	0,15558
5	0,13177	0,13332	0,11643	0,11764	0,22751	0,11872
6	0,10447	0,10571	0,09459	0,09560	0,17630	0,09605
7	0,08650	0,08714	0,07961	0,08015	0,14306	0,08067
8	0,07379	0,07469	0,06872	0,06950	0,11987	0,06954
9	0,06432	0,06501	0,06044	0,06105	0,10283	0,06111
10	0,05701	0,05759	0,05393	0,05445	0,08981	0,05449

В столбцах таблицы:

1. Дисперсия нелинейной несмещенной оценки S' из (7.3.1) с минимальной дисперсией.

2. Дисперсия несмешенной оценки с минимумом дисперсии (оценки, линейной по отношению к упорядоченным наблюдениям).

3. Среднеквадратичное отклонение от σ нелинейных смещенных оценок с минимальным среднеквадратичным отклонением.

4. Среднеквадратичное отклонение от σ смещенной оценки, линейной по отношению к упорядоченным наблюдениям и имеющей минимальное среднеквадратичное отклонение.

5. Среднеквадратичное отклонение от σ смещенной оценки, основанной на ординатах $i/(n+1)$.

6. Среднеквадратичное отклонение от σ смещенной оценки, основанной на ординатах $\left(i-\frac{1}{2}\right)/n$.

ствующих главных эффектов или взаимодействий. Попытка частично формализовать этот подход как множественную решающую процедуру была предпринята Бирнбаумом (1959, 1961). Оценки дисперсии ошибки по m наименьшим абсолютным контрастам рассматривались Уилком и др. (1963а). Кокс и Ло (1967) видоизменили метод Дэниэла. (См. также работы Уилка и Гнанадесикана (1968), где дано общее обсуждение вероятностных графиков и связанных с ними методов, Кокса (1968, стр. 276) и Хилла (1968), где рассматриваются методы обнаружения аномальных наблюдений в многомерном случае.)

§ 7.9. Контроль качества

В статистическом контроле качества из процесса производства через некоторые промежутки времени берутся малые выборки (обычно объема $n=5$). Для каждой выборки среднее, а часто и размах отмечаются на контрольных картах, давая картину изменения этих величин во времени. Для среднего $\bar{x}$ контрольная карта состоит из трех горизонтальных линий: центральная линия проходит через точку $\bar{\bar{x}}$ — среднее большого числа N предшествующих выборок объема n, а верхний и нижний пределы контроля имеют вид $\bar{\bar{x}} \pm 3\hat{\sigma}_w/n^{1/2} = \bar{\bar{x}} \pm A_2\bar{w}$. Здесь $\hat{\sigma}_w$ — оценка для σ, использующая средний размах и обсуждавшаяся в § 7.3, именно, $\bar{w}/d_n$, где $\bar{w}$ — средний размах, соответствующий $\bar{x}$. Заметим, что вместо d_n в литературе по контролю качества часто фигурирует обозначение d_2. Наконец, $A_2 = 3/d_n n^{1/2}$ — удобная широко табулированная величина (см., например, Дункан (1965)). Со статистической точки зрения идея контрольных карт проста: для достаточно больших N, когда $\bar{\bar{x}}$ и $\hat{\sigma}_w$ можно взять равными их математическим ожиданиям μ и σ, вероятность того, что частное среднее выйдет за контрольные линии, равна 0,0027 в обычной нормальной теории. Появление события с такой малой вероятностью может естественно интерпретироваться как выход процесса из-под контроля и является указанием о необходимости корректировки. Подобные замечания применимы и к картам для размаха, для которых верхние и нижние контрольные линии имеют вид

$$\bar{w} \pm 3\,(V_n)^{1/2}\,\bar{w}/d_n = \begin{cases} D_1\bar{w}, \\ D_3\bar{w}, \end{cases}$$

где $(V_n)^{1/2}\bar{w}/d_n$ — оценка стандартного отклонения размаха W_n. Величины D_1 и D_3 широко табулированы.

Так как размах не распределен нормально, то выбор контрольных линий по принципу 3σ еще более произволен, чем в случае карт для средних значений, но по-прежнему очень мала найденная в соответствии с нормальной теорией вероятность того, что частное значение размаха выйдет за эти линии, если с процессом все в порядке. Ясно, что верхняя граница более важна, чем нижняя, которой можно пренебречь.

Возникает вопрос о поведении контрольных карт в случае наблюдений, отличных от нормальных. Здесь для контрольных карт для средних, чья ширина определяется величиной d_n, существенна относительная устойчивость выражения $\mathsf{E}W_n/\sigma$ во многих случаях отклонений от нормальности. Так как коэффициент вариации размаха менее устойчив, карты размаха более чувствительны к отсутствию нормальности. Конечно, как предложил Кокс, с помощью оценок эксцесса β_2 исходной генеральной совокупности могут быть сделаны поправки к контрольным линиям. Однако даже без таких уточнений контрольные карты оказались очень полезными, давая легко понятный визуальный учет выходу продукции.

При использовании карт размаха и средних традиционно предполагается наличие точных оценок для μ и σ. Однако такой ситуации нет в случае, когда рассматриваются ранние стадии контроля качества для нового процесса. Хиллиер (1964, 1967) рассмотрел ошибки в случае, когда игнорируются флуктуации $\overline{\overline{X}}$ и $\hat{\sigma}_{\overline{w}}$, и показал, как начать работу с соответствующим образом модифицированными контрольными картами даже в случае ограниченного числа данных. Так, в случае карт для средних точная вероятность (по нормальной теории) того, что частное выборочное среднее $\overline{X}$ выйдет за контрольные линии, построенные, как указано выше, равна

$$P = 1 - \mathsf{P}\{\overline{\overline{X}} - A_2\overline{W} < \overline{X} < \overline{\overline{X}} + A_2\overline{W}\},$$

где $\overline{\overline{X}}$, $\overline{W}$ построены теперь по k предыдущим выборкам объема n. Мы имеем

$$P = 1 - \mathsf{P}\left\{-A_2 < \frac{\overline{X} - \overline{\overline{X}}}{\overline{W}} < A_2\right\}.$$

Из приближения Патнайка (§ 7.3) следует, что с. в.

$(\bar{X}-\bar{\bar{X}})/\bar{W}$ распределена приближенно как

$$\frac{Z\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{nk}\right)\sigma}{c\chi_\nu\sigma/\nu^{1/2}}=\frac{1}{cnk}(k+1)\,t_\nu,$$

где с. в. Z распределена нормально $N(0,\ 1)$, t_ν является t-статистикой Стьюдента с ν степенями свободы, ν и c даны в таблице 7.3.2. Хиллиер (1964) показал, что для $n=5$ значение P возрастает от уже упомянутого значения 0,0027 (соответствующего $k=\infty$) до 0,0044; 0,0067; 0,012 для $k=20$, 10, 5, соответственно. Хиллиер дает для $n=5$ и различных k те значения A_2^*, для которых

$$P^*=1-\mathsf{P}\{\bar{\bar{X}}-A_2^*\bar{W}<\bar{X}<\bar{\bar{X}}+A_2^*\bar{W}\}$$

приближенно равна $\alpha=0{,}001$; 0,0027; 0,01; 0,025; 0,05. Подобные результаты можно получить для карт размаха (Хиллиер (1967)).

Контрольные карты для наибольших и наименьших значений рассматривались Хоуэллом (1949), а для некоторых других величин Вейлером (1954). Оперативные характеристики контрольных карт для выборочных средних изучались Кингом (1952).

Для производственного процесса, требующего некоторого времени для изготовления изделия, подвергаемого измерению, простые текущие оценки расположения и разброса дают скользящие средние и соответствующие скользящие размахи (для выборок объема n). Среднее значение таких скользящих размахов можно рассматривать как обобщение средних последовательных разностей (случай $n=2$). Эффективность среднего скользящего размаха как оценки для σ изучалась Дэйвидом (1955), а его смещение при сдвиге или других систематических отклонениях выборочных средних — Шимадой (1957).

Толерантные интервалы для нормальных распределений, использующие размах. К статистическому контролю качества относится и следующий вопрос: можно ли для k выборок объема n из нормальной $N(\mu,\ \sigma^2)$ генеральной совокупности, представляющих продукцию некоторого производственного процесса, найти случайный интервал $(L,\ V)$ такой, что большая доля γ (скажем, 99%) продукции лежит в этом интервале с определенной вероятностью β?

Непараметрическое решение, не использующее предположение о нормальности, дано в § 2.6. Митра (1957) показал, что приближенные толерантные интервалы могут иметь вид $(\overline{\overline{X}}-c\overline{W},\ \overline{\overline{X}}+c\overline{W})$ и, используя приближение Патнайка для $\overline{W}$, табулировал c для различных k, n, γ и β. Математически c удовлетворяет приближенно уравнению

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{\overline{\overline{X}}-c\overline{W}}^{\overline{\overline{X}}+c\overline{W}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}\,dt>\gamma\right\}=\beta.$$

Конечно, за счет простоты можно получить некоторое увеличение эффективности (выражающееся в более короткой средней длине толерантного интервала), если вместо размаха использовать выборочное стандартное отклонение.

Упражнения

7.1.1. Пусть W и S, соответственно, размах и выборочное стандартное отклонение для некоторой нормальной выборки объема n. Доказать, что

(а) $\rho(W,\ S)=\dfrac{\sigma(S)/\mathsf{E}S}{\sigma(W)/\mathsf{E}W}=(\operatorname{eff}\hat{\sigma}_W)^{1/2}$;

(б) регрессия W на S линейна;

(в) дисперсия W при условии, что $S=s$, пропорциональна s^2.

Для каких статистик, кроме размаха, имеют место подобные результаты? (Указание. Для случая (а) воспользоваться равенством $\mathsf{E}WS=\mathsf{E}\left(\dfrac{W}{S}\cdot S^2\right)$ и независимостью величин W/S и S^2 (§ 5.2).) Хартли (1955); Дэйвид и Перез (1960).)

7.2.1. Разложив в ряд в окрестности нуля функцию распределения нормального закона $\Phi(x)$, показать, что

$$4\Phi(x)\,[1-\Phi(x)]=e^{-2x^2/\pi}\left(1+\frac{2(\pi-3)}{3\pi^2}x^4-\ldots\right).$$

Затем показать для нормальных $N(0,\ 1)$ выборок объема $n=2s+1$ ($s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), что плотность распределения выборочной медианы M пропорциональна (приближенно) выражению

$$e^{-2sx^2/\pi}\left(1+\frac{2(\pi-3)\,s}{3\pi^2}\,x^4\right)e^{-x^2/2}$$

и что дисперсия и эксцесс β_2 величины M приближенно равны

$$\mathsf{D}M\approx\frac{\pi}{\pi+4s}\left[1+\frac{8(\pi-3)\,s}{(\pi+4s)^2}\right],\quad \beta_2(M)\approx3+\frac{16(\pi-3)s}{(\pi+4s)^2}$$

(Кэдуэлл (1952)).

7.3.1. Показать, что для плотности распределения экстремальных значений $p(x)=\exp(-x-e^{-x})$ функция распределения и среднее значение размаха W в выборках объема n равны соответственно:

$$F(w)=n\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}C_{n-1}^{i-1}\left[i+(n-i)e^{-w}\right]^{-1},$$

$$\mathsf{E}W=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}C_{n}^{i}\log\frac{i}{n}$$

(Дэйвид (1954)).

7.3.2. Пусть (X_i, Y_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$ — случайная выборка из двумерного нормального распределения с единичными дисперсиями и коэффициентом корреляции ρ. Показать, что коэффициент корреляции $\rho_w(n, \rho)$ между размахами для X_i и для Y_i при $n=2, 3$ равен, соответственно,

$$\rho_w(2, \rho)=\psi(\rho)/\psi(1),$$

$$\rho_w(3, \rho)=\left(\psi(\rho)+2\psi\left(\frac{1}{2}\rho\right)\right)\Big/\left(\psi(1)+2\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

где $\psi(\rho)=\frac{2}{\pi}\left(\rho\arcsin\rho-1+(1-\rho^2)^{1/2}\right)$.

(Указание. Для $n=3$ выразить размах для X_i как $\frac{1}{2}(|X_1-X_2|+|X_2-X_3|+|X_3-X_1|)$ и т. д.) (Курц и др. (1966)).

7.3.3. Пусть (X_i, Y_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$ — случайная выборка из непрерывного двумерного распределения с совместной функцией распределения $H(x, y)$ и маргинальными ф. р. $F(x)$, $G(y)$ $(a\leqslant x\leqslant b;$ $c\leqslant y\leqslant d)$.

а) Интегрированием по частям показать, что

$$\operatorname{cov}(X_i, Y_i)=\int_a^b\int_c^d(H-FG)\,dx\,dy,$$

и поэтому

$$\operatorname{cov}(X_{(n)}, Y_{(n)})=\int_a^b\int_c^d(H^n-F^nG^n)\,dx\,dy.$$

б) Пусть $V=X_{(n)}-X_{(1)}$, $W=Y_{(n)}-Y_{(1)}$. Используя равенство

$$\operatorname{cov}(V, W)=\operatorname{cov}(X_{(n)}, Y_{(n)})+\operatorname{cov}(X_{(1)}, Y_{(1)})-$$
$$-\operatorname{cov}(X_{(n)}, Y_{(1)})-\operatorname{cov}(X_{(1)}, Y_{(n)})$$

показать, что

$$\operatorname{cov}(V, W) = \int_a^b \int_c^d [H^n + (F-H)^n + (G-H)^n + (1-F-G+H)^n -$$

$$- F^n G^n - F^n (1-G)^n - G^n (1-F)^n - (1-F)^n (1-G)^n] \, dx \, dy$$

(Мардья (1967)).

7.4.1. Вывести соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \left[i - \frac{1}{2}(n+1) \right] x_{(i)} = \frac{1}{4} \sum_{i,\, j=1}^{n} |x_i - x_j|,$$

для того, чтобы показать, что оценки «σ» из (7.4.1) и G из (7.4.2) связаны равенством

$$«\sigma» = \frac{1}{2} \pi^{1/2} G.$$

Заметив, что $\mathsf{E}G = \mathsf{E}\,|X_1 - X_2|$, показать, что «σ» — несмещенная оценка для σ в случае нормальных выборок и что для распределений с ф. р. $P(x)$

$$\mathsf{E}\,«\sigma» = 2\pi^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x \left[P(x) - \frac{1}{2} \right] dP(x)$$

(Нэир (1936); Дэйвид (1968)).

7.5.1. Пусть линия регрессии Y на X дается соотношением

$$\mathsf{E}(Y \mid x) = \alpha + \beta x.$$

Показать, что несмещенной оценкой для $\sigma_{xy} = \operatorname{cov}(X, Y)$ будет

$$\hat{\sigma}'_{xy} = (X_{(n)} - X_{(1)})\,(Y_{[n]} - Y_{[1]})/c_n^2,$$

где

$$C_n^2 = \mathsf{E}\,(W_x^2/\sigma_x^2) \qquad (W_x = X_{(n)} - X_{(1)}).$$

Если, кроме того, $\mathsf{D}(Y \mid x) = \sigma_y^2$ не зависит от x, то

$$\mathsf{D}\hat{\sigma}'_{xy} = \left[\mathsf{E}\,\left((W_x^4/\sigma_x^4 c_n^4) - 1 \right) \rho^2 + \frac{2}{c_n^2}(1-\rho^2) \right] \sigma_x^2 \sigma_y^2$$

(Цукибаяши (1962)).

7.6.1. Вывести утверждения, сформулированные в (7.6.8) — (7.6.13) (Огава (1962)).

7.6.2. Проверить, что для нормальной генеральной совокупности наилучшие линейные оценки μ_0^*, σ_0^* для параметров μ и σ, основан ные на двух общих порядковых статистиках и минимизирующие сумму $D\mu_0^*+cD\sigma_0^*$ для $c=1, 2, 3$, и их эффективности имеют вид

c	μ_0^*	σ_0^*	Эффективности	
			μ_0^*	σ_0^*
1	$\frac{1}{2}(X_{(0,1525\,n)}+X_{(0,8475\,n)})$	$0{,}4875\,(X_{(0,8475\,n)}-X_{(0,1525\,n)})$	0,729	0,552
2	$\frac{1}{2}(X_{(0,1274\,n)}+X_{(0,8726\,n)})$	$0{,}1391\,(X_{(0,8726\,n)}-X_{(0,1274\,n)})$	0,683	0,594
3	$\frac{1}{2}(X_{(0,1147\,n)}+X_{(0,8853\,n)})$	$0{,}4160\,(X_{(0,8853\,n)}-X_{(0,1147\,n)})$	0,654	0,614

(Эйзенбергер и Познер (1965)).

7.7.1. Показать, что для модели (7.7.3) стандартный F-критерий имеет мощность

$$\mathrm{P}\,\{F>F_\alpha/(1+n\zeta^2)\},$$

где F_α — верхняя α-значимая точка F с $k-1$, $k(n-1)$ степенями свободы и $\zeta=\sigma'/\sigma$. Соответствующим выбором ζ мощность может быть сделана равной выбранному значению $1-\beta$. Показать, что мощность Q'-критерия, соответствующая этому значению ζ, равна

$$\mathrm{P}\,\{(1+n\zeta^2)^{1/2}\,Q_{k,\nu}>q_\alpha\}=\mathrm{P}\,\{Q_{k,\nu}>q_\alpha\,(F_{1-\beta}/F_\alpha)^{1/2}\},$$

где ν дается таблицей 7.3.2. Вычислить мощность для $\alpha=0{,}05$; $\beta=0{,}1$; $k=8$; $n=6$ (ответ: 0.87) (Дэйвид (1953)).

7.7.2. Если $X_i=\mu+\alpha_i+Z_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то W' — размах для X_i — можно назвать нецентральным размахом. Используя упр. 2.3.2, показать, что ф. р. W' для нормальных выборок с $\sigma=1$ дается соотношением

$$\mathrm{P}\,\{W'\leqslant w\}=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_i-\alpha_i)\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[\Phi(x_i-\alpha_j+w)-\Phi(x_i-\alpha_j)]\right\}dx_i$$

и что ф. р. стьюдентизированного нецентрального размаха $Q'=W'/S_\nu$ равна

$$\mathrm{P}\,\{Q'\leqslant q\}=\int_0^\infty \mathrm{P}\,\{W'\leqslant s\}\,f(s)\,ds,$$

где $f(s)$ — плотность распределения с. в. S_ν.

7.8.1. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная нормальная $N(\mu, \sigma^2)$ выборка. Рассмотрим статистику

$$W^* = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{(i)}\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

где a_i — стандартизованные коэффициенты $\left(\sum a_i^2 = 1\right)$ НЛНО для σ. Положим $b = \sum a_i X_{(i)}$ и $T^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2$. Показать, что

а) $\mathrm{E}W^{*r} = \mathrm{E}b^{2r}\, \mathrm{E}T^{2r}$;
б) максимальное значение W^* равно 1;
в) минимальное значение W^* равно $na_1^2/(n-1)$;
г) для $n = 3$ плотность распределения с. в. W^* имеет вид

$$\frac{3}{\pi}(1 - w^*)^{-1/2}\, w^{*-1/2} \quad \left(\frac{3}{4} \leqslant w^* \leqslant 1\right)$$

(сравните с § 5.2, где W^* было найдено эмпирически для того, чтобы получить универсальный критерий нормальности) (Шапиро и Уилк (1965, 1968); Шапиро и др. (1968); Уилк и Шапиро (1968)).

ГЛАВА 8

ОБРАЩЕНИЕ С АНОМАЛЬНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

§ 8.1. Проблемы, связанные с аномальными и сдвинутыми наблюдениями

Надлежащее обращение с аномальными наблюдениями долго было предметом изучения. Однако мы не будем здесь давать исторического обзора, так как имеется несколько совсем недавних публикаций с введениями, посвященными истории этого вопроса (Энскомб (1960); Фергюсон (1961 а); Дорибос (1966)). Традиционный подход к выявлению резко выделяющихся наблюдений при помощи критериев значимости вытекает из интуитивных представлений. Такие критерии преследуют обычно одну из следующих целей:

а) провести сортировку данных перед их анализом;

б) выявить присутствие аномальных наблюдений и тем самым указать на необходимость более тщательного изучения процесса получения наблюдений;

в) обнаружить наблюдения, представляюшие особый интерес именно из-за их аномальности.

В § 8.2 мы приводим различные статистики критериев, включающие обычно экстремальные порядковые статистики, и, по мере возможности, указываем источники таблиц процентных точек; почти всегда предполагается нормальность исходной генеральной совокупности. Необходимая теория распределений для многих случаев уже была дана в главе 5. Критерии для сдвинутых наблюдений обсуждаются в § 8.3. Поясним их связь с критериями для аномальных наблюдений. Критерии для сдвинутых наблюдений предназначены для проверки равенства нескольких генеральных совокупностей при альтернативе, что одна из совокупностей «сдвинута», т. е. отличается от остальных, распределения которых совпадают. Если каждая генеральная совокупность представлена единственным наблюдением, то задача сводится к определению резко выделяющихся наблюдений, как в случае (в) выше; если же каждую генеральную совокупность представляют m наблюдений ($m > 1$), то проблема состоит в нахождении группы аномальных наблюдений. Важным примером последнего типа является предварительная проверка n новых лекарств (каждое из которых проверяется на группе из m больных), когда нет уверенности, что все лекарства эффективны, но есть надежда, что одно из них может быть таким. Характеристики ряда общих, используемых для выявления аномальных наблюдений, критериев (с точки зрения их использования для целей (в) и (б)) изучаются в § 8.4. Обычным предположением здесь является существование только одного аномального наблюдения, отличающегося от остальной выборки параметром сдвига, а иногда и параметром масштаба. Такое предположение — правдоподобное приближение к ситуации, когда вероятность «загрязнения» выборки аномальными наблюдениями мала. Однако мы изучаем также и более общие ситуации (см. работу Диксона (1962)).

До сих пор мы не рассматривали специально случай (а). При обычной сортировке данных аномальные наблюдения — помеха для удовлетворительного анализа. Традиционное средство от этой помехи было простым: отбросить наблюдения, являющиеся резко выделяющимися с точки зрения некоторого критерия, а затем оценивать интересующие нас параметры или применять соответствующий критерий значимости. Это так называемая область «отвержения аномальных наблюдений». Мы попытаемся показать, что обращение с аномальными наблюдениями носит более широкий характер (даже с точки зрения задачи (а)). Если главная цель анализа данных — оценивание параметров, то центральную роль в этом играют свойства используемых оценок. Отбрасывание аномальных наблюдений до формирования оценок по-прежнему может быть разумным, но критерии следует применять не на традиционных уровнях значимости, а на уровнях, которые дают оценки, оптимальные в некотором смысле. Обычно аномальные наблюдения не следует отвергать целиком; часто лучшие оценки получаются, если просто взять эти наблюдения с меньшим весом. Эти вопросы обсуждаются в § 8.5. Можно пойти еще дальше и, игнорируя любые типы критериев значимости, немедленно использовать оценки, робастные к присутствию аномальных наблюдений. Простейшим примером таких оценок является выборочная медиана как мера сдвига. Это возвращает нас к главе 6.

Становится ясным, что существует много аспектов обращения с резко выделяющимися наблюдениями и что много больше работы еще предстоит сделать. Когда общая причина может объяснить присутствие нескольких аномальных наблюдений, становится возможным обращаться с такими загрязненными данными, как с выборкой из генеральной совокупности, представляющей смесь двух различных распределений (см., например, работу Блишке (1968)). Большие затруднения возникают, когда данные уже не представляют в идеале выборки, а скорее соответствуют спланированному эксперименту. Описываемые ниже методы могут быть распространены или легко приспособлены к однофакторным классификациям, однако дальнейшие усложнения приводят к множеству новых проблем. Мы не рассматриваем эту тему, а отсылаем читателя к работам Энскомба (1960, 1961), Энскомба и Тьюки (1963), Бросса (1961), Дэниэля (1960), Шрикантана (1961).

В массе проблем не должны быть пропущены некоторые простые вопросы, связанные с аномальными наблюдениями Статистика может иметь дело только с частью проблем для аномальных наблюдений. Само собой разумеется, что лучше было бы отыскать физическую причину их присутствия и способ предотвратить их появление, будь это до или после применения некоторого критерия. Если подозреваются какие-то наблюдения, то следует, обратясь к эксперименту, прояснить ситуацию. И только если такой способ не применим, нужно обращаться к чисто статистическим процедурам. В любом случае анализ не завершен и не совсем правдив, если он не упоминает о способе обращения с резко выделяющимися наблюдениями (см. также работу Краскела (1960)). «Байесовский подход к отвержению аномальных наблюдений» намечен де Финетти (1961). Название кажется несколько не соответствующим подходу, так как здесь наблюдения не отвергаются, однако, в действительности, аномальные наблюдения могут иметь очень малый вес.

Общий обзор вопросов, связанных с аномальными наблюдениями, дан Фергюсоном (1961 а), Диксоном (1962), Чу (1964) и Граббсом (1969).

§ 8.2. Критерии для аномальных наблюдений

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые с. в., имеющие одинаковое нормальное $N(\mu, \sigma^2)$ распределение. Это — нулевая гипотеза. Мы рассмотрим статистики критериев, чувствительных к различным ненулевым гипотезам, в первую очередь к сдвигу математического ожидания (возможно, сопровождаемому изменениями дисперсии) одной или нескольких величин. Даже в этом простом случае можно различать ряд вариантов, обозначаемых ниже (а) — (г), зависящих от степени информации о μ и σ. Более того, можно интересоваться сдвигами в разных направлениях. Для каждого из возникающих 8 случаев мы приводим по крайней мере одну статистику и, где возможно, ссылки на таблицы ее процентных точек. Односторонняя статистика приводится слева; для краткости она записана только в форме, подходящей для выявления аномальных наблюдений на правом конце выборки; ПХ обозначает таблицы Пирсона и Хартли (1966), w_n обозначает размах, $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$, и s_ν^2 — независимая среднеквадратичная оценка для σ^2 с ν степенями свободы. Кроме того, мы полагаем $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_{(i)}/(n-1)$, $\bar{x}_{n,n-1} = \sum_{i=1}^{n-2} x_{(i)}/(n-2)$.

(а) Известны μ и σ.

$A_1 = (x_{(n)} - \mu)/\sigma$ (ПХ, табл. 24); $\quad A_2 = \max |x_i - \mu|/\sigma$;

$A_3 = \chi_n^2 = \sum (x_i - \mu)^2/\sigma^2$.

(б) Известно только σ.

$B_1 = (x_{(n)} - \bar{x})/\sigma$ (Граббс (1950)); $\quad B_2 = \max |x_i - \bar{x}|/\sigma$;

$B_3 = (x_{(n)} - x_{(n-1)})/\sigma$ (Ирвин (1925)); $\quad B_4 = w_n/\sigma$ (ПХ, табл. 22).

$B_5 = \chi_{n-1}^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2/\sigma^2$.

(в) Значения μ и σ неизвестны, но имеются независимые оценки для σ^2.

$C_1 = (x_{(n)} - \bar{x})/s_\nu$ (ПХ, табл. 26); $C_2 = \max|x_i - \bar{x}|/s_\nu$ (Гальперин и др. (1955));

$C_3 = w_n/s_\nu$ (ПХ, табл. 29);

$$C_4 = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{\left(\sum (x_i - \bar{x})^2 + \nu s_\nu^2\right)^{1/2}}$$ (ПХ, табл. 26 a);

$$C_5 = \frac{\max|x_i - \bar{x}|}{\left(\sum (x_i - \bar{x})^2 + \nu s_\nu^2\right)^{1/2}}$$ (ПХ, табл. 26 b).

(г) Значения μ и σ неизвестны.

$D_1 = (x_{(n)} - \bar{x})/s$ (Граббс (1950))[1]; $D_2 = \max|x_i - \bar{x}|/s$ (ПХ, табл. 26 b);

$D_3 = w_n/s$ (ПХ, табл. 29 c);

$$D_4 = \frac{n^{1/2}\sum (x_i - \bar{x})^3}{\left(\sum (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}}$$ (ПХ, табл. 34 b);

D_4;

$$D_5 = \frac{n\sum (x_i - \bar{x})^4}{\left(\sum (x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$ (ПХ, табл. 34 c);

$$D_6 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n-2} (x_{(i)} - \bar{x}_{n,\,n-1})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

(Граббс (1950)); статистики r Диксона (Диксон (1951)).

Большинство приведенных статистик имеет интуитивную привлекательность; при этом используются экстремальные порядковые статистики и неизвестные параметры заменяются достаточными статистиками для них. Во многих случаях были обнаружены различные свойства оптимальности статистик, обычно много позже того, когда эти статистики были впервые применены. Отметим, что C_1, D_1 и C_4 представляют стьюдентизированные формы B_1. При этом стьюдентизация является, соответственно, внешней,

[1]) Заметим, что у Граббса $s = \left(\sum (x_i - \bar{x})^2/n\right)^{1/2}$

внутренней и смешанной согласно терминологии главы 5. Соответствующие двухсторонние статистики C_2, D_2 и C_8 имеют такое же отношение к B_2. С точностью до постоянных множителей D_1 и D_2 являются частными случаями C_4 и C_8, соответствующими значению $\nu=0$. В список также включены несколько статистик (A_3, B_5, D_4, D_5), первоначально не предназначавшихся для обнаружения аномальных наблюдений, но тем не менее достаточно эффективных при соответствующих условиях. Хотя эти статистики не выделяют экстремумов, они включены сюда для сравнения. Что касается B_5, то ясно, что статистика, фокусирующая внимание на частных свойствах наблюдений, будет предпочтительней при условиях, для которых она выбрана, чем эта, охватывающая все наблюдения, статистика. Мы можем отметить, что это замечание применимо не только к сравнению B_5 с другими B-статистиками, но и в некоторых других случаях (Бодмер (1959); Дэйвид и Ньюэлл (1965)). Преимущества, которые специализированные статистики имеют относительно B_5, могут быть небольшими и должны исследоваться в каждом случае.

Наибольший выбор статистик имеется в случае (г) наиболее важном из всех. Статистика D_6 предназначена быть эффективной в случае наличия справа двух аномальных наблюдений. Метод построения D_6 предлагает дальнейшие обобщения, но в этой ситуации нет таблиц процентных точек. Более простая статистика $D_0 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{(i)} - \bar{x}_n)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ не дает ничего нового, так как $D_0 = 1 - nD_1^2/(n-1)^2$.

Статистики r Диксона представляют собой отношения разностей порядковых статистик, выбранных так, чтобы быть эффективными при следующих условиях:

(1) для единственного аномального наблюдения $x_{(n)}$

$$r_{10} = (x_{(n)} - x_{(n-1)})/(x_{(n)} - x_{(1)});$$

(2) для аномального наблюдения $x_{(n)}$ (без наблюдения $x_{(1)}$)

$$r_{11} = (x_{(n)} - x_{(n-1)})/(x_{(n)} - x_{(2)});$$

(3) для аномального наблюдения $x_{(n)}$ (без наблюдений $x_{(1)}$ и $(x_{(2)})$

$$r_{12}=(x_{(n)}-x_{(n-1)})/(x_{(n)}-x_{(3)});$$

(4) для аномального наблюдения $x_{(n)}$ (без наблюдения $x_{(n-1)}$)

$$r_{20}=(x_{(n)}-x_{(n-2)})/(x_{(n)}-x_{(1)});$$

(5) для аномального наблюдения $x_{(n)}$ (без наблюдений $x_{(n-1)}$, $x_{(1)}$)

$$r_{21}=(x_{(n)}-x_{(n-2)})/(x_{(n)}-x_{(2)});$$

(6) для аномального наблюдения $x_{(n)}$ (без наблюдений $x_{(n-1)}$, $x_{(1)}$, $x_{(2)}$)

$$r_{22}=(x_{(n)}-x_{(n-2)})/(x_{(n)}-x_{(3)}).$$

Приведенные статистики являются односторонними. Фергюсон (1961b) рассматривал также двухсторонние аналоги r_{10}, а именно,

$$r_{10}^{(2)}=\max(r_{10},\ r'_{10}),\quad \text{где}\quad r'_{10}=(x_{(2)}-x_{(1)})/(x_{(n)}-x_{(1)}). \tag{8.2.1}$$

Поскольку для любой постоянной $c>0$

$$\mathsf{P}\{R_{10}^{(2)}>c\}=\mathsf{P}\{R_{10}>c\}+\mathsf{P}\{R'_{10}>c\}-\mathsf{P}\{R_{10}>c,\ R'_{10}>c\},$$

то ввиду симметрии имеем при нулевой гипотезе

$$\mathsf{P}\{R_{10}^{(2)}>c\}=2\mathsf{P}\{R_{10}>c\}-\mathsf{P}\{R_{10}>c;\ R'_{10}>c\}. \tag{8.2.2}$$

Таким образом,

$$\mathsf{P}\{R_{10}^{(2)}>c\}\leqslant 2\mathsf{P}\{R_{10}>c\}, \tag{8.2.3}$$

и для достаточно больших c правая часть неравенства (8.2.3) представляет хорошее приближение к левой части, так как последний член (8.2.2) в этом случае мал. Верхняя α-значимая точка для R_{10} является тогда приближенной верхней 2α-значимой точкой для $R_{10}^{(2)}$. Результаты такого типа (Кинг (1953)), конечно, применимы и к другим статистикам в (а) — (г).

Возникает вопрос, не должны ли мы всегда использовать двухсторонние критерии, так как ясно, что применение односторонних критериев в направлении, являющемся более перспективным для имеющейся выборки, не всегда корректно.

Это, пожалуй, справедливо, и следует отметить, что в исследовательской работе, которая является целью для применения наших критериев, не всегда следует стремиться к точным уровням значимости. Строго говоря, односторонними критериями следует ограничиваться для выявления резко выделяющихся наблюдений в случаях, когда такие наблюдения представляют интерес только в определенном направлении, или в ситуациях, когда, например, повторно определяются точки плавления вещества, где аномальные наблюдения, обязанные своим присутствием примесям, должны заведомо находиться на нижней стороне, так как примеси понижают температуру плавления. Подобные аргументы показывают, что так же некорректно выбирать критерии для аномальных наблюдений после проверки данных. Результаты следующих двух параграфов, несмотря на вынужденную неполноту, дают некоторые указания для выбора среди конкурирующих статистик.

Пример 8.2. (Квизенберри и Дэйвид (1961)). Запалы представляют собой небольшие устройства для запуска двигателей ракет. Их важными характеристиками являются водонепроницаемость и сопротивление удару. Для изучения этих характеристик была взята случайная выборка объема 48 из большой партии. Выборку случайно разбили на три равные группы. Первая группа была взята как контрольная и не подвергалась испытаниям, вторую группу погрузили в воду, а третью — сбросили с определенной высоты. Через каждый запал пропустили ток величиной 5 ампер и зафиксировали времена задержек. Они оказались следующими:

(а) *контрольная группа* (x_{1i}): 0,38; 0,26; 0,41; 0,33; 0,33; 0,37; 0,54; 0,76; 0,51; 0,55; 0,53; 0,41; 0,47; 0,49; 0,42; 0,34;

(б) *группа, испытанная на водонепроницаемость* (x_{2i}): 0,53; 0,35; 0,38; 0,45; 1,09; 0,46; 0,57; 0,47; 0,39; 0,74; 0,32; 0,74; 0,48; 0,37; 0,52; 0,44;

(в) *группа, испытанная на удар* (x_{3i}): 0,51, 0,63; 0,46; 0,47; 0,42; 0,45; 0,41; 0,39; 0,35; 0,41; 0,49; 0,40; 0,58; 0,46; 0,38; 0,48.

Получаем следующие величины:

$$\sum x_{1i} = 7{,}10; \qquad \sum x_{2i} = 8{,}30;$$
$$\bar{x}_1 = 0{,}4438; \qquad \bar{x}_2 = 0{,}5188;$$
$$\sum x_{1i}^2 = 3{,}3686; \qquad \sum x_{2i}^2 = 4{,}8768;$$
$$\frac{1}{16}\left(\sum x_{1i}\right)^2 = 3{,}1506; \qquad \frac{1}{16}\left(\sum x_{2i}\right)^2 = 4{,}3056;$$
$$\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 0{,}2180; \qquad \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 0{,}5712;$$
$$\sum x_{3i} = 7{,}29;$$
$$\bar{x}_3 = 0{,}4556;$$
$$\sum x_{3i}^2 = 3{,}4021;$$
$$\frac{1}{16}\left(\sum x_{3i}\right)^2 = 3{,}3215;$$
$$\sum (x_{3i} - \bar{x}_3)^2 = 0{,}0806.$$

Исследования большого количества таких данных показали, что эти времена задержки для запалов распределены приближенно по нормальному закону, но по причинам, не выясненным до конца, иногда случайно встречаются слишком большие значения этих величин. Поэтому был применен критерий для аномальных наблюдений для каждой подгруппы, чтобы выделить такие выпадающие наблюдения. Дисперсия массы нормальных наблюдений предполагалась постоянной во время всего эксперимента.

Легко видеть, что в группах (а) и (б) наибольшие наблюдения 0,76 и 1,09, соответственно, являются аномальными. Для группы (а)

$$(n-1)^{1/2} D_1 = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{\left(\Sigma (x_i - \bar{x})^2\right)^{1/2}} = \frac{0{,}76 - 0{,}4438}{(0{,}2180)^{1/2}} = 0{,}677.$$

Интерполяция для $n = 16$, $\nu = 0$ в таблице 26а ПХ приближенно дает верхнюю 5-процентную точку 0,630. Использование статистики r_{10} приводит к такому же результату:

$$r_{10} = (x_{(n)} - x_{(n-1)})/(x_{(n)} - x_{(1)}) =$$
$$= (0{,}76 - 0{,}55)/(0{,}76 - 0{,}26) = 0{,}420,$$

что почти совпадает с верхней 1-процентной точкой 0,426 (Сархан и Гринберг (1970), стр. 298). Хотя этот пример дает явный повод для использования одностороннего критерия, следует отметить, что 5-процентный уровень значимости сохраняется даже для двухстороннего критерия D_2:

$$(n-1)^{1/2} D_2 = \max |x_{(i)} - \bar{x}| / (\sum (x_i - \bar{x})^2)^{1/2} = 0{,}677$$

(верхняя 5-процентная точка равна 0,666), и почти достигается для D_3:

$$D_3 = \frac{0{,}76 - 0{,}26}{0{,}4669} (15)^{1/2} = 4{,}15$$

(верхняя 5-процентная точка равна 4,24).

В оригинальной работе использовалась статистика C_4. Вновь для первой группы наблюдений имеем

$$C_4 = (x_{(n)} - \bar{x}) \Bigg/ \left(\sum_{j=1}^{3} \sum_i (x_{ji} - \bar{x}_j)^2 \right)^{1/2} = 0{,}339.$$

Эта точка не является значимой (при $n = 16$, $\nu = 30$ верхняя 5-процентная точка равна 0,384). Во второй же группе этот критерий отвергает значение 1,09. Пересчитаем теперь C_4 для первой группы, убрав это значение и положив $\nu = 29$. Получаем значение 0,438, безусловно являющееся значимым. Никаких других выпадающих наблюдений, продолжая этот процесс, найти не удается (см. работу Квизенберри и Дэйвида (1961), где приведен дальнейший анализ).

Некоторые критерии для аномальных наблюдений для распределений, отличных от нормального, рассматривались Дарлингом (1952b), который нашел распределение $\sum_{i=1}^{n} X_i / X_{(n)}$ в случае, когда X_i имеют равномерное (упр. 5.4.6) или χ^2-распределение с четным числом степеней свободы r. Последний случай, тесно связанный с критериями для сдвига дисперсий в нормальных выборках (замечание 7 из § 8.3), является обобщением критерия Фишера (1929) для наибольших гармоник (случай $r = 2$; см. § 5.4). Лоурент (1963) и Басу (1965) предложили критерии для аномальных наблюдений в случае двухпараметрических экспоненциальных с. в., если один или оба параметра неизвестны (упр. 8.2.2 и 8.2.3).

Уилкс (1963) исследовал проблему аномальных наблюдений в многомерном нормальном случае, используя в качестве основной статистики отношение определителей

$$r_l = |a_{ijl}| / |a_{ij}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k;\ l = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^{n} (x_{im} - \bar{x}_i)(x_{jm} - \bar{x}_j)$$

и a_{ijl} — соответствующая сумма с пропущенным l-м наблюдением. Известно, что соответствующая статистика R_l имеет бета-распределение $B\left(\frac{1}{2}(n-k-1), \ \frac{1}{2}k\right)$. Наблюдение, отвечающее наименьшему значению r_i, т. е. $r_{(1)}$, является первым кандидатом в аномальные. Уилкс использовал первое неравенство Бонферрони $\mathsf{P}\{R_{(1)} < r\} \leqslant \leqslant n\mathsf{P}\{R_i < r\}$ для нахождения уровня r_α, беря его равным значению r, при котором правая часть неравенства равняется α. Для $k=1$ отношение $R_{(1)}$ эквивалентно статистике $D_2 = \max |x_i - \bar{x}|/s$. Случай с r $(r > 1)$ аномальными наблюдениями может быть рассмотрен таким же образом.

§ 8.3. Критерии для сдвигов

Первый пример критерия для сдвинутых наблюдений принадлежит Мостеллеру (1948), рассмотревшему следующую проблему. Даны выборки объема m из n непрерывных генеральных совокупностей. Необходимо проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что распределения всех генеральных совокупностей одинаковы, против альтернативы, что одно из них (неизвестно какое) сдвинуто вправо. В этом случае непараметрическая процедура Мостеллера состоит в том, чтобы взять выборку с наибольшим наблюдением и посчитать число ее элементов, которые превосходят все наблюдения остальных выборок. Если это число достаточно велико, то нулевая гипотеза отвергается. Эта процедура, по мнению Мостеллера, проста и естественна, хотя и не утверждалось, что она лучшая в каком-либо смысле. Нетрудно получить обобщения для случая выборок неодинакового объема (Мостеллер, Тьюки (1950); см. также работу Бодингера (1965)). Если x_i обозначает наблюдение в i-й выборке ($i = 1, 2, \ldots, n$), то сдвиг вправо может быть заменен следующим более общим условием:

$$\mathsf{P}\{X_i > X_j\} > \frac{1}{2} \quad \text{для некоторого } i \text{ и } j = 1, 2, \ldots, i-1, \ i+1, \ldots, n,$$

где X_j — одинаково распределенные с. в.

Приведем другой простой непараметрический критерий для сдвинутых наблюдений, который, как можно ожидать, будет лучшим в общем случае. Упорядочим по возрастанию все nm наблюдений, как в критерии Краскела — Уоллиса, и найдем суммы рангов T_i для каждой выборки. Если $\max_i T_i$ превышает критическое значение, то объявим соответствующую выборку сдвинутой вправо. Такая процедура предложена впервые Дорнбосом и Принсом (1958), которые дали приближения типа Бонферрони для критических значений. Точные таблицы приведены Оде (1967). Полсон (1961) заменил ранги нормальными метками. Подобные результаты применяются для соответствующего двухфакторного рангового анализа Фридмена (или «метода m ранжирований»). Этот случай также рассматривался Дорнбосом и Принсом (1958) и, более детально, Юденом (1963) и Томпсоном и Уилки (1963), которые составили таблицы.

Имея в виду более формальный подход, мы будем следовать работе Полсона (1952), предложившего метод, применимый в случае нормальных совокупностей. Пусть X_{ij} ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$) — взаимно независимые нормально $N(\mu_i, \sigma^2)$ распределенные с. в., как и в однофакторном дисперсионном анализе. Говорят, что генеральная совокупность π_i сдвинута вправо на расстояние Δ ($\Delta>0$), если

$$\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_{i-1}=\mu_{i+1}=\ldots=\mu_n \quad \text{и} \quad \mu_i=\mu_1+\Delta. \qquad (8.3.1)$$

Пусть D_0 — решение, состоящее в равенстве n математических ожиданий, и D_i — решение, состоящее в том, что D_0 неверно, и, кроме того, π_i — сдвинутая генеральная совокупность. Задача состоит в нахождении процедуры для выбора одного из $(n+1)$ решений $D_0, D_1, \ldots, D_n$, которая была бы в некотором смысле оптимальной в нахождении сдвига вправо. Для этой цели мы введем сейчас следующие ограничения:

(а) если все μ_i равны, то D_0 должно быть выбрано с вероятностью $1-\alpha$;

(б) процедура должна быть инвариантной относительно преобразования $y=ax+b$, где $a>0$ и b — постоянные;

(в) процедура должна быть симметричной в том смысле, что вероятность принятия правильного решения, когда имеет место (8.3.1), одинакова для всех i.

Поскольку (а) фиксирует вероятность правильного выбора D_0, то очевидное желаемое свойство оптимальности состоит в максимизации вероятности принять правильное решение, когда одна из генеральных совокупностей сдвинута вправо. Можно показать, что это достигается следующей процедурой:

$$\left.\begin{array}{l}\text{если } m(\bar{x}_M-\bar{x})\Big/\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x})^2\right]^{1/2}<b_\alpha,\\ \text{выбираем } D_0; \text{ в противном случае выбираем } D_M.\end{array}\right\} \quad (8.3.2)$$

Здесь $\bar{x}_M$ обозначает максимальное из n выборочных средних $\bar{x}_i$, b_α — верхняя α-значимая точка статистики в левой части (8.3.2), являющейся частным случаем статистики C_1 из § 8.2 при $\nu=n(m-1)$. Заметим, что выражение в скобках является полной суммой квадратов, а не суммой квадратов ошибок. Как и раньше, среднеквадратичное отклонение обозначим

$$s_\nu^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2.$$

Вывод оптимальной процедуры. Не умаляя общности, мы можем ограничиться рассмотрением процедур, зависящих только от $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_n$ и S_ν^2, представляющих множество достаточных статистик для неизвестных параметров $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и σ^2. Действительно, принимая во внимание (б), видим, что любая приемлемая процедура будет зависеть только от $n-1$ отношений $(\bar{X}_1-\bar{X}_n)/S_\nu$, $(\bar{X}_2-\bar{X}_n)/S_\nu, \ldots, (\bar{X}_{n-1}-\bar{X}_n)/S_\nu$ (которые являются максимальным инвариантом). Пусть $W_t=(\bar{X}_t-\bar{X}_n)/S_\nu$ и $\delta_t=(\mu_t-\mu_n)/\sigma$ для $t=1, 2, \ldots, n-1$. Тогда совместное распределение W_t зависит только от δ_t. Кроме того, D_0 сводится к решению $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_{n-1}=0$, D_t — к решению $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_{t-1}=\delta_{t+1}=\ldots=\delta_{n-1}=0$, $\delta_t=\Delta/\sigma$, а D_n — к $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_{n-1}=-\Delta/\sigma$.

Для того чтобы найти совместную плотность распределения с. в. W_t, обозначим $V_t=(\bar{X}_t-\bar{X}_n)/\sigma$. Тогда $W_t=\sigma V_t/S_\nu$. Легко видеть, что V_t имеет $(n-1)$-мерное нормальное распределение с $\mathsf{E}V_t=\delta_t$, $DV_t=\frac{2}{m}$ и коэффициентами корреляции между с. в. V_t и $V_{t'}$, равными

$1/2$ ($t'=1, 2, \ldots, n-1$; $t' \neq t$). Таким образом, совместная плотность распределения величин V_t имеет вид

$$C \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[A\sum_{t=1}^{n-1}(v_t-\delta_t)^2+B\sum_{t\neq t'}(v_t-\delta_t)(v_{t'}-\delta_{t'})\right]\right\},$$

где $A=(n-1)m/n$, $B=-m/n$ и C (так же, как и вводимая ниже C') — некоторая константа. После стьюдентизации получаем совместную плотность распределения с. в. W_t:

$$f(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})=C'\int_0^\infty y^{\nu+n-2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\nu y^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+A\sum_{t=1}^{n-1}(w_t y-\delta_t)^2+B\sum_{t\neq t'}(w_t y-\delta_t)(w_{t'}y-\delta_{t'})\right]\right\}dy. \quad (8.3.3)$$

Пусть f_h ($h=0, 1, 2, \ldots, n$) обозначает эту плотность распределения, когда правильным решением является D_h. Тогда, применяя обобщение фундаментальной леммы Неймана — Пирсона [2]), мы выбираем D_0 для всех точек пространства $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\}$ таких, что $f_1<\lambda f_0$, $f_2<<\lambda f_0, \ldots, f_n<\lambda f_0$, где постоянная λ определяется ограничением (а). Для точек, приводящих к неравенству $f_i>>\lambda f_0$ для одного или большего числа i, мы выбираем D_i, если $f_i=\max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. С помощью (8.3.3) теперь легко найти для каждого h область, где следует выбрать D_h. Например, нужно выбрать D_1, если $f_1>\lambda f_0$, $f_1>f_2, \ldots$ $\ldots, f_1>f_n$. Имеем $f_1>\lambda f_0$, если

$$\int_0^\infty y^{\nu+n-2}\exp\left[-\frac{y^2}{2}\left(\nu+A\sum_{t=1}^{n-1}w_t^2+B\sum_{t\neq t'}w_t w_{t'}\right)\right]\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{A\Delta^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left\{\left[(A-B)\frac{\Delta}{\sigma}w_1+B\frac{\Delta}{\sigma}\sum_{t=1}^{n-1}w_t\right]y\right\}-\right.$$

$$\left.-\lambda\right)dy>0.$$

---

[2]) Здесь мы несколько отклоняемся от доказательства, данного Полсоном, который показывает, что (8.3.2) представляет собой байесовское решение, когда приписываются решениям $D_1, D_2, \ldots, D_n$ равные априорные вероятности.

После замены переменных это неравенство переписывается следующим образом:

$$\int_0^\infty t^{\nu+n-2}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\left\{\exp\left(-\frac{A\Delta^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left[\frac{\Delta}{\sigma}g(w_1,\ w_2,\ \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots,\ w_{n-1})\,t\right]-\lambda\right\}dt>0, \quad (8.3.4)$$

где

$$g(w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1})=$$

$$=\left[(A-B)\,w_1+B\sum_{t=1}^{n-1}w_t\right]\Big/\left(\nu+A\sum_{t=1}^{n-1}w_t^2+B\sum_{t\neq t'}w_tw_{t'}\right)^{1/2}.$$

Подынтегральное выражение в (8.3.4) для всех t является монотонно возрастающей функцией от $g(w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1})$, и поэтому область, в которой $f_1>\lambda f_0$, должна иметь вид $g(w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{n-1})>C''$, где C'' — постоянная, зависящая от $\frac{\Delta}{\sigma}$ и λ. Таким же образом можно показать, что $f_1>f_{i'}$ $(i'=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1)$ тогда и только тогда, когда $w_1>w_{i'}$, и что $f_1>f_n$ в том и только том случае, когда $w_1>0$ (интуитивно очевидные результаты). Итак, мы выбираем D_1, если $w_1>0$, $w_1>\max(w_2,\ w_3,\ \ldots,\ w_{n-1})$ и

$$(A-B)\,w_1+B\sum_{t=1}^{n-1}w_t>C''\left(\nu+A\sum_{t=1}^{n-1}w_t^2+B\sum_{t\neq t'}w_tw_{t'}\right)^{1/2}.$$

Вспоминая определения A, B, C'' и w_t, мы видим, что необходимо выбирать D_1, если $\bar{x}_1>\max(\bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$ и $m(\bar{x}_1-\bar{x})>C''\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}-\bar{x})^2\right]^{1/2}$. Так как соответствующие результаты получаются для D_2, D_3, $\ldots$, D_n, то решающая процедура совпадает с (8.3.2). Заметим, что константа C'' становится равной b_α и не зависит от Δ или σ. Таким образом, для данных n, m и α оптимальность процедуры (8.3.2) имеет место равномерно по Δ $(\Delta>0)$ и σ.

Замечания и обобщения. 1. Как указал Кудо (1956b), свойство оптимальности процедуры (8.3.2) сохраняется, если сдвиг математического ожидания для одной из генеральных совокупностей сопровождается увеличением дисперсии (при этом не меняются математические ожидания и дисперсии других генеральных совокупностей).

2. Даже с приведенным выше небольшим обобщением свойство оптимальности относится только к несколько искусственным альтернативам. Однако интуитивно использование (8.3.2) разумно и для других альтернатив, не очень сильно отличающихся от модели сдвинутых наблюдений. Функции мощности и связанные с ними характеристики получены для некоторых случаев в § 8.4. Конечно, D_0 будет всегда выбрано с вероятностью $1-\alpha$ в случае, если оно имеет место в действительности. Более того, Капур (1957) вывел следующее свойство несмещенности процедуры Полсона для общего вида μ_i. Определим D_0, как и раньше, и пусть D_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ — решение, заключающееся в том, что $\mu_i = \max(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Тогда вероятность для каждого из решений $D_0, D_1, \ldots, D_n$ быть правильно выбранным всегда не меньше вероятности неправильного выбора.

3. Если $m=1$, то процедура является вариантом задачи об аномальных наблюдениях (для одного такого наблюдения справа) В этом специальном случае (8.3.2) сразу сводится (с небольшим изменением в доказательстве — см. работу Кудо (1956а)) к следующей процедуре:

если $(x_{(n)}-\bar{x})\Big/\left[\sum\limits_{i=1} (x_i-\bar{x})^2\right]^{1/2} < b_\alpha$, то утверждается, что аномальных наблюдений нет; в противном случае аномальным объявляют наблюдение $x_{(n)}$.

Это по существу критерий Пирсона и Чандра Секара (1936). В связи с замечанием 2 мы можем желать проверить, будет ли аномальным наблюдение $x_{(n-1)}$. Этот вопрос отложим до § 8.4.

4. В предыдущих задачах, связанных с аномальными наблюдениями, можно было использовать (в дополнение к внутренним суммам квадратов $\sum (x_i-\bar{x})^2$) внешние оценки s_ν для σ такие, что $\nu S_\nu^2/\sigma^2 \sim \chi_\nu^2$. Стьюдентизированные экстремальные отклонения Нейра (1948) используют s_ν как делитель $x_{(n)}-\bar{x}$. Оптимальной процедурой для правильного обнаружения единственного аномального наблюдения справа является (8.3.5) с заменой знаменателя

на $[\sum (x_i-\bar{x})^2+\nu s_\nu^2]^{1/2}$. Действительно, первоначальная задача для сдвинутых наблюдений может рассматриваться как частный случай этой процедуры, для которой $\nu = n(m-1)$.

5. Когда для нас представляет интерес сдвиг в любом направлении, т. е. когда знак Δ в (8.3.1) не оговаривается, формулировка Полсона может быть сохранена с единственным небольшим изменением, заключающимся в том, что в ограничении (б) знак не фиксируется и в (в) вероятность правильного выбора решения одна и та же для $-\Delta$ и для Δ в (8.3.1). Оптимальной процедурой становится следующая (Кудо (1956а)):

если $m \cdot \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\bar{x}_i - \bar{x}| \Big/ \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (x_{ij}-\bar{x})^2\right]^{1/2} < b_\alpha^*$, выбираем

D_0; в противном случае выбираем D_M,

где M теперь означает тот номер, при котором достигается максимум $|\bar{x}_i - \bar{x}|$. Таблицы b_α^* для $\alpha=0{,}05$; 0,01 даны Квизенберри и Дэйвидом (1961).

6. Для выборок неодинаковых объемов m_i $(i=1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ процедура Полсона может быть адаптирована, если

$m(\bar{x}_i-\bar{x}) \Big/ \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (x_{ij}-\bar{x})^2\right]^{1/2}$ заменить на

$$y_i = m_i(\bar{x}_i-\bar{x}) \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} (x_{ij}-\bar{x})^2\right]^{1/2}.$$

Пфанцагль (1959) показал, что локально оптимальной (для малых $\Delta>0$) является следующая процедура. Обозначив через b'_α верхнюю α-значимую точку для $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_i$, выберем D_0, если $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i < b'_\alpha$, и D_M, если $y_M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i > b'_\alpha$. В общем случае b'_α не табулирована, но ее приближенные значения можно найти с помощью первого неравенства Бонферрони (сравните с работой Дорнбоса и Принса (1958), но заметьте, что эти авторы используют $m_i^{-1/2} y_i$ вместо y_i).

7. Соответствующие процедуры были получены для обнаружения сдвига дисперсии в одной из n нормальных $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ выборок. Здесь D_0 — решение, состоящее в том, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2$, и D_i — в том, что $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots \ldots = \sigma_{i-1}^2 = \sigma_{i+1}^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma^2$ (значение σ^2 не фиксировано), $\sigma_i^2 = \lambda'^2 \sigma^2$. При тех же ограничениях, что и в замечании 2, Труакс (1953) показал, по аналогии с доказательством Полсона, что для $\lambda'^2 > 1$ (и выборок одинакового объема m) оптимальная процедура основана на статистике Кокрена (1941)

$$s_{\max}^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} {}_i s^2, \quad \text{где} \quad {}_i s^2 = \sum_{j=1}^{m} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2/(m-1).$$

Пфанцагль (1959) обобщил этот результат также на случай неодинаковых m_i и получил локально (для λ'^2, близких к 1) оптимальный критерий, основанный на статистике $\max(m_i - 1)({}_i s^2/s_\nu^2 - 1)$, где s_ν^2 — обычное среднеквадратичное отклонение. Для $\lambda'^2 < 1$ (и одинаковых m_i) соответствующей статистикой является $s_{\min}^2/\sum_i s^2$. Дорнбос (1956) получил некоторые приближенные нижние 5-процентные точки с помощью неравенств Бонферрони. Подобный подход для изучения сдвинутого параметра масштаба для гамма-распределений использовался Дорнбосом и Принсом (1956).

Близкой является задача проверки значимости n главных эффектов в 2^n-факторном эксперименте в случае, когда априори известно, что не более чем несколько эффектов являются значимыми (см. работу Бирнбаума (1959)).

8. Общую байесовскую формулировку проблемы сдвинутых наблюдений дали Карлин и Труакс (1960), получившие результат Полсона как частный случай своего подхода. Они также рассмотрели соответствующую проблему сдвинутых наблюдений в случае, когда в дополнение к n испытываемым группам наблюдений объема m каждая существует еще контрольная группа из m независимых нормальных $N(\mu_0, \sigma^2)$ величин. Альтернативной к нулевой гипотезе о равенстве всех $n+1$ математических ожиданий является теперь гипотеза, состоящая в том, что одно из математических ожиданий для n исследуемых групп

имеет сдвиг относительно μ_0. В качестве статистики критерия берут

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})\Big/\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}-\bar{\bar{x}})^2,\quad \text{где}\quad \bar{\bar{x}}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}/(n+1)\,m.$$

9. Карлин и Труакс также кратко обсудили многомерный вариант проблемы сдвигов. Многомерная проблема для аномальных наблюдений рассматривалась Кудо и Сиотани (1959) (см. (5.3.11)).

§ 8.4. Характеристики критериев для аномальных наблюдений

Для того чтобы дать «альтернативу с учетом аномальных наблюдений» для нулевой гипотезы H_0, состоящей в том, что рассматриваемая выборка случайно извлечена из некоторой нормальной генеральной совокупности, были развиты две главные модели (Граббс (1950); Диксон (1950)). В обеих моделях предполагается, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые с. в. и что $n-k$ из этих величин (неизвестно какие) имеют одинаковое $N(\mu, \sigma^2)$ распределение. В модели A оставшиеся k величин имеют математические ожидания $\mu+\lambda_i\sigma$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ и общую дисперсию σ^2; в модели B эти k величин имеют одинаковые математические ожидания μ и дисперсии $\lambda_i'^2\sigma^2$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. Таким образом, модель A учитывает только сдвиги математических ожиданий некоторых с. в., а модель B имеет дело только с изменениями дисперсий. Очевидно, что реальная ситуация не может быть столь чистой, но мы должны с чего-то начать. Обычно, в действительности, необходимо дальнейшее уточнение моделей. Для μ и σ различают еще ситуации (а) — (г) из § 8.2. Параметры λ_i и λ_i' неизвестны, за исключением того, что для односторонних критериев (скажем, с правосторонней альтернативой) мы берем $\lambda_i>0$ и $\lambda_i'>1$, соответственно.

Ясно, что критерии для сдвигов соответствуют частному случаю $k=1$, для которого мы полагаем $\lambda_1=\lambda$ и $\lambda_1'=\lambda'$. Тогда $\lambda\sigma$ есть просто Δ из § 8.3. В дополнение к различным оптимальным свойствам, выведенным для статистик D_1 и D_2, интересно отметить результат Фергюсона (1961b), показавшего, что D_2 остается оптимальной в модели B для $\lambda' > 1$. Таким образом, из всех несмещенных критериев, инвариантных относительно изменения параметров сдвига и масштаба, критерий, основанный на D_2 максимизирует вероятность отвергнуть резко выделяющееся наблюдение в следующих ситуациях: (а) когда аномальное наблюдение отличается только значением математического ожидания; (б) когда оно имеет большую дисперсию и (см. замечание 1 в § 8.3, которое применимо также к D_2) (в) когда сдвиг математического ожидания сопровождается уменьшением дисперсии. Эти замечания содержат рекомендации для использования статистики D_2, не давая, правда, рецептов для $k > 1$. Действительно, в случае D_1 мы видели (упр. 5.3.3), что только одно из отношений $(x_i - \bar{x})/s$ может превосходить $D_{1,\alpha}$ для $n \leqslant 14$, $\alpha = 0{,}05$ или $n \leqslant 19$, $\alpha = 0{,}01$. Это значит, что если при таких значениях n и α будут присутствовать два одинаково аномальных наблюдения, то ни одно из них нельзя будет обнаружить при использовании статистики D_1. Если два аномальных наблюдения попадают из одной $N(\mu + \lambda\sigma, \sigma^2)$ генеральной совокупности, то ясно, что вероятность P обнаружения любого из них стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, и можно ожидать, что эта вероятность будет чересчур малой для конечных λ. Это явление было впервые отмечено Пирсоном и Чандра Секаром (1936) и впоследствии названо Мерфи (1951) «маскирующим эффектом». Этот «маскирующий эффект» возникает не только при использовании статистики D_1. Он неминуем, если σ оценивается при помощи той же выборки. В меньшей степени этот эффект проявляется для статистики C_1, особенно при малых значениях ν (см. упр. 8.4.1).

Фергюсон (1961b) показал также, что статистики D_4 и D_5 (чаще обозначаемые g_1 и b_2) локально наиболее мощные среди инвариантных критериев не только для $k = 1$, но и для $k < n/2$ в случае D_4 и для $k \leqslant 0{,}31n$ в случае D_5. Более точно, альтернативная гипотеза для D_4 состоит в том, что k из величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют математические ожидания $\mu + \lambda_i\delta\sigma$ с δ, $\lambda_i > 0$. Тогда функция мощности выражается как функция от $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2, \ldots, \delta\lambda_k$ для любого инвариантного критерия ω. Среди всех этих критериев критерий, основанный на D_4, максимизирует скорость увеличения функции мощности в точке $\delta=0$. Очевидно, что такая локальная оптимальность имеет небольшое практическое значение; кроме того, нет таблиц процентных точек статистики для малых n. Заметим также, что показателем оптимальности является мощность критерия, которая не совпадает с вероятностью обнаружения аномальных наблюдений.

Мы подошли к довольно естественному вопросу: что взять в качестве подходящей меры качества критериев для аномальных наблюдений, принимая во внимание три задачи (а)—(в) таких критериев, упомянутые в § 8.1? С этой целью рассмотрим в деталях модель A для одного резко выделяющегося наблюдения справа. Ясно, что разумная мера может зависеть в этом случае только от n и λ и не должна зависеть от того, какое наблюдение является аномальным. Для удобства будем считать аномальным наблюдение x_1. Пусть H_1 обозначает соответствующую альтернативную гипотезу. Хотя рассматриваемые ниже меры могут быть обобщены для того, чтобы применять их для более широкого класса статистик, мы будем предполагать, что статистика критерия имеет вид $v=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} v_i$. Такими, в частности, являются статистики A_1, B_1, C_1, C_4 и D_1. Например, для C_4 имеем

$$v_i=(x_i-\bar{x})\Big/\Big[\sum(x_i-\bar{x})^2+\nu s_\nu^2\Big]^{1/2}.$$

Обозначая через v_α верхнюю α-значимую точку статистики V, укажем следующие естественные меры:

(1) функция мощности $P_1=\mathsf{P}\{V>v_\alpha \mid H_1\}$;

(2) вероятность того, что наблюдение X_1 значимо:

$$P_2=\mathsf{P}\{V_1>v_\alpha \mid H_1\};$$

(3) вероятность того, что X_1 значимо и при этом является наибольшим в выборке:

$$P_3=\mathsf{P}\{V_1>v_\alpha;\ X_1>X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n \mid H_1\};$$

(4) вероятность того, что только X_1 значимо:

$$P_4=\mathsf{P}\{V_1>v_\alpha;\ V_2,\ V_3,\ \ldots,\ V_n<v_\alpha \mid H_1\};$$

(5) условная вероятность того, что X_1 значимо, при условии, что X_1 — наибольший член выборки:

$$P_5=\mathsf{P}\{V_1>v_\alpha \mid X_1>X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n;\ H_1\}.$$

Мера P_1 дает вероятность значимости в любой ситуации и, таким образом, особенно подходит для задачи (б) из § 8.1 — обратить наше внимание на наличие резко выделяющихся наблюдений. Меры P_2, P_3 и P_4 более приспособлены для точного обнаружения этих наблюдений, т. е. для задачи (в), но только P_4 исключает возможность того, что кроме аномального наблюдения X_1 значимым может быть и хорошее наблюдение. Мы видим, что

$$P_1 \geqslant P_2 \geqslant P_3 \geqslant P_4. \tag{8.4.1}$$

Мера P_5 Диксона (1950) связана с P_3 соотношением

$$P_5 = P_3 / \mathrm{P}\{X_1 > X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n \mid H_1\},$$

где вероятность $\mathrm{P}\{X_1 > X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n \mid H_1\}$ табулирована Тейкроу (1955) для $n \leqslant 10$.

Из этих пяти мер самая простая с вычислительной точки зрения — P_2; P_3 и P_4, наоборот, очень трудны. Однако при определенных условиях только одна из величин $V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n$ может превышать v_α (как было отмечено, в случае D_1 этот факт имеет место для $n \leqslant 14$, $\alpha = 0{,}05$ и $n \leqslant 19$, $\alpha = 0{,}01$). В такой ситуации из неравенства $V_1 > v_\alpha$ вытекает, что $X_1 > X_2,\ X_3,\ \ldots,\ X_n$ и V_2, $V_3,\ \ldots,\ V_n < v_\alpha$, т. е. что $P_2 = P_3 = P_4$.

Функцию мощности P_1 можно оценить с помощью первых двух неравенств Бонферрони (5.3.3). Обозначая через A_i событие $\{V_i > v_\alpha,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ имеем $P_1 = \mathrm{P}\left\{\bigcup_i A_i\right\}$ и отсюда получаем, что

$$P_1 \leqslant \mathrm{P}\{V_1 > v_\alpha \mid H_1\} + (n-1)\,\mathrm{P}\{V_j > v_\alpha \mid H_1\} = P_2 + (n-1)\,\beta \tag{8.4.2}$$

$$(j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

где $\beta = \mathrm{P}\{V_j > v_\alpha \mid H_1\}$, и

$$P_1 \geqslant P_2 + (n-1)\,\beta - (n-1)\,\mathrm{P}\{V_1 > v_\alpha,\ V_2 > v_\alpha \mid H_1\} - C_{n-1}^2\,\mathrm{P}\{V_2 > v_\alpha,\ V_3 > v_\alpha \mid H_1\}. \tag{8.4.3}$$

Поскольку вероятности в (8.4.3) обычно трудно получить, полезно отметить следующее неравенство, вытекающее из (8.4.1) и (8.4.2):

$$P_2 \leqslant P_1 \leqslant P_2 + (n-1)\,\beta. \qquad (8.4.4$$

Очевидно, что для фиксированного n вероятность β является убывающей функцией λ ($\lambda > 0$). Ее верхняя граница β_0, соответствующая $\lambda = 0$, удовлетворяет (8.4.3) с заменой H_1 на H_0. Поэтому

$$\alpha > n\beta_0 - C_n^2 \mathbf{d} \{V_1 > v_\alpha,\ V_2 > v_\alpha \mid H_0\}.$$

Для каждой из статистик A_1, B_1, C_1, C_4 и D_1 известно [3]), что $\mathbf{P}\{V_1 > v_\alpha,\ V_2 > v_\alpha \mid H_0\} \leqslant \beta_0^2$. Можно легко показать, что $\beta_0 < \beta'$, где

$$\beta' = \frac{1}{n-1}\left(1 - \left(1 - 2\alpha\,\frac{n-1}{n}\right)^{1/2}\right), \tag{8.4.5}$$

и что

$$\beta' < \frac{\alpha}{n-1} \quad \text{(при условии, что } \alpha < 2/n\text{)}. \tag{8.4.6}$$

Последнее условие часто имеет место, и тогда (8.4.4) можно заменить весьма простым, но более слабым неравенством

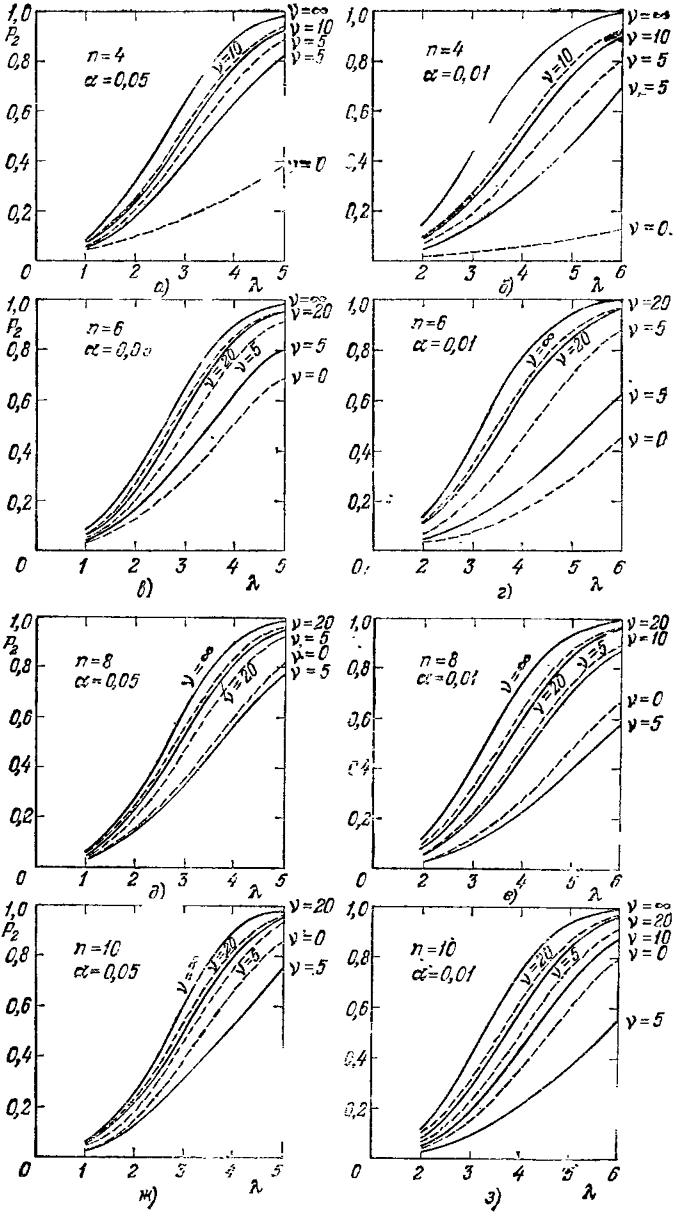
$$P_2 \leqslant P_1 \leqslant P_2 + \alpha. \tag{8.4.7}$$

Функция мощности P_1 для B_1 была табулирована Дэйвидом и Полсоном (1965), которые дали также для сравнения графики мощности χ^2-критерия B_5. Как ожидалось, B_1 всегда является лучшей. При фиксированном λ преимущество B_1 возрастает с ростом n. В той же работе даны графики (см. рис. 8.4 [*])), сравнивающие качество критериев, основанных на статистиках B_1, C_1, C_4 и D_1, относительно меры P_2. Для C_1 и C_4 вычисления P_2 были сделаны для $\nu = 5$, 10, 20, но некоторые кривые были опущены, чтобы не перегружать график. Графики показывают, кроме того, как для данных n и α растет P_2 с увеличением информации относительно σ и насколько увеличивается P_2 при использовании C_4 вместо C_1 в случае одного аномального наблюдения. Последний выигрыш максимален, если внутренняя информация о σ^2 велика по сравнению с внешней. Однако есть указания, что

---

[3]) Для C_1 при малых значениях ν неравенство может нарушаться (Хьюм (1965)).

[4]) Вероятность P_2 обнаружения аномального наблюдения при помощи статистик B_1: $\nu = \infty$; D_1: $\nu = 0$; C_1: ———— $\nu = 5$, 10, 20; C_4: ---- $\nu = 5$, 10, 20.



$n=4$
$\alpha=0{,}05$
$\nu=\infty$
$\nu=10$
$\nu=5$
$\nu=5$
$\nu=0$
P_2
λ
а)
$n=4$
$\alpha=0{,}01$
$\nu=\infty$
$\nu=10$
$\nu=5$
$\nu=5$
$\nu=0$
б)
$n=6$
$\nu=\infty$
$\nu=20$
$\nu=5$
$\nu=0$
в)
$n=6$
$\alpha=0{,}01$
$\nu=\infty$
$\nu=20$
$\nu=5$
$\nu=5$
$\nu=0$
г)
$n=8$
$\alpha=0{,}05$
$\nu=20$
$\nu=5$
$\nu=0$
$\nu=5$
д)
$n=8$
$\alpha=0{,}01$
$\nu=20$
$\nu=10$
$\nu=5$
$\nu=0$
$\nu=5$
е)
$n=10$
$\alpha=0{,}05$
$\nu=20$
$\nu=0$
$\nu=5$
ж)
$n=10$
$\alpha=0{,}01$
$\nu=\infty$
$\nu=20$
$\nu=10$
$\nu=0$
$\nu=5$
з)

Рис. 8.4.

внутренние степени свободы значат меньше, чем внешние. Так, при $n=6$ сплошная кривая, соответствующая $\nu=5$, лежит выше пунктирной кривой для $\nu=0$, хотя и в том, и в другом случае сумма степеней свободы равна 5.

Выборочные эксперименты большого масштаба были проведены Фергюсоном (1961b) для сравнения функции мощности P_1 для различных конкурирующих статистик в случае (г) из § 8.2, а именно, для односторонних статистик D_1, D_4, r_{10} и двухсторонних D_2, D_5, $r_{10}^{(2)}$. Фергюсон разбил одну и ту же группу из 25 000 случайных нормальных наблюдений на выборки объемов $n=5$, 10, 15, 20 и 25 (т. е. взял 5 000 выборок объема 5, 2 500 выборок объема 10 и т. д.), последовательно прибавляя постоянную $\lambda=0$, 1, 2, ..., 15 к фиксированному члену каждой выборки. Он отметил при каждом n и λ процент случаев, для которых статистика, вычисленная по выборке, превышает свою верхнюю α-значимую точку ($\alpha=0{,}1$; 0,05; 0,01). Осложняло дело то, что ввиду отсутствия процентных точек статистик D_4 и D_5 для данных значений n (за исключением случая $n=25$ для D_4), Фергюсон был вынужден оценивать сами процентные точки с помощью выборочного эксперимента. Это же было сделано и для всех двухсторонних статистик. Принимая во внимание все эти оговорки, результаты Фергюсона можно свести к следующим:

(а) Для малых n нет разницы (с точностью до двух десятичных знаков) между функциями мощности трех односторонних критериев и между функциями мощности трех двухсторонних критериев.

(б) Функции мощности возрастают (каждая по своему) с ростом n. Для $n=25$ D_1 — наилучшая среди односторонних статистик, в то время как D_2 и D_5 — почти одинаково хорошие двухсторонние статистики. Численные результаты для $\alpha=0{,}05$ приведены в таблице 8.4.

(в) Цифры, заключенные в круглые скобки в таблице 8.4, позволяют сравнивать критерии, основанные на статистиках D_5 и D_2, в случае двух аномальных $N(\mu+\lambda\sigma, \sigma^2)$ наблюдений. Как предполагалось выше, D_2 — неудовлетворительная, а D_5 — заметно лучшая статистика. Заметим, что для D_5 функция мощности выше, чем в случае одного аномального наблюдения, а для D_2, наоборот, ниже. Однако это не означает, что D_5 свободна от «маски-

Таблица 8.4

Мощности шести критериев ($\alpha = 0{,}05$) для аномальных наблюдений, основанные на 1000 нормальных выборок объема $n = 25$ в случае, когда одно или два наблюдения (для случая двух наблюдений данные указаны в круглых скобках) взяты из генеральной совокупности $N(\mu + \lambda\sigma, \sigma^2)$, а другие — из $N(\mu, \sigma^2)$ (Фергюсон (1961 b))

λ	1	2	3	4	5	6	7	8
D_4	0,06	0,17	0,38	0,69	0,89	0,98	1,00	
D_1	0,06	0,16	0,42	0,75	0,94	0,99	1,00	
r_{10}	0,06	0,13	0,36	0,67	0,90	0,98	0,99	1,00
D_5	(0,06) 0,05	(0,14) 0,12	(0,37) 0,36	(0,71) 0,68	(0,95) 0,89	(1,00) 0,98	1,00	
D_2	(0,06) 0,05	(0,13) 0,13	(0,34) 0,35	(0,58) 0,69	(0,81) 0,91	(0,96) 0,99	(0,99) 1,00	(1,00)
$r_{10}^{(2)}$	0,05	0,11	0,29	0,60	0,84	0,96	0,99	1,00

рующего эффекта», который более очевиден при меньших n. Действительно, для $n = 5$ и 10 $P_1 \to 0$ при $\lambda \to \infty$ для D_2 и D_5 даже при таких достаточно больших α, как $\alpha = 0{,}10$.

Наиболее обширным исследованием качества критериев для аномальных наблюдений до сих пор является работа Диксона (1950). Диксон применил по существу тот же метод, которым позже воспользовался Фергюсон, но измерял качество критериев долей тех выборок, в которых аномальное наблюдение совпадало с наибольшим наблюдением $x_{(n)}$ и используемая статистика приводила к значимому отклонению. Выборки, в которых $x_{(n)}$ являлось наблюдением из нормальной $N(\mu, \sigma^2)$ совокупности, при вычислении не учитывались. Таким образом, мера качества критериев, использованная Диксоном, является оценкой для P_5. Диксон рассматривал следующие статистики (для которых ему были известны верхние процентные точки): B_1, B_2, B_4, B_5, C_1, C_3 (для $\nu = 9$), D_1, D_6 и свои r-статистики. Объемы выборок ограничивались значениями

$n=5$ или 15; уровень α обычно брался равным 5% Наряду со случаями, когда присутствовало одно аномальное наблюдение, рассматривались и ситуации с двумя такими наблюдениями. Результаты были получены как для модели B, так и для модели A. Каждая точка на графике меры качества критерия как функции λ основывалась по 66—200 определениям. Мы не пытаемся здесь суммировать результаты Диксона (см. работу Диксона (1962)). Они дают полезные указания, но следует помнить, что для типичной точки ордината, соответствующая, например, биномиальному распределению для 100 испытаний, имеет стандартное отклонение 0,05, если $P_5=0,5$, и 0,03, если $P_5=0,1$. Однако взаимные сравнения мер качеств различных критериев будут более надежными из-за многократного использования каждой выборки объема n.

Дальнейшие замечания о работе с несколькими аномальными наблюдениями. Имеется интересный теоретический результат (Мерфи (1951)), обобщающий свойства оптимальности статистики D_1 в случае присутствия одного аномального наблюдения. Если предполагается, что k наблюдений попали из нормальной $N(\mu+\lambda\sigma, \sigma^2)$ генеральной совокупности $(\lambda>0)$, то оптимальный инвариантный критерий состоит в том, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу при больших значениях $D^{(k)}=(x_{(n)}+x_{(n-1)}+\ldots$ $\ldots+x_{(n-k+1)}-k\bar{x})/s$. Хотя предположение о наличии не более одного аномального наблюдения (требующееся для оптимальности D_1) может быть близким к действительности, обычно редко бывает удобным предполагать, что имеются либо два, либо ни одного аномального наблюдения. Это последнее предположение требуется для оптимальности $D^{(2)}$. Отметим также, что в случае $k>1$ никаких таблиц для $D^{(k)}$ нет.

В предположении, что k может быть значительно больше 1, мы в идеале хотели бы действовать следующим образом:

Применим некоторую статистику критерия к выборке объема n. Если полученное значение превышает уровень значимости, то отбросим наибольшее наблюдение и применим ту же статистику к оставшейся выборке объема $n-1$, уточняя уровень значимости для нового выборочного объема. Повторяем эту процедуру до тех пор, пока статистика критерия принимает значения, бóльшие соответствующих уровней значимости.

Такая процедура была бы желательной из-за возможности пользоваться одними и теми же таблицами. Однако эта процедура не подходит для статистик, сильно подверженных «маскирующему эффекту». Некоторую теорию этого вопроса можно найти у Макмиллана (1968).

§ 8.5. Эффект отбрасывания аномальных наблюдений при оценивании параметров

Обсуждая критерии для аномальных наблюдений, мы до сих пор подчеркивали их роль в обнаружении присутствия и точном определении аномальных наблюдений (задачи (б) и (в) из § 8.1). Теперь мы обратимся к трудной проблеме определения того, как влияют результаты применения таких критериев на последующее оценивание параметров. Ясно, что должна быть некоторая зависимость от того, будут ли некоторые наблюдения отвергнуты или нет, хотя, например, двухсторонний критерий с двумя одинаковыми критическими областями не даст смещения при оценивании среднего, если исходная генеральная совокупность симметрична. По-видимому, систематическое исследование этого вопроса началось с работы Диксона (1953), который в основу своей работы положил как раз описанные выше эксперименты. Мы рассмотрим подход, развитый Энскомбом (1960) и обобщенный Гутменом и Смитом (1966, 1969).

Для n независимых нормальных величин с известной одинаковой дисперсией σ^2 и неизвестным (предполагаемым нами одинаковым) математическим ожиданием μ обозначим через M порядковый номер наблюдения, имеющего наибольшее отклонение от среднего значения. Одно простое правило состоит в следующем:

Отвергаем наблюдение x_M, если $|x_M - \bar{x}| > c\sigma$, где c — некоторая выбираемая нами постоянная; в противном случае ни одно наблюдение не отвергается. Оцениваем теперь μ при помощи среднего значения оставшихся наблюдений $\hat{\mu}$. Таким образом,

$$\hat{\mu} = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } |x_M - \bar{x}| \leqslant c\sigma, \\ \bar{x} - \dfrac{x_M - \bar{x}}{n-1}, & \text{если } |x_M - \bar{x}| > c\sigma. \end{cases} \qquad (8.5.1)$$

Это правило использует статистику B_2 из § 8.2, но c не обязана быть одной из обычных верхних процентных точек. Действительно, один из главных выводов Энскомба состоял в том, что вся концепция уровня значимости соответствующего критерия не является подходящей с точки зрения рассматриваемой задачи оценивания. Будет правильнее, если c выбирают таким образом, чтобы сделать $\hat{\mu}$ хорошей в некотором смысле оценкой. Используя аналогию со страхованием, Энскомб предложил, чтобы мы были готовы внести «*взнос*» в виде некоторого повышения среднеквадратичной ошибки, когда нет аномальных наблюдений, для того чтобы получить «*компенсацию*» в случае, когда они есть. Точнее (и эти определения имеют более широкую область применения), мы имеем

$$\text{«взнос»} = (\mathsf{D}\hat{\mu} - \mathsf{D}\bar{X})/\mathsf{D}\bar{X},$$

$$\text{«компенсация»} = (\mathsf{E}\,(\bar{X}-\mu)^2 - \mathsf{E}\,(\hat{\mu}-\mu)^2)/\mathsf{E}\,(\bar{X}-\mu)^2.$$

Для однородной выборки, таким образом, получаем, что

$$\text{«компенсация»} = -\text{«взнос»} \leqslant 0,$$

но с увеличением неоднородности «компенсация» становится положительной.

Предположим теперь, что присутствует одно $N(\mu + \lambda\sigma, \sigma^2)$ аномальное наблюдение. Обозначим $z_i = x_i - \bar{x}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, в соответствии с (8.5.1), введем величину T, определенную следующим образом:

$$T = \begin{cases} 0, & \text{если } |Z_M| \leqslant c\sigma, \\ -\dfrac{Z_M}{n-1}, & \text{если } |Z_M| > c\sigma. \end{cases}$$

Тогда $\hat{\mu} = \bar{X} + T$, где $\bar{X} \sim N\left(\mu + \frac{\lambda\sigma}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Из независимости $\bar{X}$ и T, являющейся функцией Z_i, следует, что

$$\mathsf{E}\,(\hat{\mu}-\mu)^2 = \mathsf{E}\left(\bar{X} - \mu - \frac{\lambda\sigma}{n}\right)^2 + \mathsf{E}\left(T + \frac{\lambda\sigma}{n}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mathsf{E}\left(T + \frac{\lambda\sigma}{n}\right)^2$$

Таким образом, в этом случае находим, что

$$«\text{взнос}» = n\mathsf{E}\,(T/\sigma)^2, \tag{8.5.2}$$

$$«\text{компенсация}» = -\frac{n^2\mathsf{E}\,(T\,(T+2\lambda\sigma/n))}{\sigma^2\,(n+\lambda^2)}. \tag{8.5.3}$$

К сожалению, эти величины трудно вычислить, и поэтому для $n > 3$ после аналитического упрощения входящих в эти выражения интегралов использовался метод Монте-Карло (Гутмен и Смит (1966)). Полагая для простоты $\sigma = 1$, для $n = 3$ имеем

$$«\text{взнос}» = 3\mathsf{E}T^2 = 3\int\limits_{R_1} \frac{1}{4}\, z_3^2 f_{1,3}(z_1,\ z_3)\, dz_1\, dz_3 + \\ + 3\int\limits_{R_2} \frac{1}{4}\, z_1^2 f_{1,3}(z_1,\ z_3)\, dz_3\, dz_1,$$

где

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \left\{z_1,\ z_3 \mid c < z_3 < \infty,\ -z_3 < z_1 < -\frac{1}{2} z_3\right\}, \\ R_2 &= \left\{z_1,\ z_3 \mid -\infty < z_1 < -c,\ -\frac{1}{2} z_1 < z_3 < -z_1\right\} \end{aligned}\right\} \tag{8.5.4}$$

и $f_{1,3}(z_1,\ z_3)$ есть совместная плотность распределения с. в. $Z_{(1)}$ и $Z_{(3)}$, определяемая равенством

$$f_{1,3}(z_1,\ z_3) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \exp\left[-(z_1^2 + z_1 z_3 + z_3^2)\right]$$

в области

$$\left\{z_1,\ z_3 \mid -\frac{1}{2} z_1 < z_3 < -2z_1\right\}. \tag{8.5.5}$$

Из соображений симметрии оба интеграла (по областям R_1 и R_2) равны. Полагая $z_1 = -w^{1/2}v^{1/2}$, $z_3 = w^{1/2}v^{-1/2}$, имеем

$$«\text{взнос}» = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \int\limits_1^2 \int\limits_{c^2/v}^{\infty} w \exp\left[-w\left(v - 1 + \frac{1}{v}\right)\right] dw\, dv = \\ = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \int\limits_1^2 \frac{c^2(v^2 - v + 1) + v^2}{(v^2 - v + 1)^2} \exp\left[-\frac{c^2}{v}(v^2 - v + 1)\right] dv = \\ = \frac{6}{\pi} \int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{c^2\left[\frac{3}{4}(t^2+1)\right] + 1}{(1+t^2)^2} \exp\left[-\frac{3}{4} c^2 (1 + t^2)\right] dt,$$

где $t = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{v}\right)$.

С помощью численного интегрирования c можно определить таким образом, чтобы «взнос» принимал желаемое (например, 5- или 1-процентное) значение. Соответствующую «компенсацию» тогда можно найти как функцию λ. Графики 8.5 (из работы Гутмена и Смита (1969)) дают «компенсацию», соответствующую 5-процентному «взносу» не только для правила (8.5.1), но и для следующих двух правил, которые скорее смягчают влияние аномальных наблюдений, а не отбрасывают их. Мы сформулируем эти правила для общего n.

(*а*) *Уинсоризация:* если $|z_M| > c\sigma$, мы не будем отбрасывать наблюдение x_M, а положим его равным ближайшему к x_M наблюдению (для $n=3$ просто берем $x_M = x_{(2)}$). Таким образом, в этом случае оценкой для μ служит

$$\hat{\mu}_W = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } |z_M| \leqslant c\sigma, \\ \bar{x} - (x_{(n)} - x_{(n-1)})/n, & \text{если } |z_M| > c\sigma \text{ и } M = n, \\ \bar{x} + (x_{(2)} - x_{(1)})/n, & \text{если } |z_M| > c\sigma \text{ и } M = 1. \end{cases} \tag{8.5.6}$$

(*б*) *Модифицированная уинсоризация:* если $|z_M| > c\sigma$, то мы берем x_M равным ближайшему из двух значений $\bar{x} \pm c\sigma$. Таким образом, здесь оценкой для μ является

$$\hat{\mu}_{W'} = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } |z_M| \leqslant c\sigma, \\ \bar{x} - (z_{(n)} - c\sigma)/n, & \text{если } |z_M| > c\sigma \text{ и } M = n, \\ \bar{x} - (z_{(1)} + c\sigma)/n, & \text{если } |z_M| > c\sigma \text{ и } M = 1. \end{cases} \tag{8.5.7}$$

Заметим, что для фиксированного «взноса» величина c зависит от того, какое правило используется.

Графики рис. 8.5 показывают, что правило (8.5.7) лучше использовать при малых λ, но уже при λ порядка 4 лучшим является правило (8.5.1). Конечно, для очень малых λ простое усреднение (с нулевой «компенсацией») лучше всего. Уинсоризация является промежуточным правилом, более близким к правилу Энскомба, чем к модифицированному. Подобные результаты имеют место для 1-процентного взноса и, конечно, справедливы и для больших значений n, хотя разница «компенсаций» становится менее заметной с увеличением n. Гутмен и Смит (1966, 1969) рассмотрели также для модели B ситуацию с одним аномальным $N(\mu, \lambda'^2\sigma^2)$ наблюдением. Результаты качественно не очень меняются, хотя правило (8.5.6) теперь чуть лучше, чем (8.5.1), для больших λ.

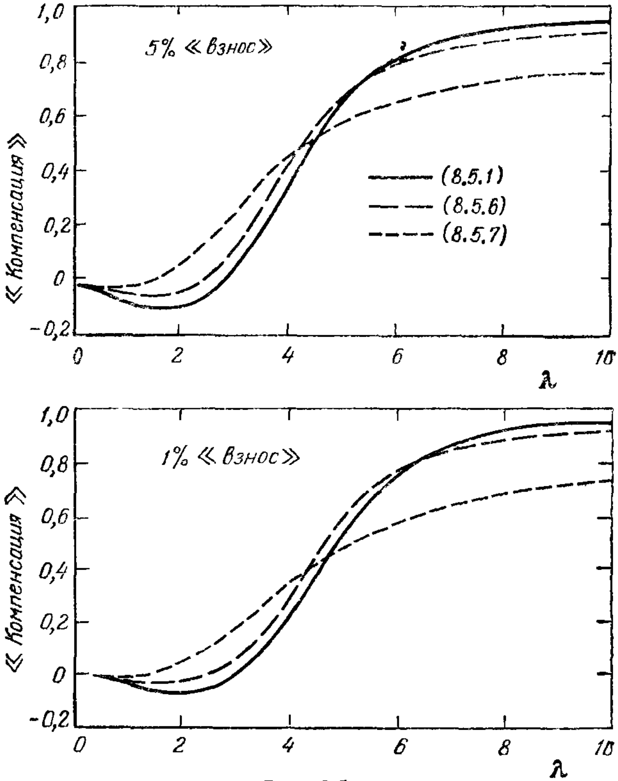


Рис. 8.5.

Случай нескольких аномальных наблюдений, отличающихся сдвигом от оставшейся части наблюдений, также исследовался Энскомбом и Барроном (1966), предложившими правило, подобное (8.5.7). Однако они положили x_i равным ближайшему из двух значений $\hat{\mu} \pm c\sigma$, если $|x_i - \hat{\mu}|$ (а не $|x_i - \bar{x}|$) превышает $c\sigma$. Осуществление этого правила требует нескольких этапов. Хотя авторы и ограничились детальным анализом случая $n = 3$ с одним аномальным наблюдением, они пришли к следующей общей привлекательной рекомендации для двухступенчатой процедуры, которая согласуется с другими описанными нами приемами:

1. Применяйте соответствующий критерий для аномальных наблюдений с высоким уровнем значимости — настолько высоким, чтобы хорошие наблюдения отвергались очень редко. Тем самым удастся избавиться только от посторонних наблюдений, оказавшихся очень далеко от основной массы.

2. Применяйте вновь тот же самый критерий для оставшихся наблюдений, но теперь уже на довольно умеренном уровне значимости. На этот раз, в отличие от предыдущего этапа, не отвергайте аномальные наблюдения, а придавайте им уменьшенный вес в последующей процедуре оценивания параметров.

За исключением этой рекомендации, которая оставляет ряд вопросов повисшими в воздухе, все обсуждавшиеся до сих пор правила предполагают σ известным. Для $n = 3$ Гутмен и Смит (1966) получили некоторые результаты и для случая неизвестного σ и нашли, что модифицированная уинсоризация много лучше двух других правил (в рассмотренных выше правилах нужно теперь заменить σ на s).

Хотя мы часто имели по необходимости дело со случаем $n = 3$, мы не упоминали о практике оценивания μ с помощью среднего двух ближайших наблюдений. Ничто не говорит в пользу таких оценок (Сет (1950); Либлейн (1952, 1962); Уилкс (1966)).

Некоторые аспекты байесовских оценок и соответствующих рисков, особенно для модели B, рассматривались Гебхардтом (1964, 1966).

Упражнения

8.2.1. Предложить критерий для аномальных наблюдений в нормальном случае, когда параметр σ неизвестен, а μ известен. Указать, какие таблицы применимы для односторонней и двухсторонней альтернатив (см. работу Чу (1964)).

8.2.2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые с. в. с плотностью распределения $p(x) = \frac{1}{\theta_2} \exp(-(x-\theta_1)/\theta_2)$ $(x \geqslant \theta_1;\ \theta_2 > 0)$, и пусть

$$U_{(i)} = \frac{X_{(i)} - X_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} (X_{(i)} - X_{(1)})} = \frac{X_{(i)} - X_{(1)}}{nY} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Заметим, что $X_{(1)}$, Y — полные достаточные статистики для θ_1, θ_2 и что распределение с. в. $U_{(i)}$ не зависит от параметров. Отсюда следует (Басу (1955)), что $U_{(i)}$ статистически не зависит от $X_{(1)}$ и Y. Показать, что для $u \geqslant 0$ и $k=[1/u]$ справедливо соотношение

$$P\{U_{(i)} \leqslant u\} = 1 - \sum_{r=n-i+1}^{k} (-1)^{r+n-i+1} C_n^r C_{r-1}^{n-i} \left(1 - \frac{r}{n}\right) (1-ru)^{n-2}$$

(Лоурент (1963); Кэйб (1968)).

8.2.3. Обсудить критерии для аномальных наблюдений справа в экспоненциальном случае (как в упр. 8.2.2), различая случаи: (а) известны θ_1 и θ_2; (б) известен только параметр θ_1; (в) известен только параметр θ_2; (г) неизвестны оба параметра. Показать, что в последнем случае соответствующей статистикой является $U_{(n)}$ из упр. 8.2.2 и что

$$P\{U_{(n)} \leqslant u\} = 1 - \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+1} C_{n-1}^r (1-ru)^{n-2} \qquad (k=[1/u])$$

(Лоурент (1963); Басу (1965)).

8.3.1. Мостеллер рассматривал n выборок объема m_i ($i=1, 2, \ldots, n$), в одной из которых имеются ровно y наблюдений больших, чем все наблюдения в остальных выборках. Показать, что если выборки взяты из одной непрерывной генеральной совокупности, то

$$P\{Y > y\} = \Sigma m_i^{(y)} / (\Sigma m_i)^{(y)},$$

где $n^{(y)} = n(n-1)\ldots(n-y+1)$ (Мостеллер и Тьюки (1950)).

8.3.2. Пусть T_i обозначает сумму рангов Краскела—Уоллиса для i-й из n выборок объема m, взятых из непрерывной генеральной совокупности, и пусть

$$V_i = \left(T_i - \frac{1}{2} m(nm+1)\right) \Big/ \left[\frac{nm^2(nm+1)}{12}\right]^{1/2}.$$

Показать, что асимптотически (при $m \to \infty$) с. в. $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} V_i$ распределена как с. в. $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (X_i - \bar{X})$, где X_i — независимые $N(0, 1)$ величины (см. работу Оде (1967)).

8.3.3. Следуя Полсону, рассмотрим n групп по m нормальных $N(\mu_i, \sigma^2)$ с. в. X_{ij} ($i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, m$). Пусть D_{00} — решение, состоящее в равенстве всех n математических ожиданий μ_i, а $D_{ii'}$ — в том, что D_{00} неверно и $\mu_i = \mu_{\min}$, а $\mu_{i'} = \mu_{\max}$ (минимум и максимум берутся по $i=1, 2, \ldots, n$). Говорим, что пара $(\mu_i, \mu_{i'})$ сдвинута на Δ ($\Delta > 0$), если $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{i-1} = \mu_{i+1} = \ldots = \mu_{i'-1} = \mu_{i'+1} = \ldots = \mu_k = \mu$ (значение μ неизвестно) и $\mu_i = \mu - \Delta$, $\mu_{i'} = \mu + \Delta$.

Введем следующие ограничения: (а) если все μ_i равны, D_{00} должно быть выбрано с вероятностью $1-\alpha$; (б) решающая процедура должна быть инвариантной при линейных преобразованиях с. в. и (в) процедура должна быть симметричной в том смысле, что вероятность принять правильное решение, когда $(\mu_l, \mu_{l'})$ сдвинута на Δ, должна быть одинаковой при всех l и l'. Показать, что оптимальная процедура, когда одна из пар сдвинута, состоит в следующем:

если $g = m (\bar{x}_{\max} - \bar{x}_{\min}) / \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_{ij} - \bar{x})^2 \right]^{1/2} < g_\alpha$, то выбирается D_{00},

если $g > g_\alpha$, и $\bar{x}_{\min} = \bar{x}_l$, а $\bar{x}_{\max} = \bar{x}_{l'}$, то выбирается $D_{ll'}$ (Рамачандран и Кхатри (1957)).

(Заметим, что Рамачандран и Кхатри ошибочно рассматривали g как стьюдентизированный размах. Значение g_α не табулировано, но может быть получено приближенно с помощью моментов G. Как и в § 5.2, k-й момент G является отношением k-го момента числителя к k-му моменту знаменателя G.)

8.4.1. В ситуации случая (в) из § 8.2 положим

$$y_i = (x_i - \bar{x}) / [\Sigma (x_i - \bar{x})^2 + \nu s_\nu^2]^{1/2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказать, что совместная плотность распределения с. в. Y_1 и Y_2 имеет вид

$$f(y_1, y_2) = \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2} \frac{n+\nu-3}{2\pi} \left(1 - \frac{n-1}{n-2} y_1^2 - \frac{2}{n-2} y_1 y_2 - \frac{n-1}{n-2} y_2^2\right)^{\frac{n+\nu-5}{2}}$$

внутри эллипса

$$\frac{n-1}{n-2} y_1^2 - \frac{2}{n-2} y_1 y_2 + \frac{n-1}{n-2} y_2^2 \leqslant 1.$$

Показать, что только одно из значений y_i может превышать c, если $c > [(n-2)/2n]^{1/2}$ (Квизенберри и Дэйвид (1961)).

8.4.2. Доказать соотношения (8.4.5) и (8.4.6).

8.5.1. Показать, что «взносу» (8.5.4) соответствует

$$\text{«компенсация»} = \frac{9}{3+\lambda^2} \int\limits_{R_1} \frac{1}{2} z_3 \left(\frac{2\lambda}{3} - \frac{z_3}{2}\right) f_{1,3}(z_1, z_3; \lambda)\, dz_1\, dz_3 + \frac{9}{3+\lambda^2} \int\limits_{R_2} \frac{1}{2} z_1 \left(\frac{2\lambda}{3} - \frac{z_1}{2}\right) f_{1,3}(z, z_3; \lambda)\, dz_3\, dz_1,$$

где

$$f_{1,3}(z_1, z_3; \lambda) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \exp\left\{-\left[\left(z_1 + \frac{\lambda}{3}\right)^2 + \left(z_1 + \frac{\lambda}{3}\right)\left(z_3 + \frac{\lambda}{3}\right) + \left(z_3 + \frac{\lambda}{3}\right)^2\right]\right\} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \exp\left\{-\left[\left(z_1 - \frac{2\lambda}{3}\right)^2 + \left(z_1 - \frac{2\lambda}{3}\right)\left(z_3 + \frac{\lambda}{3}\right) + \left(z_3 + \frac{\lambda}{3}\right)^2\right]\right\} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \exp\left\{-\left[\left(z_1 + \frac{\lambda}{3}\right)^2 + \left(z_1 + \frac{\lambda}{3}\right)\left(z_3 - \frac{2\lambda}{3}\right) + \left(z_3 - \frac{2\lambda}{3}\right)^2\right]\right\}$$

в области (8.5.5) (Гутмен и Смит (1969)).

8.5.2. Доказать, что для правила (8.5.6)

$$\text{«взнос»} = n\mathsf{E}\,(W/\sigma)^2,$$

где $W = \hat{\mu}_W - \bar{X}$. Показать с помощью этого результата, что для $n = 3$ выражение для «взноса», аналогичного (8.5.4), имеет вид

$$\text{«взнос»} = \frac{2}{3} \int\limits_{R_1} (2z_3 + z_1)^2 f_{1,\,3}(z_1,\ z_3)\, dz_1\, dz_3$$

(Гутмен и Смит (1966)).

ГЛАВА 9

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 9.1. Введение

Асимптотическая теория порядковых статистик имеет дело с распределением соответствующим образом нормированных (и центрированных) величин $X_{r:n}$ при $n \to \infty$. На первом этапе обычно предполагают, что $X_{r:n}$ является r-й порядковой статистикой в случайной выборке объема n из некоторого распределения с ф. р. $P(x)$. Однако, как мы увидим позже, многие виды зависимости между X_1, X_2, ..., X_n не нарушают вида предельных распределений. Эта черта делает рассматриваемую теорию значительно более полезной. Если $r/n \to \lambda$ при $n \to \infty$, то существенно различные результаты получаются для случаев $0 < \lambda < 1$; $\lambda = 0$, $\lambda = 1$. В первом случае $X_{r:n}$ является выборочной квантилью и (при выполнении определенных условий регулярности) имеет асимптотически нормальное распределение. Ко второму случаю относятся экстремальные значения $X_{1:n}$, $X_{n:n}$ и, вообще говоря, m-е экстремумы $X_{m:n}$, $X_{n-m+1:n}$ при фиксированном m. Эти величины имеют ненормальное предельное распределение.

Мы часто ссылались на асимптотические результаты в предыдущих главах. В частности, асимптотическая оценка предельного числа квантилей возникает в задачах «оптимального выбора порядковых статистик» (§ 7.6). В следующем параграфе мы излагаем теорию распределений, оправдывающую это применение, и, следуя Мостеллеру (1946), устанавливаем совместную асимптотическую нормальность квантилей.

В оставшейся части главы мы имеем дело с теорией экстремальных значений (§§ 9.3 — 9.5) и асимптотическим распределением линейных функций порядковых статистик, а также с их использованием в асимптотическом оценивании (§§ 9.6 и 9.7). Здесь в большей степени, чем где бы то ни было в этой книге, мы ограничиваемся кратким изложением очень обширной доступной литературы, приводя доказательства только некоторых основных результатов.

Самый замечательный результат теории экстремальных значений является теперь классическим: если величина $X_{n:n}$, нормированная надлежащим образом, имеет предельное распределение, то оно должно быть распределением одного из трех типов, задаваемых соотношением (9.3.1). Имеется множество применений распределений экстремальных значений. Например, простое предположение о том, что цепь не прочнее, чем ее самое слабое звено, приводит нас к интерпретации величины $X_{1:n}$, как прочности цепи (состоящей из n звеньев), и отсюда к впечатляющей теории прочности на разрыв. Либлейн (1954b) прослеживает эту идею вплоть до работы Чаплина 1860 г. Наиболее полезным распределением, описывающим прочность на разрыв, является так называемое распределение Вейбулла, имеющее ф. р.

$$F(y) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{y-\gamma}{\delta}\right)^{\alpha}\right] \qquad (\gamma < y < \infty;\ \delta > 0;\ \alpha > 0). \tag{9.1.1}$$

Здесь γ можно интерпретировать как гарантированный минимум прочности, а δ—масштабный множитель. Очевидно, что $X = -(Y-\gamma)/\delta$ имеет ф. р. $\Lambda_2(x)$, т. е. распределение Вейбулла является просто вторым из трех типов, но только для наименьшего, а не для наибольшего значения[1]). В испытаниях на продолжительность жизни y может обозначать время до момента гибели. Далее, распределение наводнений или других экстремальных метеорологических явлений часто имеют вид Λ_3. Мы отсылаем читателя к книге Гумбеля (1965), где указаны другие приложения и приведены различные ссылки.

Гумбель также подробно обсуждает различные методы оценивания параметров таких, как γ и δ в (9.1.1), причем

---

[1]) Заметим, однако, что эти три типа часто обозначаются по-разному: на $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x)$, $\Lambda_3(x)$ ссылаются как на вторую, третью, первую асимптоту (или даже тип), соответственно.

предполагается, что данные представляют собой множество из n (не обязательно большого) наблюдаемых максимумов или минимумов. Широко применяются графические методы, особенно вероятностные диаграммы (сравните с § 7.8). Поскольку (9.1.1) является распределением, зависящим (при фиксированном α) от параметров сдвига и масштаба, то их оценивание с помощью порядковых статистик (§ 6.2) также возможно. В этой связи можно упомянуть работу Марица и Манро (1967), в которой с помощью порядковых статистик оцениваются все три параметра «обобщенного распределения экстремального значения»:

$$F(y)=\exp\left\{-\left[\frac{1-(y-\gamma)}{\delta\beta}\right]^{\beta}\right\},$$

где

$$-\infty<y<\gamma+\delta\beta, \quad \text{если} \quad \beta>0,$$

$$\gamma+\delta\beta<y<\infty, \quad \text{если} \quad \beta<0.$$

Положив $\gamma+\delta\beta=0$, получим Λ_1 для $\delta\beta=1$, $\beta=-\alpha$ и Λ_2 для $\delta\beta=1$, $\beta=\alpha$. При $x=(y-\gamma)\cdot\delta$ и $\beta\to\infty$ получим $\Lambda_3(x)$.

Другими работами, дополняющими книгу Гумбеля, являются его статья по оцениванию предела прочности в книге Сархана и Гринберга (1970), а также работа Гумбеля (1961) о прочности на разрыв и усталости, работа Гумбеля (1963) о прогнозе засух, работы Пайка (1966) о раке, рассматриваемом как прорыв самого слабого звена, Барнетта и Льюиса (1967) о вероятностях низких температур, Эпстейна (1967) о моментах вымирания бактерий и Манна (1968) о процедурах оценивания.

В заключительном параграфе (§ 9.7) этой главы выводятся оценки, которые являются асимптотически оптимальными для распределения, зависящего только от параметров масштаба и сдвига. Близкое отношение к этому вопросу имеют методы получения оценок, которые хотя и не обязательно оптимальны для наиболее интересных распределений, но имеют хорошие свойства во всем выбранном множестве распределений. Такие робастные оценки обсуждались в § 6.5, хотя главным образом для малых выборок.

§ 9.2. Асимптотическое совместное распределение квантилей

Пусть X_i $(i=1, \ldots, n)$ — случайная выборка из непрерывного распределения с п. р. $p(x)$. Мы рассматриваем асимптотическое совместное распределение k выборочных квантилей $X_{(n_j)}$ $(j=1, \ldots, k)$, где $n_j=[n\lambda_j]+1$ и $0<\lambda_1<\ldots$ $\ldots<\lambda_k<1$.

Теорема 9.2 (Мостеллер (1946)). *Если $p(x)$ дифференцируема в окрестностях квантилей ξ_{λ_j} и $p(\xi_{\lambda_j})\neq 0$ $(j=1, \ldots, k)$, то совместное распределение $X_{(n_1)}, \ldots, X_{(n_k)}$ сходится к k-мерному нормальному распределению с математическими ожиданиями $\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_k}$ и ковариациями*

$$\operatorname{cov}\left(X_{(n_j)}, X_{(n_{j'})}\right)=\frac{\lambda_j\left(1-\lambda_{j'}\right)}{np\left(\xi_{\lambda_j}\right)\cdot p\left(\xi_{\lambda_{j'}}\right)} \qquad (j\leqslant j').$$

Доказательство. Мы предположим сначала, что $p(x)$ — равномерная $R(0, 1)$ п. р., так как с помощью обратного вероятностного интегрального преобразования можно получить любую $p(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы. Совместная п. р. $X_{(n_j)}$ равна (сравните с 2.2.3)

$$h=\frac{n!}{\prod\limits_{j=0}^{k}(n_{j+1}-n_j-1)!}\prod_{j=0}^{k}\left(\int\limits_{x_{(n_j)}}^{x_{(n_{j+1})}} dt_j\right)^{n_{j+1}-n_j-1}=$$

$$=C\prod_{j=0}^{k}\left(x_{(n_{j+1})}-x_{(n_j)}\right)^{n_{j+1}-n_j-1},$$

где $n_0=0$, $n_{k+1}=n+1$, $x_{(n_0)}=0$, $x_{(n_{k+1})}=1$, а C — общее обозначение для постоянной.

Поскольку $\mathsf{E}X_{(n_j)}=n_j/(n+1)$, положим

$$y_j=\left(x_{(n_j)}-n_j/(n+1)\right)n^{1/2} \qquad (j=0, 1, \ldots, k+1).$$

Тогда $y_0=0$, $y_{k+1}=0$ и

$$h=C\prod_{j=1}^{k+1}\left[1+\frac{(y_j-y_{j-1})(n+1)}{n^{1/2}(n_j-n_{j-1})}\right]^{n_j-n_{j-1}-1}.$$

В силу того, что Y_j имеет порядок 1 по вероятности (коротко $Y_j = O_p(1)$), имеем

$$\log h = C + \frac{n+1}{n^{1/2}} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(n_j - n_{j-1} - 1)(y_j - y_{j-1})}{n_j - n_{j-1}} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{n} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(n_j - n_{j-1} - 1)(y_j - y_{j-1})^2}{(n_j - n_{j-1})^2} + O_p\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right).$$

Далее,

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(n_j - n_{j-1} - 1)(y_j - y_{j-1})}{(n_j - n_{j-1})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k+1} (y_j - y_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{y_j - y_{j-1}}{n_j - n_{j-1}} = 0 - O_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

и, учитывая равенство $n_j = n\lambda_j + O(1)$, получим

$$n \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(n_j - n_{j-1} - 1)(y_j - y_{j-1})^2}{(n_j - n_{j-1})^2} = \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} + O_p\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\log h = C - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} + O_p\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right). \qquad (9.2.1)$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{(y_j - y_{j-1})^2}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{y_j^2}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} + \frac{y_j^2}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}\right) - 2 \sum_{j=2}^{k} \frac{y_j y_{j-1}}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} y_j^2 \frac{\lambda_{j+1} - \lambda_{j-1}}{(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j-1})} - 2 \sum_{j=2}^{k} \frac{y_j y_{j-1}}{\lambda_j - \lambda_{j-1}}, \qquad (9.2.2)$$

то из (9.2.1) вытекает, что Y_j имеют асимптотически k-мерное нормальное распределение с математическими ожиданиями, равными нулю. Матрица коэффициентов квадратичной формы (9.2.2), которую мы обозначим $(A_{jj'})$, имеет вид

$$A_{jj}=\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_{j-1}}{(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_j-\lambda_{j-1})},\quad A_{j,j-1}=A_{j-1,j}=\frac{-1}{\lambda_j-\lambda_{j-1}}$$

и $A_{jj'}=0$ для $|j-j'|>1$.

Можно проверить, что матрица, обратная к $(A_{jj'})$, или, что то же самое, ковариационная матрица величин Y_j, имеет элементы

$$\operatorname{cov}(Y_j,\ Y_{j'})=\lambda_j(1-\lambda_{j'})\qquad (j\leqslant j').$$

Поскольку

$$X_{(n_j)}=\frac{Y_j}{n^{1/2}}+\frac{n_j}{n+1},$$

асимптотически $X_{(n_j)}$ также имеют k-мерное нормальное распределение с

$$\mathsf{E}X_{(n_j)}=\xi_{\lambda_j}(=\lambda_j)\quad \text{и}\quad \operatorname{cov}\left(X_{(n_j)},\ X_{(n_{j'})}\right)=\lambda_j(1-\lambda_{j'})/n,$$

что доказывает теорему для равномерного случая. ▶

Для получения результата в общем случае мы воспользуемся следующей леммой:

Если случайные величины $t_j(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ $(j=1,$ $2,\ \ldots,\ k)$ имеют асимптотически k-мерное нормальное распределение с математическими ожиданиями θ_j, дисперсиями σ_j^2, которые стремятся к 0 при $n\to\infty$, и ковариациями $\rho_{jj'}\sigma_j\sigma_{j'}$ и если $g_j(t_j)$ — однозначные функции с не равными нулю в некоторых окрестностях точек $t_j=\theta_j$ и непрерывными производными $g'_j(t_j)$, то сами $g_j(t_j)$ имеют k-мерные нормальные распределения с математическими ожиданиями $g_j(\theta_j)$ и ковариациями $\rho_{jj'}\sigma_j\sigma_{j'}g'_j(\theta_j)\,g'_{j'}(\theta_{j'})$.

Очевидно, что при $t_j=X_{(n_j)}$, $\theta_j=\lambda_j$ преобразование $g_j(t_j)=P^{-1}\left(X_{(n_j)}\right)$ удовлетворяет условиям леммы. Поэтому теорема является следствием равенств

$$g_j(\theta_j)=P^{-1}(\lambda_j)=\xi_{\lambda_j}$$

и

$$g'_j(\theta_j)=\frac{dg_j(\theta_j)}{d\lambda_j}=\frac{1}{d\lambda_j/d\xi_{\lambda_j}}=\frac{1}{p(\xi_{\lambda_j})},$$

где ξ_{λ_j} теперь относится к генеральному распределению с п. р. $p(x)$.

Замечание 1. Математические ожидания, дисперсии и ковариации, фигурирующие в теореме, соответствуют первым членам соотношений (4.5.3)—(4.5.5).

Замечание 2. Результаты теоремы уже использовались в задаче «оптимального выбора порядковых статистик» (§ 7.6).

Другой подход к теореме 9.2 указан в упр. 9.2.2, а также в работе Кифера (1967). Еще одно простое, но довольно строгое доказательство с помощью характеристических функций было недавно приведено Уолкером (1968). Используя представление Бахадура из упр. 9.2.2, Сен (1968) установил асимптотическую нормальность (при соответствующих условиях) выборочных квантилей для m-зависимых не обязательно стационарных процессов, т. е. для случайных векторов $(X_1, \ldots, X_i)$ и $(X_j, X_{j+1}, \ldots)$, которые стохастически независимы, если $j-i>m$, $m=0, 1, 2, \ldots$ Смирнов (1966, 1967) рассмотрел поведение X_k, где k является функцией от n, и сформулировал условия, при которых распределение $X_{(k(n))}$ сходится к нормальному распределению при $n\to\infty$ при условии, что $k(n)\to\infty$ и $k(n)/n\to 0$. По этому поводу см. также работы Ченга (1964) и ван дер Ваарта (1961а). Оценивание в больших выборках неоднозначно определенных квантилей рассмотрено Фельдманом и Такером (1966); один из этих результатов содержится в упр. 9.2.1. Асимптотическая совместная нормальность выборочных квантилей для многомерного распределения установлена Вейсом (1964) при довольно слабых условиях.

В теореме Мостеллера предполагается, что $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k<1$, т. е. последовательность λ строго возрастает. В отличие от этого, рассматривая сначала совместную п. р. величин $X_{(i-k)}$, $X_{(i)}$ и $X_{(i+l)}$ при $i/n\to\lambda$ и k, l, равных $o(n)$, и преобразуя эти величины в величины

$$U=\frac{n^{1/2}(X_{(i)}-\xi_\lambda)\,p_\lambda}{[\lambda(1-\lambda)]^{1/2}}, \quad U_1=\frac{n}{k}(X_{(i)}-X_{(i-k)}),$$

$$U_2=\frac{n}{l}(X_{(i+l)}-X_{(i)}),$$

Сиддики (1960) показал, что асимптотически U, U_1 и U_2 независимо распределены, причем U имеет нормальное распределение. Более того, $2kp_\lambda U_1$ и $2lp_\lambda U_2$ распределены как χ^2 величины с $2k$ и $2l$ степенями свободы, соответственно. Таким образом, асимптотически

$$2np_\lambda (X_{(i+l)} - X_{(i-k)}) \sim \chi^2_{2(k+l)} \qquad (9.2.3)$$

имеет распределение, не зависящее от распределения $X_{(i)}$. Эти результаты справедливы без предположения о постоянстве k и l. Если k и l имеют порядок n^α $(0<\alpha<1)$, то (9.2.3) равносильно (сравните с работой Блоха и Гаствирта (1968)), соответственно,

$$\frac{np_\lambda (X_{(i+l)} - X_{(i-k)}) - (k+l)}{(k+l)^{1/2}} \sim N(0,\ 1).$$

В своей работе Блох и Гаствирт оценили совместную п. р. Похожие задачи возникают при оценивании моды с помощью некоторой функции от первой и последней из тех, скажем s, выбранных последовательных порядковых статистик, которые группируются наиболее тесно (см., например, работу Вентера (1967)).

§ 9.3. Асимптотическое распределение экстремального значения

Асимптотическое поведение $X_{(n)}$ (наибольшего наблюдения в выборке объема n из распределения с ф. р. $P(x)$) явилось задачей, бросившей вызов многим крупным специалистам по математической статистике. Наиболее заметный вклад в эту область внесли Додд (1923), фон Мизес (1923, 1936), Фреше (1927), Фишер и Типпет (1928), де Финетти (1932), Гумбель (начиная с 1935 г. и кончая итоговой работой 1958 г.) и, наконец, Гнеденко (1943), который проводит наиболее полное и строгое исследование этого вопроса. Можно упомянуть также работу Барндорф-Нильсена (1963), в которой кратко излагаются эти и близкие вопросы, и работы Двасса (1964) и Ламперти (1964), в которых рассматривается подход, связанный со стохастическими процессами.

Приведем некоторые из основных достижений в этой области. Для произвольного распределения случайная величина $X_{(n)}$, даже после соответствующей нормировки, вообще говоря, не будет обладать предельным распределением (пр. р.). Однако, если $P(x)$ таково, что такое предельное распределение существует, то это пр. р. должно относиться к одному из трех типов[2])

$$\Lambda_1(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant 0,\quad \alpha>0,\\ \exp(-x^{\alpha}), & \text{если } x>0;\end{cases}$$

$$\Lambda_2(x)=\begin{cases}\exp[-(-x)^{\alpha}], & \text{если } x\leqslant 0,\quad \alpha>0,\\ 1, & \text{если } x>0;\end{cases} \tag{9.3.1}$$

$$\Lambda_3(x)=\exp(-\exp(-x)) \quad (-\infty<x<\infty).$$

Сказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы (Гнеденко):

Класс пр. р. для $F^n(a_nx+b_n)$, где $a_n>0$ и b_n — соответствующим образом выбранные постоянные, содержит только законы типов $\Lambda_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$.

Мы не будем доказывать эту теорему, а вместо этого изложим остроумную ключевую идею, уже использованную ранее Фишером и Типпетом. Так как наибольшее наблюдение в выборке объема $m\cdot n$ можно рассматривать как наибольший член в выборке объема n, состоящей из максимальных членов выборок объемов m, и так как в случае существования предельного распределения $\Lambda(x)$ оба эти распределения будут стремиться к $\Lambda(x)$ при $m\to\infty$, то $\Lambda(x)$ должно удовлетворять соотношению

$$\Lambda^n(a_nx+b_n)=\Lambda(x), \tag{9.3.2}$$

т. е. наибольшее наблюдение в выборке объема n из распределения с ф. р. $\Lambda(x)$ должно, после соответствующей нормировки, само иметь предельную ф. р. Λ. Решение этого функционального уравнения относительно $\Lambda(x)$ дает нам все возможные предельные типы.

Далее, если в (9.3.2) $a_n\neq 1$, то, обозначая $x_0=b_n/(1-a_n)$, получим $x_0=a_nx_0+b_n$, и поэтому $\Lambda^n(x_0)=\Lambda(x_0)$, т. е. $\Lambda(x_0)=0$ или 1. При условии, что п. р. $\Lambda(x)$ существует, x_0 должно быть постоянной, которую можно, не умаляя общности, положить равной нулю. Тогда в силу того, что из $x_0=0$ следует $b_n=0$, решения распадаются на следующие три класса:

(1) $\Lambda(x)=0$, если $x\leqslant 0$, $\Lambda^n(a_nx)=\Lambda(x)$, если $x>0$;

(2) $\Lambda^n(a_nx)=\Lambda(x)$, если $x\leqslant 0$, $\Lambda(x)=1$, если $x>0$;

(3) $\Lambda^n(x+b_n)=\Lambda(x)$.

---

[2]) См. сноску из § 9.1.

Эти классы, очевидно, соответствуют случаям $a_n > 1$, $a_n < 1$ и $a_n = 1$. Из стандартных математических рассуждений следует, что единственными решениями функциональных уравнений (1)—(3) являются соответственно выражения $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x)$ и $\Lambda_3(x)$.

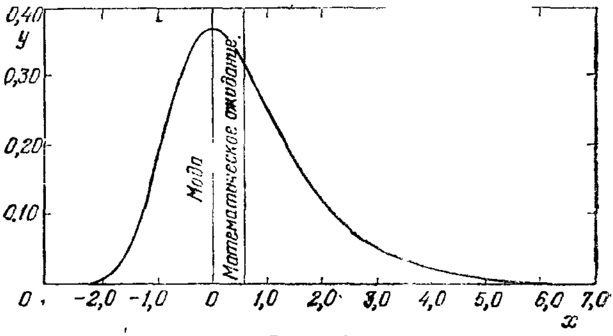


Рис. 9.3.

Посмотрим теперь внимательнее на $\Lambda_3(x)$. Так как оно выделяется среди других типов, то его часто называют распределением экстремального значения, хотя, конечно, этот термин подходит ко всем трем типам. Легко видеть, что максимальное наблюдение в выборке объема n из распределения $\Lambda_3(x)$ имеет ф. р., отличающуюся от $\Lambda_3(x)$ только на смещение b_n вправо, где b_n определяется уравнением

$$\exp(-ne^{-x}) = \exp\left(-e^{-(x-b_n)}\right),$$

т. е. $b_n = \log n$. П. р. $\Lambda_3'(x) = \exp\{-x - e^{-x}\}$ изображена на рис. 9.3. С помощью производящей функции кумулянтов легко показать, что $\mu = \gamma$ (постоянная Эйлера) $=$

$$= 0{,}5772\ldots, \quad \mu_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449\ldots, \quad \beta_1 = 1{,}2986\ldots,$$

$\beta_2 = 5{,}4$.

Гнеденко (1943) получил необходимые и достаточные условия принадлежности распределения $P(x)$ «области притяжения» каждого из следующих трех предельных законов:

(1) $P(x)$ принадлежит области притяжения $\Lambda_1(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-P(x)}{1-P(kx)}=k^{\alpha}$$

для каждого $k>0$.

(2) $P(x)$ принадлежит области притяжения $\Lambda_2(x)$ тогда и только тогда, когда

(а) существует x_0 такое, что

$$P(x_0)=1,\quad P(x_0-\varepsilon)<1 \quad \text{для любого } \varepsilon>0;$$

(б)
$$\lim_{x\to-0}\frac{1-P(kx+x_0)}{1-P(x+x_0)}=k^{\alpha}$$

для каждого $k>0$.

Легко видеть, что $P(x)$ не ограничено справа в первом случае и ограничено во втором [3]. Гнеденко указывает, что $\Lambda_3(x)$ может быть предельным распределением в обоих случаях (упр. 9.3.1). Вместо того, чтобы приводить его довольно сложные необходимые и достаточные условия, мы, следуя фон Мизесу (1936), докажем достаточное условие, удобное в том случае, когда $P(x)$ неограничено справа:

Пусть $P(x)$ дважды дифференцируема по крайней мере для всех x, больших некоторого x_0, $P(x)<1$ и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}\left[\frac{1-P(x)}{p(x)}\right]=0. \tag{9.3.3}$$

Тогда соотношение

$$\lim_{n\to\infty}P\{(X_{(n)}-l_n)\,np(l_n)\leqslant u\}=\Lambda_3(u)$$

выполняется равномерно по $u\in(-\infty,\infty)$, где l_n таково, что

$$P(l_n)=\frac{n-1}{n}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что

$$P\{X_{(n)}\leqslant l_n\}\equiv F_n(l_n)=P^n(l_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

[3]) Имеется в виду ограниченность случайной величины, имеющей ф. р. $P(x)$. (*Прим. перев.*)

так что

$$\lim_{n\to\infty} P_n(l_n) = e^{-1}.$$

Положим теперь

$$x = l_n + \frac{u}{c_n}, \tag{9.3.4}$$

где c_n постоянная, которую мы выберем позже. Тогда $P^n\left(l_n + \frac{u}{c_n}\right)$ имеет предел при $u = 0$, и мы рассмотрим этот предел для произвольного фиксированного u.

Из определения l_n следует, что

$$P(x) = 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - P(x)}{1 - P(l_n)}.$$

Если теперь x таково, что отношение $[1 - P(x)]/[1 - P(l_n)]$ стремится к конечному пределу при $n \to \infty$, то

$$-\log F_n(x) = -n \log P(x) = \frac{1 - P(x)}{1 - P(l_n)} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому

$$\log[-\log F_n(x)] = \log\{n[1 - P(x)]\} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

или, положив $G_n(x) = \log\{n[1 - P(x)]\}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \log[-\log F_n(x)] = \lim_{n\to\infty} G_n(x) = -\lim_{n\to\infty} \int_{l_n}^{x} g(t)\,dt, \tag{9.3.5}$$

так как $G_n(l_n) = 0$, где

$$g(x) = -G_n'(x) = \frac{p(x)}{1 - P(x)}.$$

Теперь выберем c_n в (9.3.4), положив

$$c_n = g(l_n) = np(l_n),$$

и выразим $G_n(x)$ в виде

$$G_n(x) = \int_{x}^{l_n} g(t)\,dt = (l_n - x)\,g(\xi) \qquad (x < \xi < l_n).$$

Тогда

$$G_n\left(l_n + \frac{u}{c_n}\right) = -u\frac{g(\xi)}{g(l_n)}. \tag{9.3.6}$$

Покажем, что $g(\xi)/g(l_n)\to 1$ при $n\to\infty$, если u лежит в конечном интервале $(-u_0,\ u_0)$. Заметим сначала, что $\xi\to\infty$ при $n\to\infty$; из (9.3.4) следует, что $\xi>l_n-u_0/g(l_n)$ и правая часть этого неравенства является значением при $x=l_n$ функции $x-u_0/g(x)$, производная которой в силу (9.3.3) стремится к 1 при $x\to\infty$. Поэтому эта функция неограниченно растет, когда x пробегает значения $l_1,\ l_2,\ \ldots$

Разлагая $1/g(\xi)$ в ряд Тейлора в точке $\xi=l_n$ и домножая на $g(l_n)$, получим

$$\frac{g(l_n)}{g(\xi)}=1+g(l_n)(\xi-l_n)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]_{x=\xi_1}\qquad (\xi<\xi_1<l_n). \tag{9.3.7}$$

Далее, в силу (9.3.4) имеем $|g(l_n)(\xi-l_n)|<u_0$. Кроме того, при возрастании n $\xi_1\to\infty$, так как $\xi\to\infty$. Поэтому в силу наших предположений последний член (9.3.7) стремится к нулю. Следовательно, $\frac{g(l_n)}{g(\xi)}\to 1$ при $n\to\infty$. Поэтому из (9.3.6) и (9.3.5) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\log\left|-\log F_n\left(l_n+\frac{u}{np(l_n)}\right)\right|=-u$$

равномерно по u из $(-u_0,\ u_0)$, или

$$\lim_{n\to\infty}F_n\left(l_n+\frac{u}{np(l_n)}\right)=\exp\{-e^{-u}\}.$$

Отсюда следует теорема, так как равномерную сходимость можно распространить на $(-\infty,\ \infty)$ в силу того, что каждая ф. р. $F_n(\cdot)$, а также $\exp\{-e^{-u}\}$ равномерно стремятся к 0 и 1, соответственно, при $u\to-\infty$ и $u\to\infty$.

Пример 9.3.1. Для экспоненциального распределения с п. р. $p(x)=e^{-x}$ $(x\geq 0)$ справедливы точные равенства $l_n=\log n$, $np(l_n)=1$. Условие (9.3.3), очевидно, выполнено, так что $X_{(n)}-\log n$ имеет предельную ф. р. $\Lambda_3(x)$. В этом контексте все распределения из области притяжения Λ_3 называют *распределениями экспоненциального типа*.

Пример 9.3.2. Хорошо известно, что для нормальной п. р. $p(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ асимптотически при больших x

$$\frac{1-P(x)}{p(x)}\sim\frac{1}{x}, \tag{9.3.8}$$

так что выполняется соотношение (9.3.3) и теорема применима [4]).

Для заданного n l_n можно вычислить с помощью таблиц нормальной ф. р. Однако заметим, что в силу (9.3.8) соотношение

$$\frac{1}{n} = 1 - P(l_n) \sim \frac{e^{-l_n^2/2}}{l_n (2\pi)^{1/2}}$$

дает нам первое приближение (сравните с упр. 9.3.2)

$$l_n \sim (2 \log n)^{1/2}. \tag{9.3.9}$$

Кроме того,

$$np(l_n) \sim (2 \log n)^{1/2},$$

так что асимптотически $(2\log n)^{1/2} [X_{(n)} - (2 \log n)^{1/2}]$ имеет ф. р. $\Lambda_3(x)$.

Как впервые отмечалось еще Фишером и Типпетом (1928), в случае нормального закона сходимость к предельному распределению чрезвычайно медленная. Это отличается, например, от случаев экспоненциального и логистического законов. Но даже для нормального закона для $n = 100$, за исключением хвостов предельного распределения, согласие уже хорошее (Гумбель (1965), стр. 267). Поведение распределения экстремума для генеральных распределений экспоненциального типа изучалось Уэгереном (1954). Более общие результаты приведены у Дронкерса (1958). По этому поводу см. также работы Холдена и Джайякара (1963), которые показали, что для нормального распределения ф. р. величины $X_{(n)}^2$ (соответствующим образом нормализованной) стремится к $\Lambda_3(x)$ намного быстрее, чем ф. р. X_n.

Подобные же результаты, очевидно, справедливы и для предельного распределения нормализованного минимума. Три возможных предельных типа, соответствующих (9.3.1), принимают вид

$$\Lambda_1'(x) = \begin{cases} 1 - \exp[-(-x)^{-\alpha}], & \text{если } x \leqslant 0, \quad \alpha > 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$\Lambda_2'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \quad \alpha > 0, \\ 1 - \exp(-x^{\alpha}), & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$\Lambda_3'(x) = 1 - \exp\{-e^{x}\} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

---

[4]) Здесь $a_n \sim b_n$ равносильно соотношению $a_n/b_n \to 1$. (*Прим. перев.*)

Мы не будем вдаваться в рассмотрение таких вопросов, как: является ли последовательность экстремумов устойчивой в некотором (техническом) смысле, или сходятся ли моменты экстремумов к моментам соответствующего асимптотического распределения, а отошлем к работам Жеффруа (1958), Барндорф-Нильсена (1963), Сена (1959, 1961, 1964), Маккорда (1964) и Пикендса (1967b, 1968).

§ 9.4. Теория экстремальных значений. Обобщения для независимых одинаково распределенных величин

Перейдем теперь к некоторым обобщениям для одинаково распределенных независимых случайных величин результатов § 9.3, ограничиваясь главным образом формулировкой основных результатов.

Распределение m-го экстремума. Как прямое обобщение (Гумбель (1935); Смирнов (1952)) результатов (9.3.1), опять получаем три возможных предельные распределения для соответствующим образом нормализованного m-го экстремума $X_{n-m+1:n}$ (при $n \to \infty$ и фиксированном натуральном m):

$$\Lambda_1^{(m)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0,\ \alpha > 0, \\ \dfrac{1}{(m-1)!} \displaystyle\int_{x^{-\alpha}}^{\infty} e^{-t} t^{m-1}\, dt, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$\Lambda_2^{(m)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(m-1)!} \displaystyle\int_{(-x)^{\alpha}}^{\infty} e^{-t} t^{m-1}\, dt, & \text{если } x \leq 0, \quad \alpha > 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$\Lambda_3^{(m)}(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{e^{-x}}^{\infty} e^{-t} t^{m-1}\, dt \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Смирнов показал, что необходимые и достаточные условия Гнеденко (§ 9.3) для принадлежности распределения области притяжения одного из приведенных выше предельных законов сохраняются для $m > 1$ [5]).

[5]) Обобщения для независимых, но не обязательно одинаково распределенных величин приведены в работе Мейзлера и Вейсмана (1969).

Совместное распределение крайних значений. Сначала мы рассмотрим совместную п. р. величин $U = nP(X_{r:n})$ и $V = n[1 - P(X_{s:n})]$, которая в силу (2.2.1) равна

$$f(u, v) = \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}\left(\frac{u}{n}\right)^{r-1}\left(1 - \frac{u}{n} - \frac{v}{n}\right)^{s-r-1}\times$$

$$\times\left(\frac{v}{n}\right)^{n-s}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$(u \geqslant 0;\quad v \geqslant 0;\quad u + v \leqslant n).$$

При $n \to \infty$ и фиксированных r и $n - s + 1 = t$ правая часть принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(r)}u^{r-1}e^{-u}\frac{1}{\Gamma(t)}v^{t-1}e^{-v}\qquad (u \geqslant 0;\quad v \geqslant 0),$$

откуда следует, что U и V асимптотически независимы и имеют $\gamma(r)$ и $\gamma(t)$ распределения. Таким образом, любое «нижнее» крайнее значение $X_{r:n}$ асимптотически независимо от любого «верхнего» крайнего значения $X_{n+1-t:n}$. Этот результат, конечно, очень полезен при выводе предельных распределений таких статистик, как размах и середина размаха.

Асимптотическое распределение размаха. Рассмотрим симметричные генеральные распределения, удовлетворяющие соотношению (9.3.3). Тогда $Y = (X_{(n)} - l_n)\cdot np(l_n)$ имеет предельную ф. р. $\Lambda_3(y)$, в силу симметрии такую же ф. р. имеет и $-Z$, где Z — нормализованный минимум, т. е.

$$Z = (X_{(1)} - l_1)\,np(l_1),\quad l_1 = -l_n.$$

В силу асимптотической независимости Y и Z их совместная асимптотическая п. р. равна

$$\exp\{-y - e^{-y} + z - e^{z}\},$$

так что нормализованный размах $W' = (X_{(n)} - X_{(1)} - 2l_n)\times \times np(l_n)$ имеет предельную п. р.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-w' - e^{-w'-z} - e^{z}\}\,dz = 2e^{-w'}K_0(2e^{-w'/2}), \tag{9.4.1}$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода. Этот результат принадлежит Гумбелю (1947) и Коксу

(1948) и использован Гумбелем (1949) при построении таблиц как п. р., так и ф. р. величины W'.

Различные авторы (Элфвинг (1947); Кокс (1948); Кэдуэлл (1953а)) уточняли этот результат, рассматривая его как приближение к распределению размаха W в конечных выборках. Если записать п. р. W в виде

$$f(w) = n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} p\left(x-\frac{1}{2}w\right)p\left(x+\frac{1}{2}w\right)\left[P\left(x+\frac{1}{2}w\right) - P\left(x-\frac{1}{2}w\right)\right]^{n-2}dx$$

и предположить, что $p(x)$ симметрична относительно $x=0$ и унимодальна, то подынтегральное выражение будет иметь максимум в точке $x=0$ и будет быстро убывать от нуля по обе стороны от $x=0$. Это наводит на мысль рассматривать в качестве метода наискорейшего спуска разложение по степеням x.

Легко проверить (Кэдуэлл (1953а)), что

$$p\left(x-\frac{1}{2}w\right)p\left(x+\frac{1}{2}w\right) = p^2\exp\left\{-\left[\left(\frac{p'}{p}\right)^2 - \frac{p''}{p}\right]x^2 + \ldots\right\},$$

$$P\left(x+\frac{1}{2}w\right) - P\left(x-\frac{1}{2}w\right) = (2P-1)\exp\left(\frac{p'}{2P-1}x^2 + \ldots\right),$$

где P, p и их производные вычисляются в точке $x=\frac{1}{2}w$ и точки обозначают ряды по более высоким четным степеням x. Таким образом, подынтегральное выражение можно переписать в виде

$$p^2(2P-1)^{n-2}(1+Ax^4+Bx^6+\ldots)\times \exp-\left[\left(\frac{p'}{p}\right)^2 - \frac{p''}{p} - \frac{(n-2)p'}{2P-1}\right]x^2$$

и с помощью леммы Уотсона (см., например, Джеффрис и Джеффрис (1969), § 17, 03) его можно проинтегрировать почленно и получить асимптотическое разложение для $f(w)$. Первый и главный член этого разложения, очевидно, равен

$$f(w) \simeq \frac{n(n-1)\pi^{1/2}p^2(2P-1)^{n-2}}{\left[\left(\frac{p'}{p}\right)^2 - \frac{p''}{p} - \frac{(n-2)p'}{2P-1}\right]^{1/2}}. \qquad (9.4.2)$$

Если $p(x)=\varphi(x)$ — п. р. стандартного нормального закона, то (9.4.2) упрощается и мы имеем

$$f(w)\simeq\frac{n(n-1)\,\pi^{1/2}\varphi^2(2\Phi-1)^{n-3/2}}{[2\Phi-1-(n-2)\varphi']^{1/2}}. \tag{9.4.3}$$

Кэдуэлл показал, что аппроксимация этим главным членом дает хорошее согласие для первых четырех моментов уже при $n=20$:

	Среднее	Стандартное отклонение	β_1	β_2
Точное значение	3,7350	0,7287	0,1627	3,259
Ошибка от использования (9.4.3)	0,0086	0,0025	0,0043	−0,019

Для дальнейшего уточнения можно эффективно использовать дополнительные члены. Кэдуэлл рассмотрел также квазиразмахи, для которых первые приближения даже лучше, чем для размаха (сравните с упр. 9.4.1). Ф. р. размаха W он рассмотрел отдельно (Кэдуэлл (1954)).

С помощью совместной асимптотической п. р. экстремумов Гумбель и Кини (1950a, b) вывели, соответственно, асимптотическое распределение «геометрического размаха» $[X_{(n)}(-X_{(1)})]^{1/2}$ и «экстремального отношения» $X_{(n)}/(-X_{(1)})$. Таблицы ф. р. последнего отношения приведены в работе Гумбеля и Пикендса (1967).

Асимптотическое распределение выборочных спейсингов. Метод наискорейшего спуска, подобный только что описанному, использован Дарвином (1957) при изучении распределения выборочных спейсингов $X_{i+1:n}-X_{i:n}$ ($i=1, 2, \ldots, n-1$). Эти вопросы были рассмотрены Пайком (1965) как для малых (сравните с § 5.4), так и для больших выборок. У него приведено много ссылок. По этому поводу см. также работу Вейса (1965), внесшего большой вклад в этот предмет, и работу Блюменталя (1966).

Другие результаты, связанные с независимостью. Верхние и нижние экстремумы не только асимптотически независимы между собой, но и оба асимптотически независимы от (a) центральных порядковых статистик (Россберг (1963);

Крем (1963); Розенгард (1964b)) и (б) от выборочного среднего (Россберг 1965b); Розенгард (1964a)). Эти результаты суммируются в следующей теореме Россберга (1965b):

Пусть $g_h(x_{1:n}, \ldots, x_{h:n})$ *и* $g_{h'}(x_{n+1-h':n}, \ldots, x_{n:n})$ — *произвольные измеримые по Борелю функции указанных аргументов. Если независимые одинаково распределенные случайные величины* $X_1, \ldots, X_n$ *имеют конечную дисперсию* σ^2 *и*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{h'}{n}=0,$$

то случайные величины

$$g_h(X_{1:n}, \ldots, X_{h:n}),\quad n^{1/2}(\bar{X}-\mathsf{E}X)/\sigma,\quad g_{h'}(X_{n+1-h':n}, \ldots, X_{n:n})$$

асимптотически независимы.

Предельное распределение стьюдентизированного экстремального отклонения. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные величины с $\mathsf{E}X_1=0$, $\mathsf{E}X_1^2=1$. Берман (1963) доказал, что если для некоторых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ $(a_n>0)$ нормированное экстремальное значение $(X_{(n)}-b_n)/a_n$ имеет пр. р. $\Lambda(x)$, то нормированное (внутренним образом) стьюдентизированное экстремальное отклонение

$$\frac{1}{a_n}\left(\frac{X_{(n)}-\bar{X}}{S}-b_n\right)$$

также имеет пр. р. $\Lambda(x)$ при условии, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n n^{1/2}}=0.$$

Это условие, очевидно, выполнено в нормальном случае, где (пример 9.3.2) $a_n=(2\log n)^{-1/2}$, $b_n=(2\log n)^{1/2}$, и, как показал Берман, включает в себя критерий фон Мизеса (9.3.3). Берман доказал также, что если $p(x)$ симметрична, то при сформулированных выше условиях

$$\frac{1}{a_n}\left(\max\left|\frac{X_i-\bar{X}}{S}\right|-b_n\right)$$

имеет пр. р. $\Lambda^2(x)$.

Разные вопросы. Предельное распределение максимума случайного числа случайных величин изучалось Берманом (1962a), Барндорф-Нильсеном (1964) и Рихтером (1964).

Чернов и Тайшер (1965) рассмотрели предельные распределения минимакса (или максимина) последовательности одинаково распределенных независимых величин с двойными индексами, т. е. $\min\limits_i \max\limits_j X_{ij}$.

Двумерное обобщение. Некоторые авторы изучали двумерные и многомерные распределения экстремальных значений. Ранние результаты приведены в работе Тьяго де Оливейры (1963). Гумбель и Мустафи (1967) подробно рассмотрели две возможные предельные ф. р.

$$\Lambda_{k,l}^{(1)}(x,\ y,\ a)=\Lambda_k(x)\,\Lambda_l(y)\exp\left\{a\left[\frac{1}{-\log\Lambda_k(x)}+\frac{1}{-\log\Lambda_l(y)}\right]^{-1}\right\}$$

и

$$\Lambda_{k,l}^{(2)}(x,\ y,\ m)=\exp\{-([-\log\Lambda_k(x)]^m+[-\log\Lambda_l(y)]^m)^{1/m}\},$$

где $\Lambda_k(x)$, $\Lambda_l(y)$ $(k,\ l=1,\ 2,\ 3)$ — три возможных одномерных к пр. р. (9.3.1), а a и m — такие параметры, что $a\geqslant 0$, $m\geqslant 1$. Случаи $a=0$ и $m=1$ соответствуют независимости X и Y. По этому поводу см. работы Бермана (1962b), Мардьи (1964a), Шриваставы и др. (1964), Шриваставы (1967) и работу Гумбеля и Голдстейна (1964), в которой приведены два приложения.

§ 9.5. Теория экстремальных значений для зависимых величин

Первый значительный результат в теории экстремальных значений для зависимых величин, кажется, принадлежит Уотсону (1954). Он показал, что предельные распределения для максимума стационарной последовательности m-зависимых величин, при определенных условиях, те же самые, что и для независимых величин.

Стационарность означает, что

$$\mathsf{P}\{X_i\leqslant x_i,\ X_j\leqslant x_j,\ \ldots\}=\mathsf{P}\{X_{i+1}\leqslant x_i,\ X_{j+1}\leqslant x_j,\ \ldots\},$$

а m-зависимость определяется в конце § 9.2.

Условия Уотсона состоят в том, что величины X_j неограничены сверху и

$$\lim_{C\to\infty}\frac{1}{\mathsf{P}\{X_i>C\}}\max_{|i-j|\leqslant m}\mathsf{P}\{X_i>C,\ X_j>C\}=0.$$

Эти условия выполнены, например, когда X_i и X_j имеют двумерное нормальное распределение $N(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ \rho)$ при

$\rho < 1$. Обобщение этого результата можно найти у Ньюэлла (1964).

Бартон (1964) показал, что для стационарных гауссовских процессов таких, что

$$\mathsf{E}X_i = 0, \quad \mathsf{E}X_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$
$$\mathsf{E}X_i X_{i+N} = r_N \quad (N = 1, 2, \ldots), \tag{9.5.1}$$

условие m-зависимости можно ослабить: если $r_N \to 0$ достаточно быстро, то распределение $\Lambda_3(x)$, являющееся предельным в случае независимости, продолжает быть предельным. В частности, достаточно, чтобы

$$\lim_{N \to \infty} r_N \log N = 0$$

или чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{N=1}^{\infty} r_N^2 < \infty.$$

Недостаточно, чтобы $\lim\limits_{N \to \infty} r_N = 0$, хотя это условие и гарантирует, чтобы выполнялось соотношение

$$(2 \log n)^{-1/2} X_{(n)} \to 1 \text{ п.н.}$$

(Пикендс (1967a)).

Простым, но удивительным примером (Берман (1962c)) случая, когда $\Lambda_3(x)$ не является предельной ф.р., является пример последовательности нормальных равнокоррелированных величин (т. е. (9.5.2) с $r_N = \rho$ при всех N). Чтобы убедиться в этом, заметим сначала (сравните с (5.5.7)), что при $\rho > 0$ величину X_i можно представить в виде суммы двух независимых нормальных величин $U_i + Y$ таких, что

$$\mathsf{E}U_i = 0 = \mathsf{E}Y, \quad \mathsf{E}U_i^2 = 1 - \rho, \quad \mathsf{E}Y^2 = \rho,$$
$$\mathsf{E}U_i U_j = 0 \quad (i \neq j).$$

Таким образом,

$$X_{(n)} = \max_{i=1, \ldots, n} (U_i + Y) = U_{(n)} + Y, \tag{9.5.2}$$

так что ф. р. величины $X_{(n)}$ является просто сверткой распределения $U_{(n)}$, максимума из n независимых нормальных величин, с распределением величины Y. Далее,

$$p \lim_{n \to \infty} \{U_{(n)} - [2(1-\rho) \log n]^{1/2}\} = 0$$

(Гнеденко (1943)), откуда, учитывая (9.5.2), получим, что распределение

$$X_{(n)}-[2(1-\rho)\log n]^{1/2}$$

сходится к распределению Y, которое нормально $N(0, \rho)$.

Дальнейшие обобщения можно найти у Пикендса (1967а), который приводит много ссылок, и у Лойнеса (1965).

Асимптотическое распределение размаха сумм независимых величин изучалось Феллером (1951) и Кемперменом (1959).

§ 9.6. Асимптотическое распределение линейных функций порядковых статистик

Ясно, что из совместной асимптотической нормальности квантилей, установленной в теореме 9.2, вытекает, что при определенных условиях линейная функция (конечного числа) таких квантилей должна быть асимптотически нормальной. С другой стороны, экстремальные значения в случайных выборках ($X_{i:n}$ при $i/n \to 0$ и 1) имеют ненормальные предельные распределения (если они, вообще, имеют предельные распределения). Далее, выборочное среднее $\bar{X}$, которое можно переписать в виде $\sum_{i=1}^{n} X_{i:n}/n$, асимптотически нормально (при условии, что X_i имеет конечную дисперсию σ^2), хотя оно и зависит от экстремальных значений. Поэтому возникает вопрос: при каких условиях $T_n=\sum_{i=1}^{n} c_{in}X_{i:n}$ имеет предельное нормальное распределение? Помимо чисто теоретического интереса внимание к этому вопросу было вызвано работами Беннета (1952) и Юнга (1955), в которых отыскиваются оптимальные веса оценки T_n, где T_n рассматривается как оценка параметра сдвига или масштаба.

Как показывают проведенные выше простые рассуждения, для асимптотической нормальности T_n потребуется наложить соответствующие условия как на коэффициенты c_{in}, так и на вид исходной ф. р. $P(x)$. Были найдены различные довольно сложные наборы условий, одни из которых накладывают сильные ограничения на c_{in} и слабые — на $P(x)$, другие наоборот. Тем не менее можно сделать несколько простых замечаний.

Так как выборочное среднее асимптотически нормально, если $\sigma^2 < \infty$, то урезанное среднее

$$\sum_{i=[n\lambda]}^{[n(1-\lambda)]} \frac{X_{i:n}}{n(1-2\lambda)}, \quad 0<\lambda<\frac{1}{2},$$

должно быть асимптотически нормальным ([ ] обозначает целую часть). Подобным же образом можно ожидать, что уинсоризованное среднее

$$\frac{1}{n}\left(n\lambda X_{[n\lambda]:n} + \sum_{i=[n\lambda]}^{[n(1-\lambda)]} X_{i:n} + n\lambda X_{[n(1-\lambda)]:n}\right)$$

асимптотически нормально, поскольку оно имеет на краях меньшие веса, чем $\bar{X}$; в этом утверждении в духе теоремы 9.2 (см. Бикел (1967)) предполагается удовлетворительное поведение $P(x)$ в точках ξ_λ и $\xi_{1-\lambda}$. В действительности асимптотическая нормальность может иметь место даже при гораздо больших весах экстремальных значений. Простым примером является статистика (7.4.1):

$$«\sigma» = \frac{\pi^{1/2}}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (2i-n-1) X_{i:n}. \qquad (9.6.1)$$

Это выражение является U-статистикой (Хёффдинг (1948)) и следовательно, асимптотически нормально (при условии, что $\sigma^2 < \infty$).

За более общими результатами мы отсылаем читателя к работам Бикела (1967), Чернова и др. (1967), Говиндараюлу (1968b) и Стиглера (1969). Относительно простой вид имеет результат Мура (1968). Чтобы сформулировать его, заметим, что T_n можно записать в виде

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} J\left(\frac{i}{n}\right) X_{i:n},$$

где $J(u)$ — функция аргумента u $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ такая, что $J(i/n) = nc_{in}$. Кроме того, T_n можно выразить в виде интеграла Стилтьеса

$$T_n = \int_{-\infty}^{\infty} xJ(P_n(x))\,dP_n(x),$$

где $P_n(x)$ — эмпирическая функция распределения X. Пусть Q — функция, обратная P.

Теорема 9.6. *Предположим, что* $\mathsf{E}\,|X| = \int_0^1 |Q(u)'\,du < \infty$, J *непрерывна на* $[0, 1]$, *за исключением скачков в точках* $a_1, \ldots, a_M$, *дифференцируема на* $[0, 1] - \{a_1, \ldots, a_M\}$, J' *на этом множестве непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Тогда случайная величина*

$$n^{1/2}\left[T_n - \int_{-\infty}^{\infty} xJ(P(x))\,dP(x)\right]$$

асимптотически нормальна $N(0,\sigma^2)$ *при условии, что* $\sigma^2 < \infty$, *где* $\sigma^2 = 2\iint_{s<t} J(P(s))\,J(P(t))\,P(s)\,[1 - P(t)]\,ds\,dt.$

Пример. Для «σ» из (9.6.1) имеем

$$J\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{\pi^{1/2}(2i - n - 1)}{n - 1},$$

так что можно положить $J(u) = \pi^{1/2}(2nu - n - 1)/(n - 1)$, что дает нам

$$\int_{-\infty}^{\infty} xJ(P(x))\,dP(x) = \pi^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{[2nP(x) - n - 1]}{n - 1}\,dP(x).$$

Это согласуется асимптотически с известным точным результатом

$$«\sigma» = \pi^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} x\,[2P(x) - 1]\,dP(x)$$

(см. Дэйвид (1968)).

Можно также упомянуть о том, что Стиглер (1969) использует процедуру, применяемую Гаеком (1968) к линейным ранговым статистикам для того, чтобы представить T_n в виде линейной комбинации $\hat{T}_n$ независимых случайных величин плюс остаточный член. К $\hat{T}_n$ можно применить обычную центральную предельную теорию и можно показать, что остаточный член при довольно общих условиях сходится к нулю в среднем квадратичном.

§ 9.7. Оптимальное асимптотическое оценивание с помощью порядковых статистик

В предыдущем параграфе мы исследовали асимптотическое распределение $T_n = \sum_{i=1}^{n} c_{in} X_{i:n}$, где c_{in} — заданные постоянные. Теперь мы перейдем к вопросу о том, как выбрать c_{in} для того, чтобы T_n была хорошей оценкой интересующего нас параметра. Беннет изучал этот вопрос еще в 1952 г. в своей замечательной неопубликованной докторской диссертации. Он рассматривал распределения, зависящие только от параметров сдвига и масштаба, т. е. распределения с п. р. $p(x) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) g((x-\mu)/\sigma)$ и ф. р. $G((x-\mu)/\sigma)$. Получив сначала (независимо) по существу результаты Ллойда (1952), он, естественно, перешел от определения оптимальных весов для малых выборок к выводу оптимальных асимптотических весов. Рассуждения Беннета допустимы для многократно цензурированных выборок, но мы разберем его подход только для двустороннего цензурирования (которое, как частные случаи, включает одностороннее цензурирование, а также отсутствие цензурирования). Читателя, заинтересовавшегося обобщениями результатов Беннета, мы отсылаем к работе Чернова и др. (1967).

Рассмотрим сначала матрицу $A'\Omega A$ из (6.2.4), записывая ее более подробно

$$\begin{pmatrix} \Sigma\Sigma\beta^{ij} & \Sigma\alpha_i\beta^{ij} \\ \Sigma\alpha_i\beta^{ij} & \Sigma\Sigma\alpha_i\alpha_j\beta^{ij} \end{pmatrix}, \qquad (9.7.1)$$

где все суммы распространяются на $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и β^{ij} являются элементами Ω. Из § 4.5 с точностью до порядка $1/n$ получаем для $r \leqslant s$

$$\operatorname{cov}(X_{r:n}, X_{s:n}) \equiv \sigma^2\beta_{rs} + \sigma^2 \frac{p_r q_s}{n+2} \frac{1}{g(H_r)\, g(H_s)},$$

где $H_r = G^{-1}(r/(n+1)) = (Q_r - \mu)/\sigma$, так что $g(H_r) = \sigma p(Q_r)$. Поэтому β^i определяются формулами (сравните (9.2.3)):

$$\begin{aligned} &\beta^{ii} = ng^2(H_i)\left(\frac{1}{p_{i+1}-p_i} + \frac{1}{p_i - p_{i-1}}\right), \\ &\beta^{i,i-1} = \beta^{i-1,i} = \frac{ng(H_i)\,g(H_{i-1})}{p_i - p_{i-1}}, \\ &\beta^{ij} = 0 \text{ в остальных случаях.} \end{aligned} \tag{9.7.2}$$

Заметим, что эти результаты справедливы не только, когда i, j пробегает все целые $1, 2, \ldots, n$, но и для любого подмножества. В частности, если r_1 наблюдений цензурировано слева и r_2 — справа, то, положив $p_i = i/(n+1)$ $(i = r_1+1,\ r_1+2, \ldots, (n-r_2))$ и $p_{r_1} = 0 = p_{n-r_2+1}$, получим из (9.7.2)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2}\sum_{j=r_1+1}^{n-r_2}\beta^{ij} = \\ = \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2-1}\frac{[\Delta g(H_i)]^2}{\Delta p_i} + \frac{g^2(H_{r_1+1})}{p_{r_1+1}} + \frac{g^2(H_{n-r_2})}{1-p_{n-r_2}},$$

где $\Delta g(H_i) = g(H_{i+1}) - g(H_i)$, а $\Delta p_i = 1/(n+1)$. Подобным же образом, используя соотношение $\alpha_i = H_i + O(1/n)$, получаем с точностью до членов более низкого порядка

$$\frac{1}{n}\sum \alpha_i\beta^{ij} = \\ = \sum\frac{\Delta g(H_i)\,\Delta[H_i g(H_i)]}{\Delta p_i} + \frac{H_{r_1}g^2(H_{r_1+1})}{p_{r_1+1}} + \frac{H_{n-r_2}g^2(H_{n-r_2})}{1-p_{n-r_2}},$$

$$\frac{1}{n}\sum\sum\alpha_i\alpha_j\beta^{ij} = \sum\frac{\{\Delta[H_i g(H_i)]\}^2}{\Delta p_i} + \\ + \frac{H^2_{r_1+1}g^2(H_{r_1+1})}{p_{r_1+1}} + \frac{H^2_{n-r_2}g^2(H_{n-r_2})}{1-p_{n-r_2}}.$$

Если при $n\to\infty$ $r_1/n \to \lambda_1$ и $(n-r_2)/n \to \lambda_2$, то

$$\sum_{i=r_1+1}^{n-r_2}\frac{[\Delta g(H_i)]^2}{\Delta p_i} \to \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{dg(H(u))}{du}\right]^2 du = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[\frac{g'(H(u))}{g(H(u))}\right]^2 du,$$

так как

$$\frac{dg(H(u))}{du}=\frac{dg(H(u))/dH(u)}{du/dH(u)} \quad \text{и} \quad u=G(H(u)).$$

Для упрощения записи положим $y=H(u)$ и $\Psi(y)=$ $=g'(y)/g(y)$. Тогда, используя обозначения (7.6.1), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\sum\beta^{ij}=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\Psi^2(y)\,du+\frac{f_1^2}{\lambda_1}+\frac{f_2^2}{1-\lambda_2}, \quad (9.7.3\text{а})$$

и, аналогично,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\sum\alpha_i\beta^{ij}=$$
$$=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\Psi(y)[1+y\Psi(y)]\,du+\frac{\xi_{\lambda_1}f_1^2}{\lambda_1}+\frac{\xi_{\lambda_2}f_2^2}{1-\lambda_2}, \quad (9.7.3\text{б})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\sum\alpha_i\alpha_j\beta^{ij}=$$
$$=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}[1+y\Psi(y)]^2\,du+\frac{\xi_{\lambda_1}^2f_1^2}{\lambda_1}+\frac{\xi_{\lambda_2}^2f_2^2}{1-\lambda_2}. \quad (9.7.3\text{в})$$

В случае отсутствия цензурирования ($\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$) последние два члена соотношений (9.7.3а) — (9.7.3в) исчезают при условии, что

$$\lim_{\lambda_1\to 0}\frac{\xi_{\lambda_1}^2f_1^2}{\lambda_1}=0, \qquad \lim_{\lambda_2\to 1}\frac{\xi_{\lambda_2}^2f_2^2}{1-\lambda_2}=0. \quad (9.7.4)$$

Матрицей, обратной к ковариационной матрице н. к. оценок μ^*, σ^* параметров μ, σ, будет как раз матрица $A'\Omega A/\sigma^2$. Легко показать, что при условиях (9.7.4) она стремится к информационной матрице. Например, так как $p(x)=$ $=\left(\frac{1}{\sigma}\right)g(y)$, где $y=(x-\mu)/\sigma$ $(=H(u))$, то

$$\mathsf{E}\left[\frac{\partial\log p(x)}{\partial\mu}\right]^2=\mathsf{E}\left[\frac{\partial\log g(y)}{\partial\mu}\right]^2=$$
$$=\frac{1}{\sigma^2}\mathsf{E}\left[\frac{\partial\log g(y)}{\partial y}\right]^2=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^1\Psi^2(y)\,du,$$

что соответствует формуле (9.7.3а). Таким образом, наши линейные оценки параметров μ и σ асимптотически эффективны. Этот результат, как можно показать, справедлив и в случае цензурированной выборки (см. Чернов и др. (1967)).

До сих пор явный вид оценок нам не требовался. Теперь мы получим его. В соответствии с формулами (6.2.5) и (6.2.5′), приспособленными для цензурированных выборок (так что A имеет $n-r_1-r_2$ строки и т. д.), оценки н. к. для μ и σ имеют вид

$$\mu^* = \sum_{i=r_1+1}^{n-r_2} \beta_i X_{i:n}, \quad \sigma^* = \sum_i \gamma_i X_{i:n},$$

где

$$\left.\begin{aligned} \beta_l &= \frac{1}{|A'\Omega A|}\left(\sum_{j=r_1+1}^{n-r_2} \beta^{lj} \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \beta^{ij} - \right. \\ &\qquad \left. - \sum_j \alpha_j \beta^{lj} \sum_i \sum_j \alpha_i \beta^{ij}\right), \\ \gamma_l &= \frac{1}{|A'\Omega A|}\left(\sum_j \alpha_j \beta^{lj} \sum_i \sum_j \beta^{ij} - \right. \\ &\qquad \left. - \sum_j \beta^{lj} \sum_i \sum_j \alpha_i \beta^{ij}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9.7.5}$$

Из (9.7.2) находим

$$\frac{1}{n} \sum_{j=r_1+1}^{n-r_2} \beta^{ij} = -g(H_i)\frac{\delta^2 g(H_i)}{\Delta p} \quad (i = r_1+2, \ldots, n-r_2-1).$$

Также легко проверить, что

$$\frac{1}{n} \sum_{j=r_1+1}^{n-r_2} \beta^{r_1+1, j} = -g(H_{r_1+1})\left[\frac{\delta^2 g(H_{r_1+1})}{\Delta p} + \right.$$
$$\left. + \frac{g(H_{r_1+1}) - g(H_r)}{\Delta p} - \frac{g(H_{r_1+1})}{p_{r_1+1}}\right].$$

Тогда для $i = r_1+2, \ldots, n-r_2-1$ получим асимптотические соотношения

$$\frac{1}{n}\sum_j \beta^{ij} \sim -g(\xi_{\lambda_i})\frac{d^2 g(\xi_{\lambda_i})}{d\lambda_i^2}\, d\lambda_i = a_1(\lambda_i)\, d\lambda_i \sim \frac{a_1(\lambda_i)}{n},$$

$$\frac{1}{n}\sum_j \beta^{r_1+1, j} \sim a_1(\lambda_{r_1+1})\, d\lambda_{r_1+1} + a_{1, r_1+1},$$

где

$$a_{1,\, r_1+1} = \frac{g^2(H_{r_1+1})}{p_{r_1+1}} - g'(H_{r_1+1}),$$

а также аналогичное соотношение для $a_{1,\, n-r_2}$.

Кроме того, для $i = r_1+2, \ldots, n-r_2-1$ имеем

$$\frac{1}{n}\sum \alpha_j \beta^{ij} \sim g(\xi_{\lambda_i}) \frac{d^2(\xi_{\lambda_i} g(\xi_{\lambda_i}))^2}{d\lambda_i^2}\, d\lambda_i = a_2(\lambda_i)\, d\lambda_i.$$

Таким образом, если не учитывать самые крайние порядковые статистики выборки, то функции a_1 и a_2 примут вид (при $y = H(u)$)

$$\left.\begin{aligned} a_1(u) &= -g(y)\frac{d^2 g(y)}{du^2} = -\Psi'(y), \\ a_2(u) &= -g(y)\frac{d^2}{du^2}[yg(y)] = -[\Psi(y) + y\Psi'(y)]. \end{aligned}\right\} \qquad (9.7.6)$$

Поэтому из (9.7.5) следует, что для коэффициентов β_i, γ_i, соответственно, можно получить асимптотические формулы, положив $u = i/(n+1)$ в непрерывных весовых функциях

$$\left.\begin{aligned} \beta(u) &= \frac{a_1(u) I_{22} - a_2(u) I_{12}}{n(I_{11}I_{22} - I_{12}^2)}, \\ \gamma(u) &= \frac{a_2(u) I_{11} - a_1(u) I_{12}}{n(I_{11}I_{22} - I_{12}^2)}, \end{aligned}\right\} \qquad (9.7.7)$$

а также

$$\beta_{r_1+1} = \beta(\lambda_{r_1+1}) + \frac{a_{1,\, r_1+1} I_{22} - a_{2,\, r_1+1} I_{12}}{n(I_{11}I_{22} - I_{12}^2)} \quad \text{и т. д.} \qquad (9.7.8)$$

Здесь I_{11}, I_{12}, I_{22} определяются как правые части соотношений (9.7.3а)—(9.7.3в).

Для симметрично цензурированной выборки из симметричного распределения (9.7.7) упрощается:

$$\beta(u) = \frac{a_1(u)}{nI_{11}}, \qquad \gamma(u) = \frac{a_2(u)}{nI_{22}}. \qquad (9.7.9)$$

Пример (Чернов и др. (1967)). Для нецензурированной выборки из $N(\mu, \sigma^2)$ распределения $I_{11} = 1$, $I_{12} = 0$, $I_{22} = 2$, что дает

$$\sigma^* = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_2\left(\frac{i}{n+1}\right) X_{i:n}.$$

В силу того, что $\Psi(y) = -y$, учитывая (9.7.6), легко получить, что $a_2(u) = 2y$. Таким образом,

$$\sigma^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) X_{i:n}.$$

Эффективная оценка для μ, конечно, совпадает с $\bar{X}$.

Далее, предположим, что нам требуется оценить μ из симметрично цензурированной выборки, причем цензурирование вызвано подозрением на наличие выбросов. Тогда для $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 = \lambda$ имеем

$$I_{11} = \int_{\lambda}^{1-\lambda} \Psi^2(y)\,du + \frac{2f_\lambda^2}{\lambda} = \int_{\Phi^{-1}(\lambda)}^{\Phi^{-1}(1-\lambda)} y^2\varphi(y)\,dy + \frac{2\varphi^2(\Phi^{-1}(\lambda))}{\lambda} =$$
$$= 1 - 2\lambda + 2\Phi^{-1}(\lambda)\,\varphi(\Phi^{-1}(\lambda)) + \frac{2\varphi^2(\Phi^{-1}(\lambda))}{\lambda}.$$

Поскольку $a_1(u) = 1$, искомая оценка имеет вид

$$\mu^* = c\,(X_{r+1:n} + X_{n-r:n}) + \frac{1}{nI_{11}} \sum_{i=r+1}^{n-r} X_{i:n},$$

где $r = [n\lambda]$, c — дополнительный вес крайних из оставшихся наблюдений, который в силу (9.7.8) равен

$$\frac{\varphi^2(\Phi^{-1}(\lambda))/\lambda + \Phi^{-1}(\lambda)\,\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))}{I_{11}}.$$

Случаи, когда μ или σ известны. Для краткости мы рассмотрим только нецензурированный случай. Если μ известно, то $X_{i:n}$ можно заменить на $X_{i:n} - \mu$. При этом Ω не изменится, а $\gamma(u)$ будет определяться формулой (9.7.7). Получающаяся оценка

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma\left(\frac{i}{n+1}\right)(X_{i:n} - \mu)$$

асимптотически несмещенная и имеет дисперсию σ^2/nI_{22}. Заметим, однако, что $\sum \gamma(i/(n+1))\,X_{i:n}$, вообще говоря, является асимптотически смещенной оценкой для σ.

Аналогично, если σ известно, то соответствующая оценка равна

$$\sum_{i=1}^{n} \beta\left(\frac{i}{n+1}\right)(X_{i:n} - \alpha_i \sigma),$$

где α_i можно заменить на H_i.

Несколько иной подход к оптимальному асимптотическому оцениванию принадлежит Юнгу (1955). Он изложен в книге Сархана и Гринберга (1970).

Упражнения

9.2.1. Пусть $0 < \lambda < 1$ и существуют числа $a < b$ такие, что

$$a = \inf\{x \mid P(x) = \lambda\}, \qquad b = \sup\{x \mid P(x) = \lambda\}.$$

Показать, что предельное распределение $X_{[n\lambda]:n}$ (где $[x]$ обозначает целую часть x) определяется равенствами

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{X_{[n\lambda]:n} \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } a \leqslant x < b, \\ 1, & \text{если } x \geqslant b \end{cases}$$

(Фельдмен и Такер (1966)).

9.2.2. Бахадур (1966) показал, что если $P(\xi_\lambda) = \lambda$, P имеет по крайней мере две производные в некоторой окрестности ξ_λ, $P''(x)$ ограничена в этой окрестности и $P'(\xi_\lambda) = p(\xi_\lambda) > 0$, то $X_{[n\lambda]:n}$ можно выразить в виде

$$X_{[n\lambda]:n} = \xi_\lambda - \frac{P_n(\xi_\lambda) - \lambda}{p(\xi_\lambda)} + R_n,$$

где $P_n(\xi_\lambda)$ — частота события $X_i \leqslant \xi_\lambda$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а R_n стремится к нулю при $n \to \infty$.

С помощью функции

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

$P_n(x)$ можно переписать в виде

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(x - X_i).$$

Используя это представление, показать, что для $x \leqslant y$

$$\operatorname{cov}(P_n(x),\ P_n(y)) = \frac{1}{n} P(x)\,[1 - P(y)],$$

и вывести отсюда теорему 9.2.

9.3.1. Пусть

а) $P(x) = 1 - \exp\{-x^{\alpha}\}$ при $x \geqslant 0,\ \ \alpha > 0$;

б) $P(x) = 1 - \exp\{-x/(1-x)\}$ для $0 < x \leqslant 1$.

Показать, что

$$P^n(a_n x + b_n) \to \exp\{-e^{-x}\},$$

где в случае (а)

$$a_n = \frac{1}{\alpha}(\log n)^{(1-\alpha)/\alpha}, \qquad b_n = (\log n)^{1/\alpha},$$

а в случае (б)

$$a_n = (\log n)^{\ 2}, \qquad b_n = \frac{\log n}{1 + \log n}$$

(Гнеденко (1943)).

9.3.2. Показать, что для стандартного нормального закона лучшим, чем (9.3.9), приближением к l_n является

$$l_n \sim (2\log n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2\log n)^{-1/2}(\log\log n + \log 4\pi).$$

Указание. Уточнить (9.3.9) методом Ньютона (Крамер (1975)).

9.3.3. Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — независимые одинаково распределенные положительные случайные величины с ф. р. $P(x)$, и пусть

$$R_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_{1:i}}{\log n}.$$

Показать, что если X_i — равномерные на (0,1) величины, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}R_n = 1$;

б) $\operatorname{cov}(X_{1:n},\ X_{1:n+k}) = \dfrac{n}{(n+1)(n+k+1)(n+k+2)}\ (k = 1, 2, \ldots)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{D}R_n = 0$.

В качестве следствия вывести, что для $P(x)$ общего вида R_n сходится по вероятности к $\lim\limits_{t\downarrow 0} t/P(t)$ (если такой предел конечный или бесконечный, существует). (Гренандер (1965).)

9.4.1. Показать, что для i-го (i фиксировано) квазиразмаха

$$W_{(i)} = X_{(n-i+1)} - X_{(i)}$$

соотношение (9.4.2) можно обобщить следующим образом:

$$f(w_{(i)}) \sim \frac{Cp^2 (1-P)^{2(i-1)} (2P-1)^{n-2i}}{\left[\left(\frac{p'}{p}\right)^2 - \frac{p''}{p} + \frac{i-1}{1-P}\left(\frac{p^2}{1-P} + p'\right) - \frac{(n-2i)\,p'}{2P-1}\right]^{1/2}},$$

где $C = \dfrac{n!\pi^{1/2}}{(i-1)!\,(n-2i)!\,(i-1)!}$ (Кэдуэлл (1953а)).

9.7.1. Показать, что асимптотически эффективные оценки параметров μ и σ для логистического распределения с ф. р.

$$P(x) = \left\{1 + \exp\left[\frac{-(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}^{-1} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

определяются соответствующими весовыми функциями

$$\beta(u) = \frac{6u(1-u)}{n},$$

$$\gamma(u) = \frac{9\{2u - 1 + 2u(1-u)\log[u/(1-u)]\}}{n(\pi^2+3)}$$

(Гупта и Гнанадесикан (1966); Чернов и др. (1967)).

ПРИЛОЖЕНИЕ

УКАЗАТЕЛЬ ТАБЛИЦ

Параграфы приложения соответствуют параграфам основного текста. Приняты следующие сокращения:

ПХ: Пирсон и Хартли (1966) — *Biometrika Tables* I.

СГ: Сархан и Гринберг (1970) — «Введение в теорию порядковых статистик».

П. 3.1: Приложение, § 3.1.

2.1. Функция распределения экстремальных значений для выборок из единичной нормальной совокупности была табулирована Типпетом (1925) для $n=3$, 5, 10, 20, 30, 50, 100(100)1000. Процентные точки для $n \leqslant 30$ имеются в таблице 24ПХ. Процентные точки всех нормальных порядковых статистик даны Гуптой (1961) для $n \leqslant 10$ и Говиндараюлу и Хубакером (1964) для $n \leqslant 30$.

Два последних автора также рассматривали процентные точки порядковых статистик для равномерного распределения ($n = 1\,(1)\,30\,(5)\,60$), для χ-распределения с одной степенью свободы (определение этого и других распределений см. в П. 3.1) и для трех распределений Вейбулла. Гупта (1960) рассмотрел χ^2-распределение с четными степенями свободы, а вместе с Шахом (1965) — логистическое распределение.

Эйзенхарт и др. (1963) рассмотрели процентные точки медиан в выборках из нормального, двойного экспоненциального, равномерного и некоторых других распределений.

2.3. Обширные таблицы Хартера и Клемма (1959) для функции распределения и процентных точек размаха W в выборках из стандартной нормальной генеральной совокупности дают значения ф. р. $F(w)$ с 8 знаками для w с шагом 0,01 и $n=2\,(1)\;20\,(2)\;40\,(10)\;100$ и 23 разные процентные точки с шестью десятичными знаками для каждого n. Процентные точки также имеются у Хартера (1960). (См., кроме этого, Пирсон и Хартли (1942; 1966, таблицы 22 и 23), где даны первые подробные точные таблицы.)

Процентные точки W для выборок из равномерного распределения с единичным стандартным отклонением получены Хартером (1961c) с шестью знаками для $n = 2\,(1)\,20\,(2)\,40\,(10)\,100$.

2.4. Процентные точки размаха для независимых биномиальных $b\,(p,\,N)$ величин даны Сиотани и Озавой (1958). (См. также работу Ишии и Ямасаки (1961).)

2.5. Маккиннон (1964) получил таблицы чисел $J = r - 1$, для которых интервал $(X_{(r)},\ X_{(n-r+1)})$ является доверительным для медианы с коэффициентом доверия $\geqslant 1 - \alpha$ в случае $n = 1\,(1)\,1000$ и $\alpha = 0{,}001$; $0{,}01$; $0{,}02$; $0{,}05$; $0{,}10$; $0{,}50$ (см. также работы Диксона и Массея (1957) и Оуэна (1966)).

2.6. См. работы Мерфи (1948), Сомервилла (1958) и Оуэна (1966).

3.1. Хастингс и др. (1947) табулировали значения дисперсий и ковариаций порядковых статистик для равномерной генеральной совокупности (а также для некоторых других случаев) для $n \leqslant 10$. Математические ожидания (для некоторых $n \leqslant 100$) даны в работе Либлейна и Солцера (1957) для распределения экстремальных значений с ф. р. $P(x) = \exp\{-\exp(-x)\}$ $(-\infty < x < \infty)$. Для $n \leqslant 6$ Либлейн и Зилен (1956) также табулировали ковариации (воспроизведены в СГ, стр. 366). Все математические ожидания и дисперсии для $n \leqslant 20$ (и отдельные для $n \leqslant 100$) получены Уайтом (1969); строго говоря, Уайт рассмотрел с. в. $-X$, которую он назвал «приведенной логвейбулловской» величиной. Либлейн (1955) провел вычисления для распределений Вейбулла с ф. р.

$$P(x) = \begin{cases} 1 - \exp\{-(-x)^{-m}\}, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

и

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - \exp(-x^{m}), & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

где $m > 0$. Близким является обобщенное распределение экстремальных значений (Мариц и Манро (1967)) с ф. р.

$$P(x) = \exp\{-(1-\gamma x)^{1/\gamma}\}$$

$$(\gamma > 0;\ -\infty < x < 1/\gamma,\ \text{или}\ \gamma < 0;\ 1/\gamma < x < \infty).$$

Для $5 \leqslant n \leqslant 10$ и $\gamma = -0{,}10\,(0{,}05)\,0{,}40$ авторы дали таблицы с тремя десятичными знаками всех математических ожиданий (см. также § 9.1).

Для гамма-распределения с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}x^{r-1}/\Gamma(r), & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad (r > 0)$$

Гупта (1960) получил первые четыре момента для $r = 1\,(1)\,5$ и $n \leqslant 10$ и моменты с. в. $X_{1:n}$ для $n \leqslant 15$. Брейтер и Кришнайя (1968) добавили первые четыре момента для $r = 0{,}5\,(1)\,10{,}5$ и $n \leqslant 9$. Малик (1966) табулировал с четырьмя знаками математические ожидания и ковариации для $n \leqslant 8$ в случае распределения Парето с плотностью $p(x) = \nu a^{\nu} x^{-\nu-1}$ $(a > 0;\ \nu > 0;\ x \geqslant a)$ для $\nu = 2{,}5\,(0{,}5)\,5{,}0$. Сархан (1954) дал таблицы математических ожиданий и ковариаций $(n \leqslant 5)$ для треугольного распределения с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 4(1-x), & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

и двойного экспоненциального распределения с $p(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$. Для последнего распределения все математические ожидания и ковариации для $n \leqslant 20$ были табулированы Говиндараюлу (1966). Он же вместе с Эйзенштатом (1965) получил все математические ожидания и ковариации для $n = 1\,(1)\,20\,(10)\,100$ для χ-распределения с одной степенью свободы, имеющего плотность

$$p(x) = \begin{cases} (2/\pi)^{1/2}\exp(-x^2/2), & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Точные значения для $n \leqslant 5$ были ранее получены Говиндараюлу (1962). Первые четыре момента для стандартизованного логистического распределения с плотностью

$$p(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \exp(-\pi x/\sqrt{3})/(1+\exp(-\pi x/\sqrt{3}))^2$$

даны ($n \leqslant 10$) Гуптой и Шахом (1965). Шах (1966b) табулировал также ковариации для $n \leqslant 10$, а Гупта и др. (1967) — для $11 \leqslant n \leqslant 25$ (сравните с работой Тартера и Кларка (1965)). Для распределения Коши с плотностью $p(x) = 1/\pi(1+x^2)$ $\mu_{r:n}$ не существует для $r=1$ и $r=n$, а $\sigma^2_{r:n}$ — для $r=1,\ 2,\ n-1,\ n$. Барнет (1966) табулировал все существующие математические ожидания для $n \leqslant 20$ и ковариации $\sigma_{rs:n}$ для r и s от 3 до $n-2$ и $n = 5(1)\,16\,(2)\,20$.

Для использования при изучении робастности (§ 6.5) Гаствирт и Коэн (1968) дали с пятью десятичными знаками все математические ожидания и ковариации для $n \leqslant 20$ в случае масштабно загрязненного нормального распределения с плотностью

$$p_{\gamma,k}(x) = (2\pi)^{-1/2}\left[(1-\gamma)\,e^{-x^2/2} + (\gamma/k)\,e^{-x^2/2k^2}\right]$$

при $\gamma = 0{,}01;\ 0{,}05;\ 0{,}10$ и $k=3$.

3.2. Хартер (1961a) табулировал $\mu_{r:n}$ с 5 знаками для стандартного нормального распределения для всех r и $n = 2\,(1)\,100\,(25)\,250\,(50)\,400$. Для $n \leqslant 20$ все $\mu_{r:n}$ и $\mu_{r,s:n}$ даны Тейкроу (1956) с 10 десятичными знаками, взятыми из неопубликованных вычислений с точностью до 20 знаков. Соответствующие значения $\sigma_{r,s:n}$ с 10 знаками имеются у Сархана и Гринберга (1956). Рубен (1954) дал таблицы первых десяти моментов для $X_{n:n}$ ($n \leqslant 50$), а Борениус (1966) — первых двух моментов с 7 знаками для $n \leqslant 120$. Математические ожидания и дисперсии r-го квазиразмаха ($r = 0,\ 1,\ \ldots,\ 8$) табулированы Хартером (1959) для $n \leqslant 100$. Он дал также (1960) значения математических ожиданий, дисперсий (с 10 знаками), пирсоновского $\beta_1^{1/2}$ (с 8 знаками) и β_2 (с 6 знаками) для размаха W_n ($n \leqslant 100$). Математические ожидания уже были вычислены с 5 знаками для $n \leqslant 1\,000$ Типпетом в 1925 г.

5.2. Хартер и др. (1959) дали значения ф. р. $Q_{n,\nu}$ с 6 десятичными знаками или 6 значащими цифрами в зависимости от того, что менее точно, для $n = 2\,(1)\,20\,(2)\,40\,(10)\,100$ и $\nu = 1\,(1)\,20,\ 24,\ 30,\ 40,\ 60,\ 120$. Их процентные точки с 4 десятичными знаками (или 4 значащими цифрами), соответствующие уровням 0,001. 0,005; 0,01; 0,025; 0,05; 0,1 (0,1) 0,9; 0,95; 0,975; 0,99, 0,995; 0,999, воспроизведены Хартером (1960). Меньшее число верхних процентных точек было получено Пирсоном и Хартли (ПХ, таблица 29).

5.3. Граббс (1950) привел таблицы ф. р. величин $X_{(n)}-\bar{X}$ с 5 знаками для $n=2\,(1)\,25$ с интервалом 0,05. Им также получены (с 3 знаками) верхние 10-, 5-, 1- и 0,5-процентные точки. Верхние значимые точки были табулированы целиком или частично методом § 5.3 (в случае нормальной генеральной совокупности) для следующих статистик:

$\dfrac{X_{(n)}-\bar{X}}{S_\nu}$ — с 2 десятичными знаками для $n=2\,(1)\,10$, 12; $\nu \geqslant 5$ или $\nu \geqslant 10$;

$\alpha=10$; 5; 2,5; 1; 0,5; 0,1% (ПХ, таблица 26);

$\dfrac{\max |X_{(i)}-\bar{X}|}{S_\nu}$ — с 2 десятичными знаками для $n=3\,(1)\,10\,(5)\,20\,(10)\,60$; $\nu \geqslant 3$; $\alpha=5$; 1% (Гальперин и др. (1955));

$$\left.\begin{array}{l} (X_{(n)}-\bar{X})/[(n-1)\,S^2+\nu S_\nu^2]^{1/2} \\ \max\limits_i |X_{(i)}-\bar{X}|/[(n-1)\,S^2+\nu S_\nu^2]^{1/2} \end{array}\right\}$$
— с 3 десятичными знаками для $n=2\,(1)\,10$, 12, 15, 20; $0 \leqslant \nu \leqslant 50$; $\alpha=5$; 1% (ПХ, таблицы 26a, b);

W_n/S — с 2 или 3 десятичными знаками для $n=3\,(1)\,20\,(5)\,100\,(50)\,200$, 500, 1 000; верхние и нижние 10; 5; 2,5; 1; 0,5; 0-процентные точки (ПХ, таблица 29c).

Сиотани (1959) табулировал с двумя знаками верхние 5; 2,5; 1-процентные точки величины $\chi^2_{\max D}$ для $n=3\,(1)\,10\,(2)\,20\,(5)\,30$; $p=2$, 3, 4 и величины $T^2_{\max D}$ для $n=3\,(1)\,12$, 14; $p=2$; $\nu \geqslant 20$.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые χ^2-величины с ν_1 степенями свободы, и пусть X_0 — другая независимая от них χ^2-величина с ν_2 степенями свободы. Эрмитэдж и Кришнайя (1964) получили с 2 десятичными знаками верхние 10; 5; 2,5; 1-процентные точки с. в.

$$F^*_{n,\alpha}=\nu_2 \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i/\nu_1 X_0$$

для $n=1\,(1)\,12$; $\nu_1=1\,(1)\,19$; $\nu_2=5$ или $6\,(1)\,45$. Опубликованные таблицы ограничиваются случаем $\nu_1=1$ (таблица 19ПХ с добавлениями Чемберса (1967), но в этих двух таблицах имеются расхождения). Кришнайя и Эрмитэдж (1964) дали подобные таблицы с 4 знаками для нижних 10; 5; 2,5; 1-процентных точек для с. в.

$$\nu_2 \min X_i/\nu_1 X_0.$$

Для $\nu_1=\nu_2=2\,(2)\,50$, $k=1\,(1)\,10$ Гупта и Собел (1962) привели таблицы (с 4 знаками) нижних 25; 10; 5; 1-процентных точек.

5.4. Фишер табулировал верхние 5 и 1-процентные точки для с. в. $Y_{(n)}$ (1950) и верхние 5-процентные точки с. в. $Y_{(n-1)}$ (1940) (все для $n \leqslant 50$). В таблице 31аПХ приведены с 4 знаками верхние 5- и 1-процентные точки с. в.

$$\max {}_i S^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} {}_i S^2$$

для $n=2\,(1)\,10$, 12, 15, 20 и $\nu \geqslant 1$; таблица 31b дает с 3 знаками для тех же n и $m=2\,(1)\,10$ верхние 5-процентные точки с. в.

$$\max {}_i W/\sum {}_i W.$$

5.5. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — многомерные нормальные с. в. с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и одинаковыми корреляциями ρ. Гупта (1963а) табулировал $\mathsf{P}\{Y_{(n)}<y\}$ с 5 десятичными знаками для $n=1\,(1)\,12$ с шагом 0,1 для y и $\rho=0{,}1\,(0{,}1)\,0{,}9$; $0{,}125\,(0{,}125)\,0{,}875$; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Верхние 10; 5; 2,5; 1 и 0,5-процентные точки с 3 десятичными знаками для $Y_{(n)}$ при $n=2\,(1)\,10$ и $\rho=0\,(0{,}2)\,1{,}0$ были ранее получены Тигпеном (1961), который нашел также эти же процентные точки для $\max |Y_i|$. Последнюю таблицу во многом перекрывает работа Кришнайя и Эрмитэджа (1965а), которые привели таблицы $\mathsf{P}\{Y_{(n)}^2 \leqslant y\}$ с 6 знаками для $n=1\,(1)\,40$, с шагом 0,1 для y и $\rho=0\,(0{,}0125)\,0{,}85$ и дали с 3 знаками соответствующие 10; 5; 2,5; и 1-процентные точки.

Пусть $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — многомерные нормальные с. в. с нулевыми математическими ожиданиями, одинаковыми неизвестными дисперсиями σ^2 и одинаковыми корреляциями ρ. Пусть S_ν — обычная среднеквадратичная оценка для σ, не зависящая от Y_i. Кришнайя и Эрмитэдж (1965b) табулировали с 2 знаками верхние 10; 5; 2,5; и 1-процентные точки с. в. $\max(Y_i/S_\nu)=Y_{(n)}/S_\nu$ для $n=1\,(1)\,10$; $\nu=5\,(1)\,35$ и $\rho=0\,(0{,}1)\,0{,}9$. Пиллаи и Рамачандран (1954) дали верхние и нижние 5-процентные точки для $\max|Y_i/S_\nu|$ ($\rho=0$), т. е. для стьюдентизированного максимума модулей (см. также библиографию Гупты (1963b)).

6.1. Таблицы Райдера (1951) для $R(0,\,\theta)$ выборки дают двухсторонние 10; 5; 1-процентные точки с. в. W_1/W_2 для $n_1,\ n_2\leqslant 10$. Для тех же объемов выборок Хирениус (1953) привел верхние 10; 5; 1-процентные точки своей статистики T и верхние и нижние 10; 5 и 1-процентные точки статистик U и V.

Для k независимых выборок объема n из $R(0,\,\theta)$ генеральной совокупности Кхатри (1960) табулировал для $k=2\,(1)\,5$ и $n=4\,(1)\,10\,(5)\,20$ нижние 5-процентные точки $W_{(1)}/W_{(k)}$ (отношения наименьшего размаха к наибольшему), а для $k=2\,(1)\,11$ и $n=1\,(1)\,10\,(5)\,30$, 40, 60, 100, 500, 1000 — нижние 5-процентные точки с. в. $Y_{(1)}/Y_{(k)}$ (отношения наименьшего и наибольшего выборочных максимумов).

Хартер (1961c) табулировал обратные величины многих нижних и верхних процентных точек w_α размаха в выборках объемов $n=2\,(1)\,20\,(2)\,40\,(10)\,100$ из равномерной генеральной совокупности с единичным стандартным отклонением. Поскольку из того, что $\mathrm{P}\{W/\sigma<w_\alpha\}=1-\alpha$, следует соотношение $\mathrm{P}\{\sigma>W/w_\alpha\}=1-\alpha$, необходимо только умножить величину наблюдаемого размаха на $1/w_\alpha$, чтобы получить нижнюю доверительную границу для σ с коэффициентом доверия $1-\alpha$.

6.3. Большинство из работ, упоминаемых в этом параграфе, имеют дело с оценками максимального правдоподобия, и ряд из них содержит таблицы дисперсий, ковариаций и эффективностей оценок. Мы здесь ограничимся таблицами коэффициентов НЛНО, включающими всякий раз и случай нецензурированных наблюдений.

Сархан и Гринберг (СГ) табулировали (с 4 десятичными знаками) коэффициенты НЛНО для μ и σ в случае нормальной $N(\mu,\,\sigma^2)$ генеральной совокупности, включив все случаи цензурирования II типа для $n\leqslant 20$ (стр. 194—227), а также дисперсии, ковариации и эффективности оценок (стр. 228—244). Для $n\leqslant 5$ они получили те же величины в комбинированной таблице для некоторых симметричных распределений: U-образного, равномерного, параболического, треугольного, нормального и двойного экспоненциального (стр. 354—358; на стр. 351—352 определены эти распределения). Рассматривалось также распределение экстремальных значений для $n \leqslant 6$ и цензурирования справа (стр. 366—367) и правостороннее треугольное распределение для $n \leqslant 10$ (нецензурированное, стр. 410—411). Все случаи цензурирования справа для $n \leqslant 20$ в случае распределения экстремальных значений были рассмотрены Уайтом (1964), который привел семизначные таблицы коэффициентов.

Говиндараюлу и Эйзенштат (1965) имели дело с усеченным нормальным распределением с плотностью

$$p(x) = (2/\pi\sigma^2)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2\right\}, \quad \text{если} \quad x \geqslant \mu,$$

и

$$p(x) = 0 \quad \text{для} \quad x < \mu.$$

Они табулировали (с 4 знаками) коэффициенты для многих случаев цензурирования, главным образом справа, для $n \leqslant 20$. Говиндараюлу (1966) рассмотрел симметричное цензурирование для двойного экспоненциального распределения ($n \leqslant 20$). Гупта и др. (1967) исследовали все случаи цензурирования для логистического распределения и $n = 2,\ 5\,(5)\,25$.

7.3. Верхние 10, 5- и 1-процентные точки размаха ранговых сумм для двухфакторной классификации табулированы Данн-Рэнкином и Вилкоксоном (1966).

7.4. Хартер (1959) получил математические ожидания и дисперсии с. в. $W_{(i)}/\sigma$ для нормальных выборок в случае $n \leqslant 100$ и $i \leqslant 9$ (включая размах, соответствующий $i = 1$ — у Хартера $r = 0$). Он также получил эффективности для $W_{(i)}$ (для $n = 2\,(2)\,50\,(5)\,100$ и $i \leqslant 9$) и оценок, являющихся линейными комбинациями двух $W_{(i)}$.

7.6. Огава (1970, стр. 252—256) приводит таблицы оптимальных линейных k-точечных оценок для μ и σ (для нормальной совокупности) в случае $k = 1\,(1)\,10$ (для μ_0^*) и $k = 1\,(1)\,6$ (для σ_0^*). Соответствующие результаты для $k = 2\,(2)\,20$ даны Эйзенбергером и Познером (1965). Эти авторы для тех же k дают и оценки для μ и σ, основанные на общих k порядковых статистиках и минимизирующие $D\mu^* + cD\sigma^*$ $(c = 1, 2, 3)$. Все оценки даны вместе с соответствующими значениями эффективностей.

7.7. Хартер (1964b) привел (с 6 знаками) для $n = 2\,(1)\,20\,(2)\,40\,(10)\,100$ и $\alpha = 0{,}005$; $0{,}01$; $0{,}05$; $0{,}1$ пары величин, дающих после умножения на соответствующее $w_{(i)}$ верхние и нижние доверительные границы для σ с коэффициентом доверия $1 - \alpha$.

Верхние 50; 25; 10; 5; 2,5; 1; 0,5; и 0,1-процентные точки для отношения ${}_1W/{}_2W$ табулированы Хартером (1963) (см. также таблицу 29b ПХ) с 4 значащими цифрами для n_1, $n_2 \leqslant 15$.

Таблица 31 ПХ дает верхние 5- и 1-процентные точки величины $S^2_{\max}/S^2_{\min}$ с 3 значащими цифрами и не меньше, чем с 2, соответственно, для $k = 2\,(1)\,12$ и $\nu = 2\,(1)\,10$, 12, 15, 20, 30, 60. Лесли и Браун (1966) для тех же k и ν табулировали с 4 значащими цифрами верхние 5; 2,5; 1 и 0,5-процентные точки величины $W_{\max}/W_{\min}$.

Мур (1957) (а также таблица 29а ПХ) дает с 3 знаками верхние 10, 5, 2 и 1-процентные точки величины $\frac{1}{2}R_2$ для n_1, $n_2 = 2\,(1)\,20$. Джексон и Росс (1955) получили с 2 значащими цифрами верхние 10, 5, и 1-процентные точки величин G_1 и G_2 для $n' = 2\,(1)\,15$ и k, k_1, $k_2 = 1\,(1)\,15$.

Верхние 5- и 1-процентные точки Q' даны по крайней мере с 2 значащими цифрами для k, $n = 2\,(1)\,10$ (Бейер (1968)). Вычисления масштабного множителя c и эквивалентных степеней свободы ν для двухфакторной классификации представляют трудную задачу численного интегрирования. Вычисления Хартли (1950) проверил Мардья (1967) и напечатал их в форме, позволяющей, очевидно, заменить таблицу 30b ПХ при следующем издании. Практический эффект этой проверки невелик. Таблица дает значения c с 2 знаками после запятой и ν с 1 знаком после запятой для $n = 2\,(1)\,10$ и всех k.

7.8. Для $n \leqslant 50$ Шапиро и Уилк (1965) привели четырехзначные таблицы коэффициентов a_i и трехзначные таблицы 1, 2, 5, 10, 50, 90, 95, 98 и 99-процентных точек своей статистики W^*, определенной в упр. 7.8.1.

7.9. Митра (1957) табулировал c с 3 десятичными знаками (но используя первоначальную форму аппроксимации Патнайка для $\overline{W}$) для $\gamma = 0{,}75$; $0{,}90$; $0{,}95$; $0{,}99$; $0{,}999$;

$\beta=0{,}75$; $0{,}90$; $0{,}95$; $0{,}99$; $n=2\,(1)\,20$; $k=1$ и $n=4$, 5; $k=4\,(1)\,20\,(5)\,40$, 50, 75, 100, ∞.

8.2. Многие из имеющихся таблиц процентных точек для статистик (а) — (г) воспроизведены (но не всегда полностью) в ПХ и СГ. О некоторых случаях уже говорилось в П.5.2 и П.5.3.

Приводим здесь сведения о таблицах для следующих статистик:

A_1: даны с 3 десятичными знаками нижние и верхние 10, 5, 2,5, 1, 0,5 и 0,1-процентные точки в случае $n=1\,(1)\,30$ — ПХ; СГ, стр. 291;

B_1: см. П.5.3 — ПХ; СГ, стр. 291;

B_2: используйте таблицы для C_2, соответствующие $\nu=\infty$, и результаты Кришнайи и Эрмитэджа (1965а), как в П.5.5;

B_3: табулированы вероятности $\mathsf{P}\{X_{(n)}-X_{(n-1)}>\lambda\sigma\}$ для $n=2$, 3, $10\,(10)\,100\,(100)\,1000$; $\lambda=0{,}1\,(0{,}1)\,5$ — СГ, стр. 293;

C_1: см. П.5.3 — ПХ; СГ, стр. 294;

C_2: см. П.5.3;

C_3: см. П.5.2 — ПХ; СГ, стр. 111—112;

C_4, C_5: см. П.5.3 — ПХ;

D_1: Граббс (1950) табулировал с 3 десятичными знаками верхние 10; 5; 2,5; 1-процентные точки статистики

$$(X_{(n)}-\bar{X}) \Bigg/ \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]^{1/2}$$

и с 4 десятичными знаками соответствующие нижние процентные точки эквивалентной статистики

$$\sum_{i=1}^{n-1}(X_{(i)}-\bar{X}_n)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \text{ — СГ, стр. 296;}$$

D_2: воспользуйтесь соотношением $D_2=C_5\,(n-1)^{1/2}$ при $\nu=0$ — ПХ;

D_3: см. П.5.3;

D_4: получены с 3 десятичными знаками для $n=25\,(5)\,50\,(10)\,100\,(25)\,200\,(50)\,1000\,(200)\,2000\,(500)\,5000$ верхние 5- и 1-процентные точки — ПХ;

D_5: даны с двумя десятичными знаками значения верхних и нижних 5- и 1-процентных точек для $n=50\,(25)$ $150\,(50)$ $700\,(100)$ 1000 — ПХ;

D_6: табулированы (с 4 десятичными знаками) для $n=4\,(1)$ 20 нижние 10; 5; 2,5 и 1-процентные точки — СГ, стр. 297;

r-статистики Диксона: получены с 3 десятичными знаками при $n=3\,(1)$ 30 значения 99, 5; 99; 98; 90 (10) 10; 5-процентных точек — СГ, стр. 298—303.

Лоурент (1963) табулировал $\mathrm{P}\{U_{(n)} \leqslant u\}$ ($U_{(n)}$ определяется в упр. 8. 2. 2 и 8. 2. 3) с 5 десятичными знаками для $n=3\,(1)$ 10 и $u=0{,}1\,(0{,}1)$ 1. Он также получил значения верхних 10-и 1-процентных точек для $U_{(n)}$.

Уилкс (1963) табулировал для $n=5(1)\,30(5)\,100(100)\,500$; $k=1\,(1)\,5$; $\alpha=0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}025$; $0{,}01$ значения r_α с 5 десятичными знаками.

8.3. Мостеллер (1948) дал таблицы вероятностей $P_r = n m^{(r)}/(nm)^{(r)}$ того, что среди n выборок объема m имеется выборка, не менее r наблюдений которой больше, чем все элементы остальных выборок, для $m=3$, 5, 7, 10, 15, 20, 25, ∞; $n=2\,(1)\,5$ или 6; $r=2\,(1)\,5$ или 6. Таблицы для $\max T_i$ — наибольшей суммы рангов Краскела — Уоллиса в n группах объема m даны Оде (1967), который кроме критических значений для различных α и $n=2\,(1)\,6$, $m=2\,(1)\,8$ получил и ф. р. для $n \leqslant 5$, $m \leqslant 5$. Томпсон и Уилки (1963) табулировали значимые точки с соответствующими им точными уровнями значимости для критериев с двухсторонней ранговой суммой (когда n объектов ранжированы по каждому из m признаков) для номинальных уровней значимости $\alpha=0{,}01$; $0{,}03$; $0{,}05$; $n=3\,(1)\,15$; $m=3\,(1)\,15$.

Относительно b_α, b_α^* см. П.5.3, а о таблицах для $S^2_{\max} \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} {}_iS^2$ — П.5.4.

8.4. Дэйвид и Полсон (1965) табулировали значения P_1 для статистик B_1 и B_5 с тремя десятичными знаками для $\lambda=1\,(1)\,5$; $n=2\,(1)\,10$, 12, 15, 20, 25; $\alpha=0{,}05$; $0{,}01$ (для B_5 фактически $n=3\,(1)\,6$, 8, 12).

ЛИТЕРАТУРА

Сокращение СГ используется для ссылок на сборник Сархана и Гринберга (1970).

Абдель-Ати (Abdel-Aty, S. H.) (1954). Ordered variables in discontinuous distributions. *Statist. Neerlandica* 8, 61—82.

Айяр (Aiyar, K. R.) (1963). On uncorrelated linear functions of order statistics. *J. Amer. Statist. Ass.* 58, 245—6.

Али и Чен (Ali, M. M. and Chan, L. K.) (1964). On Gupta's estimates of the parameters of the normal distribution. *Biometrika* 51, 498—501.

Али и Чен (Ali, M. M. and Chan, L. K.) (1965). Some bounds for expected values of order statistics. *Ann. Math. Statist.* 36, 1055—7.

Анис (Anis, A. A.) (1955). The variance of the maximum of partial sums of a finite number of independent normal variates. *Biometrika* 42, 96—101.

Анис (Anis, A. A.) (1956). On the moments of the maximum of partial sums of a finite number of independent normal variates. *Biometrika* 43, 79—84.

Анис и Ллойд (Anis, A. A. and Lloyd, E. H.) (1953). On the range of partial sums of a finite number of independent normal variates. *Biometrika* 40, 35—42.

Бакленд (Buckland, W. R.) (1964). Statistical Assessment of the Life Characteristic. Griffin, London; Hafner, New York.

Барлоу (Barlow, R. E.) (1965). Bounds on integrals with applications to reliability problems. *Ann. Math. Statist.* 36 565—74.

Барлоу и Гупта (Barlow, R. E. and Gupta, S. S.) (1966). Distribution-free life test sampling plans. *Technometrics* 8, 591—613.

Барлоу, Мадански, Прошан и Шейер (Barlow, R. E., Madansky, A., Proschan, F., and Scheuer, E. M.) (1968). Statistical estimation procedures for the «burn-in» process. *Technometrics* 10, 51—62.

Барлоу, Маршалл и Прошан (Barlow, R. E., Marshall, A. W. and Proschan, F.) (1963). Properties of probability distributions with monotone hazard rate. *Ann. Math. Statist.* 34, 375—89.

Барлоу и Прошан (Barlow, R. E. and Proschan, F.) (1967). Exponential life test procedures when the distribution has monotone failure rate. *J Amer Statist. Ass.* 62, 548—60.

Барлоу и Прошан (1969) Математическая теория надежности. — М.: «Сов. радио».

Барнард (Barnard, G. A.) (1953). Time intervals between accidents — a note on Maguire, Pearson and Wynn's paper. *Biometrika* 40, 212—13.

Барндорф-Нильсен (Barndorff-Nielsen, O) (1963). On the limit behaviour of extreme order statistics. *Ann. Math. Statist.* **34**, 992—1002.

Барндорф-Нильсен (Barndorff-Nielsen, O.) (1964). On the limit distribution of the maximum of a random number of independent random variables. *Acta Mathematica* **15**, 399—403.

Барнетт, Муллен и Со (Barnett, F. C., Mullen, K. and Saw, J. G.) (1967). Linear estimates of a population scale parameter. *Biometrika* 54, 551—4.

Барнетт (Barnett, V. D.) (1966). Order statistics estimators of the location of the Cauchy distribution. *J. Amer. Statist. Ass* **61**, 1205—18. Correction **63**, 383—5.

Барнетт и Льюис (Barnett, V. D. and Lewis, T.) (1967). A study of low-temperature probabilities in the context of an industrial problem. *J R. Statist. Soc.* **A130**, 177—206.

Барр (Barr, D. R.) (1966). On testing the equality of uniform and related distributions. *J. Amer. Statist. Ass.* **61**, 856—64.

Бартоломью (Bartholomew, D. J.) (1957) A problem in life testing. *J. Amer. Statist. Ass.* 52, 350—5.

Бартоломью (Bartholomew, D. J.) (1963) The sampling distribution of an estimate arising in life testing. *Technometrics* 5, 361—74.

Бартон и Дэйвид (Barton, D. E. and David, F. N.) (1956) Some notes on ordered random intervals. *J. R. Statist. Soc.* **B18**, 79—94.

Бартон и Дэйвид (Barton, D. E. and David, F. N.) (1959) Combinatorial extreme value distributions. *Mathematika* **6**, 63—76. (Slightly elaborated in Chapter 13 of David and Barton, 1962.)

Бартон и Кэсли (Barton, D. E. and Casley; D. J.) (1958). A quick estimate of the regression coefficient. *Biometrika* **45**, 431—5.

Басу (Basu, A. P.) (1955). On statistics independent of a complete sufficient statistic. *Sankhyā* **15**, 377—80.

Басу (Basu, A. P.) (1965). On some tests of hypotheses relating to the exponential distribution when some outliers are present. *J. Amer. Statist. Ass.* **60**, 548—59.

Басу (Basu, A. P.) (1967). On the large sample properties of a generalized Wilcoxon—Mann—Whitney statistic *Ann Math. Statist.* 38, 905—15.

Басу (Basu, A. P.) (1968). On a generalized Savage statistic with applications to life testing. *Ann. Math. Statist.* **39**, 1591—604.

Бахадур (Bahadur, R R.) (1966). A note on quantiles in large samples. *Ann. Math. Statist.* **37**, 577—80.

Бейер (Beyer, W. H. (Ed.)) (1968). Handbook of Probability and Statistics, 2nd Ed. The Chemical Rubber Company, Cleveland.

Бейн и Томен (Bain, L. J. and Thoman, D. R.) (1968) Some tests of hypotheses conserning the three-parameter Weibull distribution. *J. Amer. Statist. Ass.* **63**, 853—60.

Бейн и Уикс (Bain, L. J. and Weeks, D. L.) (1965). Tolerance limits for the generalized gamma distribution. *J. Amer Statist Ass.* 50, 1142—52.

Бейн и Энтл (Bain, L. J. and Antle, C. E.) (1967). Estimation of parameters in the Weibull distribution. *Technometrics* **9**, 621—7.

Беккхофер, Кифер и Собел (Bechhofer, R. E., Kiefer, J. and Sobel, M.) (1968). Sequential Identification and Ranking Procedures. University of Chicago Press.

Белз и Хуке (Belz, M. H. and Hooke, R) (1954). Approximate distribution of the range in the neighborhood of low percentage points. *J. Amer. Statist. Ass.* **49**, 620—36.

Белл, Блэкуэлл и Брейман (Bell, C. B., Blackwell, D. and Breiman, L.) (1960). On the completeness of order statistics. *Ann. Math. Statist.* **31**, 794—7.

Беннет (Bennett, B. M.) (1966). Note on confidence limits for a ratio of bivariate medians. *Metrika* **10**, 52—4.

Беннет и Накамура (Bennett, B. M. and Nakamura, E.) (1968). Percentage points of the range from a symmetric multinomial distribution. *Biometrika* **55**, 377—9.

Беннет (Bennett, C. A.) (1952). Asymptotic properties of ideal linear estimators. Ph. D. Thesis, University of Michigan.

Бенсон (Benson, F.) (1949). A note on the estimation of mean and standard deviation from quantiles. *Suppl. J. R. Statist. Soc.* **11**, 91—100.

Берман (Berman, S. M.) (1962a). Limiting distribution of the maximum term in sequences of dependent random variables. *Ann. Math. Statist.* **33**, 894—908.

Берман (Berman, S. M.) (1962b). Convergence to bivariate limiting extreme value distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **13**, 217—23.

Берман (Berman, S. M.) (1962c). Equally correlated random variables. *Sankhyā* **A24**, 155—6.

Берман (Berman, S. M.) (1963). Limiting distribution of the studentized largest observation. Skand. Aktuarietidskr., 1962, 154—61.

Берман (Berman, S. M.) (1964). Limit theorems for the maximum term in stationary sequences. *Ann. Math. Statist.* **35**, 502—16.

Бикел (Bickel, P. J.) (1965). On some robust estimates of location. *Ann. Math. Statist.* **36**, 847—58.

Бикел (Bickel, P. J.) (1967). Some contributions to the theory of order statistics. Proc. 5th Berkeley Symp. I, 575—91.

Бикел и Ходжес (Bickel, P. J. and Hodges, J. L., Jr.) (1967). The asymptotic theory of Galton's test and a related simple estimate of location. *Ann. Math. Statist.* **38**, 73—89.

Бирнбаум (Birnbaum, A.) (1959). On the analysis of factorial experiments without replication. *Technometrics* **1**, 343—57.

Бирнбаум (Birnbaum, A.) (1961). A multi-decision procedure related to the analysis of single degrees of freedom. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **12**, 227—36.

Бирнбаум и Ласка (Birnbaum, A. and Laska, E.) (1967). Optimal robustness: a general method, with applications to linear estimators of location. *J. Amer. Statist. Ass.* **62**, 1230—40.

Бирнбаум, Изари и Сондерс (Birnbaum, Z. W., Esary, J. D. and Saunders, S. C.) (1961). Multicomponent systems and structures and their reliability. *Technometrics* **3**, 55—77.

Бирнбаум и Сондерс (Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C.) (1958). A statistical model for life-length of materials. *J. Amer. Statist. Ass.* **53**, 151—60.

Блисс, Кокрен и Тьюки (Bliss, C. I., Cochran W. G. and Turkey, J. W.) (1956). A rejection criterion based upon the range. *Biometrika* 43, 418—22.
Блисс и Стивенс (Bliss, C. I. and Stevens, W. L.) (1937). The calculation of the time-mortality curve. *Ann. Appl. Biol.* 24, 815—52.
Блишке (Blischke, W. R.) (1968). Mixtures of distributions. In: Sills, D. L. (Ed.) International Encyclopedia of the Social Sciences, Vol. 4, 235—41. Macmillan and Free Press, New York.
Блом (Blom, G.) (1958). Statistical Estimates and Transformed Beta-Variables. Almqvist and Wiksell, Uppsala, Sweden; Wiley, New York.
Блом (Blom, G.) (1962). Nearly best linear estimates of location and scale parameters (русский перевод в СГ, 43—53).
Блох (Bloch, D.) (1966). A note on the estimation of the location parameter of the Cauchy distribution. *J. Amer. Statist. Ass.* **61**, 852—5.
Блох и Гаствирт (Bloch, D. A. and Gastwirth, J. L.) (1968). On a simple estimate of the reciprocal of the density function. *Ann. Math. Statist.* **39**, 1083—5.
Блэнд, Гилберт, Кападья и Оуэн (Bland, R. P., Gilbert, R. D., Kapadia, C. H. and Owen, D. B.) (1966). On the distributions of the range and mean range for samples from a normal distribution. *Biometrika* 53, 245—8.
Блэнд и Оуэн (Bland, R. P. and Owen, D. B.) (1966). A note on singular normal distributions. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **18**, 113—6.
Блюменталь (Blumental, S.) (1966). Contributions to sample spacings theory. I: Limit distributions of sums of ratios of spacings. *Ann. Math. Statist.* 37, 904—24.
Бодмер (Bodmer, W. F.) (1959). A significantly extreme deviate in data with a non-significant heterogeneity chi square. *Biometrics* **15**, 538—42.
Бозе и Гупта (Bose, R. C. and Gupta, S. S.) (1959). Moments of order statistics from a normal population. *Biometrika* **46**, 433—40.
Бокс (Box, G. E. P.) (1953). Non-normality and tests on variances. *Biometrika* 40, 318—35.
Борениус (Borenius, G.) (1959). On the distribution of the extreme values in a sample from a normal distribution. Skand. Aktuarietidskr., 1958, 131—66.
Борениус (Borenius, G.) (1966). On the limit distribution of an extreme value in a sample from a normal distribution. Skand. Aktuarietidskr., 1965, 1—15.
Бофингер (Bofinger, V. J.) (1965). The k-sample slippage problem. *Aust. J. Statist.* 7, 20—31.
Брейтер и Кришнайя (Breiter, M. C. and Krishnaiah, P. R.) (1968). Tables for the moments of gamma order statistics. *Sankhyā* **B30**, 59—72.
Бриллинджер (Brillinger, D. R.) (1966). An extremal property of the conditional expectation. *Biometrika* 53, 594—5.
Бросс (Bross, I. D. J.) (1961). Outliers in patterned experiments: a strategic appraisal. *Technometrics* 3, 91—102

Бхаттачарджи (Bhattacharjee, G. P.) (1965). Distribution of range in non-normal samples. *Aust. J. Statist.* 7, 127—41.

Бэйбик (Babik, S.) (1968). Application of reliability theory to a reactor safety circuit. *Appl. Statist.* **17**, 137—56.

Бэрр (Burr, I. W.) (1955). Calculation of exact sampling distribution of ranges from a discrete population. *Ann. Math. Statist.* **26**, 530—2. Correction **38**, 280.

ван дер Ваарт (van der Vaart, H. R.) (1961a). A simple derivation of the limiting distribution function of a sample quantile with increasing sample size. *Statist. Neerlandica* **15**, 239—42.

ван дер Ваарт (van der Vaart, H. R.) (1961b). Some extentions of the idea of bias. *Ann. Math. Statist.* **32**, 436—47.

ван Цвет (van Zwet, W. R.) (1964). Convex Transformations of Random Variables. Mathematical Center Tracts 7, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

ван Цвет (van Zwet, W. R.) (1966). Bias in estimation from type I censored samples. *Statist. Neerlandica* **20**, 143—8.

ван Цвет (van Zwet, W. R.) (1967). An inequality for expected values of sample quantiles. *Ann. Math. Statist.* **38**, 1817—21.

Ватанабе и др. (Watanabe Y. et al.) (1957). Some contributions to order statistics. *J. Gakugei*, Tokushima Univ. **8**, 41—90.

Ватанабе и др. (Watanabe Y. et al.) (1958). Some contributions to order statistics (continued). *J. Gakugei*, Tokushima Univ. **9**, 31—86.

Вейлер (Weiler, H.) (1954). A new type of control chart limits for means, ranges, and sequential runs. *J. Amer. Statist. Ass.* **49**, 298—314.

Вейс (Weiss, L.) (1964). On the asymptotic joint normality of quantiles from a multi-variate distribution. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **68B**, 65—6.

Вейс (Weiss, L.) (1965). On the asymptotic distribution of the largest sample spacing. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **13**, 720—31.

Вентер (Venter, J. H.) (1967). On estimation of the mode. *Ann. Math. Statist.* 38, 1446—55.

Винер (Winer, P.) (1963). The estimation of the parameters of the iterated exponential distribution from singly censored samples. *Biometrika* **19**, 460—4.

Гаек (Hajek, J.) (1968). Asymptotic normality of simple linear rank statistics under alternatives. *Ann. Math. Statist.* **39**, 325—46.

Галло (Gallot, S.) (1966). A bound for the maximum of a number of random variables. *J. Appl. Prob.* **3**, 556—8.

Гальперин (Halperin, M.) (1952). Maximum likelihood estimation in truncated samples. *Ann. Math. Statist.* **23**, 226—38.

Гальперин (Halperin, M.) (1960). Some asymptotic results for a coverage problem. *Ann. Math. Statist.* **31**, 1063—76.

Гальперин (Halperin, M.) (1967). An inequality on a bivariate Student's t distribution. *J. Amer. Statist. Ass.* **62**, 603—6.

Гальперин, Гринхауз, Корнфилд и Залокар (Halperin, M., Greenhouse, S. W., Cornfield, J. and Zalokar, J.) (1955). Tables of percentage points for the studentized maximum absolute deviate in normal samples. *J. Amer. Statist. Ass.* 50, 185—95.

Гальтон (Galton. F.) (1902). The most suitable proportion between the values of first and second prizes. *Biometrica* **1**, 385—90.

Гани и Йео (Gani, J. and Yeo, G. F.) (1962). On the age distribution of n ranked elements after several replacements. *Aust. J. Statist.* **4**, 55—60.

Гарвардская вычислительная лаборатория (Harvard Computation Laboratory) (1955). Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution. Harvard University Press, Cambridge, Miss.

Гарнер (Garner, N. R.) (1958). Curtailed sampling for variables *J. Amer. Statist. Ass.* **53**, 862—7.

Гаствирт (Gastwirth, J. L.) (1966). On robust procedures. *J. Amer. Statist. Ass.* **61**, 929—48.

Гаствирт и Коэн (Gastwirth, J. L. and Cohen, M. L.) (1968). The small sample behaviour of some robust linear estimators of location. *Tech. Rep.* **91**, Dept. Statistics, The John Hopkins University.

Гаствирт и Рубин (Gastwirth, J. L. and Rubin, H.) (1969). On robust linear estimators. *Ann. Math. Statist.* **40**, 24—39.

Гебхардт (Gebhardt, F.) (1964). On the risk of some strategies for outlying observations. *Ann. Math. Statist.* **35**, 1524—36.

Гебхардт (Gebhardt, F.) (1966). On the effect of staggiers on the risk of some mean estimators in small samples. *Ann. Math. Statist.* **37**, 441—50.

Гилкрист (Gilchrist, W. G.) (1961). Some sequental tests using range. *J. R. Statist. Soc.* **B23**, 335—42.

Гнанадесикан, Пинкхем и Хьюз (Gnanadesikan, R., Pinkham, R. S. and Hughes. L. P.) (1967). Maximum likelihood estimation of the parameters of the beta distribution from smallest order statistics. *Technometrics* **9**, 607—20.

Гнеденко (Gnedenko, B.) (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.* **44**, 423—53.

Говиндараюлу (Govindarajulu, Z.) (1962). Exact lower moments of order statistics in samples from the chi-distribution (1 d. f). *Ann. Math. Statist.* **33**, 1292—305.

Говиндараюлу (Govindarajulu, Z.) (1963a). On moments of order statistics and quasi-rauges from normal populations. *Ann. Math. Statist.* **34**, 633—51.

Говиндараюлу (Govindarajulu, Z.) (1963b). Relationships among moments of order statistics in samples from two related populations. *Technometrics* 5, 514—8.

Говиндараюлу (Govindarajulu, Z.) (1964). A supplement to Mendenhall's bibliography on live testing and related topics. *J. Amer. Statist. Ass.* **59**, 1231—91.

Говиндараюлу (Govindarajulu, Z.) (1966). Best linear estimates under symmertic censoring of the parameters of a double exponential population. *J. Amer. Statist. Ass.* **61**, 248—58.

Говиндараюлу (Govindarajulu, Z.) (1967). Characterization of the exponential and power distributions. Skand. Aktuarietidskr., 1966, 132—6.

Говиндараюлу (Govindarajulu, Z.) (1968a). Certain general properties of unbiased estimates of location and scale parameters based on ordered observations. *SIAM J. Appl. Math* **16**, 533—51.

Говиндараюлу (Govindarajulu, Z.) (1968b). Asymptotic normality of linear combinations of functions of order statistics., II *Proc. Nat. Acad. Sci.* 59, 713—9.

Говиндараюлу и Эйзенштат (Govindarajulu, Z. and Eisenstat, S.) (1965). Best estimates of location and scale parameters of a chi (1 d. f.) distribution, using ordered observations. *Rep. Stat. Appl. Res. JUSE* **12**, 149—64.

Говиндараюлу и Хубакер (Govindarajulu, Z. and Hubacker, N. W.) (1964). Percentiles of order statistics in samples from uniform, normal, chi (1 d. f.) and Weibull populations. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE* **11**, 64—90.

Годвин (Godwin, H. J.) (1949). Some low moments of order statistics. *Ann. Math. Statist.* 20, 279—85.

Гудмэн и Мадански (Goodman, L. A. and Madansky, A.) (1962). Parameter-free and nonparametric tolerance limits: the exponential case. *Technometrics* 4, 75—95.

Граббс (Grubbs, F E.) (1950). Sample criteria for testing outlying observations. *Ann. Math. Statist.* **21**, 27—58.

Граббс (Grubbs, F. E.) (1964). Statistical Measures of Accuracy for Rifleman and Missile Engineers. Edwards Brothers, Ann Arbor, Mich.

Граббс (Grubbs, F. E.) (1969). Procedures for detecting outlying observations in samples. *Technometrics* **11**, 1—21.

Граббс, Кун и Пирсон (Grubbs, F. E., Coon, Helen J. and Pearson, E. S.) (1966). On the use of Patnaik type chi approximations to the range in significance tests. *Biometrika* 53, 248—52.

Граббс и Уивер (Grubbs, F. E. and Weaver, C. L.) (1947). The best unbiased estimate of population standard deviation based on group ranges. *J. Amer. Statist. Ass.* 42, 224—41.

Гранди (Grundy, P. M.) (1952). The fitting of grouped truncated and grouped censored normal distributions. *Biometrika* 39, 252—9.

Грейг (Greig, Margaret) (1967). Extremes in a random assembly. *Biometrika* 54, 273—82.

Гренандер (Grenander, U.) (1965). A limit theorem for sums of minima of stochastic variables. *Ann. Math. Statist.* 36, 1041—2.

Гумбель (Gumbel, E. J.) (1935). Les valeurs extrêmes des distributions statistiques. *Ann. Inst. Henri Poincarè* 5, 115—58.

Гумбель (Gumbel, E. J.) (1947). The distribution of the range. *Ann. Math. Statist.* 18, 384—412.

Гумбель (Gumbel, E. J.) (1949). Probability tables for the range. *Biometrika* 36, 142—8.

Гумбель (Gumbel, E. J.) (1954). The maxima of the mean largest value and of the range. *Ann Math. Statist.* 25, 76—84.

Гумбель (Gumbel, E. J.) (1961). Statistical theory of breaking strength and fatigue failure. *Bull. Int. Statist. Inst.* 38, (3), 375—93.

Гумбель (Gumbel, E. J.) (1963). Statistical forecast of droughts. *Bull. I. A. S. H.* 8, 5—23.

Гумбель Э. (1965). Статистика экстремальных значений,—М., Мир.

Гумбель и Гербах (Gumbel, E. J. and Herbach, L. H.) (1951). The exact distribution of the extremal quotient. *Ann. Math. Statist.* 22, 418—26.

Гумбель и Голдстейн (Gumbel, E. J. and Goldstein, N.) (1964). Analysis of empirical biviriate extremal distributions. *J. Amer. Statist. Ass.* 59, 794—816.

Гумбель, Карлсон и Мустафи (Gumbel, E. J., Carlson, P. G. and Mustafi, C. K.) (1965). A note on midrange. *Ann. Math. Statist.* 36, 1052—4.

Гумбель и Кини (Gumbel, E. J. and Keeney, R. D.) (1950a). The geometric range for distributions of Cauchy's type. *Ann. Math. Statist.* 21, 133—7.

Гумбель и Кини (Gumbel, E. J. and Keeney, R. D.) (1950b). The extremal quotient. *Ann. Math. Statis..* 21, 523—8.

Гумбель и Мустафи (Gumbel, E. J. and Mustafi, C. K.) (1967). Some analytical properties of biviriate extremal distributions. *J. Amer. Statist. Ass.* 62, 569—88.

Гумбель и Пикендс (Gumbel, E. J. and Pickands, J., III) (1967). Probability tables for the extremal quotient. *Ann. Math. Statist.* 38, 1541—51.

Гупта (Gupta, A. K.) (1952). Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample. *Biometrika* 39, 260—73.

Гупта (Gupta, S. S.) (1960). Order statistics from the gamma distribution. *Technometrics* 2, 243—62.

Гупта (Gupta, S. S.) (1961). Percentage points and modes of order statistics from the normal distribution *Ann. Math. Statist.* 32, 888—93.

Гупта (Gupta, S. S.) (1962). Life test sampling plans for normal and lognormal distributions. *Technometrics* 4, 151—75.

Гупта (Gupta, S. S.) (1963a). Probability integrals of multivariate normal and multivariate t. *Ann. Math. Statist.* 34, 792—828.

Гупта (Gupta, S. S.) (1963b). Bibliography on the multivariate normal integrals and related topics. *Ann. Math. Statist.* 34, 829—38.

Гупта и Гнанадесикан (Gupta, S. S. and Gnanadesikan, M.) (1966). Estimation of the parameters of the logistic distribution. *Biometrika* 53, 565—70.

Гупта и Гролл (Gupta, S. S. and Groll, Phyllis A.) (1961). Gamma distribution in acceptance sampling based on life tests. *J. Amer. Statist. Ass.* 56, 942—70.

Гупта, Курейши и Шах (Gupta, S. S., Qureishi, A. S. and Shah, B. K.) (1967). Best linear unbiased estimators of the parameters of the logistic distribution using order statistics. *Technometrics* 9, 43—56.

Гупта и Пиллаи (Gupta, S. S. and Pillai, K. C. S.) (1965). On linear functions of ordered correlated normal random variables. *Biometrika* 52, 367—79.

Гупта, Пиллаи и Стек (Gupta, S. S., Pillai, K. C. S. and Steck, G. P.) (1964). On the distribution of linear functions and ratios of linear functions of ordered correlated normal random variables with emphasis on range. *Biometrika* 51, 143—51.

Гупта и Собел (Gupta, S. S. and Sobel, M.) (1958). On the distribution of a statistic based on ordered uniform chance variables. *Ann. Math. Statist.* 29, 274—81.

Гупта и Собел (Gupta, S. S. and Sobel, M.) (1962). On the smallest of several correlated F statistics. *Biometrika* 49, 509—23.

Гупта и Шах (Gupta, S. S. and Shah, B. K.) (1965). Exact moments and percentage points of the order statistics and the distribution of the range from the logistic distribution. *Ann. Math. Statist.* 36. 907—20.

Гутмен и Смит (Guttman, I., and Smith, D.) (1966). Investigation of rejection rules for outliers in small samples from the normal distribution. *Tech. Reps.* 90—93. University of Wisconsin.

Гутмен и Смит (Guttman, I. and Smith, D. E.) (1969). Investigation of rules for dealing with outliers in small samples from the normal distribution. I: Estimation of the mean. *Technometrics* **11**, 527—50.

Гхош (Ghosh, B. K.) (1963). On sequential tests of ratio of variances based on range. *Biometrika* 50, 419—30.

Гхош (Ghosh, B. K.) (1965). Sequential range tests for components of variance. *J. Amer. Statist. Ass.* 60, 826—36.

Данн (Dunn, O. J.) (1958). Estimation of the means of dependent variables. *Ann. Math. Statist.* 29, 1095—1111.

Даннет и Собел (Dunnett, C. W. and Sobel, M.) (1955). Approximations to the probability integral and certain percentage points of a multivariate analogue of Student's t-distribution. *Biometrika* 42, 258—60.

Данн-Рэнкин и Вилкоксон (Dunn-Rankin, P. and Wilcoxon, F.) (1966). The true distributions of the range of rank totals in the two-way classification. *Psychometrika* 31, 573—80.

Дарвин (Darwin, J. H.) (1957). The difference between consecutive members of a series of random variables arranged in order of size. *Biometrika* 44, 211—8.

Дарлинг (Darling, D. A.) (1952a). The influence of the maximum term in the addition of independent random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 73, 95—107.

Дарлинг (Darling, D. A.) (1952b). On a test for homogeneity and extreme values. *Ann. Math. Statist.* 23, 450—6. Correction 24, 135.

Дарлинг (Darling, D. A.) (1953). On a class of problems related to the random division of an interval. *Ann. Math. Stat.* 24, 239—53.

Даунтон (Downton, F.) (1953). A note on ordered least-squares estimation. *Biometrika* 40, 457—8.

Даунтон (Downton, F.) (1954). Least-squares estimates using ordered observations. *Ann. Math. Statist.* 25, 303—16.

Даунтон (Downton, F.) (1966a). Linear estimates of parameters in the extreme value distribution. *Technometrics* 8, 3—17.

Даунтон (Downton, F.) (1966b). Linear estimates with polynomial coefficients. *Biometrika* 53, 129—41.

Двасс (Dwass, M.) (1964). Extremal processes. *Ann. Math. Statist.* 35, 1718—25.

Демпстер и Клейл (Dempster, A. P. and Kleyle, R. M.) (1968). Distributions determined by cutting a simplex with hyperplanes. *Ann. Math. Statist.* 39, 1473—8.

де Финетти (de Finetti, B.) (1932). Sulla legge di probabilità degli estremi. *Metron* 9, 127—38.
де Финетти (de Finetti, B.) (1961). The Bayesian approach to the rejection of outliers. Proc. 4th Berkeley Symp. I, 199—210.
Джекобсон (Jacobson, P. H.) (1947). The relative power of three statistics for small sample destructive tests. *J. Amer. Statist. Ass.* 42, 575—84.
Джексон и Росс (Jackson, J. E. and Ross, Eleanor L.) (1955). Extended tables for use with the «G» test for means. *J. Amer. Statist. Ass.* 50, 416—33.
Джексон (Jackson, O. A. Y.) (1967). An analysis of departures from the exponential distribution. *J. R. Statist. Soc.* **B29**. 540—9.
Джеффрис Г., Свирс Б. (1969). Методы математической физики — М.: Мир.
Джини (Gini, C.) (1912). Variabilità é Mutabilità, contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche. Studi Economico — Giuridici della R. Università di Cagliari.
Джонс и Либерман (Johns, M. V., Jr., and Lieberman, G. J.) (1966). An exact asymptotically efficient confidence bound for reliability in the case of the Weibull distribution. *Technometrics* 8, 135—75.
Джонсон и Янг (Johnson, N. L. and Young, D. H.) (1960). Some applications of two approximations to the multinomial distribution. *Biometrika* 47, 463—9.
Джоунз (Jones, A. E.) (1946). A useful method for the routine estimation of dispersion from large samples. *Biometrika* 33, 274—82.
Джоунз (Jones, H. L.) (1948). Exact lower moments of order statistics in small samples from a normal distribution. *Ann. Math. Statist.* 19, 270—3.
Джоши (Joshi, P. C.) (1969). Bounds and approximations for the moments of order statistics. *J. Amer. Statist. Ass.* 64, 1617—24.
Диксон (Dixon, W. J.) (1950). Analysis of extreme values. *Ann. Math. Statist.* **21**, 488—506.
Диксон (Dixon, W. J.) (1951). Ratios involving extreme values. *Ann. Math. Statist.* 22, 68—78.
Диксон (Dixon, W. J.) (1953). Processing data for outliers. *Biometrics* 9, 74—89.
Диксон (Dixon, W. J.) (1957). Estimates of the mean and standard deviation of a normal population. *Ann. Math. Statist.* 28, 806—9.
Диксон (Dixon, W. J.) (1960). Simplified estimation from censored normal samples. *Ann. Math. Statist.* **31**, 385—91.
Диксон (Dixon, W. J.) (1962). Rejection of observations. (русский перевод в СГ, 274—307).
Диксон и Массей (Dixon, W. J. and Massey, F. J., Jr.) (1957). Introduction to Statistical Analysis, 2nd Ed. McGraw-Hill, New York.
Диксон и Тьюки (Dixon, W. J. and Tukey, J. W.) (1968). Approximate behavior of the distribution of Winsorized t (trimming/Winsorization 2). *Technometrics* **10**, 83—98.
Додд (Dodd, E. L.) (1923). The greatest and the least variate under general laws of error, *Trans. Amer. Math. Soc.* 25, 525—39.

Доксам (Doksum, K.) (1967). Asymptotically optimal statistics in some models with increasing failure rate average. *Ann. Math. Statist.* 38, 1731—9.

Дорнбос (Doornbos, R.) (1956). Significance of the smallest of a set of estimated normal variances. *Statist. Neerlandica* 10, 117—26.

Дорнбос (Doornbos, R.) (1966). Slippage Tests. Mathematical Centre Tracts 15, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

Дорнбос и Принс (Doornbos, R. and Prins, H. J.) (1956). Slippage tests for a set of gamma-variates. *Indag. Math.* 18, 329—37.

Дорнбос и Принс (Doornbos, R. and Prins, H. J.) (1958). On slippage tests. *Indag. Math.* 20, I. A general type of slippage test and a slippage test for normal variates. 38—46. II. Slippage tests for discrete variates. 47—55. III. Two distribution-free slippage tests and two tables. 438—47.

Досс (Doss, S. A. D. C.) (1963). On the efficiency of best asymptotically normal estimates of the Poisson parameter based on singly and doubly truncated or censored samples. *Biometrics* 19, 588—94.

Дронкерс (Dronkers, J. J.) (1958). Approximate formulae for the statistical distributions of extreme values. *Biometrika* 45, 447—70.

Дункан (Duncan, D. B.) (1965). A Bayesian approach to multiple comparisons. *Technometrics* 7, 171—222.

Дурбин (Durbin, J.) (1961). Some methods of constructing exact tests. *Biometrika* 48, 41—55.

Дьюби (Dubey, S. D.) (1967). Some percentile estimators for Weibull parameters. *Technometrics* 9, 119—29.

Дэйвид и Бартон (David, F. N. and Barton, D. E.) (1962). Combinatorial Chance. Griffin, London; Hafner, New York.

Дэйвид и Джонсон (David, F. N. and Johnson, N. L.) (1954). Statistical treatment of censored data. I. Fundamental formulae. *Biometrika* 41, 228—40.

Дэйвид и Джонсон (David, F. N. and Johnson, N. L.) (1956). Some tests of significance with ordered variables (with discussion). *J. R. Statist. Soc.* B78, 1—31.

Дэйвид (David, H. A.) (1951). Further applications of range to the analysis of variance. *Biometrika* 38, 393—409.

Дэйвид (David, H. A.) (1953). The power function of some tests based on range. *Biometrika* 40, 347—53.

Дэйвид (David, H. A.) (1954). The distribution of range in certain non-normal populations. *Biometrika* 41, 463—8.

Дэйвид (David, H. A.) (1955). A note on moving ranges. *Biometrika* 42, 512—5.

Дэйвид (David, H. A.) (1956). Revised upper percentage points of the extreme studentized deviate from the sample mean. *Biometrika* 43, 449—51.

Дэйвид (David, H. A.) (1957). Estimation of means of normal populations from observed minima. *Biometrika* 44, 282—6.

Дэйвид (David, H. A.) (1962). Order statistics in short-cut tests (русский перевод в СГ, 94—121).

Дэйвид (David. H. A.) (1966). A note on «A k-sample model in order statistics» by W. J. Conover. *Ann. Math. Statist.* 37, 287—8.

Дэйвид (David, H. A.) (1968). Gini's mean difference rediscovered. *Biometrika* 55, 573—5.

Дэйвид и Джоши (David, H. A. and Joshi, P. C.) (1968). Recurrence relations between moments of order statistics for exchangeable variates. *Ann. Math. Statist.* 39, 272—4.

Дэйвид и Мишрики (David, H. A. and Mishriky, R. S.) (1968). Order statistics for discrete populations and for grouped samples. *J. Amer. Statist. Ass.* **63**, 1390—8.

Дэйвид и Ньюэлл (David, H. A. and Newell, D. J.) (1965). The identification of annual peak periods for a disease. *Biometrics* **21**, 645—50.

Дэйвид и Перез (David, H. A. and Perez, C. A.) (1960). On comparing different tests of the same hypothesis. *Biometrika* **47**, 297—306.

Дэйвид и Полсон (David, H. A. and Paulson, A. S.) (1965). The performance of several tests for outliers. *Biometrika* **52**, 429—36.

Дэйвид, Хартли и Пирсон (David, H. A., Hartley, H. O. and Pearson, E. S.) (1954). The distribution of the ratio, in a single normal sample, of range to standard deviation. *Biometrika* **41**, 482—93.

Дэйвид (David, H. T.) (1962). The sample mean among the moderate order statistics. *Ann. Math. Statist.* **33**, 1160—6.

Дэйвид (David, H. T.) (1963). The sample mean among the extreme normal order statistics. *Ann. Math. Statist.* **34**, 33—55.

Дэйвис (Davis, R. C.) (1951). On minimum variance in nonregular estimation. *Ann. Math. Statist.* **22**, 43—57.

Дэйли (Daly, J. F.) (1946). On the use of the sample range in an analogue of Student's t-test. *Ann. Math. Statist.* **17**, 71—4.

Дэниэл (Daniel, C.) (1959). Use of half-normal plots in interpreting factorial two-level experiments. *Technometrics* **1**, 311—41.

Дэниэл (Daniel, C.) (1960). Locating outliers in factorial experiments. *Technometrics* **2**, 149—56.

Дэниэлс (Daniels, H. E.) (1952). The covering circle of a sample

Жеффруа (Geffroy, J.) (1958). Contribution à la théorie des valeurs extrêmes. Ph. D. Thesis, University of Paris.

Закс и Ивен (Zacks, S. and Even, M.) (1966). The efficiencies in small samples of the maximum likelihood and best unbiased estimators of reliability functions. *J. Amer. Statist. Ass.* **61**, 1033—51.

Зилен (Zelen, M.) (1959) Factorial experiments in life testing. *Technometrics* **1**, 269—88.

Зилен и Деннемиллер (Zelen, M. and Dannemiller, Mary C.) (1961). The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution. *Technometrics* **3**, 29—49.

Изари и Прошан (Esary, J. D. and Proschan, F.) (1963). Relationship between system failure rate and component failure rates. *Technometrics* **5**, 183—9.

Изари, Прошан и Уолкап (Esary, J. D., Proschan, F. and Walkup, D. W.) (1967). Association of random variables, with applications. *Ann. Math. Statist.* **38**. 1466—74.

Ирвин (Irwin, J. O.) (1925). On a criterion for the rejection of outlying observations. *Biometrika* **17**, 238—50.

Ишии и Ямасаки (Ishii, G. and Yamasaki, M.) (1961). A note on the testing of homogeneity of k binomial experiments based on the range. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **12**, 273—8.

Какуллос и Де Чикко (Cacoullos, T. and DeCicco, H.) (1967). On the distribution of the bivariate range. *Technometrics* 9. 476—80.

Капур (Kapur, M. N.) (1957). A property of the optimum solution suggested by Paulson for the k-sample slippage problem for the normal distribution. *Ind. Soc. Agric. Statist.* 9, 179—90.

Карлин С. и Стадден В. (1976). Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. — *М.*: Наука.

Карлин и Труакс (Karlin, S. and Truax, D. R.) (1960). Slippage problems. *Ann. Math. Statist.* **31**, 296—324.

Карлтон (Carlton, A. G.) (1946). Estimating the parameters of a rectangular distribution. *Ann. Math. Statist.* **17**, 355—8.

Квизенберри и Дэйвид (Quesenberry, C. P. and David, H. A.) (1961). Some tests for outliers. *Biometrika* 48, 379—90.

Кемперман (Kemperman, J. H. B.) (1959). Asymptotic expansions for the Smirnov test and for the range of cumulative sums. *Ann. Math. Statist.* **30**, 448—62.

Кендалл (Kendall, M. G.) (1954). Two problems in sets of measurements. *Biometrika* **41**, 560—4.

Кендалл, Стьюарт (1973). Статистические выводы и связи. — *М.*: Наука.

Кенуй (Quenouille, M. H.) (1956). Notes on bias in estimation. *Biometrika* 43, 353—60.

Кимболл (Kimball, A. W.) (1951). On dependent tests of significance in the analysis of variance. *Ann. Math. Statist.* **22**, 600—2.

Кимболл (Kimball, B. F.) (1960). On the choice of plotting positions on probability paper. *J. Amer. Statist. Ass.* 55, 546—60.

Кинг (King, E. P.) (1952). The operating characteristic of the control chart for sample means. *Ann. Math. Statist.* **23**, 384—95.

Кинг (King, E. P.) (1953). On some procedures for the rejection of suspected data. *J. Amer. Statist. Ass.* 48, 531—3.

Кифер (Kiefer, J.) (1967). On Bahadur's representation of sample quantiles. *Ann. Math. Statist.* 38, 1323—42.

Кларк и Уильямс (Clark, C. E. and Williams, G. T.) (1958). Distributions of the members of an ordered sample. *Ann. Math. Statist.* **29**, 862—70.

Козелка (Kozelka, R. M.) (1956). Approximate upper percentage points for extreme values in multinomial sampling. *Ann. Math. Statist.* **27**, 507—12.

Кокрен (Cochran, W. G.) (1941). The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total. *Ann Eugen.* **11**, 47—52.

Кокс (Cox, D. R.) (1948). A note on the asymptotic distribution of range. *Biometrika* 35, 310—15.

Кокс (Cox, D. R.) (1949). The use of range in sequential analysis. *Suppl J R. Statist. Soc* **11**, 101—14.

Кокс (Cox, D. R.) (1954). The mean and coefficient of variation of range in small samples from non-normal populations. *Biometrika* 41 469—81.

Кокс (Cox, D. R.) (1956). A note on the theory of quick tests. *Biometrika* 43, 478—80.

Кокс (Cox, D. R.) (1959). The analysis of experimentally distributed life-times with two types of failure. *J. R. Statist. Soc.* **B21**, 411—21.

Кокс (Cox, D. R.) (1964). Some applications of exponential ordered scores. *J. R. Statist. Soc.* **B26**, 103—10.

Кокс (Cox, D. R.) (1968). Notes on some aspects of regression analysis. *J. R. Statist. Soc.* **A131**, 265—79.

Кокс и Ло (Cox, D. R. and Lauh, Elizabeth) (1967). A note on the graphical analysis of multidimensional contingency tables. *Technometrics* 9, 481—8.

Кокс и Льюис (1969). Статистический анализ последовательностей событий. — М.: Мир.

Кон, Мостеллер, Пратт и Татсуока (Cohn, R., Mosteller, F., Pratt, J. W. and Tatsuoka, M.) (1960). Maximizing the probability that adjacent order statistics of samples from several populations form overlapping intervals. *Ann. Math. Statist.* **31**, 1095—104.

Коновер (Conover, W. J.) (1965). A k-sample model in order statistics. *Ann. Math. Statist.* 36, 1223—35.

Коул (Cole, R. H.) (1951). Relations between moments of order statistics. *Ann. Math. Statist.* 22, 308—10.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1954). Estimation of the Poisson parameter from truncated samples and from censored samples. *J. Amer. Statist. Ass.* 49, 158—68.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1955a). Restriction and selection in samples from bivariate normal distributions. *J. Amer. Statist. Ass.* 50, 884—93.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1955b). Maximum likelihood estimation of the dispersion parameter of a chi-distributed radial error from truncated and censored samples with applications to target analysis. *J. Amer. Statist. Ass.* 50, 1122—35.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1955c). Censored samples from truncated normal distributions. *Biometrika* 42, 516—9.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1957). Restriction and selection in multinormal distributions. *Ann. Math. Statist.* 28, 731—41.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1959). Simplified estimators for the normal distribution when samples are singly censored or truncated. *Technometrics* 1, 217—37.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1961). Tables for maximum likelihood estimates: singly truncated and censored samples. *Technometrics* 3, 535—41.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1963). Progressively censored samples in life testing. *Technometrics* 5, 327—39.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1965). Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples. *Technometrics* 7, 579—88.

Коэн (Cohen, A. C., Jr.) (1966). Life testing and early failure. *Technometrics* 8, 539—45,

К р а м е р (1975). *Математические методы статистики.* — М.: Мир.
К р а с к е л (Kruskal, W. H.) (1960). Some remarks on wild observations. *Technometrics* 2, 1—3.
К р е й г (Craig, C. C.) (1962). On the mean and variance of the smaller of two drawings from a binomial population. *Biometrika* **49**, 566—9.
К р е м (Krem, A.) (1963). On the independence in the limit of extreme and central order statistics. *Publ. Math. Inst. Acad. Sci.* **8**, 469—74.
К р и ш н а й я и Р и з в и (Krishnaiah, P. R. and Rizvi, M. H.) (1966). A note on recurrence relations between expected values of functions of order statistics. *Ann. Math. Statist.* **37**, 733—4.
К р и ш н а й я и Э р м и т э д ж (Krishnaiah, P. R. and Armitage, J. V.) (1964). Distribution of the studentized smallest chi-square, with tables and applications. Aerospace Research Laboratories, 64—218.
К р и ш н а й я и Э р м и т э д ж (Krishnaiah, P. R. and Armitage, J. V.) (1965a). Tables for the distribution of the maximum of correlated chi-square variates with one degree of freedom. Aerospace Research Laboratories, 65—136.
К р и ш н а й я и Э р м и т э д ж (Krishnaiah, P. R. and Armitage, J. V.) (1965b). Percentage points of the multivariate t distribution. Aerospace Research Laboratories, 65—199.
К р о у и С и д д и к и (Crow, E. L. and Siddiqui, M. M.) (1967). Robust estimation of location. *J. Amer. Statist. Ass.* **62**, 353—89.
К у д о (Kudô, A.) (1956a). On the testing of outlying observations. *Sankhyā* **17**, 67—76.
К у д о (Kudô, A.) (1956b). On the invariant multiple decision procedures. *Bull. Math. Statist.* **6**, 57—68.
К у д о (Kudô, A.) (1956c). Tables for studentization. *Sankhyā* **18**, 163—6.
К у д о (Kudô, A.) (1957). The extreme value in a multivariate normal sample. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.* (A) **11**, 143—56.
К у н и а с (Kounas, E. G.) (1968). Bounds for the probability of a union of events, with applications. *Ann. Math. Statist.* **39**, 2154—8.
К у р н о у и Д а н н е т (Curnow, R. N. and Dunnett, C. W.) (1962). The numerical evaluation of certain multivariate normal integrals *Ann. Math. Statist.* **33**, 571—9.
К у р ц, Л и н к, Т ь ю к и и У о л л е с (Kurtz, T. E., Link, R. F., Tukey, J. W. and Wallace, D. L.) (1965a). Short-cut multiple comparisons for balanced single and double classifications, Part 1: Results. *Technometrics* **7**, 95—161.
К у р ц, Л и н к, Т ь ю к и и У о л л е с (Kurtz, T. E., Link, R. F., Tukey, J. W. and Wallace, D. L.) (1965b). Short-cut multiple comparisons for balanced single and double classifications, Part 2: Derivations and approximations. *Biometrika* **52**, 485—98.
К у р ц, Л и н к, Т ь ю к и и У о л л е с (Kurtz, T. E., Link, R. F., Tukey, J. W. and Wallace, D. L.) (1966). Correlation or ranges of correlated deviates. *Biometrika* **53**, 191—7.
К х а т р и (Khatri, C. G.) (1960). On testing the equality of parameters in k rectangular populations. *J. Amer. Statist. Ass.* **55**, 144—7.
К х а т р и (Khatri, C. G.) (1962). Distributions of order statistics for discrete case. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **14**, 167—71.

Кхатри (Khatri, C. G.) (1965). On the distributions of certain statistics derived by the union-intersection principle for the parameters of k rectangular populations. *J. Ind. Statist. Ass.* 3, 158—64.

Кэдуэлл (Cadwell, J. H.) (1952). The distributions of quantiles of small samples. *Biometrika* 39, 207—11.

Кэдуэлл (Cadwell, J. H.) (1953a). The distribution of quasi-ranges in samples from a normal population. *Ann. Math. Statist.* 24, 603—13.

Кэдуэлл (Cadwell, J. H.) (1953b). Approximating to the distributions of measures of dispersion by a power of χ^2. *Biometrika* 40, 336—46.

Кэдуэлл (Cadwell, J. H.) (1954). The probability integral of range for samples from a symmetrical unimodal population. *Ann. Math. Statist.* 25, 803—6.

Кэйб (Kabe, D. G.) (1968). Some distribution problems of order statistics from exponential and power function distributions. *Canad. Math. Bull.* 11, 263—74.

Ламперти (Lamperti, J.) (1964). On extreme order statistics. *Ann. Math. Statist.* 35, 1726—37.

Лахенбрух и Дэйвид (Lachenbruch, P. A. and David, H. A.) (1968). The non-central distribution of range and studentized range in normal samples. (Abstract) *Ann. Math. Statist.* 39, 1092.

Леман (1964). Проверка статистических гипотез.—М.: Наука.

Леман (Lehmann, E. L.) (1966). Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist.* 37, 1137—53.

Ламберт (Lambert, J. A.) (1964). Estimation of parameters in the three-parameter log-normal distribution. *Aust. J. Statist.* 6, 29—32.

Лентнер и Бюхлер (Lentner, M. M. and Buchler, R. J.) (1963). Some inferences about gamma parameters with an application to a reliability problem. *J. Amer. Statist. Ass.* 58, 670—7.

Леони, Джаячандран и Эйзенштат (Leone, F. C., Jayachandran, T. and Eisenstat, S.) (1967). A study of robust estimators. *Technometrics* 9, 652—60.

Лесли и Браун (Leslie, R. T. and Brown, B. M.) (1966). Use of range in testing heterogeneity of variance. *Biometrika* 53, 221—7.

Либлейн (Lieblein, J.) (1952). Properties of certain statistics involving the closest pair in a sample of three observations. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 48, 255—68.

Либлейн (Lieblein, J.) (1954a). A new method of analyzing extreme-value data. Nat. Advisory Comm. Aeronaut. Tech. Note 3053.

Либлейн (Lieblein, J.) (1954b). Two early papers on the relation between extreme values and tensile strength. *Biometrika* 41, 559—60.

Либлейн (Lieblein, J.) (1955). On moments of order statistics from the Weibull distribution. *Ann. Math. Statist.* 26, 330—3.

Либлейн (Lieblein, J.) (1962). The closest two out of three observations (русский перевод в СГ, 122—127).

Либлейн и Зилен (Lieblein, J. and Zelen, M.) (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep-groove ball bearings. *J Res. Nat. Bur. Stand.* 57, 273—316,

Либлейн и Солцер (Lieblein, J. and Salzer, H. E.) (1957). Table of the first moment of ranked extremes. *J. Res, Nat, Bur, Stand.* 59, 203—6.

Ликеш (Likeš, J.) (1962). On the distribution of certain linear functions of oıdered sample from exponential population. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **13**, 225—30.
Ликеш (Likeš, J.) (1967). Distributions of some statistics in samples from exponential and power-function populations. *J. Amer. Statist. Ass.* **62**, 259—71.
Линк (Link, R. F.) (1950). The sampling distribution of the ratio of two ranges from independent samples. *Ann. Math. Statist.* **21**, 112—6.
Ллойд (Lloyd, E. H.) (1952). Least-squares estimation of location and scale parameters using order statistics. *Biometrika* **39**, 88—95.
Лойнес (Loynes, R. M.) (1965). Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist* **36**, 993—9.
Лойнес (Loynes, R. M.) (1966). Some aspects of the estimation of quantiles. *J. R. Statist. Soc.* **B28**, 497—512.
Лорд (Lord, E.) (1947). The use of range in place of standard deviation in the t test. *Biometrika* **34**, 41—67; Correction **39**, 442.
Лорд (Lord, E.) (1950). Power of the modified t test (u test) based on range. *Biometrika* **37**, 64—77.
Лоурент (Laurent, A. G.) (1963). Conditional distribution of order statistics and distribution of the reduced i-th order statistic of the exponential model. *Ann. Math. Statist.* **34**, 652—7.
Людвиг (Ludwig, O.) (1959). Ungleichungen für Extremwerte und andere Ranggrössen in Anwendung auf biometrische Pribleme. *Biom Zeit.* **1**, 203—9.
Людвиг (Ludwig, O.) (1960). Uber Erwartungswerte und Varianzen von Ranggrössen in kleinen Stichproben. *Metrika* **3**, 218—33.
Магуайр, Пирсон и Уинн (Maguire, B. A., Pearson, E. S. and Wynn, A. H. A.) (1952). The time intervals between industrial accidents. *Biometrika* **39**, 168—80.
Магуайр, Пирсон и Уинн (Maguire, B. A., Pearson, E. S. and Wynn, A. H. A.) (1953). Further notes on the analysis of accident data. *Biometrika* **40**, 213—6.
Мадански (Madansky, A.) (1962). More on length of confidence intervals. *J. Amer. Statist. Ass.* **57**, 586—9.
Маккарти (McCarthy, P. J.) (1965). Stratified sampling and distribution-free confidence intervals for a median. *J. Amer. Statist. Ass.* **60**, 772—83.
Маккей (McKay, A. T.) (1935). The distribution of the difference between the extreme observation and the sample mean in samples of n from a normal universe. *Biometrika* **27**, 466—71.
Маккей и Пирсон (McKay, A. T. and Pearson, E. S.) (1933). A note on the distribution of range in samples of n. *Biometrika* **25**, 415—20.
Маккиннон (MacKinnon, W. J.) (1964). Table for both the sign test and distribution-free confidence intervals of the median for sample sizes to 1000. *J. Amer. Statist, Ass.* **59**, 935—56.
Маккорд (McCord, J R.) (1964). On asymptotic moments of extreme statistics. *Ann. Math. Statist.* **35**, 1738—45.
Маккул (McCool, J. I.) (1965). The construction of good linear unbiased estimates from the best linear estimates for a smaller sample size. *Technometrics* **7**, 543—52.

Макмиллан (McMillan, R. G.) (1968). Tests for one or two outliers. Ph. D. Thesis, North Carolina State University.

Малик (Malik, H. J.) (1966). Exact moments of order statistics from the Pareto distribution. Skand. Aktuarietidskr. 1966, 144—57.

Малик (Malik, H. J.) (1967). Exact moments of order statistics from a power-function distribution. Skand. Aktuarietidskr. 1967, 64—9.

Мальмквист (Malmquist, S.) (1950). On a property of order statistics from a rectangular distribution. Skand. Aktuarietidskr. 33, 214—22.

Манн (Mann, Nancy R.) (1967a). Tables for obtaining the best linear invariant estimates of parameters of the Weibull distribution. *Technometrics* 9, 629—45.

Манн (Mann, Nancy R.) (1967b). Results on location and scale parameter estimation with application to the extreme-value distribution. Aerospace Research Laboratories 67—0023.

Манн (Mann, Nancy R.) (1968). Point and interval estimation procedures for the two-parameter Weibull and extreme-value distributions. *Technometrics* 10, 231—56.

Марголин и Винокур (Margolin, B. H. and Winokur, H. S., Jr.) (1967). Exact moments of the order statistics of the geometric distribution and their relation to inverse sampling and reliability of redundant systems. *J. Amer. Statist. Ass.* 62, 915—25.

Мардья (Mardia, K. V.) (1964a). Asymptotic independence of bivariate extremes. *Calcutta Statist. Ass. Bull.* 13, 172—8.

Мардья (Mardia, K. V. (1964b). Some results on the order statistics of the multivariate normal and Pareto type I populations. *Ann. Math. Statist.* 35, 1815—8.

Мардья (Mapdia, K. V.) (1967). Correlation of the ranges of correlated samples. *Biometrika* 54, 529—39.

Мариц и Манро (Maritz, J. S. and Munro, A. H.) (1967). On the use of the generalized extreme-value distribution in estimating extreme percentiles. *Biometrics* 23, 79—103.

Мейзлер и Вейсман (Mejzler, D. and Weissman, I.) (1969). On some results of N. V. Smirnov concerning limit distributions for variational series. *Ann. Math. Statist.* 40, 480—91.

Меллоус (Mallows, C. L.) (1968). An inequality involving multinomial probabilities. *Biometrika* 55, 422—4.

Мельник (Melnick, E. L.) (1964). Moments of ranked Poisson variates. M. S. Thesis, Virginia Polytechnic Institute.

Менденхолл (Mendenhall, W.) (1958). A bibliography on life testing and related topics. *Biometrika* 45, 521—43.

Менон (Menon, M. V.) (1963). Estimation of the shape and scale parameters of the Weibull distribution. *Technometrics* 5, 175—82.

Ментел (Mantel, N.) (1951). Rapid estimation of standard errors of means for small samples. *Amer. Statist.* 5, No. 14, 26—7.

Ментел и Пастернак (Mantel, N. and Pasternak, B. S.) (1966). Light bulb statistics. *J. Amer. Statist. Ass.* 61, 633—9.

Мерти (Murty, V. N.) (1955). The distribution of the quotient of maximum values in samples from a rectangular distribution. *J. Amer.* Statist. *Ass.* 50, 1136—41.

Мерфи (Murphy, R. B.) (1948). Non-parametric tolerance limits. *Ann. Math. Statist.* 19, 581—9.

Мерфи (*Murphy, R. B.*) (1951). On tests for outlying observations. Ph. D. Thesis, Princeton University.

Мид (*Mead, R.*) (1966). A quick method of estimating the standard deviation. *Biometrika* **53**, 559—64.

Миллер (*Miller, R. G., Jr.*) (1960). Early failures in life testing. *J. Amer. Statist. Ass.* **55**, 491—502.

Миллер (*Miller, R. G., Jr.*) (1967). Simultaneous Statistical Inference. McGraw-Hill, New York.

Миллер (*Miller, R. G., Jr.*) (1968). Jackknifing variances. *Ann. Math. Statist.* **39**, 567—82.

Митра (*Mitra, S. K.*) (1957). Tables for tolerance limits for a normal population based on sample mean and range or mean range. *J. Amer. Statist. Ass.* **52**, 88—94.

Моран (*Moran, P. A. P.*) (1964). On the range of cumulative sums. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **16**, 109—12.

Моранда (*Moranda, P. B.*) (1959). Comparison of estimates of circular probable error. *J. Amer. Statist. Ass.* **54**, 794—800.

Моригути (*Moriguti, S.*) (1951). Extremal properties of extreme value distributions. *Ann. Math. Statist.* **22**, 523—36.

Моригути (*Moriguti, S.*) (1953a). A modification of Schwarz's inequality with applications to distributions. *Ann. Math. Statist.* **24**, 107—13.

Моригути (*Moriguti, S.*) (1953b). A note on Hartley's formula of studentization. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE* **2**, 99—103.

Моригути (*Moriguti, S.*) (1954). Bounds for second moments of the sample range. *Rep. Stat. Appl. Res., JUSE* **3**, 57—64.

Моррисон и Дэйвид (*Morrison, D. F.* and *David, H. A.*) (1960). The life distribution and reliability of a system with spare components. *Ann. Math. Statist.* **31**, 1084—94.

Моррисон и Тобиас (*Morrison, M.* and *Tobias, F.*) (1965). Some statistical characteristics of a peak to average ratio. *Technometrics* **7**, 379—85.

Мостеллер (*Mosteller, F.*) (1946). On some useful «inefficient» statistics. *Ann. Math. Statist.* **17**, 377—408.

Мостеллер (*Mosteller, F.*) (1948). A k-sample slippage test for an extreme population. *Ann. Math. Statist.* **19**, 58—65.

остеллер и Тьюки (*Mosteller, F.* and *Tukey, J. W.*) (1950). Significance levels for a k-sample slippage test. *Ann. Math. Statist.* **21**, 120—3.

Мур (*Moore, D. S.*) (1968). An elementary proof of asymptotic normality of linear functions of order statistics. *Ann. Math. Statist.* **39**, 263—5.

Мур (*Moore, P. G.*) (1957). The two-sample t-test based on range. *Biometrika* **44**, 482—5.

. айт (*Knight, W.*) (1963). The use of the range in place of the standard deviation in Stein's test. *Ann. Math. Statist.* **34**, 346—7.

Наус (*Naus, J. I.*) (1966). Some probabilities, expectations and variances for the size of largest clusters and smallest intervals. *J. Amer. Statist. Ass.* **61**, 1191—9.

Нейман и Пирсон (*Neyman, J.* and *Pearson, E. S.*) (1928). On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. I. *Biometrika* **20A**, 175—240.

Нетер (Noether, G. E.) (1955). Use of the range instead of the standard deviation. *J. Amer. Statist. Ass.* 50, 1040—55.

Ньюэлл (Newell, G. F.) (1964). Asymptotic extremes for m-dependent random variables. *Ann. Math. Statist.* 35, 1322—5.

Нэир (Nair, K. R.) (1948). The distribution of the extreme deviate from the sample mean and its studentized form. *Biometrika* 35, 118—44.

Нэир (Nair, K. R.) (1950). Efficiencies of certain linear systematic statistics for estimating dispersion from normal samples. *Biometrika* 37, 182—3.

Нэир (Nair, U. S.) (1936). The standard error of Gini's mean difference. *Biometrika* 28, 428—36.

Огава (Ogawa, J.) (1951) Contributions to the theory of systematic statistics. I. *Osaka Math. J.* 3, 175—213.

Огава (1970) — в книге Сархана и Гринберга, 1970. (1) Оценки параметров расположения и рассеяния по выборочным квантилям, стр. 54—60. (2) Оптимальные уровни для оценивания параметров нормального распределения, стр. 249—258. (3) Проверка гипотез с помощью выборочных квантилей, стр. 266—273. (4) Оптимальные уровни экспоненциального распределения, стр. 334—338. (5) Проверка гипотез и доверительные интервалы, стр. 338—343.

Одэ (Odeh, R. E.) (1967). The distribution of the maximum sum of ranks. *Technometrics* 9, 271—8.

Оуэн Д. Б. (1966). Сборник статистических таблиц, ВЦ АН СССР, Москва.

Оуэн и Стек (Owen, D. B. and Steck, G. P.) (1962). Moments of order statistics from the equicorrelated multivariate normal distribution. *Ann. Math. Statist.* 33, 1286—91.

Пайк (Pyke, R.) (1965). Spacings. *J. R. Statist. Soc.* **B27**, 395—436. Discussion: 437—49.

Пайк (Pike, M. C.) (1966). A method of analysis of a certain class of experiments in carcinogenesis. *Biometrika* 22, 142—61.

Патнайк (Patnaik, P. B.) (1950). The use of mean range as an estimator of variance in statistical tests. *Biometrika* 37, 78—87.

Петтигру и Молер (Pettigrew, H. M. and Mohler, W. C.) (1967). A rapid test for the Poisson distribution using the range. *Biometrica* 23, 685—92.

Пикендс (Pickands, J., III) (1967a). Maxima of stationary Gaussian processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 7, 190—223.

Пикендс (Pickands, J., III) (1967b). Sample sequences of maxima *Ann. Math. Statist.* 38, 1570—4.

Пикендс (Pickands, J., III) (1968). Moment convergence of sample extremes. *Ann. Math. Statist.* 39, 881—9.

Пиллаи (Pillai, K. C. S.) (1950). On the distributions of midrange and semi-range in samples from a normal population. *Ann. Math Statist.* 21, 100—5.

Пиллаи и Рамачандран (Pillai, K. C. S. and Ramachandran, K. V.) (1954). On the distribution of the ratio of the i-th observation in an ordered sample from a normal population to an independent estimate of the standard deviation. *Ann. Math. Statist.* 25, 565—72.

Пирсон (Pearson, E. S.) (1929). The distribution of frequency constants in small samples from non-normal symmetrical and skew populations. *Biometrika* **21**, 280—6.

Пирсон (Pearson, E. S.) (1950). Some notes on the use of range. *Biometrika* 37, 88—92.

Пирсон (Pearson, E. S.) (1952). Comparison of two approximations to the distribution of the range in small samples from normal populations. *Biometrika* 39, 130—6.

Пирсон (Pearson, E. S.) (1966). Alternative tests for heterogeneity of variance; some Monte Carlo results. *Biometrika* 53, 229—34.

Пирсон и Адьянтхайя (Pearson, E. S. and Adyanthaya, N. K.) (1928). The distribution of frequency constants in small samples from symmetrical populations. *Biometrika* 20A, 356—60.

Пирсон и Чандра Секар (Pearson, E. S. and Chandra Sekar, C.) (1936). The efficiency of statistical tools and a criterion for the rejection of outlying observations. *Biometrika* **28**, 308—20.

Пирсон и Хэйнес (Pearson, E. S. and Haines, Joan) (1935). The use of range in place of standard deviation in small samples. *Suppl. J. R. Statist. Soc.* **2**, 83—98.

Пирсон и Хартли (Pearson, E. S. and Hartley, H. O.) (1942). The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population. *Biometrika* **32**, 301—10.

Пирсон и Хартли (Pearson, E. S. and Hartley, H. O.) (1943). Tables of the probability integral of the studentized range. *Biometrika* 33, 89—99.

Пирсон и Хартли (Pearson, E. S. and Hartley, H. O.) (1966). Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1. 3rd Ed., Cambridge University Press.

Пирсон (Pearson, K.) (1902). Note on Francis Galton's difference problem. *Biometrika* **1**, 390—9.

Пирсон (Pearson, K.) (1920). On the probable errors of frequency constants. III. *Biometrika* **13**, 113—32.

Пирсон (Pearson, K.) (1934). Tables of the Incomplete B-function. Cambridge University Press.

Пирсон и Пирсон (Pearson, K. and Pearson, M. V.) (1931). On the mean character and variance of a ranked individual and on the mean and variance of the intervals between ranked individuals. I (1931): Symmetrical distributions (normal and rectangular). *Biometrika* 23, 364—97. II (1932): Case of certain skew curves, *Biometrika* **24**, 203—79.

Питмен (Pitman, E, J. G.) (1936). Sufficient statistics and intrinsic accuracy. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 32, 567—79.

Плэкетт (Plackett, R. L.) (1947). Limits of the ratio of mean range to standard deviation. *Biometrika* 34, 120—2.

Плэкетт (Plackett, R. L.) (1958). Linear estimation from censored data. *Ann. Math. Statist.* 29, 131—42.

Полсон (Paulson, E.) (1952). An optimum solution to the k-sample slippage problem for the normal distribution. *Ann. Math. Statist.* 23, 610—6.

Полсон (Paulson, E.) (1961). A non-parametric solution for the k-sample slippage problem. In: Solomon, H. (Ed.), Studies in Item Analysis and Prediction. 233—8. Stanford University Press.

Прошан и Пайк (Proschan, F. and Pyke, R.) (1967). Tests for monotone failure rate. Proc. 5th Berkeley Symp. III, 293—312.

Пфанцагль (Pfanzagl, J.) (1959). Ein kombiniertes Test & Klassifikations-Problem. *Metrika* 2, 11—45.

Райдер (Rider, P. R.) (1951). The distribution of the quotient of ranges in samples from a rectangular population. *J. Amer. Statist. Ass.* 46, 502—7.

Райдер (Rider, P. R.) (1955). The distribution of the product of maximum values in samples from a rectangular distribution. *J. Amer. Statist. Ass.* 51, 1142—3.

Райдер (Rider, P. R.) (1957). The midrange of a sample as an estimator of the population midrange. *J. Amer. Statist. Ass.* 52, 537—42.

Райдер (Rider, P. R.) (1960). Variance of the median of samples from a Cauchy distribution. *J. Amer. Statist. Ass.* 55, 322—3.

Рамачандран и Кхатри (Ramachandran, K. V. and Khatri, C. G.) (1957). On a decision procedure based on the Tukey statistic. *Ann. Math. Statist.* 28, 802—6.

Рао (Rao, M. M.) (1962). Theory of order statistics. *Math. Annalen* 147, 298—312.

Рахман (Rahman, N. A.) (1964). Some generalisations of the distributions of product statistics arising from rectangular populations. *J. Amer. Statist. Ass.* 59, 557—63.

Раштон (Rashton, S.) (1952). On sequential tests of the equality of variances of two normal populations with known means. *Sankhyā* 12, 63—78.

Реньи (Rényi, A.) (1953). On the theory of order statistics. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4, 191—231.

Рихтер (Richter, W.) (1964). Ein zentraler Grenzwertsatz für das Maximum einer zufälligen Anzahl unabhängiger Zufallsgrössen. *Wiss. Zeit. Tech. Univ.* Dresden 13, 1343—6.

Роббинс (Robbins, H.) (1944). On distribution-free tolerance limits in random sampling. *Ann. Math. Statist.* 15, 214—6.

Робсон и Уитлок (Robson, D. S. and Whitlock, J. H.) (1964). Estimation of a truncation point. *Biometrika* 51, 33—9.

Розенгард (Rosengard, A.) (1964a). Indépendance limite uniforme de la moyenne et des valeurs extrêmes d'un échantillon. *C. R. Acad. Sci.* Paris 258, 5786—8.

Розенгард (Rosengard, A.) (1964b). Indépendance limite uniforme d'un quantile et des valeurs extrêmes d'un échantillon. *C. R. Acad. Sci.* Paris 259, 2955—6.

Романовский (Romanovsky, V.) (1933). On a property of the mean ranges in samples from a normal population and on some integrals of Prof. T. Hojo. *Biometrika* 25, 195—7.

Россберг (Rossberg, H. J.) (1963). Über das asymptotische Verhalten der Rand- und Zentralglieder einer Variationsreihe. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 8, 463—8.

Россберг (Rossberg, H. J.) (1965a). Über die stochastische Unabhängigkeit gewisser Funktionen von Ranggrössen. *Math. Nachr.* 28, 157.

Россберг (Rossberg, H. J.) (1965b). Die asymptotische Unabhängigkeit der kleinsten und grössten Werte einer Stichprobe vom Stichprobenmittel. *Math. Nachr.* 28, 305—18.

Ротенберг, Фишер и Тиланус (Rothenberg, T. J., Fisher, F. M. and Tilanus, C. B.) (1964). A note on estimation from a Cauchy sample. *J. Amer. Statist. Ass.* 59, 460—3.
Рубен (Ruben, H.) (1954). On the moments of order statistics in samples from normal populations. *Biometrika* **41**, 200—27.
Рубен (Ruben, H.) (1956a). On the sum of squares of normal scores. *Biometrika* 43, 456—8. Correction **52**, 669.
Рубен (Ruben, H.) (1956b). On the moments of the range and product moments of extreme order statistics in normal samples. *Biometrika* 43, 458—60.
Рустаги (Rustagi, J. S.) (1957). On minimizing and maximizing a certain integral with statistical applications. *Ann. Math. Statist.* **28**, 309—28.
Рутемиллер (Rutemiller, H. C.) (1966). Point estimation of reliability of a system comprised of k elements from the same exponential distribution. *J. Amer. Statist. Ass.* **61**, 1029—32.
Салех (Saleh, A. K. M. E.) (1967). Determination of the exact optimum order statistics for estimating the parameters of the exponential distribution from censored samples. *Technometrics* 9, 279—92.
Салех и Али (Saleh, A. K. M. E. and Ali, M. M.) (1966). Asymptotic optimum quantiles for the estimation of the parameters of the negative exponential distribution. *Ann. Math. Statist.* **37**, 143—51.
Сархан (Sarhan, A. E.) (1954). Estimation of the mean and standard deviation by order statistics. *Ann. Math. Statist.* **25**, 317—28.
Сархан (Sarhan, A. E.) (1955). Estimation of the mean and standard deviation by order statistics, Part III. *Ann. Math. Statist.* **26**, 576—92.
Сархан и Гринберг (Sarhan, A. E. and Greenberg, B. G.) (1956). Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples. Part I: The normal distribution up to samples of size 10. *Ann. Math. Statist.* **27**. 427—51: Correction **40**, 325.
Сархан и Гринберг (Sarhan, A. E. and Greenberg, B. G.) (1957). Tables for best linear estimates by order statistics of the parameters of single exponential distributions from singly and doubly censored samples. *J. Amer. Statist. Ass.* **52**, 58—87.
Сархан и Гринберг (Sarhan, A. E. and Greenberg, B. G.) (1959). Estimation of location and scale parameters for the rectangular population from censored samples. *J. R. Statist. Soc.* **B21**, 356—63.
Сархан и Гринберг (1970). Введение в теорию порядковых статистик, — М.: Статистика (перевод под редакцией А. Я. Боярского).
Сатхе и Варде (Sathe, Y. S. and Varde, S. D.) (1969). Minimum variance unbiased estimation of reliability for the truncated exponential distribution. *Technometrics* **11**, 609—12.
Свами (Swamy, P. S.) (1962). On the amount of information supplied by censored samples of grouped observations in the estimation of statistical parameters. *Biometrika* 49, 245—9.
Сен (Sen, P. K.) (1959). On the moments of the sample quantiles. *Calcutta Statist. Ass. Bull.* **9**, 1—19.

С е н (Sen, P. K.) (1961). A note on the large-sample behaviour of extreme sample values from distribution with finite end-points. *Calcutta Statist. Ass. Bull.* **10**, 106—15.

С е н (Sen, P. K.) (1964). On stochastic convergence of the sample extreme values from distributions with infinite extremities. *J. Ind. Soc. Agric. Statist.* **16**, 189—201.

С е н (Sen, P. K.) (1968). Asymptotic normality of sample quantiles for m-dependent processes. *Ann. Math. Statist.* **39**, 1724—30.

С е р н д а л (Särndal, C. E.) (1962). Information from Censored Samples. Almqvist and Wiksell, Stockholm.

С е р н д а л (Särndal, C. E.) (1964). Estimation of the parameters of the gamma distribution by sample quantiles. *Technometrics* **6**, 405—14.

С е т (Seth, G. R.) (1950). On the distribution of the two closest among a set of three observations. *Ann. Math. Statist.* **21**, 298—301.

С и д д и к и (Siddiqui, M. M.) (1960). Distribution of quantiles in samples from a bivariate population. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **64B**, 145—50.

С и д д и к и (Siddiqui, M. M.) (1962). Approximations to the moments of the sample median. *Ann. Math. Statist.* **33**, 157—68.

С и д д и к и и Р а д ж а н а н д а н а н (Siddiqui, M. M. and Raghunandanan, K.) (1967). Asymptotically robust estimators of location. *J. Amer. Statist. Ass.* **62**, 950—3.

С и л л и т о (Sillitto, G. P.) (1951). Interrelations between certain linear systematic statistics of samples from any continuous population. *Biometrika.* **38**, 377—82.

С и л л и т о (Sillitto, G. P.) (1964). Some relations between expectations of order statistics in samples of different sizes. *Biometrika* **51** 259—62.

С и н г х (Singh, C.) (1967). On the extreme values and range of samples from non-normal populations. *Biometrika* **54**, 541—50.

С и н г х (Singh, N.) (1960). Estimation of parameters of a multivariate normal population from truncated and censored samples. *J. R. Statist. Soc.* **B22**, 307—11.

С и о т а н и (Siotani, M.) (1957). Order statistics for discrete case with a numerical application to the binomial distribution. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **8**, 95—104.

С и о т а н и (Siotani, M.) (1959). The extreme value of the generalized distances of the individual points in the multivariate normal sample. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **10**, 183—208.

С и о т а н и и О з а в а (Siotani, M. and Ozawa, M.) (1958). Tables for testing the homogeneity of k independent binomial experiments on a certain event based on the range. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo **10**, 47—63.

С л е п я н (Slepian, D.) (1962). The one-sided barrier problem for Gaussian noise. *Bell System Tech. J.* **41**, 463—501.

С м и р н о в Н. В.[1]) (1949). Предельные законы распределения для членов вариационного ряда, Труды Математического института им. В. А. Стеклова **25**, стр. 5—59.

[1]) Эта работа имеется в монографии Н. В. Смирнова «Теория вероятностей и математическая статистика, Избранные труды», 1970, «Наука», Москва.

Смирнов Н. В.[1] (1966). О сходимости к нормальному закону распределений членов вариационного ряда, Известия АН Уз. ССР, № 3, стр. 24—32.
Смирнов Н. В.[1] (1967). Некоторые замечания о предельных законах для членов вариационного ряда, Теория вероятностей и ее применения XII, № 2, стр. 391—392.
Смит и Хартли (Smith, W. B. and Hartley, H. O.) (1968). A note on the correlation of ranges in correlated normal samples. *Biometrika* 55, 595—7.
Со (Saw, J. G.) (1959). Estimation of the normal population parameters given a singly censored sample. *Biometrika* 46, 150—9.
Со (Saw, J. G.) (1960). A note on the error after a number of terms of the David—Johnson series for the expected values of normal order statistics. *Biometrika* 47, 79—86.
Со (Saw, J. G.) (1961). The bias of the maximum likelihood estimates of the location and scale parameters given a type II censored normal sample. *Biometrika* 48, 448—51.
Со и Чоу (Saw, J. G. and Chow, B.) (1966). The curve through the expected values of ordered variates and the sum of squares of normal scores. *Biometrika* 53, 252—5.
Солари и Анис (Solari, M. E. and Anis, A. A.) (1957). The mean and variance of the maximum of the adjusted partial sums of a finite number of independent normal variates. *Ann. Math. Statist.* 28, 706—16.
Сомервилл (Somerville, P. N.) (1958). Tables for obtaining non-parametric tolerance limits. *Ann. Math. Statist.* 29, 599—601.
Сондерс (Saunders, S. C.) (1963). On the sample size and coverage for the Jirina sequential procedure. *Ann. Math. Statist.* 34, 847—56.
Сондерс (Saunders, S. C.) (1968). On the determination of a safe life for distributions classified by failure rate. *Technometrics* **10**, 361—77.
Стауде (Staude, H.) (1959). Abkürzung des Range—Verfahrens von H. O. Hartley zur Auswertung von Blockversuchen. *Biom. Zeit.* **1**, 261—75.
Стивенс (Stevens, W. L.) (1939). Solution to a geometrical problem in probability. *Ann. Eugen.* 9, 315—20.
Стиглер (Stigler, S. M.) (1969). Linear functions of order statistics. *Ann. Math. Statist.* 40, 770—88.
Стьюарт (Stuart, A.) (1958). Equally correlated variates and the multinormal integral. *J. R. Statist. Soc.* **B20**, 373—8.
Сугиюра (Sugiura, N.) (1962). On the orthogonal inverse expansion with an application to the moments of order statistics. *Osaka Math. J.* **14**, 253—63.
Сугиюра (Sugiura, N.) (1964). The bivariate orthogonal inverse expansion and the moments of order statistics. *Osaka J. Math.* **1**, 45—59.

[1] См. сноску на стр. 320.

Сукхатме (Sukhatme, P. V.) (1937). Tests of significance for samples of the χ^2 population with two degrees of freedom. *Ann. Eugen.* 8, 52—6.
Тайкью (Tiku, M. L.) (1967a). Estimating the mean and standard deviation from a censored normal sample. *Biometrika* 54, 155—65.
Тайкью (Tiku, M. L.) (1967b). A note on estimating the location and scale parameters of the exponential distribution from a censored sample. *Aust. J. Statist.* 9, 49—54.
Тайкью (Tiku, M. L.) (1968a). Estimating the parameters of log-normal distribution from censored samples. *J. Amer. Statist. Ass.* 63, 134—40.
Тайкью (Tiku, M. L.) (1968b). Estimating the parameters of normal and logistic distributions from censored samples. *Aust. J. Statist.* 10, 64—74.
Тайкью (Tiku, M. L.) (1968c). Estimating the mean and standard deviation from progressively censored normal samples. *J. Ind. Soc. Agric. Statist.* 20, 20—5.
Такач (Takacs, L.) (1967). On the method of inclusion and exclusion. *J. Amer. Statist. Ass.* 62, 102—13.
Тартер и Кларк (Tarter, M. E. and Clark, V. A.) (1965). Properties of the median and other order statistics of logistic variates. *Ann. Math. Statist.* 36, 1779—86.
Тейкроу (Teichroew, D.) (1955). Probabilities associated with order statistics in samples from two normal populations with equal variance. Army Chemical Center, Maryland, Chemical Corps Engineering Agency.
Тейкроу (Teichroew, D.) (1956). Tables of expected values of order statistics and products of order statistics for samples of size twenty and less from the normal distribution. *Ann. Math. Statist.* 27, 410—26.
Тигпен (Thigpen, C. C.) (1961). Distribution of the largest observation in normal samples under non-standard conditions. Ph. D. Thesis, Virginia Polytechnic Institute.
Типпет (Tippett, L. H. C.) (1925). On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population. *Biometrika* 17, 364—87.
Томпсон и Уилки (Thompson, W. A., Jr., and Willke, T. A.) (1963). On an extreme rank sum test for outliers. *Biometrika* 50, 375—83.
Томпсон (Thompson, W. R.) (1936). On confidence ranges for the median and other expectation distributions for populations of unknown distribution form. *Ann. Math. Statist.* 7, 122—8.
Томсон (Thomson, G. W.) (1955). Bounds for the ratio of range to standard deviation. *Biometrika* 42, 268—9.
Труакс (Truax, D. R.) (1953). An optimum slippage test for the variances of k normal distributions. *Ann. Math. Statist.* 24, 669—74.
Тьюки (Tukey, J. W.) (1947). Non-parametric estimation. II: Statistically equivalent blocks and tolerance regions — the continuous case. *Ann. Math. Statist.* 18, 529—39.
Тьюки (Tukey, J. W.) (1949). The simplest signed-rank tests. Memo Rep. 17, Statist. Res. Group, Princeton University (duplicated).

Тьюки (Tukey, J. W.) (1955). Interpolations and approximations related to the normal range. *Biometrika* 42, 480—5.

Тьюки (Tukey, J. W.) (1958). A problem of Berkson, and minimum variance orderly estimators. *Ann. Math. Statist.* 29, 588—92.

Тьюки (Tukey, J. W.) (1960). A survey of sampling from contaminated distributions. In: Contributions to Probability and Statistics, Olkin et al. (Eds.), 448—85. Stanford University Press.

Тьюки (Tukey, J. W.) (1962). The future of data analysis. *Ann. Math. Statist.* 33, 1—67.

Тьюки и Маклафлин (Tukey, J. W. and McLaughlin, D. H.) (1963). Less vulnerable confidence and significance procedures for location based on a single sample: trimming Winsorization, 1. *Sankhyā* A25, 331—52.

Тьяго де Оливейра (Tiago de Oliveira, J.) (1963). Structure theory of bivariate extremes; extensions. *Estudos de Mathematica, Estatistica Econometria* 7, 165—95.

Тэнис (Tanis, E. A.) (1964). Linear forms in the order statistics from an exponential distribution. *Ann. Math. Statist.* 35, 270—6.

Уайт (White, J. S.) (1964). Least squares unbiased censored linear estimation for the log Weibull (extreme value) distribution. *Indust. Math.* 14, 21—60.

Уайт (White, J. S.) (1969). The moments of log-Weibull order statistics. *Technometrics* 11, 373—86.

Узгерен (Uzgören, Nakibe T.) (1954). The asymptotic development of the distribution of the extreme values of a sample. In: Studies in Mathematics and Mechanics Presented to Richard von Mises. Academic Press, New York.

Уилк и Гнанадесикан (Wilk, M. B. and Gnanadesikan, R.) (1968). Probability plotting methods for the analysis of data. *Biometrika* 55, 1—17.

Уилк, Гнанадесикан и Ло (Wilk, M. B., Gnanadesikan, R. and Lauh, Elizabeth) (1966). Scale parameter estimation from the order statistics of unequal gamma components. *Ann. Math. Statist.* 37, 152—76.

Уилк, Гнанадесикан и Фрини (Wilk, M. B., Gnanadesikan, R. and Freeny, Anne E.) (1963a). Estimation of error variance from smallest ordered contrasts. *J. Amer. Statist. Ass.* 58, 152—60.

Уилк, Гнанадесикан и Хьюэтт (Wilk, M. B., Gnanadesikan, R. and Huyett, Marilyn J.) (1963b). Separate maximum likelihood estimation of scale or shape parameters of the gamma distribution using order statistics. *Biometrika* 50, 217—21.

Уилк, Гнанадесикан и Хьюэтт (Wilk, M. B., Gnanadesikan, R. and Huyett, Marilyn J.) (1962a). Probability plots for the gamma distribution. *Technometrics* 4, 1—20.

Уилк, Гнанадесикан и Хьюэтт (Wilk, M. B., Gnanadesikan, R. and Huyett, Marilyn J.) (1962b). Estimation of parameters of the gamma distribution using order statistics. *Biometrika* 49, 525—45.

Уилк и Шапиро (Wilk, M. B. and Shapiro, S. C.) (1968). The joint assessment of normality of several independent samples. *Technometrics* 10, 825—39.

Уилки (Willke, T. A.) (1966). A note on contaminated samples of size three. *J. Res., Nat. Bur. Stand.* 70B, 149—51.

Уилкс (Wilks, S. S.) (1941). Determination of sample sizes for setting tolerance limits. *Ann. Math. Statist.* 12, 91—6.

Уилкс (Wilks, S. S.) (1942). Statistical prediction with special reference to the problem of tolerance limits. *Ann. Math. Statist.* 13, 400—9.

Уилкс (Wilks, S. S.) (1948). Order statistics. *Bull. Amer. Math. Statist.* 5, 6—50.

Уилкс (Wilks, S. S.) (1963). Multivariate statistical outliers. *Sankhyā* A25, 407—26.

Уилкс С. (1967). Математическая статистика. — М.: Наука.

Уолкер (Walker, A. M.) (1968). A note on the asymptotic distribution of sample quantiles. *J. R. Statist. Soc.* 30, 570—5.

Уолш (Walsh, J. E.) (1949a). Some significance tests for the median which are valid under very general conditions. *Ann. Math. Statist.* 20, 64—81.

Уолш (Walsh, J. E.) (1949b). Applications of some significance tests for the median which are valid under very general conditions. *J. Amer. Statist. Ass.* 44, 342—55.

Уолш (Walsh, J. E.) (1949c). On the range-midrange test and some tests with bounded significance levels. *Ann. Math. Statist.* 20, 257—67.

Уолш (Walsh, J. E.) (1956). Asymptotic efficiencies of a nonparametric life test for smaller percentiles of a gamma distribution. *J. Amer. Statist. Ass.* 51, 467—80.

Уолш (Walsh, J. E.) (1958). Nonparametric estimation of sample percentage point standard deviation. *Ann. Math. Statist.* 29, 601—4.

Уолш (Walsh, J. E.) (1962). Distribution-free tolerance intervals for continuous symmetrical populations. *Ann. Math. Statist.* 33, 1167—74.

Уотсон (Watson, G. S.) (1954). Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.* 25, 798—800.

Уоттерсон (Watterson, G. A.) (1959). Linear estimation in censored samples from multivariate normal populations. *Ann. Math. Statist.* 30, 814—24.

Фаррел (Farrell, R. H.) (1966). Bounded length confidence intervals for the p-point of a distribution function, III. *Ann. Math. Statist.* 37, 586—92.

Федерер (Federer, W. T.) (1963). Procedures and desings useful for screening material in selection and allocation, with a bibliography. *Biometrics* 19, 553—87.

Фелдмен и Такер (Feldman, D. and Tucker, H. G.) (1966). Estimation of non-unique quantiles. *Ann. Math. Statist.* 37, 451—7.

Феллер (Feller, W.) (1951). The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Ann. Math. Statist.* 22, 427—32.

Феллер В. (1967). Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. — М.: Мир.

Феллер В. (1967). Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т. 2.—М.: Мир.
Фергюсон (Ferguson, T. S.) (1961a). Rules for rejection of outliers. *Revue Inst. Int. de Stat.* 29, 29—43.
Фергюсон (Ferguson, T. S.) (1961b). On the rejection of outliers. Proc. 4th Berkeley Symp. I, 253—87.
Фергюсон (Ferguson, T. S.) (1967). On characterizing distributions by properties of order statistics. *Sankhyā* A29, 265—78.
Филлибэн (Filliben, J. J.) (1969). Simple and robust linear estimation of the location parameter of a symmetric distribution. Ph. D. Thesis, Princeton University.
Финни (Finney, D. J.) (1941). The joint distribution of variance ratios based on a common error mean square. *Ann. Eugen.* **11**, 136—40.
Фишер (Fisher, R. A.) (1929). Tests of significance in harmonic analysis. *Proc. Roy. Soc.* A, **125**, 54—9.
Фишер (Fisher, R. A.) (1940). On the similarity of the distributions found for the test of significance in harmonic analysis, and in Steven's problem in geometrical probability. *Ann. Eugen.* 10, 14—17.
Фишер (Fisher, R. A.) (1950). Contributions to Mathematical Statistics. Wiley, New York.
Фишер и Типпет (Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C.) (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 24, 180—90.
Фолкенберри и Уикс (Faulkenberry, G. D. and Weeks, D. L.) (1968). Sample size determination for tolerance limits. *Technometrics* **10**, 343—8.
фон Андрэ (von Andrae) (1872). Ueber die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch die gegebenen Differenzen von m gleich genauen Beobachtungen einer Unbekannten. *Astron. Nach.* **79**, 257—72.
фон Мизес (von Mises, R.) (1923). Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe. *Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft* **22**, 3—8. Reproduced in von Mises (1964), pp. 129—34.
фон Мизес (von Mises, R.) (1936). La distribution de la plus grande de n valeurs. *Rev. Math. Union Interbalkanique* **1**, 141—60. Reproduced in von Mises (1964), pp. 271—94.
фон Мизес (von Mises, R.) (1964). Selected Papers of Richard von Mises, Vol. 2. American Mathematical Society, Providence.
Фрейзер (Fraser, D. A. S.) (1957). Nonparametric Methods in Statistics, Wiley, New York.
Фреше (Frêchet, M.) (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. Société Polonaise de Mathêmatique* **6**, 92—116.
Хадсон (Hudson, D. J.) (1968). A short-cut method for estimating only one of two parameters from a set of order statistics. *Amer. Statist.* **22**, 23—5.
Хаммерсли и Мортон (Hammersley, J. M. and Morton, K. W.) (1954). The estimation of location and scale parameters from grouped data. *Biometrika* **41**, 296—301.
Хан (Han, C. P.) (1968). Testing the homogeneity of a set of correlated variances. *Biometrika* **55**, 317—26.

Х а н (Han, C. P.) (1969). Testing the homogeneity of variances in a two-way classification. *Biometriks* 25, 153—8.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1959). The use of sample quasi-ranges in estimating population standard deviation. *Ann. Math. Statist.* 30, 980—99. Correction 31, 228.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1960). Tables of range and studentized range. *Ann. Math. Statist.* 31, 1122—47.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1961a). Expected values of normal order statistics. *Biometrika* 48, 151—65. Correction 48, 476.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1961b) Estimating the parameters of negative exponential populations from one or two order statistics. *Ann. Math. Statist.* 32, 1078—90.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1961c). The use of sample ranges in setting exact confidence bounds for the standard deviation of a rectangular population. *J. Amer. Statist. Ass.* 56, 601—9.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1963). Percentage points of the ratio of two ranges and power of the associated test. *Biometrika* 50, 187—94.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1964a). Exact confidence bounds, based on one order statistic, for the parameter of an exponential population. *Technometrics* 6, 301—17.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1964b). Criteria for best substitute interval estimators, with an application to the normal distribution *J. Amer. Statist. Ass.* 59, 1133—40.
Х а р т е р (Harter, H. L.) (1967). Maximum-likelihood estimation of the parameters of a four-parameter generalized gamma population from complete and censored samples. *Technometrics* 9, 159—65.
Х а р т е р и К л е м м (Harter, H. L. and Clemm, D. S.) (1959). The probability integrals of the range and of the Studentized range — probability integrals, percentage points, and moments of the range. Wright Air Development Center Tech. Rep. 58—484, Vol. I.
Х а р т е р, К л е м м и Г а т р и (Harter, H. L., Clemm, D. S. and Guthrie, E. H.) (1959). The probability integrals of the range and of the Studentized range—probability integral and percentage points of the Studentized range; critical values for Duncan's new multiple range test. Wright Air Development Center Tech. Rep. 58—484. Vol. II.
Х а р т е р и М у р (Harter, H. L. and Moore, A. H.) (1965). Point and interval estimators, based on m order statistics, for the scale parameter of a Weibull population with known shape parameter. *Technometrics* 7, 405—22.
Х а р т е р и М у р (Harter, H. L. and Moore. A. H.) (1966). Local-maximum likelihood estimation of the parameters of three-parameter lognormal populations from complete and censored samples. *J. Amer. Statist. Ass.* 61, 842—55.
Х а р т е р и М у р (Harter, H. L. and Moore, A. H.) (1967a). A note on estimation from Type I extreme-value distribution. *Technometrics* 9, 325—31.
Х а р т е р и М у р (Harter, H. L. and Moore, A. H.) (1967b). Asymptotic variances and covariances of maximum-likelihood estimators, from censored samples, of the parameters of Weibull and gamma populations. *Ann. Math. Statist.* 38, 557—70.

Хартер и Мур (Harter, H. L. and Moore, A. H.) (1967c). Maximum-likelihood estimation, from censored samples, of the parameters of a logistic distribution. *J. Amer. Statist. Ass.* **62**, 675—84.

Хартер и Мур (Harter, H. L. and Moore, A. H.) (1968a). Conditional maximum-likelihood estimators, from singly censored samples, of the scale parameters of type II extreme-value distributions. *Technometrics* **10**, 349—59.

Хартер и Мур (Harter, H. L. and Moore, A. H.) (1968b). Maximum-likelihood estimation, from doubly censored samples, of the parameters of the first asymptotic distribution of extreme values. *J. Amer. Statist. Ass.* **63**, 889—901.

Хартли (Hartley, H. O.) (1938). Studentization and large-sample theory. *Suppl. J. R. Statist. Soc.* **5**, 80—8.

Хартли (Hartley, H. O.) (1942). The range in random samples. *Biometrika* **32**, 334—48.

Хартли (Hartley, H. O.) (1944). Studentization or the elimination of the standard deviation of the parent population from the random sample-distribution of statistics. *Biometrika* **33**, 173—80.

Хартли (Hartley, H. O.) (1949). Tests of significance in harmonic analysis. *Biometrika* **36**, 194—201.

Хартли (Hartley, H. O.) (1950a). The use of range in analysis of variance. *Biometrika* **37**, 271—80.

Хартли (Hartley, H. O.) (1950b). The maximum F ratio as a short-cut test for heterogeneity of variance. *Biometrika* **37**, 308—12.

Хартли (Hartley, H. O.) (1955). Some recent developments in analysis of variance. *Comm. Pure and Appl. Math.* **8**, 47—72.

Хартли и Дэйвид (Hartley, H. O. and David, H. A.) (1954). Universal bounds for mean range and extreme observation. *Ann. Math. Statist.* **25**, 85—99.

Хассанейн (Hassanein, K. M.) (1968). Analysis of extreme-value data by sample quantiles for very large samples. *J. Amer. Statist. Ass.* **63**, 877—88.

Хастингс, Мостеллер, Тьюки и Уинсор (Hastings, C., Jr., Mosteller, F., Tukey, J. W. and Winsor, C. P.) (1947). Low moments for small samples: a comparative study of order statistics. *Ann. Math. Statist.* **18**, 413—26.

Хелмерт (Helmert, F. R.) (1876). Die Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers aus den ersten Potenzen der Differenzen gleichgenauer direcler Beobachtungen. *Astron. Nach.* **88**, 127—32.

Хёффдинг (Hoeffding, W.) (1948). A class of statistics with asymptotically normal distribution. *Ann. Math. Statist.* **19**, 293—325.

Хили (Healy, M. J. R.) (1968). Multivariate normal plotting. *Appl. Statist.* **17**, 157—61.

Хилл (Hill, B. M.) (1963). The three-parameter lognormal distribution and Bayesian analysis of a point-source epidemic. *J. Amer. Statist. Ass.* **58**, 72—84.

Хиллиер (Hillier, F. S.) (1964). $\bar{X}$ chart control limits based on a small number of subgroups. *Industr. Qual. Contr.* **20**, No. 8, 24—9.

Хиллиер (Hillier, F. S.) (1967). Small sample probability limits for the range chart, *J. Amer. Statist. Ass.* **63**, 1488—93. Correction **63**, 1549—50.

Хирениус (Hyrenius, H.) (1953). On the use of ranges, cross-ranges and extremes in comparing small samples. *J. Amer. Statist. Ass.* 48, 534—45.

Хогг (Hogg, R. V.) (1956). On the distribution of the likelihood ratio. *Ann. Math. Statist.* **27**, 529—32.

Хогг (Hogg, R. V.) (1960). Certain uncorrelated statistics. *J. Amer. Statist. Ass.* 55, 265—7.

Хогг (Hogg, R. V.) (1967). Some observations on robust estimation. *J. Amer. Statist. Ass.* **62**, 1179—86.

Хогг и Крэйг (Hogg, R. V. and Craig, A. T.) (1956). Sufficient statistics in elementary distribution theory. *Sankhyā* 17, 209—16.

Хогг и Крэйг (Hogg, R. V. and Craig, A. T.) (1959). Introduction to Mathematical Statistics. MacMillan, New York.

Хогг и Тэнис (Hogg, R. V. and Tanis, E. A.) (1963). An iterated procedure for testing the equality of several exponential distributions. *J. Amer. Statist. Ass.* 58, 435—43.

Ходжес (Hodges, J. L., Jr.) (1967). Efficiency in normal samples and tolerance of extreme values for some estimates of location. Proc. 5th Berkeley Symp. I, 163—86.

Ходжес и Леман (Hodges, J. L., Jr., and Lehmann, E. L.) (1963). Estimates of location based on rank tests. *Ann. Math. Statist.* 34, 598—611.

Ходжес и Леман (Hodges, J. L., Jr., and Lehmann, E. L.) (1967). On medians and quasi-medians. *J. Amer. Statist. Ass.* **62**, 926—31.

Хойо (Hojo, T.) (1931). Distribution of the median, quartiles and interquartile distance in samples from a normal population. *Biometrika* **23**, 315—60.

Хойо (Hojo, T.) (1933). A further note on the relation between the median and the quartiles in small samples from a normal population. *Biometrika* 25, 79—90.

Холден и Джайякар (Haldane, J. B. S. and Jayakar, S. D.) (1963). The distribution of extremal and nearly extremal values in samples from a normal distribution. *Biometrika* **50**, 89—94.

Хоуэлл (Howell, J. M.) (1949). Control chart for largest and smallest values. *Ann. Math. Statist.* **21**, 615—6.

Хоэл и Шейер (Hoel, P. G. and Scheuer, E. M.) (1961). Confidence sets for multivariate medians. *Ann. Math. Statist.* **32**, 477—84.

Хубер (Huber, P. J.) (1964). Robust estimation of a location parameter. *Ann. Math. Statist.* 35, 73—101.

Хубер (Huber P. J.) (1968). Robust estimation. In: Selected Statistical Papers 2, Mathematical Centre Tracts 27, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

Хузурбазар (Huzurbazar, V. S.) (1955). Confidence intervals for the parameter of a distribution admitting a sufficient statistic when the range depends on the parameter. *J. R. Statist. Soc.* **B17**, 86—90.

Хьюм (Hume, M. W.) (1965). The distribution of statistics expressible as maxima. *Virginia J. Sci.* **16**, 120—7.

Цукибаяши (Tsukibayashi, S.) (1958). Estimation of variance and standard deviation based on range. *Rep. Statist. Appl Res. JUSE* **5**, 59—67.

Цукибаяши (Tsukibayashi, S.) (1962). Estimation of bivariate parameters based on range. *Rep. Statist. Appl. Res. JUSE* 9, 10—23.
Чемберс (Chambers, C.) (1967). Extention of the tables of percentage points of the largest variance ratio. *Biometrika* 54, 225—7.
Чен (Chan, L. K.) (1967a). Linear estimation of the location and scale parameters from type II censored samples from symmetric unimodal distributions. *Naval Res. Logist. Quart.* 14, 135—45.
Чен (Chan, L. K.) (1967b). Remark on the linearized maximum likelihood estimate. *Ann. Math. Statist.* 38, 1876—81.
Чен (Chan, L. K.) (1967c). On a characterization of distributions by expected values of extreme order statistics. *Amer. Math. Monthly* 74, 950—1.
Ченг (Cheng, B.) (1964). The limiting distributions of order statistics. *Acta Math. Sinica* 14, 694—714. Translation in *Chinese Mathematics* (1965) 6, 84—104.
Чернов, Гаствирт и Джонс (Chernoff, H., Gastwirth, J. L. and Johns, M. V., Jr.) (1967). Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation. *Ann. Math. Statist.* 38, 52—72.
Чернов и Либерман (Chernoff, H. and Lieberman, G. J.) (1954). Use of normal probability paper. *J. Amer. Statist. Ass.* 49, 778—85.
Чернов и Либерман (Chernoff, H. and Lieberman, G. J.) (1956). The use of generalized probability paper for continuous distributions. *Ann. Math. Statist.* 27, 806—18.
Чернов и Тайшер (Chernoff, H. and Teicher, H.) (1965). Limit distributions of the minimax of independent identically distributed random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.* 116, 474—91.
Черчмен и Эпстейн (Churchman, C. W. and Epstein, B.) (1946). Tests of increased severity. *J. Amer. Statist. Ass.* 41, 567—89.
Чоу (Chew, V.) (1964). Tests for the rejection of outlying observations. RCA Systems Analysis Tech. Rept. Memo. 64—7.
Чу (Chu, J. T.) (1955). On the distribution of the sample median. *Ann. Math. Statist.* 26, 112—6.
Чу (Chu, J. T.) (1957). Some uses of quasi-runges. *Ann. Math. Statist.* 28, 173—80.
Чу (Chu, J. T.) (1968). Some statistical methods for large scale and preliminary data analysis. *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo 20, 489—99.
Чу и Хотеллинг (Chu, J. T. and Hotelling, H.) (1955). The moments of the sample median. *Ann. Math. Statist.* 26, 593—606.
Чу и Якоуб (Chu, J. T. and Ja'coub, K.) (1968). Linear order estimates using subsamples. *SIAM J. Appl. Math.* 16, 162—6.
Шапиро и Уилк (Shapiro, S. S. and Wilk, M. B.) (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika* 52, 591—611.
Шапиро и Уилк (Shapiro, S. S. and Wilk, M. B.) (1968). Approximations for the null distribution of the W statistic. *Technometrics* 10, 861—6.
Шапиро, Уилк и Чен (Shapiro, S. S., Wilk, M. B. and Chen, H. J.) (1968). A comparative study of various tests for normality. *J. Amer. Statist. Ass.* 63, 1343—72.

Шаркади, Шнелл и Винце (Sarkadi, K., Schnell, E. and Vincze, I) (1962). On the position of the sample mean among the ordered sample elements. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **7A**, 239—54.
Шах (Shah, B. K.) (1965). Distribution of midrange and semirange from logistic population. *J. Ind. Statist. Ass.* **3**, 185—8.
Шах (Shah, B. K.) (1966a). A note on Craig's paper on the minimum of binomial variates. *Biometrika* **53**, 614—5.
Шах (Shah, B. K.) (1966b). On the bivariate moments of order statistics from a logistic distribution. *Ann. Math. Statist.* **37**, 1002—10.
Шеффе и Тьюки (Scheffé, H. and Tukey, J. W.) (1945). Nonparametric estimation. I. Validation of order statistics. *Ann. Math. Statist.* **16**, 187—92.
Шидак (Sidak, Z.) (1968). On multivariate normal probabilities of rectangles. *Ann. Math. Statist.* **39**, 1425—34.
Шимада (Shimada, S.) (1957). Bias included in the estimator of standard deviation using range. *Rep. Statist. Appl. Res., JUSE* **5**, 21—6.
Шорак (Shorack, R. A.) (1967). On the power of precedence life tests. *Technometrics* **9**, 154—8.
Шривастава (Srivastava, O. P.) (1967). Asymptotic independence of certain statistics connected with the extreme order statistics in a bivariate distribution. *Sankhyā* **29**, 175—82.
Шривастава, Харкнесс и Барту (Srivastava, O. P., Harkness, W. L. and Bartoo, J. B.) (1964). Asymptotic distribution of distances between order statistics from bivariate populations. *Ann. Math. Statist.* **35**, 748—54.
Шрикантан (Srikantan, K. S.) (1961). Testing for the single outlier in a regression model. *Sankhyā* **A23**, 251—60.
Шрикантан (Srikantan, K. S.) (1962). Recurrence relations between the PDF's of order statistics, and some applications. *Ann. Math. Statist.* **33**, 169—77.
Эйзенбергер (Eisenberger, I.) (1968). Testing the mean and standard deviation of a normal distribution using quantiles. *Technometrics* **10**, 781—92.
Эйзенбергер и Познер (Eisenberger, I. and Posner, E. C.) (1965). Systematic statistics used for data compression in space telemetry. *J. Amer. Statist. Ass.* **60**, 97—133.
Эйзенхарт, Деминг, Лола и Мартин (Eisenhart, C., Deming, Lola S. and Martin, C. S.) (1963). Tables describing small-sample properties of the mean, median, standard deviation, and other statistics in sampling from various distributions. *Nat. Bur. Stand. Tech. Note* **191**.
Эйзенхарт и Соломон (Eisenhart, C. and Solomon, H.) (1947). Significance of the largest of a set of sample estimates for variance. In: Eisenhart, C., Hastey, M. W. and Wallis, W. A. (Eds.), Selected Techniques of Statistical Analysis. McGraw-Hill, New York.
Эйзенхарт, Хестей и Уоллис (Eisenhart, C., Hastay, M. W. and Wallis, W. A.) (Eds.) (1947). Selected Techniques of Statistical Analysis. McGraw-Hill, New York. Ch. 5: Acceptance inspection when lot quality is measured by the range.

Эйлбот и Нэдлер (Eilbott, Joan and Nadler J.) (1965). On precedence life testing. *Technometrics* 7, 359—77.

Элфвинг (Elfving, G.) (1947). The asymptotical distribution of range in samples from a normal population. *Biometrika* 34, 111—9.

Энскомб (Anscombe, F. J.) (1960). Rejection of outliers. *Technometrics* 2, 123—47.

Энскомб (Anscombe, F. J.) (1961). Examination of residuals. Proc. 4th Berkeley Symp. I, 1—36.

Энскомб и Баррон (Anscombe, F. J. and Barron, B. A.) (1966). Treatment of outliers in samples of size three. *J. Res., Nat. Bur. Stand.* 70B, 141—51.

Энскомб и Тьюки (Anscombe, F. J. and Tukey, J. W.) (1963). The examination and analysis of residuals. *Technometrics* 5, 141—60.

Эпстейн (Epstein, B.) (1949a). A modified extreme value problem. *Ann. Math. Statist.* 20, 99—103.

Эпстейн (Epstein, B.) (1949b). The distribution of extreme values in samples whose members are subject to a Markov chain condition. *Ann. Math. Statist.* 20, 590—4. Correction 22, 133—4.

Эпстейн (Epstein, B.) (1954). Truncated life tests in the exponential case. *Ann. Math. Statist.* 25, 555—64.

Эпстейн (Epstein, B.) (1956). Simple estimators of the parameters of exponential distributions when samples are censored. *Ann. Inst. Statist. Math.* 8, 15—26.

Эпстейн (Epstein, B.) (1960a). Statistical life test acceptance procedures. *Technometrics* 2, 435—46.

Эпстейн (Epstein, B.) (1960b). Estimation from life test data. *Technometrics* 2, 447—54.

Эпстейн (Epstein, B.) (1967). Bacterial extinction time as an extreme value phenomenon. *Biometrics* 23, 835—9.

Эпстейн и Собел (Epstein, B. and Sobel, M.) (1953). Life testing. *J. Amer. Statist. Ass.* 48, 486—502.

Эпстейн и Собел (Epstein, B. and Sobel, M.) (1954). Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution. *Ann. Math. Statist.* 25, 373—81.

Эпстейн и Цао (Epstein, B. and Tsao, C. K.) (1953). Some tests based on ordered observations from two exponential populations. *Ann. Math. Statist.* 24 458—66.

Эрмитэдж и Кришнайя (Armitage, J. V. and Krishnaiah, P. R.) (1964). Tables for the studentized largest chi-square distribution and their applications. Aerospace Research Laboratories, 64—188.

Юден (Youden, W. J.) (1963). Ranking laboratories by round-robin tests. *Materials Res. and Stand.* 3, 9—13.

Юнг (Jung, J.) (1955). On linear estimates defined by a continuous weight function. *Ark. Mat.* 3, 199—209.

Юнг (Jung, J) (1962). Approximation of least-squares estimates of location and scale parameters (русский перевод в СГ, 37—42).

Янг (Young, D. H.) (1967). Recurrence relations between the P. D. F's of order statistics of dependent variables, and some applications. *Biometrika* 54, 283—92.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

---

*) п. с. — сокращение термина «порядковые статистики».

Г. Дэйвид

ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ

М., 1979 г., 336 стр. с илл.

Редактор *В. В. Абгарян*
Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*
Корректоры *З. В. Автонеева, М. Л. Медведская*

ИБ № 11237

Сдано в набор 11.01.79. Подписано к печати 15.05.79. Бумага 84×108¹/₃₂. Тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 19.33. Тираж 7000 экз. Заказ № 276. Цена книги 1 р. 70 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071. Москва. В-71, Ленинский проспект. 15

Набрано и сматрицировано в ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская, 26

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29