Ж. ДЕКЛУ

# МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ECOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

J. DESCLOUX

Février 1973

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Lausanne, Suisse

Ж. ДЕКЛУ

# МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Перевод с французского*
Б. И. КВАСОВА

*Под редакцией*
Н. Н. ЯНЕНКО

Издательство «Мир»
*Москва 1976*

УДК 517.946.9; 518.12
Д28

В книге дается математическое обоснование метода конечных элементов, получившего в последние годы широкое распространение. Основное внимание уделяется строгой математической формулировке вопросов. Дается вариационная формулировка задач с краевыми условиями, рассматривается применение метода к численному решению уравнений в частных производных; изложенный материал иллюстрируется примерами.

Книга представляет большой интерес для всех, кто желает изучить математические основы метода конечных элементов, — математиков-вычислителей, механиков, физиков, а также для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

*Редакция литературы по математическим наукам*

Д $\frac{20203\text{-}016}{041(01)\text{-}76}$ 16-76 

# ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В последнее десятилетие получило широкое развитие и применение новое направление в вычислительной математике — метод конечных элементов. Отметим сразу, что, хотя на эту тему уже опубликовано большое число статей, общая математическая теория метода конечных элементов развита в основном в последние годы. Успех в обосновании этой методики был обеспечен прежде всего достижениями в области теории сплайнов. Существует глубокая взаимосвязь между теорией обобщенных функций, теорией сплайнов и методом конечных элементов. Как известно, обобщенные функции могут быть получены как предельные элементы последовательностей традиционных элементарных функций (полиномы, тригонометрические полиномы, собственные функции краевых задач математической физики). В современном численном анализе в систему элементарных функций были включены сплайны, которые кратко можно определить как «кусочные полиномы». Систематическое изучение свойств последних породило теорию сплайн-функций. Отметим, что дифференцируя сплайн-функции необходимое число раз, мы получим обобщенные функции, т. е. сплайн-функции являются интегралами от распределений.

Метод конечных элементов можно рассматривать как специальный случай метода Ритца — Галеркина. Этот классический подход имеет два существенных недостатка. Во-первых, на практике построение базисных функций возможно только для некоторых специальных областей и, во-вторых, соответствующие матрицы Ритца — Галеркина являются полными матрицами и очень часто даже для простых задач плохо обусловлены. Принципиальное различие между методом конечных элементов и классической техникой Ритца — Галеркина лежит в построении базисных функций. В методе конечных элементов базисные функции выбираются в виде сплайнов и для обла-

стей общего вида могут быть вычислены весьма просто. Главная особенность этих базисных функций состоит в их финитности, т. е. в том, что они обращаются в нуль всюду, кроме фиксированного числа элементарных подобластей, на которые делится данная область. Это свойство влечет за собой разреженность и ленточную структуру матрицы Ритца — Галеркина (или матрицы жесткости системы, пользуясь термином, принятым в теории упругости) и устойчивость численного процесса решения системы.

В небольшом по объему курсе лекций профессора Деклу излагаются математические основы метода конечных элементов. При этом основное внимание уделяется строгой математической формулировке рассматриваемых вопросов и обоснованию определенной техники аппроксимации, применяемой инженерами, изложение которой можно найти, например, в известной работе Зенкевича и Чанга «Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред», изд-во «Недра», 1974.

Книга состоит из четырех глав.

В главе I даются различные вариационные формулировки краевых задач для линейных дифференциальных уравнений. Это связано прежде всего с вариационной основой метода конечных элементов. Далее автор проводит дискретизацию вариационных задач и излагает схему метода конечных элементов.

В главе II излагается метод построения пространства конечных элементов, который широко используется сейчас в инженерной практике. При этом вначале рассмотрены одномерные и прямоугольные элементы двух типов, а затем треугольные элементы и элементы с криволинейными сторонами. Глава заканчивается вычислением матрицы жесткости.

В главе III даются краткие сведения из теории пространств Соболева и коэрцитивных форм, необходимые для применения развиваемой теории метода конечных элементов к численному решению уравнений в частных производных. Здесь же на двух примерах рассмотрены вопросы существования и единственности обобщенных решений уравнений в частных производных.

В главе IV получены оценки уклонения точного решения задачи обобщенной интерполяции от дискретного решения в векторном пространстве конечных элементов.

Отличительной особенностью книги является простота и ясность изложения в сочетании с математической строгостью и высоким научным уровнем. Весь материал иллюстрируется на большом числе примеров. Книга профессора Деклу представляет собой хорошее введение в теорию и приложения метода конечных элементов и несомненно представит интерес для широкого круга читателей: математиков-вычислителей, механиков, физиков, как исследователей, так и студентов старших курсов.

*Н. Н Яненко*

# ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Эта монография содержит материал специального курса, который читался в 1973 г. в Лувенском университете для специалистов по прикладной математике и инженеров.

Для чтения книги достаточно минимальной математической подготовки. Глава III содержит краткое введение в теорию эллиптических уравнений и пространств С. Л. Соболева. Основной упор сделан на полные доказательства сходимости для уравнений этого типа с неоднородными краевыми условиями, которые основаны на предположениях, имеющих место в инженерной практике. В свою очередь вопрос о порядке сходимости, который играет первостепенную роль в теоретических исследованиях, но представляет весьма скромный интерес для приложений, затронут только весьма кратко.

Я хочу искренне поблагодарить переводчика Б. И. Квасова, который исправил большое число ошибок, содержавшихся во французском варианте книги, и, кроме того, способствовал существенному ее улучшению. Пользуюсь также возможностью, чтобы выразить мою признательность профессору Менге из Лувенского университета, без которого этот труд не увидел бы света.

*Жан Деклу*

Лозанна, 6 мая 1975 г.

# I. ВВЕДЕНИЕ

## 1. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Обозначения.** Пусть $\Omega$ — открытое связное ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, $\overline{\Omega}$ — его замыкание. Для $s=(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где $s_i$ — неотрицательные целые числа, положим $|s|=s_1+s_2+\ldots+s_n$ и для $f\in C^m(\Omega)$ введем обозначение

$$D^s f(x)=\frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_n^{s_n}} f(x_1, \ldots, x_n) \text{ при } |s|\leqslant m.$$

Через $C^m(\overline{\Omega})$ обозначим множество вещественных функций, представляющих собой сужения на $\overline{\Omega}$ функций класса $C^m$, определенных на всем $\mathbf{R}^n$. Будем говорить, что $\Omega$ — *регулярная область*, если для нее справедлива теорема о дивергенции [теорема Гаусса—Остроградского — *перев.*], т. е. если для всякой $f\in C^1(\overline{\Omega})$ имеем

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)d\tau=\int\limits_{\partial\Omega} f n_i\, d\sigma, \tag{1}$$

где $\partial\Omega$ — граница $\Omega$, $n_i$ есть $i$-я компонента единичной внешней нормали к $\partial\Omega$, а $d\tau$ и $d\sigma$ соответственно — элементы объема и поверхности. Для регулярной области $\Omega$ будем говорить, что $f$ принадлежит классу $C_I^m(\overline{\Omega})$ при $m\geqslant 1$ ($f\in C_I^m(\overline{\Omega})$), если

1) $f\in C^{m-1}(\overline{\Omega})$;

2) существуют открытые непересекающиеся регулярные области $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$, такие, что

а) $\overline{\Omega}=\bigcup\limits_{i=1}^{p}\overline{\Omega}_i$,

б) сужение $f$ на $\overline{\Omega}_i$ принадлежит классу $C^m(\overline{\Omega}_i)$, $i=1, \ldots, p$.

Замечание 1. Для $f \in C_l^1(\overline{\Omega})$ имеет место соотношение (1).

Замечание 2. Класс $C_l^0(\overline{\Omega})$ нуждается в специальном определении. Для регулярной $\overline{\Omega}$ будем говорить, что $f$ принадлежит классу $C_l^0(\overline{\Omega})$, если существуют открытые непересекающиеся регулярные области $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$, такие, что

а) $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{\Omega}_i$,

б) сужение $f$ на $\Omega_i$ допускает непрерывное продолжение на $\mathbf{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Пример 1. Пусть $\overline{\Omega} = [0, 1]$. Заданной функции $f \in C_l^0([0, 1])$ сопоставим линейную форму $\varphi: C_l^0 \to \mathbf{R}$, определенную равенством $\varphi(v) = \int_0^1 fv\,dx$. Через $L$ обозначим множество функций на $[0, 1]$, обращающихся в нуль в точках 0 и 1. Рассмотрим следующие четыре задачи.

1. Найти такую $u \in C_l^2([0, 1]) \cap L$, что

$$-u''(x) = f(x). \tag{2}$$

2. Пусть $U = C_l^2([0, 1]) \cap L$, $V = C_l^0([0, 1])$ и $a: U \times V \to \mathbf{R}$ — билинейная форма, определенная равенством

$$a(u, v) = -\int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx.$$

Найти такую $u \in U$, что

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V. \tag{3}$$

3. Пусть $U = C_l^1([0, 1]) \cap L$ и $a: U \times U \to \mathbf{R}$ — билинейная форма, определенная равенством

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx.$$

Найти такую $u \in U$, что

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in U. \tag{4}$$

4. Пусть $U = C_l^0([0, 1])$, $V = C_l^2([0, 1]) \cap L$ и $a: U \times V \to \mathbf{R}$ — билинейная форма, определенная равенством

$$a(u, v) = -\int_0^1 u(x) v''(x)\, dx.$$

Найти такую $u \in U$, что

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V. \tag{5}$$

Покажем, что каждая из этих задач имеет единственное решение и что эти четыре решения тождественны. Интегрируя (2) два раза, получаем

$$u(x) = -\int_0^x dy \int_0^y f(t)\, dt + ax + b.$$

Условия $u(0) = u(1) = 0$ однозначно определяют $a$ и $b$. Обозначим через $\bar{u}$ решение задачи 1. Тогда достаточно показать, что $\bar{u}$ является также решением задач 2, 3 и 4 и что каждая из этих трех задач имеет не более одного решения. Умножая (2), где $u = \bar{u}$, на $v \in C_l^0([0, 1])$ и интегрируя, получаем (3). Умножая (2), где $u = \bar{u}$, на $v \in C_l^1([0, 1]) \cap L$ и интегрируя по частям, получаем (4):

$$-\bar{u}'(x) v(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \bar{u}'(x) v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x) v(x)\, dx. \tag{6}$$

Умножая (2), где $u = \bar{u}$, на $v \in C_l^2([0, 1]) \cap L$ и интегрируя два раза по частям с учетом (6) и того факта, что $\bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0$, получаем (5):

$$\bar{u}(x) v'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \bar{u}(x) v''(x)\, dx = \int_0^1 f(x) v(x)\, dx.$$

Для доказательства единственности решения задач 2, 3 и 4 предположим, что имеются два решения $u_1$ и $u_2$ (принадлежащие для каждой задачи соответствующим множествам $U$). Пусть $w = u_1 - u_2$. Для задачи 2, полагая $v = w''$, получаем

$$-\int_0^1 (w''(x))^2\, dx = 0 \Rightarrow w''(x) = 0 \Rightarrow w(x) = 0,$$

так как $w(0)=w(1)=0$. Для задачи 3, выбирая $v=w$, получаем

$$\int_0^1 (w'(x))^2\,dx=0 \Rightarrow w'(x)=0 \Rightarrow w(x)=0,$$

так как $w(0)=0$. Для задачи 4 выберем такое $v$, что $v''(x)=w(x)$, $v(0)=v(1)=0$ (задача 1); получим

$$\int_0^1 w^2(x)\,dx=0 \Rightarrow w(x)=0.$$

Будем говорить, что задачи 2, 3 и 4 являются соответственно сильной, полуслабой и слабой вариационными формулировками краевой задачи 1.

Пример 2. Пусть $\overline{\Omega}=[0,\ 1]$. Заданной функции $f\in C_l^0([0,\ 1])$ сопоставим линейную форму $\varphi\colon C_l^0\to\mathbf{R}$, определенную равенством $\varphi(v)=\int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx$. Пусть $L$ — множество функций $v$ класса $C^1([0,\ 1])$, таких, что $v(0)=0$, $v'(1)+\alpha v(1)=0$, где $\alpha$ — неотрицательная постоянная, и пусть $L_1$ — множество функций, обращающихся в нуль в точке 0. Рассмотрим следующие четыре задачи.

1. Найти такую $u\in C_l^2([0,\ 1])\cap L$, что

$$-u''(x)=f(x).$$

2. Пусть $U=C_l^2([0,\ 1])\cap L$, $V=C_l^0([0,\ 1])$ и $a\colon U\times V\to\mathbf{R}$ — билинейная форма, определенная равенством

$$a(u,\ v)=-\int_0^1 u''(x)\,v(x)\,dx.$$

Найти такую $u\in U$, что

$$a(u,\ v)=\varphi(v)\qquad \forall v\in V.$$

3. Пусть $U=C_l^1[0,\ 1]\cap L$ и $a\colon U\times U\to\mathbf{R}$ — билинейная форма, определенная равенством

$$a(u,\ v)=\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx+\alpha u(1)\,v(1).$$

Найти такую $u \in U$, что

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in U.$$

4. Пусть $U = C_l^0[0, 1]$, $V = C_l^2([0, 1]) \cap L$ и $a: U \times V \to \mathbf{R}$ — билинейная форма, определенная равенством

$$a(u, v) = -\int_0^1 u(x) v''(x)\, dx.$$

Найти такую $u \in U$, что

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V.$$

Тем же способом, что и в примере 1, можно показать, что сформулированные четыре задачи имеют одно и то же единственное решение.

Замечание. В задаче 3 из примера 2 (полуслабая формулировка) краевое условие $u'(1) + \alpha u(1) = 0$ не участвует в определении $U$, но используется в билинейной форме $a$. В таком случае говорят, что это *краевое условие является естественным*. Наоборот, краевое условие $u(0) = 0$ участвует в определении $U$. Это *главное краевое условие*.

В полуслабых формулировках из примеров 1 и 2 (задачи 3) билинейная форма является, с одной стороны, симметричной, а с другой стороны — положительно определенной, т. е. $a(u, v) = a(v, u)$ и $a(u, u) > 0$ при $u \neq 0$. Таким образом, эти задачи эквивалентны задачам на минимум. Действительно, имеет место следующая

**Теорема I.1.1.** *Пусть $U$ — вещественное векторное пространство и $a: U \times U \to \mathbf{R}$ — симметричная положительно определенная билинейная форма, т. е. $a(u, v) = a(v, u)$ и $a(u, u) > 0$ при $u \neq 0$. Пусть $\varphi: U \to \mathbf{R}$ — некоторая линейная форма и $F: U \to \mathbf{R}$ — квадратичная форма, определенная равенством $F(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \varphi(u)$. Рассмотрим следующие две задачи:*

1) *найти такое $u \in U$, что $a(u, v) = \varphi(v)$ $\forall v \in U$;*

2) *найти такое $u \in U$, что $F(u) \leqslant F(v)$ $\forall v \in U$.*

*Тогда*

а) *каждая из этих задач имеет не более одного решения;*

б) *если одна из задач допускает некоторое решение, то и другая допускает то же самое решение;*

в) *если* $\bar{u}$ — *решение, то*

$$F(v) - F(\bar{u}) = \frac{1}{2} a(v - \bar{u}, v - \bar{u}) \quad \forall v \in U. \tag{7}$$

Доказательство. 1. Покажем, что задача 1 имеет не более одного решения. Пусть $u_1$ и $u_2$ — два решения, $w = u_1 - u_2$. Полагая $v = w$, получаем $a(w, w) = 0$ и $w = 0$.

2. Предположим, что $u$ — решение задачи 2, и покажем, что $u$ также является решением задачи 1. Пусть $v \in U$. Для всякого $\lambda \in \mathbf{R}$ имеем

$$F(u + \lambda v) = \frac{1}{2} a(u, u) + \lambda a(u, v) + \frac{1}{2} \lambda^2 a(v, v) -$$
$$- \varphi(u) - \lambda\varphi(v) \geqslant F(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \varphi(u);$$
$$\frac{1}{2} \lambda^2 a(v, v) + \lambda(a(u, v) - \varphi(v)) \geqslant 0.$$

Из последнего неравенства, которое должно выполняться для всякого $\lambda$, вытекает, что $a(u, v) = \varphi(v)$.

3. Предположим, что $\bar{u}$ — решение задачи 1, и докажем формулу (7). Имеем

$$F(v) - F(\bar{u}) = F(\bar{u} + (v - \bar{u})) - F(\bar{u}) =$$
$$= \frac{1}{2} a(\bar{u}, \bar{u}) + \frac{1}{2} a(v - \bar{u}, v - \bar{u}) - \varphi(\bar{u}) +$$
$$+ \underbrace{(a(\bar{u}, v - \bar{u}) - \varphi(v - \bar{u}))}_{=0} - F(\bar{u}) =$$
$$= \frac{1}{2} a(v - \bar{u}, v - \bar{u}).$$

Это соотношение показывает, что $\bar{u}$ является в то же время решением задачи 2, и доказательство завершено.

По соображениям, которые выяснятся в следующем параграфе, наиболее интересными для численного анализа являются полуслабые вариационные формулировки.

Пример 3. Пусть $\Omega$ — регулярная область в $\mathbf{R}^2$, $\partial\Omega$ — ее граница, состоящая из двух непустых непересекающихся частей $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Пусть $f \in C_l^0(\bar{\Omega})$, $\alpha$: $\partial\Omega_2 \to \mathbf{R}$, $\alpha$ непрерывно и $\alpha > 0$. Рассмотрим следующие две задачи.

1. Пусть $U=\left\{u\in C_l^2(\overline{\Omega}):\ u=0 \text{ на } \partial\Omega_1,\ \frac{d}{dn}u+\alpha u=0 \text{ на } \partial\Omega_2\right\}$, где $n$ — внешняя нормаль. Найти такую функцию $u\in U$, что

$$-\Delta u=f \quad \text{в} \quad \Omega.$$

2. Пусть $U=\{u\in C_l^1(\overline{\Omega}):\ u=0 \text{ на } \partial\Omega_1\}$, и пусть форма $a$: $U\times U\to\mathbf{R}$ определена равенством

$$a(u,\ v)=\iint\limits_{\Omega}(\partial_x u\cdot\partial_x v+\partial_y u\cdot\partial_y v)\,dx\,dy+\int\limits_{\partial\Omega_2}\alpha uv\,ds\quad(\partial_x=\partial/\partial x),$$

а отображение $\varphi$: $U\to\mathbf{R}$ определено равенством $\varphi(u)=\iint\limits_{\Omega}fu\,dx\,dy$. Требуется найти такую функцию $u\in U$, что

$$a(u,\ v)=\varphi(v)\quad\forall v\in U.$$

Эти две задачи не вполне эквивалентны. Покажем, что а) задача 1 имеет не более одного решения; б) задача 2 имеет не более одного решения; в) решение задачи 1 является также решением задачи 2. Ясно, что достаточно доказать пункты б) и в).

По теореме I.1.1, чтобы установить б), достаточно проверить, что $a$ — симметричная положительно определенная билинейная форма. Это нетрудно. Чтобы доказать в), рассмотрим решение $u$ задачи 1, некоторое $v\in C_l^1(\overline{\Omega})$, $v=0$ на $\partial\Omega_1$, и используем формулу Грина

$$\iint\limits_{\Omega}fv\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega}-\Delta uv\,dx\,dy=\iint\limits_{\Omega}\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v\,dx\,dy-$$
$$-\int\limits_{\partial\Omega}v\frac{du}{dn}\,ds=\iint\limits_{\Omega}\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v\,dx\,dy+\int\limits_{\partial\Omega_2}\alpha uv\,ds=a(u,\ v).$$

Заметим, что краевое условие, относящееся к $\partial\Omega_2$, является естественным.

Замечание. Решение задачи 2 в примере 3, которое не является решением задачи 1, называется *обобщенным решением*.

## 2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Предположим, что задачу, поставленную в примере 1 предыдущего параграфа, требуется решить численным методом, ориентированным на вычислительную машину. Рассматривая решение $u$ как множество пар чисел $\{(x, u(x)) : x \in [0, 1]\}$, мы видим, что вычислительная машина, которая может оперировать только с конечным множеством чисел, не в состоянии обработать всю информацию, относящуюся к $u$. Следовательно, данную задачу необходимо свести к другой задаче, которая содержит в качестве неизвестных только конечное множество чисел. Эта новая задача, решение которой, вообще говоря, будет только приближением (причем требуется уточнить, в каком смысле) решения исходной задачи, называется «дискретной задачей».

В рамках примера 1 из § 1 ограничимся рассмотрением двух общих методов дискретизации.

**Метод А.** Пусть $\Omega^* = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{0, 1\}$ — дискретное (т. е. конечное) множество из $\bar{\Omega} = [0, 1]$. Дискретная задача будет состоять в отыскании функции $u^*$: $\Omega^* \to \mathbf{R}$, такой, что $u^*(x_i)$ является приближением для $u(x_i)$. Мы ограничимся случаем равномерной «сетки» $x_i = ih$, $h = 1/(N+1)$.

Задача А1 (конечные разности). Исходя из соотношения $u''(x) = \lim\limits_{\tau \to 0} (u(x+\tau) - 2u(x) + u(x-\tau))/\tau^2$ и формулировки 1 примера 1 положим

$$-\frac{u^*(x_{i+1}) - 2u^*(x_i) + u^*(x_{i-1})}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

(при $i = 1$ полагаем $u^*(x_0) = 0$, а при $i = N$ полагаем $u^*(x_{N+1}) = 0$). Тем самым получается система $N$ линейных уравнений с $N$ неизвестными.

Задача А2 (конечные разности; вариационная формулировка). Согласно полуслабой формулировке из примера 1 и теореме I.1.1, искомое решение $u$ минимизирует функционал

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 \, dx - \int_0^1 f(x) \, v(x) \, dx$$

на множестве функций класса $C_l^1([0, 1])$, обращающихся в нуль в точках 0 и 1. На отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ имеем[1])

$$v'(x) \doteqdot (v(x_i) - v(x_{i-1}))/h,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} v'^2(x)\,dx \doteqdot (v(x_i) - v(x_{i-1}))^2/h,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,v(x)\,dx \doteqdot h\,(f(x_{i-1})\,v(x_{i-1}) + f(x_i)\,v(x_i))/2.$$

Выполнив суммирование, перейдем к задаче минимизации функционала $F^*$, определенного на множестве функций $v^*$: $\Omega^* \to \mathbf{R}$ выражением

$$F^*(v^*) = \sum_{i=1}^{N+1} \left\{\frac{1}{2h}(v^*(x_i) - v^*(x_{i-1}))^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{h}{2}(f(x_i)\,v^*(x_i) + f(x_{i-1})\,v^*(x_{i-1}))\right\},$$

где мы положили $v^*(x_0) = v^*(x_{N+1}) = 0$. Тогда функция $u^*$, минимизирующая $F^*$, удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{2u^*(x_i) - u^*(x_{i-1}) - u^*(x_{i+1})}{2h} - \frac{h}{2} f(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где мы положили $u^*(x_0) = u^*(x_{N+1}) = 0$.

**Метод Б.** Пусть $U^*$ — линейное пространство функций, определенных на $\bar{\Omega} = [0, 1]$, размерности $N$ с базисом $s_1, s_2, \ldots, s_N$. Требуется найти вещественные числа $a_1, \ldots, a_N$, такие, что $a_1 s_1 + \ldots + a_N s_N$ является приближением решения $u$ исходной задачи. Положим $s_i^{(1)}(x) = (1 - x)\,x^i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Пусть $s_i^{(2)} \in C_l^1[0, 1]$ такова, что $s_i^{(2)}(j/(N+1)) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$, и линейна на каждом отрезке $[(i-1)/(N+1), i/(N+1)]$, $i = 1, 2, \ldots, N+1$, и пусть $s_i^{(3)}$ — характеристическая функция отрезка $[(i-1)/N, i/N]$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Через $U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}$ обозначим пространства размерности $N$, порожденные соответственно функциями $s_i^{(1)}$, $s_i^{(2)}$, $s_i^{(3)}$ (рис. 1, 2, 3).

---

[1]) Здесь $\doteqdot$ — символ аппроксимации. — *Прим. перев.*

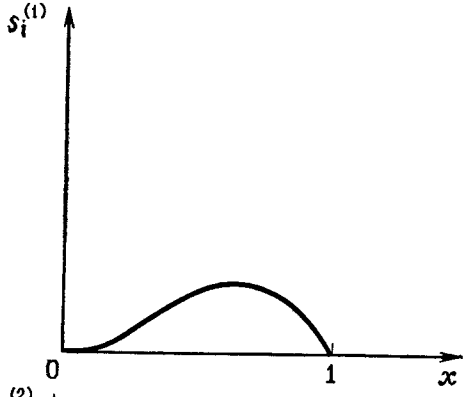


Рис. 1.

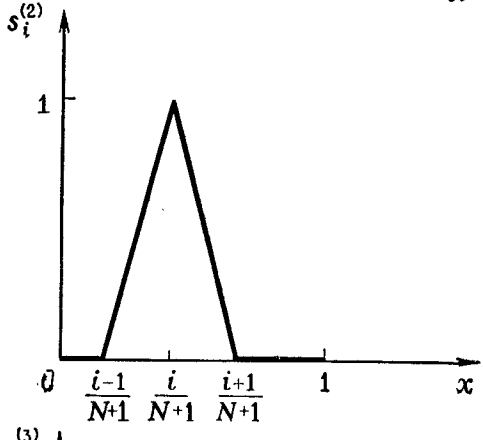


Рис. 2.

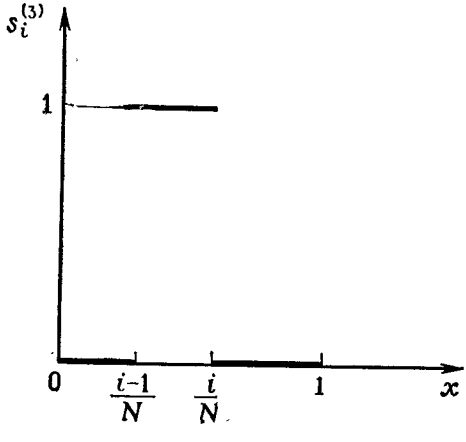


Рис. 3.

Задача Б1 (коллокация). Исходим из дифференциальной формулировки примера 1. Пусть $x_i = i/(N+1)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Требуется найти такие $a_1, \ldots, a_N$, чтобы

$$-\sum_{j=1}^{N} a_j s_j^{(1)''}(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Задача Б2. Исходим из сильной вариационной формулировки задачи 1. Требуется найти такую $u \in U^{(1)}$, чтобы

$$-\int_0^1 u''(x)\, v(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in U^{(3)}.$$

Полагая $u = \sum a_j s_j^{(1)}$ и записывая уравнение последовательно для $v = s_1^{(3)}, \ldots, v = s_N^{(3)}$, получим для коэффициентов $a_1, \ldots, a_N$ систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} \left( \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} s_j^{(1)''}(x)\, dx \right) a_j = -\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\xi_i = i/N$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{N} \left(s_j^{(1)'}(\xi_i) - s_j^{(1)'}(\xi_{i-1})\right) a_j = -\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Задача Б3. Исходим из полуслабой вариационной формулировки задачи 1. Требуется найти такую $u \in U^{(2)}$, чтобы

$$\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \qquad \forall v \in U^{(2)}.$$

Полагая $u = \sum a_j s_j^{(2)}$ и записывая уравнение последовательно для $v = s_1^{(2)}, \ldots, v = s_n^{(2)}$, получаем для вектора $a$ с компонентами $a_1, \ldots, a_N$ систему линейных уравнений $Aa = b$. Элементы $a_{ij}$ матрицы $A$ и компоненты $b_i$ вектора $b$ задаются соотношениями

$$a_{ij} = \int_0^1 s_i^{(2)'}(x)\, s_j^{(2)'}(x)\, dx = \begin{cases} 2(N+1), & \text{если} \quad i = j, \\ -(N+1), & \text{если} \quad |i-j| = 1, \\ 0, & \text{если} \quad |i-j| > 1. \end{cases}$$

$$b_i = \int_0^1 f(x)\, s_i^{(2)}(x)\, dx.$$

Задача Б4. Исходим из слабой вариационной формулировки задачи 1. Требуется найти такую $u \in U^{(3)}$, чтобы

$$-\int_0^1 u(x)\, v''(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx \quad \forall v \in U^{(1)}.$$

Полагая $u = \sum a_j s_j^{(3)}$ и записывая уравнение последовательно для $v = s_1^{(1)}, \ldots, v = s_N^{(1)}$, получаем для коэффициентов $a_j$ систему линейных уравнений

$$-\sum_{j=1}^{N} \left( \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} s_i^{(1)''}(x)\, dx \right) a_j = \int_0^1 f(x)\, s_i^{(1)}(x)\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$(\xi_j = j/N)$, т. е.

$$-\sum_{j=1}^{N} \left(s_i^{(1)'}(\xi_j) - s_i^{(1)'}(\xi_{j-1})\right) a_j = \int_0^1 f(x)\, s_i^{(1)}(x)\, dx, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Задачи Б2, Б3 и Б4 являются примерами задач, дискретизованных методом Ритца — Галеркина.

**Метод Галеркина.** Пусть $U$ и $V$ — два линейных пространства, $a$: $U \times V \to \mathbf{R}$ — билинейная форма, $\varphi$: $V \to \mathbf{R}$ — линейная форма. Пусть $U^* \subset U$ и $V^* \subset V$ — два подпространства одной и той же размерности $N$. Точной задаче, состоящей в нахождении такого $u \in U$, что

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in V,$$

сопоставим задачу, называемую приближением по Галеркину и состоящую в нахождении такого $u^* \in U^*$, что

$$a(u^*, v^*) = \varphi(v^*) \quad \forall v^* \in V^*. \tag{1}$$

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_N$ — некоторый базис $U^*$, а $v_1, v_2, \ldots, v_N$ — базис $V^*$. Положим $u^* = \sum a_j u_j$. Тогда (1) эквивалентно соотношениям

$$a\left(\sum_{j=1}^{N} a_j u_j,\ v_i\right) = \varphi(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

или

$$\sum_{j=1}^{N} a(u_j, v_i)\, a_j = \varphi(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Следовательно, приближенная задача имеет одно и только одно решение, если матрица коэффициентов $a(u_j, v_i)$ невырожденна. Эта матрица называется «матрицей жесткости».

**Метод Ритца.** Метод Ритца является частным случаем метода Галеркина. Пусть $U$ — линейное пространство, $a$: $U \times U \to \mathbf{R}$ — симметричная положительно определенная билинейная форма, $\varphi$: $U \to \mathbf{R}$ — линейная форма и $U^* \subset U$ — подпространство размерности $N$ с базисом $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Точной задаче, состоящей в нахождении такого $u \in U$, что

$$a(u, v) = \varphi(v) \quad \forall v \in U, \tag{2}$$

сопоставим задачу, называемую приближением по Ритцу и состоящую в нахождении такого $u^* \in U^*$, что

$$a(u^*, v^*) = \varphi(v^*) \quad \forall v^* \in U^*. \tag{3}$$

Положим $u^* = \sum_{j=1}^{N} a_j u_j$. Тогда (3) эквивалентно системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} a(u_j, u_i) a_j = \varphi(u_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

**Теорема 1.2.1.** *Допустим, что рассматривается ситуация метода Ритца. Пусть форма $F$: $U \to \mathbf{R}$ определена соотношением $F(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \varphi(u)$. Тогда*

а) *матрица системы* (4) *симметрична и положительно определена*;

б) *задача* (3) *имеет одно и только одно решение*;

в) *задача* (3) *эквивалентна задаче нахождения такого $u^* \in U^*$, что*

$$F(u^*) \leqslant F(v^*) \quad \forall v^* \in U^*;$$

г) *если задача* (2) *имеет решение $\bar{u}$, то решение $\bar{u}^*$ задачи* (3) *удовлетворяет соотношениям*

$$a(\bar{u} - \bar{u}^*, \bar{u} - \bar{u}^*) \leqslant a(\bar{u} - v^*, \bar{u} - v^*) \quad \forall v^* \in U^*, \tag{5}$$

$$a(\bar{u}^*, \bar{u}^*) \leqslant a(\bar{u}, \bar{u}). \tag{6}$$

Доказательство. а) Рассмотрим некоторое $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$:

$$\sum_{i,\, j=1}^{N} a(u_i,\ u_j)\, x_i x_j = a\left(\sum_{j=1}^{N} x_i u_i,\ \sum_{j=1}^{N} x_j u_j\right) > 0.$$

б) и в) следуют из теоремы I.1.1, примененной к $U^*$. Для получения соотношения (5) пункт в) теоремы I.1.1 применяется последовательно к точной и приближенной задачам. Для всякого $v^* \in U^*$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(v^* - \bar{u},\ v^* - \bar{u}) &= F(v^*) - F(\bar{u}) = \\ &= F(v^*) - F(\bar{u}^*) + F(\bar{u}^*) - F(\bar{u}) = \\ &= \frac{1}{2} a(v^* - \bar{u}^*,\ v^* - \bar{u}^*) + \frac{1}{2} a(\bar{u}^* - \bar{u},\ \bar{u}^* - \bar{u}). \qquad (7) \end{aligned}$$

Отсюда следует (6), если положить $v^* = 0$.

Замечание 1. Пусть выполнены условия теоремы I.2.1. Тогда $U$ можно рассматривать как предгильбертово пространство со скалярным произведением $a(u, v)$. Неравенство (5) выражает тот факт, что $\bar{u}^*$ — ортогональная проекция $\bar{u}$ на $U^*$, а (7) есть не что иное как «теорема Пифагора».

Замечание 2. Если в задаче Б3 мы заменим $b_i$ на $f(i/(N+1))/(N+1)$, то увидим, что задачи А1, А2 и Б3, модифицированные таким образом, сводятся к решению одной и той же системы линейных уравнений. В этом нет ничего удивительного: это просто весьма частный случай.

Замечание 3. Задачи Б2, Б3 и Б4 соответствуют задачам 2, 3 и 4 примера 1, дискретизованным по Ритцу — Галеркину. Если бы можно было использовать только $U^{(1)}$, т. е. заменить $U^{(2)}$ и $U^{(3)}$ на $U^{(1)}$, то мы получили бы три тождественные задачи.

Замечание 4. Для задачи, допускающей полуслабую формулировку с положительно определенной симметричной билинейной формой, метод дискретизации по Ритцу дает следующие существенные преимущества.

а) В случае краевой задачи для дифференциального уравнения порядка $2m$ имеем $U^* \subset C_l^m(\overline{\Omega})$, тогда как для сильной вариационной формулировки $U^* \subset C_l^{2m}(\overline{\Omega})$, а для слабой вариационной формулировки $V^* \subset C_l^{2m}(\overline{\Omega})$. Как мы увидим далее, трудность построения методом конечных элементов базиса пространства, соответствующего методу Б, возрастает с порядком $m$ класса $C_l^m(\overline{\Omega})$, которому должны принадлежать функции этого базиса.

б) Элементы $U^*$ не обязательно удовлетворяют естественным краевым условиям.

в) Сформулированные в теореме I.2.1 свойства позволяют сравнительно легко получать оценки для ошибки аппроксимации или доказывать теоремы сходимости.

## 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В дальнейшем будет рассматриваться только метод дискретизации Б. Рассмотрим для простоты билинейную форму вида $a$: $U \times U \to \mathbf{R}$, где $U$ — линейное пространство функций, определенных на замыкании $\overline{\Omega}$ регулярной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Предположим, как и в случае примеров, рассмотренных в § 1, что $a(u, v) = 0$, если носители $u$ и $v$ имеют пересечение меры нуль. Пусть $U^* \subset U$ — подпространство размерности $N$ с базисом $u_1, \ldots, u_N$. Обозначим через $C_i$ носитель $u_i$, а через $G_i$ — множество $\{j\colon \operatorname{mes}(C_i \cap C_j) \neq 0\}$. Тогда $a(u_j, u_i) = 0$, если $j \notin G_i$. Если число элементов $G_i$ «мало», то матрица жесткости $(a(u_j, u_i))$ будет «малозаполненной», т. е. содержащей много нулей. Это весьма желательное свойство, так как решение системы линейных алгебраических уравнений с малозаполненной матрицей осуществляется гораздо быстрее, нежели с «полной матрицей».

Будем говорить, что базис $u_1, \ldots, u_N$ подпространства $U^*$ является базисом *типа конечных элементов*, если «мало» число элементов множества $G_i$. Точнее, мы будем рассматривать далее множество $\Gamma$ подпространств $U^*$ и будем говорить о конечном элементе, если существует целое $M$, такое, что все множества $G_i$ всех $U^* \subset \Gamma$ содержат не более $M$ элементов.

По существу неявно предполагается, что элементы базиса типа конечных элементов имеют «малые» носители. Легко понять, что это свойство облегчает выбор функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

Единственные функции, которые достаточно просто вычислить, суть аналитические функции. В основном это полиномы и рациональные функции. Однако эти функции имеют некомпактные носители. Следовательно, единственная возможность состоит, по-видимому, в рассмотрении кусочно-аналитических функций. Как уже упоминалось в замечании 4 в конце § 2, основная трудность заключается тогда в «сопряжении» кусков таким образом, чтобы функция в целом была бы достаточно высокого класса гладкости.

**Инженерный метод построения.** а) Разобьем $\bar{\Omega}$ на подмножества $e_1, e_2, \ldots, e_E$, называемые элементами, такие, что

1) $e_i$ является замыканием некоторой регулярной области, $i=1, 2, \ldots, E$;

2) $\operatorname{mes}(e_i \cap e_j) \begin{cases} =0, & \text{если } i \neq j, \\ \neq 0, & \text{если } i=j; \end{cases}$

3) $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{E} e_i$.

б) Выберем не обязательно различные точки $P_1, \ldots, P_N \in \bar{\Omega}$, называемые узлами. Узлу $P_i$ сопоставим дифференциальный линейный функционал $F_i\colon f \to \sum_s a_{is} D^s f(P_i)$, где $a_{is}$ — постоянные коэффициенты, $s=(s_1, \ldots, s_n)$.

в) Пусть $Q_k = \{i\colon P_i \in e_k\}$. Для $k=1, 2, \ldots, E$ выберем пространство $V_k$ определенных на $e_k$ функций, таких, что задача интерполяции: *для произвольных заданных коэффициентов* $c_i$, $i \in Q_k$, *найти такую* $v \in V_k$, *что* $F_i(v)=c_i$, $i \in Q_k$, — имеет одно и только одно решение.

г) Элемент $u \in U^*$ получается следующим образом. Задаются произвольные числа $c_1, c_2, \ldots, c_N$. На каждом $e_k$ строится функция $v_k \in V_k$, такая, что $F_i(v_k)=c_k$, $i \in Q_k$. Далее полагаем, что сужение $u$ на $e_k$ совпадает с $v_k$, а $F_i$ определяется как функционал, действующий из $U^*$ в $\mathbf{R}$ по правилу $F_i(u)=c_i$.

д) В качестве базиса $U^*$ выбираем базис Лагранжа $u_1, \ldots, u_N$, ассоциированный с функционалами $F_1, \ldots, F_N$ ($u_i$ определяется соотношениями $u_i \in U^*$, $F_j(u_i) = \delta_{ij}$).

Замечание 1. Для того чтобы в) имело смысл, необходимо, чтобы функционал $F_i$, формально определенный в б), был корректно определен на $V_k$ для $i \in Q_k$. Фактически это означает, что если $B$ есть максимальный порядок производных, участвующих в определении $F_i$ для $i \in Q_k$, то необходимо, чтобы $V_k \subset C^B(e_k)$.

Замечание 2. Для того чтобы г) имело смысл, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $P$, принадлежащей пересечению двух элементов $e_i$ и $e_j$, выполнялось равенство $v_i(P) = v_j(P)$. Тогда можно проверить, что

а) если $V_k \subset C^0(e_k)$, $k = 1, \ldots, E$, то $U^* \subset C^0(\bar{\Omega})$;

б) если $V_k \subset C^1(e_k)$, $k = 1, \ldots, E$, то $U^* \subset C^1_l(\bar{\Omega})$.

Замечание 3. Размерность $U^*$ равна $N$. Для проверки достаточно заметить, что функции $u_1, u_2, \ldots, u_N$ эффективно независимы и образуют базис $U^*$.

Замечание 4. Пусть $u \in U^*$ и $F_i(u) = 0$ для $i \in Q_k$. По самому построению $u$ сужение $u$ на $e_k$ будет нулем.

Замечание 5. Пусть $R_i = \{k\colon P_i \in e_k\}$. По предыдущему замечанию носитель $u_i$ является подмножеством в $\bigcup\limits_{k \in R_i} e_k$.

Пример. Пусть $\bar{\Omega} = [0, 1]$. Пусть $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_E = 1$, $e_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, E$, $P_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, E$, $F_i(f) = f(x_i)$. Имеем $Q_1 = \{1\}$, $Q_k = \{k-1, k\}$, $k = 2, \ldots, E$. Предположим, кроме того, что $V_1$ — множество функций вида $ax$, а $V_k$, $k = 2, \ldots, E$, — множество функций вида $ax + b$. Непосредственно проверяем, что $U^*$ — множество непрерывных функций, линейных на каждом элементе $e_k$ и обращающихся в нуль в точке $x = 0$. Функции $u_1$, $u_i$ $(2 \leqslant i \leqslant E-1)$ и $u_E$ изображены на рис. 4, 5 и 6. Наконец (замечание 5), $R_i = \{i, i+1\}$, $i = 1, 2, \ldots, E-1$, и $R_E = \{E\}$.

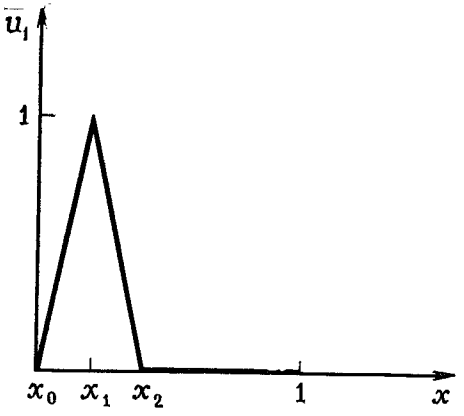


Рис. 4.

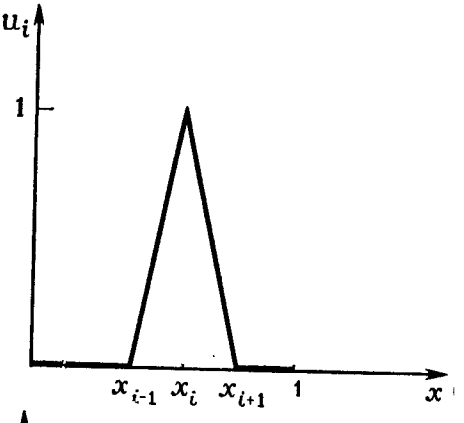


Рис. 5.

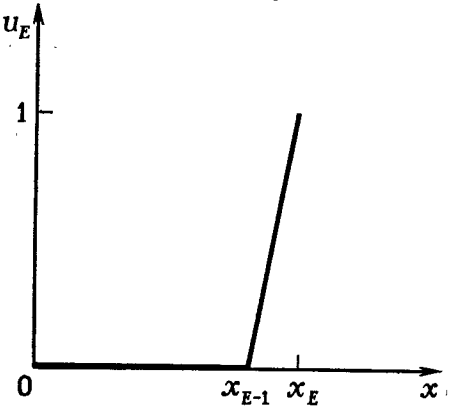


Рис. 6.

# II. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ТИПА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ[1]) ИНЖЕНЕРНЫМ МЕТОДОМ

## 1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Пусть $U$ — линейное пространство размерности $N$, и пусть $F_1, \ldots, F_N$ суть $N$ линейных функционалов на $U$. Рассмотрим следующую задачу «интерполяции»: по заданным $c_1, c_2, \ldots, c_N \in \mathbf{R}$ найти такое $u \in U$, что $F_i(u) = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

**Теорема II.1.1.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Для любых $c_1, \ldots, c_N$ задача имеет по крайней мере одно решение.*

2) *Для любых $c_1, \ldots, c_N$ задача имеет не более одного решения.*

3) *Для любых $c_1, \ldots, c_N$ задача имеет единственное решение.*

4) *Для $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = 0$ решением задачи будет лишь $u = 0$.*

Это элементарная теорема линейной алгебры, и поэтому мы ее доказывать не будем.

Предположим, что одно из этих свойств и, следовательно, все остальные выполняются. Тогда существует единственный элемент $u_i \in U$, удовлетворяющий условиям $F_j(u_i) = \delta_{ij}$, $j = 1, \ldots, N$. Элементы $u_1, \ldots, u_N$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис $U$, называемый «базисом Лагранжа» относительно функционалов $F_1, \ldots, F_N$. Следовательно, данная задача допускает решение

$$u = \sum_{j=1}^{N} c_j u_j.$$

---

[1]) Под пространством типа конечных элементов здесь и далее понимается конечномерное линейное пространство с базисом из функций с конечными носителями. — *Прим. перев.*

Обратно, предположим, что существует базис Лагранжа, т. е. элементы $u_i \in U$, такие, что $F_j(u_i) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, N$. Тогда вновь проверяем, что $u = \sum_{j=1}^{N} c_j u_j$ является решением задачи. Это означает, что выполнено утверждение 1 теоремы II.1.1, а, следовательно, также и утверждения 2, 3 и 4.

**Теорема II.1.2.** *Пусть $U$ — множество полиномов степени $N-1$ от одной переменной, $x_1, \ldots, x_k$ — различные точки в $\mathbf{R}$, а $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — положительные целые числа, такие, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$. Задача интерполяции: найти такое $u \in U$, что*

$$u^{(j)}(x_i) = c_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots, n_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{1}$$

*для произвольных заданных коэффициентов $c_{ij}$, — имеет одно и только одно решение.*

Доказательство. Рассмотрим $N$ функционалов $F_{ij}(v) = v^{(j)}(x_i)$. По теореме II.1.1 достаточно показать, что если $c_{ij} = 0$, то $u = 0$. Однако для фиксированного $i$ условия $c_{i0} = \ldots = c_{i, n_i - 1} = 0$ означают, что $x_i$ есть нуль порядка $n_i$ полинома $u$. Стало быть, $u$ имеет вид $d \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)^{n_i}$, т. е. является полиномом степени $N$ и, следовательно, $d = 0$.

## 2. ОДНОМЕРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Пусть $\bar{\Omega} = [a, b]$. Разобьем $\bar{\Omega}$ на отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, E$, $x_0 = a$, $x_E = b$; $[x_{i-1}, x_i]$ есть элемент $e_i$; $x_0, x_1, \ldots, x_E$ — узлы. Для целого положительного $m$ рассмотрим $m(E+1) = N$ функционалов $F_{ij}(f) = f^{(j-1)}(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, E$, $j = 1, 2, \ldots, m$, а через $V_i$ обозначим множество сужений на $e_i$ полиномов степени $2m - 1$. По теореме II.1.2 задача интерполяции: *найти такое $v \in V_i$, что $v^{(j)}(x_{i-1})$ и $v^{(j)}(x_i)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, принимают произвольные заданные значения,* — имеет одно и только одно решение.

Пространство $U$ типа конечных элементов есть множество функций $u$, которые строятся следующим образом. Зададим в $x_0, \ldots, x_E$ произвольные значения функции и ее $(m-1)$ первых производных. Сужение $u$ на $e_i$ есть полином степени $2m-1$, удовлетворяющий заданным условиям на концах отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда $U \subset C_l^m[a, b]$.

Пусть $u_{ij}$ — базис Лагранжа, ассоциированный с функционалами $F_{ij}$, т. е. $u_{ij} \in U$, $u_{ij}^{(l-1)}(x_k) = \delta_{ik}\delta_{jl}$, $i, k = 0, 1, \ldots, E$, $j, l = 1, 2, \ldots, m$. Для $i \neq 0, E$ элемент $u_{ij}$ имеет носитель $e_i \cup e_{i+1}$, а элементы $u_{0j}$ и $u_{Ej}$ имеют соответственно носители $e_1$ и $e_E$.

Замечание. Нетрудно ввести краевые условия. Предположим, что требуется построить пространство $U^* \subset C_l^2(\bar{\Omega})$ функций $u$, удовлетворяющих краевым условиям $u(0) = u'(0) = 0$. Поступаем, как описано выше в случае $m = 2$, с той разницей, что

а) функционалы $F_{ij}$ рассматриваются только для $i = 1, \ldots, E$, $j = 1, 2$;

б) $V_1$ есть множество сужений на $e_1$ полиномов степени 3, обращающихся в нуль вместе со своей первой производной в точке $x = 0$. Базис Лагранжа образуют функции $u_{ij}$, определенные выше для $i = 1, 2, \ldots, E$, $j = 1, 2$.

Пример. Выразим в явном виде сужения на $e_i$ функций $u_{i-1,1}$, $u_{i-1,2}$, $u_{i1}$ и $u_{i2}$ для случая $m = 2$. Для этого удобно перейти к отрезку $[0, 1]$. Пусть $\varphi$ — аффинное отображение, переводящее $[x_{i-1}, x_i]$ в $[0, 1]$. Через $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, $\Lambda_3$, $\Lambda_4$ обозначим полиномы степени 3, определенные условиями (теорема II.1.2)

$$\begin{array}{llll}
\Lambda_1(0) = 1, & \Lambda_1'(0) = 0, & \Lambda_1(1) = 0, & \Lambda_1'(1) = 0, \\
\Lambda_2(0) = 0, & \Lambda_2'(0) = 1, & \Lambda_2(1) = 0, & \Lambda_2'(1) = 0, \\
\Lambda_3(0) = 0, & \Lambda_3'(0) = 0, & \Lambda_3(1) = 1, & \Lambda_3'(1) = 0, \\
\Lambda_4(0) = 0, & \Lambda_4'(0) = 0, & \Lambda_4(1) = 0, & \Lambda_4'(1) = 1.
\end{array}$$

Полагая $h_i = x_i - x_{i-1}$, непосредственно проверяем, что (см. рис. 7—10)

$$u_{i-1,1} = \Lambda_1 \circ \varphi, \quad u_{i-1,2} = h_i \Lambda_2 \circ \varphi,$$
$$u_{i,1} = \Lambda_3 \circ \varphi, \quad u_{i,2} = h_i \Lambda_4 \circ \varphi.$$

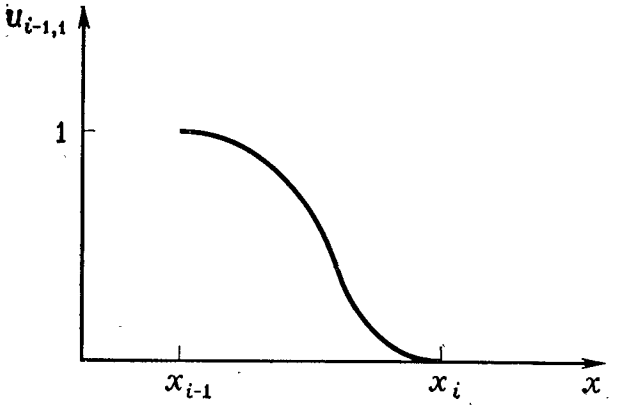


Рис. 7.

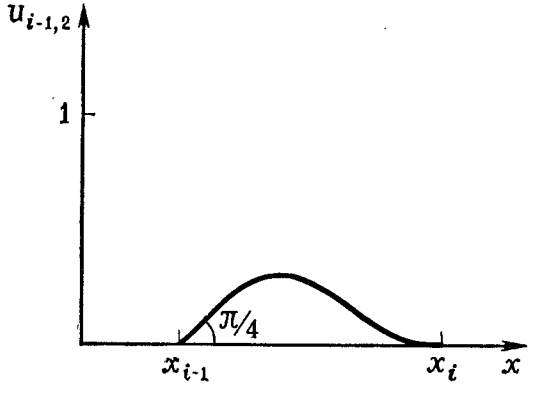


Рис. 8.

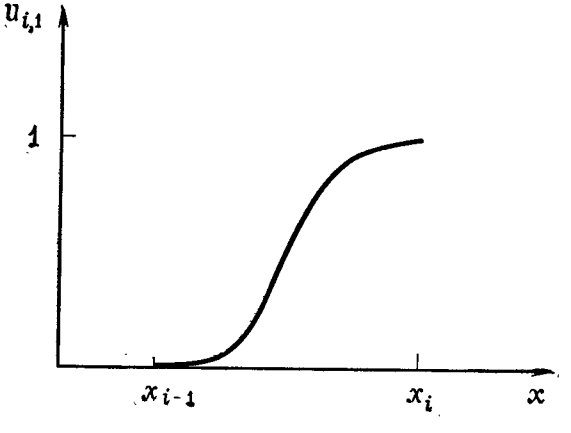


Рис. 9.

Что касается функций $\varphi$ и $\Lambda_i$, то они задаются следующим образом:

$$\varphi(x) = -(x - x_i)/h_i,$$
$$\Lambda_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \quad \Lambda_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi,$$
$$\Lambda_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2, \quad \Lambda_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2.$$

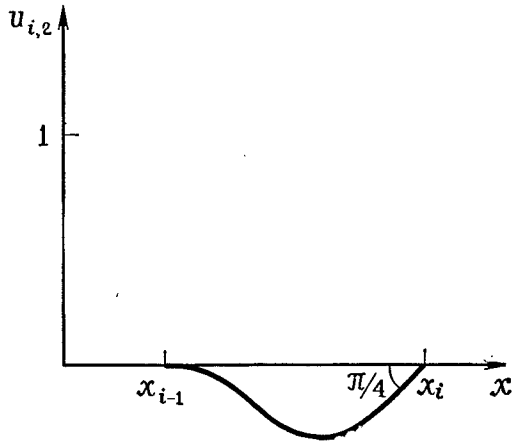


Рис. 10.

## 3. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТИПА I

Пусть (теорема II.1.2) $\alpha_i$ и $\beta_i$ — полиномы степени $2m-1$, определенные соотношениями $\alpha_i^{(j-1)}(0) = \delta_{ij}$, $\alpha_i^{(j-1)}(1) = 0$, $\beta_i^{(j-1)}(0) = 0$, $\beta_i^{(j-1)}(1) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через $C$ квадрат $0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1$ с вершинами $Q_1(0, 0)$, $Q_2(1, 0)$, $Q_3(1, 1)$, $Q_4(0, 1)$ и определим функционалы $G_{k,i,j}$ формулой

$$G_{k,i,j}(f) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} f(Q_k).$$

**Лемма II.3.1.** *Задача интерполяции: найти полином $p(\xi, \eta)$ степени $2m-1$ по $\xi$ и степени $2m-1$ по $\eta$, принимающий произвольные заданные значения для функционалов $G_{k,i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, 4$, — имеет одно и только одно решение. Базис Лагранжа из элемен-*

*тов* $\Lambda_{k,i,j}$, *ассоциированный с функционалами* $G_{k,i,j}$, *задается соотношениями*

$$\Lambda_{1,i,j}(\xi,\ \eta)=\alpha_i(\xi)\,\alpha_j(\eta),\qquad \Lambda_{2,i,j}(\xi,\ \eta)=\beta_i(\xi)\,\alpha_j(\eta),$$
$$\Lambda_{3,i,j}(\xi,\ \eta)=\beta_i(\xi)\,\beta_j(\eta),\qquad \Lambda_{4,i,j}(\xi,\ \eta)=\alpha_i(\xi)\,\beta_j(\eta).$$

Доказательство. Как число функционалов, так и размерность пространства полиномов степени $2m-1$ отдельно по каждой из переменных $\xi$ и $\eta$ равны $4m^2$. В силу результатов § 1 достаточно проверить (это делается непосредственно), что функции $\Lambda_{k,i,j}$ действительно образуют базис Лагранжа, т. е.

$$G_{e,m,n}(\Lambda_{k,i,j})=\delta_{ek}\delta_{mi}\delta_{nj}.$$

Пусть $R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_E$ — замкнутые прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат $x$ и $y$, причем любые два прямоугольника либо не пересекаются, либо имеют общую сторону или общую вершину. Положим $\overline{\Omega}=\bigcup\limits_{i=1}^{E} R_i$. Пусть $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_M$ — множество вершин этих прямоугольников. Узлу $P_k$ сопоставим $m^2$ функционалов

$$F_{k,i,j}(f)=\frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1}\,\partial y^{j-1}}f(P_k),\qquad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Пусть $V_i$ — множество сужений на $R_i$ полиномов степени $2m-1$ отдельно по $x$ и $y$.

Пространство $U$ состоит из функций $u$, определенных на $\overline{\Omega}$ и строящихся следующим образом. Произвольно задаются значения $c_{k,i,j}$. Пусть $v_n\in V_n$ таково, что $F_{k,i,j}(v_n)=c_{k,i,j}$ для $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ и для четырех значений индекса $k$, таких, что $P_k\in R_n$, $n=1,\ \ldots,\ E$. Тогда $v_n$ есть сужение $u$ на $R_n$.

**Теорема II.3.1.** *Имеем*

$$U\subset C_I^m(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. Рассуждения, проведенные при доказательстве леммы II.3.1, переносятся на случай произвольного прямоугольника $R_n$ и гарантируют существование и единственность $v_n\in V_n$. Рассмотрим два прямоугольника $R_1$ и $R_2$ (рис. 11), имеющих общую сторону,

задаваемую условиями $y=c$, $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть $v_1$ и $v_2$ — сужения на $R_1$ и $R_2$ элемента $u \in U$, $q_{k,i}(x) = \frac{\partial^i}{\partial y^i} v_k(x, c)$, $i=0, 1, \ldots, m-1$, $k=1, 2$. Покажем, что $q_{1,i}(x) = q_{2,i}(x)$,

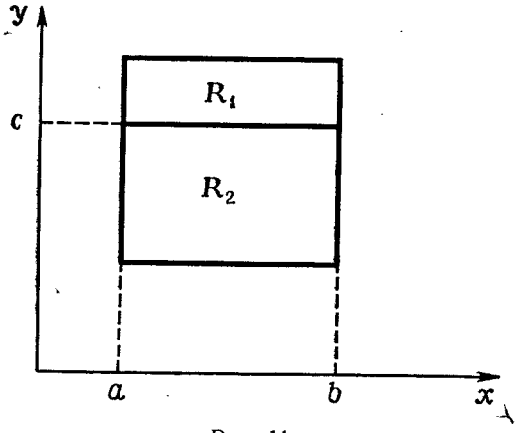


Рис. 11.

$i=0, 1, \ldots, m-1$. Функции $q_{1,i}$ и $q_{2,i}$ суть полиномы степени $2m-1$, удовлетворяющие по построению соотношениям

$$q_{1,i}^{(j)}(a) = q_{2,i}^{(j)}(a), \quad q_{1,i}^{(j)}(b) = q_{2,i}^{(j)}(b), \quad j=0, 1, \ldots, m-1.$$

Следовательно, остается сослаться на теорему II.1.2.

Замечание. Пусть $u_{k,i,j}$ — базис Лагранжа для $U$ относительно функционалов $F_{k,i,j}$. Предположим, что прямоугольник $R_1$ имеет вершины в точках $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_1)$, $P_3(x_2, y_2)$, $P_4(x_1, y_2)$, где $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$. Пусть $\varphi$ — аффинное отображение плоскости $xy$ в плоскость $\xi\eta$, такое, что $Q_k = \varphi(P_k)$, $k=1, 2, 3, 4$. Легко проверить, что сужения $L_{k,i,j}$ элементов $u_{k,i,j}$ на $R_1$ задаются формулами

$$L_{k,i,j} = d^{i-1} e^{j-1} \Lambda_{k,i,j} \circ \varphi, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots, 4,$$

где $d = x_2 - x_1$, $e = y_2 - y_1$ и $\Lambda_{k,i,j}$ определены в лемме II.3.1.

## 4. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТИПА II

Пусть $\alpha_i$, $i=0, 1, \ldots, m$, — базис Лагранжа, ассоциированный с интерполяционной задачей: найти полином степени $m$, принимающий заданные значения в точках $t_i = i/m$, $i=0, 1, \ldots, m$. Непосредственно проверяем, что

$$\alpha_i(t) = \frac{\prod\limits_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (t_i - t_j)}.$$

**Лемма II.4.1.** *Пусть $\xi_i = i/m$, $\eta_j = j/m$, $i, j = 0, 1, \ldots, m$. Задача интерполяции: найти полином степени $m$ отдельно по каждой из переменных $\xi$ и $\eta$, принимающий заданные значения в $(m+1)^2$ точках $(\xi_i, \eta_j)$, — имеет одно и только одно решение. Базис Лагранжа, ассоциированный с этой задачей, т. е. с функционалами $F_{ij}$, такими, что $F_{ij}(f) = f(\xi_i, \eta_j)$, задается соотношениями*

$$\Lambda_{ij}(\xi, \eta) = \alpha_i(\xi)\, \alpha_j(\eta), \qquad i, j = 0, 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Число функционалов и размерность пространства полиномов степени $m$ отдельно по $\xi$ и $\eta$ равны $(m+1)^2$. В силу результатов § 1 достаточно проверить (это делается непосредственно), что функции, указанные в лемме, действительно образуют базис Лагранжа.

Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_E$ — замкнутые прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат $x$ и $y$, причем любые два прямоугольника либо не пересекаются, либо имеют общую сторону или общую вершину. Положим $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i=1}^{E} R_i$. Каждый прямоугольник разобьем на $m^2$ равных прямоугольников. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_N$ — вершины всех полученных таким образом прямоугольников. Каждому узлу $P_i$ сопоставим функционал $F_i$, такой, что $F_i(f) = f(P_i)$, а каждому элементу $R_k$ — пространство $V_k$, образованное сужениями на $R_k$ полиномов степени $m$ отдельно по $x$ и $y$. Пространство $U$ является множеством функций $u$, определенных на $\overline{\Omega}$ и строящихся следующим образом. Задаются произвольные значения $c_i$. Пусть $v_k \in V_k$ таково, что $F_i(v_k) = c_i$ для всех значений индекса $i$, таких, что $P_i \in R_k$. Тогда $v_k$ есть сужение $u$ на $R_k$.

**Теорема II.4.1.** *Имеем*

$$U \subset C_1^1(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. Как и в лемме II.4.1, непосредственно доказывается, что $v_k$ полностью определены. Тогда достаточно показать, что если $R_1$ и $R_2$ имеют общую сторону, то вдоль этой стороны $v_1 = v_2$ (рис. 11). Пусть $a \leqslant x \leqslant b$, $y = c$ — уравнение этой стороны. Функции $v_1(x, c)$ и $v_2(x, c)$ являются полиномами степени $m$, совпадающими по построению для $x = a + i(b-a)/m$, $i = 0, 1, \ldots, m$; следовательно, они равны всюду (теорема II.1.2).

Замечание 1. Как и в предыдущем параграфе, сужения на прямоугольник функций базиса Лагранжа легко выразить в явном виде с помощью функций $\Lambda_{ij}$ леммы II.4.1.

Замечание 2. Пусть $u_i \in U$ и $F_j(u_i) = \delta_{ij}$. Если $P_i$ — внутренняя точка $R_k$, то $R_k$ является носителем $u_i$. Если $P_i$ — внутренняя точка какой-нибудь стороны $l$, то носитель $u_i$ состоит из двух прямоугольников, имеющих $l$ общей стороной. Наконец, если $P_i$ — вершина прямоугольника, то носитель $u_i$ образован четырьмя прямоугольниками, для которых $P_i$ — общая вершина.

**Частный случай $m = 2$.** Рассмотрим прямоугольник типа $R$ и узлы $P_1, P_2, \ldots, P_9$ (рис. 12). Пусть $L_i$ — сужение на $R$ функции $u_i$ из базиса Лагранжа, относящейся к $F_i(f) = f(P_i)$, $i = 1, \ldots, 9$, и пусть $u \in U$, $c_i = u(P_i)$. Функция $v$, являющаяся сужением $u$ на $R$, задается равенством $v = \sum_{i=1}^{9} c_i L_i$. Изменение коэффициента $c_9$ влечет за собой изменение $u$ только внутри $R$. Функционал, относящийся к $P_9$, можно «исключить», считая $c_9$ зависящим от параметров $c_1, c_2, \ldots, c_8$. Наиболее разумный способ определения $c_9$ состоит в том, что коэффициент при $x^2y^2$ в выражении для $v$ приравнивается нулю. Тогда $v = \sum_{i=1}^{8} c_i \tilde{L}_i$. Найдем $\tilde{L}_i$ для частного случая квадрата $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ (общий случай получается отсюда аффинным преобразованием). Имеем $\tilde{L}_i = L_i - w_i L_9$, где коэффициент

$w_i$ выбирается таким образом, чтобы $\tilde{L}_i$ не содержало слагаемого $x^2y^2$. Полагая

$$\alpha_0(x) = 2(x-0{,}5)(x-1), \qquad \alpha_1(x) = -4x(x-1),$$
$$\alpha_2(x) = 2x(x-0{,}5),$$

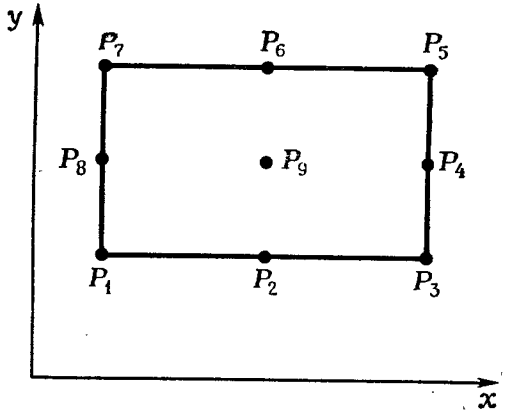


Рис. 12.

получаем следующую таблицу:

*Таблица II.1*

| $P_i(x_i, y_i)$ | $L_i(x, y)$ | $w_i$ | $\tilde{L}_i$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ (0, 0) | $\alpha_0(x)\alpha_0(y)$ | 0,25 | $\alpha_0(x)\alpha_0(y) - 0{,}25\alpha_1(x)\alpha_1(y)$ |
| $P_2$ (0,5, 0) | $\alpha_1(x)\alpha_0(y)$ | —0,5 | $\alpha_1(x)(\alpha_0(y) + 0{,}5\alpha_1(y))$ |
| $P_3$ (1, 0) | $\alpha_2(x)\alpha_0(y)$ | 0,25 | $\alpha_2(x)\alpha_0(y) - 0{,}25\alpha_1(x)\alpha_1(y)$ |
| $P_4$ (1, 0,5) | $\alpha_2(x)\alpha_1(y)$ | —0,5 | $(\alpha_2(x) + 0{,}5\alpha_1(x))\alpha_1(y)$ |
| $P_5$ (1, 1) | $\alpha_2(x)\alpha_2(y)$ | 0,25 | $\alpha_2(x)\alpha_2(y) - 0{,}25\alpha_1(x)\alpha_1(y)$ |
| $P_6$ (0,5, 1) | $\alpha_1(x)\alpha_2(y)$ | —0,5 | $\alpha_1(x)(\alpha_2(y) + 0{,}5\alpha_1(y))$ |
| $P_7$ (0, 1) | $\alpha_0(x)\alpha_2(y)$ | 0,25 | $\alpha_0(x)\alpha_2(y) - 0{,}25\alpha_1(x)\alpha_1(y)$ |
| $P_8$ (0, 0,5) | $\alpha_0(x)\alpha_1(y)$ | —0,5 | $(\alpha_0(x) + 0{,}5\alpha_1(x))\alpha_1(y)$ |
| $P_9$ (0,5, 0,5) | $\alpha_1(x)\alpha_1(y)$ | — | — — — — — — — — — — — — |

**Частный случай $m = 1$.** Множество $U$ характеризуется следующими свойствами:

1) значения функции $u \in U$ заданы в вершинах прямоугольников;

2) сужение $u$ на каждый из прямоугольников имеет вид $a_1+a_2x+a_3y+a_4xy$.

## 5. ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

**Лемма II.5.1.** *Пусть $l$ — прямая на плоскости $xy$, описываемая уравнением $ax+by+c=0$, $a^2+b^2=1$. Если некоторый полином $p$ обладает тем свойством, что $\frac{d^ip}{dn^i}=0$ (где $n$ — нормаль к $l$) вдоль $l$ при $0\leqslant i\leqslant k$, то $p$ делится на $(ax+by+c)^{k+1}$, т. е. существует такой полином $q$, что $p(x, y)=(ax+by+c)^{k+1}q(x, y)$.*

Доказательство. Рассмотрим замену переменных $\xi=ax+by+c$, $\eta=-bx+ay$, которая определяет биективное соответствие между плоскостями $xy$ и $\xi\eta$ (вращение и сдвиг). Пусть $\rho(\xi, \eta)=p(x, y)$. Тогда $\rho$ — полином, который можно записать в виде $\sum\limits_{i=0}\xi^i\sum\limits_{j=0}a_{ij}\eta^j$, причем $\frac{\partial^i}{\partial\xi^i}\rho(0, \eta)=0$, $i=0, 1, \ldots, k$. Отсюда заключаем, что $a_{ij}=0$ для $i=0, 1, \ldots, k$ и, следовательно, $\rho$ имеет вид $\rho(\xi, \eta)=\xi^{k+1}w(\xi, \eta)$. Выражая это соотношение через переменные $x$ и $y$, получаем требуемый результат.

В этом параграфе будут использованы следующие обозначения. Через $T_1, T_2, \ldots, T_E$ обозначаются замкнутые треугольники на плоскости $xy$. Два треугольника либо не пересекаются, либо имеют общую сторону или общую вершину. Полагаем $\overline{\Omega}=\bigcup\limits_{i=1}^{E}T_i$. Пусть, кроме того, $\triangle$ — замкнутый треугольник в плоскости $\xi\eta$ с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

**Полиномы степени 1.** Пусть $P_1, P_2, \ldots$ — множество вершин всех треугольников $T_1, \ldots, T_E$. Пространство $U$ определяется следующим образом:

1) задаются значения $u\in U$ в точках $P_1, P_2, \ldots$;

2) сужение $u$ на каждый треугольник является функцией вида $ax+by+c$.

Очевидна следующая теорема.

**Теорема II.5.1.** *Для полиномов степени* 1 *имеем*

$$U \subset C_l^1(\overline{\Omega}).$$

**Полиномы степени 2.** Пусть $P_1, P_2, \ldots$ — множество вершин и точек, являющихся серединами сторон, всех треугольников $T_1, T_2, \ldots, T_E$. Пространство $U$ строится следующим образом:

1) задаются значения $u \in U$ в узлах $P_1, P_2, \ldots$;

2) сужение $u$ на каждый треугольник является полиномом степени 2.

**Теорема II.5.2.** *Для полиномов степени* 2 *имеем*

$$U \subset C_l^1(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. а) Пусть $T_1$ — треугольник с узлами $P_1, P_2, \ldots, P_6$ и сторонами $l_i$, описываемыми

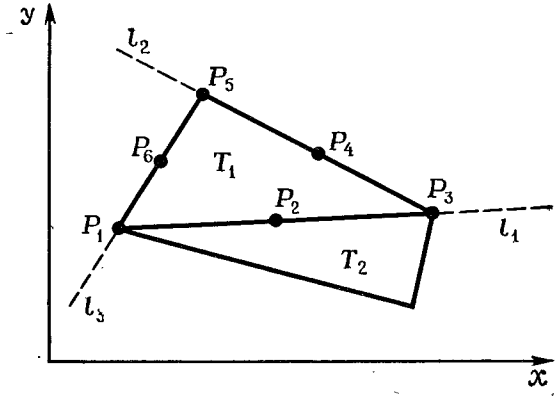


Рис. 13.

уравнениями $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$ (рис. 13). Проверим, что задача интерполяции: *найти полином $p$ степени* 2, *принимающий заданные значения в точках* $P_1, \ldots, P_6$, — имеет одно и только одно решение. Заметим, что как число функционалов $F_i(f) = f(P_i)$, так и размерность пространства полиномов степени 2 от двух переменных равны шести. Тогда достаточно (теорема II.1.1) показать, что единственным полиномом сте-

пени 2, обращающимся в нуль в $P_1, P_2, \ldots, P_6$, является тождественный нуль. Вдоль $l_i$ полином $p$ является полиномом степени 2 по отношению к координате на $l_i$, на которой он обращается в нуль в трех точках. Следовательно (теорема II.1.2), $p$ есть тождественный нуль вдоль $l_i$. Лемма II.5.1 позволяет записать $p(x, y) = (a_1x + b_1y + c_1)\, p_1(x, y)$, где $p_1$ — полином, обращающийся в нуль вдоль $l_2$ и $l_3$. Применяя еще два раза лемму II.5.1, получаем в результате, что $p(x, y) = p_3(x, y) \prod_{i=1}^{3} (a_ix + b_iy + c_i)$. Так как $p$ степени 2, то это возможно только в случае, когда $p_3$ — тождественный нуль.

б) Пусть $T_1$ и $T_2$ имеют общую сторону $l_1$ (рис. 13), и пусть $v_1$, $v_2$ — сужения $u \in U$ соответственно на $T_1$ и $T_2$. Покажем, что $v_1 = v_2$ вдоль $l_1$. По отношению к координате на $l_1$ функции $v_1$ и $v_2$ являются полиномами степени 2, принимающими равные значения в трех точках $P_1$, $P_2$, $P_3$. Остается сослаться на теорему II.1.2.

**Полиномы степени 3 типа I.** Пусть множество $P_1$, $P_2, \ldots$ образовано вершинами и центрами тяжести всех треугольников и точками разбиения, полученными делением всех сторон всех треугольников на 3 равные части. Следовательно, каждый треугольник $T_1, \ldots, T_E$ содержит 10 точек этого множества. Пространство $U$ строится следующим образом:

1) задаются значения $u \in U$ в узлах $P_1, P_2, \ldots$;

2) сужение $u \in U$ на каждый из треугольников $T_1, \ldots, T_E$ является полиномом степени 3.

**Теорема II.5.3.** *Для полиномов степени* 3 *типа* I *имеем*

$$U \subset C_1^1(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. а) Рассмотрим треугольник $T_1$ с узлами $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ (рис. 14). Пусть его стороны $l_i$ задаются уравнениями $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$. Покажем, что задача: найти полином степени 3, принимающий произвольные заданные значения в точках $P_1, \ldots, P_{10}$, — имеет одно и только одно решение. Заметим, что как число функционалов $F_i(f) = f(P_i)$, так и размерность пространства полиномов степени 3 от двух

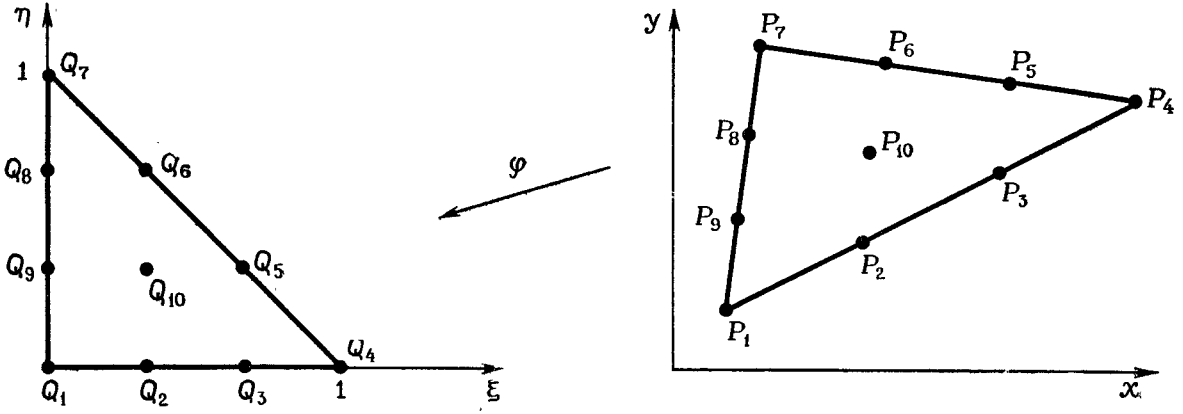


Рис. 14.

переменных равны 10. Следовательно (теорема II.1.1), достаточно показать, что единственным полиномом $p$ степени 3, обращающимся в нуль в $P_1, \ldots, P_{10}$, является тождественный нуль. Как и в теореме II.5.2, воспользуемся леммой II.5.1 и покажем, что $p(x, y) = c \prod_{i=1}^{3} (a_i x + b_i y + c_i)$. Выбирая в качестве $x$ и $y$ координаты центра тяжести $P_{10}$ рассматриваемого треугольника, убеждаемся, что постоянная $c$ равна нулю.

б) Поступаем так же, как в пункте б) доказательства теоремы II.5.2.

Замечание (по поводу полиномов степени 3 типа I). Пусть $\varphi$ — аффинное отображение плоскости $xy$ в плоскость $\xi\eta$, переводящее треугольник $T_1$ в $\triangle$ и такое, что $Q_i = \varphi(P_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$ (рис. 14). Через $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{10}$ обозначим полиномы степени 3, определенные на $\triangle$ и такие, что $\Lambda_j(Q_i) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, 10$. Пусть, с другой стороны, $u_1, u_2, \ldots$ — базис Лагранжа для $U$, отвечающий функционалам $F_i(f) = f(P_i)$, а $L_1, L_2, \ldots, L_{10}$ — сужения $u_1, \ldots, u_{10}$ на $T_1$. Непосредственно проверяется, что

$$L_i = \Lambda_i \circ \varphi, \qquad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Подобное замечание можно было бы сформулировать и по поводу пространств $U$ полиномов степени 1 и полиномов степени 2, описанных выше.

**Полиномы степени 3 типа II.** Пусть $P_1, P_2, \ldots$ — множество вершин, а $S_1, S_2, \ldots, S_E$ — множество центров тяжести всех треугольников $T_1, T_2, \ldots, T_E$. Сопоставим точкам $P_i$ три функционала $F_{i1}(f) = f(P_i)$, $F_{i2}(f) = \partial_x f(P_i)$, $F_{i3}(f) = \partial_y f(P_i)$, а точкам $S_i$ — функционал $F_i(f) = f(S_i)$. Пространство $U$ определяется следующим образом:

1) для $u \in U$ задаются значения $F_{ik}(u)$, $k = 1, 2, 3$, и $F_i(u)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$;

2) сужение $u$ на каждый треугольник является полиномом степени 3.

**Теорема II.5.4.** *Для полиномов степени 3 типа II имеем*

$$U \subset C^1(\overline{\Omega}).$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы II.5.3.

Замечание (по поводу полиномов степени 3 типа II). Пусть $T_1$ — треугольник с вершинами $P_1$, $P_2$, $P_3$ и центром тяжести $S_1$, а $\varphi$ — аффинное отображение, преобразующее $T_1$ в $\triangle$ (рис. 15) и такое, что $Q_i = \varphi(P_i)$, $i = 1, 2, 3$, $R = \varphi(S_1)$. Положим для функционалов $G_{i1}(g) = g(Q_i)$, $G_{i2}(g) = \partial_\xi g(Q_i)$, $G_{i3}(g) = \partial_\eta g(Q_i)$, $i = 1, 2, 3$, и $G(g) = g(R)$, а через $\Lambda_{ik}$ и $\Lambda$ обозначим базис Лагранжа пространства полиномов степени 3, ассоциированный с функционалами $G_{ik}$ и $G$, $i$, $k = 1, 2, 3$. Пусть, наконец, $L_{ik}$ и $L$ — сужения на $T_1$ функций базиса Лагранжа из $U$, ассоциированного с функционалами $F_{ik}$ и $F_1$, $i$, $k = 1, 2, 3$. Обозначая через $a_{ij}$ элементы матрицы Якоби преобразования $\varphi^{-1}$, обратного к $\varphi$, легко проверить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L &= \Lambda \circ \varphi, \\ L_{i1} &= \Lambda_{i1} \circ \varphi, \\ L_{i2} &= a_{11}\Lambda_{i1} \circ \varphi + a_{21}\Lambda_{i2} \circ \varphi, \\ L_{i3} &= a_{12}\Lambda_{i1} \circ \varphi + a_{22}\Lambda_{i2} \circ \varphi, \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3.$$

**Полиномы степени 5 типа I.** Пусть $P_1$, $P_2$, ... — вершины треугольников $T_1$, $T_2$, ..., $T_E$, а $l_1$, $l_2$, ... — их стороны, и пусть $S_k$ — середина стороны $l_k$. Через $n_k$ обозначим единичную нормаль к $l_k$, направленную так, что если $l_k$ имеет концы $P_i$ и $P_j$ $(i < j)$, то вектор $P_iP_j$ и нормаль $n_k$ образуют положительно ориентированную пару. Каждой точке $P_i$ сопоставим шесть функционалов $F_{i1}(f) = F(P_i)$, $F_{i2}(f) = \partial_x f(P_i)$, $F_{i3}(f) = \partial_y f(P_i)$, $F_{i4}(f) = \partial_{xx} f(P_i)$, $F_{i5}(f) = \partial_{xy} f(P_i)$, $F_{i6}(f) = \partial_{yy} f(P_i)$, а каждой точке $S_k$ — функционал $F_k(f) = \frac{d}{dn_k} f(S_k)$. Пространство $U$ определяется следующим образом:

1) для $u \in U$ задаются значения $F_{ij}(u)$, $j = 1, 2, \ldots, 6$; $i = 1, 2, \ldots$, и $F_k(u)$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) сужение $u$ на всякий треугольник $T_i$ является полиномом степени 5.

**Теорема II.5.5.** *Для полиномов степени* 5 *типа* I *имеем*

$$U \subset C_1^2(\overline{\Omega}).$$

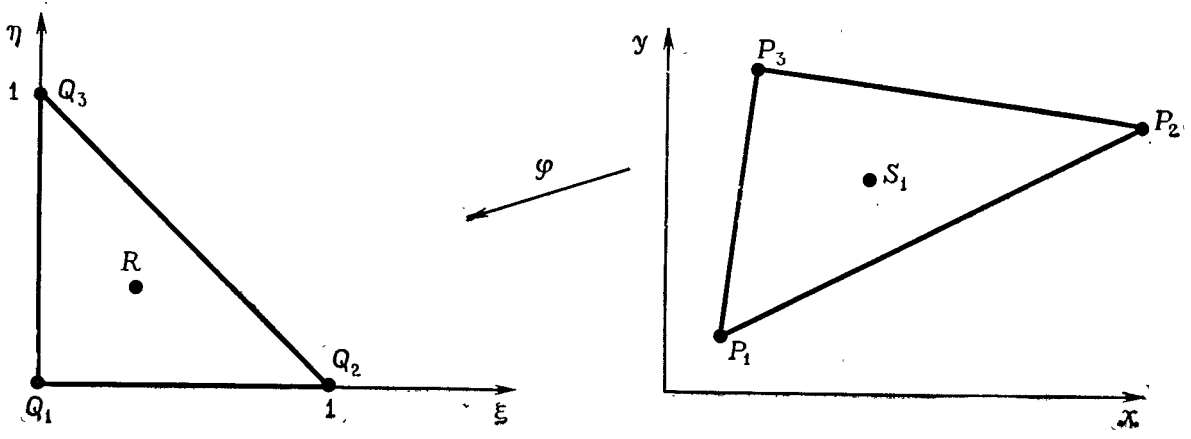


Рис. 15.

Доказательство. а) Рассмотрим треугольник $T_1$ с вершинами $P_1$, $P_2$, $P_3$, сторонами $l_1$, $l_2$, $l_3$ и точками $S_1$, $S_2$, $S_3$ — серединами этих сторон (рис. 16). Пусть $l_i$ описывается уравнением $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $a_i^2 + b_i^2 = 1$. Покажем, что задача: найти полином степени 5, такой, что функционалы $F_{ik}(p)$ и $F_i(p)$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \ldots, 6$, принимают произвольные заданные значения, — имеет одно

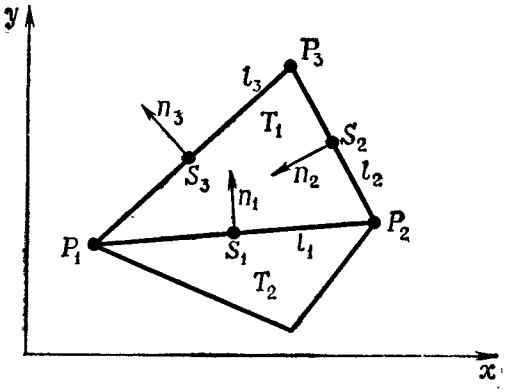


Рис. 16.

и только одно решение. Заметим, что число функционалов и размерность пространства полиномов степени 5 равны 21. Следовательно (теорема II.2.1), достаточно показать, что единственным полиномом $p$ степени 5, на котором все эти функционалы принимают нулевые значения, является тождественный нуль. Вдоль $l_i$ полином $p$ является полиномом степени 5 по отношению к координате на $l_i$, причем он обращается в нуль вместе со своими первыми двумя производными в концах $l_i$. Следовательно (теорема II.1.2), $p$ является тождественным нулем вдоль $l_i$. С другой стороны, $\frac{dp}{dn_i}$ является полиномом степени 4 вдоль $l_i$ по отношению к координате на $l_i$, причем этот полином обращается в нуль вместе со своей первой производной в концах $l_i$ и обращается в нуль в точке $S_i$. Следовательно (теорема II.1.2), он обращается в нуль вдоль $l_i$.

По лемме II.5.1 полином $p$ делится на $\prod_{i=1}^{3}(a_ix+b_iy+c_i)^2$, что возможно только в том случае, когда он является тождественным нулем.

б) Пусть $T_1$ и $T_2$ имеют общую сторону $l_1$ (рис. 16). Нужно показать, что сужения $v_1$ и $v_2$ элемента $u \in U$ и их нормальные производные совпадают вдоль $l_1$. Применяем теорему II.1.2. Вдоль $l_1$ элементы $v_1$ и $\frac{dv_1}{dn_1}$ являются полиномами степени соответственно 5 и 4, которые полностью определяются значениями функционалов, относящихся к концам $l_1$ и к $S_1$.

**Полиномы степени 5 типа II.** Пространство $U^*$, которое мы собираемся определить, является подпространством описанного выше пространства полиномов степени 5 типа I и получается «устранением» функционалов, относящихся к $S_i$. Будем использовать те же обозначения и тот же рис. 16. Элемент $u^* \in U^*$ строится следующим образом. Задаются значения $c_{ik}$ для $F_{ik}(u^*)$, $k=1, 2, \ldots, 6$, $i=1, 2, \ldots$. Тогда $u^*$ определяется как элемент из пространства $U$ (полиномов степени 5 типа I), удовлетворяющий заданным условиям и такой, что производная по нормали вдоль каждой стороны каждого из треугольников является полиномом степени 3 по отношению к координате на соответствующей стороне. Проверим согласованность этого определения. Пусть $u \in U$ таков, что $F_{ik}(u) = c_{ik}$, $k=1, 2, \ldots, 6$, $i=1, 2, 3, \ldots$. Сторону $l_j$ треугольника $T_n$ параметризуем с помощью координаты $s$ (естественная параметризация). Через $s_0$ и $s_1$ обозначим значения $s$, соответствующие концам $l_j$. Пусть $p(s)$ — нормальная производная от $u$ вдоль $l_j$. Тогда $p(s_0)$, $p'(s_0)$, $p(s_1)$, $p'(s_1)$ — величины, зависящие только от значений $c_{ik}$. Если $q(s)$ — полином степени 3, такой, что $q(s_0)=p(s_0)$, $q'(s_0)=p'(s_0)$, $q(s_1)=p(s_1)$, $q'(s_1)=p'(s_1)$, то положим $c_j=q((s_0+s_1)/2)$. Тогда $u^*$ — элемент из $U$, удовлетворяющий условиям $F_{ik}(u^*)=c_{ik}$, $k=1, 2, \ldots, 6$, $i=1, 2, \ldots$ $\ldots$, $F_j(u^*)=c_j$, $j=1, 2, \ldots$.

Замечание (по поводу полиномов степени 5 типов I и II). а) Если $u$ и $u^*$ являются сужениями на $\overline{\Omega}$ соответственно полиномов степени 5 и 4, то $u \in U$, $u^* \in U^*$.

б) Для других пространств типа конечных элементов, описанных в этой главе, сужения функций из базиса для $U$ или $U^*$ на отдельный треугольник могут быть получены исходя из функций, определенных на $\triangle$ раз и навсегда (см. [1, 2]).

## 6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Пусть $U$ — одно из пространств типа конечных элементов, описанных в § 2, 3, 4 или 5, $u$ — функция из базиса Лагранжа, $e$ — какой-то элемент. Заметим, что $e$, как и сужение $L$ функции $u$ на $e$, могут быть получены с помощью следующего построения. В плоскости $\xi\eta$ рассмотрим «основное» множество $\triangle$, которое является либо квадратом $0 \leqslant \xi,\ \eta \leqslant 1$, либо треугольником с вершинами (0, 0), (1, 0), (0, 1). На $\triangle$ раз и навсегда определим функции $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m$. Элемент $e$ является образом $\triangle$ при аффинном отображении $\psi$ плоскости $\xi\eta$ в плоскость $xy$, обратном к $\varphi$. Сужение $L$ есть линейная комбинация функций $\Lambda_1 \circ \varphi, \Lambda_2 \circ \varphi, \ldots, \Lambda_m \circ \varphi$, коэффициенты которой зависят от $\psi$.

Эту идею можно обобщить, если отказаться от требования, чтобы отображение $\psi$ было аффинным, что позволяет получать так называемые криволинейные элементы, граница которых состоит из непрямолинейных дуг.

Простую и эффективную реализацию криволинейных элементов составляют «изопараметрические» элементы. Поясним эту идею на двух примерах.

Пример 1. Рассмотрим рис. 17. Пусть (см. § 4) $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_8$ — функции вида $a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2$ и $\Lambda_i(Q_j) = \delta_{ij}$. Через $(x_i, y_i)$ обозначим координаты точек $P_i$, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Отображение $\psi$ определим соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{8} x_i \Lambda_i(\xi, \eta), \\ y &= \sum_{i=1}^{8} y_i \Lambda_i(\xi, \eta), \end{aligned} \qquad \xi, \eta \in \triangle = \{(\xi, \eta)\colon 0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1\}.$$

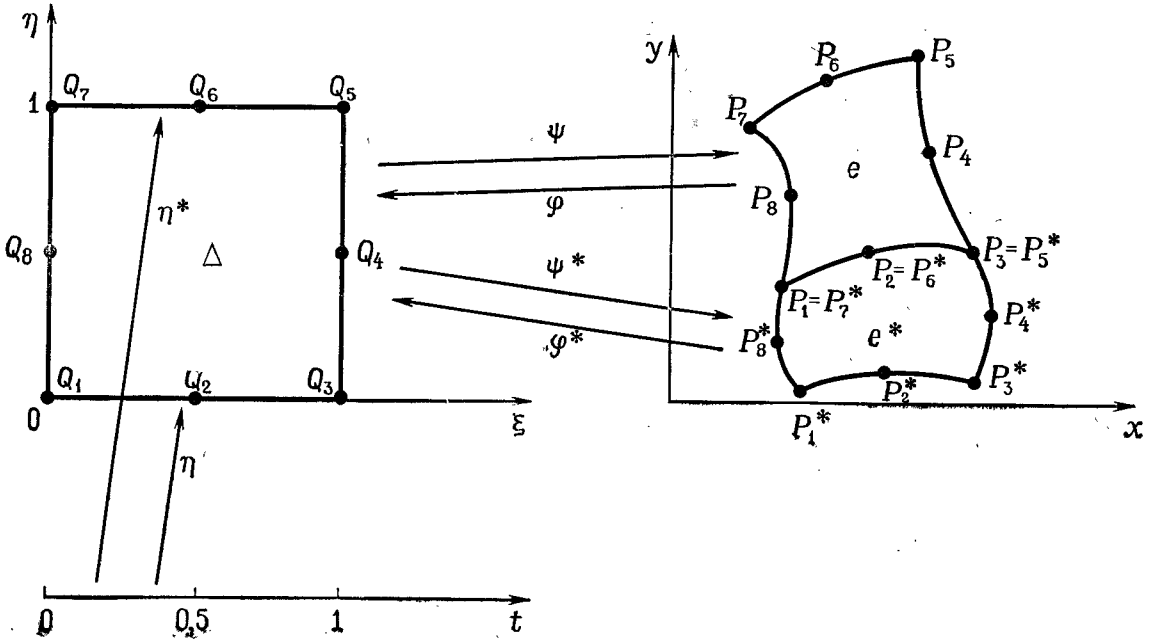
η
1
Q7
Q6
Q5
η*
Q8
Δ
Q4
Q1
Q2
Q3
0
ξ
η
0
0,5
1
t
ψ
φ
ψ*
φ*
y
P6
P5
P7
P4
e
P8
P3=P5*
P2=P6*
P1=P7*
P4*
P8*
e*
P3*
P2*
P1*
x

Рис. 17

Очевидно, что $P_i = \psi(Q_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Необходимо предполагать, что $\psi$: $\triangle \to e$ является биективным отображением, имеющим обратное отображение $\varphi$: $e \to \triangle$. Рассмотрим, кроме того, точки $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$, причем $P_7^* = P_1$, $P_6^* = P_2$, $P_5^* = P_3$, и элемент $e^*$, получаемый как образ $\triangle$ при отображении $\psi^*$, определенном соотношениями

$$x = \sum_{i=1}^{8} x_i^* \Lambda_i(\xi, \eta), \quad y = \sum_{i=1}^{8} y_i^* \Lambda_i(\xi, \eta); \quad \xi, \eta \in \triangle.$$

С помощью других биективных отображений того же типа можно определить и другие элементы, объединение которых составляет $\overline{\Omega}$. Пространство $U$ определяется следующим образом:

1) произвольно фиксируются значения $u \in U$ в узлах $P_1, P_2, \ldots, P_8, P_1^*, \ldots$;

2) сужение $v$ функции $u$ на элемент типа $e$ задается соотношением

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{8} u(P_i)(\Lambda_i \circ \varphi)(x, y). \tag{1}$$

**Теорема II.6.1.** *В примере* 1 *имеем*

$$U \subset C_1^1(\overline{\Omega}).$$

Доказательство. Требуется показать, что:

1) образ $\Gamma$ отрезка $Q_1Q_3$ при отображении $\psi$ совпадает с образом $\Gamma^*$ отрезка $Q_7Q_5$ при отображении $\psi^*$;

2) сужения $v$ и $v^*$ функции $u$ на $e$ и $e^*$ совпадают вдоль $\Gamma$.

Докажем 1). Пусть $\eta$ и $\eta^*$ — аффинные отображения, преобразующие отрезок $[0, 1]$ соответственно в отрезки $Q_1Q_3$ и $Q_7Q_5$, и пусть $\Gamma$ и $\Gamma^*$ суть образы $[0, 1]$, полученные с помощью $\gamma = \psi \circ \eta$ и $\gamma^* = \psi^* \circ \eta^*$ при $P_1 = \gamma(0) = \gamma^*(0)$, $P_2 = \gamma(0{,}5) = \gamma^*(0{,}5)$, $P_3 = \gamma(1) = \gamma^*(1)$. Отметим, что $\gamma$ и $\gamma^*$ являются отображениями отрезка $[0, 1]$ в $\mathbf{R}^2$, компоненты которых — полиномы степени 2. Остается сослаться на теорему II.1.2.

Докажем 2). Элементы $v \circ \gamma$ и $v^* \circ \gamma^*$ являются полиномами степени 2, принимающими соответственно при $t = 0$, $t = 0{,}5$ и $t = 1$ одни и те же значения $u(P_1)$, $u(P_2)$ и $u(P_3)$. Остается еще раз сослаться на теорему II.1.2.

Частный случай. Пусть $P_1$, $P_3$, $P_5$, $P_7$ — вершины некоторого четырехугольника, а $P_2$, $P_4$, $P_6$, $P_8$ — середины его сторон (рис. 18). Предположим, что ориентация, определенная с помощью $P_1, P_2, \ldots, P_8$, положительна. Тогда можно проверить, что

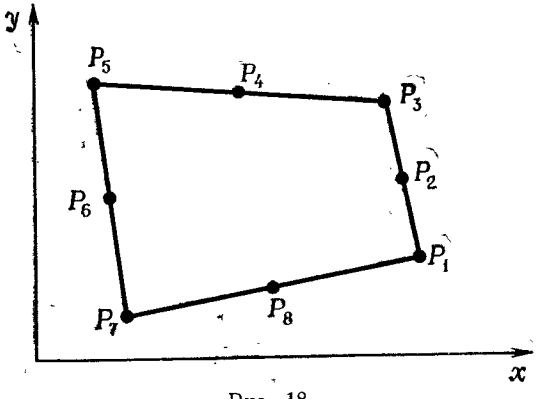


Рис. 18.

а) $\psi$ является инъективным отображением и задается соотношением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \xi(1-\eta) + \\ + \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} \xi\eta + \begin{pmatrix} x_7 \\ y_7 \end{pmatrix} \eta(1-\xi).$$

б) $\min\limits_{0 \leqslant \xi,\, \eta \leqslant 1} J\left(\frac{x,\ y}{\xi,\ \eta}\right) = \min\limits_{i=1,\,3,\,5,\,7}$ {площади параллелограммов, построенных на сторонах, имеющих общую вершину $P_i$}.

Замечание (по поводу примера 1). а) Возьмем в (1) значение $u(P_i) = 1$; тогда

$$v(x,\ y) = \left(\left(\sum_{i=1}^{8} \Lambda_i\right) \circ \varphi\right)(x,\ y) = 1,$$

так как $\sum\limits_{i=1}^{8} \Lambda_i(\xi,\ \eta) = 1$.

б) Возьмем в (1) значение $u(P_i)=x_i$. Пусть $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда

$$v(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\left(\sum_{i=1}^{8} x_i\Lambda_i\right)\circ\varphi\right)(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{8} x_i\Lambda_i(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \psi(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \bar{x}.$$

Аналогично показывается, что, полагая $u(P_i)=y_i$, мы получим $v(x, y)=y$.

Пример 2. Рассмотрим рис. 19. Функции $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_6$ являются полиномами степени 2 (см. § 5), причем $\Lambda_i(P_j)=\delta_{ij}$. Пусть $(x_i, y_i)$ — координаты $P_i$, а $\psi$ определяется так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{6} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \Lambda_i(\xi, \eta).$$

Предполагаем, что $\psi$: $\triangle \to e$ — биективное отображение, обратное к $\varphi$. Аналогично определим $e^*$ как образ $\triangle$ при отображении $\psi^*$, задаваемом в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{6} \begin{pmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{pmatrix} \Lambda_i(\xi, \eta),$$

где $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ таковы, что $P_3^*=P_1$, $P_4^*=P_6$, $P_5^*=P_5$. Строятся еще и другие элементы, объединение которых составляет $\bar{\Omega}$. Пространство $U$ определяется следующим образом:

1) произвольно фиксируются значения $u \in U$ в узлах $P_1, P_2, \ldots, P_6, P_1^*, \ldots$;

2) сужение $v$ функции $u$ на элемент типа $e$ задается соотношением

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{6} u(P_i)(\Lambda_i\circ\varphi)(x, y). \tag{2}$$

**Теорема II.6.2.** *В примере 2 имеем*

$$U \subset C_l^1(\bar{\Omega}).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы II.6.1.

Замечание (по поводу примера 2). а) Подставляя в (2) значения $u(P_i)=1$, $u(P_i)=x_i$, $u(P_i)=y_i$, $i=1, \ldots$

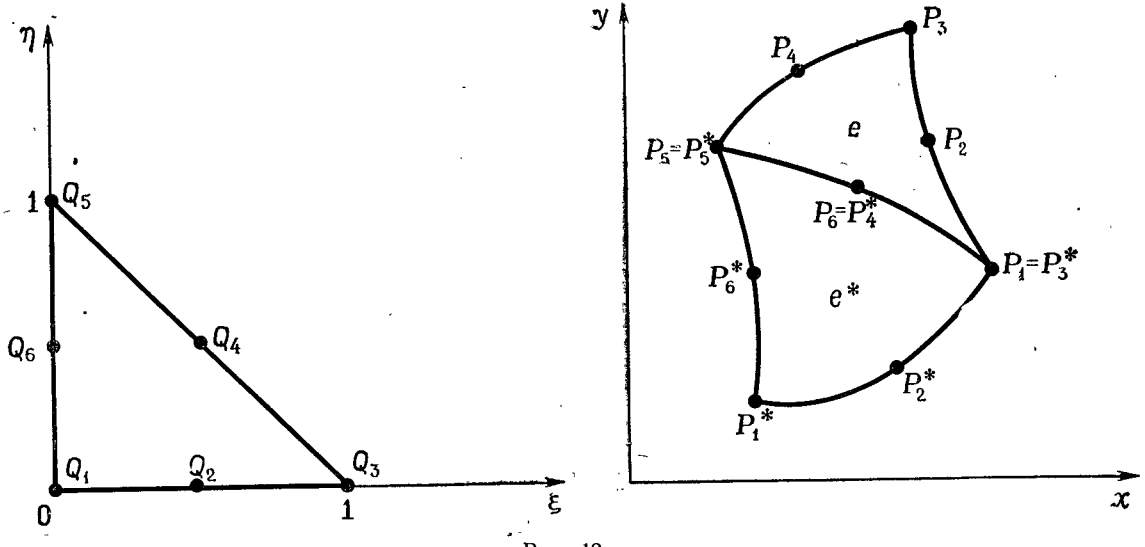


Рис. 19.

..., 6, получаем соответственно $v(x, y)=1$, $v(x, y)=x$, $v(x, y)=y$ (см. замечание к примеру 1).

б) Если $P_1$, $P_3$, $P_5$ — вершины некоторого треугольника, а $P_2$, $P_4$, $P_6$ — соответственно середины сторон $P_1P_3$, $P_3P_5$ и $P_5P_1$, то $\psi$ — аффинное преобразование.

## 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ

Пусть $U$ — пространство типа конечных элементов с базисом $u_1, \ldots, u_N$. Матрицей жесткости, относящейся к билинейной форме $a$: $U \times U \to \mathbf{R}$, является матрица с элементами $a_{ij}=a(u_i, u_j)$, $i, j=1, 2, \ldots, N$ (см. § I.2). Предположим для определенности, что $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ и что

$$a(u, v)=\iint_\Omega (c(x, y)\,\partial_x u(x, y)\,\partial_x v(x, y)+ \\ + d(x, y)\,\partial_y u(x, y)\,\partial_y v(x, y))\,dx\,dy.$$

Через $G$ обозначим множество элементов $e$, таких, что $\operatorname{mes}(e \cap C_1 \cap C_2) \neq 0$, где $C_1$ и $C_2$ — носители $u_1$ и $u_2$. Получим

$$a_{12}=\sum_{e \in G} \iint_e (c\partial_x u_1 \partial_x u_2 + d\partial_y u_1 \partial_y u_2)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Пусть $e \in G$ определяется как образ при отображении $\psi$ «основного» множества $\triangle$ из плоскости $\xi\eta$, тогда как сужения $u_1$ и $u_2$ на $e$ являются линейными комбинациями функций $\Lambda_1 \circ \varphi, \ldots, \Lambda_m \circ \varphi$, где $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ — «раз и навсегда» определенные на $\triangle$ функции, а $\varphi$ — обратное отображение для отображения $\psi$, предполагаемого биективным (см. § 6). Предполагается также, что функции $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$, как и компоненты $\psi$, являются полиномами от переменных $\xi$ и $\eta$.

Обозначим через $g_{ij}$ элементы матрицы Якоби отображения $\varphi$, а через $J$ — якобиан отображения $\psi$. Якобиан $J$ является полиномом от $\xi$, $\eta$, тогда как $g_{ij} \circ \psi$ будут рациональными функциями от $\xi$, $\eta$.

Для вычисления (1) рассмотрим выражение

$$\iint_e \{c(x, y)\,\partial_x(\Lambda_i \circ \varphi)\,\partial_x(\Lambda_j \circ \varphi)\}\,dx\,dy= \\ =\iint_\triangle (c \circ \psi)\,\{(\partial_\xi \Lambda_i)(g_{11} \circ \psi)+(\partial_\eta \Lambda_i)(g_{12} \circ \psi)\}\,\{(\partial_\xi \Lambda_j)(g_{11} \circ \psi)+ \\ + (\partial_\eta \Lambda_j)(g_{12} \circ \psi)\}\,J\,d\xi\,d\eta.$$

Окончательно приходим к вычислению интегралов вида

$$\iint\limits_{\triangle} (c \circ \psi)\,(\partial_\xi \Lambda_i)\,(\partial_\eta \Lambda_j)(g_{11} \circ \psi)\,(g_{12} \circ \psi)\,J\,d\xi\,d\eta. \qquad (2)$$

Для вычисления (2) укажем два метода. Применимость первого из них ограничивается случаем аффинного преобразования $\psi$. Второй метод более общий, хотя его обоснование в случае неаффинного преобразования является весьма тонким делом (см. [3]).

**Метод 1.** Предположим, что $\psi$ — аффинное преобразование; тогда $g_{ij}$ и $J$ постоянны. Аппроксимируя $c \circ \psi$ с помощью линейной комбинации функций $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m$, приходим к нахождению интегралов вида

$$\iint\limits_{\triangle} \Lambda_k \partial_\xi \Lambda_i \partial_\eta \Lambda_j\,d\xi\,d\eta,$$

которые можно вычислить явно «раз и навсегда».

**Метод 2.** Рассмотрим на $\triangle$ какую-нибудь формулу численного интегрирования типа

$$\iint\limits_{\triangle} f\,d\xi\,d\eta = \sum_k \omega_k f(\xi_k, \eta_k), \qquad (3)$$

где $\omega_k > 0$ и $(\xi_k, \eta_k) \in \triangle$. Тогда (2) приближается с помощью (3). Заметим, что элементы матрицы $(g_{ij} \circ \psi)$ мы получаем, обращая матрицу Якоби преобразования $\psi$, элементы которой являются полиномами от $\xi$ и $\eta$. Рекомендуется выбирать такую формулу (3), которая является точной для интегралов вида

$$\iint\limits_{\triangle} J \Lambda_i \Lambda_j\,d\xi\,d\eta.$$

# III. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

## 1. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

**Определения.** Пусть

$$C=\{\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in \mathbf{R}^n\colon -1\leqslant \xi_i\leqslant 1\},$$
$$C^+=\{\xi\in C\colon \xi_n\geqslant 0\},$$
$$D=\{\xi\in C\colon \xi_n=0\}.$$

Множество $\Omega\subset \mathbf{R}^n$ называется *вполне регулярным*, если

а) оно регулярно;

б) существуют отображения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M\colon C\to \mathbf{R}^n$, такие, что

1) $\varphi_i$ — инъективное отображение класса $C_l^1(C)$ (т. е. все компоненты $\varphi_i$ принадлежат классу $C_l^1(C)$),

2) $\varphi_i(C^+)=\varphi_i(C)\cap\overline{\Omega}$, $\varphi_i(D)=\varphi_i(C)\cap\partial\Omega$,

3) $\partial\Omega\subset\bigcup\limits_{i=1}^{M}\varphi_i(C)$;

в) существуют $0<\alpha\leqslant\pi/2$ и $l>0$, не зависящие от $x\in\overline{\Omega}$, $n(x)=(n_1(x), \ldots, n_n(x))$, $\sum\limits_{i=1}^{n} n_i^2(x)=1$, $x\in\overline{\Omega}$, такие, что для всякого $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\overline{\Omega}$ имеем

$$\left\{y\in\mathbf{R}^n\colon \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\,n_i(x)\geqslant\cos\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2},\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\leqslant l^2\right\}\subset\overline{\Omega}.$$

Пусть $\Omega$ — ограниченное открытое множество из $\mathbf{R}^n$. Через $L^2(\Omega)$ обозначим множество функций $f$, определенных на $\overline{\Omega}$ и таких, что $f^2$ интегрируема по Лебегу. Если $f\in L^2(\Omega)$ и $f=g$ почти всюду (п. в.), то $g\in L^2(\Omega)$ и $\int\limits_{\Omega}(f-g)^2\,dx=0$. Обратно, если $f\in L^2(\Omega)$ и $\int\limits_{\Omega}(f-g)^2\,dx=0$, то $f=g$ п. в.

Отношение «$=$ п. в.» является отношением эквивалентности на множестве функций $L^2(\Omega)$. Обозначим через $[f]$ класс эквивалентности, содержащий $f$; $g \in [f]$ означает, что $f = g$ п. в.

Через $H^0(\Omega)$ обозначим множество классов эквивалентности $[f]$, где $f \in L^2(\Omega)$. Введем в $H^0(\Omega)$ скалярное произведение и соответствующую норму

$$([f], [g])_0 = \int_\Omega fg\,dx, \quad \|[f]\|_0 = \left(\int_\Omega f^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Пусть $S^m(\Omega)$ $(m \geqslant 1)$ — множество классов эквивалентности, содержащих функции класса $C_I^m(\overline{\Omega})$. Через $\mathscr{D}(\Omega)$ обозначим множество классов эквивалентности, содержащих функции из $C^\infty(\overline{\Omega})$, носители которых являются подмножествами в $\Omega$. Имеет место следующая

**Теорема III.1.1.** а) *$H^0$ — гильбертово пространство;*
б) *$\mathscr{D}$ плотно в $H^0$ по отношению к норме $\|\ \|_0$.*

Введем в $S^m(\Omega)$ следующую норму:

$$\|[f]\|_m = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{\overline{\Omega}} (D^\alpha f)^2\,dx\right)^{1/2}, \quad f \in C_I^m(\overline{\Omega}),$$

и рассмотрим последовательность $\{[f_i]\}_{i=1}^\infty \subset S^m(\Omega)$, $f_i \in C_I^m(\overline{\Omega})$, являющуюся последовательностью Коши по норме $\|\ \|_m$, т. е. такую, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N$, что $\|[f_i] - [f_j]\|_m < \varepsilon$, если $i, j > N$. Тогда при $|\alpha| \leqslant m$ имеем $\|[D^\alpha f_i] - [D^\alpha f_j]\|_0 < \varepsilon$, если $i, j > N$. Так как $H^0$ — полное пространство, то существует такой класс $[\varphi_\alpha] \in H^0$, что $\lim\limits_{i \to \infty} [D^\alpha f_i] = [\varphi_\alpha]$ по норме $\|\ \|_0$, $|\alpha| \leqslant m$. В частности, $\lim\limits_{i \to \infty} [f_i] = [\varphi_0]$ по норме $\|\ \|_0$.

**Определение.** Через $H^m(\Omega)$ обозначим подпространство из $H^0(\Omega)$, образованное элементами $[\varphi]$, ограниченными по норме $\|\ \|_0$ последовательностью элементов из $S^m(\Omega)$, являющейся последовательностью Коши по норме $\|\ \|_m$.

Пусть $[\varphi] \in H^m(\Omega)$. Рассмотрим две последовательности $\{[f_i]\}_{i=1}^\infty$ и $\{[f_i^*]\}_{i=1}^\infty \subset S^m(\Omega)$, $f_i$ и $f_i^* \in C_I^m(\overline{\Omega})$; они являются последовательностями Коши по норме $\|\ \|_m$ и сходятся к $\varphi$ по норме $\|\ \|_0$. Пусть $[\varphi_\alpha] = \lim\limits_{i \to \infty} [D^\alpha f_i]$ и

$[\varphi_\alpha^*] = \lim\limits_{i\to\infty} [D^\alpha f_i^*]$ по норме $\| \ \|_0$, $|\alpha| \leqslant m$. Имеем $[\varphi] = [\varphi_0] = [\varphi_0^*]$. Покажем, что, кроме того, $[\varphi_\alpha] = [\varphi_\alpha^*]$; последнее означает, что $\varphi_\alpha$ зависит только от $\varphi$. Пусть $[g] \in \mathscr{D}(\Omega)$, $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Интегрируя $|\alpha|$ раз по частям, получаем

$$\int\limits_{\overline{\Omega}} f_i D^\alpha g \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\overline{\Omega}} g D^\alpha f_i \, dx,$$

$$([f_i], [D^\alpha g])_0 = (-1)^{|\alpha|} ([g], [D^\alpha f_i])_0.$$

Полагая $i \to \infty$, получаем

$$([\varphi], [D^\alpha g])_0 = (-1)^{|\alpha|} ([g], [\varphi_\alpha])_0. \tag{1}$$

Точно так же имеем

$$([\varphi], [D^\alpha g])_0 = (-1)^{|\alpha|} ([g], [\varphi_\alpha^*])_0. \tag{2}$$

Вычитая (2) из (1), получаем

$$([g], [\varphi_\alpha] - [\varphi_\alpha^*])_0 = 0.$$

Это соотношение справедливо для всякого $[g] \in \mathscr{D}$. По теореме III.1.1, б) заключаем, что $[\varphi_\alpha] = [\varphi_\alpha^*]$.

**Определение.** Пусть $[\varphi] \in H^m(\Omega)$. Определенный выше для $|\alpha| \leqslant m$ элемент $[\varphi_\alpha] \in H^0(\Omega)$ называется $\alpha$-й *слабой производной* от $\varphi$ и записывается в виде

$$[\varphi_\alpha] = D^\alpha [\varphi].$$

Введем в $H^m(\Omega)$ скалярное произведение $( \ , \ )_m$ и норму $\| \ \|_m$, определенные равенствами

$$([\varphi], [\psi])_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha [\varphi], D^\alpha [\psi])_0,$$

$$\| [\varphi] \|_m = ([\varphi], [\varphi])_m^{1/2}.$$

Отметим, что $H^m(\Omega)$ получается пополнением $S^m(\Omega)$ по норме $\| \ \|_m$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением $( \ , \ )_m$.

Замечание 1. Непосредственно из определений следует, что если $[f] \in H^m(\Omega)$, то $D^\alpha [f] \in H^{m-|\alpha|}(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant m$.

Замечание 2. Обычно пишут $f \in H^m(\Omega)$ вместо $[f] \in H^m(\Omega)$, $(f, g)_m$ вместо $([f], [g])_m$, $\|f\|_m$ вместо $\|[f]\|_m$, $D^\alpha f$ вместо $D^\alpha [f]$ и т. д. В том же духе можно писать $C_l^m(\overline{\Omega}) \subset H^m(\Omega)$.

**Теорема III.1.2.** *Пусть $\Omega$ вполне регулярно и $m_1 > m_2$. Каноническое вложение $H^{m_1}(\Omega)$ в $H^{m_2}(\Omega)$ является компактным, т. е. если $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset H^{m_1}(\Omega)$, $\|f_i\|_{m_1} \leqslant c$, где $c$ не зависит от $i$, то существует подпоследовательность $\{f_{i_j}\}_{i=1}^\infty$, сходящаяся к $f \in H^{m_2}(\Omega)$ по норме $\| \quad \|_{m_2}$.*

Рассмотрим линейный функционал $F$: $C_l^m(\overline{\Omega}) \to \mathbf{R}$. Предположим, что этот функционал непрерывен по отношению к норме $\| \quad \|_m$. Тогда существует такое $c$, что $|F(f)| \leqslant c\|f\|_m$, $f \in C_l^m(\overline{\Omega})$; при этом $F$ можно продолжить на $H^m(\Omega)$ по непрерывности, т. е. следующим образом. Пусть $f \in H^m(\Omega)$, и пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset C_l^m(\overline{\Omega})$ сходится к $f$ по норме $\| \quad \|_m$. Положим $F(f) = \lim\limits_{i\to\infty} F(f_i)$. Легко проверить, что $F$ линеен, непрерывен и $|F(f)| \leqslant c\|f\|_m$ для всякой $f \in H^m(\Omega)$. Точно так же пусть $a(f, g)$ — билинейная симметричная непрерывная форма на $C_l^m(\overline{\Omega}) \times C_l^m(\overline{\Omega})$. Непрерывность эквивалентна существованию такой постоянной $c$, что $|a(f, f)| \leqslant c\|f\|_m^2$ для всякой $f \in C_l^m(\overline{\Omega})$. Продолжим $a$ на $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$ следующим образом. Пусть $f, g \in H^m(\Omega)$, и пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{g_i\}_{i=1}^\infty \subset C_l^m(\overline{\Omega})$ сходятся соответственно к $f$ и $g$ по норме $\| \quad \|_m$. Положим $a(f, g) = \lim\limits_{i\to\infty} a(f_i, g_i)$. Тогда форма $a$ симметрична, непрерывна и удовлетворяет неравенству $|a(f, f)| \leqslant c\|f\|_m^2$ для всякой $f \in H^m(\Omega)$.

**Теорема III.1.3.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — вполне регулярное множество. Билинейная симметричная положительно определенная форма $a$: $C_l^1(\overline{\Omega}) \times C_l^1(\overline{\Omega}) \to \mathbf{R}$, задаваемая равенством $a(f, g) = \int\limits_{\partial\Omega} fg\, d\sigma$, непрерывна по норме $\| \quad \|_1$.*

Доказательство. Для упрощения обозначений ограничимся двумерными областями. Обобщение на области бо́льших размерностей делается тогда непосредственно. Используем обозначения, введенные в начале параграфа

для определения вполне регулярного множества. Пусть $\Gamma_i = \varphi_i(C) \cap \partial\Omega$. Имеем

$$\int_{\partial\Omega} f^2\, ds \leqslant \sum_{i=1}^{M} \int_{\Gamma_i} f^2\, ds.$$

Ясно, что для завершения доказательства снова достаточно убедиться в существовании таких постоянных $c_i$, что

$$\int_{\Gamma_i} f^2\, ds \leqslant c_i \|f\|_1^2 \quad \text{для всякой } f \in C_l^1(\overline{\Omega}).$$

В дальнейшем через $c$ будем обозначать произвольную постоянную, не зависящую от $f \in C_l^1(\overline{\Omega})$. Пусть $g\colon C^+ \to \mathbf{R}$, $g = f \circ \tilde{\varphi}_i$, где $\tilde{\varphi}_i$ — сужение $\varphi_i$ на $C^+$. Имеем

$$\int_{\Gamma_i} f^2\, ds = \int_{-1}^{+1} g^2(\xi_1, 0) \frac{ds}{d\xi}\, d\xi_1 \leqslant c \int_{-1}^{+1} g^2(\xi_1, 0)\, d\xi_1.$$

Положим $p(t) = t - 1$. Тогда

$$g(\xi_1, 0) = \int_0^1 \partial_{\xi_2}(g(\xi_1, \xi_2)\, p(\xi_2))\, d\xi_2 =$$

$$= \int_0^1 (\partial_{\xi_2} g(\xi_1, \xi_2)(\xi_2 - 1) + g(\xi_1, \xi_2))\, d\xi_2,$$

$$g^2(\xi_1, 0) \leqslant 2 \int_0^1 ((\partial_{\xi_2} g(\xi_1, \xi_2))^2 + g^2(\xi_1, \xi_2))\, d\xi_2,$$

$$\int_{-1}^{+1} g^2(\xi_1, 0)\, d\xi_1 \leqslant 2 \iint_{C^+} ((\partial_{\xi_2} g(\xi_1, \xi_2))^2 + g^2(\xi_1, \xi_2))\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

$$\partial_{\xi_2} g(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2},$$

$$\int_{\Gamma} f^2\, ds \leqslant c \iint_{\varphi_i(C^+)} ((\partial_{x_1} f(x_1, x_2))^2 + (\partial_{x_2} f(x_1, x_2))^2 +$$

$$+ f^2(x_1, x_2))\, dx_1\, dx_2 \leqslant c \|f\|_1^2.$$

**Теорема III.1.4.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — вполне регулярное множество, а $q$ — некоторая кусочно-непрерывная на $\partial\Omega$ функция (т. е. границу $\partial\Omega$ можно разбить на части $\partial\Omega_1$,*

*$\partial\Omega_2, \ldots,$ такие, что сужение $q$ на $\partial\Omega_i$ допускает непрерывное продолжение на $\partial\overline{\Omega}_i$). Тогда билинейная форма $a(f, g) = \int\limits_{\partial\Omega} qfg\,d\sigma$, определенная на $C_l^1(\overline{\Omega}) \times C_l^1(\overline{\Omega})$, непрерывна по норме $\| \|_1$.*

Доказательство. Пусть функция $q$ ограничена константой $M$. Тогда $a(f, f) \leqslant M \int\limits_{\partial\Omega} f^2\,d\sigma$, и мы возвращаемся к теореме III.1.3.

**Теорема III.1.5.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — вполне регулярное множество, $a \in \overline{\Omega}$, $m$ — наименьшее целое, большее $n/2$, и $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Тогда функционал $F$: $C_l^{m+|s|}(\overline{\Omega}) \to \mathbf{R}$, $F(f) = D^s f(a)$ непрерывен по отношению к норме $\| \|_{m+|s|}$, т. е. существует такая постоянная $c$, что $|D^s f(a)| \leqslant c\|f\|_{m+|s|}$ $\forall f \in C_l^{m+|s|}(\overline{\Omega})$. Более того, $c$ может быть выбрана не зависящей от $a \in \overline{\Omega}$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно положить $s = 0$. Тогда, ограничиваясь случаем $n = 2$, будем иметь $m = 2$. То же самое доказательство проходит и в случае произвольного $n$. Используем обозначения, введенные в начале параграфа, и рассмотрим систему полярных координат $(\rho, \varphi)$ с центром в $a$. Тогда существуют $R > 0$ и $\alpha_1 < \alpha_2$, такие, что сектор $G = \{x \in \mathbf{R}^2: \rho \leqslant R,\ \alpha_1 \leqslant \varphi \leqslant \alpha_2\} \subset \overline{\Omega}$. Кроме того, $R$ и $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ могут быть выбраны не зависящими от $a \in \overline{\Omega}$. Пусть функция $p \in C^\infty(\mathbf{R})$ такова, что $p(0) = -1$, $p(\rho) = 0$ при $\rho \geqslant R$. Букву $c$ используем для обозначения произвольной постоянной, не зависящей от $f \in C_l^2(\overline{\Omega})$ и $a \in \overline{\Omega}$. Интегрируя по частям, имеем

$$f(a) = \int\limits_0^R \partial_\rho (p(\rho) f(\rho, \varphi))\,d\rho =$$

$$= -\int\limits_0^R \partial_\rho^2 (p(\rho) f(\rho, \varphi))\,\rho d\rho \quad (\alpha_1 \leqslant \varphi \leqslant \alpha_2).$$

Применяя неравенство Шварца, получаем

$$f^2(a) \leqslant R \int_0^R (\partial_\rho^2 (p(\rho) f(\rho, \varphi)))^2 \rho^2 d\rho \leqslant c \int_0^R (\partial_\rho^2 (p(\rho) f(\rho, \varphi)))^2 \rho d\rho.$$

Интегрирование этого соотношения по $\varphi$ дает

$$f^2(a) \leqslant c \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\varphi \int_0^R \rho d\rho (\partial_\rho^2 (p(\rho) f(\rho, \varphi)))^2 =$$
$$= c \iint_G (\partial_\rho^2 (p(\rho) f(\rho, \varphi)))^2 dx\, dy.$$

Расписывая выражение $\partial_\rho^2$ ( ), замечаем, что на $G$ производные от $p$ ограничены постоянными, не зависящими от $a \in \bar{\Omega}$. С другой стороны, легко выразить производные по направлению $\rho$ с помощью производных по $x$ и $y$. Тогда получаем

$$f^2(a) \leqslant c \|f\|_2^2.$$

**Теорема III.1.6.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — вполне регулярное множество, $m$ — наименьшее целое, большее $n/2$. Тогда при $p \geqslant m$ имеем $H^p(\Omega) \subset C^{p-m}(\bar{\Omega})$ (т. е. всякий класс эквивалентности из $H^p(\Omega)$ содержит элемент из $C^{p-m}(\bar{\Omega})$).*

Доказательство. Не имея возможности доказать эту теорему целиком, ограничимся доказательством того, что каждый класс эквивалентности из $H^p(\Omega)$ содержит элемент $g \in C^{p-m}(\Omega)$, все производные которого порядка $\leqslant p-m$ допускают непрерывные продолжения на $\bar{\Omega}$. Пусть $[f] \in H^p(\Omega)$, и пусть последовательность $\{g_i\}_{i=1}^\infty \subset C_l^p(\bar{\Omega})$ такова, что $[f] = \lim_{i\to\infty} [g_i]$ по норме $\|\ \|_p$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N$, что $\|[g_i] - [g_j]\|_p < \varepsilon$ при $i, j > N$. По предыдущей теореме существует такое $c$, не зависящее от $\varepsilon$, что для $a \in \bar{\Omega}$ и такого $s$, что $|s| \leqslant p-m$, имеем $|D^s g_i(a) - D^s g_j(a)| < c\varepsilon$. Это означает, что последовательность элементов $g_i$ и всех их частных производных порядка $\leqslant p-m$ сходится равномерно. По известной теореме $g_i$ сходятся равномерно, а следовательно, и в среднем квадратичном, к функции $g$ класса

$C^{p-m}(\Omega)$, все производные которой порядка $\leqslant p-m$ допускают непрерывные продолжения на $\bar{\Omega}$.

**Теорема III.1.7.** *Пусть* $f \in H^m(\Omega)$, *и пусть* $D^s f = 0$ *для всякого* $|s| = m$. *Тогда* $f$ *является полиномом степени* $\leqslant m-1$.

## 2. БИЛИНЕЙНЫЕ КОЭРЦИТИВНЫЕ ФОРМЫ

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — вполне регулярное множество. Рассмотрим подпространство $W \subset C^m(\bar{\Omega})$. Процесс пополнения, использованный нами для определения $H^m(\Omega)$, исходя из $C_I^m(\bar{\Omega})$, можно применить к $W$. Таким образом, получится подпространство $V \subset H^m(\Omega)$, которое замкнуто в $H^m(\Omega)$ по норме $\| \ \|_m$ и, следовательно, является гильбертовым пространством со скалярным произведением $( \ , \ )_m$. Как и в предыдущем параграфе, симметричная непрерывная билинейная форма на $W$ может быть продолжена по непрерывности на $V$.

**Определение.** Непрерывная симметричная билинейная форма, определенная на $V \times V$, является *коэрцитивной*, если существует такое $c > 0$, что

$$a(u, u) \geqslant c \|u\|_m^2 \quad \forall u \in V.$$

**Лемма III.2.1.** *Пусть* $a$: $V \times V \to \mathbf{R}$ — *непрерывная симметричная билинейная форма. Следующие условия эквивалентны*:

1) $a$ *коэрцитивна*;

2) *для всякой ограниченной последовательности* $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, *такой, что* $\lim\limits_{i\to\infty} a(u_i, u_i) = 0$, *имеем* $\lim\limits_{i\to\infty} \|u_i\|_m = 0$.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Чтобы доказать обратную импликацию, покажем, что если форма $a$ некоэрцитивна, то существует ограниченная последовательность, такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} a(u_i, u_i) = 0$, и при этом $\lim\limits_{i\to\infty} \|u_i\|_m \neq 0$. В самом деле, в этом случае существует такое $v_i \in V$, что $a(v_i, v_i) < \|v_i\|_m^2/i$. Полагая $u_i = v_i/\|v_i\|_m$, имеем $\|u_i\|_m = 1$ и $a(u_i, u_i) < 1/i$.

Пример 1. Пусть

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — вполне регулярное множество;

$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad \int\limits_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2} d\sigma = 0;$

$q$: $\partial\Omega_2 \to \mathbf{R}$ — кусочно-непрерывная функция, $q \geqslant 0$;

$W = \{u \in C_l^1(\overline{\Omega})$: $u = 0$ на $\partial\Omega_1\}$;

$V$ — замыкание $W$ в $H^1(\Omega)$ по норме $\| \ \|_1$;

$r \in C_l^0(\overline{\Omega})$, $r \geqslant 0$;

$a_{ij} \in C_l^0(\overline{\Omega})$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$;

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \sum a_{ij}\partial_i u \partial_j v \, d\tau + \int\limits_{\Omega} ruv d\tau + \int\limits_{\partial\Omega_2} quv d\sigma,$$

$$u, v \in W, \quad \partial_i = \partial_{x_i}.$$

**Теорема III.2.1.** *Предположим, что*

1) *существует такое* $\mu > 0$, *не зависящее от* $x \in \overline{\Omega}$ *и* $\xi \in \mathbf{R}^n$, *что* $\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \mu \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$;

2) $\int\limits_{\Omega} r d\tau + \int\limits_{\partial\Omega_1} d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega_2} q d\sigma > 0.$

*Тогда*

1) *форма* $a$ *из примера* 1 *непрерывна и, следовательно, может быть продолжена на* $V \times V$;

2) $a$: $V \times V \to \mathbf{R}$ *коэрцитивна.*

Доказательство. Непрерывность непосредственно следует, с одной стороны, из ограниченности коэффициентов $a_{ij}$ и $r$, а с другой — из теоремы III.1.3. Следовательно, $a$ можно рассматривать как определенную на $V \times V$. Для $u \in W$ имеем

$$a(u, u) \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \| \partial_i u \|_0^2 + \int\limits_{\Omega} ru^2 \, d\tau + \int\limits_{\partial\Omega_2} qu^2 \, d\sigma. \tag{1}$$

Рассматривая последовательность функций из $W$, сходящуюся по норме $\| \ \|_1$ к некоторому элементу из $V$, видим, что неравенство (1) справедливо и для всех $u \in V$. Пусть $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V$ — ограниченная последовательность, такая, что $\lim\limits_{j \to \infty} a(u_j, u_j) = 0$. По теореме III.1.2 существует подпоследовательность, которую мы также обозначим через

$\{u_j\}$, являющаяся последовательностью Коши по норме $\| \|_0$. Из неравенства (1) следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} \|\partial_i u_j\|_0 = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. что на самом деле $\{u_j\}$ — последовательность Коши по норме $\| \|_1$. Пусть $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_j$ по норме $\| \|_1$. Тогда $u \in V \subset H^1(\Omega)$ и $\|\partial_i u\|_0 = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. По теореме III.1.7 $u$ есть некоторая постоянная $c$. Используя теорему III.1.3, получаем

$$\int\limits_{\Omega} ru^2\, d\tau + \int\limits_{\partial\Omega_1} u^2\, d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega_2} qu^2\, d\sigma = \\ = c^2 \left\{ \int\limits_{\partial\Omega_1} d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega_2} q\, d\sigma + \int\limits_{\Omega} r\, d\tau \right\}. \tag{2}$$

Так как $u \in V$, то $\int\limits_{\partial\Omega_1} u^2\, d\sigma = 0$. Из $a(u, u) = 0$ и (1) следует, что $\int\limits_{\Omega} ru^2\, d\tau + \int\limits_{\partial\Omega_2} qu^2\, d\sigma = 0$. Тогда левая часть равенства (2) равна нулю. Из предложения 2) теоремы видно, что $c = 0$ и, следовательно, $0 = \|u\|_1 = \lim\limits_{j\to\infty} \|u_j\|_1 = 0$. Таким образом, условие 2 леммы III.2.1 выполнено и форма $a$ коэрцитивна.

Пример 2. Пусть

$\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — вполне регулярное множество;

$(x_i, y_i)$ — три точки из $\overline{\Omega}$, не лежащие на одной прямой;

$W = \{u \in C_J^2(\overline{\Omega})\colon\ u(x_i, y_i) = 0,\quad i = 1, 2, 3\}$;

$V$ — замыкание $W$ в $H^2(\Omega)$ по норме $\| \|_2$;

$$a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \{u_{xx}v_{xx} + u_{yy}v_{yy} + \mu(u_{xx}v_{yy} + u_{yy}v_{xx}) + \\ + 2(1-\mu)\, u_{xy}v_{xy}\}\, dx\, dy,\quad u, v \in W, \text{ где } \mu = \text{const},\ 0 \leqslant \mu < 1.$$

**Теорема III.2.2.** 1) *Форма* $a\colon W \times W \to \mathbf{R}$ *из примера* 2 *непрерывна и, следовательно, может быть продолжена по непрерывности на* $V \times V$;

2) $a\colon V \times V \to \mathbf{R}$ *коэрцитивна.*

Доказательство. Непрерывность $a\colon W \times W \to \mathbf{R}$ очевидна. Следовательно, область определения $a$ можно расширить до $V \times V$. Для $u \in W$ и, по непрерывности,

для $u \in V$ имеем

$$a(u, u) = \int_\Omega \{(1-\mu)(u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + \mu(u_{xx} + u_{yy})^2 + \\ + 2(1-\mu) u_{xy}^2\} dx\, dy \geqslant (1-\mu) \sum_{|s|=2} \|D^s u\|_0^2. \tag{3}$$

Для доказательства коэрцитивности воспользуемся леммой. Пусть $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset V$ — ограниченная последовательность, такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} a(u_i, u_i) = 0$. Тогда существует (теорема III.1.2) подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{u_i\}$, являющаяся последовательностью Коши по норме $\| \|_1$. С другой стороны, из неравенства (3) вытекает, что $\lim\limits_{i\to\infty} \|D^s u_i\|_0 = 0$, $|s| = 2$. Следовательно, на самом деле $\{u_i\}$ является последовательностью Коши по норме $\| \|_2$, которая сходится к $u \in V$, причем $\|D^s u\|_0 = 0$, $|s| = 2$. Из теоремы III.1.6 следует, что $u$ имеет вид $ax + by + c = p(x, y)$. В силу определения $V$ и теоремы III.1.4 имеем $p(x_i, y_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, и, таким образом, $p(x, y) \equiv 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \|u_i\|_2 = 0$. ⊣

## 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

**Теорема III.3.1.** *Пусть $B$ — банахово пространство с нормой $\| \|$, $a$: $B \times B \to \mathbf{R}$ — непрерывная симметричная коэрцитивная билинейная форма, $\varphi$: $B \to \mathbf{R}$ — непрерывная линейная форма. Следовательно, существуют положительные постоянные $c$, $d$, $e$, такие, что $c\|u\|^2 \leqslant a(u, u) \leqslant d\|u\|^2$, $|\varphi(u)| \leqslant e\|u\|$, $u \in B$. Тогда задача: найти такое $u \in B$, что $a(u, v) = \varphi(v)$ $\forall v \in B$, — имеет одно и только одно решение $u$*

$$\|u\| \leqslant e/c.$$

Доказательство. Форма $a(u, v)$ является скалярным произведением в $B$. Соответствующая ему норма эквивалентна норме $\| \|$ в $B$. Следовательно, $B$ — гильбертово пространство с этим скалярным произведением. Тогда теорема III.3.1 есть не что иное, как одна из фор-

мулировок теоремы Рисса. Кроме того,

$$c\|u\|^2 \leqslant a(u, u) = \varphi(u) \leqslant e\|u\|.$$

Пример 1. В предположениях теоремы III.2.1 рассмотрим пример 1 из § 2. Пусть $f \in H^0(\Omega)$. Линейный функционал $\varphi$: $V \to \mathbf{R}$, определенный соотношением $\varphi(v) = (f, v)_0$, непрерывен и $|\varphi(v)| \leqslant \|f\|_0 \|v\|_0 \leqslant \|f\|_0 \cdot \|v\|_1$. Следовательно, по теореме III.3.1 задача нахождения такого $u \in V$, что

$$a(u, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in V, \tag{1}$$

имеет одно и только одно решение. Введем дополнительные предположения, что $a_{ij} \in C_l^1(\overline{\Omega})$ и $f \in C_l^0(\overline{\Omega})$, и покажем, что задача (1) является полуслабой формулировкой следующей краевой задачи для уравнения в частных производных. Требуется найти такое $u \in C_l^1(\overline{\Omega})$, что

$$-\sum_{i, j=1}^{n} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) + ru = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega_1, \tag{3}$$

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \partial_i u \cdot n_j + qu = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_2, \tag{4}$$

где $n_j$ есть $j$-я компонента единичной внешней нормали. Умножим (2) на $v \in W$ и проинтегрируем по $\Omega$, используя теорему о дивергенции (§ I.1, (1)):

$$\int_\Omega \sum a_{ij} \partial_j u \cdot \partial_i v \, d\tau - \int_{\partial\Omega} \sum a_{ij} (\partial_j u) \cdot v \cdot n_i \, d\sigma + \\ + \int_\Omega ruv \, d\tau = \int_\Omega fv \, d\tau. \tag{5}$$

Принимая во внимание соотношения $a_{ij} = a_{ji}$, условие (4) и тот факт, что $v = 0$ на $\partial\Omega_1$, получаем, что (5) эквивалентно соотношению

$$a(u, v) = (f, v)_0, \quad v \in W.$$

Так как $V$ является пополнением $W$ по норме $\| \ \|_1$ и форма $a$ непрерывна по отношению к этой норме, то это последнее соотношение справедливо для всякого $v \in V$.

Итак, всякое решение (называемое сильным) задачи (2), (3), (4) является также решением задачи (1). Более точно: класс эквивалентности, содержащий решение задачи (2), (3), (4), является решением задачи (1). Когда решение задачи (1) не является решением (2), (3), (4), оно называется обобщенным решением.

Пример 2. Рассмотрим пример 2 из § 2. Пусть $f \in H^0(\Omega)$ определяет непрерывный линейный функционал $\varphi$: $V \to \mathbf{R}$, $\varphi(v) = (f, v)_0$. В силу теорем III.2.2 и III.3.1 задача нахождения такого $u \in V$, что

$$a(u, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in V, \tag{6}$$

имеет одно и только одно решение. Заметим, что $u \in H^2(\Omega)$ и в силу теоремы III.1.5 класс эквивалентности $u$ содержит непрерывную функцию. Предположим, что, кроме того, $f \in C_l^0(\overline{\Omega})$, и покажем, что (6) является полуслабой формулировкой следующей задачи для уравнения в частных производных, состоящей в нахождении такого $u \in C_l^4(\overline{\Omega})$, что

$$\Delta\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7}$$

$$u(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\Delta u + (1-\mu)\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial n}\right) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{9}$$

$$\Delta u - (1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{10}$$

Для фиксированной точки на $\partial\Omega$ направления $t$ и $n$ образуют декартову систему координат, состоящую из касательной и внешней нормали к $\partial\Omega$, $s$ — естественный параметр, т. е. абсцисса в криволинейной системе координат вдоль $\partial\Omega$. Формула Грина позволяет записать для $v \in W$:

$$\iint_\Omega v \cdot \Delta\Delta u \, dx\, dy - \iint_\Omega \Delta u \cdot \Delta v \, dx\, dy = \\ = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial \Delta u}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} \Delta u \, ds. \tag{11}$$

С другой стороны, используя формулу Грина, имеем

$$\iint_{\Omega} (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})\, dx\, dy +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} (t_x,\ t_y) \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} ds = 0, \tag{12}$$

где $t_x$ и $t_y$ — компоненты единичного касательного вектора. Заметим, что $\frac{d}{ds} v = \frac{\partial}{\partial t} v$ вдоль $\partial\Omega$. С помощью интегрирования по частям по $s$ убеждаемся, что криволинейный интеграл в (12) равен

$$\int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \frac{\partial}{\partial n} v + \left( \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial n} \right) v \right) ds. \tag{13}$$

Проинтегрируем (7), умноженное на $v \in W$, и сложим полученное равенство с соотношением (12), умноженным на $(1-\mu)$. Тогда, принимая во внимание (11) и (13), найдем, что

$$\iint_{\Omega} \{\Delta u\, \Delta v + (1-\mu)\, (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx})\}\, dx\, dy +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial\, \Delta u}{\partial n} + (1-\mu) \frac{d}{ds} \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial n} \right) v - \right.$$

$$\left. - \left( \Delta u - (1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \right\} ds = \iint_{\Omega} f v\, dx\, dy.$$

Учитывая (9) и (10), окончательно имеем

$$a(u,\ v) = (f,\ v)_0, \quad v \in W.$$

Так как $V$ — пополнение $W$ по норме $\| \ \|_2$ и форма $a$ непрерывна по отношению к этой норме, то это последнее соотношение справедливо для всякого $v \in V$. Следовательно, всякое решение (называемое сильным) задачи (7), (8), (9), (10) является также решением задачи (6). Когда решение задачи (6) не является решением (7), (8), (9), (10), оно называется обобщенным решением.

# IV. СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для $x, y \in \mathbf{R}^n$ через $|x-y|$ обозначается евклидово расстояние между $x$ и $y$. Для ограниченного множества $D \subset \mathbf{R}^n$ его *диаметром* называется величина $\sup\limits_{x, y \in D} |x-y|$; $\operatorname{mes}(D)$ обозначает меру Лебега множества $D$.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — регулярная область (см. § I.1) и $f \in C_I^m(\overline{\Omega})$. Напомним, что с $f$ связаны открытые непересекающиеся регулярные множества $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_p$, такие, что $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \overline{\Omega}_i$ и сужение $f$ на $\overline{\Omega}_i$ является функцией класса $C^m(\overline{\Omega}_i)$. Для $x$, принадлежащего границе двух различных $\Omega_i$, и $|s| = m$ положим по определению $D^s f(x) = 0$. Заметим, что тогда оператор $D^s$ определен при $|s| \leqslant m$, но линеен только при $|s| < m$.

Для $f \in C_I^m(\overline{\Omega})$ была уже определена норма

$$\|f\|_m = \left( \sum_{|s| \leqslant m} \int_{\Omega} (D^s f)^2 \, d\tau \right)^{1/2}.$$

Введем еще следующие полунормы и норму:

$$|f|_j = \left( \sum_{|s| = j} \int_{\Omega} (D^s f)^2 \, d\tau \right)^{1/2}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

$$/f/_j = \max_{|s| = j} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^s f(x)|, \quad 0 \leqslant j \leqslant m,$$

$$//f//_m = \max_{|s| \leqslant m} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^s f(x)|.$$

Для $f \in C^m(\overline{\Omega})$ положим

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{|x-y| \leqslant \delta \\ x, y \in \overline{\Omega}}} |f(x) - f(y)|,$$

$$\omega_m(f, \delta) = \max_{|s| = m} \omega(D^s f, \delta).$$

Величина $\omega(f, \delta)$ является модулем непрерывности функции $f$. Так как по классической теореме анализа функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна, то $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f, \delta) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega_m(f, \delta) = 0$.

Наконец, через $\mathscr{P}_k(\overline{\Omega})$ обозначим множество сужений на $\overline{\Omega}$ полиномов степени не более чем $k$.

## 2. ЛЕММА БРАМБЛА

**Лемма IV.2.1.** *Пусть $E$ и $F$ — два векторных пространства и $F$ нормировано с нормой $\| \ \|$. Пусть $L: E \to F$ — линейный оператор с ядром $N$. Тогда для $x \in E$ и $n \in N$ имеем*

$$\|Lx\| = \|L(x-n)\|.$$

Эта лемма, сама по себе тривиальная, лежит в основе различных предложений, известных под названием «леммы Брамбла».

**Лемма IV.2.2.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклое регулярное множество, $h$ — его диаметр, $a \in \overline{\Omega}$, $f \in C_I^{m+1}(\overline{\Omega})$ и $D^s f(a) = 0$ при $|s| \leqslant m$. Тогда*

$$|f|_j \leqslant (nh)^{m+1-j} |f|_{m+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m+1.$$

Доказательство. Для $j = m+1$ доказывать нечего. Предположим, что лемма верна для $j \geqslant M+1$, $M \leqslant m$, и докажем ее для $j = M$. Пусть $|s| = M$, $x \in \overline{\Omega}$, $g(t) = D^s f(a + t(x-a))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Имеем $g(0) = 0$ и

$$D^s f(x) = g(1) = \int_0^1 g'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial_i D^s f(a + t(x-a))(x_i - a_i) dt,$$

$$|D^s f(x)| \leqslant nh |f|_{M+1} \leqslant (nh)^{m+1-M} |f|_{m+1}.$$

**Лемма IV.2.3.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклое множество, $h$ — диаметр $\Omega$, $a \in \overline{\Omega}$, $f \in C^m(\overline{\Omega})$ и $D^s f(a) = 0$ при $|s| \leqslant m$. Тогда*

$$|f|_j \leqslant (nh)^{m-j} \omega_m(f, h), \quad 0 \leqslant j \leqslant m.$$

Доказательство. Для $j=m$ утверждение леммы следует из определения $\omega_m$. Предположим, что лемма верна для $j \geqslant M+1$, $M<m$, и докажем ее для $j=M$. Полагаем $|s|=M$, $x \in \overline{\Omega}$ и $g(t)=D^s f(a+t(x-a))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Далее поступаем, как при доказательстве леммы IV.2.2.

**Лемма IV.2.4.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество, $f \in C^m(\overline{\Omega})$, $a \in \overline{\Omega}$. Существует один и только один полином $p$ степени $m$, такой, что $D^s p(a)=D^s f(a)$ при $|s| \leqslant m$.*

Доказательство. Проверяем, что

$$p(x)=\sum_{|s| \leqslant m}\left(\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^{s_i}/s_i!\right)D^s f(a).$$

В качестве приложения рассмотрим регулярную область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ диаметром $h$, точки $P_1, \ldots, P_M \in \overline{\Omega}$, коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_M$ и формулу приближенного интегрирования

$$\int_{\Omega} f\, d\tau \doteq \sum_{i=1}^{M} c_i f(P_i). \tag{1}$$

**Теорема IV.2.1.** *Предположим, что*

а) *формула* (1) *точна для полиномов степени $m$ $(m \geqslant 0)$,*

б) *коэффициенты $c_i$ положительны,*

в) *$\Omega$ — выпуклое множество.*

*Тогда*

$$\left|\int_{\Omega} f\, d\tau-\sum_{i=1}^{M} c_i f(P_i)\right| \leqslant 2 \operatorname{mes}(\Omega)(nh)^{m+1}/f/_{m+1},$$

*если* $f \in C_I^{m+1}(\overline{\Omega})$,

$$\left|\int_{\Omega} f\, d\tau-\sum_{i=1}^{M} c_i f(P_i)\right| \leqslant 2 \operatorname{mes}(\Omega)(nh)^m \omega_m(f, h),$$

*если* $f \in C^m(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Докажем первое из двух соотношений. Второе может быть получено аналогичным образом исходя из леммы IV.2.3. Воспользуемся леммой IV.2.1, полагая $E=C_I^{m+1}(\overline{\Omega})$, $F=\mathbf{R}$, $Lf=\int_{\Omega} f\, d\tau-\sum_{i=1}^{M} c_i f(P_i)$. Так

как формула (1) точна для $f=1$, то получаем $\sum_{i=1}^{M} c_i = \operatorname{mes}(\Omega)$. Пусть $f \in C_l^{m+1}(\overline{\Omega})$, $a \in \overline{\Omega}$, $p$ — полином степени $m$ (лемма IV.2.4), такой, что $D^s p(a) = D^s f(a)$ при $|s| \leqslant m$, $g = f - p$. Отметим, что $p$ принадлежит ядру $L$ и $g$ удовлетворяет соотношению $D^s g(a) = 0$, $|s| \leqslant m$. С помощью леммы IV.2.2, принимая во внимание тот факт, что $c_i > 0$, получаем

$$\left| \int_\Omega f\, d\tau - \sum_{i=1}^{M} c_i f(P_i) \right| = |Lf| = |Lg| \leqslant \int_\Omega |g|\, d\tau + \sum_{i=1}^{M} c_i |g(P_i)| \leqslant$$

$$\leqslant \left( \operatorname{mes}(\Omega) + \sum_{i=1}^{M} c_i \right) /g/_0 \leqslant 2 \operatorname{mes}(\Omega)\, (nh)^{m+1} /g/_{m+1} =$$

$$= 2 \operatorname{mes}(\Omega)\, (nh)^{m+1} /f/_{m+1}.$$

## 3. АППРОКСИМАЦИЯ ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕРПОЛЯНТОВ

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — область с полигональной границей. В этом и последующих параграфах будут рассмотрены пространства функций типа конечных элементов, определенных на $\overline{\Omega}$, прямоугольных и треугольных, которые были описаны в § II.3, II.4 и II.5. В случае прямоугольных элементов необходимо предполагать, что граница $\Omega$ составлена из отрезков прямых, параллельных осям координат.

Пусть $U$ — некоторое такое пространство, $F_1, F_2, \ldots$ — функционалы, служащие для его определения. Будем говорить, что $U$ — *пространство класса* $C_l^m(\overline{\Omega})$, если $U \subset C_l^m(\overline{\Omega})$; что $U$ имеет *порядок* $k$, если $\mathcal{P}_k(\overline{\Omega}) \subset U$, но $\mathcal{P}_{k+1}(\overline{\Omega}) \not\subset U$; что $U$ имеет *кратность* $r$, если число функционалов, отвечающих каждому элементу, равно $r$. *Индексом функционала* $F_i$ называется число $l$, такое, что $F(f)$ имеет вид $\sum_{|s|=l} a_s D^s f(P)$. *Индексом* $U$ называется максимальный из индексов этих функционалов. Например, для треугольных элементов «полиномы степени 5 типа II» $U$ будет класса $C_l^2(\overline{\Omega})$, порядка 4, кратности 18 и индекса 2.

Простая проверка показывает, что для всех пространств $U$, описанных в § II.3, II.4 и II.5, имеем

1) индекс $U$ меньше порядка $U$, (1)

2) для функционала индекса $l$, относящегося к точке $P \in \overline{\Omega}$,

$$|F(f)| \leqslant \sqrt{2} \max_{|s|=l} |D^s f(P)|. \tag{2}$$

Множитель $\sqrt{2}$ отвечает функционалу «нормальная производная» от элементов «полиномы степени 5 типа I».

**Определение.** Пусть $U$ — пространство типа конечных элементов на $\overline{\Omega}$, $e_1$, $e_2$, ... — элементы соответствующего разбиения $\overline{\Omega}$, $u_1$, $u_2$, ... — базис Лагранжа для $U$ относительно функционалов $F_1$, $F_2$, .... Пространство $U$ называется *равномерным с постоянной* $q$, если для всякого сужения $u_e$ некоторой базисной функции $u_l$ на элемент $e$ диаметра $h$ имеем

$$|u_e|_j \leqslant q h^{l-j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $l$ обозначает индекс функционала $F_i$, относящегося к $u_l$.

Далее мы будем рассматривать семейства $\{U_\alpha\}$ пространств типа конечных элементов на одном и том же $\overline{\Omega}$, каждое из которых состоит из членов одного и того же типа, например «треугольные элементы, полиномы степени 3 типа I».

**Определение.** Семейство $\{U_\alpha\}$ является равномерным, если существует такое $q$, что все $U_\alpha$ равномерны с постоянной $q$. Такое семейство называется *равномерным с постоянной* $q$.

**Теорема IV.3.1.** *Семейство пространств типа треугольных конечных элементов является равномерным, если существует такое число $a > 0$, что все углы всех треугольников всевозможных разбиений $\overline{\Omega}$ не меньше $a$. Семейство пространств типа прямоугольных конечных элементов является равномерным, если существует такое число $a > 0$, что отношение длин сторон каждого прямоугольника для всевозможных разбиений $\overline{\Omega}$ не меньше $a$.*

В качестве примера проверим эту теорему для семейства «треугольные элементы, полиномы степени 3 типа II». Используя обозначения § II.5, положим $e=T_1$. Так как углы $e$ больше или равны $a$, то существует такая постоянная $b$, что элементы матрицы Якоби преобразования $\varphi$ ограничены величиной $bh^{-1}$, а элементы $a_{ij}$ матрицы Якоби обратного преобразования — величиной $bh$. Тогда требуемый результат является непосредственным следствием соотношений между $L$, $L_{i1}$, $L_{i2}$, $L_{i3}$ и $\Lambda$, $\Lambda_{i1}$, $\Lambda_{i2}$, $\Lambda_{i3}$.

**Определение.** Пусть $U$ — подпространство типа конечных элементов на $\overline{\Omega}$, и пусть $F_1, F_2, \ldots$ — соответствующие ему функционалы. *Интерполянт и порядка $m$* функции $f \in C_I^m(\overline{\Omega})$ относительно $U$ определяется соотношениями

$$u \in U,\ F_i(u) = F_i(f) \text{ для } F_i \text{ индекса } \leqslant m,$$
$$F_i(u) = 0 \quad \text{для } F_i \text{ индекса } > m.$$

Обозначая через $u_1, u_2, \ldots$ базис Лагранжа для $U$ относительно $F_1, F_2, \ldots$, непосредственной проверкой убеждаемся, что интерполянт порядка $m$ задается выражением

$$u = \sum_i{}' F_i(f)\, u_i, \tag{3}$$

где $\sum'$ обозначает сумму по тем $i$, для которых индекс $F_i$ не превосходит $m$.

Замечание. Предположим, что $U$ порядка $k$ индекса $l$. Если $m \geqslant l$, то интерполянты $f$ порядка $m$ и $l$ относительно $U$ совпадают и равны $u = \sum_i F_i(f)\, u_i$. Функцию $u$ будем называть *интерполянтом $f$ относительно $U$*.

**Теорема IV.3.2.** *Пусть $U$ — пространство порядка $\geqslant m$, кратности $r$, равномерное с постоянной $q$. Если $f \in C_I^{m+1}(\overline{\Omega})$, $u$ — интерполянт $f$ порядка $m$ относительно $U$, $u_e$ — сужение $u$ на элемент $e$ диаметра $h$, $f_e$ — сужение $f$ на $e$, то*

$$|u_e - f_e|_j \leqslant 2^{m+2}(rq+1)\, h^{m+1-j}\, |f_e|_{m+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m.$$

**Теорема IV.3.3.** *Пусть $U$ — пространство порядка $\geqslant m$, кратности $r$, равномерное с постоянной $q$. Если $f \in C^m(\overline{\Omega})$,*

*$u$ — интерполянт $f$ порядка $m$ относительно $U$, $u_e$ — сужение $u$ на элемент $e$ диаметра $h$, $f_e$ — сужение $f$ на $e$, то*

$$/u_e - f_e/_j \leqslant 2^{m+1}(rq+1)\,h^{m-j}\omega_m(f_e, h), \quad 0 \leqslant j \leqslant m.$$

**Теорема IV.3.4.** *Пусть $U$ — пространство порядка $\geqslant m-1$, кратности $r$, равномерное с постоянной $q$. Если $f \in C_I^m(\overline{\Omega})$, $u$ — интерполянт $f$ порядка $m$ относительно $U$, $u_e$ — сужение $u$ на элемент $e$ диаметра $h$, $f_e$ — сужение $f$ на $e$, то*

$$/u_e - f_e/_j \leqslant 2^{m+1}(rq+1)\,h^{m-j}/f_e/_m, \quad 0 \leqslant j \leqslant m.$$

Доказательство теоремы IV.3.2. Применим лемму IV.2.1, полагая $E = C_I^{m+1}(e)$, $F = C^0(e)$, $\|\ \| = //\ //_0$, $Lf = D^\sigma f_e - D^\sigma u_e$, где $|\sigma| = j \leqslant m$. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_r$ — функционалы для $U$ относительно $e$; $u_1, u_2, \ldots, u_r$ — сужения на $e$ базисных функций, относящихся к $F_1, \ldots, F_r$; $l_1, \ldots, l_r$ — индексы $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Имеем

$$u_e = \sum_i{}' F_i(f)\,u_i,$$

где $\sum'$ обозначает сумму по тем $i$, для которых $l_i \leqslant m$. Это соотношение показывает, что $L$ является линейным оператором. Если $p$ — полином степени $\leqslant m$, то на $e$ имеем

$$p = \sum_{i=1}^{r} F_i(p)\,u_i = \sum_i{}' F_i(p)\,u_i,$$

откуда видно, что $p$ принадлежит ядру $L$. Пусть $a \in e$. Сопоставим $f$ такой полином $p$ степени $m$, что $D^s p(a) = D^s f(a)$, $|s| \leqslant m$, и положим $v = f_e - p$. Принимая во внимание лемму IV.2.2, соотношение (2) и равномерность $U$ с постоянной $q$, получим

$$\begin{aligned}
//Lf//_0 = //Lv//_0 &\leqslant \\
&\leqslant //D^\sigma v//_0 + \sum_i{}' |F_i(v)|\,//D^\sigma u_i//_0 \leqslant \\
&\leqslant (2h)^{m+1-j}/v/_{m+1} + \sqrt{2}\sum_i{}' /v/_{l_i} q h^{l_i - j} \leqslant \\
&\leqslant (2h)^{m+1-j}/v/_{m+1} + \sqrt{2}\sum_i{}' (2h)^{m+1-l_i}/v/_{m+1} q h^{l_i - j} \leqslant \\
&\leqslant (rq+1)\,2^{m+2}/v/_{m+1} h^{m+1-j} = 2^{m+2}(rq+1)\,/f/_{m+1} h^{m+1-j}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы IV.3.3. Начало доказательства совпадает с предыдущим, если не считать того, что $E = C^m(e)$. Принимая во внимание лемму IV.2.3, получим

$$//Lf//_0 = //Lv//_0 \leqslant //D^\sigma v//_0 + \sum_i{}' |F_i(v)| //D^\sigma u_i//_0 \leqslant$$

$$\leqslant (2h)^{m-j}\omega_m(v, h) + \sqrt{2}\sum_i{}' /v/_{l_i} qh^{l_i-j} \leqslant$$

$$\leqslant (2h)^{m-j}\omega_m(v, h) + \sqrt{2}\sum_i{}' (2h)^{m-l_i}\omega_m(v, h)\, qh^{l_i-j} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{m+1}(rq+1)\,\omega_m(v, h)\, h^{m-j} =$$

$$= 2^{m+1}(rq+1)\,\omega_m(f_e, h)\, h^{m-j}.$$

Доказательство теоремы IV.3.4. Напомним, что оператор $D^s$ для $|s| = m$, применяемый к $C_l^m(\overline{\Omega})$, не является линейным (§ 1). Отсюда следует, что $u_e$ не линейно зависит от $f$ и что некоторые из производных $D^s(u_e - f_e)$ не являются линейными при $|s| \leqslant m$ и даже при $|s| = m$. Поэтому мы воспользуемся формулировкой «леммы Брамбла», слегка отличной от леммы IV.2.1. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_r$ — функционалы на $U$, относящиеся к $e$; $u_1, u_2, \ldots, u_r$ — сужения на $e$ функций базиса, связанного с $F_1, F_2, \ldots, F_r$, и $l_1, l_2, \ldots, l_r$ — индексы $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Обозначим через $\sum_i{}'$ сумму по тем $i$, для которых $l_i < m$, а через $\sum_i{}''$ — сумму по тем $i$, для которых $l_i = m$. Пусть $a \in e$, $p$ — такой полином степени $m-1$, что $D^s p(a) = D^s f(a)$, $|s| \leqslant m-1$. Тогда

$$u_e = \sum_i{}' F_i(f)\, u_i + \sum_i{}'' F_i(f)\, u_i, \quad p = \sum_i{}' F_i(p)\, u_i.$$

Полагая $v = f_e - p$ и замечая, что $/v/_m = /f_e/_m$, получим,

принимая во внимание лемму IV.2.2,

$$
\begin{aligned}
|u_e - f_e|_j &\leqslant |u_e - p|_j + |f_e - p|_j \leqslant \\
&\leqslant \Big|\sum_i{}' F_i(v)\, u_i\Big|_j + \Big|\sum_i{}'' F_i(f)\, u_i\Big|_j + |v|_j \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{2} \sum_i{}' |v|_{l_i} |u_i|_j + \sqrt{2}\, |f_e|_m \sum_i{}'' |u_i|_j + |v|_j \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{2} \sum_i{}' (2h)^{m-l_i} |v|_m q h^{l_i - j} + \sqrt{2}\, |f_e|_m \sum_i{}'' q h^{m-j} + \\
&\qquad + (2h)^{m-j} |v|_m \leqslant \\
&\leqslant r q 2^{m+1} h^{m-j} |f_e|_m + 2^m h^{m-j} |f_e|_m \leqslant \\
&\leqslant (rq+1)\, 2^{m+1} h^{m-j} |f_e|_m .
\end{aligned}
$$

**Теорема IV.3.5.** *Пусть* $\{U_\alpha\}$ — *семейство пространств типа конечных элементов класса* $C_l^t(\overline{\Omega})$, *порядка* $\geqslant m$, *кратности* $r$, *равномерное с постоянной* $q$. *Пусть* $h_\alpha$ — *максимальный диаметр элементов разбиения* $\overline{\Omega}$, *относящихся к* $U_\alpha$; $f \in C_l^{m+1}(\overline{\Omega})$; $u_\alpha$ — *интерполянт* $f$ *порядка* $m$ *относительно* $U_\alpha$. *Тогда при* $h_\alpha \leqslant 1$ *имеем*

$$
\|u_\alpha - f\|_j \leqslant (\operatorname{mes}(\Omega))^{1/2} (j+1)\, 2^{m+2} (rq+1)\, h_\alpha^{m+1-j} |f|_{m+1},
$$
$$
j \leqslant \min(m,\ t).
$$

**Теорема IV.3.6.** *Пусть* $\{U_\alpha\}$ — *семейство пространств типа конечных элементов класса* $C_l^t(\overline{\Omega})$, *порядка* $k$, *кратности* $r$, *равномерное с постоянной* $q$. *Пусть* $h_\alpha$ — *максимальный диаметр элементов разбиения* $\overline{\Omega}$, *относящихся к* $U_\alpha$; $f \in C_l^{m+1}(\overline{\Omega})$, $m \geqslant k$; $u_\alpha$ — *интерполянт* $f$ *относительно* $U_\alpha$. *Тогда при* $h_\alpha \leqslant 1$ *имеем*

$$
\|u_\alpha - f\|_j \leqslant (\operatorname{mes}(\Omega))^{1/2} (j+1)\, 2^{k+2} (rq+1)\, h_\alpha^{k+1-j} |f|_{k+1}, \quad j \leqslant t.
$$

**Теорема IV.3.7.** *Пусть* $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ — *равномерная последовательность подпространств типа конечных элементов на* $\overline{\Omega}$ *класса* $C_l^m(\overline{\Omega})$, *порядка* $\geqslant m$, *кратности* $r$. *Пусть* $h_\alpha$ — *максимальный диаметр элементов разбиения* $\overline{\Omega}$, *относящихся к* $U_\alpha$; $\lim\limits_{\alpha\to\infty} h_\alpha = 0$; $f \in C_l^m(\overline{\Omega})$; $u_\alpha$ — *интерполянт* $f$ *порядка* $m$ *относительно* $U_\alpha$. *Тогда*

$$
\lim_{\alpha\to\infty} \|u_\alpha - f\|_m = 0.
$$

Доказательство теоремы IV.3.5. Пусть для некоторого конкретного $U_\alpha$ элементами разбиения $\overline{\Omega}$ являются $e_1, e_2, \ldots, e_M$. Так как $\sum\limits_{|s|\leqslant j} 1 = (j+1)(j+2)/2 \leqslant$ $\leqslant (j+1)^2$, то достаточно показать, что при $|s| \leqslant j$, $h_\alpha \leqslant 1$ имеем

$$\|D^s(u_\alpha - f)\|_0 \leqslant (\operatorname{mes}(\Omega))^{1/2} 2^{m+2}(rq+1)\, h^{m+1-j}\, /f/_{m+1}.$$

Но, используя теорему IV.3.2, непосредственно получаем

$$\begin{aligned}\|D^s(u_\alpha - f)\|_0^2 = \int\limits_\Omega (D^s(u_\alpha - f))^2\, d\tau &\leqslant \operatorname{mes}(\Omega)\, /u_\alpha - f/_{|s|}^2 \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{mes}(\Omega)\, \{2^{m+2}(rq+1)\, h^{m+1-|s|}\, /f/_{m+1}\}^2 \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{mes}(\Omega)\, \{2^{m+2}(rq+1)\, h^{m+1-j}\, /f/_{m+1}\}^2.\end{aligned}$$

Доказательство теоремы IV.3.6. Заметим, что 1) $f \in C_l^{k+1}(\overline{\Omega})$, 2) $u$ является интерполянтом порядка $k$. Тогда теорема IV.3.6 есть не что иное, как теорема IV.3.5 при $m = k$.

Доказательство теоремы IV.3.7. Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_M$ — ассоциированные с $f$ открытые непересекающиеся множества, такие, что 1) $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{k=1}^{M} \overline{\Omega}_k$, 2) $f_i$ — сужение $f$ на $\Omega_i$ — принадлежит классу $C^m(\overline{\Omega}_i)$. Обозначим через $D_0$ множество точек, принадлежащих одновременно двум различным $\overline{\Omega}_i$, $D_k = \overline{\Omega}_k - D_0$, $G(t) = \{x \in \overline{\Omega}$: расстояние от $x$ до $D_0$ не превосходит $t\}$. Имеем $\lim\limits_{t\to 0} \operatorname{mes}(G(t)) = 0$. Для заданного $\alpha$, такого, что $h_\alpha \leqslant 1$, пусть $e_1, e_2, \ldots, e_M$ — элементы, относящиеся к $U_\alpha$; положим

$$E_0 = \{e_i : e_i \cap D_0 \neq \varnothing\}, \quad E_k = \{e_i : e_i \subset D_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, M.$$

Если $e$ — некоторый элемент, а $f_e$ и $u_e$ — сужения $f$ и $u_\alpha$ на $e$, то в силу теорем IV.3.3 и IV.3.4 получаем

$$/u_e - f_e/_j \leqslant 2^{m+1}(rq+1)\, \omega_m(f_k, h_\alpha), \quad j \leqslant m, \quad \text{при} \quad e \in E_k, \quad k \geqslant 1,$$

$$/u_e - f_e/_j \leqslant 2^{m+1}(rq+1)\, /f/_m, \quad j \leqslant m, \quad \text{при} \quad e \in E_0.$$

Для $|s| \leqslant m$ имеем

$$\|D^s(u_\alpha - f)\|_0^2 = \sum_{k=0}^{M} \sum_{e \in E_k} \int_e (D^s(u_\alpha - f))^2 \, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant (2^{m+1}(rq+1))^2 \{\operatorname{mes}(G(h_\alpha))/f/_m^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{M} \operatorname{mes}(\Omega_k)\, \omega_m^2(f_k, h_\alpha)\}.$$

Принимая во внимание тот факт, что $\lim\limits_{h \to 0} \omega_m(f_k, h) = 0$, получаем

$$\lim_{\alpha \to \infty} \|D^s(u_\alpha - f)\|_0 = 0, \quad |s| \leqslant m.$$

## 4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ИНТЕРПОЛЯНТА

Теорема VI.3.6 показывает, что для равномерного семейства $\{U_\alpha\}$ класса $C_l^t(\bar{\Omega})$ порядка $k$ интерполянт $u_\alpha$ достаточно регулярной функции $f$ удовлетворяет соотношению

$$\|u_\alpha - f\|_j = O(h_\alpha^{k+1-j}), \quad j \leqslant t,$$

где $h_\alpha$ обозначает максимальный диаметр элементов разбиения $\bar{\Omega}$, относящихся к $U_\alpha$. Пусть $\tilde{u}_\alpha \in U_\alpha$ таково, что при $j \leqslant t$ имеем

$$\|\tilde{u}_\alpha - f\|_j \leqslant \|v - f\|_j \quad \forall v \in U_\alpha.$$

Тогда очевидно, что

$$\|\tilde{u}_\alpha - f\|_j = O(h_\alpha^{k+1-j}).$$

Проверим, что показатель $k+1-j$ является оптимальным. Более точно, имеет место следующая

**Теорема IV.4.1.** *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — область с полигональной границей (если речь идет об элементах прямоугольного типа, то граница $\Omega$ предполагается состоящей из отрезков прямых, параллельных осям координат). Для каждого типа конечных элементов, введенных в § II.3, II.4 и II.5, существуют функция $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и равномерная последовательность пространств $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$, такие, что*

$$|u_\alpha - f|_j \geqslant c h_\alpha^{k+1-j} \quad \forall u_\alpha \in U_\alpha, \quad 0 \leqslant j \leqslant t. \qquad (1)$$

*Здесь $c$ — положительная постоянная; $U_\alpha$ — пространства класса $C^t(\overline{\Omega})$ порядка $k$; $h_\alpha$ — максимальный диаметр элементов разбиения $\overline{\Omega}$, относящихся к $U_\alpha$;* $\lim\limits_{\alpha\to\infty} h_\alpha = 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай треугольных элементов, так как случай прямоугольных элементов изучается аналогично и является даже несколько более простым. В $\Omega$ всегда можно расположить квадрат $C$ со сторонами, параллельными осям координат, и тогда (1) достаточно доказать в случае, когда полунорма $|\ |_j$ рассматривается только на $C$, а не на всем $\Omega$. Далее мы ограничимся рассмотрением квадрата $\overline{\Omega} = \{0 \leqslant x,\ y \leqslant 1\}$. Разобьем $\overline{\Omega}$ на $\alpha^2$ равных квадратов, а каждый квадрат — на два треугольника по диагонали, которая проводится из левого верхнего угла в нижний правый. Пусть $U_1$ — пространство, соответствующее этому разбиению $\overline{\Omega}$ на $2\alpha^2$ элементов. Пусть $\triangle$ — основной треугольник с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0). Обозначим через $U$ множество сужений на $\triangle$ функций из $U_1$. Существует полином $p$ степени $k+1$, сужение которого $p_\triangle$ на $\triangle$ не принадлежит $U$. Пусть

$$a_j^2 = \inf_{v\in U} |p_\triangle - v|_j^2 = \inf_{v\in U} \int\limits_\triangle \sum_{|s|=j} (D^s(p-v))^2\, d\xi\, d\eta.$$

Покажем, что $a_j \neq 0$ для $j = 0, 1, \ldots, k+1$. В самом деле, если $a_j = 0$, $0 \leqslant j \leqslant k+1$, то $p_\triangle - v$ есть полином $q$ степени $\leqslant k$. По предположению, $q \in U$ и тогда $p_\triangle = q + v \in U$, что противоречит предположению. Выберем в (1) $f = p$. Рассмотрим теперь некоторое фиксированное $\alpha$ и положим $\delta = 1/\alpha$, $u_\alpha \in U_\alpha$. Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — узел $(i\delta, m\delta)$, $0 \leqslant i,\ m < \alpha$, и отображение $\varphi$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ определяется так: $(\xi, \eta) \to (x, y) = (\bar{x} + \delta\xi, \bar{y} + \delta\eta)$. Образом $\triangle$ является некоторый элемент $e_{i,m}$. Простые вычисления показывают, что $(p\circ\varphi)(\xi, \eta) = \delta^{k+1} p(\xi, \eta) + q(\xi, \eta)$, где $q$ — полином степени $k$. Для $|s| = j \leqslant t$ последовательно получаем

$$\int\limits_{e_{i,m}} (D^s(u_\alpha - p))^2\, dx\, dy = \delta^2 \int\limits_\triangle \{(D^s(u_\alpha - p))\circ\varphi\}^2 (\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$D^s\{(u_\alpha - p)\circ\varphi\} = \delta^j (D^s(u_\alpha - p))\circ\varphi,$$

$$D^s\{(u_\alpha - p)\circ\varphi\} = D^s\{(u_\alpha\circ\varphi) - q\} - \delta^{k+1} D^s p.$$

Но $u_\alpha \circ \varphi \in U$, $q \in U$ и, следовательно, $v = \delta^{-k-1}(u_\alpha \circ \varphi - q) \in U$. Тогда

$$\int_{e_{i,m}} (D^s(u_\alpha - p))^2\, dx\, dy = \delta^{2-2j} \int_{\Delta} \{D^s((u_\alpha - p)\circ\varphi)\}^2\, d\xi\, d\eta =$$
$$= \delta^{2-2j}\delta^{2k+2} \int_{\Delta} (D^s v - D^s p)^2\, d\xi\, d\eta.$$

Суммируя по $|s| = j$ и по всем элементам $e_{i,m}$, т. е. по половине элементов из $\bar{\Omega}$, получаем

$$\int_{\Omega} \sum_{|s|=j} (D^s(u_\alpha - p))^2\, dx\, dy \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i,m=0}^{\alpha-1} \int_{e_{i,m}} \sum_{|s|=j} (D^s(u_\alpha - p))^2 dx\, dy \geqslant (\delta^{k+1-j} a_j)^2.$$

Следовательно, $|u_\alpha - p|_j \geqslant a_j \delta^{k+1-j} = a_j (h_\alpha/\sqrt{2})^{k+1-j}$. Таким образом, для получения (1) достаточно положить $c = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant t} a_j (1/\sqrt{2})^{k+1-j}$.

## 5. СХОДИМОСТЬ МЕТОДА РИТЦА

**Теорема IV.5.1.** *Пусть $B$ — банахово пространство с нормой $\|\ \|$, $a$: $B \times B \to \mathbf{R}$ — непрерывная симметричная коэрцитивная билинейная форма, $\varphi$: $B \to \mathbf{R}$ — непрерывное линейное отображение. Следовательно, существуют положительные постоянные $c$, $d$, $e$, такие, что $c\|v\|^2 \leqslant a(v, v) \leqslant d\|v\|^2$, $|\varphi(v)| \leqslant e\|v\|^2$ $\forall v \in B$. Если $G$ — замкнутое подпространство в $B$, $u \in B$ и $\tilde{u} \in G$ определены условиями $a(u, v) = \varphi(v)$ $\forall v \in B$, $a(\tilde{u}, v) = \varphi(v)$ $\forall v \in G$, то для всякого $v \in G$ имеем*

$$\|u - \tilde{u}\| \leqslant (d/c)^{1/2} \|u - v\|.$$

Доказательство. Существование и единственность $u$ и $\tilde{u}$ гарантируются теоремой III.3.1. Элемент $\tilde{u}$ является приближением по Ритцу для $u$ (§ I.2.). Используя последовательно коэрцитивность формы $a$, соотношение (5) теоремы I.2.1 и непрерывность формы $a$, получаем

$$c\|u - \tilde{u}\|^2 \leqslant a(u - \tilde{u},\ u - \tilde{u}) \leqslant a(u - v,\ u - v) \leqslant d\|u - v\|^2.$$

**Пример 1.** Рассмотрим опять пример 1, описанный в § III.2 и III.3. Предположим, что выполняются усло-

вия теоремы III.2.1. Тогда существуют $c>0$ и $d$, такие, что $c\|v\|_1^2 \leqslant a(v, v) \leqslant d\|v\|_1^2$ для всякого $v \in V$. Пусть задано $f \in H^0(\Omega)$ и для $u \in V$ имеем $a(u, v) = (f, v)_0$ $\forall v \in V$. Предположим, что граница $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ полигональна. В случае прямоугольных элементов будем предполагать, что граница $\Omega$ составлена из отрезков прямых, параллельных осям координат. Предположим также, что $\partial\Omega_1$ либо пусто, либо образовано конечным числом замкнутых отрезков. Пусть $\{U_\alpha\}$ — семейство пространств типа конечных элементов на $\overline{\Omega}$ класса $C_l^1(\overline{\Omega})$, порядка $k \geqslant 1$, кратности $r$, равномерное с постоянной $q$. Будем считать, что для каждого $U_\alpha$ пересечение какого-либо элемента с $\partial\Omega_1$ либо пусто, либо представляет собой вершину элемента или целиком его сторону. Через $h_\alpha$ обозначим максимальный диаметр элементов разбиения $\overline{\Omega}$, относящихся к $U_\alpha$. Пусть $G_\alpha = U_\alpha \cap W$ и $\tilde{u}_\alpha$ — приближение по Ритцу для $u$, относящееся к $G_\alpha$, т. е. $\tilde{u}_\alpha$ определяется соотношениями $\tilde{u}_\alpha \in G_\alpha$, $a(\tilde{u}_\alpha, v) = (f, v)_0$ для всякого $v \in G_\alpha$. При выполнении всех этих предположений имеют место следующие теоремы IV.5.2 и IV.5.3.

**Теорема IV.5.2.** *Если семейство $\{U_\alpha\}$ — последовательность, причем $\lim\limits_{\alpha\to\infty} h_\alpha = 0$, то $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \|u - \tilde{u}_\alpha\|_1 = 0$.*

**Теорема IV.5.3.** *Если $u \in C_l^{m+1}(\overline{\Omega})$, $m \geqslant 1$, то при $h_\alpha \leqslant 1$ имеем*

$$\|u - \tilde{u}_\alpha\|_1 \leqslant (d \operatorname{mes}(\Omega)/c)^{1/2} 2^{p+3} (rq+1) h_\alpha^p |u|_{p+1}, \quad p = \min(m, k).$$

Доказательство теоремы IV.5.2. Зададим $\varepsilon > 0$. По определению $V$ существует такое $g \in W$, что $\|u - g\|_1 < \varepsilon$. Пусть $u_\alpha$ — интерполянт $g$ порядка 1 относительно $U_\alpha$. По теореме IV.3.7 существует такое целое $N$, что $\|u_\alpha - g\|_1 < \varepsilon$, если $\alpha > N$. Следовательно, $\|u - u_\alpha\|_1 \leqslant \|u - g\|_1 + \|u_\alpha - g\|_1 < 2\varepsilon$, если $\alpha > N$. С другой стороны, заметим, что $u_\alpha$ удовлетворяет краевым условиям, т. е. $u_\alpha \in W$, и, следовательно, $u_\alpha \in G_\alpha$. По теореме IV.5.1,

$$\|u - \tilde{u}_\alpha\|_1 \leqslant (d/c)^{1/2} \|u - u_\alpha\|_1 < 2\varepsilon (d/c)^{1/2} \text{ для } \alpha > N.$$

Доказательство теоремы IV.5.3. Заметим, что если $v \in W$, то $\int\limits_{\partial\Omega_1} v^2 d\sigma = 0$. В силу непрерывности били-

нейной формы $b(s, t) = \int\limits_{\partial\Omega_1} st\, d\sigma$ (теорема III.1.3) имеем, кроме того, $\int\limits_{\partial\Omega_1} v^2\, d\sigma = 0$ для всякого $v \in V$. Отсюда следует, что $u \in W$. Пусть $u_\alpha$ — интерполянт порядка $p$ для $u$ относительно $U_\alpha$. Заметим, что $u_\alpha \in W$ и, следовательно, $u_\alpha \in G_\alpha$. Используя теоремы IV.3.5 и IV.5.1, при $h_\alpha \leqslant 1$ получаем

$$\|u - \tilde{u}_\alpha\|_1 \leqslant (d/c)^{1/2} \|u - u_\alpha\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant (d \operatorname{mes}(\Omega)/c)^{1/2} 2^{p+3} (rq+1)\, h_\alpha^p\, /u/_{p+1}.$$

Пример 2. Рассмотрим опять пример 2, описанный в § III.2 и III.3. Существуют такие $c, d > 0$, что $c\|v\|_2^2 \leqslant a(v, v) \leqslant d\|v\|_2^2\ \forall v \in V$. Пусть задано $f \in H^0(\Omega)$ и для $u \in V$ имеем $a(u, v) = (f, v)_0\ \forall v \in V$. Существует также (теорема III.1.4) такое $\gamma$, что $//v//_0 \leqslant \gamma \|v\|_2\ \forall v \in H^2(\Omega)$. Предположим, что граница $\Omega$ полигональна и что в случае прямоугольных элементов она состоит из отрезков прямых, параллельных осям координат. Через $\{U_\alpha\}$ обозначим семейство подпространств типа конечных элементов на $\bar{\Omega}$ класса $C_l^s(\bar{\Omega})$, порядка $k \geqslant 2$, кратности $r$, равномерное с постоянной $q$. Предположим, что для каждого $\alpha$ функционалы «значение в точке $(x_i, y_i)$», $i = 1, 2, 3$, принадлежат множеству функционалов, относящихся к $U_\alpha$. Пусть $h_\alpha$ — максимальный диаметр элементов из $U_\alpha$, $G_\alpha = U_\alpha \cap W$ и $\tilde{u}_\alpha$ — приближение по Ритцу для $u$ относительно $G_\alpha$. Следовательно, $\tilde{u}_\alpha$ определяется соотношениями $\tilde{u}_\alpha \in G_\alpha$, $a(\tilde{u}_\alpha, v) = (f, v)_0\ \forall v \in G_\alpha$. Тогда при этих предположениях имеют место следующие теоремы IV.5.4 и IV.5.5.

**Теорема IV.5.4.** *Если семейство $\{U_\alpha\}$ — последовательность и $\lim\limits_{\alpha\to\infty} h_\alpha = 0$, то $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \|u - \tilde{u}_\alpha\| = 0$ и $\lim\limits_{\alpha\to\infty} //u - \tilde{u}_\alpha//_0 = 0$.*

**Теорема IV.5.5.** *Если $u \in C_l^{m+1}(\bar{\Omega})$, $m \geqslant 2$, то при $h_\alpha \leqslant 1$ имеем*

$$\|u - \tilde{u}_\alpha\|_2 \leqslant (d \operatorname{mes}(\Omega)/c)^{1/2} 2^{p+4} (rq+1) h_\alpha^{p-1} /u/_{p+1},\ p = \min(m, k),$$
$$//u - \tilde{u}_\alpha//_0 \leqslant \gamma \|u - \tilde{u}_\alpha\|_2.$$

Доказательство теоремы IV.5.4. По определению $V$ существует такая функция $g \in W$, что $\|u-g\|_2 < \varepsilon$. Пусть $u_\alpha$ — интерполянт $g$ относительно $U_\alpha$. По теореме IV.3.7 существует такое $N$, что $\|u_\alpha - g\|_2 < \varepsilon$, если $\alpha > N$. Следовательно, $\|u-u_\alpha\| \leqslant \|u-g\|_2 + \|u_\alpha - g\|_2 < 2\varepsilon$ для $\alpha > N$. С другой стороны, заметим, что $u_\alpha$ удовлетворяет краевым условиям, т. е. $u_\alpha \in W$ и, следовательно, $u_\alpha \in G_\alpha$. По теореме IV.5.1 получаем

$$\|u-\tilde{u}_\alpha\|_2 \leqslant (d/c)^{1/2}\|u-u_\alpha\|_2 \leqslant 2\varepsilon\,(d/c)^{1/2} \text{ для } \alpha > N.$$

Окончательно имеем

$$//u-u_\alpha//_0 \leqslant \gamma\|u-u_\alpha\|_2.$$

Доказательство теоремы IV.5.5. Заметим, что если $v \in W$, то $v(x_i, y_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. В силу непрерывности функционалов «значения $v$ в точках $(x_i, y_i)$», $i = 1, 2, 3$, на $H^2(\Omega)$ (теорема III.1.4) имеем $v(x_i, y_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, для всякого $v \in V$ и, в частности, для $u$. Пусть $u_\alpha$ — интерполянт порядка $p$ для $u$ относительно $U_\alpha$. Заметим, что $u_\alpha \in W$ и, следовательно, $u_\alpha \in G_\alpha$. Используя теоремы IV.3.5 и IV.5.1, при $h_\alpha \leqslant 1$ получаем

$$\begin{aligned}\|u-\tilde{u}_\alpha\|_2 &\leqslant (d/c)^{1/2}\|u-u_\alpha\|_2 \leqslant \\ &\leqslant (d\,\mathrm{mes}\,(\Omega)/c)^{1/2}\,3\cdot 2^{p+2}(rq+1)\,h_\alpha^{p-1}/u/_{p+1}.\end{aligned}$$

## 6. НЕОДНОРОДНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Вначале рассмотрим обобщения теорем III.3.1 и III.5.1.

**Теорема IV.6.1.** *Пусть $C$ — банахово пространство с нормой $\|\ \|$, $a$: $C \times C \to \mathbf{R}$ — непрерывная симметричная положительно определенная билинейная форма, $\varphi$: $C \to \mathbf{R}$ — непрерывное линейное отображение и $\omega \in C$. Через $B$ обозначим замкнутое подпространство из $C$. Предположим, что сужение формы $a$ на $B \times B$ коэрцитивно. Следовательно, существуют положительные постоянные $c$, $d$, $e$, такие, что $a(v, v) \leqslant d\|v\|^2$ $\forall v \in C$, $c\|v\|^2 \leqslant a(v, v)$ $\forall v \in B$, $|\varphi(v)| \leqslant e\|v\|$ $\forall v \in C$. Пусть $B_\omega = \omega + B = \{x+\omega: x \in B\}$. Тогда задача, состоящая в нахождении такого $u_\omega \in B_\omega$, что $a(u_\omega, v) = \varphi(v)$ $\forall v \in B$, имеет одно и только одно решение,*

*причем*

$$\|u_\omega\| \leqslant e/c + (1 + d/c)\|\omega\|.$$

Доказательство. Положим $u_\omega = u + \omega$. Тогда $u$ удовлетворяет соотношениям

$$u \in B; \quad a(u, v) = \varphi(v) - a(\omega, v) \quad \forall v \in B.$$

Однако $\psi$: $B \to \mathbf{R}$, определенное равенством $\psi(v) = \varphi(v) - a(\omega, v)$, линейно и непрерывно и $|\psi(v)| \leqslant e\|v\| + d\|\omega\| \cdot \|v\|$. Следовательно, можно применить теорему III.3.1. Элемент $u$ существует и определяется однозначно. Аналогично обстоит дело и с $u_\omega$. Кроме того,

$$\|u\| \leqslant (e + d\|\omega\|)/c \quad \text{и} \quad \|u_\omega\| \leqslant \|u\| + \|\omega\| \leqslant e/c + (1 + d/c)\|\omega\|.$$

**Теорема IV.6.2.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* IV.6.1. *Пусть $G$ — замкнутое подпространство из $B$, $\gamma \in C$, $G_\gamma = \gamma + G$, $\tilde{u}_\gamma$ определяется соотношениями $\tilde{u}_\gamma \in G_\gamma$, $a(\tilde{u}_\gamma, v) = \varphi(v)$ $\forall v \in G$. Тогда для всякого $v \in G$ имеем*

$$\|u_\omega - \tilde{u}_\gamma\| \leqslant (d/c)^{1/2}\|u_\omega - \omega - v\| + (1 + d/c)\|\omega - \gamma\|.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{u}_\omega \in G_\omega \equiv \omega + G \subset B_\omega$ таково, что $a(\tilde{u}_\omega, v) = \varphi(v)$ $\forall v \in G$. Имеем

$$u_\omega - \omega \in B; \quad a(u_\omega - \omega, v) = \varphi(v) - a(\omega, v) \quad \forall v \in B;$$
$$\tilde{u}_\omega - \omega \in G; \quad a(\tilde{u}_\omega - \omega, v) = \varphi(v) - a(\omega, v) \quad \forall v \in G. \qquad (1)$$

Элемент $\tilde{u}_\omega - \omega$ является приближением по Ритцу для $u_\omega - \omega$. По теореме IV.5.1 для всякого $v \in V$ имеем

$$\|u_\omega - \tilde{u}_\omega\| = \|(u_\omega - \omega) - (\tilde{u}_\omega - \omega)\| \leqslant (d/c)^{1/2}\|u_\omega - \omega - v\|. \qquad (2)$$

Вычитая из (1) соотношение

$$a(\tilde{u}_\gamma - \gamma, v) = \varphi(v) - a(\gamma, v) \quad \forall v \in G,$$

получаем

$$a(\tilde{u}_\omega - \tilde{u}_\gamma - (\omega - \gamma), v) = -a(\omega - \gamma, v) \quad \forall v \in G.$$

Так как $\tilde{u}_\omega - \tilde{u}_\gamma - (\omega - \gamma) \in G$, то по теореме III.3.1 имеем

$$\|\tilde{u}_\omega - \tilde{u}_\gamma - (\omega - \gamma)\| \leqslant d\|\omega - \gamma\|/c. \qquad (3)$$

Окончательно из (2) и (3) следует, что

$$\|u_\omega - \tilde{u}_\gamma\| \leqslant \|u_\omega - \tilde{u}_\omega\| + \|\tilde{u}_\omega - \tilde{u}_\gamma - (\omega - \gamma)\| + \|\omega - \gamma\| \leqslant$$
$$\leqslant (d/c)^{1/2}\|u_\omega - \omega - v\| + (1 + d/c)\|\omega - \gamma\|.$$

Применим эти результаты к обобщению примера 1, описанного в § III.2, III.3 и IV.5, для случая неоднородных краевых условий. Подобное обобщение в случае примера 2 рассматривается аналогично и к тому же является более простым.

Используем обозначения примера 1 из § III.2 и предположим, что выполнены условия теоремы III.2.1. Ясно, что билинейную форму $a(u, v)$ можно рассматривать как определенную для $u, v \in C_l^1(\bar{\Omega})$, а не только на $W$. Тогда она положительно определена и непрерывна на $C_l^1(\bar{\Omega}) \times \times C_l^1(\bar{\Omega})$ относительно нормы $\| \|_1$ и может быть продолжена на $H^1(\Omega)$.

Таким образом мы получим продолжение формы на $V \times V$, описанное в § III.2. Далее $a$ будет рассматриваться как определенная на $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Отметим, что лишь ее сужение на $V \times V$ коэрцитивно. Следовательно, существуют положительные постоянные $c$ и $d$, такие, что $a(v, v) \leqslant \leqslant d\|v\|_1^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$, $a(v, v) \geqslant c\|v\|_1^2 \quad \forall v \in V$. Зададим $f \in H^0(\Omega)$, непрерывное $\omega$: $\partial\Omega_1 \to \mathbf{R}$ и кусочно-непрерывное $b$: $\partial\Omega_2 \to \mathbf{R}$. *Предположим*, что существует продолжение $\omega$ на $\bar{\Omega}$ класса $C_l^1(\bar{\Omega})$, которое мы обозначим также через $\omega$. Пусть $W_\omega = \omega + W$ и $V_\omega$ — замыкание $W_\omega$ в $H^1(\Omega)$. На самом деле $V_\omega = \omega + V$.

**Теорема IV.6.3.** *При сформулированных выше условиях и предположениях задача, состоящая в нахождении такого $u_\omega$, что*

$$u_\omega \in V_\omega, \quad a(u_\omega, v) = (f, v)_0 + \int_{\partial\Omega_2} bv\, d\sigma \quad \forall v \in V, \tag{4}$$

*имеет одно и только одно решение.*

Доказательство. Применяем теорему IV.6.1, полагая $C = H^1(\Omega)$, $B = V$, $\varphi(v) = (f, v)_0 + \int_{\partial\Omega_2} bv\, d\sigma$, $B_\omega = V_\omega$ и используя тот факт, что $\int_{\partial\Omega_2} bv\, d\sigma$ — непрерывный линейный функционал (теорема III.1.3).

**Теорема IV.6.4.** *Пусть* $f \in C_l^0(\overline{\Omega})$. *Если* $u \in C_l^1(\overline{\Omega})$ *удовлетворяет условиям*

$$-\sum_{i,\,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij}\partial_j u) + ru = f \quad в \quad \Omega, \tag{5}$$

$u = \omega$ *на* $\partial\Omega_1$,

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i u \cdot n_j + qu = b \quad на \quad \partial\Omega_2,$$

*то и является решением задачи* (4) ($n_j$ есть $j$-я компонента единичной внешней нормали).

Доказательство. Умножая (5) на $v \in W$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int_{\Omega} \Big(\sum_{i,\,j} a_{ij}\partial_i v \partial_j u + ruv\Big)\, d\tau + \int_{\partial\Omega_2} (qu - b)\, v\, d\sigma = \int_{\Omega} fv\, d\tau.$$

По непрерывности это соотношение справедливо для всех $v \in V$. Используем теперь обозначения и предположения из § III.2, описанные в примере 1 § 5. Предположим, что последовательность $\{U_\alpha\}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{\alpha\to\infty} h_\alpha = 0$. Пусть для заданного $\alpha$ отвечающие $U_\alpha$ функционалы $F_1$, $F_2, \ldots$ соответствуют узлам $P_1, P_2 \ldots$ и пусть $\eta \in U_\alpha$ определено соотношениями $F_i(\eta) = \omega(P_i)$, если $P_i \in \partial\Omega_1$ и $F_i$ порядка 0, $F_i(\eta) = 0$ для всех других функционалов. Положим $G_{\gamma_\alpha} = \eta + G_\alpha$ и определим $\gamma_\alpha \in U_\alpha$ соотношениями $F_i(\gamma_\alpha) = F_i(\omega)$, если $F_i$ порядка $\leqslant 1$ и $P_i \notin \partial\Omega_1$; $F_i(\gamma_\alpha) = F_i(\omega)$, если $F_i$ порядка 0 и $P_i \in \partial\Omega_1$; $F_i(\gamma_\alpha) = 0$ для всех других функционалов. Непосредственно проверяем, что $\gamma_\alpha \in G_{\gamma_\alpha}$. С другой стороны, используя доказательства теорем IV.3.5, IV.3.6 и IV.3.7, получаем, что $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \|\omega - \gamma_\alpha\|_1 = 0$. Пусть $\tilde{u}_{\gamma_\alpha} \in G_\alpha$ таково, что $a(\tilde{u}_{\gamma_\alpha}, v) = (f, v)_0 + \int_{\partial\Omega_2} bv\, d\sigma \quad \forall v \in G_\alpha$.

**Теорема IV.6.5.** *При сформулированных выше условиях и предположениях*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|u_\omega - \tilde{u}_{\gamma_\alpha}\|_1 = 0.$$

Доказательство. Применим теорему IV.6.2, полагая $C=H^1(\Omega)$, $B=V$, $\gamma=\gamma_\alpha$, $G_\gamma=G_{\gamma_\alpha}$, $\varphi(v)=(f, v)_0+\int\limits_{\partial\Omega_2} bv\,ds$. Зададим $\varepsilon>0$. Так как $u_\omega-\omega\in V$, то существует такое $g\in W$, что $\|u_\omega-\omega-g\|_1<\varepsilon$. Пусть $v_\alpha$ — интерполянт $g$ порядка 1 относительно $U_\alpha$. По теореме IV.3.7 существует такое $N$, что $\|v_\alpha-g\|_1<\varepsilon$ для $\alpha>N$. Поэтому если $\alpha>N$, то $\|u_\omega-\omega-v_\alpha\|_1\leqslant\|u_\omega-\omega-g\|_1+\|g-v_\alpha\|_1\leqslant 2\varepsilon$. С другой стороны, заметим, что $v_\alpha\in W$ и, следовательно, $v_\alpha\in G_\alpha$. Если $\alpha>M$, существует такое $M\geqslant N$, что $\|\omega-\gamma_\alpha\|_1<\varepsilon$. Полагая $v=v_\alpha$ в теореме IV.6.2, получаем

$$\|u_\omega-\tilde{u}_{\gamma_\alpha}\|\leqslant\varepsilon\,(2\,(d/c)^{1/2}+(1+d/c)),\quad \text{если } \alpha>M.$$

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Kolar V., Kratochvil J., Zlamal M., Zenisek A.**, Technical, physical and mathematical principles of the finite element method, Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1971.
2. **Goël J. J.**, List of basic functions for numerical utilisation of Ritz's method. Application to the problem of the plate, Ecole Polytechnique Fédérale, Institut de Mathématiques appliqués, Editions SPES, Lausanne, 1969.
3. **Ciarlet P. J., Raviart P. A.**, The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods, Paper presented at the ONR regional symposium 1972, Mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations, University of Maryland Baltimore Country.
4. **Dupuis G., Goël J. J.**, Eléments finis raffinés en élasticité bidimensionnelle, *ZAMP*, 20 (1969), 858—881.
5. **Fichera G.**, Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems, Lecture Notes in Mathematics 8, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
6. **Dupuis G., Goël J. J.**, Calcul numérique de plaques fléchies, Bulletin technique de la Suisse Romande, № 4 et 5, 1966.
7. **Bramble J. H., Hilbert S. R.**, Estimation of linear functionals on Sobolev spaces, *SIAM Num. Anal.*, 7 (1970), 112—124.
8. **Zlamal M.**, On the finite element method, *Num. Math.*, 12 (1968), 394—409.
9. **Strang G.**, Approximation in the finite element method, *Num. Math.*, 19 (1972), 81—98.
10. **Зенкевич О., Чанг И.**, Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред, «Недра», М., 1974.


**Дополнительная литература** [1])


1. **Ержанов Ж. С., Каримбаев Т. Д.**, Метод конечных элементов в задачах механики горных пород, «Наука», Алма-Ата, 1975.
2. **Зенкевич О.**, Метод конечных элементов в технике, «Мир», М., 1975.


---

[1]) Добавлено при переводе. Содержит ссылки только на монографии по методу конечных элементов. — *Прим. перев.*

3. **Михлин С. Г.**, Вариационно-сеточная аппроксимация, Сб. «Численные методы и автоматическое программирование», «Наука», Л., 1974.
4. **Оганесян Л. А., Ривкинд Л. А., Руховец Л. А.**, Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Труды семинара, вып. 5, 8, Иниститут физики и математики АН ЛитССР, Вильнюс, 1973.
5. **Постнов В. А., Хархурим И. Я.**, Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций, «Судостроение», Л., 1974.
6. **Розин Л. А.**, Расчет гидротехнических сооружений. Метод конечных элементов, «Энергия», Л., 1971.
7. **Aubin J. P.**, Approximation of elliptic boundary-value problems, Wiley, N. Y., 1972. [Готовится русский перевод.]
8. **Aziz A. K.** ed., The mathematical foundations of the finite element method, University of Maryland at Baltimore, Ac. Press, N. Y., 1973.
9. **Barnhill R. E., Riesenfeld R. F.**, eds., Computer aided geometric design, Ac. Press, N. Y., 1974.
10. **Bathe K. J., Wilson E. L.**, Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, L., 1976.
11. **Boor C. de**, ed., Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations, University of Wisconsin, Ac. Press, N. Y., 1974.
12. **Brebbia C. A., Connor J. J.**, Fundamentals of finite elements techniques, Butterworths, L., 1973.
13. **Ciarlet P. G.**, Numerical analysis of the finite element method, Séminaire de Mathématique Supérieures, Université de Montréal, Canada, 1975.
14. **Cook R. D.**, Concepts and applications of finite element analysis. A treatment of the finite element method as used for the analysis of displacement, strain and stress, Wiley, N. Y., 1974.
15. **Desai C. S., Abel J. E.**, Introduction to the finite element method (a numerical method for the engineering analysis), Van Nostrand Reinhold company, N. Y., 1972.
16. **Gallagher R. H.**, Finite element analysis fundamentals, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N. Y., 1975.
17. **Gallagher R. H., Oden J. T.**, eds., Finite elements in fluids, v. I, Viscous flow and hydrodynamics, Wiley, L., 1975.
18. **Gallagher R. H., Oden J. T.**, eds., Finite elements in fluids, v. II, Mathematical foundations. Aerodynamics and lubracation, Wiley, L., 1975.
19. **Geradin M.**, Analyse dynamique duale des structures par la méthode des éléments finis, Universite de Liège, Liège, Belgique, 1973.
20. **Holand I., Kolbein B.**, eds., Finite element methods in stress analysis, Tapir, Tronheim, Norway, 1969.
21. **Hubbard B.**, ed., Numerical solution of partial differential equations, SYNSPADE, University of Maryland, Ac. Press, N. Y., 1971.
22. **Huebner K.**, The finite element method for engineerings, Wiley, N. Y., 1975.
23. **Kolář V., Kratochvil J., Leitner F., Ženišek A.**, Berechnung von Flächen und Raumtragwerken nach der Methode der finiten Elementen, Springer Verlag, Wien, 1975.

24. Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre, Akademie Verlagsgesellschaft, Frankfurt,/M., 1975.
25. Numerische Behandlung von differential finite element Methods, Wiley, L., 1973.
26. **Norrie D. H., de Vries G.**, The finite element method, Fundamentals and applications, University of Calgary, Canada, 1973.
27. **Oden J. T.**, Finite elements of nonlinear continua, McGrawHill, N. Y., 1972. [Готовится русский перевод.]
28. **Raviart P. A.**, Méthode des éléments finis, Cours 1971—72 à l'Université de Paris VI, 1972.
29. **Reefman R. J. B., Spreeuw E.**, Principles of the finite element method, Holectechnick, 1975.
30. **Schultz M. H.**, Spline analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. Y., 1973.
31. **Strang G., Fix G. J.**, An analysis of the finite element method, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N. Y., 1973. [Готовится русский перевод.]
32. **Visser M.**, The finite element method in deformation and heat conduction problems, Delft, Holland, 1968.
33. **Wachspress E. L.**, A rational finite element basis, Ac. Press, N. Y., 1975.
34. **Whiteman J. R.**, ed., The mathematics of finite elements and applications, Brunel University, England, Ac. Press, N. Y., 1973.
35. **Whiteman J. R.**, A bibliography for finite elements, Ac. Press, N. Y., 1975.
36. **Zienkiewicz O. C.**, Introduction lectures on the finite element method, University of Wales, Swansea, Springer Verlag, Vienna, N. Y., 1972.

# УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\Omega$ — ограниченное связное множество в $\mathbf{R}^n$, 9

$\overline{\Omega}$ — замыкание $\Omega$, 9

$\partial\Omega$ — граница $\Omega$, 9

$n_i$ — $i$-я компонента единичной внешней нормали к $\partial\Omega$, 9

$d\tau$ — элемент объема, 9

$d\sigma$ — элемент площади, 9

$D^s = \dfrac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_n^{s_n}}$, $|s| = s_1 + \ldots + s_n$, 9

$C^m(\Omega)$ — множество сужений на $\overline{\Omega}$ вещественных функций класса $C^m$, определенных на всем $\mathbf{R}^n$, 9

$C_I^m(\overline{\Omega})$ $(m \geqslant 1)$ — множество вещественных функций $f(x) \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$, таких, что $f(x) \in C^m(\overline{\Omega}_i)$ для открытых непересекающихся множеств $\Omega_i$, $i = 1, \ldots, p$, удовлетворяющих условию $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \overline{\Omega}_i = \overline{\Omega}$, 9

$a(u, v)$ — билинейная форма от $u$ и $v$, 10

$\partial_x = \partial/\partial_x$, $\partial_i = \partial_{x_i}$ — 15, 62

$\doteq$ — символ аппроксимации, 17

$\operatorname{mes}(\Omega)$ — мера Лебега множества $\Omega$, 23

$\triangle$ — «основное» множество, т. е. квадрат $0 \leqslant \xi, \eta \leqslant 1$, или треугольник с вершинами (0, 0), (0, 1), (1, 0) в плоскости $(\xi, \eta)$, 46

$C$ — координатный гиперкуб в $\mathbf{R}^n$: $\{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbf{R}^n, -1 \leqslant \xi_i \leqslant 1\}$, 54

$C^+ = \{\xi \in C: \xi_n \geqslant 0\}$, 54

$D = \{\xi \in C: \xi_n = 0\}$, 54

$L^2(\Omega)$ — множество определенных на $\overline{\Omega}$ функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу, 54

п. в. — почти всюду, 54

$[f]$ — класс эквивалентности функций из $L^2(\Omega)$ с представителем $f \in L^2(\Omega)$, 55

$H^0(\Omega)$ — множество классов эквивалентности $[f]$, где $f \in L^2(\Omega)$, 55

$S^m(\Omega)$ $(m \geqslant 1)$ — множество классов эквивалентности $[f]$, где $f \in C_I^m(\overline{\Omega})$, 55

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

*УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!*

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Ж. Деклу
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Редактор Н. Плужникова
Художник Н. Вовк
Художественный редактор В. Шаповалов
Технический редактор Н. Борисова
Корректор В. Киселева

Сдано в набор 27/VIII 1975 г. Подписано к печати 2/VI 1976 г. Бум. тип. № 2. 84×108 1/32=1,50 бум. л. 5,04 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 4,09. Изд. № 1/8336. Цена 28 коп. Зак. № 942

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано и сматрицировано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградском производственно-техническом объединении «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29