

Б.АЕЛОН Е и О.ЖИТОМИРСКИЙ

Б. ДЕЛОНÉ И О. ЖИТОМИРСКИЙ

**ЗАДАЧНИК
ПО ГЕОМЕТРИИ**

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

653

**БИБЛИОТЕКА НМУ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОЛЛЕДЖ**

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

Редактор *В. А. Калакуцкий.*

Техн. редактор *Г. А. Негримовская.*

Подписано к печати 10.II 1949 г. 19 печ. л. 20,2⁹ уч.-изд. л. 42 600 тип. зн. в печ. листе.
А-11457. Тираж 25 000 экз Цена книги 7 р. Переплёт 1 р. Заказ № 1365.

2-я типография Издательства Академии Наук СССР
Москва, Шубинский пер., д. 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 7

ЗАДАЧИ

Планиметрия

	Номера задач	Стр.
Отрезки и углы	1—4	9
Соотношения между сторонами и углами треугольников	5—11	9
Сравнительная длина объемлемых и объемлющих	12—17	10
Перпендикуляры и наклонные	18—22	10
Параллельные линии	23—25	11
Сумма углов треугольника	26—34	11
Параллелограммы и трапеции	35—44	12
Круг	45—66	12
Замечательные точки и линии в треугольнике	67—83	14
Задачи на построение	89—141	16
Подобные фигуры	142—159	20
Задачи на построение	160—170	21
Пропорциональные отрезки в кругах	171—182	22
Задачи на построение	183—190	23
Площади	191—203	24
Применение площадей для доказательств	204—210	25
Числовые соотношения в треугольниках и четырехугольниках	211—252	26
Правильные многоугольники	253—266	28
Измерение круга	267—272	29
Начала геометрии кругов	273—305	29

Стереометрия

Задачи на доказательства и построения

Прямые и плоскости и многогранные углы	306—324	34
Куб	325—328	35
Параллелепипед	329—332	36
Правильный тетраэдр	333—336	36
Произвольный тетраэдр	337—348	36
Правильный октаэдр	349—350	37
Правильные додекаэдр и икосаэдр	351—354	38
Задачи на сжатия (растяжения) и сдвиги пространства	355—363	38
Цилиндр и конус	364—373	39
Шар	374—389	40
Задачи, в которых соображения стереометрии применяются для решения вопросов планиметрии	390—395	42

Задачи на вычисления

Перпендикуляры и наклонные	396—399	42
Параллельные прямые и плоскости и перпендикуляры, опу- щенные на плоскости	400—411	43

	Номера задач	Стр.
Трехгранные углы	412—413	44
Куб	414—426	44
Правильный тетраэдр	427—433	45
Призматоиды	434—435	46
Правильные многогранники	436—451	47
Цилиндр	452—459	47
Конус	460—463	48
Шар	464—468	48

Более трудные задачи на доказательство

Некоторые задачи из общей теории выпуклых многогранников	469—478	49
Задачи из теории разбиения пространства на одинаковые параллельно расположенные выпуклые многогранники (параллелоэдры)	479—496	51
Задачи на прямолинейные преобразования плоскости и перспективу	497—506	53

РЕШЕНИЯ

Планиметрия

Отрезки и углы	1—4	55
Соотношения между сторонами и углами треугольников	5—11	56
Сравнительная длина объемлемых и объемлющих	12—17	58
Перпендикуляры и наклонные	18—22	61
Параллельные линии	23—25	62
Сумма углов треугольника	26—34	63
Параллелограммы и трапеции	35—44	67
Круг	45—56	71
Замечательные точки и линии в треугольнике	67—88	84
Задачи на построение	89—141	92
Подобные фигуры	142—159	112
Задачи на построение	160—170	122
Пропорциональные отрезки в кругах	171—182	127
Задачи на построение	183—190	133
Площади	191—203	143
Применение площадей для доказательств	204—210	150
Числовые соотношения в треугольниках и четырехугольниках	211—252	156
Правильные многоугольники	253—266	179
Измерение круга	267—272	186
Начала геометрии кругов	273—305	188

Стереометрия

Задачи на доказательство и построения

Прямые и плоскости и многогранные углы	306—324	209
Куб	325—328	214
Параллелепипед	329—332	215
Правильный тетраэдр	333—336	216
Произвольный тетраэдр	337—348	218
Правильный октаэдр	349—350	222
Правильные додекаэдр и икосаэдр	351—354	223
Задачи на растяжение и сдвиги в пространстве	355—363	226
Цилиндр и конус	364—373	228
Шар	374—389	231

	Номера задач	Стр.
Задачи, в которых соображения стереометрии применяются для решения вопросов планиметрии	390—395	239
Задачи на вычисления		
Перпендикуляры и наклонные	396—399	242
Параллельные прямые и плоскости и перпендикуляры, опущенные на плоскости	400—411	243
Трехгранные углы	412—413	248
Куб	414—426	249
Правильный тетраэдр	427—433	258
Призматоиды	434—435	263
Правильные многогранники	436—451	265
Цилиндр	452—459	272
Конус	460—463	275
Шар	464—468	277
Более трудные задачи на доказательство		
Некоторые задачи из общей теории выпуклых многогранников	469—478	281
Параллелоэдры	479—496	289
Задачи на прямолинейные преобразования плоскости и перспективу	497—506	297

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Чрезвычайно важно поднять геометрическую культуру кончающих нашу среднюю школу. Для этой цели необходимо иметь достаточно полный сборник геометрических задач, особенно на доказательство и построение, а также и на вычисление.

В основу предлагаемого нами сборника положены два принципа: во-первых — давать по возможности только задачи, имеющие хоть какой-нибудь принципиальный геометрический интерес, т. е. такие, которые выясняют существенные свойства плоских или пространственных геометрических фигур, и, во-вторых — не давать задач одинаковых типов, т. е. отличающихся лишь численными или иными несущественными данными. Наиболее распространенными подобными наборами задач были, пожалуй, задачи мелким шрифтом, помещенные в учебниках геометрии Давидова и Киселева, а также в учебниках Адамара и Руше и Комберусса. Наш задачник несколько полнее, так как заключает почти все задачи из указанных четырех источников и сверх того многие другие. В планиметрию включен набор задач по геометрии кругов, представляющий как бы монографию по этому вопросу, а стереометрия кончается тремя такими же наборами: по общей теории выпуклых многогранников, по теории параллелоэдров и по теории прямолинейных преобразований плоскости и перспективы. Всех задач по планиметрии около трехсот, а по стереометрии около двухсот.

Все задачи снабжены подробными решениями, но решения выделены в отдельную часть. Предполагается, что изучающий будет пытаться всегда сначала самостоятельно решить предлагаемую задачу, употребив, если это окажется нужным, на более трудную задачу по крайней мере несколько часов на

размышления, и только в случае неудачи обратится к предлагающему нами ее решению; оно, к слову сказать, может быть не всегда наилучшее, которое можно для данной задачи придумать.

Нам кажется, что всех геометрических задач не очень большой трудности, существенно различных друг от друга и имеющих принципиальный геометрический интерес, не так-то много, так что наш сборник можно считать довольно полным. Мы не говорим, конечно, о задачах, отличающихся друг от друга лишь численными данными или совершенно искусственных (например, на тела вращения или на пересечение разных тел), которых можно составить любое число (мы поместили таких задач очень мало). Было бы весьма желательно собирать дальнейшие принципиально интересные задачи, в духе нашего сборника, но уже не давать их решения, чтобы можно было их использовать в разных соревнованиях.

Планиметрическая часть этого задачника составлена О. К. Житомирским, а стереометрическая — Б. Н. Делоне.

Б. Делоне
О. Житомирский

Настоящее, третье издание печатается без изменений. Исправлены замеченные ошибки и опечатки.

ЗАДАЧИ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Отрезки и углы

1. На прямой даны два отрезка a , b и общая часть их c . Определить отрезок, покрываемый обоими отрезками вместе.

2. На прямой даны два отрезка $OA = a$, $OB = b$. Определить расстояние AB и расстояние между точкой O и серединой M отрезка AB .

3. Углы $MON = \alpha$, $NOP = \beta$ приложены друг к другу. Определить угол между их биссектрисами. Применить результат к случаю, когда эти углы смежные.

4. Углы $MON = \alpha$, $NOP = \beta$, $POQ = \gamma$ приложены друг к другу. Определить угол между биссектрисами углов MON , POQ . Применить результат к случаю, когда углы MON , POQ вертикальные.

Соотношения между сторонами и углами треугольников

5. Можно ли разрезать разносторонний треугольник на два равных треугольника?

6. Сколькими способами можно разрезать равносторонний треугольник на два равных треугольника?

7. Точка M лежит внутри треугольника ABC . Который из углов BAC , BMC больше?

8. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Если $AB > AC$, то который из углов AMB , AMC больше и который из углов BAM , CAM больше?

9. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Если $AB > AC$, то который из углов ADB , ADC больше и который из отрезков BD , CD больше?

10. В треугольнике ABC проведена высота AH . Как расположена точка H по отношению к точкам B , C , когда углы ABC , ACB оба острые, когда один из них тупой и когда один из них прямой?

11. В треугольнике ABC проведены медиана AM , биссектриса AD и высота AH . Доказать, что точка D лежит между точками M и H , если стороны AB , AC не равны.

Сравнительная длина объемлемых и объемлющих

12. По известной теореме сумма боковых сторон треугольника больше основания. Доказать, что она превышает основание менее чем на удвоенный отрезок, соединяющий вершину с какой угодно точкой основания.

13. Если выпуклый многоугольник заключен внутри какого-нибудь другого многоугольника, то по известной теореме периметр наружного многоугольника больше периметра внутреннего. Доказать, что наружный периметр превышает внутренний менее чем на удвоенную сумму отрезков, соединяющих вершины наружного многоугольника с какими-нибудь последовательно расположеными точками контура внутреннего.

14. Доказать, что сумма расстояний всякой точки от вершины многоугольника больше полупериметра его.

15. Доказать, что медиана треугольника меньше полу-суммы сторон, между которыми она заключается, и больше разности между этой полусуммой и половиной третьей стороны.

16. Зная стороны треугольника, найти границы, между которыми заключается сумма его медиан.

17. Найти точку, сумма расстояний которой от вершин данного четырехугольника наименьшая.

Перпендикуляры и наклонные

18. Доказать, что отрезок, заключенный между вершиной и противолежащей стороной треугольника, меньше наибольшей из остальных сторон.

19. Доказать, что отрезок, заключенный между двумя сторонами треугольника, меньше наибольшей из его сторон.

20. Доказать, что отрезок, заключенный весь внутри треугольника, меньше наибольшей из его сторон.

21. В прямоугольном или тупоугольном треугольнике один из острых углов разделен на несколько равных частей. Доказать, что делящие прямые разделят противоположную сторону на части, возрастающие при удалении от вершины прямого или тупого угла.

22. В прямоугольном или тупоугольном треугольнике одна из сторон прямого или тупого угла разделена на несколько равных частей. Доказать, что прямые, соединяющие точки деления с вершиной противолежащего угла, разделят этот угол на части, убывающие при удалении от другой стороны тупого или прямого угла.

Параллельные линии

• 23. Доказать, что прямая, проведенная через вершину равнобедренного треугольника параллельно основанию, делит внешний угол при вершине пополам.

24. Через точку пересечения биссектрис внутренних углов при основании треугольника проведена прямая параллельно основанию. Доказать, что часть этой прямой, заключенная между боковыми сторонами, равна сумме отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием.

25. Как изменится предыдущая теорема, если одну из биссектрис внутренних углов или обе заменить биссектрисами внешних углов?

Сумма углов треугольника

26. Определить углы равностороннего треугольника.

27. Определить углы прямоугольного треугольника, гипотенуза которого вдвое больше одного из катетов.

28. По углу при вершине треугольника определить острый угол между биссектрисами внутренних углов при основании, острый угол между биссектрисами внешних углов при основании и острый угол между биссектрисой внутреннего угла при одном из концов основания и биссектрисой внешнего угла при другом конце.

29. В треугольнике ABC проведена биссектриса угла при вершине A до пересечения с основанием BC в точке D , на большей из боковых сторон AB отложен отрезок AE , равный меньшей боковой стороне AC , и точки D, E соединены. По данным углам B, C треугольника определить угол BDE .

30. В треугольнике ABC проведена биссектриса внешнего угла при вершине A до пересечения с продолженным основанием BC в точке D , на продолжении большей из боковых сторон AB отложен отрезок AE , равный меньшей боковой стороне AC , и точки D, E соединены. По данным углам B, C треугольника определить угол BDE .

• 31. По углам при основании треугольника определить угол между высотой и внутренней биссектрисой угла при вершине, противлежащей основанию.

32. По углам прямоугольного треугольника определить угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.

33. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.

34. По углам четырехугольника определить углы между биссектрисами двух соседних углов, между биссектрисами двух противоположных углов и между биссектрисами двух углов, образуемых парами противоположных сторон, продолженных до пересечения.

Параллелограммы и трапеции

• **35.** Доказать, что в шестиугольнике, противоположные стороны которого равны и параллельны, три диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

36. Доказать, что во всяком четырехугольнике середины сторон суть вершины некоторого параллелограмма.

37. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными противоположными сторонами середины диагоналей и середины двух противоположных сторон суть вершины некоторого параллелограмма.

38. Доказать, что в четырехугольнике с непараллельными противоположными сторонами три прямые, соединяющие середины противоположных сторон и середины диагоналей, пересекаются в одной точке.

39. Доказать, что в трапеции середины диагоналей и середины боковых сторон лежат на одной прямой.

40. По данным основаниям трапеции определить отрезок, соединяющий середины ее диагоналей.

41. По данным расстояниям концов отрезка от прямой определить расстояние его середины от той же прямой.

42. По данным расстояниям двух противоположных вершин параллелограмма от прямой, проходящей через третью вершину, определить расстояние четвертой вершины от той же прямой.

43. Доказать, что сумма расстояний всякой точки основания равнобедренного треугольника от его боковых сторон равна высоте, проведенной из конца основания. Какой вид принимает эта теорема для точек на продолжениях основания?

44. Доказать, что сумма расстояний всякой точки внутри равностороннего треугольника от его стороны равна его высоте. Как изменится эта теорема для точек вне треугольника?

Круг

45. Какому условию должен удовлетворять параллелограмм, чтобы около него можно было описать окружность?

46. Какова должна быть трапеция, чтобы около нее можно было описать окружность?

47. В какой параллелограмм можно вписать окружность?

48. Которая из хорд, проходящих через точку внутри круга, наименьшая?

49. Которая из секущих, проходящих через точку вне круга, имеет наибольшую внутреннюю часть?

50. Найти наименьшее и наибольшее расстояние точки от окружности.

51. Найти наименьшее и наибольшее расстояние двух окружностей.

52. Найти наименьшее и наибольшее расстояние прямой и окружности.

53. Каково относительное положение двух кругов радиусов R и $3R$, когда расстояние между их центрами равно $3R$, R , $5R$, $4R$ и $2R$?

54. Сколько кругов одинакового радиуса можно расположить вокруг одного круга того же радиуса так, чтобы каждый из них касался этого круга и двух соседних?

55. Расположить на плоскости бесконечное множество равных кругов так, чтобы каждый касался шести соседних.

56. По углам между диагоналями и между противоположными сторонами вписанного четырехугольника определить углы этого четырехугольника.

57. По углам при основании вписанного треугольника определить угол между касательной к кругу в его вершине и основанием.

58. По углам вписанного треугольника определить углы треугольника, ограниченного касательными к кругу в его вершинах.

59. Доказать, что хорды двух пересекающихся кругов, соединяющие концы двух секущих, проходящих через точки пересечения, параллельны между собой. Как изменится эта теорема, когда концы секущих на одном из кругов совпадут?

60. Доказать, что хорды двух касательных кругов, соединяющие концы двух секущих, проходящих через точку касания, параллельны между собой. Как изменится эта теорема, когда секущие совпадут?

61. Доказать, что отрезки общей секущей двух внутренне касательных кругов, заключенные между обеими окружностями и не налегающие друг на друга или, наоборот, налегающие друг на друга, видны из точки касания под равными углами. Как изменится эта теорема, когда секущая обратится в хорду наружного круга, касательную к внутреннему?

62. Доказать, что отрезки общей секущей двух внешне касательных кругов, заключенные между обеими окружностями, один из которых составляет часть другого, видны из точки касания под углами, в сумме составляющими два прямых. Как

изменится эта теорема, когда секущая обратится в общую касательную обоих кругов?

63. Доказать, что прямая, параллельная касательной в вершине вписанного треугольника и пересекающая боковые стороны, отсекает от него четырехугольник, который может быть вписан в круг.

64. Противоположные стороны четырехугольника продолжены до пересечения, и около четырех образовавшихся треугольников описаны круги. Доказать, что все они пересекаются в одной точке.

65. Стороны пятиугольника продолжены до образования пятиугольной звезды и около пяти треугольных лучей описаны круги. Доказать, что пять наружных точек пересечения соседних кругов лежат на одной окружности (теорема Микуля).

66. Равносторонний треугольник вписан в круг. Доказать, что расстояние всякой точки дуги, стягиваемой какой-нибудь из его сторон, от противолежащей вершины равно сумме расстояний той же точки от остальных вершин.

Замечательные точки и линии в треугольнике

67. Как известно, перпендикуляры в серединах сторон треугольника сходятся в точке, равноудаленной от вершин,— в центре описанного круга. К которой из сторон эта точка ближе всего?

68. При каких условиях центр описанного круга лежит внутри, вне и на границе треугольника?

69. Найти части плоскости, в которых лежат вершины остроугольных и тупоугольных треугольников, опирающихся на заданное основание.

70. Доказать, что высота треугольника и радиус описанного круга, проведенный к вершине, образуют равные углы с боковыми сторонами.

71. Треугольник разбит на два других треугольника прямую, проведенной из вершины. Доказать, что центры кругов, описанных около всех трех треугольников, лежат на одной окружности с вершиной.

72. Известно, что биссектрисы внутренних углов треугольника сходятся в точке, равноудаленной от сторон треугольника,— в центре вписанного круга. К которой из вершин эта точка ближе всего?

73. Доказать, что биссектриса внутреннего угла при всякой вершине треугольника сходится с биссектрисами внешних углов при двух других вершинах в точке, равноудаленной от стороны,

противолежащей этому внутреннему углу, и от продолжений двух других сторон (центр вневписанного круга).

74. Доказать, что прямые, проведенные через вершины треугольника параллельно противолежащим сторонам, ограничивают треугольник, для которого высоты данного треугольника оказываются перпендикулярами в серединах сторон. Вывести отсюда, что высоты треугольника пересекаются в одной точке(ортocenter).

75. Доказать, что прямые, соединяющие основания высот треугольника, ограничивают треугольник, для которого высоты данного треугольника оказываются биссектрисами. Вывести отсюда теорему о пересечении высот.

76. К которой из вершин ортоцентр ближе всего?

77. К которой из сторон ортоцентр ближе всего?

78. Которая из высот наименьшая?

79. Доказать, что из четырех точек, одна из которых есть ортоцентр треугольника, образуемого тремя остальными, каждую можно рассматривать как ортоцентр треугольника, образуемого тремя остальными.

80. Доказать, что из шести биссектрис треугольника каждые три, сходящиеся в одной точке, суть высоты треугольника, ограниченного тремя остальными.

81. Доказать, что каждая медиана треугольника отсекает от каждой другой одну треть, считая от основания. Вывести отсюда, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (центр тяжести).

82. К которой из вершин и к которой из сторон центр тяжести ближе всего?

83. Которая из медиан наименьшая?

84. Доказать, что прямые, соединяющие вершину параллелограмма с серединами сторон, сходящихся в противоположной вершине, рассекают диагональ, соединяющую две другие вершины, на три равные части.

85. Доказать, что расстояние центра описанного круга от стороны треугольника вдвое меньше расстояния ортоцентра от противолежащей вершины.

86. Доказать, что центр описанного круга, ортоцентр и центр тяжести лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

87. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симсона).

88. Доказать, что окружность с центром в середине отрезка, соединяющего центр описанного круга и ортоцентр, и с радиусом, равным половине радиуса описанного круга, проходит через основания высот, середины сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами (круг девяти точек).

Задачи на построение

Пояснение. При решении задач на построение чаще всего применяется метод геометрических мест. Возьмем простейший случай, когда задача заключается в построении некоторой точки, удовлетворяющей данным условиям. Если этим условиям удовлетворяет только одна или несколько точек, то, отбросив одно из условий, мы обычно получаем уже целую линию — геометрическое место точек, удовлетворяющих остальным условиям.

Если это геометрическое место есть окружность или прямая, которую мы можем построить на основании данных условий, то дальнейшее решение облегчается, так как мы можем искать требуемые точки не среди всех точек плоскости, а только среди точек найденного геометрического места.

Если нам удастся, отбросив другое условие, построить другое геометрическое место, то искомые точки найдутся как общие точки обоих геометрических мест. Может случиться, что нужно построить не точку, а какую-нибудь другую фигуру, но очень часто нетрудно свести задачу к построению точки. Например для построения прямой, одна точка которой известна, достаточно найти еще одну точку; для построения круга данного радиуса достаточно найти его центр и т. п. Но допустим, что геометрические места, получаемые поочередным отбрасыванием условий задачи, не удается построить, или они не могут быть построены, потому что это не окружности и не прямые.

Отсюда еще не следует, что мы должны отказаться от применения метода геометрических мест. Нужно поискать такие вспомогательные точки, с помощью которых можно наверное построить искомую фигуру и которые можно рассчитывать построить по методу геометрических мест. Все это, конечно, относится к тому случаю, когда условия задачи не подсказывают применения другого метода.

Полезно проверить, что и простейшие задачи, как деление отрезка пополам, опускание перпендикуляра, построение треугольника по его элементам и т. д., решаются по существу с помощью метода геометрических мест.

Иногда нужно найти не точку, а прямую, удовлетворяющую некоторым условиям. Отбросив одно из условий, мы часто получаем такую совокупность бесчисленного множества прямых, из которой уже нетрудно выбрать требуемую, например, совокупность прямых, проходящих через данную точку, или касательных к данному кругу и т. п. Этот метод есть простейшее обобщение метода геометрических мест.

Часто удается притти к решению задачи с помощью метода преобразования фигур, и даже во многих случаях успех этого метода можно предвидеть с первого взгляда. Этот метод состоит в замене данной или искомой фигуры, или какой-нибудь части их, новой фигурой, связанной с первоначальной определенным построением и позволяющей решить задачу или приблизиться к ее решению. Мы рассмотрим пока только такие преобразования, при которых новая фигура равна старой и отличается от нее только положением. Такие преобразования называются *перемещениями*. Сюда относятся:

а) параллельный перенос, при котором все точки фигуры перемещаются на равные параллельные и одинаково направленные отрезки; все прямые фигуры остаются при этом параллельными сами себе;

б) поворот, при котором некоторая точка остается неподвижной, а все полуправые, исходящие из нее, поворачиваются вокруг нее на данный угол в данном направлении;

с) симметрия относительно точки, или поворот на сто восемьдесят градусов;

d) симметрия относительно прямой, при которой эта прямая остается неподвижной, а вся фигура поворачивается вокруг нее, как вокруг оси, и снова падает на плоскость обратной стороной.

Первые три перемещения можно осуществить непрерывным движением, не выходя из плоскости. При непрерывном параллельном перемещении точки фигуры описывают параллельные прямые, а при непрерывном вращении — концентрические круги. Мы получаем как бы геометрическое место целой фигуры.

Симметрии можно просто определить, не прибегая к движению:

a) в симметрии относительно точки отрезки, соединяющие две симметричные точки с неподвижным центром симметрии, равны и направлены в разные стороны от центра;

b) в симметрии относительно прямой перпендикуляры, опущенные из двух симметричных точек на неподвижную ось симметрии, имеют общее основание, равны и направлены в разные стороны от оси.

Отметим, что указанными преобразованиями по существу исчерпываются все возможные перемещения, так как всякое перемещение или наложение сводится к параллельному переносу, повороту и, если нужно, симметрии относительно прямой.

В заключение упомянем еще о методе обратности. Он заключается в том, что искомую фигуру строят в произвольном положении, пристраивают к ней данную фигуру с соблюдением указанных в условии взаимоотношений между обеими и, пользуясь новыми соотношениями, полученными в результате построения, строят искомую фигуру уже в надлежащем положении по отношению к данной.

Если связь между данными и искомыми неясна с самого начала, то следует попытаться установить между ними несколько посредствующих звеньев. Поскольку эта связь нам неясна, мы не можем, конечно, с уверенностью вставлять эти звенья и вынуждены рассуждать до известной степени ощущью, при известном терпении и внимании удается установить требуемую связь. Такое обдумывание задачи называется анализом.

После построения нужно прежде всего проверить, не было ли допущено какой-нибудь неполноты, последствием которой могло бы оказаться получение лишь части решений. Это бывает, например, когда вычерчиваются только отрезки геометрических мест, отчего пропадают некоторые точки пересечения. Затем нужно подсчитать, сколько решений получится при тех или иных данных. Это называется исследованием решения.

Хотя построению предшествует обсуждение задачи, тем не менее полезно в некоторых случаях проверить, действительно ли построенная фигура удовлетворяет условиям. Источником ошибки мог послужить неправильный предварительный чертеж, которым пользовались при анализе, поспешность самого анализа и т. п.

Последующая проверка правильности построения называется доказательством.

Рекомендуем читателю решать задачи подробно и фактически применять циркуль и линейку: мы в своих решениях часто ограничиваемся краткими указаниями и, вообще, считаем задачу решенной, если она сведена к основным построениям или решенным ранее задачам; построения, излагаемые в курсах элементарной геометрии, мы считаем известными.

89. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой.

90. Построить окружность данного радиуса, касательную к данной прямой и к данной окружности.

- 91.** Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым и к данной окружности.
- 92.** Построить окружность, касательную к двум данным концентрическим окружностям и к данной прямой.
- 93.** Построить окружность, проходящую через три данные точки.
- 94.** Построить окружность, касательную к трем данным прямым.
- 95.** Построить окружность, касательную к данной прямой в данной точке и к другой данной прямой.
- 96.** Построить окружность, касательную к данной окружности в данной точке и к данной прямой.
- 97.** Построить окружность, касательную к данной прямой в данной точке и к данной окружности.
- 98.** Построить окружность, касательную к данной окружности в данной точке и к другой данной окружности.
- 99.** Построить точку, из которой данный круг и данный отрезок видны под данными углами.
- 100.** Построить прямую, равноудаленную от трех данных точек.
- 101.** Провести касательную к данной окружности, одинаково наклоненную к двум данным прямым.
- 102.** Через точку вне круга провести секущую, внешняя часть которой была бы равна внутренней.
- 103.** Через точку пересечения двух окружностей провести секущую, часть которой внутри окружностей была бы равна данному отрезку.
- 104.** Около данного треугольника описать треугольник равный другому данному треугольнику.
- 105.** В данный треугольник вписать треугольник, равный другому данному треугольнику.
- 106.** Провести к данной окружности касательную, часть которой между продолжениями двух данных радиусов была бы равна данному отрезку.
- 107.** Построить отрезок, равный и параллельный данному, концы которого лежали бы на данной прямой и данной окружности.
- 108.** Построить отрезок, равный и параллельный данному, концы которого лежали бы на двух данных окружностях.
- 109.** Построить хорду данного круга, равную и параллельную данному отрезку.
- 110.** Через данную точку внутри круга провести хорду, равную данному отрезку.
- 111.** Построить равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая на данной прямой, а третья в данной точке.

112. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого опиралась бы на две данные окружности, а вершина прямого угла лежала бы в данной точке.

113. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую, часть которой внутри кругов делилась бы в этой точке пополам.

114. Через данную точку провести прямую, часть которой между данной прямой и данным кругом делилась бы в этой точке пополам.

115. На данной прямой построить точку, сумма расстояний которой от двух данных точек наименьшая.

116. На данной прямой построить точку, разность расстояний которой от двух данных точек наибольшая.

117. Построить треугольник наименьшего периметра, две вершины которого лежали бы на сторонах данного угла, а третья в данной точке внутри угла.

118. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне данного угла, вершина — на другой стороне того же угла, а боковые стороны проходили бы через данные точки внутри этого угла.

З а м е ч а н и е. В задачах 119—134 требуется построить треугольник, и указаны только данные. Для сокращения углы его обозначены через A , B , C , противолежащие стороны — через a , b , c , проведенные к этим сторонам медианы, высоты и биссектрисы — соответственно через m_a , m_b , m_c , через h_a , h_b , h_c и через β_a , β_b , β_c , периметр — через $2p$.

119. b , c , m_a .

120. a , m_a , m_b .

121. m_a , m_b , m_c .

122. b , c , h_a .

123. a , h_b , h_c .

124. a , m_a , h_a .

125. a , h_a , A .

126. h_a , β_a , A .

127. a , $b + c$, A .

128. B , C , $2p$.

129. a , $c - b$, B .

130. a , $c - b$, C .

131. a , $c - b$, A .

132. b , c , $C - B$.

133. a , $c - b$, $C - B$.

134. a , $b + c$, $C - B$.

135. Построить параллелограмм по углу и диагоналям.

136. Построить трапецию по четырем сторонам.

137. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.

138. Построить четырехугольник по трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой.

139. Построить четырехугольник по сторонам и углу между двумя противоположными сторонами.

140. Построить четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-нибудь сторонам.

141. Построить четырехугольник по сторонам и расстоянию между серединами двух противоположных сторон.

Подобные фигуры

142. Стороны треугольника равны 5, 7 и 4. Наибольшая сторона подобного треугольника равна 21. Найти остальные его стороны.

143. Доказать, что два квадрата всегда подобны.

144. Доказать, что два прямоугольника подобны, если имеют равные отношения соседних сторон.

145. Стороны угла соединены двумя параллельными отрезками, и в концах каждого отрезка проведены перпендикуляры к сторонам угла до взаимного пересечения. Доказать, что точки пересечения перпендикуляров лежат на одной прямой с вершиной угла.

146. По основанию a треугольника определить расстояние между точками, делящими боковые стороны в отношении m , считая от вершины.

147. По основаниям a , b трапеции определить расстояние между точками, делящими боковые стороны в отношении m , считая от основания a .

148. По расстояниям p , q , r вершин треугольника от прямой, не пересекающей его, определить расстояние его центра тяжести от той же прямой.

149. По основаниям a , b трапеции определить отношение, в котором ее диагонали делят друг друга.

150. По основаниям a , b трапеции определить отношение, в котором ее боковые стороны, продолженные до пересечения, делят друг друга внешним образом.

151. По основаниям a , b трапеции определить отрезок прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей, заключающейся между боковыми сторонами.

152. По основаниям a , b трапеции определить отрезок прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения продолженных боковых сторон, заключающейся между продолжениями диагоналей.

153. По основанию a и боковым сторонам b , c треугольника определить огрезки, на которые биссектриса внутреннего угла при вершине делит основание.

154. По основанию a и боковым сторонам b , c треугольника определить расстояния от концов основания до точки пересечения биссектрисы внешнего угла при вершине с основанием.

155. Прямая пересекает стороны треугольника или их продолжения. По отношениям m , n , в которых она делит две стороны, считая от третьей, определить отношение, в котором она делит третью сторону.

156. Вершины треугольника соединены с некоторой точкой По отношениям m , n , в которых прямые, исходящие из двух вершин, делят противолежащие стороны, считая от третьей стороны, определить отношение, в котором прямая, исходящая из третьей вершины, делит противолежащую сторону.

157. Доказать, что прямая, соединяющая точки пересечения биссектрис двух внутренних углов треугольника с противолежащими сторонами, пересекает третью сторону в той же точке, что и биссектриса внешнего угла при противолежащей вершине.

158. Доказать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолженных боковых сторон трапеции, делит основания пополам.

159. Треугольники ABC , $A_1B_1C_1$ расположены так, что точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой. Доказать, что прямые, соединяющие соответственные вершины, сходятся в одной точке или параллельны (теорема Дезарга).

Задачи на построение

Пояснение. Решение многих задач на построение основано на свойствах подобных фигур. На этих свойствах основан, прежде всего, вывод некоторых геометрических мест. Но чаще всего приходится применять их в качестве метода преобразования.

Обычный способ применения метода подобия состоит в том, что часть требований, предъявляемых к искомой фигуре, отбрасывается, так что оставшимся требованиям удовлетворяет бесчисленное множество фигур, подобных искомой, каждую из которых мы можем построить. Построив одну из них, мы должны затем перейти от нее к искомой. Последняя операция требует изучения взаимного расположения подобных фигур.

Простейшее взаимное расположение есть подобное расположение, или гомотетия. Две фигуры называются подобно расположеными, или гомотетичными, если они подобны и сходственные прямые их параллельны. Прямые, соединяющие сходственные точки двух подобно расположенных фигур, сходятся в одной точке, которая называется центром подобия. Сходственные отрезки этих фигур направлены или все одинаково или все противоположно. В первом случае сходственные точки расположены по одну сторону от центра подобия, во втором — по разные стороны. Сообразно этому различают прямое и обратное подобное расположение. Отношение отрезков, соединяющих сходственные точки с центром подобия, равно отношению сходственных отрезков фигур: это отношение называется отношением подобия. Поэтому для построения фигуры, подобно расположенной с данной фигурой относительно данного центра подобия и имеющей к ней данное отношение подобия, нужно растянуть или скатать все отрезки, соединяющие точки данной фигуры с центром подобия в определенном отношении, и в случае обратного подобного расположения еще повернуть полученную фигуру на 180° вокруг центра подобия.

Два круга всегда подобно расположены и притом как прямо, так и обратно. При прямом подобном расположении сходственными точками будут концы параллельных и одинаково направленных радиусов, а при обратном — концы параллельных и противоположно направленных радиусов. Соответ-

ствующие центры подобия делят линию центров внешним и внутренним образом в отношении радиусов. В случае равных кругов центр прямого подобия удаляется в бесконечность, а центр обратного подобия обращается в центр симметрии. В случае концентрических кругов оба центра подобия сливаются с центром кругов.

Переход от данной фигуры к прямо подобно расположенной можно осуществить непрерывным изменением фигуры, заставляя отношение подобия изменяться от единицы до требуемой величины. При этом точки фигуры перемещаются по прямым, исходящим из центра подобия.

Свойства подобно расположенных фигур доказываются в большинстве курсов элементарной геометрии. Впрочем было бы хорошо, если бы читатель попытался сам найти требуемые доказательства.

160. Через точку вне круга провести секущую, внешняя часть которой была бы вдвое больше внутренней.

161. Провести в данном направлении прямую так, чтобы отрезки ее между данным кругом и двумя не пересекающими его прямыми были равны между собой.

162. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна из сторон квадрата лежала на основании треугольника.

163. Вписать квадрат в данный сектор так, чтобы одна сторона лежала на радиусе.

164. Вписать квадрат в данный сектор так, чтобы одна сторона стягивала часть дуги.

165. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна сторона лежала на хорде.

166. Вписать в четырехугольник параллелограмм с заданными направлениями сторон.

167. Около данного четырехугольника описать четырехугольник, подобный другому данному.

168. В данный четырехугольник вписать четырехугольник, подобный другому данному.

169. Вписать в данный круг треугольник, подобный данному.

170. Построить треугольник по двум углам и расстоянию между центрами описанного и вписанного кругов.

Пропорциональные отрезки в кругах

171. Через середину хорды круга длины a проведена другая хорда длины b . Определить длины отрезков, на которые хорда b делится хордой a .

172. Окружность пересекает одну из сторон угла на расстояниях a , b от вершины и касается другой стороны. Определить расстояние точки касания от вершины.

173. Расстояние точки внутри круга радиуса r от его центра равно d . Определить длину хорды, проведенной через эту точку перпендикулярно к диаметру, проходящему через нее.

174. Расстояние точки вне круга радиуса r от его центра равно d . Определить длину касательной к кругу из этой точки.

175. Вывести из свойств пропорциональных отрезков в круге известные числовые соотношения в треугольнике: выражение для квадрата стороны любого треугольника и выражения для квадрата катета и квадрата высоты из вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике.

176. Доказать, что расстояние точки окружности от хорды круга есть среднее пропорциональное между расстояниями концов хорды от касательной к окружности в этой точке.

177. От точки пересечения M двух прямых отложены на одной прямой отрезки MA_1, MB_1 , на другой отрезки MA_2, MB_2 , связанные соотношением $MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2$, и притом на обеих прямых в одну сторону или на обеих в разные стороны от точки M . Доказать, что точки A_1, B_1, A_2, B_2 лежат на одной окружности.

178. Доказать, что общие хорды трех попарно пересекающихся окружностей сходятся в одной точке или параллельны.

179. Доказать, что общие хорды всех окружностей, проходящих через две данные точки, с данным кругом сходятся в одной точке или параллельны.

180. Доказать, что касательные к двум пересекающимся окружностям из всякой точки продолжения их общей хорды равны между собой.

181. Из точки на окружности проведены полупрямые, пересекающие прямую, перпендикулярную к диаметру, проходящему через эту точку. Доказать, что произведение отрезков, отсекаемых окружностью и прямою от всякой полупрямой, есть величина постоянная.

182. Из центра подобия двух окружностей проведены секущие к ним. Доказать, что произведение отрезков всякой секущей от центра подобия до двух несходственных точек окружностей есть величина постоянная.

Задачи на построение

Пояснение. Здесь предложены задачи на построение окружности по трем условиям, которые могут состоять в прохождении её через данную точку и в касании к данной окружности или к данной прямой. Некоторые задачи этого рода были предложены выше; здесь помещены более трудные задачи, требующие применения метода подобия и свойств пропорциональных отрезков в кругах.

183. Построить окружность, проходящую через данную точку и касательную к двум данным прямым.

184. Построить окружность, касательную к данной окружности и к двум данным прямым.

185. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касательную к данной прямой.

186. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касательную к данной окружности.

187. Построить окружность, проходящую через данную точку и касательную к данной окружности и данной прямой.

188. Построить окружность, касательную к двум данным окружностям и данной прямой.

189. Построить окружность, проходящую через данную точку и касательную к двум данным окружностям.

190. Построить окружность, касательную к трем данным окружностям (задача Аполлония).

Площади

191. Разрезать данный параллелограмм на две части, из которых можно было бы сложить прямоугольник.

192. Разрезать данный треугольник на три части, из которых можно было бы сложить прямоугольник.

193. Из двух равных трапеций сложить параллелограмм. Применить результат к выводу формулы площади трапеции.

194. Трапеция разбита диагоналями на четыре части. Доказать, что части, прилегающие к боковым сторонам, равновелики.

195. Параллелограмм разбит на четыре части прямыми, проведенными через какую-нибудь точку диагонали параллельно сторонам. Доказать, что части, расположенные по разные стороны от диагонали, равновелики.

196. Параллелограмм разбит на четыре части прямыми, соединяющими какую-нибудь внутреннюю точку с вершинами. Доказать, что суммы площадей противолежащих частей равны.

197. Через середину каждой диагонали четырехугольника проведена прямая параллельно другой диагонали. Доказать, что прямые, соединяющие точку пересечения этих прямых с серединами сторон четырехугольника, разбивают его на равновеликие части.

198. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении делит она боковые стороны треугольника?

199. В параллелограмме $ABCD$ каждая сторона разделена на равные отрезки, число которых m для противоположных сторон AB , CD и n для противоположных сторон AD , BC . Начало первого, второго и т. д. отрезка стороны AB ,

считая от точки A , соединено с концом первого второго и т. д. отрезка стороны CD , считая от точки D . Точно так же конец первого, второго и т. д. отрезка стороны AD , считая от точки A , соединен с началом первого, второго и т. д. отрезка стороны BC , считая от точки B . Этими прямыми параллелограмм разбивается на части, имеющие вид треугольников, трапеций и параллелограммов. Какую часть площади всего параллелограмма составляет площадь одного такого параллелограмма?

200. Каждая вершина параллелограмма соединена с серединами противолежащих сторон. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь фигуры, ограниченной проведенными прямыми?

201. Трапеция разделена диагоналями на четыре части. Определить площадь трапеции по площадям частей, прилегающих к основаниям.

202. Прямая, параллельная основанию треугольника площади S , отсекает от него треугольник площади s . Определить площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами меньшего треугольника, а четвертая лежит на основании большего треугольника.

203. Внутри многоугольника площади S лежит многоугольник площади s , прямо подобно расположенный с ним. Определить площадь Σ многоугольника, вписанного во внешний многоугольник и одновременно описанного около внутреннего многоугольника.

Применение площадей для доказательств

204. Вывести из рассмотрения площадей теорему задачи 43.

205. Вывести из рассмотрения площадей теорему задачи 44.

206. В треугольнике ABC найти геометрическое место точек M , для которых площади треугольников MAB , MAC равны между собой.

207. Вывести из рассмотрения площадей теорему задачи 81.

208. Дано два непараллельных отрезка AB , CD . Найти геометрическое место точек M , для которых сумма или разность площадей треугольников MAB , MCD равна данной величине.

209. Доказать, что прямая, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, проходит через середину отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон.

210. Доказать, что прямая, соединяющая середины диагоналей четырехугольника, описанного около круга, проходит через центр этого круга.

Числовые соотношения в треугольниках и четырехугольниках

211. Радиусы двух кругов равны R и r , а расстояние между их центрами равно d . Определить длину общей внешней и общей внутренней касательной.

212. Определить длину общей касательной двух внешне касательных кругов радиусов R, r .

213. Два круга радиусов R и r внешне касательны. Определить радиус круга, касательного к ним и к их общей касательной.

214. На отрезке и двух его половинах построены полукруги в одну сторону. По радиусу R меньших полукругов определить радиус круга, касательного ко всем трем полукругам.

215. Прямоугольный сектор радиуса R разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в конце дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в меньшую из этих частей.

216. На отрезке и двух его неравных частях построены полукруги в одну сторону. По радиусам R, r меньших полукругов определить радиус круга, касательного ко всем трем полукругам.

217. По катетам b, c прямоугольного треугольника определить высоту h из вершины прямого угла.

218. По сторонам b, c и высоте h_a треугольника определить сторону a .

219. По сторонам a, b, c треугольника определить высоту h_a и площадь S .

220. По высотам h_a, h_b, h_c треугольника определить его площадь S .

221. По сторонам a, b, c треугольника определить его медианы m_a, m_b, m_c .

222. По медианам m_a, m_b, m_c треугольника определить его стороны a, b, c и площадь S .

223. По сторонам a, b, c треугольника определить биссектрису β_a .

224. Доказать, что квадрат биссектрисы равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания.

225. По сторонам a, b, c треугольника определить радиус R описанного круга.

226. Доказать, что площадь остроугольного треугольника равна произведению радиуса описанного круга на полупериметр треугольника, образуемого основаниями высот. Обобщить на случай тупоугольного треугольника.

227. По сторонам a, b, c треугольника определить радиус r вписанного круга и радиусы r_a, r_b, r_c внеписанных кругов.

228. По сторонам a, b, c треугольника определить длины касательных из его вершины к вписанному и вневписанным кругам.

229. По сторонам прямоугольного треугольника определить радиусы вписанного и вневписанных кругов.

230. Доказать геометрически соотношение:

$$r_{\rho_a} = (p - b)(p - c).$$

231. Вывести геометрически формулу

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

232. Доказать, что высота треугольника есть геометрическое место точек, для которых сумма квадрата расстояния от конца основания с квадратом противолежащей этому концу стороны имеет равные значения для обоих концов основания. Вывести отсюда теорему о пересечении высот в одной точке.

233. Доказать, что сумма квадрата расстояния ортоцентра от вершины с квадратом противолежащей стороны равна квадрату диаметра описанного круга.

234. По высоте h и отрезкам основания m, n определить прилегающий к основанию отрезок высоты, отсекаемый от нее другой высотой. Вывести отсюда теорему о пересечении высот в одной точке.

235. Доказать, что сумма произведений высот остроугольного треугольника на отрезки их от ортоцентра до вершин равна полусумме квадратов сторон. Обобщить на случай тупоугольного треугольника.

236. Доказать, что сумма квадрата расстояния центра вписанного круга от центра одного из вневписанных с квадратом расстояния между центрами двух других вневписанных не зависит от выбора первого вневписанного круга.

237. Доказать, что произведение расстояний вершины треугольника от центра вписанного круга и центра вневписанного круга при противолежащей стороне равно произведению расстояний той же вершины от центров двух других вневписанных кругов.

238. По сторонам a, b, c треугольника определить расстояния ортоцентра от вершин.

239. По сторонам a, b, c треугольника определить расстояния центра описанного круга от сторон.

240. По сторонам a, b, c треугольника определить расстояния центров вписанного и вневписанных кругов от вершин и между собою.

241. Выразить разность квадратов диагоналей p, q параллелограмма через расстояния a, b, c, d произвольной точки от его вершин.

242. Выразить разность квадратов диагоналей p, q параллелограмма через его стороны m, n и площадь S .

243. Выразить площадь S параллелограмма через стороны m, n и расстояния a, b, c, d произвольной точки от вершин.

244. По основаниям a, b и боковым сторонам c, d трапеции определить ее диагонали m, n .

245. Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон с удвоенным произведением оснований.

246. По сторонам a, b, c, d трапеции определить ее площадь.

247. Выразить площадь четырехугольника через стороны a, b, c, d и диагонали m, n .

248. Выразить диагонали m, n вписанного четырехугольника через стороны a, b, c, d .

249. Вывести из выражений диагоналей вписанного четырехугольника через стороны теорему Птолемея.

250. Выразить площадь вписанного четырехугольника через стороны.

251. По радиусу R и хордам a, b двух дуг круга определить хорду суммы и разности этих дуг.

252. По хордам a, b, c трех дуг, в сумме составляющих полуокружность, составить уравнение для определения диаметра круга.

Правильные многоугольники

253. Из каких правильных многоугольников одного вида можно сложить паркет?

254. Как сложить паркет из правильных восьмиугольников и квадратов, или двенадцатиугольников и треугольников?

255. Можно ли сложить паркет из правильных десятиугольников и пятиугольников?

256. Может ли вписанный многоугольник иметь равные углы, но неравные стороны, или равные стороны, но неравные углы?

257. Может ли описанный многоугольник иметь равные стороны, но неравные углы, или равные углы, но неравные стооны?

258. В круг радиуса R вписаны три равных круга, касательных между собой. Определить их радиус.

259. Круг радиуса R обложен четырьмя равными кругами, каждый из которых касателен к двум соседним. Определить радиус этих кругов.

260. Вычислить сторону правильного описанного треугольника, квадрата и шестиугольника.

261. Вычислить сторону и все диагонали правильного вписанного десятиугольника.

262. Вычислить сторону и диагональ правильного вписанного пятиугольника.

263. По стороне правильного десятиугольника определить его площадь.

264. Вычислить сторону правильного вписанного двенадцатиугольника.

265. Вычислить сторону правильного вписанного пятнадцатиугольника.

266. Вычислить сторону правильного вписанного шестидесятиугольника.

Измерение круга

267. Вывести из рассмотрения вписанного шестиугольника и описанного квадрата, что число π заключается между 3 и 4.

268. Какую верхнюю границу для числа π дает рассмотрение правильного описанного шестиугольника?

269. Вычислить число π с помощью правильного вписанного шестидесятиугольника и оценить погрешность.

270. Какова погрешность приближенного спрямления полуокружности как суммы сторон правильного вписанного треугольника и правильного вписанного квадрата?

271. В круг радиуса R вписаны три равных круга, касательных друг к другу. Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной этими тремя кругами.

272. На диаметре полукруга радиуса R построен правильный треугольник. Вычислить площадь части его вне полукруга.

Начала геометрии кругов

Геометрия кругов есть сравнительно новая глава элементарной геометрии. По характеру применяемых в ней методов ее можно рассматривать как переходную ступень к высшей геометрии. Будучи основана на немногих, но общих понятиях, она легко приводит к решению сравнительно сложных вопросов.

Мы дадим сейчас только самые основные определения. Вывод вытекающих из них теорем предлагается читателю в виде задач, в формулировке которых попутно вводятся и дальнейшие определения.

I. Пусть будет K некоторый круг и P некоторая точка. Если M и M' — точки пересечения с кругом K какой-нибудь прямой, проходящей через точку P , то произведение отрезков $PM \cdot PM'$ не зависит, как известно, от выбора этой прямой. Условимся приписывать отрезкам PM и PM' одинаковые знаки, когда направления движения от P к M и M' совпадают, и обратные знаки, когда эти направления противоположны. Тогда произведение

$PM \cdot PM'$ будет положительным или отрицательным, смотря по тому, лежит ли точка P вне или внутри круга K . В случае, когда точка P лежит на окружности круга K , произведение $PM \cdot PM'$ равно нулю. Всегда можно выбрать направление прямой PM так, чтобы оба отрезка имели одинаковую абсолютную величину k : если P лежит вне круга K , то за PM нужно принять касательную из P к кругу K ; если P лежит внутри круга K , то за PM нужно принять перпендикуляр к диаметру круга K , проходящему через P . В случае, когда P лежит на окружности круга K , оба направления совпадают. После этого можем написать:

$$PM \cdot PM' = \pm k^2.$$

Число $\pm k^2$ называется степенью точки P относительно круга K или круга K относительно точки P .

II. Пусть будет O — некоторая точка и $\pm k^3$ — некоторое положительное или отрицательное число. Две точки M, M' называются взаимно обратными, если они расположены на одной прямой с точкой O , и притом так что

$$OM \cdot OM' = \pm k^2.$$

Две фигуры F, F' называются взаимно обратными, если соответствующие точки их взаимно обратны. Определенное таким образом соответствие между фигурами на плоскости называется инверсией. Точка O называется центром инверсии, а число $\pm k^3$ — степенью инверсии. Различают инверсию эллиптическую (степень $-k^2$) и гиперболическую (степень $+k^2$). В случае гиперболической инверсии круг с центром O и радиусом $\sqrt{k^3} = k$, все точки которого сами себе обратны, называется кругом инверсии, и взаимно обратные точки M, M' называются отражениями друг друга в этом круге. В случае эллиптической инверсии также иногда говорят о круге инверсии мнимого радиуса $\sqrt{-k^2}$.

III. Два круга называются взаимно ортогональными, если они пересекаются и касательные к ним в каждой из точек пересечения взаимно перпендикуляры.

273. Показать, что степень точки относительно круга всегда равна $d^2 - r^2$, где d — расстояние точки от центра круга, r — радиус круга.

274. Показать, что геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно двух данных кругов, есть прямая, перпендикулярная к линии центров (радикальная ось). Исследовать положение радиальной оси относительно данных кругов в зависимости от положения этих кругов.

275. Показать, что радиальные оси трех данных кругов либо совпадают, либо пересекаются в одной точке (радикальном центре). Вывести отсюда способ построения радиальной оси двух кругов, не имеющих общих точек.

276. Совокупность кругов, радиальные оси которых, взятые попарно, совпадают, называется пучком кругов. Показать: 1) что пучок вполне определяется, если заданы один из его кругов и радиальная ось, или два из его кругов; 2) что все круги пучка либо пересекают радиальную ось в одних и тех же точках (эллиптический пучок), либо касательны к ней в одной и той же точке (парabolический пучок).

либо не имеют с ней общих точек (гиперболический пучок).

277. Содержащиеся в пучке круги нулевого радиуса (точки) называются его предельными точками. Показать, что гиперболический пучок содержит две предельные точки, параболический — одну, эллиптический — ни одной.

278. Пучок задан одним из своих кругов и радикальной осью. Построить круг пучка: 1) проходящий через данную точку; 2) касательный к данной прямой; 3) касательный к данному кругу.

279. Показать, что круг, ортогональный к двум кругам пучка, ортогонален ко всем кругам того же пучка.

280. Показать, что совокупность всех кругов, ортогональных ко всем кругам данного пучка, образует другой пучок (ортогональный к первому), и что первый пучок в свою очередь ортогонален ко второму. Показать, что общая точка всех кругов одного из пучков всегда будет предельной точкой другого, и наоборот.

281. Совокупность кругов, радикальные центры которых, взятые по три, совпадают, называется связкой кругов. Показать: 1) что связка вполне определяется радикальным центром и одним из своих кругов; 2) что радикальный центр лежит либо внутри всех кругов связки (эллиптическая связка), либо на окружности всех кругов связки (параболическая связка), либо вне всех кругов связки (гиперболическая связка).

282. Показать, что круги нулевого радиуса (предельные точки) гиперболической связки образуют окружность круга, центром которого служит радикальный центр связки (предельный круг), что в параболической связке предельный круг обращается в точку, а в эллиптической совсем исчезает.

283. Показать, что единственным кругом, ортогональным ко всем кругам связки, является предельный круг, и наоборот, совокупность всех кругов, ортогональных к данному кругу, образует связку.

284. Показать, что прямые, проходящие через радикальный центр связки, пересекают круги связки в парах точек, обратных в инверсии, центром которой служит радикальный центр связки, а степенью — степень связки.

285. Показать, что всякий круг, проходящий через пару точек, обратных в данной инверсии, принадлежит связке, радикальным центром которой служит центр инверсии и степенью — степень инверсии.

286. Связка задана радикальным центром и одним из своих кругов. Построить тот круг этой связки, который проходит через две данные невзаимнообратные точки.

287. Две различные связки заданы, как в предыдущей задаче. Построить общий обеим связкам круг, проходящий через данную точку.

288. Построить круг данной связки, имеющий данный центр.

289. Показать, что пучок, два круга которого принадлежат данной связке, весь принадлежит этой связке.

290. Показать, что два пучка одной связки имеют один общий круг, кроме случая гиперболической связки, когда общего круга может и не быть.

291. Показать, что две связки всегда имеют общий пучок.

292. Найти линию, обратную прямой линии в данной инверсии.

293. Найти линию, обратную окружности в данной инверсии.

294. Показать, что две точки, являющиеся отражениями друг друга в данном круге, делят диаметр круга, на котором и на продолжении которого они лежат, внутренним и внешним образом в одном и том же отношении.

295. Около середины основания треугольника, как центра, описан круг, проходящий через точки касания к основанию двух вневписанных кругов, прилежащих к боковым сторонам. Показать, что отражение в этом круге той общей касательной вневписанных кругов, которая не является стороной треугольника, есть круг девяти точек, рассмотренный в задаче 88. Показать, что этот результат сохраняет силу, если зачленить вневписанные круги, прилежащие к боковым сторонам, вписаным кругом и вневписанным кругом, прилежащим к основанию.

296. Показать, что круг девяти точек всегда касается вписанного и трех вневписанных кругов (теорема Фейербаха).

297. Показать, что касательные к взаимнообратным кругам во взаимнообратных точках образуют с прямой, соединяющей эти точки, равные односторонние углы. Обобщить этот результат на случай прямой и обратного ей круга.

298. Углом между двумя дугами круга, исходящими из одной точки, называется угол между касательными к ним, проведенными по направлению сам их дуг. Показать, что угол между двумя дугами круга равен углу между обратными дугами круга, но направления этих углов противоположны, т. е. направления вращения, в которых две соответственные стороны должны описывать эти углы, чтобы совпасть с двумя другими сторонами соответственными сторонами, противоположны друг другу.

299. Три дуги круга образуют треугольник и при продолжении сходятся в одной точке. Показать, что сумма внутренних углов такого треугольника равна двум прямым.

300. Найти инверсию, в которой два данных круга взаимно обратны.

301. Показать, что всякий круг, касательный к двум данным кругам, сам себе обратен в одной из инверсий, относительно которых данные круги взаимно обратны.

302. Показать, что шесть центров подобия трех кругов, центры которых не лежат на одной прямой, суть точки пересечения четырех прямых (осей подобия).

303. Применить результаты двух предыдущих задач к решению задачи Аполлония (построить круг, касательный к трем данным кругам).

304. Даны два круга. Показать, что всегда можно найти инверсию, в которой эти два круга будут обратны двум прямым или двум концентрическим кругам.

305. Свести задачу Аполлония к возможно простым частным случаям с помощью изменения радиусов и инверсии.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ПОСТРОЕНИЯ

З а м е ч а н и е. Во всех задачах на построение в стереометрии мы будем предполагать, что мы имеем возможность: проводить плоскость через три заданные точки (а следовательно, и через точку и прямую), получать прямую пересечением двух плоскостей, проводить прямую через две точки пространства, а также производить в любой плоскости пространства все построения циркулем и линейкой, которые изучаются в планиметрии.

Прямые и плоскости и многогранные углы

306. Построить прямую, проходящую через данную точку A пространства и пересекающую две данные прямые пространства.

307. Построить прямую, которая была бы параллельна данной прямой a пространства и пересекала бы две другие заданные прямые пространства b и c , не лежащие в одной плоскости.

308. Построить прямую, лежащую в данной плоскости P , проходящую через заданную точку A этой плоскости и перпендикулярно к заданной прямой a пространства.

309. Построить отрезок данной длины d , параллельный данной плоскости P и такой, что концы его опираются на данные две прямые a и b .

310. Показать, что перпендикуляры, опущенные из одной точки A на ряд плоскостей, пересекающихся по параллельным прямым, лежат в одной плоскости.

311. Построить отрезок, который является кратчайшим из всех, концы которых лежат на двух заданных скрещивающихся (т. е. не лежащих в одной плоскости) прямых пространства (кратчайшее расстояние между двумя прямыми пространства).

312. Показать, что четырехугольник, соединяющий середины сторон любого четырехугольника (также и не плоского), есть параллелограмм.

313. В пространстве дана плоскость P и две точки A и B , не лежащие в плоскости P . Найти, где надо взять на плоскости P точку C , чтобы ломаная ACB была кратчайшей.

314. Показать, что если имеется конечное число прямых таких, что каждые две из них пересекаются, то или все они лежат в одной плоскости, или все проходят через одну точку.

315. Каково геометрическое место точек пространства, равноудаленных от всех трех вершин заданного треугольника?

316. Найти все прямые, проходящие через заданную точку пространства и делающие одинаковые углы с двумя заданными прямыми, не лежащими в одной плоскости (скрещивающимися).

317. Найти геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих граней заданного двухграниного угла.

318. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных пересекающихся прямых.

319. Показать, что биссекториальные плоскости всех трех двухгранных углов трехграниного угла пересекаются по одной прямой.

320. Показать, что плоскости, проходящие через биссектрисы граней трехграниного угла и перпендикулярно к этим граням, все три пересекаются по одной прямой.

321. Показать, что плоскости, проходящие через ребра трехграниного угла и через биссектрисы его противоположных граней, все три пересекаются по одной прямой.

322. Показать, что плоскости, проходящие через ребра трехграниного угла и перпендикулярные к противоположным граням трехграниного угла, все три пересекаются по одной прямой.

323. Показать, что любой четырехгранный угол можно пересечь так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

324. Две правильные треугольные пирамиды (равных или разных высот — все равно) с одинаковыми основаниями сложены вместе основаниями и вершины их соединены. Показать, что отрезок, соединяющий вершины, перпендикулярен к основаниям.

Куб

325. Показать, что куб можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

326. Показать, что две плоскости, проходящие через концы обеих троек ребер куба, сходящихся в концах диагонали куба, рассекают эту диагональ на три равные части.

327. Построить кратчайший отрезок, опирающийся концами на две диагонали граней куба, принадлежащие двум смежным граням и не встречающиеся. В каком отношении делятся эти диагонали теми точками, в которых этот отрезок на них опирается?

328. Рассмотреть, какой многогранник ограничен плоскостями, проходящими через все 12 ребер куба и делающими по 45° с гранями куба, сходящимися в этих ребрах. Найти, во сколько раз объем этого многогранника больше объема куба.

Параллелепипед

329. Показать, что всякая хорда параллелепипеда, проходящая через точку пересечения его диагоналей, делится эгою точкою пополам.

330. Построить параллелепипед, три ребра которого лежат на трех заданных прямых, попарно не лежащих в одной плоскости.

331. Показать, что две плоскости, проходящие через концы обеих троек ребер параллелепипеда, сходящихся в концах диагонали параллелепипеда, рассекают эту диагональ на три равные части.

332. Через три вершины параллелепипеда, являющиеся вторыми концами ребер, исходящих из одной точки, проведена плоскость. Показать, что треугольник, получающийся в пересечении параллелепипеда этой плоскостью, пересекается диагональю параллелепипеда, исходящего из той же точки, в центре тяжести.

Правильный тетраэдр

333. Найти угол между двумя противоположными ребрами правильного тетраэдра.

334. Показать, что правильный тетраэдр можно пересечь плоскостью так, чтобы получился квадрат.

335. Показать, что в правильном тетраэдре сумма расстояний от любой его внутренней точки до всех его четырех граней имеет постоянную величину, а именно, равна его высоте.

336. Показать, что, если три ребра параллелепипеда, сходящихся в одной вершине, образуют правильный тетраэдр, то параллелепипед этот можно пересечь так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

Произвольный тетраэдр

Если принять три ребра некоторого тетраэдра, сходящихся в одной его вершине, за три ребра параллелепипеда, то полученный параллелепипед мы будем называть «достроением» тетраэдра до параллелепипеда «через такую-то грань» или «исходя от такой-то вершины тетраэдра».

337. Достроить некоторый заданный тетраэдр до параллелепипеда четырьмя способами, исходя от каждой из четырех вершин тетраэдра, и принять четыре вершины этих четырех

параллелепипедов, противолежащие в каждом параллелепипеде вершине тетраэдра, за четыре вершины некоторого большего тетраэдра. Рассмотреть, как расположены параллелепипеды и заданный тетраэдр по отношению к этому большему тетраэдру и во сколько раз объем полученного тела больше, чем объем данного тетраэдра.

338. Рассмотреть, какими способами можно разрезать параллелепипед на тетраэдры такие, чтобы вершины этих тетраэдров были вершинами параллелепипеда.

339. Показать, что объемы двух тетраэдров, или параллелепипедов, с одинаковыми трехгранными углами относятся как произведения их ребер, сходящихся в этих углах.

340. Показать, что объем тетраэдра, противоположные ребра которого суть два отрезка заданной длины, лежащие на двух заданных прямых, не лежащих в одной плоскости, не зависит от того, где эти отрезки на этих прямых расположены.

341. Показать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

342. Пересечь тетраэдр плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

343. Показать, что все шесть плоскостей, проходящих через середины ребер тетраэдра и перпендикулярно к ним, пересекаются в одной точке.

344. Показать, что все четыре прямые, проходящие через центры кругов, описанных вокруг граней тетраэдра, и перпендикулярно к граням, пересекаются в одной точке.

345. Показать, что все шесть биссекториальных плоскостей всех двухгранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.

346. Показать, что все четыре прямые, соединяющие вершины тетраэдра, с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке.

347. Найти условие, при котором центр шара, описанного вокруг тетраэдра, лежит внутри тетраэдра.

348. Показать, что если все шесть двухгранных углов тетраэдра острые, то и все двенадцать его плоских углов острые

Правильный октаэдр

349. Показать, что правильный октаэдр можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится правильный шестиугольник.

350. Рассмотреть соотношение между кубом и правильным октаэдром (связь между числом их вершин, ребер и граней и возможное взаимное их расположение).

Правильные додекаэдр и икосаэдр

351. Показать, что можно так провести по одной плоскости через каждое из двенадцати ребер куба, чтобы эти плоскости замкнули правильный додекаэдр.

352. Показать, что правильный додекаэдр можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

353. Рассмотреть соотношение между правильными икосаэдром и додекаэдром (ср. задачу 350).

354. Получить срезанием частей из правильного икосаэдра последовательно правильный додекаэдр, куб и правильный тетраэдр.

Задачи на сжатия (растяжения) и сдвиги пространства

Пояснение I. Представим себе, что мы «сожмем» все пространство, а вместе с ним и все фигуры, в нем находящиеся и состоящие из его точек, к некоторой заданной плоскости P так, чтобы точки самой плоскости P остались неподвижны, точки же, не лежащие в плоскости (как лежащие по одну, так и лежащие по другую от нее сторону), приблизились бы к плоскости P , оставаясь на тех же перпендикулярах к плоскости P , на которых они сначала находились, и притом так, что если расстояние от какой-либо точки до плоскости P было h до сжатия, то оно станет $h \cdot k$ после сжатия, где k — некоторый заданный положительный, постоянный для всех точек коэффициент, характеризующий сжатие. Если $k = 1$, то никакого сжатия, конечно, не произойдет, все точки останутся на месте; если k меньше 1, произойдет сжатие, если же k больше 1, то произойдет, собственно, растяжение пространства от этой плоскости P . Такое равномерное растяжение или сжатие всего пространства к плоскости P называется также афинитетом к плоскости P .

355. Показать, что при афинитете к плоскости прямые остаются прямыми.

356. Показать, что при афинитете к плоскости другие плоскости пространства остаются плоскостями.

357. Показать, что при афинитете к плоскости середина отрезка остается серединой, и вообще точка, делящая отрезок в данном отношении, остается точкой, делящей его в том же самом отношении.

358. Показать, что при афинитете к плоскости параллельные прямые и плоскости остаются параллельными.

359. Показать, что при афинитете к плоскости объемы всех тел, независимо от их формы, величины и положения, изменяются в k раз.

Пояснение II. Пусть заданы в пространстве некоторая плоскость P и некоторое направление, параллельное этой плоскости. Представим себе, что мы «сдвинем» все пространство подобно колоде карт так, чтобы все точки самой плоскости P остались неподвижны: всякая точка, лежащая по

одну сторону от плоскости P , сдвинулась бы в указанном направлении на некоторый отрезок a , пропорциональный ее расстоянию h от плоскости P , так что $a = hk$. всякая же точка, лежащая по другую сторону от плоскости P , сдвинулась бы в обратном направлении и опять пропорционально ее расстоянию h от плоскости P , с тем же коэффициентом пропорциональности k . Мы будем такое искажение пространства, а вместе с ним и всех фигур в нем, называть сдвигом по отношению к плоскости P — в данном направлении и с данными коэффициентами k .

360. Доказать, что при сдвиге прямые тоже остаются прямыми, плоскости остаются плоскостями, параллельные прямые и плоскости остаются параллельными, середина отрезка остается серединой и т. д.

361. Доказать, что объем любого тела при сдвиге не меняется.

362. Показать, что путем сжатий и сдвигов (сдвиг, сжатие, сдвиг и сжатие) можно превратить любой тетраэдр в правильный.

363. Показать, что при помощи сдвигов и сжатий можно превратить любой параллелепипед в куб.

Применить принцип сжатий и сдвигов (т. е. принцип афинности) к решению задач 331, 332, 346.

Цилиндр и конус

З а м е ч а н и е. В задачах 364—369, ради краткости, мы будем вместо «цилиндрическая поверхность вращения» и «коническая поверхность вращения», т. е. бесконечно продолженная боковая поверхность прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса, говорить просто: цилиндрическая и коническая поверхность

364. Показать, что если прямая имеет больше двух общих точек с цилиндрической или конической поверхностью, то она есть ее образующая.

365. Исследовать, как могут пересекаться две цилиндрические поверхности с параллельными образующими или две конические поверхности с общей вершиной.

366. Построить плоскость, проходящую через заданную точку A и касающуюся заданной цилиндрической или заданной конической поверхности.

367. Найти конические поверхности, для которых три заданные прямые, проходящие через одну точку, являются образующими (построить оси искомых конусов).

368. Найти конические поверхности, касающиеся трех заданных плоскостей (построить оси конусов).

369. Исследовать, при каком условии вокруг четырехгранного угла может быть описана коническая поверхность.

370. Показать, что линия, получаемая в сечении прямого кругового цилиндра плоскостью, есть равномерное сжатие

или растяжение окружности от прямой. Эта линия называется эллипсом.

371. Показать, что эллипс есть геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек этой плоскости, называемых фокусами эллипса, постоянна.

372. Показать, что сечение прямого кругового конуса плоскостью, не параллельной его основанию, если оно есть замкнутая линия, есть эллипс.

373. Показать, что бесконечно продолженная боковая поверхность косого кругового конуса, кроме плоскости симметрии, проходящей через его вершину и центр его основания в том направлении, куда наклонен конус, имеет еще вторую плоскость симметрии, перпендикулярную первой, проходящую через его вершину и пересекающую его основание по ту сторону от его центра, куда наклонен конус, и что она есть не что иное, как боковая поверхность прямого эллиптического, т. е. такого, основание которого эллипс, а вершина лежит на перпендикуляре к основанию, восставленном в его центре. Как следствие отсюда, вывести, что косой круговой конус, кроме очевидных круговых сечений, параллельных его основанию, имеет еще вторую этой не параллельную систему друг другу параллельных круговых сечений.

Шар

Замечание. Под словом «сфера» мы будем понимать поверхность шара.

374. Найти геометрическое место центров всех сфер, проходящих через три заданные точки *A*, *B* и *C*.

375. Предполагая заданными центры трех сфер и радиусы этих сфер, найти построением точки, общие одновременно всем этим трем сферам.

376. Найти построением центр сферы заданного радиуса, которая бы: 1) проходила через две заданные точки и касалась заданной плоскости, 2) проходила через две заданные точки и касалась заданной сферы, 3) проходила через заданную точку и касалась двух заданных плоскостей, 4) проходила через заданную точку и касалась двух заданных сфер, 5) касалась трех заданных плоскостей, 6) касалась трех заданных сфер.

377. Найти построением плоскость, касающуюся трех заданных сфер.

378. Какова та поверхность, которая получается при вращении окружности вокруг оси, проекция которой на плоскость этой окружности проходит через ее центр.

379. Найти геометрическое место центров сечений заданной сферы плоскостями, проходящими через заданную точку.

380. Найти геометрическое место проекций заданной точки на все плоскости, проходящие через другую заданную точку.

381. Найти геометрическое место концов отрезка, равного и параллельного данному (заданному по длине и направлению) отрезку, если концы этого подвижного отрезка находятся каждый на своей заданной сфере.

382. Найти положения треугольника, равного и параллельного данному треугольнику, если каждая из вершин искомого треугольника лежит на своей заданной сфере. Исследовать число возможных решений задачи.

383. На плоскость положены одинаковые шары в бесконечном числе так, что центры их находятся на одной прямой и что они касаются друг друга. Рядом с полученным рядом шаров на эту же плоскость положен параллельно ему другой ровно такой же ряд шаров так, что каждый из шаров второго ряда приходится в «выемку» между двумя соседними шарами первого ряда и касается их обоих и т. д. Так, вся плоскость окажется покрытой слоем одинаковых шаров, к каждому из которых касается шесть шаров. Между каждыми тремя взаимно касающимися шарами этого слоя образуется сверху «ямка». Показать, что можно сверху так наложить на этот первый слой второй, параллельный ему, и ровно такой же слой, чтобы шары этого слоя не приходились в ямки первого слоя (не во все ямки), и рассмотреть, сколькими различными способами это можно сделать.

384. Предполагая, что на второй слой также наложен третий слой и т. д. до бесконечности, найти, какую часть всего бесконечного пространства занимают эти шары, и какая часть приходится на промежутки между ними.

385. Исследовать, сколькими способами при таком наложении и как может быть обложен касающимися его шарами шар этой системы.

386. Найти, как надо располагать слои друг на друге для того, чтобы все шары системы были одинаковым образом окружены прилегающими к ним шарами системы.

Разобранные в задачах 383–386 вопросы о двух замечательных расположениях шаров в пространстве имеют большое значение в физике — в теории расположения атомов в твердом веществе.

387. Показать, что если поверхность такова, что окружность, проходящая через любые три ее точки, всеми точками своими лежит на ней, то эта поверхность — сфера.

З а м е ч а н и е. Проекция сферы прямолинейными лучами из некоторой точки сферы на плоскость, перпендикулярную к диаметру, проходящему через эту точку, называется стереографической проекцией.

388. Показать, что величины углов между линиями, проведенными на сфере, при стереографической проекции сохраняются.

389. Показать, что при стереографической проекции окружности, лежащие на сфере, будут проектироваться в виде окружностей же на плоскость проекций.

Задачи, в которых соображения стереометрии применяются для решения вопросов планиметрии

390. На плоскости заданы три полупрямые, исходящие из одной точки и такие, что угол между каждыми двумя соседними из них меньше 180° ; внутри каждого из этих трех углов задано по одной точке. Показать, что существует, и притом только один, такой треугольник, стороны которого проходят через заданные точки, а вершины лежат на заданных прямых.

391. На плоскости заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$ такие, что прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке. Показать, что три точки пересечения прямых AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC и $B'C'$ лежат на одной прямой.

392. На плоскости заданы три круга (как угодно расположенные и каких угодно разных радиусов); для каждой пары этих кругов построены внешние касательные. Показать, что точки K , L , M пересечения каждой из этих пар внешних касательных лежат на одной прямой.

393. На плоскости заданы три круга (произвольной величины и положения), имеющих общую внутреннюю часть. Показать, что три хорды, каждая из которых общая двум кругам, пересекаются в одной точке.

394. Доказать, что диагонали, соединяющие противоположные вершины любого, хотя бы и неправильного, шестиугольника, описанного около круга, пересекаются в одной точке (теорема Брианшона).

395. Доказать, что три точки пересечения продолжений трех пар противоположных сторон всякого шестиугольника, вписанного в круг, находятся на одной прямой (теорема Паскаля).

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЯ

Перпендикуляры и наклонные

396. Из точки A пространства опущены на плоскость P перпендикуляр h и наклонная a . Из середины проекции наклонной a на плоскость P восставлен к ней в плоскости P перпендикуляр b . Найти расстояние от конца его B до середины E перпендикуляра h .

397. В одной из вершин прямоугольника восставлен перпендикуляр к плоскости прямоугольника. Конец его отстоит на расстоянии a , b , c от трех других вершин прямоугольника. Найти его длину h .

398. Точка M равноудалена от всех трех вершин некоторого заданного прямоугольного треугольника на расстояние b . Гипотенуза треугольника равна a . Найти расстояние h от точки M до плоскости треугольника.

399. Из некоторой точки M опущен на плоскость P перпендикуляр h и проведены две наклонные, углы которых с перпендикуляром равны 30° , угол же между наклонными 60° . Найти расстояние между основаниями наклонных.

Параллельные прямые и плоскости и перпендикуляры, опущенные на плоскости

400. Найти расстояние от середины отрезка, не пересекающего плоскости P , до этой плоскости, если расстояния от его концов равны a и b .

401. Найти расстояние от середины отрезка, пересекающего плоскость P' , до этой плоскости, если расстояния от его концов равны a и b .

402. Расстояния от концов отрезка до плоскости P равны a и b . Найти расстояние до плоскости P от точки M отрезка, которая делит его в отношении $m:n$.

403. Расстояния от вершин некоторого треугольника до плоскости P суть a , b , c . Найти расстояние h от центра тяжести этого треугольника до плоскости P .

404. Расстояния трех вершин некоторого параллелограмма от плоскости P суть a , b , d . Найти расстояние от четвертой вершины.

405. Расстояния от четырех вершин некоторого параллелепипеда до плоскости P суть a , b , c , d . Найти расстояния от четырех других вершин. Предположить, что вершины B , C , D находятся на концах трех ребер, сходящихся в вершине A .

406. Расстояния от четырех вершин некоторого тетраэдра до плоскости P суть a , b , c , d . Найти расстояние h от центра тяжести этого тетраэдра до плоскости P .

407. Расстояния от точки M до трех взаимно перпендикулярных плоскостей P_1 , P_2 , P_3 (взаимно перпендикулярны, например, две стены и пол комнаты, образующие трехгранный угол, или, например, три грани куба, сходящиеся в одной вершине) суть a_1 , a_2 , a_3 . Найти расстояние от точки M до точки O пересечения плоскостей P_1 , P_2 , P_3 .

408. Расстояния от двух точек пространства A и B до трех взаимно перпендикулярных плоскостей P_1 , P_2 , P_3 суть соответственно a_1 , a_2 , a_3 и b_1 , b_2 , b_3 . Найти расстояние между точками A и B .

409. Проекции отрезка AB на три взаимно перпендикулярные плоскости P_1 , P_2 , P_3 суть b_1 , b_2 , b_3 . Найти длину отрезка.

410. Проекции отрезка на три взаимно перпендикулярных прямых пространства p_1 , p_2 , p_3 (взаимно перпендикулярны, например, три ребра куба, сходящиеся в одной вершине) суть a_1 , a_2 , a_3 . Найти длину отрезка. (Проекцией отрезка на прямую в пространстве называется отрезок этой прямой, заключенный между плоскостями, проходящими через концы проектируемого отрезка перпендикулярно прямой, на которую его проектируют.)

411. Расстояния от четырех вершин некоторого тетраэдра до трех взаимно перпендикулярных плоскостей пространства P_1 , P_2 , P_3 суть соответственно a_1 , a_2 , a_3 ; b_1 , b_2 , b_3 ; c_1 , c_2 , c_3 ; d_1 , d_2 , d_3 . Найти объем тетраэдра.

Трехгранные углы

412. Плоские углы трехгранного угла имеют 45° , 45° и 60° . Найти величину двухгранного угла между плоскостями плоских углов в 45° .

413. Плоские углы трехгранного угла имеют 60° , 60° и 90° . На ребрах, от вершины, отложены одинаковые отрезки OA , OB , OC . Найти величину двухгранного угла между плоскостью плоского угла в 90° и плоскостью ABC .

Куб

414. Ребро куба a . Найти длину его диагонали, длину диагоналей его граней и длину отрезка, соединяющего середины двух не параллельных и не сходящихся в вершине его ребер.

415. Ребро куба a . Найти площади его граней, его диагональных сечений, площади сечений, проходящих через центр грани и ребро противоположной грани; площади сечений, проходящих через концы трех ребер, сходящихся в одной вершине.

416. Ребро куба a . Найти площадь того сечения куба, которое представляет собою правильный шестиугольник.

417. Ребро куба a . Найти величину кратчайшего расстояния от ребра куба до его диагонали, не встречающейся с ребром.

418. Ребро куба a . Найти величину кратчайшего расстояния между не встречающимися диагоналями двух его смежных граней.

419. Два куба с ребром a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных граней, но один куб повернут на 45° по отношению к другому. Найти объем общей части этих обоих кубов, а также объем тела, представляющего собою совокупность этих двух кубов.

420. Два одинаковых куба с ребром a имеют диагонали на одной и той же прямой, вершина второго куба лежит в центре первого, и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем общей их части.

421. Два одинаковых куба с ребром a имеют общий отрезок AB , соединяющий середины двух противоположных ребер, но один повернут вокруг этого отрезка на 90° по отношению к другому. Найти объем общей их части.

422. Два одинаковых куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на 60° по отношению к другому. Найти объем общей их части.

423. Через каждые три вершины куба с ребром a , лежащие в концах каждого из трех ребер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость. Найти объем тела, ограниченного этими плоскостями.

424. Взяты четыре вершины куба такие, что никакие две из них не лежат на одном ребре. Через каждые три из этих четырех вершин проведена секущая плоскость. Найти объем тела, вырезанного из куба этими плоскостями. Ребро куба a .

425. Произвольно выбранная секущая плоскость пересекает куб с ребром a . Обозначив через r , s , t отрезки, которые эта плоскость отсекает от трех параллельных ребер куба, считая эти отрезки от одного из оснований куба (перпендикулярного этим ребрам) до точек пересечения секущей плоскости с самими этими ребрами или с их продолжениями под это основание или за противолежащее основание куба, рассмотреть все возможные случаи и вычислить объемы частей куба.

426. Вычислить площади всех сечений куба, рассмотренные в задаче 425, выразив их через отрезки r , s , t .

Правильный тетраэдр

427. Ребро правильного тетраэдра равно a . Вычислить площадь того сечения тетраэдра, которое представляет собою квадрат.

428. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребрами a имеют общую высоту, но один из них повернут на 60° по отношению к другому. Найти объем общей их части.

429. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребром a имеют общую высоту, но вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Стороны треугольников их оснований расположены параллельно. Найти объем общей части этих тетраэдров.

430. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребром a имеют общую высоту, но вершина одного из них лежит в центре основания другого, и наоборот. Основание второго тетраэдра повернуто на 60° по отношению к основанию первого. Найти объем общей их части.

431. Два одинаковых правильных тетраэдра с ребром a имеют общий отрезок, соединяющий середины двух противоположных ребер, но один тетраэдр повернут на 90° по отношению к другому. Найти объем общей их части.

432. Правильный тетраэдр с ребром a рассечен произвольной секущей плоскостью. Обозначим через r, s, t отрезки, которые отсекает эта плоскость от трех ребер тетраэдра, сходящихся в одной вершине A , считая эти отрезки от вершины A до точек пересечения секущей плоскости с самими этими ребрами тетраэдра или с их продолжениями за грань, противолежащую вершине A . Рассмотреть все возможные случаи и вычислить объемы частей тетраэдра.

433. Вычислить площади всех сечений правильного тетраэдра, рассмотренных в задаче 432, выразив их через отрезки r, s, t .

Призматоиды

434. Найти объем тела, ограниченного сверху и снизу гранями, которые представляют собою прямоугольники, расположенные в параллельных плоскостях и так, что стороны одного параллельны соответственным сторонам другого, а боковые грани суть четыре трапеции, если стороны одного основания a и b , а другого — a' и b' .

435. Доказать, что объем любого выпуклого призматоида (тела, ограниченного двумя параллельными основаниями, которые суть любые выпуклые многоугольники, могущие быть и разных наименований, и представляющего наименьшее выпуклое тело, имеющее эти основания) равен $V = \frac{H}{6}(s + s' + 4s_1)$, где H — высота призматоида, т. е. расстояние между его основаниями, s — площадь нижнего, s' — площадь верхнего основания и s_1 — площадь среднего сечения, т. е. сечения плоскостью, параллельной основаниям и проходящей посередине между ними.

Правильные многогранники

- 436.** Найти объем V правильного тетраэдра с ребром a .
- 437.** Найти радиус R шара, описанного вокруг правильного тетраэдра с ребром a .
- 438.** Найти радиус r шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром a .
- 439.** Найти величину кратчайшего расстояния между двумя противоположными ребрами правильного тетраэдра с ребром a .
- 440.** Найти объем V и радиусы R и r описанного и вписанного шара для куба с ребром a .
- 441.** Найти объем V правильного октаэдра с ребром a .
- 442.** Найти радиус R описанного шара для правильного октаэдра с ребром a .
- 443.** Найти радиус r вписанного шара для правильного октаэдра с ребром a .
- 444.** Найти полную поверхность правильного додекаэдра с ребром a .
- 445.** Найти радиус R описанного шара для правильного додекаэдра с ребром a .
- 446.** Найти радиус r вписанного шара для правильного додекаэдра с ребром a .
- 447.** Найти объем V правильного додекаэдра с ребром a .
- 448.** Найти полную поверхность правильного икосаэдра с ребром a .
- 449.** Найти радиус R описанного шара для правильного икосаэдра с ребром a .
- 450.** Найти радиус r вписанного шара для правильного икосаэдра с ребром a .
- 451.** Найти объем правильного икосаэдра с ребром a .

Цилиндр

- 452.** Из квадрата со стороной a свернута боковая поверхность цилиндра. Найти его объем.
- 453.** Цилиндр пересечен двумя наклонными плоскостями так, что плоскости эти пересекают боковую поверхность цилиндра, но внутри цилиндра не пересекаются и не пересекают оснований цилиндра. Зная, что радиус цилиндра r и расстояние между точками c и c' , где секущие плоскости пересекают ось цилиндра, есть d , найти объем куска цилиндра, заключенного между секущими плоскостями.

- 454.** Найти объем и полную поверхность коленчатой цилиндрической трубы.
- 455.** Найти объем цилиндра, так описанного вокруг правильного тетраэдра с ребром a , что два противоположных

ребра этого тетраэдра являются диаметрами оснований этого цилиндра.

456. Найти объем цилиндра, так описанного вокруг куба с ребром c , что две противоположные грани куба являются квадратами, вписанными в окружности его оснований.

457. Найти объем цилиндра, так описанного вокруг правильного октаэдра с ребром a , что две противоположные грани октаэдра являются треугольниками, вписанными в его основания.

458. Найти объем цилиндра, так описанного вокруг правильного додекаэдра с ребром a , что все вершины этого додекаэдра лежат на поверхности цилиндра.

459. Найти объем цилиндра, так описанного вокруг правильного икосаэдра с ребром a , что все вершины этого икосаэдра лежат на поверхности цилиндра.

З а м е ч а н и е к задачам 455—459. Легко видеть, что эти цилиндры есть цилиндры наименьшего объема, которые можно описать вокруг правильных многогранников.

Конус

460. Из полукруга с радиусом R свернута боковая поверхность конуса. Найти объем этого конуса.

461. Квадрат вращается вокруг оси, проходящей через вершину и середину стороны, не проходящей через эту вершину. Найти объем и полную поверхность полученного тела вращения.

462. Показать, что объемы конусов, получаемых от вращения треугольника последовательно вокруг всех его сторон, обратно пропорциональны этим сторонам.

463. Вычислить объем конуса, описанного вокруг правильного додекаэдра с ребром a так, что ребра, идущие к вершинам одной из его граней, лежат на образующих конуса, а противоположная грань — на основании конуса.

Шар

464. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма. Радиус сферы, проведенный в вершину этой призмы, делает с ее боковой гранью, проходящей через эту вершину, $22\frac{1}{2}^\circ$. Найти высоту призмы.

465. Шар касается всех 12 ребер куба с ребром a . Найти объем той части шара, которая заключается внутри этого куба.

466. Сфера переменного радиуса R проходит через центр некоторой заданной сферы радиуса r . Показать, что площадь шапочки, вырезанной этой последней из поверхности переменной сферы, имеет постоянную величину.

467. В сферу радиуса R вписан правильный тетраэдр, и три грани его, исходящие из одной вершины, продолжены до пересечения со сферой. Вычислить площадь той части поверхности сферы, которая заключается внутри этого трехгранного угла.

468. Имеются два одинаковых шара большего радиуса R , два одинаковых шара меньшего радиуса r , весьма длинный цилиндр радиуса ρ и плоскость. Всего шесть предметов. Как они расположены в пространстве — не сказано, но известно, что каждый из этих шести предметов касается остальных пяти, причем цилиндр касается плоскости по образующей, а шаров — боковой поверхностью. Зная радиус r малых шаров, найти радиусы R и ρ больших шаров и цилиндра.

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Некоторые задачи из общей теории выпуклых многогранников

Не надо думать, что пирамидами, призмами, усеченными пирамидами, призматоидами и правильными многогранниками исчерпываются все возможные многогранники; разумеется, есть и многие другие. Наиболее важные многогранники — так называемые выпуклые. Все рассмотренные нами в предыдущем многогранники выпуклые. Многогранник называется выпуклым, если весь он лежит по одну сторону от плоскости любой его грани. В настоящем отделе мы рассмотрим в качестве задач ряд теорем о выпуклых многогранниках.

469. Показать, что все точки отрезка, соединяющего две точки выпуклого многогранника, суть тоже точки этого многогранника, и обратно, что если это имеет место для всякого такого отрезка, то многогранник выпуклый.

470. Показать, что сечение выпуклого многогранника плоскостью есть выпуклый многоугольник (многоугольник называется выпуклым, если он весь лежит по одну сторону от прямой, являющейся продолжением любой из его сторон).

З а м е ч а н и е. Два выпуклых многогранника называются топологически, тождественными, если: 1) они имеют одинаковое число граней, 2) одинаковое число граней одинаковых наименований (например, если первый имеет пять четырехугольных граней, то и второй имеет пять четырехугольных граней и т. д.), 3) схема смежности граней у обоих многогранников одна и та же, т. е. если как-либо перенумеровать грани первого, то можно так перенумеровать грани второго (конечно, при этом грани с теми же номерами должны иметь одинаковые наименования), что если две грани первого смежны по ребру, то грани с соответственными номерами второго тоже, и обратно, а если две грани первого смежны по вершине, то грани с соответственными номерами второго тоже, и обратно. Два топологически тождественных многогранника могут быть совершенно различной формы и величины.

471. Показать, что наименьшее число граней выпуклого многогранника четыре и что все такие многогранники топологически тождественны правильному тетраэдру.

472. Показать, что топологически различных выпуклых многогранников с пятью гранями два, один — топологически тождествен правильной четырехугольной пирамиде, другой — правильной треугольной призме.

З а м е ч а н и е. Можно аналогично показать, что топологически различных многогранников с 6-ю, 7-ю, 8-ю гранями — 7, 34, 257 и т. д. Число это быстро растет с возрастанием числа граней. Число топологически различных 12-гранников превосходит уже десятки тысяч. Число это точно определено и все эти многогранники построены только для случаев 4, 5, 6, 7, 8 граней.

473. Показать, что число N топологически различных выпуклых многогранников с данным числом n граней ограничено.

474. Показать, что существуют такие топологические типы выпуклых многогранников, среди которых нет многогранников, описуемых вокруг шара.

З а м е ч а н и е. Эта теорема была впервые доказана Штейнитцем в 1928 г. Общее решение вопроса о том, какие топологические типы есть те, среди которых есть многогранники, описуемые вокруг шара, до сих пор не найдено.

475. Показать, что если выпуклый многоугольник разбит на куски, каждый из которых есть выпуклый или невыпуклый многоугольник с центром симметрии, то и сам рассматриваемый многоугольник имеет центр симметрии (центром симметрии выпуклого или невыпуклого многоугольника называется точка, делящая пополам любую хорду этого многоугольника, через нее проходящую). (Теорема Минковского.)

476. Показать, что если грани выпуклого многогранника имеют центры симметрии, то и сам многогранник имеет центр симметрии. (Центром симметрии многогранника называется такая точка, которая делит пополам любую хорду многогранника, через нее проходящую.) (Теорема А. Д. Александрова, 1932 г.)

477. Показать, что для всякого выпуклого многогранника с числом граней f , числом вершин S и числом ребер a имеет место соотношение:

$$f+s=a+2.$$

(Теорема Эйлера.)

478. Показать, что всякий выпуклый многогранник — жесткий, т. е. что, если мыслить грани многогранника жесткими (т. е. неизменяемыми, например сделанными из картона), но считать, что по ребрам, по которым они друг с другом смежны, они соединены шарнирно, то тем не менее многогранник неизменяется. Каждый, kleивший многогранник из картона, по опыту

знает, что, как только наклеена последняя грань, многогранник становится жестким. Эту теорему предполагал верной еще Эвклид, около 300 лет до нашей эры, однако доказать ее удалось только Коши в 1815 г.

Задачи из теории разбиения пространства на одинаковые параллельно расположенные выпуклые многогранники (параллелоэдры)

З а м е ч а н и е. Мы будем говорить, что некоторыми равными многогранниками можно «заполнить» пространство в параллельном положении, если можно неограниченное их число так складывать друг с другом, чтобы они: 1) не входили друг в друга, 2) не оставляли пустот между собою, 3) были все между собою параллельно расположены. Очевидно, что кубами можно заполнить пространство. Достаточно вспомнить детские кубики, которые, укладываясь в ящике, не оставляют пустот между собою и расположены параллельно друг другу. То же очевидно и для параллелепипедов.

479. Показать, что одинаковыми правильными шестигранными призмами можно заполнить пространство.

480. Показать, что додекаэдрами подобными тому, который был рассмотрен в задаче 328, можно заполнить пространство.

481. Разрежем додекаэдр задачи 480 плоскостью, проходящей параллельно одной из пар параллельных граней того куба, при помощи которого он построен, и вставим между двумя его половинками правильную четырехугольную призму, основание которой есть грань этого куба. Получится додекаэдр, восемь граней которого — ромбы, а четыре — шестиугольники. Показать, что такими одинаковыми между собою додекаэдрами можно заполнить пространство.

482. Куб мысленно разбит на восемь малых кубов тремя плоскостями, параллельными трем парам параллельных граней куба и проходящими посередине между ними. От каждого из малых кубов отрезана половина той плоскостью, которая в сечении дает правильный шестиугольник и перпендикулярна той диагонали этого малого куба, которая идет в центр большого. Оставшаяся часть представляет некоторый 14-гранник. Исследовать форму этого 14-гранника и показать, что такими одинаковыми между собою 14-гранниками можно заполнить пространство в параллельном положении.

Федоровым (1880 г.) и Минковским (1897 г.) было показано, что нет никаких других тел, которые существенно отличались бы от параллелепипеда, шестиугольной призмы, двух додекаэдров и четырнадцатигранника, рассмотренных в задачах 479—482, и которые способны были бы в параллельном положении заполнить пространство.

Перейдем теперь к рассмотрению этой более общей теории.

483. Пусть трехмерная система бесконечного числа точек в трехмерном пространстве такова, что: 1) если взять любые три точки этой системы точек A , B , C и провести из точки C

отрезок, равный и параллельный AB , то конец его D будет тоже точкой этой системы и 2) вокруг хоть одной точки этой системы, как центра, можно описать такой шар некоторого определенного не равного нулю радиуса r , что, кроме центральной, внутри этого шара не будет ни одной точки этой системы. Показать, что эта система есть параллепипедная система точек, т. е. такая, которая представляет собою совокупность всех вершин равных параллелепипедов, смежных по целым граням, которые получатся, если провести три разно наклоненные бесконечные системы параллельных плоскостей, проходящих в каждой отдельной системе на одинаковых расстояниях друг от друга. (Эта теорема имеет очень большое значение в теории чисел и кристаллографии.)

З а м е ч а н и е. Можно показать, что параллелоэдры, если требовать только того, чтобы они были равны, параллельны, выпуклы и заполняли все пространство, не входя друг в друга, непременно должны иметь центры симметрии, но доказательство этой теоремы, впервые данное Минковским (не элементарное), и недавно предложенное другое доказательство А. Д. Александрова (элементарное) очень трудны, и поэтому мы их пропускаем, принимая эту теорему без доказательства. Итак, мы будем, сверх всего предыдущего, принимать, что параллелоэдры имеют центры симметрии и, для простоты, еще, что они смежны целыми гранями, как например, кубики в детской коробке, а не как кирпичи в кирпичной кладке.

484. Показать, что центры параллелоэдров образуют параллелепипедную систему.

485. Показать, что грани параллелоэдров имеют центры симметрии.

486. Показать, что, исходя от всякого ребра ϵ параллелоэдра, можно образовать на нем замкнутую зону граней.

487. Показать, что проекция параллелоэдра вдоль ребра ϵ на плоскость, ему перпендикулярную, есть выпуклый многоугольник с центром.

488. Показать, что проекции комплекса параллелоэдров, имеющих общее ребро ϵ , суть равные параллельно расположенные выпуклые многоугольники с центрами, облегающие со всех сторон ту точку ϵ , которая есть проекция ребра ϵ , и не налагающие друг на друга.

489. Показать, что сход в точке ϵ этих многоугольников либо такой, как у трех шестиугольников, облегающих точку, либо как у четырех параллелограммов.

490. Показать, что в первом случае предыдущей задачи эти многоугольники суть шестиугольники с центрами симметрии, а во втором случае—параллелограммы.

491. Показать, что если пристроить к первому параллелоэдру все те, которые смежны с ним по граням зоны, соответствующей данному его ребру ϵ , затем пристроить к этим параллелоэдрам те, которые с ними смежны по еще не занятым граням

этих же их зон и т. д., то получится бесконечный слой параллелоэдров, все центры которых лежат в одной плоскости, и который непроницаем, т. е. нельзя с одной стороны этого слоя перейти на другую, не пересекая самого слоя.

492. Показать, что аналогичный слой, построенный от любого другого параллелоэдра разбиения, не входящего в первый слой, не пересекает первого слоя.

493. Показать, что если мыслить ребро ϵ зоны вертикальным, т. е. плоскость центров параллелоэдров зоны — горизонтальной, и называть верхней «шапочкой» параллелоэдра комплекс всех тех граней, которые расположены поверх от той зоны, которой он касается других параллелоэдров слоя, то всякая грань верхней шапочки параллелоэдра исходного слоя (мы будем называть его нулевым) есть одновременно грань нижней шапочки некоторого параллелоэдра соседнего к нему сверху слоя (мы будем называть его первым).

494. Показать, что в силу результата предыдущей задачи проекции шапочек параллелоэдров слоя получаются, если в одной плоскости начертить разбиение ее на одинаковые шестиугольники с центрами и такое же параллельное этому, но смещенное разбиение, или если начертить два одинаковых и параллельных, но смещенных друг по отношению к другу параллелограмматических разбиений.

495. Показать, что топологически различных параллелоэдров может существовать только пять.

496. Показать, что если выпуклый многогранник, все грани которого имеют центры симметрии, имеет один из найденных пяти топологических типов, то он — параллелоэдр (принять во внимание результат задачи 476).

Задачи на прямолинейные преобразования плоскости и перспективу

Преобразованием плоскости P в себя мы называем перемещение всех точек этой плоскости в ней самой. Примерами являются: передвижение всей плоскости как целого по себе самой, равномерное растяжение плоскости во все стороны от некоторой ее точки (так называемая гомотетия), равномерное растяжение плоскости от прямой, при котором все круги плоскости превращаются в эллипсы. Особенно важно (например, при съемке плана самолетом, при которой вследствие качки самолета фотоаппарат в момент съемки, вообще говоря, стоит косо) так называемое перспективное преобразование или коническая проекция, при которой параллельные прямые превращаются в сходящиеся.

497. Показать, что преобразование плоскости, при котором прямые остаются прямыми и сохраняются углы, есть преобразование подобия.

498. Показать, что две подобные фигуры всегда могут быть повернуты так, чтобы быть гомотетичными, т. е. такими, что

одна получается из другой путем равномерного ее растяжения от некоторой точки плоскости, называемой центром гомотетии или центром подобия этих фигур.

499. Показать, что при гомотегии плоскости все фигуры, на ней нарисованные, увеличиваются одинаково — как те, которые расположены близко к центру гомотетии, так и те, которые от него далеко, — т. е. что преобразование самих фигур не зависит от положения центра гомотетии, а только от коэффициента гомотетии.

500. Показать, что так называемое афинное преобразование плоскости, т. е. такое, при котором прямые остаются прямыми и параллельные параллельными, сводится к двум равномерным сжатиям или растяжениям от двух взаимно перпендикулярных прямых, так называемых осей преобразования, плюс, может быть, движение всей плоскости как целого и плюс, может быть, отражение ее в прямой.

501. Показать, что при равномерном растяжении или сжатии плоскости к прямой все фигуры искажаются одинаково, независимо от того, лежат ли они далеко от оси сжатия или нет, и что их искажение зависит только от направления оси сжатия и от коэффициента сжатия.

502. Показать, что самое общее афинное преобразование вполне определяется тем, куда при нем перешли заданные три точки, не лежащие на одной прямой.

503. Показать, что путем перспективной проекции любой выпуклый четырехугольник может быть превращен в квадрат. (Перспективной проекцией называется проекция из точки лучами одной плоскости на другую, вообще говоря, ей не параллельную.)

504. Показать, что самая произвольная коллинеация, т. е. такое преобразование плоскости, при котором только известно, что прямые переходят в прямые, вполне определяется тем, куда перешли заданные четыре точки, по три не лежащие на одной прямой.

505. Показать, что самая общая коллинеация может быть получена перспективой.

З а м е ч а н и е. Эти две последние задачи — 504 и 505 — имеют фундаментальное значение в теории аэрофотосъемки.

506. Показать, что по трем точкам на местности и трем углам между прямыми, проведенными к этим точкам с самолета, можно определить положение самолета относительно местности с точностью до одной из четырех возможностей.

РЕШЕНИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Отрезки и углы

1. Дано $AB=a$, $CD=b$, $CB=c$ (рис. 1). Требуется определить AD . Из чертежа находим:

$$AD=AB+BD=AB+(CD-CB)=AB+CD-CB=\\ =a+b-c.$$

2. Точки A , B могут лежать по одну сторону или по раз-

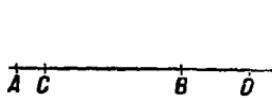


Рис. 1.

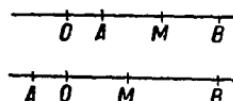


Рис. 2.

ные стороны от точки O (рис. 2). Если $a < b$, то в первом случае:

$$AB=OB-OA=b-a, \\ OM=OB-MB=b-\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}(b+a),$$

а во втором случае:

$$AB=OB+OA=b+a, \\ OM=OB-MB=b-\frac{1}{2}(b+a)=\frac{1}{2}(b+a).$$

Если $a > b$, то в полученных формулах нужно переставить a и b . Если $a=b$, то полученные формулы остаются верными, если считать отрезки с совпадающими концами равными нулю.

3. Из рис. 3 видно, что искомый угол равен $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$,

или $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Если углы MON , NOP смежные, то $\alpha + \beta = 2d$,

и, следовательно, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = d$. Таким образом, биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

4. Из рис. 4 видно, что искомый угол равен $\frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma$, если рассматривать и углы, большие $2d$.

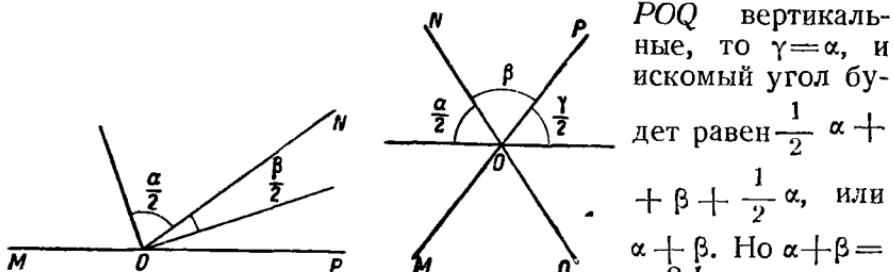


Рис. 3.

Рис. 4.

Если углы MON , POQ вертикальные, то $\gamma = \alpha$, и искомый угол будет равен $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha$, или $\alpha + \beta$. Но $\alpha + \beta = 2d$, так как углы MON , NOP в этом случае смежные. Следовательно, биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друга друга.

Соотношения между сторонами и углами треугольников

5. Допустим, что треугольник ABC разрезан на равные треугольники ABD , ADC (рис. 5). Тогда угол ADB треугольника ABD должен быть равен одному из углов треугольника ADC . Но он не может быть равен углам DAC , ACD , так как внешний угол треугольника всегда больше внутренних, с ним не смежных. Поэтому он должен быть равен смежному углу ADC . Но тогда противолежащие стороны AB , AC были бы равны, что противоречит условию, в котором треугольник ABC предположен разносторонним. Отсюда следует, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

6. Тремя способами, а именно высотами, проведенными из каждой вершины.

7. $\angle BMC > \angle BDC$, как внешний по отношению к треугольнику MDC , а $\angle BDC > \angle BAC$, как внешний по отношению к треугольнику BAD (рис. 6). Следовательно, $\angle BMC > \angle BAC$.

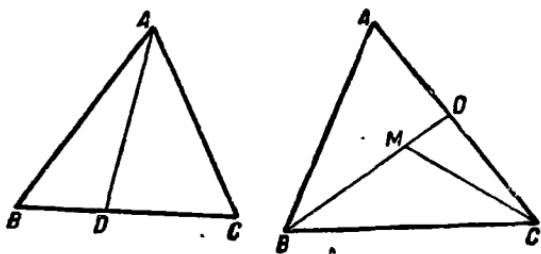


Рис. 5.

Рис. 6.

8. В треугольниках AMB , AMC (рис. 7) стороны AM , MB соответственно равны сторонам AM , MC , но сторона AB больше стороны AC . Следовательно, угол AMB больше угла AMC . Чтобы сравнить углы BAM , CAM , продолжим медиану AM на отрезок MD , равный AM , и соединим точки C , D , как это делается при доказательстве теоремы о внешнем угле треугольника. Треугольники AMB , DMC будут равны, причем $AB=DC$ и $\angle BAM=\angle CDM$. Таким образом, условие $AB>AC$ заменится условием $DC>AC$, и вместо углов BAM , CAM нужно будет сравнить углы CDM , CAM . В треугольнике ACD против большей из сторон DC , AC лежит больший из углов CDM , CAM . Следовательно, угол CAM больше угла CDM . Мы видим, таким образом, что из двух углов AMB , AMC больше тот, который обращен к большей из боковых сторон, а из двух углов BAM , CAM больше тот, который прилежит к меньшей из боковых сторон треугольника.

9. Отложим на стороне AB отрезок AE , равный AC , и соединим точки D , E (рис. 8). Треугольник ADE будет равен

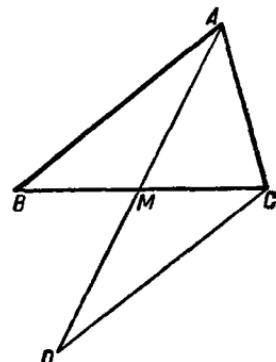


Рис. 7.

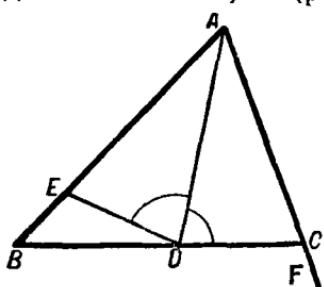


Рис. 8.

треугольнику ADC , причем $\angle ADE=\angle ADC$ и $ED=CD$. Мы можем поэтому сравнивать вместо углов ADB , ADC углы ADB , ADE и вместо отрезков BD , CD отрезки BD , ED . Так как по условию $AB>AC$, то точка E лежит между точками A , B , и угол ADE есть часть угла ADB ; следовательно, $\angle ADB>\angle ADE$. Чтобы сравнить отрезки BD , ED , нужно сравнить противолежащие углы BED , EBD треугольника BDE . Но угол BED равен внешнему углу BCF треугольника

ABC , так как эти углы смежны с равными углами треугольников ADE , ADC , а угол BCF больше внутреннего не смежного с ним угла EBD треугольника ABC . Следовательно, угол BED больше угла EBD , и вместе с тем $BD>ED$. Итак, и из двух углов ADB , ADC и из двух отрезков BD , CD больше тот, который обращен к большей из боковых сторон.

10. Если углы при основании оба острые, то H лежит на основании; если один из углов при основании тупой, то H лежит на продолжении основания за вершину этого угла;

если один из углов при основании прямой, то H совпадает с вершиной этого угла. Докажем первое утверждение (рис. 9). Если бы H лежало на продолжении основания, например за вершину C , то по теореме о внешнем угле для треугольника ACH острый угол ACB был бы больше прямого угла AHC , что невозможно. Если бы H совпадало с одним из концов



Рис. 9.

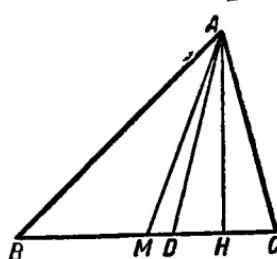


Рис. 10.

основания, например, с вершиной C , то острый угол ACB был бы равен прямому углу AHB , что также невозможно. Остается принять, что H лежит на самом основании. Доказательство двух остальных утверждений предоставляем читателю.

11. Пусть $AB > AC$ (рис. 10). На основании решения 9 имеем $BD > DC$. Следовательно, BD больше половины BC , и точка D дальше от точки B , чем точка M . На основании того же решения 9 имеем $\angle ADB > \angle ADC$. Следовательно, угол ADB тупой, и, согласно решению 10, точка H лежит на продолжении основания BD треугольника ABD за точку D . Таким образом точка D лежит между точками M и H , что и требовалось доказать. Полученную теорему выражают иногда так: биссектриса лежит между медианой и высотой.

Сравнительная длина объемлемых и объемлющих

12. Требуется доказать (рис. 11):

$$AB + BC - AC < 2BD.$$

Имеем:

$$AB < AD + BD, \quad BC < DC + BD.$$

Складывая почленно, находим:

$$AB + BC < AC.$$

Вычитая по AC , получаем:

$$AB + BC - AC < 2BD.$$

13. Вершины A, B, C, D наружного многоугольника (рис. 12) соединены с точками A_1, B_1, C_1, D_1 контура внутреннего, так что этот контур разбит ими на ломаные части $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$. Если обозначим периметры наружного и внутреннего многоугольника соответственно через P, P_1 , то требуется доказать:

$$P - P_1 < 2(AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1).$$

Имеем:

$$AB < AA_1 + A_1B_1 + BB_1,$$

$$BC < BB_1 + B_1C_1 + CC_1,$$

$$CD < CC_1 + C_1D_1 + DD_1,$$

$$DA < DD_1 + D_1A_1 + AA_1.$$

Складывая почленно, получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + DA &< 2AA_1 + 2BB_1 + 2CC_1 + 2DD_1 + \\ &\quad + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1, \end{aligned}$$

или

$$P < 2(AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1) + P_1.$$

Вычитая по P_1 , получаем:

$$P - P_1 < 2(AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1).$$

14. Пусть будет $ABC \dots KL$ данный многоугольник и M данная точка. Имеем вообще:

$$\begin{aligned} MA + MB &> AB, \quad MB + MC > BC, \dots, \quad MK + ML > KL, \\ ML + MA &> LA. \end{aligned}$$

Если точка M лежит на одной из сторон, то одно из этих неравенств обратится в равенство. Если точка M совпадает с одной из вершин, то-есть принадлежит двум сторонам, то два неравенства обратятся в равенство. Но так как число всех неравенств равно числу сторон многоугольника и, следовательно, не менее трех, то при всяком положении точки M некоторые из них останутся неравенствами. Поэтому, сложив

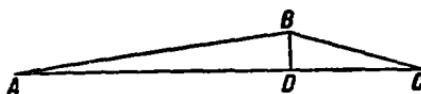


Рис. 11.

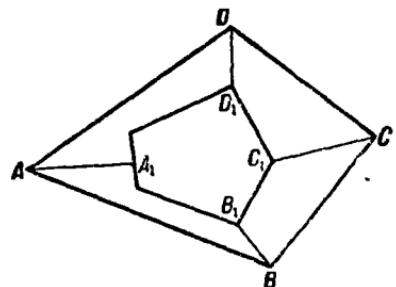


Рис. 12.

их почленно, мы всегда получим неравенство, а именно:

$$2MA + 2MB + 2MC + \dots + 2MK + 2ML > AB + BC + \dots + KL + LA.$$

Деля почленно пополам, получим:

$$MA + MB + \dots + MK + ML > \frac{1}{2}(AB + BC + \dots + KL + LA),$$

что и требовалось доказать.

15. Требуется доказать (рис. 13), что

$$\frac{1}{2}(AB + AC) - \frac{1}{2}BC < AM < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Первое неравенство вытекает из теоремы 12, согласно которой

$$AB + AC - BC < 2AM,$$

откуда делением пополам и получаем:

$$\frac{1}{2}(AB + AC) - \frac{1}{2}BC < AM.$$

Чтобы получить второе неравенство, удваиваем медиану как в решении 8. Имеем:

$$AD < DC + AC,$$

или

$$2AM < AB + AC,$$

Рис. 13.

откуда делением пополам получаем $AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$.

16. Обозначим стороны треугольника через a, b, c , а соответственные медианы через m_a, m_b, m_c . По теореме 15 имеем:

$$\frac{1}{2}(b + c) - \frac{1}{2}a < m_a < \frac{1}{2}(b + c),$$

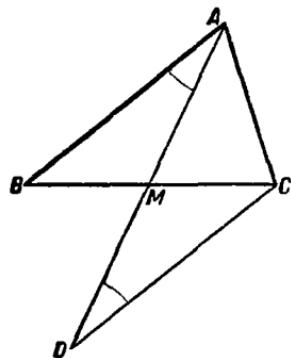
$$\frac{1}{2}(c + a) - \frac{1}{2}b < m_b < \frac{1}{2}(c + a),$$

$$\frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}c < m_c < \frac{1}{2}(a + b).$$

Складывая почленно, получаем:

$$\frac{1}{2}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Итак, сумма медиан треугольника заключается между полу-периметром и периметром его.



17. Искомая точка есть точка пересечения диагоналей. В самом деле: для точки, не лежащей ни на одной из диагоналей, сумма расстояний от двух противоположных вершин больше соединяющей их диагонали, и следовательно, сумма расстояний от всех вершин больше суммы диагоналей; для точки, лежащей на одной из диагоналей, сумма расстояний от концов этой диагонали равна этой диагонали, но сумма расстояний от концов другой диагонали больше этой диагонали, и следовательно, сумма расстояний от всех вершин все-таки больше суммы диагоналей; только для точки, лежащей на обеих диагоналях, то-есть для точки пересечения их, сумма расстояний от всех вершин равна сумме диагоналей. Таким образом, для этой точки сумма расстояний от всех вершин действительно наименьшая, и притом только для нее одной.

Перпендикуляры и наклонные

18. Примем сторону треугольника, ограничивающую наш отрезок, за основание и проведем соответствующую высоту. Если углы при основании оба острые, то высота лежит внутри треугольника; наш отрезок или совпадает с высотой и тогда наверное меньше обеих боковых сторон, или лежит между высотой и одной из боковых сторон и тогда наверное меньше этой стороны; во всяком случае, он меньше наибольшей из боковых сторон. Если один из углов при основании тупой, то наибольшая из боковых сторон лежит в этом угле, а высота в смежном угле; наш отрезок лежит между ними и, следовательно, меньше, чем наибольшая из боковых сторон. Случай прямого угла при основании предоставляем рассмотреть читателю.

19. Пусть будет ABC данный треугольник (рис. 14) и DE данный отрезок. Проведем отрезок AD и применим к треугольнику ABD теорему 18. Найдем, что отрезок DE меньше наибольшего из отрезков AD, BD . Но по той же теореме отрезок AD меньше наибольшей из сторон AB, AC , а отрезок BD меньше стороны BC , как часть ее. Следовательно, отрезок DE меньше наибольшей из сторон AB, AC, BC .

20. Продолжив отрезок, заключенный весь внутри треугольника, в обе стороны до пересечения с контуром, получим отрезок, заключенный между вершиной и противолежащей стороной или между двумя сторонами треугольника. По теоремам 18 и 19 такой отрезок меньше наибольшей из сторон треугольника. Тем более это справедливо относительно части такого отрезка.

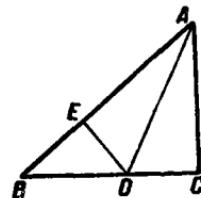


Рис. 14.

21. Так как угол C треугольника ABC (рис. 15) тупой или прямой, то весь треугольник лежит по одну сторону от высоты AH . Поэтому

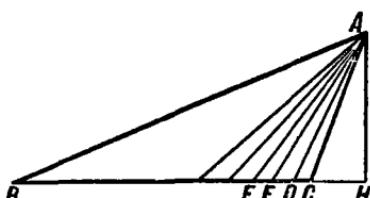


Рис. 15.

$$HC < HD < HE < HF < \dots < HB,$$

и, следовательно,

$$AC < AD < AE < AF < \dots < AB.$$

В треугольнике ACE линия AD есть биссектриса; согласно решению 9 имеем $CD < DE$. Точно так же в треугольнике ADF линия AE есть биссектриса, откуда заключаем $DE < EF$.

Продолжая таким образом, получаем:

$$CD < DE < EF < \dots,$$

что и требовалось доказать.

22. Доказательство этой теоремы предоставляем читателю. Оно вполне сходно с предыдущим, с той только разницей, что приходится применить решение 8.

Параллельные линии

23. Угол DAE равен углу B как соответственный, а угол DAC равен углу C как внутренне накрестлежащий (рис. 16). Так как углы B, C равны как углы при основании равнобедренного треугольника, то и углы DAE, DAC равны, что и требовалось доказать.

24. Угол EBD равен углу DBC , так как BD есть биссектриса угла B треугольника ABC (рис. 17). Углы DBC, EDB равны как внутренне накрестлежащие при параллельных BC, EF . Следовательно, углы EBD, EDB равны, и треугольник BDE равнобедренный, с основанием BD . Так же найдем, что треугольник CDF равнобедренный, с основанием CD . Таким образом:

$$ED = BE, DF = CF.$$

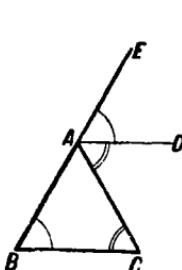


Рис. 16.

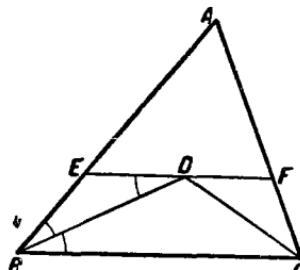


Рис. 17.

Складывая почленно, найдем: $EF = BE + CF$, что и требовалось доказать.

25. Пусть BD биссектриса внутреннего угла при вершине B и CD биссектриса внешнего угла при вершине C (рис. 18). Проведя DFE параллельно BC и применив совершенно те же рассуждения, что и в предыдущем решении, убедимся, как и тогда, что треугольники BDE , CDF равнобедренные, с основаниями соответственно BD , CD . Отсюда попрежнему:

$$ED = BE, \quad DF = CF.$$

Вычитая почленно, получим:

$$EF = BE - CF.$$

Таким образом получаем: часть прямой, проведенной параллельно основанию через точку пересечения биссектрис одного внутреннего и одного внешнего угла при концах основания треугольника, заключенная между боковыми сторонами, равна разности отрезков боковых сторон между этой прямой и основанием. Случай двух внешних биссектрис предлагаем рассмотреть читателю.

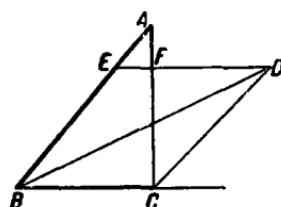


Рис. 18.

Сумма углов треугольника

$$26. \frac{2}{3}d.$$

27. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB вдвое больше катета AC (рис. 19). Приложив к треугольнику ABC равный треугольник BDC , получим равносторонний треугольник ABD . Отсюда ясно, что в треугольнике ABC острые углы A , B равны соответственно $\frac{2}{3}d$ и $\frac{1}{3}d$.

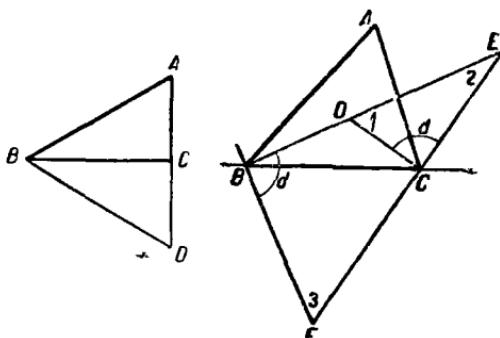


Рис. 19.

Рис. 20.

28. В треугольнике ABC прямые BDE , CD суть биссектрисы внутренних углов при вершинах B , C , а прямые BF , FCE — биссектрисы внешних углов при тех же вершинах. Условимся обозначать углы треугольника ABC просто через A , B , C и обозначим углы между биссектрисами через 1 , 2 , 3 , как показано на рис. 20. Заметим предварительно, что углы DCE , DBF прямые, так как биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны. В треугольнике BDC внешний

угол при вершине D равен сумме внутренних при вершинах B, C , которые в свою очередь равны половинам углов B, C треугольника ABC :

$$\angle 1 = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C.$$

Так как сумма всех углов треугольника равна $2d$, то сумма их половин равна d , и мы можем написать:

$$\angle 1 = d - \frac{1}{2}A.$$

Так как треугольник DCE прямоугольный, то сумма его острых углов равна d ; отсюда

$$\angle 2 = d - \angle 1 = \frac{1}{2}A.$$

Так как треугольник FBF также прямоугольный, то по той же причине

$$\angle 3 = d - \angle 2 = d - \frac{1}{2}A.$$

Углы 1, 2, 3 острые, как и требует условие задачи. Действительно, угол A меньше $2d$ и, следовательно, $\frac{1}{2}A = \angle 2$ меньше d , а потому и $d - \frac{1}{2}A = \angle 1 = \angle 3$ меньше d . Итак, ис-комые выражения суть:

$$\angle 1 = d - \frac{1}{2}A, \quad \angle 2 = \frac{1}{2}A, \quad \angle 3 = d - \frac{1}{2}A.$$

29. На рис. 21 $\angle BDE = \angle AED - \angle DBE = \angle ACD - \angle DBE = C - B$. Мы воспользовались тем, что в треуголь-

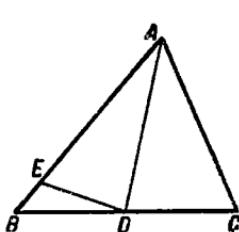


Рис. 21.

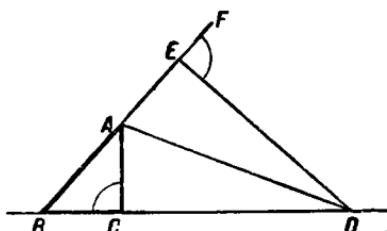


Рис. 22.

нике BDE внешний угол при E равен сумме внутренних при B, D , и равенством треугольников AED, ACD .

30. На рис. 22 $\angle BDE = \angle DEF - \angle EBD = \angle ACB - \angle EBD = C - B$. Мы применили теорему о внешнем угле к треугольнику BDE и воспользовались равенством треугольни-

ков AED , ACD для обнаружения равенства внешних углов при вершинах E , C .

31. Проведем в треугольнике ABC биссектрису AD и высоту AH (рис. 23). Пусть $AB > AC$. Тогда на основании решения 11 точка D лежит между точками B и H . Поэтому мы можем написать:

$$\angle DAH = \angle BAH - \angle BAD.$$

Но из прямоугольного треугольника BAH находим: $\angle BAH = d - B$, а $\angle BAD = \frac{1}{2} A = d - \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} C$. Таким образом

$$\angle DAH = d - B - \left(d - \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} C \right) = \frac{1}{2} (C - B).$$

Представляем читателю проверить полученную формулу при $AB = AC$.

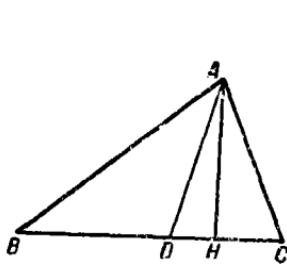


Рис. 23.

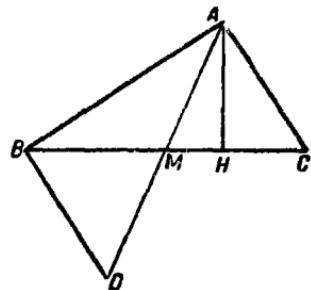


Рис. 24.

32. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 24) проведем из вершины прямого угла A медиану AM и высоту AH . Пусть $AB > AC$. Тогда на основании решения 11 точка M лежит между точками B и H , и мы имеем:

$$\angle MAH = \angle BAH - \angle BAM.$$

Из прямоугольного треугольника BAH находим:

$$\angle BAH = d - B.$$

Чтобы определить угол BAM , удвоим медиану, продолжив ее до точки D , и проведем BD . Вследствие равенства треугольников MAC , MBD прямые AC , BD образуют с секущей AD равные внутренне накрестлежащие углы и, следовательно, параллельны. Так как $AC \perp AB$, то и $BD \perp AB$, и треугольник ABD прямоугольный. Треугольники ABC , ABD имеют общий катет AB и равные катеты AC , BD . Поэтому они равны, и

следовательно, равны и углы ABC , ABM , противолежащие катетам AC , BD . Таким образом:

$$\angle BAM = B.$$

Отсюда получим:

$$\angle MAH = (d - B) - B = d - 2B.$$

Для применения к следующий задаче удобнее заменить $d - B$ через C . Тогда получим:

$$\angle MAH = C - B.$$

Если $AB = AC$, то треугольник ABC равнобедренный и медиана совпадает с биссектрисой, так что $\angle MAH$ обращается в нуль. Это подтверждает формулу, так как в этом случае $B = C$.

33. На основании решения 11 биссектриса лежит между медианой и высотой. На основании решений 31 и 32 биссектриса образует с высотой вдвое меньший угол, чем медиана. Следовательно, биссектриса делит пополам угол между медианой и высотой.

34. Каждые две биссектрисы образуют при пересечении две пары вертикальных углов. Вертикальные углы между

биссектрисами двух соседних углов четырехугольника, в которых не лежит сторона, соединяющая вершины этих углов, равны полусумме их. Вертикальные углы между биссектрисами двух противоположных углов четырехугольника, в которых не лежит диагональ, соединяющая вершины этих углов, равны

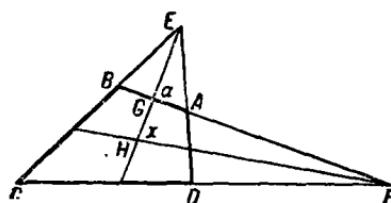


Рис. 25.

полуразности двух других углов. Вертикальные углы между биссектрисами углов, образуемых парами противоположных сторон четырехугольника, продолженных до пересечения, равны полусуммам тех углов четырехугольника, вершины которых лежат внутри этих вертикальных углов.

Докажем для примера последнюю из трех теорем, как более сложную. Обозначим углы четырехугольника через A, B, C, D , углы между парами противоположных сторон, продолженных до пересечения, через E, F , углы между их биссектрисами EH, FH , в которых лежат вершины A, C , через x , вспомогательный угол EGF через α . Из треугольника FGH (рис. 25) находим:

$$x = \alpha - \frac{1}{2} F.$$

Из треугольника AEG находим:

$$\alpha = A - \frac{1}{2}E.$$

Подставляя, получаем:

$$x = A - \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}F.$$

Остается определить углы E , F . Из треугольников CDE , BCF находим соответственно:

$$E = 2d - C - D, \quad F = 2d - B - C.$$

Подставляя, получаем:

$$x = A + C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D - 2d.$$

Так как сумма всех углов четырехугольника равна $4d$, то сумма их половин равна $2d$. Поэтому:

$$\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = 2d - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C.$$

Подставляя, получаем:

$$x = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C,$$

или

$$x = \frac{1}{2}(A + C).$$

Полученная формула доказывает высказанное утверждение для пары углов между биссектрисами, в которых лежат вершины A , C . Углы оставшейся пары равны:

$$2d - x = 2d - \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D),$$

что также согласно с этим утверждением. Тем самым оно вполне доказано.

Параллелограммы и трапеции

35. Отрезки AB , DE (рис. 26) можно рассматривать как противоположные стороны параллелограмма. Так как диагонали всякого параллелограмма взаимно делятся пополам, то BE проходит через середину AD . Точно так же убедимся, что и CF проходит через середину AD . Таким образом, AD , BE ,

CF проходят через одну и ту же точку, что и доказывает теорему.

36. Пусть P, Q, R, S середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ (рис. 27). Отрезки PQ, RS , как средние линии треугольников ABC, ADC , параллельны их общему

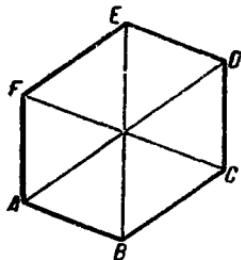


Рис. 26.

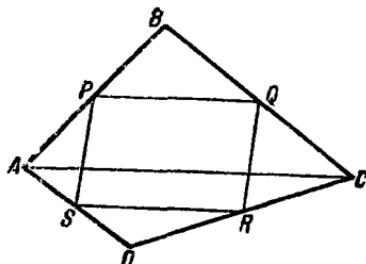


Рис. 27.

основанию AC и равны половине его. Следовательно, они равны и параллельны между собой. Таким образом, в четырехугольнике $PQRS$ противоположные стороны PQ, RS равны и

параллельны. Следовательно, четырехугольник $PQRS$ есть параллелограмм.

37. Пусть будут U, T середины диагоналей AC, BD и S, Q середины сторон AD, BC четырехугольника $ABCD$. Отрезки UQ, ST равны и параллельны, как средние линии треугольников ABC, ABD с общим основанием AB . Следовательно, точки S, T, Q, U суть вершины параллелограмма, если только они не лежат все на одной прямой. Но отрезки ST, SU , как средние линии треугольников ABD, ADC , параллельны их основаниям AB, DC ,

которые по условию непараллельны между собой. Следовательно, прямые ST, SU не совпадают, и точки $STQU$ суть действительно вершины параллелограмма (рис. 28).

38. Из теоремы 37 вытекает, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, в котором противоположные стороны непараллельны, делят пополам отрезок, соединяющий середины диагоналей. Таким образом, все три отрезка пересекаются в середине последнего.

39. По известной теореме, прямая, проведенная через середину боковой стороны треугольника параллельно основанию,

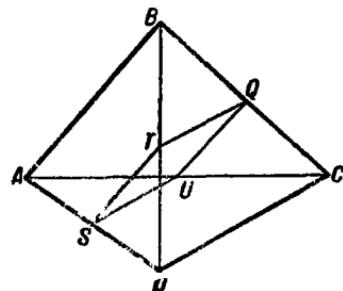


Рис. 28.

проходит через середину другой боковой стороны. Пусть будут E, H середины боковых сторон и F, G середины диагоналей трапеции $ABCD$ (рис. 29). Проведем через E прямую параллельно основаниям AB, CD трапеции. Из треугольника ACD видим, что она пройдет через F , затем из треугольника ABC видим, что она пройдет через H , а после этого из треугольника BCD видим, что она пройдет через G . Таким образом точки E, F, G, H все лежат на этой прямой. Мы имеем здесь случай, исключенный в задаче 37.

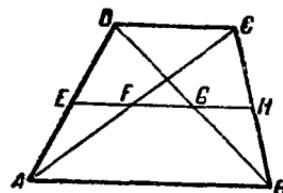


Рис. 29.

40. Пользуясь обозначениями предыдущего решения, имеем по теореме о средней линии для треугольников ABD, ACD :

$$EG = \frac{1}{2}AB, \quad EF = \frac{1}{2}CD.$$

Вычитая почленно, получаем:

$$FG = \frac{1}{2}(AB - CD).$$

Таким образом, отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности ее оснований.

41. Обозначим расстояния концов A, B и середины M данного отрезка от данной прямой через a, b, m (рис. 30). Если точки A, B лежат по одну сторону от данной прямой, то по теореме о средней линии трапеции найдем:

$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

Если же точки A, B лежат по разные стороны от данной прямой, то по теореме 40 найдем:

$$m = \frac{1}{2}(a - b) \text{ или } m = \frac{1}{2}(b - a),$$

смотря по тому, какое расстояние больше, a или b .

42. Обозначим расстояние вершин B, C, D и точки пересечения M диагоналей параллелограмма $ABCD$ от прямой, проходящей через вершину A , соответственно через b, c, d, m . По теореме о средней линии треугольника имеем:

$$m = \frac{1}{2}c.$$

Но то же расстояние можно определить и по теореме 41 для

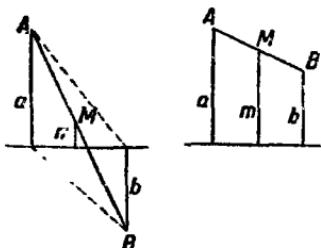


Рис. 30.

отрезка BD . Если данная прямая не пересекает отрезка BD , то

$$m = \frac{1}{2}(b + d).$$

Если же данная прямая пересекает отрезок BD , то, смотря по тому, будет ли она ближе к B или к D , получим:

$$m = \frac{1}{2}(b - d) \text{ или } m = \frac{1}{2}(d - b).$$

Приравнивая выражения для m , полученные двумя способами, получим в зависимости от случая:

$$c = b + d, \text{ или } c = b - d, \text{ или } c = d - b.$$

43. Из точки M на основании BC равнобедренного треугольника ABC опущены перпендикуляры MP , MQ на боковые

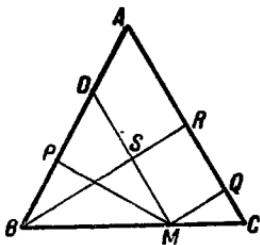


Рис. 31.

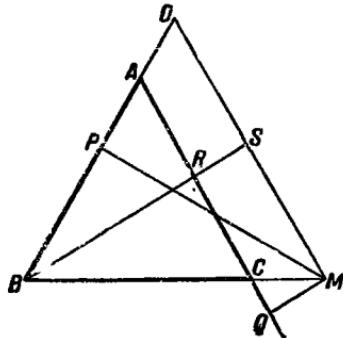


Рис. 32.

стороны, и из вершины B проведена высота BR (рис. 31). Требуется доказать:

$$MP + MQ = BR.$$

Проведя через точку M параллельную MSD к стороне AC , отсечем от BR часть SR , равную MQ (рис. 32). Остается доказать, что оставшаяся часть BS равна MP . Но это ясно из того, что BS и MP суть высоты равнобедренного треугольника DBM , проведенные из концов основания.

Если сделаем то же построение для точки M на продолжении основания, то получим (рис. 32):

$$MP = BS, MQ = SR,$$

и, вычитая почленно, найдем:

$$MP - MQ = BR.$$

44. Из точки M внутри равностороннего треугольника ABC опущены перпендикуляры MP , MQ , MR на стороны, и проведена высота AS (рис. 33). Требуется доказать:

$$MP + MQ + MR = AS.$$

Проведем через точку M прямую DTE , параллельную к стороне BC . В равностороннем треугольнике ADE сумма $MP + MQ$ равна высоте, проведенной из конца стороны DE . Но так как в равностороннем треугольнике все высоты равны, то сумма $MP + MQ$ равна также высоте AT . С другой стороны MR равно TS , как отрезки параллельных между параллельными. Итак,

$$MP + MQ = AT, \quad MR = TS.$$

Складывая почленно, получаем:

$$MP + MQ + MR = AS.$$

Если точка M лежит вне треугольника, то в первой части этого равенства нужно заменить знак $+$ знаком $-$ перед расстояниями точки M от тех сторон, относительно которых точка M и треугольник расположены по разные стороны. Доказательство представляем читателю.

Круг

45. Пусть будет $ABCD$ параллелограмм, вписанный в круг (рис. 34). Так как хорды AB , CD параллельны, то заключенные между ними дуги AD , BC равны. Прибавив к этим дугам

по дуге AMB , получим равные дуги BAD , ABC , откуда следует равенство хорд BD , AC , т. е. диагоналей параллелограмма. Но параллелограмм с равными диагоналями есть прямоугольник. Наоборот, около всякого прямоугольника можно описать круг, так как точка пересечения его диагоналей находится, вследствие равенства диагоналей, на равных расстояниях от вершин. Таким образом, чтобы около параллелограмма можно было описать круг, необходимо

и достаточно, чтобы он был прямоугольником. Если воспользоваться теоремой о сумме противоположных углов вписанного четырехугольника, то полученное условие важно вывести еще проще. Действительно, чтобы параллелограмм $ABCD$ был вписан, необходимо и достаточно, чтобы сумма углов A , C была равна $2d$, то-есть, чтобы каждый из них был равен d , так как они равны.

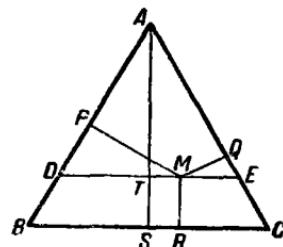


Рис. 33.

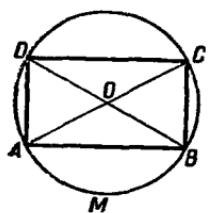


Рис. 34.

46. Пусть будет $ABCD$ трапеция, вписанная в круг (рис. 35). Вследствие параллельности хорд AB, CD , заключенные между ними дуги AD, BC равны, а потому и хорды AD, BC равны. Следовательно, трапеция $ABCD$ равнобочная. Наоборот, если трапеция $ABCD$ равнобочная, то около нее можно описать круг, так как окружность, описанная около треугольника ABC ,

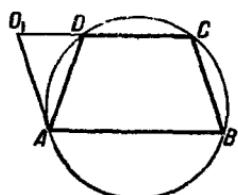


Рис. 35.

пройдет и через точку D . Действительно, эта окружность пересечет прямую CD в точке, расстояние которой от точки A равно BC . Таких точек две, а именно D и D_1 . но через точку D_1 наша окружность не пройдет, так как четырехугольник $ABCD_1$ есть параллелограмм, отличный от прямоугольника, и около него нельзя поэтуому описать круг. Таким образом, чтобы около трапеции можно было описать круг, не-

обходимо и достаточно, чтобы она была равнобочная. То же самое можно вывести из теоремы о вписуемом четырехугольнике. Действительно, условие $A + C = 2d$ равносильно условию $A = B$, так как во всякой трапеции $B + C = 2d$. Но $A = B$ только в равнобочной трапеции.

47. Пусть будет $ABCD$ параллелограмм (рис. 36), описанный около круга. Соединим центр круга O с вершинами параллелограмма. Углы DAB, CBA в сумме составляют $2d$ как внутренние односторонние. Половины этих углов OAB, OBA в сумме составляют d . Поэтому третий угол AOB в треугольнике AOB также равен d . Подобным образом докажем, что все четыре угла вокруг точки O равны d . Отсюда следует, что AOC, BOD суть прямые линии и что эти прямые перпендикулярны. Но параллелограмм с перпендикулярными диагоналями есть ромб. Наоборот, во всякий ромб можно вписать круг, так как точка пересечения его диагоналей, как легко убедиться, равноудалена от его сторон. Таким образом, чтобы в параллелограмм можно было вписать круг, необходимо и достаточно, чтобы он был ромбом. То же можно вывести и из теоремы: для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать круг, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны. Действительно, в случае параллелограмма это условие равносильно условию равенства всех сторон, так как противоположные стороны равны.

48. Хорды, проходящие через данную точку, можно сравнивать по их расстояниям от центра. Дальше всех от цен-

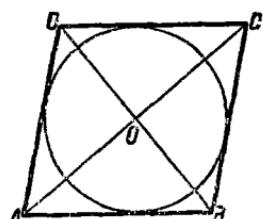


Рис. 36.

тра та из них, которая перпендикулярна к прямой, соединяющей данную точку с центром. Следовательно, эта хорда меньше всех.

49. Наибольшую внутреннюю часть имеет секущая, проходящая через центр круга, потому что только у нее внутренняя часть есть диаметр, а диаметр больше всякой другой хорды.

50. Обозначим радиус данного круга через R и расстояние его центра O от данной точки P через d (рис. 37). Предположим сначала, что P не совпадает с O . Тогда чертеж показывает наглядно, что ближайшая к P точка окружности есть конец A диаметра OP , расположенный с P по одну сторону от O , а самая дальняя есть другой конец B того же диаметра. Чтобы проверить это, нам нужно доказать, что для всякой точки M окружности, кроме A , будем иметь

$$PM > PA,$$

и что для всякой точки M окружности, кроме B , будем иметь:

$$PM < PB.$$

Если P лежит внутри круга, то

$$PA = OA - OP = R - d,$$

$$PM > OM - OP = R - d,$$

и, следовательно,

$$PM > PA.$$

Если P лежит вне круга, то

$$PA = OP - OA = d - R,$$

$$PM > OP - OM = d - R,$$

и, следовательно, также

$$PM > PA.$$

Если P лежит на окружности, то она совпадает с A . В этом случае

$$PA = 0, PM > 0,$$

и, следовательно, нопрежнему

$$PM > PA.$$

Таким образом, неравенство $PM > PE$ доказано во всех слу-

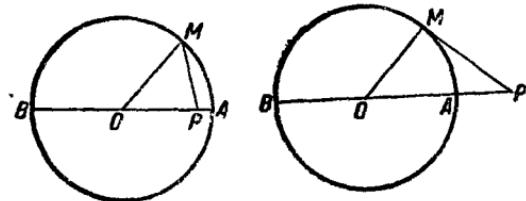


Рис. 37.

чаях. Что касается неравенства $PM < PB$, то его доказательство не требует рассмотрения отдельных случаев. Имеем:

$$\begin{aligned}PB &= OB + OP = R + d, \\PM &< OM + OP = R + d,\end{aligned}$$

откуда находим:

$$PM < PB.$$

Если теперь предположим, что P совпадает с O , то для всех точек M имеем:

$$PM = R.$$

В этом случае расстояние P от всех точек окружности одно и то же и не существует ни наименьшего, ни наибольшего расстояния.

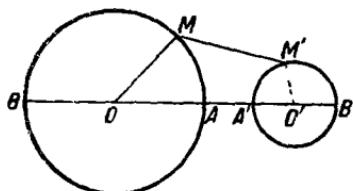


Рис. 38.

51. Обозначим радиусы данных кругов через R , R' и расстояние между их центрами O , O' через d . Предположим сначала, что O , O' не совпадают. Если наши окружности имеют две или одну общую точку, то в каждой общей точке совпадают две точки различных окружностей, расстояние между которыми равно нулю и, следовательно, наименьшее. Если круг O' лежит вне круга O , то, насколько можно судить из рис. 38, наименьшим расстоянием будет

$$AA' = OO' - OA - O'A' = d - R - R'.$$

Нужно поэтому попытаться доказать, что всякое другое расстояние

$$MM' > d - R - R'.$$

При проверке этого неравенства удобнее заменить его равносильным неравенством:

$$MM' + R + R' > d,$$

не содержащим знака вычитания. В этой форме оно легко проверяется. Действительно,

$$OM + MM' + M'O' > OO',$$

то-есть

$$R + MM' + R' > d,$$

что и требовалось получить.

Если круг O' лежит внутри круга O (рис. 39), то наименьшим расстоянием будет:

$$AA' = R - d - R',$$

так что всякое другое расстояние

$$MM' > R - d - R'.$$

Действительно, утверждаемое неравенство равносильно неравенству:

$$MM' + d + R' > R,$$

которое только по форме отличается от очевидного неравенства:

$$MM' + M'O' + O'O > MO.$$

Таким образом, наименьшее расстояние найдено во всех возможных случаях. Чтобы найти наибольшее расстояние, достаточно заметить, что вообще

$$MM' < MO + OO' + O'M' = R + d + R',$$

и только тогда, когда радиусы $OM, O'M$ составляют продолжения линии центров OO' ,

$$\begin{aligned} MM' &= MO + OO' + \\ &+ O'M' = R + d + R'. \end{aligned}$$

Концы этих радиусов и есть самые далекие друг от друга точки кругов O, O' . На рис. 38 это будут точки B, B' , а на рис. 39—точки B, A .

Предположим теперь, что O, O' совпадают (рис. 40).

Для всякой точки M наружной окружности O найдем самую близкую точку M' и самую далекую точку M'' внутренней окружности O' , проведя диаметр $MM'M''$. Наименьшее расстояние будет

$$MM' = OM - OM' = R - R',$$

а наибольшее

$$MM' = OM + OM'' = R + R'.$$

Следовательно, наименьшее расстояние окружностей O, O' будет $R - R'$, а наибольшее $R + R'$. Но в отличие от предыдущих случаев один из концов наибольшего или наименьшего расстояния можно выбрать как угодно на соответствующей окружности.

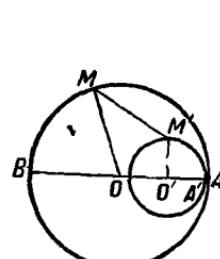


Рис. 39.

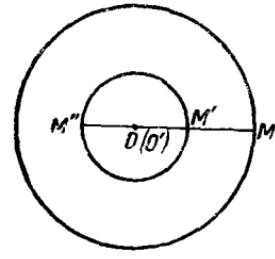


Рис. 40.

52. Если прямая и окружность имеют общие точки, то наименьшее расстояние их есть расстояние между точками, совпадающими в общих точках, и равно нулю. Если же прямая лежит вне окружности, то опустим из центра круга перпендикуляр OAA' на прямую и возьмем на окружности и прямой какие-нибудь две точки M, M' , не совпадающие обе сразу

с точками A, A' (рис. 41). Так как перпендикуляр есть кратчайшее расстояние точки от прямой, то

$$OM + MM' > OA + AA'.$$

Отняв от частей неравенства равные отрезки OM, OA , получим неравенство

$$MM' > AA',$$

Рис. 41.

которое показывает, что наименьшее расстояние есть AA' . Наибольшего же расстояния вовсе не существует, так как на окружности и прямой можно найти сколь угодно далекие друг от друга точки.

53. В первом случае окружности пересекаются, во втором первый круг лежит внутри второго, в третьем они лежат вне друг друга, в четвертом внешне касаются, в пятом внутренне касаются. Для решения такого рода вопросов нужно составить сумму и разность радиусов данных кругов и сравнить с этой суммой и разностью расстояние между центрами. В нашей задаче сумма радиусов равна $4R$, а разность $2R$. В первом случае расстояние между центрами $3R$ меньше суммы радиусов $4R$ и больше их разности $2R$. Следовательно, окружности пересекаются. Во втором случае расстояние между центрами R меньше разности радиусов $2R$. Следовательно, один круг лежит внутри другого и т. д.

54. Приложим к O кругу круги O_1, O_2, O_3, \dots того же радиуса так, чтобы каждый следующий касался предыдущего (рис. 42).

Треугольник OO_1O_2 равносторонний, так как все три его стороны равны удвоенному радиусу наших кругов. Поэтому угол O_1OO_2 равен $\frac{2}{3}d$. По той же причине и угол O_2OO_3 равен $\frac{2}{3}d$ и т. д.

Всего вокруг точки O можно расположить шесть таких углов, так как $4d : \frac{2}{3}d = 6$. Следовательно, и кругов O_1, O_2, O_3, \dots будет шесть, причем круг O_6 коснется круга O_1 , как и требует условие задачи.

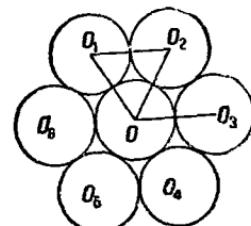
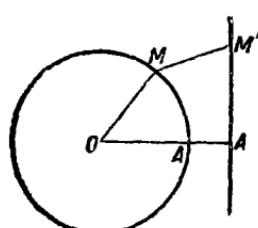


Рис. 42.

55. Отложим от точки A на прямой в ту и другую сторону бесконечный ряд равных отрезков AA_1, A_1A_2, \dots и $AA', A'A'', \dots$ (рис. 43). Затем опишем около центров A, A_1, A_2, \dots и A', A'', \dots круги вдвое меньшего радиуса, чем эти отрезки. Получим бесконечный в обоих направлениях ряд равных кругов $\dots, A'', A', A, A_1, A_2, \dots$, центры которых расположены на одной прямой, и каждый из которых касается двух соседних. Теперь расположим по одну сторону от этой прямой ряд кругов $\dots, B'', B', B, B_1, B_2, \dots$ того же радиуса, каждый из которых касается двух соседних кругов ряда $\dots, A'', A', A, A_1, A_2, \dots$. Докажем, что ряд кругов $\dots, B'', B', B, B_1, B_2, \dots$ имеет те же свойства, что и ряд $\dots, A'', A', A, A_1, A_2, \dots$, то-есть что центры всех его кругов расположены на одной прямой, и каждый круг касается двух соседних.

Треугольники $AA_1B, A_1A_2B_1$ равносторонние, и, следовательно, углы $AA_1B, A_2A_1B_1$ равны $\frac{2}{3}d$. Так как

углы $AA_1B, BA_1B_1, B_1A_1A_2$, расположенные по одну сторону от прямой AA_1A_2 , в сумме составляют $2d$, то угол BA_1B_1 также равен $\frac{2}{3}d$. В треугольнике BA_1B_1 стороны A_1B, A_1B_1 равны удвоенному радиусу наших кругов, а угол между ними BA_1B_1 равен $\frac{2}{3}d$.

Следовательно, этот треугольник равносторонний, и третья его сторона BB_1 также равна удвоенному радиусу наших кругов. Отсюда следует, что круги B, B_1 касаются. Так как наши рассуждения применимы к любой паре соседних кругов ряда $\dots, B'', B', B_1, B_2, \dots$, то, очевидно, каждый круг этого ряда касается двух соседних, как и требовалось. Что точки $\dots, B'', B', B_1, B_2, \dots$ расположены на одной прямой, видно из того, что соседние отрезки ряда $\dots, B''B', B'B, BB_1, B_1B_2, \dots$ составляют продолжение друг друга. Например, отрезки $B'B, BB_1$ составляют продолжение друг друга, потому что углы BBA, ABA_1, A_1BB_1 , равные $\frac{2}{3}d$, как углы равносторон-

них треугольников $B'BA, ABA_1, A_1B_1B$, в сумме равны $2d$. Итак ряд кругов $\dots, B'', B', B, B_1, B_2, \dots$ имеет те же свойства, что и ряд $\dots, A'', A', A, A_1, A_2, \dots$, и можем поэтому приложить к нему еще такой же ряд $\dots, C'', C', C, C_1, C_2, \dots$

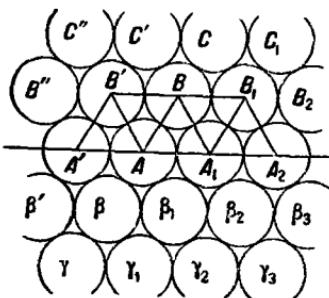


Рис. 43.

и т. д. до бесконечности. Точно так же к ряду кругов $\dots, A'', A', A, A_1, A_2, \dots$ можно приложить такой же ряд $\dots, \beta'', \beta', \beta, \beta_1, \beta_2, \dots$, к нему еще такой же ряд $\dots, \gamma'', \gamma', \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots$, т. д. до бесконечности.

Каждый круг полученной системы касается двух соседних с ним кругов того же ряда и двух пар соседних с ним рядов. Таким образом эта система удовлетворяет всем требованиям задачи.

56. Обозначим углы четырехугольника через A, B, C, D , углы между диагоналями и между противоположными сторонами через α, β, γ , стягиваемые сторонами четырехугольника дуги через x, y, z, u , как

показано на рис. 44. Теми же буквами, что и дуги, будем обозначать соответствующие центральные углы. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x+y) &= \alpha, & \frac{1}{2}(x-y) &= \beta, \\ \frac{1}{2}(z+u) &= 2d - \alpha, & \frac{1}{2}(z-u) &= \gamma. \end{aligned}$$

Решая уравнения, находим:

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta, & y &= \alpha - \beta, \\ z &= 2d - \alpha + \gamma, & u &= 2d - \alpha - \gamma. \end{aligned}$$

После этого получим:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(y+u) = d - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma, \\ B &= \frac{1}{2}(y+z) = d - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma, \\ C &= \frac{1}{2}(x+z) = d + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma, \\ D &= \frac{1}{2}(x+u) = d + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma. \end{aligned}$$

57. Обозначим (рис. 45) углы при основании треугольника через B, C , стягиваемые боковыми сторонами AB, AC дуги и соответствующие центральные углы — через γ, β , искомый угол через x , как показано на рис. 45. Имеем:

$$x = \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{1}{2}(2B - 2C) = B - C.$$

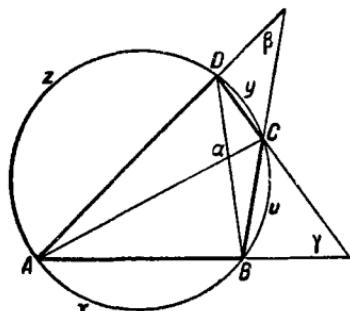


Рис. 44.

58. Обозначим (рис. 46) углы треугольника через A, B, C , стягиваемые его сторонами дуги и соответствующие централь-

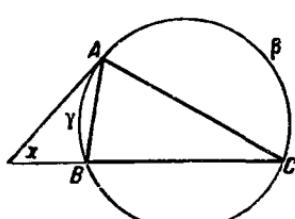


Рис. 45.

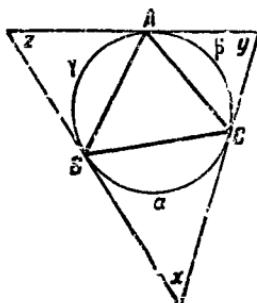


Рис. 46.

ные углы через α, β, γ , искомые углы через x, y, z , как показано на рис. 46. Имеем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = \frac{1}{2}(2B + 2C - 2A) = B + C - A = \\ &= (2d - A) - A = 2d - 2A = 2(d - A). \end{aligned}$$

Так же найдем y и z . Итак:

$$\begin{aligned} x &= 2(d - A), \quad y = 2(d - B), \\ z &= 2(d - C). \end{aligned}$$

59. Рассмотрим случай, когда секущие MAM' , NBN' , не пересекаются внутри кругов O, O' (рис. 47). По свойству вписанных четырехугольников имеем:

$$\begin{aligned} \angle MNB &= 2d - \angle MAB = \angle M'AB, \\ \angle M'N'B &= 2d - \angle M'AB = \angle MAB. \end{aligned}$$

Складывая почленно, получаем:

$$\begin{aligned} \angle MNB + \angle M'N'B &= \\ &= \angle M'AB + \angle MAB = 2d, \end{aligned}$$

откуда следует, что хорды NM , $N'M'$ параллельны. Рассмотрение

случая, когда секущие пересекаются внутри одного из кругов, предоставляем читателю. В случае, когда концы секущих на одном из кругов совпадают, соответствующая хорда обращается в касательную, которая остается параллельной другой хорде.

60. Рассмотрим случай, когда круги O, O' внешне касательны (рис. 48). Углы AMN , CAN измеряются половиной одной и той же дуги AN и, следовательно, равны. Точно также углы $AM'N'$, BAN' измеряются половиной одной и

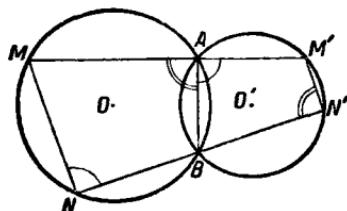


Рис. 47.

той же дуги AN' и потому равны. Но углы CAN , BAN' равны как вертикальные. Следовательно, и углы AMN , $AM'N'$ равны, откуда вытекает параллельность хорд MN , $M'N'$. Случай внутреннего касания кругов предлагаем разобрать читателю. Когда секущие совпадают, обе хорды обращаются в касательные, которые остаются параллельными.

61. Пусть будет $PMNQ$ общая секущая кругов O , O' , внутренне касательных в точке A (рис. 49). Требуется доказать равенства

$$\angle MAP = \angle NAQ, \quad \angle NAP = \angle MAQ.$$

Второе получается из первого прибавлением к обеим частям по $\angle MAN$. Чтобы доказать первое, продолжим AM , AN до

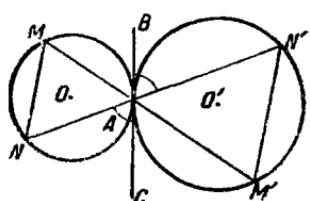


Рис. 48.

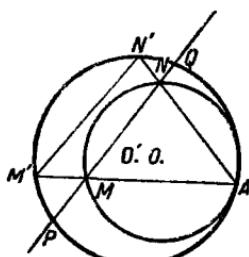


Рис. 49.

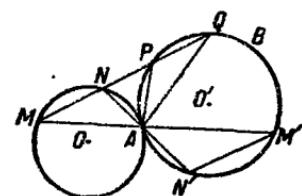


Рис. 50.

пересечения с окружностью O' в точках M' , N' . По теореме 60 хорды MN , $M'N'$ параллельны. Следовательно, заключенные между ними дуги $P'M'$, QN' круга O' равны, а потому равны и опирающиеся на эти дуги вписанные углы MAP , NAQ того же круга, что и требовалось. Если бы хорда PQ круга O' была касательна к кругу O , то точки M , N совпадали бы с точкой касания и мы получили бы следующую теорему: если два круга внутренне касательны и хорда наружного круга касательна к внутреннему, то прямая, соединяющая точку касания кругов с точкой касания хорды к внутреннему кругу, делит пополам угол между прямыми, соединяющими точку касания кругов с концами хорды. Предлагаем читателю доказать эту теорему самостоятельно.

62. Требуется доказать (рис. 50):

$$\angle MAQ + \angle NAP = 2d.$$

Продолжим MA , NA до пересечения с окружностью O' в точках M' , N' . По теореме 60 прямые MN , $M'N'$ параллельны, и, следовательно, дуги PAN' , QBM' равны. Угол QAM' измеряется половиной дуги QBM' , а угол PAN' измеряется половиной дуги PBN' , которая вместе с дугой PAN' , равной дуге

QBM' , составляет полную окружность. Отсюда видно, что углы QAM ; PAN' в сумме измеряются половиной окружности, и следовательно, составляют $2d$. Поэтому и смежные с ним углы MAQ , NAP должны в сумме составлять $2d$, что и требовалось доказать. Если бы общая секущая $MNPQ$ обратилась в общую касательную к кругам O , O' , то точки M , N слились бы с точкой касания к кругу O , а точки P , Q с точкой касания к кругу O' , и мы получили бы теорему: общая касательная двух внешние касательных кругов видна из точки касания их под прямым углом. Предлагаем читателю доказать эту теорему отдельно.

63. Угол BED равен углу BAT как соответственный, а угол BAT измеряется половиной дуги ACB (рис. 51). Угол DCB измеряется половиной дуги AFB . Так как дуги ACB , AFB вместе составляют полную окружность, то измеряемые половинами этих дуг углы BED , DCB в сумме равны $2d$, и следовательно, около четырехугольника $BCDE$ можно описать круг, что и требовалось доказать.

64. В четырехугольнике $ABCD$ (рис. 52) стороны AB , DC продолжены до пересечения в точке F , а стороны AD , BC

продолжены до пересечения в точке E . Окружности, описанные около треугольников BCF , CDE , имеют кроме точки C еще одну общую точку G . В противном случае эти окружности касались бы в точке C , и по теореме 60 прямые BF , DE были бы параллельны, тогда как в действительности они пересекаются в точке A . Нужно доказать, что точка G лежит также и на окружностях, описанных около треугольников ABE , ADF . Доказательство одно и то же для обоих треугольников, и мы приведем его только для треугольника ADF . Чтобы доказать, что точки A , D , F , G лежат на одной окружности, достаточно проверить, что в четырехугольнике $ADGF$ внутренний угол DGF при вершине G равен внешнему углу FAH при противоположной вершине A .

Имеем:

$$\angle DGF = \angle DGC + \angle CGF.$$

Далее имеем:

$$\angle DGC = \angle DEC,$$

так как эти углы вписаны в один и тот же круг и опираются
6 Делоне и Житомирский

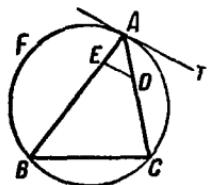


Рис. 51.

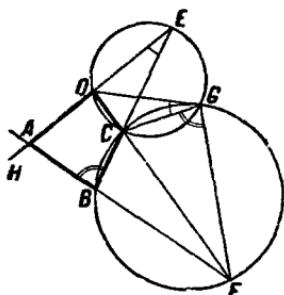


Рис. 52.

на одну и ту же дугу, и

$$\angle CGF = \angle CBA,$$

так как угол CGF внутренний при вершине G , а угол CBA внешний при вершине B вписанного четырехугольника. Отсюда

$$\angle DGF = \angle DEC + \angle CBA,$$

то-есть сумме двух внутренних углов треугольника ABE , не смежных с внешним углом FAH . Так как эта сумма равна углу FAH , то мы получаем

$$\angle DGF = \angle FAH,$$

что и доказывает теорему.

65. Стороны пятиугольника $ABCDE$ (рис. 53) продолжены до образования пятиугольной звезды $KLMNP$, и около треугольных лучей ABN , BCP , CDK , DEL , EAM описаны окружности. Как

и в задаче 64, убедимся, что окружности, описанные около соседних лучей, пересекаются кроме вершины пятиугольника еще в одной точке. Обозначим новые точки пересечения через A' , B' , C' , D' , E' . Требуется доказать, что эти точки лежат на одной окружности. Достаточно доказать, что точки A' , B' , C' , D' лежат на одной окружности и что точки B' , C' , D' , E' лежат на одной окружности, так как из этого будет следовать, что точки A' , E' лежат на окружности, проходящей через точки B' , C' , D' , то есть, что все пять точек лежат на

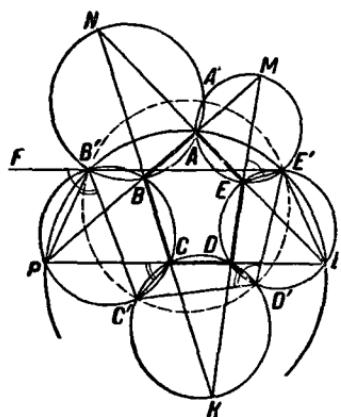


Рис. 53.

этой окружности. Так как для любых четырех точек доказательство одинаково, то мы докажем только, что точки B' , C' , D' , E' лежат на одной окружности. Предварительно докажем, что точки P , B' , A , E' , I лежат на одной окружности. Это вытекает из теоремы 64. Применяя эту теорему к четырехугольнику $ABCL$, находим, что точка B' лежит на окружности, описанной около треугольника PAL , а применяя ее к четырехугольнику $AEDP$, убеждаемся, что и точка E' лежит на окружности, описанной около треугольника PAL . Таким образом точки P , B' , A , E' , I действительно лежат на одной окружности. Переходя к нашей теореме, заметим, что она будет доказана, если мы проверим равенство:

$$\angle C'D'E' = \angle C'B'F,$$

так как это покажет, что четырехугольник B',C',D,E' вписуемый. Представим это равенство в виде

$$\angle C'D'D + \angle DD'E' = \angle C'B'P + \angle PB'F$$

и докажем, что первые и вторые слагаемые равны в отдельности.

Действительно:

$$\angle C'D'D = \angle C'CP$$

по свойству вписанного четырехугольника $C'D'DC$;

$$\angle C'CP = \angle C'B'P,$$

так как эти углы вписаны в один и тот же круг и опираются на одну и ту же дугу; следовательно,

$$\angle C'D'D = \angle C'B'P,$$

как и требовалось. Далее:

$$\angle DD'E' = \angle DLE',$$

так как эти углы вписаны в один и тот же круг и опираются на одну и ту же дугу;

$$\angle DLE' = \angle PB'F$$

по свойству вписанного четырехугольника $PB'E'L$; следовательно,

$$\angle DD'E' = \angle PB'F,$$

что заканчивает доказательство.

66. Требуется доказать (рис. 54), что

$$AM = BM + CM.$$

Для доказательства нужно разбить отрезок AM на части, равные в отдельности отрезкам BM и CM . Если отложим на отрезке AM отрезок AP , равный отрезку BM , то останется доказать, что отрезок PM равен отрезку CM . В треугольниках CAP , CBM имеем $CA = CB$, $AP = BM$ и $\angle CAP = \angle CBM$, так как эти углы вписанные и опираются на одну и ту же дугу CM . Следовательно, треугольники CAP , CBM равны и $CP = CM$. Таким образом треугольник CPM равнобедренный с основанием PM . Но угол при основании PMC вписанный и опирается на дугу AC , равную трети полной окружности. Следовательно, угол PMC равен $\frac{2}{3}d$, откуда легко вывести, что и остальные углы треуголь-

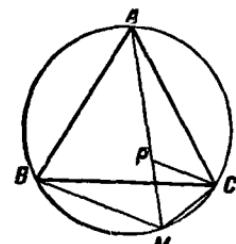


Рис. 54.

ника PMC равны $\frac{2}{3}d$, так что он оказывается равносторонним.

Отсюда находим:

$$PM = CM,$$

что только и осталось доказать.

Замечательные точки и линии в треугольнике

67. Центр описанного круга ближе всего к наибольшей стороне, потому что хорда круга тем ближе к центру, чем она больше.

68. Центр описанного круга может лежать или внутри треугольника, или внутри одного из трех сегментов, прилегающих к сторонам треугольника, или на одной из трех сторон треугольника. В первом случае сегменты не содержат центра внутри себя. Поэтому дуги их меньше полуокружности, и углы треугольника острые. Во втором случае дуга сегмента, содержащего центр, больше полуокружности, и опирающийся на нее угол треугольника тупой. В третьем случае дуга сегмента, прилегающего к стороне, содержащей центр, есть полуокружность, и опирающийся на нее угол треугольника прямой. Эти три случая исчерпывают все возможности и исключают друг друга. Поэтому необходимое и достаточное условие, чтобы центр описанного круга находился внутри, вне или на границе треугольника, состоит в том, чтобы треугольник был соответственно остроугольный, тупоугольный или прямоугольный.

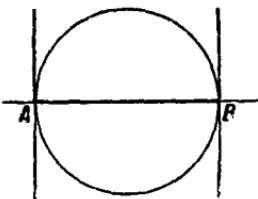


Рис. 55.

69. Пусть будет AB (рис. 55) заданное основание. Тогда вершины остроугольных треугольников лежат внутри полосы, ограниченной прямыми, перпендикулярными к прямой AB в точках A, B , но вне круга, построенного на отрезке AB как на диаметре. Вершины тупоугольных треугольников лежат по обе стороны от полосы и внутри круга, но не на прямой AB .

Вершины прямоугольных треугольников лежат на краях полосы и на окружности круга, но не в точках A, B . На прямой AB вообще не лежат вершины треугольников с основанием AB .

70. Пусть будет AH высота и O центр описанного круга треугольника ABC (рис. 56). Проведем радиус OA , опустим из O перпендикуляр OP на сторону AB и продолжим его до пересечения M с окружностью. Требуется доказать:

$$\angle OAB = \angle CAH.$$

Так как треугольники OAP , CAH прямоугольные, то вместо этого можно доказать:

$$\angle AOP = \angle ACH.$$

Предположим сначала, что угол C треугольника ABC острый. Тогда угол ACH совпадает с углом C и измеряется половиной дуги сегмента, прилегающего к стороне AB . С другой стороны в этом случае центр O лежит вне того же сегмента. Поэтому продолжение перпендикуляра OP делит пополам дугу именно этого сегмента, и угол AOP также измеряется половиной его дуги. Следовательно, углы ACH , AOP равны, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что угол C треугольника ABC тупой. Тогда угол ACH смежный с углом C и измеряется половиной дуги ACB , дополняющей дугу сегмента, прилегающего к стороне AB , до полной окружности. С другой стороны в этом случае центр O лежит внутри того же сегмента. Поэтому продолжение перпендикуляра OP делит пополам дугу ACB дополнительного сегмента, и угол AOP измеряется половиной этой дуги. Следовательно, в этом случае углы ACH , AOP равны. Остается только случай, когда угол C прямой. Но в

этом случае высота AH совпадает со стороной AC , а радиус AO идет по стороне AB , так что углы ACH , OAB оба равны нулю, и следовательно, равны между собой, как и требует теорема.

71. Треугольник ABC разбит прямой AD на треугольники ABD , ACD (рис. 57). Центр описанного круга O треугольника ABC есть точка пересечения перпендикуляров

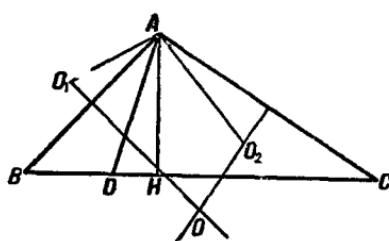


Рис. 57.

в срединах сторон AB , AC ; центр описанного круга O_1 треугольника ABD лежит на первом перпендикуляре, центр описанного круга O_2 треугольника ACD лежит на втором перпендикуляре. Нужно доказать, что четырехугольник AO_1OO_2 вписуемый. Так как угол O_1OO_2 , очевидно, дополняет угол BAC до $2d$, то остается доказать, что противоположный угол равен углу BAC . Предположим, что прямая AD наклонна к основанию AC и что через ADB обозначен тупой угол, а

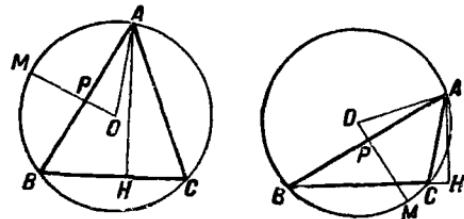


Рис. 56.

через ADC острый. Тогда из рассуждений решения 70 видно, что центр O_1 лежит вне треугольника ABC , а центр O_2 внутри треугольника ABC . Поэтому:

$$\angle O_1AO_2 = \angle BAC + \angle BAO_1 - \angle CAO_2.$$

Но по теореме 70 для треугольников ABD, ACD

$$\angle BAO_1 = \angle DAH, \quad \angle CAO_2 = \angle DAH.$$

Следовательно, углы BAO_1, CAO_2 равны, и

$$\angle O_1AO_2 = \angle BAC,$$

что и оставалось доказать. Если теперь предположим, что прямая AD перпендикулярна к основанию BC , то доказательство только упрощается. В этом случае O_1 лежит на AB , и O_2 лежит на AC , так что мы сразу получаем:

$$\angle O_1AO_2 = \angle BAC.$$

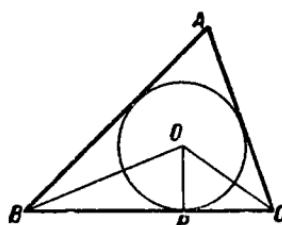


Рис. 58.

72. Пусть $AC < AB$ (рис. 58). Тогда $\angle ABC < \angle ACB$. Так как $\angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC$ и $\angle OCB = \frac{1}{2} \angle ACB$, то и $\angle OBC < \angle OCB$. Поэтому в треугольнике

OBC имеем $OC < OB$. Таким образом из двух вершин треугольника центр вписанного круга ближе к той, которая лежит против большей стороны. Следовательно, из всех вершин треугольника центр описанного круга ближе всего к той, которая лежит против наибольшей стороны, то есть к вершине наибольшего угла.

73. Не приводим доказательства, так как его можно найти в курсах элементарной геометрии.

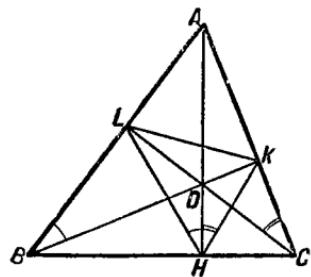
74. Это доказательство обычно приводится в курсах элементарной геометрии.

75. Пусть будут AH, BK, CL высоты треугольника ABC (рис. 59). Окружность, описанная на AB как на диаметре, пройдет через H и K , так как углы AHB, AKB прямые. Поэтому углы AHK, ABK равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Таким же образом из рассмотрения окружности, описанной на AC как на диаметре, найдем, что равны углы AHL, ACL . Итак:

$$\angle AHK = \angle ABK, \quad \angle AHL = \angle ACL.$$

Но из прямоугольных треугольников ABK, ACL находим:

$$\angle ABK = \angle ACL = d - \angle BAC.$$



Фиг. 59.

Следовательно,

$$\angle AHK = \angle AHL,$$

и HA есть биссектриса угла KHL . Так же найдем, что KB , LC суть биссектрисы углов HKL , HLK . Таким образом высоты AH , BK , CL суть биссектрисы внутренних углов треугольника HKL и, следовательно, пересекаются в одной точке D . Мы воспользовались при доказательстве чертежом, на котором треугольник ABC остроугольный. Если бы угол ABC был прямой, то точки H , K слились бы с точкой C , и треугольник HKL перестал бы существовать, но высоты все-таки пересеклись бы, а именно в точке C . Если бы угол ACB был тупой, то высоты HA , KB стали бы биссектрисами внешних углов, а высота LC осталась бы биссектрисой внутреннего угла треугольника HKL , и высоты попрежнему пересеклись бы на основании теоремы 73. Предлагаем читателю рассмотреть два последних случая.

76. На рис. 59 имеем $AC < AB$. Поэтому $HC < HB$, так как меньшая наклонная ближе к перпендикуляру. Отсюда находим $DC < DB$, так как из двух наклонных меньше та, которая ближе к перпендикуляру. Таким образом из двух вершин ортоцентр D ближе к той, которая лежит против большей стороны. Следовательно, из всех вершин ортоцентр ближе к той, которая лежит против наибольшей стороны, то-есть, к вершине наибольшего угла.

77. На рис. 59 имеем $AC < AB$; отсюда $\angle ABC < \angle ACB$; отсюда в свою очередь $\angle BAH < \angle CAH$, так как $\angle BAH = d - \angle ABC$, $\angle CAH = d - \angle ACB$. Окружность, описанная на AD как на диаметре, пройдет через вершины K , L прямых углов, опирающихся на AD . Из двух хорд DK , DL этой окружности меньше та, на которую опирается меньший из вписанных углов KAD , LAD , т. е. хорда DK . Таким образом из двух сторон треугольника ABC ортоцентр ближе к меньшей, и следовательно, из всех сторон ближе к наименьшей. Однако теорему эту еще нельзя считать доказанной для всякого треугольника, так как в нашем рассуждении имеет существенное значение, что углы ABC , ACB острые. Предлагаем читателю проверить справедливость теоремы для случая прямоугольного и тупоугольного треугольника.

78. На рис. 59 имеем $AC < AB$, откуда $\angle ABC < \angle ACB$. Окружность, описанная на BC как на диаметре, пройдет через вершины K , L прямых углов, опирающихся на BC . Из двух хорд BK , CL этой окружности меньше та, на которую опирается меньший из вписанных углов ABC , ACB , то-есть хорда CL . Таким образом из двух высот треугольника ABC меньше та, которая опущена на большую сторону, и, следовательно, наи-

меньшая та, которая опущена на наибольшую сторону. Это доказательство неполно по той же причине, что и доказательство 77. Предлагаем читателю дополнить его.

79. Из рассмотрения рис. 59 легко убедиться, что точки A, B, C суть ортоцентры треугольников BCD, ACD, ABD . Но можно высказать отношение между точками A, B, C, D в такой форме, что точка D не будет играть особой роли по сравнению с точками A, B, C : из четырех точек A, B, C, D каждая есть ортоцентр треугольника, образуемого тремя остальными, когда прямые, соединяющие любые две различные пары из этих точек, взаимно перпендикулярны, то-есть, когда:

$$AB \perp CD, AC \perp BD, BC \perp AD.$$

80. Биссектриса каждого внутреннего угла треугольника перпендикулярна к биссектрисе смежного внешнего угла и проходит через точку пересечения биссектрис двух других внешних углов. Следовательно, внутренние биссектрисы суть высоты треугольника, ограниченного внешними биссектрисами. На основании теоремы 79 это отношение можно высказать и в симметричной форме, которую требуется доказать. На рис. 59 высоты и стороны треугольника ABC суть внутренние и внешние биссектрисы треугольника HKL .

81. Доказательство можно найти в курсах элементарной геометрии.

82. Пусть будет Q точка пересечения медиан AM, BN, CP треугольника ABC (рис. 60). Если предположим $AC < AB$, то на основании решения 8 имеем:

$$\angle AMC < \angle AMB \text{ и } \angle MAB < \angle MAC.$$

В треугольниках CMQ, BMQ имеем $CM = BM, MQ = MQ, \angle CMQ < \angle BMQ$. Отсюда $QC < QB$, то-есть из двух вершин центр тяжести Q ближе к той, которая противолежит большей стороне. Следовательно, из всех вершин центра тяжести ближе всего к той, которая противолежит наибольшей стороне, то-есть к вершине наибольшего угла. При сравнении расстояний QE, QF центра тяжести от сторон AC, AB можно повторить рассуждения решения 77, пользуясь неравенством

$$\angle QAF < \angle QAE.$$

Получим неравенство $QF < QE$, которое показывает, что центр тяжести ближе к большей из двух сторон, и, следовательно, ближе всего к наибольшей стороне.

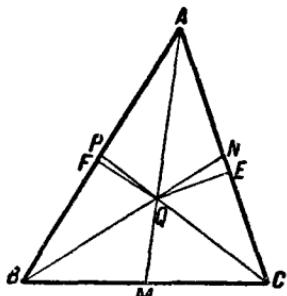


Рис. 60.

83. Всякая медиана в полтора раза больше расстояния центра тяжести от вершины, из которой она проведена. Так как на основании решения 82 центр тяжести наименее удален от вершины, противолежащей наибольшей стороне, то и наименьшая медиана та, которая проведена к наибольшей стороне.

84. Пусть будут M, N середины сторон BC, CD параллелограмма $ABCD$ (рис. 61). Требуется доказать:

$$BP = PQ = QD = \frac{1}{3} BD.$$

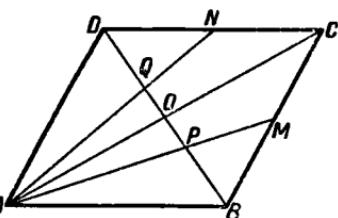


Рис. 61.

В треугольнике ABC прямые BO, AM суть медианы. Отсюда находим:

$$BP = \frac{2}{3} OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{1}{3} BD.$$

Точно так же из треугольника ACD найдем $QD = \frac{1}{3} BD$.

Отсюда уже само собой следует:

$$PQ = BD - BP - QD = BD - \frac{1}{3} BD - \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} BD,$$

что и требовалось доказать.

85. Проведем в треугольнике ABC (рис. 62) высоты к сторонам AB, BC до пересечения в ортоцентре D и перпендикуляры в серединах P, M сторон AB, BC до пересечения в центре описанного круга O . Требуется доказать:

$$OM = \frac{1}{2} DA.$$

Средняя линия $M'P'$ треугольника ACD равна и параллельна средней линии MP треугольника ACB , так как треугольники ACD, ACB имеют общее основание AC . В треугольниках $OMP, DM'P'$ стороны $MP, M'P'$ равны по доказанному и, кроме того, соответственные углы равны, так как соответственные стороны параллельны. Следовательно, треугольники $OMP, DM'P'$ равны, и мы имеем:

$$OM = DM' = \frac{1}{2} DA,$$

что и требовалось доказать.

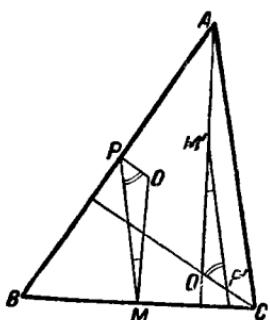


Рис. 62.

86. В треугольнике ABC (рис. 63) проведем высоту AH и отметим на ней ортоцентр D , затем проведем перпендикуляр в середине M стороны BC и отметим на нем центр описанного круга O , наконец, проведем медиану и отметим точку пересечения ее Q с прямой OD . Нужно доказать, что Q есть центр тяжести. Отрезок MO параллелен отрезку AD и по теореме

85 равен его половине. Следовательно, отрезок MO равен и параллелен средней линии $A'D'$ треугольника ADQ . Поэтому отрезки OD' , MA' взаимно делятся пополам, и мы получаем:

$$MQ = QA' = \frac{1}{2} QA = \frac{1}{3} MA.$$

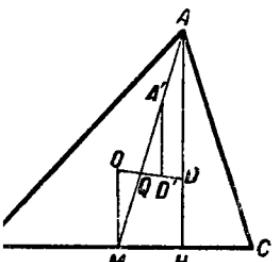


Рис. 63.

Это показывает, что точка Q есть действительно центр тяжести, и мы видим, что центр описанного круга O ортоцентр D и центр тяжести Q лежат на одной прямой, как и требовалось доказать. Заметим, что нами рассмотрен только общий случай, когда медиана не совпадает с высотой. Но если медиана совпадает с высотой, то теорема становится очевидной, так как в этом случае все три точки лежат на высоте.

87. Из точки M на окружности круга, описанного около треугольника ABC , опущены перпендикуляры MP , MQ , MR на стороне (рис. 64). Требуется доказать, что точки P , Q , R лежат на одной прямой. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда одна из точек P , Q , R лежит на самой стороне треугольника.

Пусть, например, точка P лежит на стороне BC . Из двух противоположных углов ABM , ACM вписанного четырехугольника $ABMC$ или один острый, а другой тупой, или оба прямые. Если они оба прямые, то R совпадает с B и Q совпадает с C . Следовательно, точки P , Q , R лежат на прямой BC , и теорема доказана. Предположим, напротив, что один из этих углов, например угол ACM , острый, и следовательно, другой угол ABM тупой. Тогда Q лежит на самой стороне AC , а R лежит на продолжении стороны AB за конец B . Из сказанного следует, что отрезки PB , PC составляют продолжение друг друга, а отрезки PQ , PR во всяком случае расположены по разные стороны от прямой BC . Нужно доказать, что и отрезки

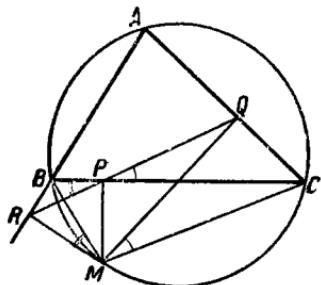


Рис. 64.

PQ, PR составляют продолжение друг друга, для чего достаточно проверить равенство

$$\angle CPQ = \angle BPR.$$

Заметив, что P, Q лежат на окружности, описанной на MC как на диаметре, и P, R лежат на окружности, описанной на MB как на диаметре, мы можем заменить углы CPQ, BPR равными им углами CMQ, BMR и нам остается проверить равенство

$$\angle CMQ = \angle BMR.$$

Но из прямоугольных треугольников CMQ, BMR находим:

$$\angle CMQ = d - \angle ACM, \quad \angle BMR = d - \angle RBM,$$

так что остается проверить только равенство

$$\angle ACM = \angle RBM.$$

А это равенство следует из того, что во вписанном четырехугольнике $ABMC$ угол ACM есть внутренний при вершине C , а угол RBM есть внешний при противолежащей вершине B . Таким образом в рассматриваемом случае теорема доказана.

88. Примем (рис. 65) точку A за вершину треугольника ABC , проведем высоту AH и перпендикуляр в середине M основания BC и отметим центр описанного круга O , ортоцентр D , середину O' отрезка OD и середину A' отрезка AD . Достаточно доказать, что окружность с центром O'

и радиусом $\frac{1}{2}OA$ проходит через точки

M, H, A' , потому что безразлично, которую из точек A, B, C принять за вершину треугольника ABC . Отрезок OM параллелен отрезкам AA' , $A'D$ и по теореме 85 равен им. Поэтому $OAA'M$ есть параллелограмм, откуда находим:

$$MA' = OA.$$

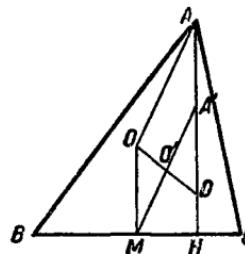


Рис. 65.

Точно так же OM и $A'D$ суть противоположные стороны параллелограмма, диагонали которого суть OD, MA' . Так как диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам, то мы видим, что MA' проходит через O' , и сверх того получаем:

$$O'M = O'A' = \frac{1}{2}MA' = \frac{1}{2}OA.$$

Отсюда следует, что окружность с центром O' и радиусом $\frac{1}{2}OA$ пройдет через M и A' . Так как MA' есть диаметр этой окружности и угол MHA' прямой, то она пройдет и через H . Итак, теорема доказана.

Задачи на построение

89. Искомый круг должен удовлетворять трем условиям: его радиус должен быть равен данному отрезку R , он должен проходить через данную точку A , и он должен касаться данной прямой a (рис. 66). Отбросим третье условие и найдем геометрическое место центров кругов, удовлетворяющих первым двум условиям. Центры таких кругов должны находиться на

расстоянии R от точки A , и наоборот, всякая точка на расстоянии R от точки A есть центр такого круга. Следовательно, искомое геометрическое место есть окружность K с центром A и радиусом R . Отбросим второе условие и найдем геометрическое место центров кругов, удовлетворяющих первому и третьему условию. Центры таких кругов должны находиться на расстоянии R от прямой a , и наоборот, всякая точка на расстоянии R от прямой есть центр такого круга. Следовательно, искомое геометрическое место есть пара прямых b , b' , параллельных прямой a и находящихся от нее на расстоянии R . Центры X искомых кругов должны удовлетворять всем трем условиям и, следовательно, лежать на обоих найденных геометрических местах.

Если эти геометрические места имеют общие точки, то, описав около каждой из них круг радиуса R , получим все круги, удовлетворяющие условиям задачи.

На рис. 66 окружность K пересекает прямую b в точках X_1 , X_2 , и не имеет общих точек с прямыми b' . Следовательно, задача имеет два решения. Но возможны и другие случаи. Если расстояние точки A от прямой a больше $2R$, то окружность K не имеет общих точек с прямыми b , b' ; задача не имеет решений. Если расстояние точки A от прямой a равно $2R$, то окружность K касается одной из прямых b , b' и не имеет общих точек с другой; задача имеет одно решение. Если расстояние точки A от прямой a меньше $2R$, но больше нуля, то окружность K пересекает одну из прямых b , b' и не имеет общих точек с другой; задача имеет два решения. Если расстояние точки A от прямой a равно нулю, то окружность K касается обеих прямых b , b' ; задача снова имеет два решения. Таким образом задача может иметь 0, 1 и 2 решения, в зависимости от величины R и относительного положения A и a .

90. Геометрическое место центров кругов данного радиуса R , касательных к данной прямой, есть пара прямых, параллельных этой прямой, на расстоянии R от нее. Геометрическое место центров кругов данного радиуса R , касательных к дан-

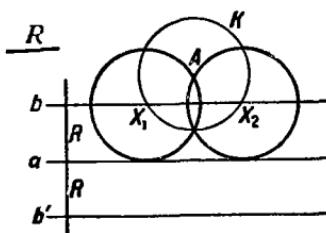


Рис. 66.

ному кругу радиуса R' , есть пара окружностей, концентрических с этим кругом, радиусы которых равны сумме и разности радиусов R, R' . Если радиусы R, R' равны, то вторая окружность имеет нулевой радиус, т. е. обращается в точку. Центры искомых кругов суть общие точки обоих геометрических мест. Число этих точек и тем самым число решений задачи может достигать восьми.

91. Геометрическое место кругов, касательных к двум данным параллельным прямым, есть параллельная им прямая, делящая пополам расстояния между ними. Радиус R искомого круга должен поэтому быть равен половине расстояния между этими прямыми. Геометрическое место центров круга радиуса R , касательных к данному кругу радиуса R' , есть пара окружностей, концентрических с этим кругом, радиусы которых равны сумме и разности радиусов R, R' . Центры искомых кругов суть общие точки обоих геометрических мест. Число их, и тем самым число решений, может достигать четырех.

92. Пусть будут K_1, K_2 данные круги и R_1, R_2 их радиусы (рис. 67). Искомый круг не может касатьсяся круга K_1 внешним образом, потому что он не мог бы тогда касатьсяся круга K_2 . Найдем круги, касательные к кругу K_1 внутренним образом в какой-нибудь точке A и касательные также к кругу K_2 . Центры этих кругов должны лежать на прямой OA и на той же прямой должны лежать и точки касания их с кругом K_2 . Отсюда видно, что точки касания их с кругом K_2 суть B, C и, следовательно, центры их суть середины M, N отрезков AB, AC . Круг M касается круга K_2 внешним образом; радиус

его равен $\frac{1}{2}(R_1 - R_2)$. Круг N касается круга K_2 внутренним

образом, радиус его равен $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. Мы нашли центры

M, N кругов, касательных к кругам K_1, K_2 , и притом к кругу K_1 в точке A . Если заставим точку A описать окружность K_1 , то точки M, N опишут концентрические окружности K', K'' , которые и составляют в совокупности геометрическое место центров кругов, касательных к кругам K_1, K_2 . При этом окружность K' есть геометрическое место центров кругов

радиуса $\frac{1}{2}(R_1 - R_2)$, а окружность K'' есть геометрическое

место центров кругов радиуса $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. Второе условие за-

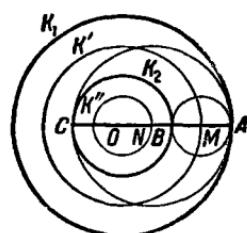


Рис. 67.

дачи, требующее касания искомых кругов к некоторой прямой a , дает для центров кругов каждого из радиусов еще однo геометрическое место, а именно, пару прямых, пааллельных прямой a на расстоянии от нее, равном соответствующему радиусу. Центры кругов каждого радиуса суть общие точки обоих геометрических кругов.

93. Обозначим данные точки A, B, C . Центр искомого круга должен быть одинаково удален от всех трех точек A, B, C . Геометрическое место точек, равноудаленных от точек A, B , есть перпендикуляр в середине отрезка AB . Геометрическое место точек, равноудаленных от точек A, C , есть перпендикуляр в середине отрезка AC . Точка, равноудаленная от всех трех точек A, B, C , может быть только точкой пересечения этих двух перпендикуляров. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то перпендикуляры эти пересекаются в некоторой точке. Эта точка есть центр круга, описанного около треугольника ABC . Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, то перпендикуляры 'пааллельны' между собой и не имеют общей точки. Итак, задача может иметь одно или ни одного решения.

94. Относительно взаимного расположения данных прямых можно сделать только три предположения: или среди них нет

параллельных, или две из них параллельны, а третья пересекает их, или все три параллельны. Если среди данных прямых нет параллельных, то они пересекаются или в трех различных точках, или в одной точке. Таким образом возможны четыре случая. Рассмотрим их отдельно.

Пусть прямые b, c пересекают прямую a в различных точках C, B и сами пересекаются в точке A (рис. 68). Центры искомых кругов должны быть равноудалены от всех трех прямых a, b, c . Геометрическое место точек, равноудаленных от прямых a, c , есть пара биссектрис b', b'' двух пар вертикальных углов между прямыми a, c . Геометрическое место

точек, равноудаленных от прямых a, b , есть пара биссектрис c', c'' двух пар вертикальных углов между прямыми a, b . Точки, равноудаленные от всех трех прямых a, b, c , должны принадлежать обоим геометрическим местам. Так как прямые a, b, c ограничивают в данном случае треугольник, то каждая из биссектрис b', b'' пересекает каждую из биссектрис

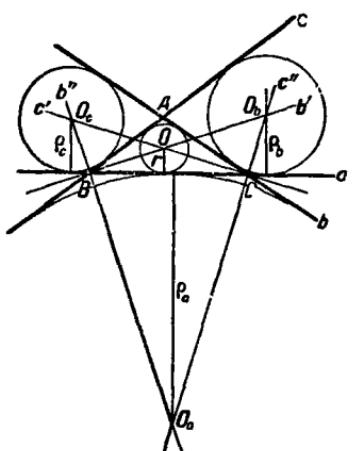


Рис. 68.

c' , c'' . В решении 28 были даже вычислены углы между различными биссектрисами. Всего получим четыре точки пересечения O , O_a , O_b , O_c . Чтобы найти радиусы искомых кругов, придется еще опустить из этих точек перпендикуляры r , r_a , r_b , r_c на одну из сторон. После этого остается описать около точек O , O_a , O_b , O_c окружности радиусами r , r_a , r_b , r_c . Это будут вписанные и невписанные круги треугольника ABC .

Пусть прямые b , c пересекают прямую a в различных точках C , B , но параллельны между собой (рис. 69). Как и раньше, центры искомых кругов должны лежать в точках пересечения биссектрис b' , b'' при точке B с биссектрисами c' , c'' при точке C . Но теперь биссектрисы b' , b'' параллельны биссектрисам c'' , c' и пересекаются только с биссектрисами c' , c'' в точках O , O' . Таким образом в этом случае решений только два.

Если все три прямые пересекаются в одной точке, то решений не будет совсем, так как из одной точки нельзя провести три касательных к окружности. Точно так же решений совсем не будет, если все три прямые параллельны, так как к окружности нельзя провести три параллельных касательных.

95. Требуется построить круг, касательный к прямой a в точке A и к другой прямой b (рис. 70). Одно геометрическое

место для центра искомого круга есть перпендикуляр p к прямой a в точке A . Другое геометрическое место есть геометрическое место точек, равноудаленных от прямых a , b . В случае, изображенном на рис. 70, когда прямые a , b пересекаются в некоторой точке C , это геометрическое место есть пара биссектрис c' , c'' углов между a и b . Мы получим два пересечения, если точка A не совпадает с точкой C , и одно пересечение, если точка A совпадает с точкой C . В последнем случае искомые круги обращаются в точку C . В случае, когда прямые a , b параллельны,

второе геометрическое место есть прямая, параллельная им и делящая расстояния между ними пополам. Получим одно решение. Впрочем, легко видеть, что для построения искомого круга вовсе нет надобности струить эту прямую.

96. Требуется построить круг, касательный к кругу O в точке A и к прямой a (рис. 71). Проведем касательную b к

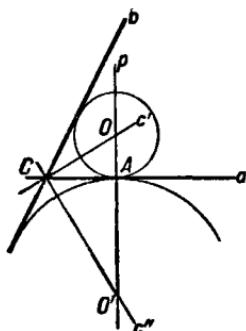


Рис. 70.

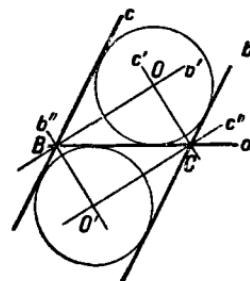


Рис. 69.

кругу O в точке A . Круги, касательные к кругу O в точке A , те же самые, что и круги, касательные к прямой b в точке A . Таким образом задача сводится к задаче 95.

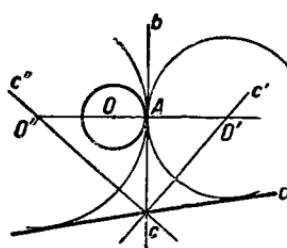


Рис. 71.

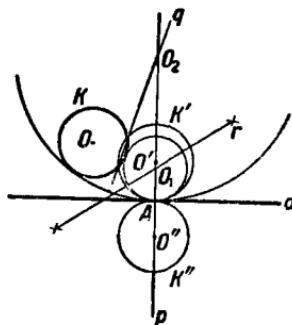


Рис. 72.

97. Пусть будет a данная прямая, A данная точка, K данный круг, O его центр (рис. 72). Одно геометрическое место для центра искомого круга есть перпендикуляр p к прямой a в точке A . Чтобы найти другое геометрическое место, построим центры O', O'' кругов K', K'' , касательных к прямой a в точке A и равных кругу K . Каждый из искомых кругов должен быть касателен и к кругам K', K'' , и притом к одному из них внутренним образом, а к другому внешним образом, потому что круги K', K'' расположены по разные стороны от a . Следовательно, каждый из искомых кругов должен быть касателен одинаковым образом к кругу K и к одному из кругов K', K'' . Но центр всякого круга, касательного одинаковым образом к двум разным кругам, очевидно, находится от центров этих кругов на равных расстояниях, и наоборот, всякая точка, равноудаленная от центров этих кругов, есть центр одного внешне касательного и одного внутренне касательного круга к этим кругам. Отсюда видно, что геометрическое место центров кругов, касательных одинаковым образом к кругам K, K'' , есть перпендикуляр q в середине отрезка OO' , а геометрическое место центров кругов, касательных одинаковым образом к кругам K, K' , есть перпендикуляр r в середине отрезка OO'' . Центры искомых кругов суть точки пересечения p с q и r . Заметим, что для построения нужны только центры O', O'' кругов K', K'' ; сами круги начерчены у нас только для придания наглядности рассуждениям. С другой стороны, чтобы не затемнять чертеж, у нас не начерчены отрезки OO', OO'' , к которым нужно провести перпендикуляры в серединах; действительно, для этого построения нужны только концы отрезков.

98. К этой задаче можно применить те же соображения, что и к задаче 97.

99. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, состоит из двух дуг окружностей, стягиваемых этим отрезком и вмещающих этот угол. Геометрическое место точек, из которых данный круг виден под данным углом, есть концентрическая с этим кругом окружность, для построения которой достаточно найти одну ее точку, что легко сделать. Искомые точки суть общие точки обоих геометрических мест.

100. Обозначим данные точки через A, B, C (рис. 73). Прямая, равноудаленная от точек A, B , или проходит через середину P отрезка AB , или параллельна прямой AB . Прямая, равноудаленная от точек A, C , или проходит через середину N отрезка AC , или параллельна прямой AC . Прямая, равноудаленная от всех трех точек A, B, C , или проходит через P и N —это будет прямая PN , или проходит через P и параллельна AC —это будет прямая PM , или проходит через N и параллельна AB —это будет прямая NM , или параллельна AB и AC —таких прямых не может быть, если точки A, B, C не лежат на одной прямой. Таким образом, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, то искомые прямые суть средние линии треугольника ABC . Но если точки A, B, C лежат на одной прямой, то прямые PN, PM, NM сливаются с этой прямой, и кроме того от точек A, B, C равноудалены все прямые, параллельные этой прямой. Итак, в первом случае имеем три решения, а во втором бесчисленное множество.

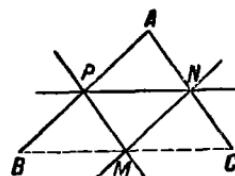


Рис. 73.

101. Если данные прямые пересекаются, то к ним одинаково наклонены биссектрисы двух пар вертикальных углов между ними и все параллельные этим биссектрисам прямые. Каждой биссектрисе параллельны две касательные данного круга. Таким образом задача имеет четыре решения. Но если данные прямые параллельны, то все вообще прямые одинаково наклонены к ним, и в частности все касательные данного круга. В этом случае, следовательно, задача имеет бесчисленное множество решений.

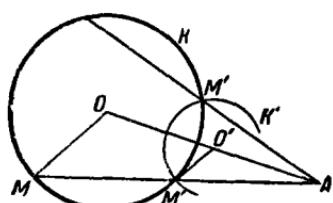


Рис. 74.

102. Пусть будет A данная точка, K данный круг, O его центр (рис. 74). Предположим, чтобы разобраться в задаче,

что она решена и что $AM'M$ есть одна из искомых секущих, так что M' есть середина AM . Пусть будет O' середина AO . Прямая $O'M'$ есть средняя линия треугольника AOM , и следовательно, $O'M'$ равна половине OM , то-есть половине радиуса круга K . Таким образом для M' имеем два геометрических места — окружность K и окружность K' вдвое меньшее радиуса с центром в середине O' отрезка AO ; это позволяет найти M' .

Для экономии места мы сделали анализ на том же рис. 74, на котором находятся данные и должно быть выполнено построение. Но на практике следует, конечно, производить анализ на отдельном наброске. Чтобы решить теперь нашу задачу, нужно

разделить пополам отрезок AO и какой-нибудь радиус круга K и радиусом, равным половине радиуса круга K , описать окружность K' около середины O' отрезка AO . Соединив затем точку A с общими точками M' окружностей K , K' , получим искомые секущие. Чтобы исследовать задачу, обозначим радиус круга K через R и расстояние AO через d . Тогда радиус

круга K' будет $\frac{1}{2}R$ и расстояние OO' будет $\frac{1}{2}d$. Сумма радиусов кругов K , K' равна $\frac{3}{2}R$, а разность $\frac{1}{2}R$. Окружности K , K' не имеют общих точек, и следовательно, задача не имеет

решений, если $\frac{1}{2}d > \frac{3}{2}R$, т. е. если $d > 3R$. Задача имеет

одно решение, если $\frac{1}{2}d = \frac{3}{2}R$, т. е. $d = 3R$. Задача имеет

два решения, если $\frac{1}{2}d < \frac{3}{2}R$, т. е. $d < 3R$. Этим исчерпываются возможные случаи, потому что $\frac{1}{2}d$ не может быть

равно или меньше $\frac{1}{2}R$, так как тогда d было бы равно или меньше R , и точка A не лежала бы вне круга K , вопреки условию задачи.

103. Пусть будут O , O' центры данных кругов, A — точка пересечения их, через которую требуется провести секущую, и a — отрезок, которому эта секущая должна быть равна (рис. 75). Предположим, что задача решена, и BC есть одна из искомых секущих. Опустим на нее перпендикуляры OM , $O'N$ и проведем $O'P$ перпендикулярно к OM .

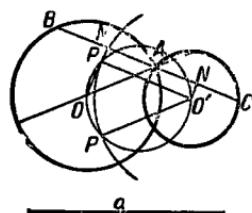


Рис. 75.

Имеем:

$$O'P = MN = MA + AN = \frac{1}{2} BA + \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a.$$

Для точки P имеем два геометрических места: окружность с центром O' и радиусом $\frac{1}{2} a$ и окружность, описанную на OO' как на диаметре, так как угол OPO' прямой. Оба геометрических места можно построить по данным задачи. Найдя таким образом точки P , мы должны провести через точку A прямые, параллельные прямым $O'P$. Это и будут искомые секущие. Число решений задачи равно числу общих точек наших геометрических мест. Оно равно 2, когда $\frac{1}{2} a < OO'$; равно 1, когда $\frac{1}{2} a = OO'$; равно 0, когда $\frac{1}{2} a > OO'$.

104. Пусть будут ABC , $A'B'C'$ данные треугольники (рис. 76). Требуется описать около треугольника ABC треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику $A'B'C'$.

Задача приобретет достаточную определенность только тогда, когда будет указано, которая из сторон треугольника $A_1B_1C_1$ должна проходить через каждую вершину треугольника ABC . Пусть требуется, чтобы сторона A_1B_1 , равная $A'B'$, проходила через C , чтобы сторона A_1C_1 , равная $A'C'$, проходила через B и чтобы сторона B_1C_1 , равная $B'C'$, проходила через A . Так как угол B_1 , равный углу B' , должен опираться на сторону AC , то точка B_1 должна лежать на дуге, опирающейся на AC и вмещающей угол, равный углу B' . Точно так же точка C_1 должна лежать на дуге, опирающейся на AB и вмещающей угол, равный углу C' . Сторона B_1C_1 должна быть секущей этих двух дуг, проходящей через их общую точку A и равной стороне $B'C'$. Такие секущие можно построить по способу решения 103. Проведя затем прямые C_1B , B_1C до пересечения в точке A_1 , получим треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику $A'B'C'$ вследствие равенства сторон B_1C_1 , $B'C'$ и прилежащих углов B_1 , B' и C_1 , C' . Число решений равно числу секущих B_1C_1 , равных $B'C'$, и может равняться 2, 1 и 0, как показано в решении 103. Так как в условии не указано, в каком порядке сторон один треугольник

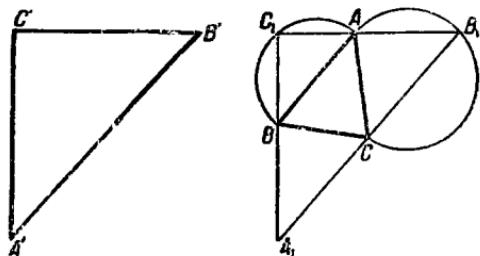


Рис. 76.

должен быть описан около другого, то придется проделать шесть построений рассмотренного вида, по числу возможных комбинаций.

105. Пусть требуется вписать в треугольник ABC треугольник, равный треугольнику $A'B'C'$ (рис. 77). Здесь можно применить метод обратности. Сначала опишем около треугольника $A'B'C'$ треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC , как показано в решении 104. Потом отложим на стороне AB отрезок AC_2 , равный отрезку A_1C' , на стороне BC отрезок BA_2 , равный отрезку B_1A' , и на стороне CA отрезок

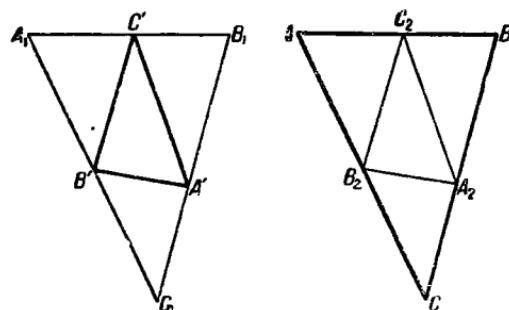


Рис. 77.

CB_2 , равный отрезку C_1B' . Получим треугольник $A_2B_2C_2$, вписанный в треугольник ABC и равный треугольнику $A'B'C'$, что и требовалось. Мы видим, что каждому решению обратной задачи соответствует определенное решение прямой задачи. Но легко убедиться, что и наоборот, каждому решению прямой задачи соответствует определенное решение обратной задачи. Отсюда ясно, что метод обратности позволяет получить все без исключения решения нашей задачи.

106. Пусть будет O центр данного круга (рис. 78), OA , OB данные радиусы и a данный отрезок. Требуется провести к кругу O такую касательную, чтобы часть CD этой касательной между продолжениями радиусов OA , OB была равна отрезку a . Образим задачу и попробуем восстановить данную фигуру OAB , начиная с искомого отрезка CD . Выражаясь точнее, мы должны построить фигуру $O'A'B'$, равную фигуре OAB и расположенную по отношению к отрезку $C'D'$, равному отрезку a , так же, как фигура OAB расположена по отношению к

отрезку CD . Отложим где-нибудь отрезок $C'D'$ и будем искать точку O' . Точка O' должна удовлетворять двум условиям: угол $C'O'D'$ должен быть равен углу AOB , и расстояние $O'E'$ точки O' от прямой $C'D'$ должно равняться расстоянию OE .

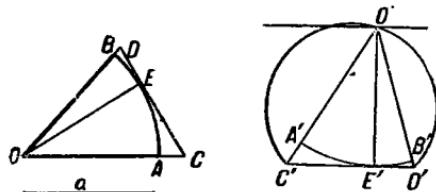


Рис. 78.

точки C' от искомой прямой CD , то есть радиусу OA . Это дает для O' два геометрических места: дугу, вмещающую угол, равный углу AOB , и опирающуюся на $C'D'$, и прямую, параллельную $C'D'$, расстояние которой от $C'D'$ равно OA . Собственно говоря, первое геометрическое место состоит из пары дуг, а второе из пары прямых, по обе стороны от $C'D'$. Но так как для нас существенно только относительное положение фигуры $O'A'B'$ и отрезка $C'D'$, то мы можем ограничиться рассмотрением дуги и прямой, расположенных по одну сторону от прямой $C'D'$. Эти два геометрических места могут иметь не более двух общих точек; пусть будет O' одна из них. Отложим на продолженных радиусах OA , OB отрезки CC' , OD , равные отрезкам $O'C'$, $O'D'$; прямая CD есть одна из искомых касательных. Решений будет столько же, сколько общих точек наших геометрических мест. Но для построения достаточно найти одну из этих точек, в чем предлагаем убедиться читателю.

107. Пусть будет AB данный отрезок (рис. 79), a данная прямая, K данная окружность, O ее центр. Искомый отрезок должен быть равен и параллелен отрезку AB и опираться своими концами на окружность K и прямую a . Представим себе, что из всех точек окружности K проведены в обоих направлениях отрезки, равные и параллельные отрезку AB . Концы этих отрезков заполняют пару окружностей K' , K'' , получающихся из окружности K смещением ее в обоих направлениях на отрезок, равный и параллельный отрезку AB . Условиям задачи удовлетворяют те из этих отрезков, концы которых одновременно лежат и на прямой a . Отсюда ясно, как следует вести построение.

Проводим через точку O прямую параллельно прямой AB , откладывая на ней отрезки OO' , CO'' , равные отрезку AB , и описываем около точек O' , O'' окружности K' , K'' радиусом, равным радиусу окружности K . Затем из каждой общей точки окружностей K' , K'' с прямой a проводим прямую, параллельную прямой AB , до такой точки пересечения с окружностью K , чтобы получился отрезок, равный AB . Число решений может достигать четырех. Можно было бы вместо окружности K смещать параллельно прямую a , но такое построение было бы несколько сложнее.

108. Эта задача есть небольшое видоизменение задачи 107.

109. Эта задача есть частный случай задачи 108, когда данные окружности совпадают.

110. Требуется через точку A (рис. 80) внутри круга K с центром O провести хорду EC , равную отрезку a . Построим

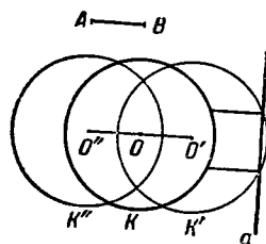


Рис. 79.

какую-нибудь хорду $B'C'$, равную отрезку a , что легко сделать. Если бы хорда BC была дана, то мы могли бы совместить ее с хордой $B'C'$, вращая ее в каком-нибудь направлении около точки O . При этом точка A хорды BC совпадала бы с некоторой точкой A' хорды $B'C'$, которую мы можем построить и не зная положения хорды BC , прямо по данным задачи.

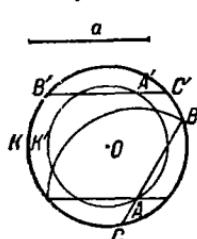


Рис. 80.

Действительно, при таком вращении точка A описала бы окружность K' с центром O и радиусом OA . Следовательно, точка A' должна быть общей точкой окружности K' с хордой $B'C'$. Если этих точек две, то за точку A' можно принять любую. Из дальнейших рассуждений увидим, что это различно. Точка A должна делить хорду BC на такие же отрезки, на какие точка A' делит хорду $B'C'$. Поэтому конец B хорды BC должен находиться от точки A на расстоянии, равном $A'B'$. Описав около точки A окружность радиусом, равным $A'B'$, получим в пересечении с окружностью K искомые концы B хорды BC , после чего останется только соединить их с точкой A и продолжить прямые BA до пересечений C с окружностью K . Для этого построения существенно только то, на какие отрезки точка A' делит хорду $B'C'$. Если окружность K' имеет с хордой $B'C'$ две общие точки, то они делят хорду на одинаковые отрезки, только в различном порядке. Поэтому и можно было за точку A' принять любую из этих точек.

111. Пусть будет A (рис. 81) данная точка, a данная прямая и K данная окружность. Обозначим вершину искомого треугольника, которая должна лежать на прямой a , через B , а ту, которая должна лежать на окружности K , через C . Вершину C можно получить из вершины B посредством поворота окружности K около вершины A на угол $\frac{2}{3}d$. Следовательно, для вершины C имеем два геометрических места: пару прямых a' , a'' , которые получаются из прямой a посредством поворота в том или другом направлении около точки A на угол $\frac{2}{3}d$,

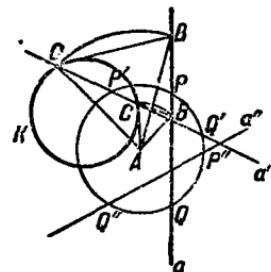


Рис. 81.

и окружность K . Общие точки этих двух геометрических мест суть вершины C . Чтобы построить вершины B , нужно описать около точки A окружности радиусами AC до пересечения с прямой a . После этого останется соединить каждые три точки

A, B, C. Чтобы осуществить поворот прямой a на угол $\frac{2}{3}d$,

достаточно повернуть две ее точки и соединить их новые положения. Проще всего поступить так: описываем около точки A окружность, пересекающую прямую a в точках P, Q ; откладываем на этой окружности в определенном направлении дуги PP' , QQ' , равные шестой части всей окружности, что можно сделать, не меняя растворения циркуля; соединяем точки P', Q' прямой a' ; меняя направление дуг на обратное, получим прямую a'' . На рис. 81 решений два, так как прямая a' пересекает окружность K , а прямая a'' не имеет с ней общих точек. Но число решений может достигать и четырех. Можно было бы вместо прямой a поворачивать окружность K .

112. Эта задача есть незначительное видоизменение задачи 111.

113. Пусть будут K, K' данные круги (рис. 82), O, O' их центры, A точка пересечения их, через которую требуется провести секущую, делящуюся в этой точке пополам. Обозначим конец искомой секущей на окружности K через B , а конец на окружности K' через C . Точка C должна быть симметрична с точкой B относительно центра A . Следовательно, точка C должна лежать на окружности K_1 , симметричной с окружностью K относительно центра A . Кроме того, она должна лежать на окружности K' . Таким образом точка C есть общая точка окружностей K', K_1 , отличная от точки A . Задача всегда имеет одно решение. Действительно, окружность K имеет с окружностью K_1 общую точку A , но не может касаться ее в этой точке, потому что тогда она касалась бы и симметричной окружности K , между тем как она по условию пересекает окружность K . Следовательно, окружности K', K_1 имеют еще одну общую точку C .

114. Решение этой задачи сходно с решением задачи 113.

115. Даны прямая a и точки A, B (рис. 83). Требуется найти на прямой a такую точку M , чтобы сумма $AM + MB$ была наименьшая. Если точки A, B расположены по разные стороны от прямой a , то отрезок AB пересекает прямую a . Точка пересечения и есть искомая точка M . Действительно, если M' есть какая-нибудь другая точка прямой a , то прямая AMB короче ломаной $AM'B$. Если точки A, B расположены по одну сторону от прямой a , то можно заменить точку B точкой B' , симметричной с ней относительно оси a , так как расстояния всякой точки M' прямой a от точек B, B' равны. Искомая точка M есть точка пересечения прямой a с прямой AB' .

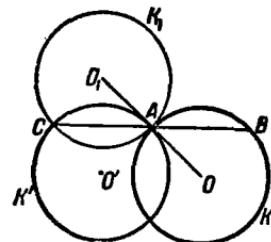


Рис. 82.

116. Если точки A, B расположены по одну сторону от прямой a , то точка M прямой a , для которой разность расстояний от точек A, B наибольшая, есть точка пересечения прямой a с прямой AB . Если точки A, B расположены по разные стороны от прямой a , то точка M прямой a , для которой разность расстояний от точек A, B наибольшая, есть точка пересечения прямой a с прямой, соединяющей точку A с точкой B' , симметричной с точкой B относительно оси a .

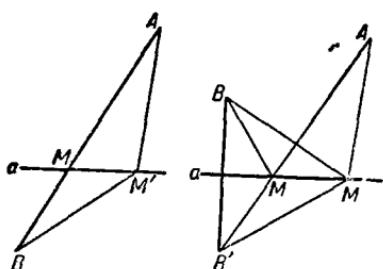


Рис. 83.

117. Пусть будет M_1OM_2 (рис. 84) данный угол и A данная точка. Построим точки A_1, A_2 , симметричные с точкой A , относительно осей OM_1, OM_2 , проведем прямую A_1A_2 и соединим с точкой A точки пересечения ее B, C с прямыми OM_1, OM_2 . Треугольник ABC и есть искомый. Действительно, всякий другой треугольник $AB'C'$, расположенный согласно требованиям задачи, имеет по сравнению с треугольником ABC больший периметр, так как периметр треугольника ABC равен отрезку прямой $A_1B + BC + CA_2$, а периметр треугольника $AB'C'$ равен периметру ломаной $A_1B' + B'C' + C'A_2$.

118. Пусть будет MON (рис. 85) данный угол и P, Q данные точки. Требуется построить равнобедренный треугольник, вершина которого A лежала бы на стороне OM , боковые стороны которого AB, AC проходили бы через точки P, Q , а основание BC лежало бы на стороне ON . Пусть будет ABC искомый треугольник, AH его высота и Q' точка, симметричная с точкой Q относительно оси OM . Имеем:

$$\begin{aligned}\angle PAQ' &= \angle PAQ + \angle QAQ' = \\ &= 2\angle HAB + 2\angle BAO = 2\angle HAO = \\ &= 2(d - \angle AOH) = 2d - 2\angle MON.\end{aligned}$$

Следовательно, точка A должна лежать, кроме стороны OM , на дуге PQ' , вмещающей угол, равный $2d - 2\angle MON$. Такую точку можно построить по данным задачи, и тем самым задача будет решена.

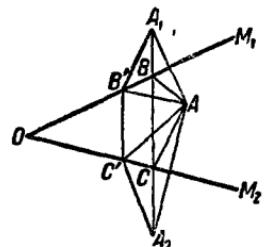


Рис. 84.

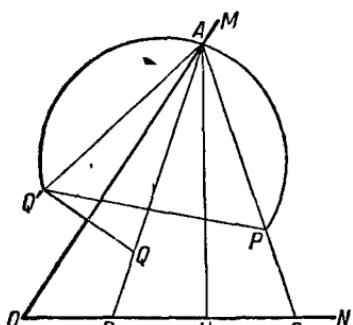


Рис. 85.

119. Пусть будет ABC искомый треугольник и M середина стороны BC (рис. 86). Проведем удвоенную медиану AMD и отрезок CD . В треугольнике ACD имеем $AC = b$, $CD = c$, $AD = 2m_a$. Следовательно, этот треугольник можно построить по данным b , c , $2m_a$. Чтобы построить искомый треугольник ABC , останется провести удвоенную медиану CMB треугольника ACD и отрезок AB .

Разумеется, для возможности построения треугольника ACD необходимо, чтобы наибольший из отрезков b , c , $2m_a$ был меньше суммы остальных.

120. В искомом треугольнике ABC заранее известны сторона $BC = a$, медиана $AM = m_a$ и медиана $BN = m_b$ (рис. 87). Это дает возможность построить треугольник BMQ , в котором $BM = \frac{1}{2}a$, $MQ =$

$= \frac{1}{3}m_a$, $BQ = \frac{2}{3}m_b$. Для этого нужно, правда, уметь разделить данные отрезки m_a , m_b на три части, что не относится к основным построениям.

Но это построение легко выполняется, если пристроить к отрезкам m_a , m_b какие-нибудь треугольники, в которых они были бы медианами, и провести еще по одной медиане этих треугольников. Когда треугольник BNQ будет построен, останется продолжить BM на равный

отрезок MC и MQ на вдвое больший отрезок QA и провести отрезки AB , AC .

121. Пусть будет ABC искомый треугольник, AM , BN , CP его медианы, Q точка их пересечения (рис. 88). Продолжим отрезок QM на равный отрезок MR и проведем отрезок BR . В треугольнике BQR имеем

$$BQ = \frac{2}{3}m_b, \quad QR = 2QM = \frac{3}{2}m_a,$$

$$BR = CQ = \frac{2}{3}m_c.$$

Следовательно, треугольник BQR можно построить по данным отрезкам m_a , m_b , m_c , а после этого легко построить и треугольник ABC .

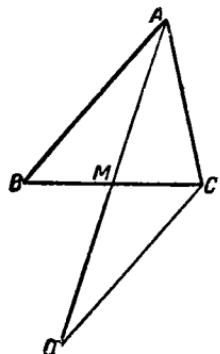


Рис. 86.

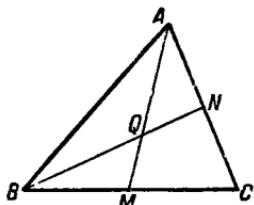


Рис. 87.

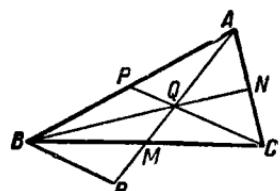


Рис. 88.

122. Для возможности построения искомого треугольника необходимо, чтобы обе боковые стороны b, c были больше высоты h_a , или только одна из них равна высоте h_a . Поэтому мы примем:

$$h_a \leq b < c.$$

Проведем какую-нибудь прямую a и восставим к ней какой-нибудь перпендикуляр p . Так как положение искомого треугольника ничем не ограничено, то мы можем мысленно наложить его на плоскость так, чтобы основание BC пошло по прямой a , а высота h_a по перпендикуляру p (рис. 89). Отложив

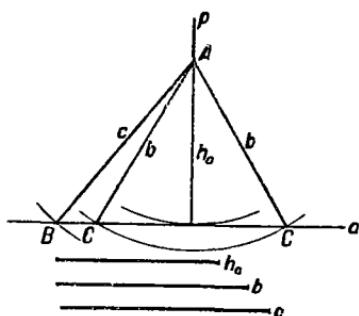


Рис. 89.

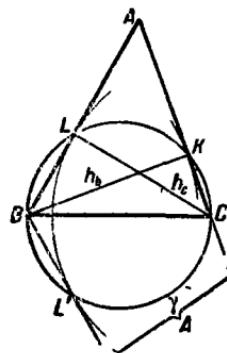


Рис. 90.

на перпендикуляре p отрезок, равный отрезку h_a , найдем вершину A . Конец основания B должен лежать на прямой a на расстоянии от вершины A , равном отрезку c . Иначе говоря, точка B должна быть общей точкой прямой a и

окружности, описанной около точки A радиусом c . Таких точек две, так как $c > h_a$, но мы можем считать за точку B одну из них. Действительно, мы можем представить себе треугольник ABC наложенным на плоскость так, что конец основания B совпадает с любой из этих точек, так как он переходит из одной точки в другую при повороте треугольника вокруг оси p на 180° . Теперь положение треугольника ABC вполне определено, и различным возможным положениям конца основания C соответствуют различные решения задачи. Точка C должна быть общей точкой прямой a и окружности, описанной около точки A радиусом b . Если $b > h_a$, то таких точек будет две, и мы получим два треугольника ABC . Если $b = h_a$, то такой точкой будет только основание высоты h_a , и мы получим один треугольник ABC .

123. Пусть будет K, L основания высот h_b, h_c (рис. 90). Так как углы BKC, BLC прямые, то точки K, L должны находиться на окружности γ , описанной на отрезке BC как на диаметре. Точка K находится кроме того на окружности, описанной около точки B радиусом h_b . Если эта окружность имеет с окружностью γ две общие точки, то за точку K можно принять одну из них, потому что этим определится только

положение треугольника ABC . За точку L следует уже принять по-очереди все общие точки окружности, описанной около C радиусом h_c , с окружностью γ . После этого останется провести секущие BL , CK окружности γ до пересечения в точке A . Число решений может достигать двух.

124. Пусть будет $BC = a$ основание искомого треугольника и M его середина (рис. 91). Вершина A должна находиться на расстоянии m_a от M и на расстоянии h_a от BC . Следовательно, вершина A есть общая точка окружности, описанной около точки M радиусом m_a , и прямой, проведенной параллельно прямой BC на расстоянии h_a от нее. Безразлично, с какой стороны от прямой BC проводить параллельную и которую из общих точек ее с окружностью принять за точку A , если этих точек две, так как все полученные таким образом треугольники отличаются только положением на плоскости. Поэтому решений не может быть более одного.

125. Построив основание a , будем иметь для вершины A два геометрических места: прямую, параллельную прямой a на расстоянии h_a от нее, и дугу, стягиваемую отрезком a и вмещающую угол A .

126. Проведем две параллельные прямые на расстоянии h_a друг от друга (рис. 92), примем какую-нибудь точку одной из них за вершину A , опишем около этой точки окружность радиусом β_a , примем какую-нибудь общую точку D этой окружности со второй параллельной за другой конец биссектрисы β_a и отложим углы DAB , DAC , равные $\frac{1}{2}A$. Треугольник ABC есть искомый.

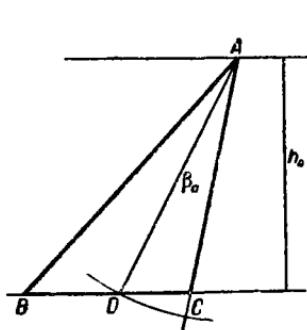


Рис. 92.

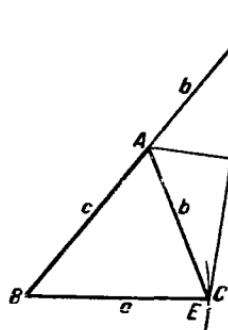


Рис. 93.

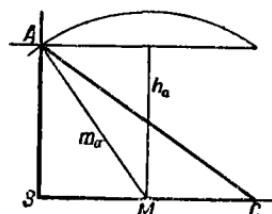


Рис. 91.

127. Пусть будет ABC искомый треугольник (рис. 93). Чтобы ввести в рассуждение $b + c$, продолжим сторону $BA = c$ на отрезок $AD = b$. В треугольнике BCD имеем:

$$BC = a, \quad BD = b + c, \quad \angle BDC = \frac{1}{2}A.$$

По этим данным треугольник BDC можно построить: проводим отрезок BD , равный $b + c$, откладываем угол BDE , равный $\frac{1}{2} A$, и находим точку C , как общую точку стороны DE с окружностью, описанной около точки B радиусом a . Число таких точек, и вместе с тем и число треугольников BCD ,

может достигать двух. Из каждого треугольника BCD можно получить один искомый треугольник ABC , проведя перпендикуляр в середине CD до пересечения с BD в точке A .

128. Пусть будет ABC искомый треугольник (рис. 94). Чтобы ввести в чертеж $2p = a + b + c$,

отложим на продолжениях BC отрезки $BD = c$, $CB = b$. В треугольнике ADE имеем:

$$DE = 2p, \quad \angle ADE = \frac{1}{2} B, \quad \angle AED = \frac{1}{2} C.$$

Следовательно, треугольник ADE можно построить по стороне и двум прилежащим углам. От треугольника ADE перейдем к треугольнику ABC , проведя перпендикуляры в серединах сторон AD , AE до пересечения со стороной DE в точках B , C .

129. Так как в условии упоминается огрезок, равный $c - b$, а не $b - c$, то подразумевается, что $c > b$. Пусть будет ABC искомый треугольник (рис. 95). Отложим на стороне $AB = c$ отрезок $AD = b$. Треугольник BCD можно построить, так как в нем известны стороны $BC = a$, $BD = c - b$ и угол между ними $CBD = B$. От него можно перейти к треугольнику ABC , проведя перпендикуляр в середине стороны CD до пересечения с продолжением стороны BD в точке A .

130. Пусть будет ABC искомый треугольник. Отложим на продолженной стороне $AC = b$ отрезок $AD = c$ (рис. 96). Треугольник CBD можно построить, так как в нем известны стороны $CB = a$, $CD = c - b$ и угол между ними $BCD = 2d - C$. По треугольнику BCD можно построить треугольник ABC , проведя перпендикуляр в середине стороны BD до пересечения с продолжением стороны DC в точке A .

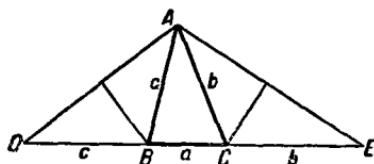


Рис. 94.

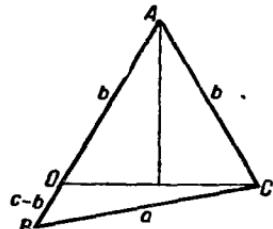


Рис. 95.

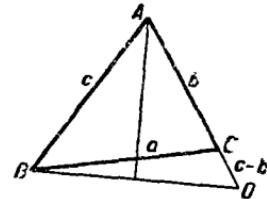


Рис. 96.

131. Решение этой задачи близко к решению 127.

132. Пусть будет ABC искомый треугольник (рис. 97). Перевернем его на другую сторону и наложим на плоскость в положении $A'BC$. Треугольник BAA' можно построить по сторонам $BA = c$, $BA' = b$ и углу между ними $\angle BAA' = C - B$. Чтобы построить затем искомый треугольник ABC , проведем полупрямую BD , параллельную и одинаково направленную с отрезком $A'A$, и найдем на ней точку C , находящуюся на расстоянии $A'C = c$ от точки A' .

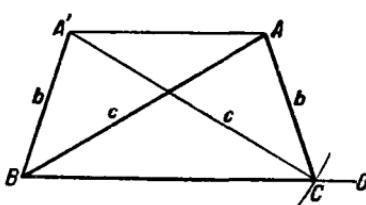


Рис. 97.

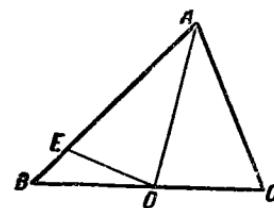


Рис. 98.

133. Воспользуемся решением 29. В искомом треугольнике ABC (рис. 98) проведем биссектрису AD , отложим $AE = AC$ и соединим D, E . В треугольнике BDE известны сторона $BE = c - b$, противолежащий угол $\angle BDE = C - B$ и сумма двух других сторон $BD + DE = BD + DC = BC = a$. По этим данным его можно построить, как показано в решении 127. Чтобы затем построить треугольник ABC , нужно будет на продолжении BD отложить $DC = DE$ и провести биссектрису угла $\angle CDE$ до пересечения с продолжением BE в точке A .

134. Эта задача родственна задаче 133. При решении ее придется использовать решения 130 и 131.

135. Даны диагонали d, d' параллелограмма и угол A , противолежащий диагонали d' (рис. 99). Чтобы построить параллелограмм, проводим сначала отрезок BD , равный диагонали d' , и находим его середину M . Для вершины A имеем два геометрических места: дугу BD , вмещающую угол A , и окружность, описанную около M радиусом $\frac{1}{2}d$. Эти два геометрических места имеют не более двух общих точек; если этих точек две, то безразлично, которую из них принять за вершину A . Чтобы найти четвертую вершину C , проще всего продолжить AM на равное расстояние.

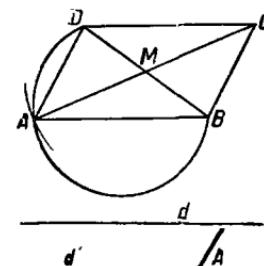


Рис. 99.

136. Даны большее основание a , меньшее основание b и боковые стороны c, d трапеции; требуется построить ее по этим данным. Пусть будет $ABCD$ (рис. 100) искомая трапеция. Проведем CE параллельно DA . Треугольник CED можно построить по трем сторонам $CE = c, CB = d, EB = a - b$. После этого останется отложить отрезок $EA = b$ и построить на EA, FC параллелограмм $AECD$.

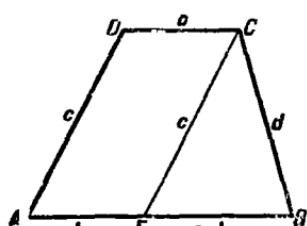


Рис. 100.

137. Эта задача близка к задаче 136. Нужно только произвести параллельный перенос диагонали, а не боковой стороны.

138. В искомом четырехугольнике даны углы A, B и стороны b, c, d , по которым можно последовательно перейти от B к A (рис. 101). Пусть будет $ABCD$ искомый четырехугольник. Непосредственному построению его мешает то, что углы между известными сторонами неизвестны, и сторона, прилежащая к известным углам, неизвестна. Чтобы сблизить известные части фигуры между собой, сделаем параллельный перенос стороны AD в положение BD' ; при этом точка D опишет отрезок DD' . Теперь построение можно вести так: проводим произвольную прямую ABE ; откладываем углы $ABF = B, EBG = A$; откладываем отрезки $BC = b, BD' = d$; проводим из точки D' полуправильную $D'H$, параллельную и одинаково направленную с полуправильной BA ; находим на полуправильной $D'H$ точку D на расстоянии c от точки C ; проводим из точки D параллельную к прямой $D'B$ до пересечения с полуправильной BA в точке A .

139. Требуется построить четырехугольник по четырем последовательным сторонам a, b, c, d и углу α между направлениями сторон b, d от стороны a к стороне c . Пусть будет $ABCD$ (рис. 102) искомый четырехугольник; через A, B, C, D обозначены начальные точки сторон a, b, c, d при последовательном обходе их по контуру четырехугольника. Чтобы сблизить стороны b, d , между которыми известен угол, перенесем параллельно сторону AD в положение BD' . Мы можем построить четырехугольник $CBD'D$, так как в нем известны стороны и один из углов. При произвольной точке B строим угол, равный α ; на сторонах его откладываем отрезки $BC = b, BD' = d$; строим точку D , находящуюся на расстоянии c от точки C и на расстоянии a от точки D' . Чтобы получить искомый четырех-

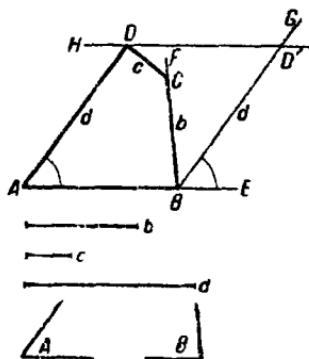


Рис. 101.

угольник, остается провести из точек B, D параллельные к прямым $D'D$, $D'B$ до пересечения в точке A .

140. Предположим, что в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 103) известны стороны $AB = a$, $CD = c$, диагонали $AC = m$, $BD = n$ и угол между диагоналями α . Сделаем параллельный перенос треугольника ABD , при котором вершина A описывает диаго-

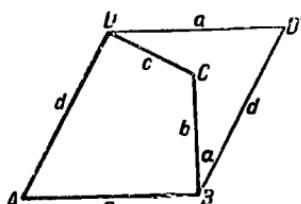


Рис. 102.

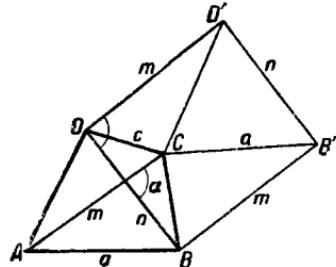


Рис. 103.

наль AC ; при этом вершины B, D опишут отрезки BB' , DD' , равные и параллельные диагонали AC . Параллелограмм $DBB'D'$ можно построить по сторонам $DD' = m$, $DB = n$ и углу $D'DB = \alpha$. После этого можно построить точку C по расстояниям a, c от вершин B', D этого параллелограмма. После этого останется провести через точку D параллельную к $D'C$ и через точку B параллельную к $B'C$, до пересечения в точке A .

141. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ и отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD , $MN = p$ (рис. 104). Перенесем параллельно треугольник ABD в положение $CB'D'$, как в решении 140, и докажем, что отрезок MN параллелен диагонали BD' параллелограмма $DBB'D'$ и равен половине ее. Проведем MM' , NN' в направлении параллельного переноса. MM' есть средняя линия треугольника BAC , а NN' есть средняя линия треугольника CDD' . Отсюда:

$$\begin{aligned} MM' &= \frac{1}{2} AC, \quad NN' = \frac{1}{2} DD' = \\ &= \frac{1}{2} AC, \quad MM' = NN'. \end{aligned}$$

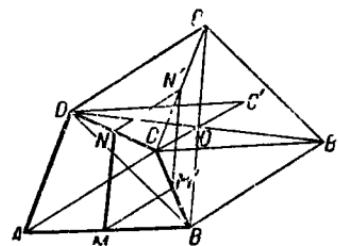


Рис. 104.

Так как в четырехугольнике $MM'N'N$ противоположные стороны MM' , NN' оказались параллельны и равны, то этот четырехугольник есть параллелограмм, и противоположные стороны MN , $M'N'$ также параллельны и равны. Но отрезок

$M'N'$ параллелен отрезку BD' и равен половине его как средняя линия треугольника CBD' . Следовательно, и отрезок MN параллелен отрезку BD' и равен половине его, что и требовалось доказать. Треугольник CBD' можно построить по трем сторонам $CB = b$, $CD' = DA = d$, $BD' = 2MN = 2p$. После этого проводим общую медиану CO треугольников CBD' , $CB'D$, продолжаем ее на равное расстояние до точки C' и строим точку D по ее расстояниям $CD = c$, $C'D = CB' = AB = a$ от точек C , C' . Наконец строим точку A по ее расстояниям $BA = a$, $DA = d$ от точек B , D .

Подобные фигуры

142. Наибольшая сторона 21 второго треугольника сходственна с наибольшей стороной 7 первого и больше ее втрое. Следовательно, стороны второго треугольника, сходственные со сторонами 5 и 4 первого, также втрое больше их и равны 15 и 12.

143. Пусть будут $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ два квадрата. Имеем:

$$A = A_1, B = B_1, C = C_1, D = D_1,$$

так как все эти углы прямые, и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1},$$

так как в каждом квадрате стороны равны. Согласно определению подобия многоугольников, это доказывает подобие квадратов $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$.

144. Пусть в прямоугольниках $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

Переставив средние члены, найдем:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Эти отношения не изменятся, если заменить входящие в них стороны прямоугольников противоположными сторонами. Поэтому:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1}.$$

Кроме того, имеем:

$$A = A_1, B = B_1, C = C_1, D = D_1,$$

так как все эти углы прямые. Отсюда вытекает подобие прямоугольников $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$.

145. Пусть будет O вершина данного угла, $AB, A'B'$ данные отрезки, C, C' точки пересечения перпендикуляров к сторонам угла в концах отрезков $AB, A'B'$ (рис. 105). Треугольники $OAB, OA'B'$ подобны, так как они отсечены параллельными прямыми от одного и того же угла. Отсюда:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}, \quad \angle OAB = \angle OA'B'$$

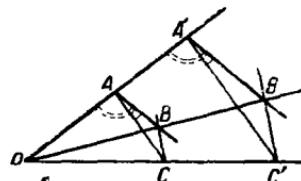


Рис. 105.

Треугольники $ABC, A'B'C'$ подобны, так как их соответственные стороны параллельны. Отсюда имеем:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \quad \angle BAC = \angle B'A'C'$$

Сопоставляя полученное, находим:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \angle OAC = \angle OA'C'$$

Отсюда следует, что треугольники $OAC, OA'C'$ подобны, так как они имеют по равному углу между пропорциональными сторонами. Вследствие этого углы $AOC, A'C'$ равны, и потому стороны OC, OC' совпадают, что и доказывает теорему.

146. В треугольнике ABC (рис. 106) стороны AB, AC разделены точками B', C' в отношении

$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C} = m.$$

Кроме того, дано

$$BC = a.$$

Требуется определить $B'C' = x$. Из пропорции

$$\frac{AB}{B'B} = \frac{AC}{C'C}$$

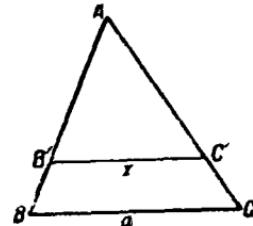


Рис. 106.

следует, что прямые $BC, B'C'$ параллельны. Поэтому треугольники $ABC, AB'C'$ подобны и мы имеем:

$$\frac{x}{a} = \frac{AB'}{AB}.$$

Остается определить последнее отношение. Это можно сделать с помощью производных пропорций:

$$\frac{AB'}{B'B} = \frac{m}{1}, \quad \frac{AB'}{AB' + B'B} = \frac{m}{m+1} \quad \frac{AB}{AB} = \frac{m}{m+1}$$

Можно сделать и так:

$$\frac{AB'}{B'B} = m; AB' = m \cdot B'B;$$

$$AB = AB' + B'B = m \cdot B'B + B'B = (m+1) B'B;$$

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{m}{m+1}.$$

Но проще всего вычисление ведется так: примем $B'B = 1$; тогда $AB' = m$, и $AB = 1 + m$, так что

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{1+m};$$

отсюда найдем:

$$x = \frac{ma}{1+m}.$$

147. В трапеции $ABCD$ (рис. 107) дано:

$$AB = a, DC = b,$$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = m.$$

Из пропорции следует, что прямая EF параллельна основаниям AB, DC . Проведя DGH параллельно CB , получим поэтому два подобных треугольника DEG, DAH . Положив $ED = 1$, и следовательно, $AE = m$ и $AD = 1 + m$, найдем соотношения

$$\frac{EG}{a-b} = \frac{1}{1+m}, \quad EG = \frac{a-b}{1+m}.$$

Кроме того, очевидно:

$$GF = b.$$

Отсюда находим искомое расстояние:

$$\begin{aligned} EF &= EG + GF = \frac{a-b}{1+m} + b = \\ &= \frac{a+mb}{1+m}. \end{aligned}$$

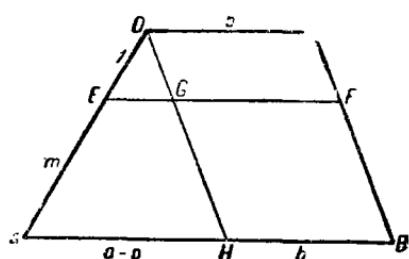


Рис. 107.

148. Чтобы построить центр тяжести Q треугольника ABC (рис. 108), делим BC пополам в точке M и затем делим AM в отношении $2:1$, считая от A , в точке Q . Пусть будут

$$AA' = p, BB' = q, CC' = r, MM' = s, QQ' = x$$

расстояния точек A, B, C, M, Q от некоторой прямой. Из этих расстояний p, q, r даны, а x требуется определить. Из трапеции $BCC'B'$ найдем по теореме о средней линии:

$$s = \frac{q+r}{2}.$$

Из трапеции $AMM'A'$ найдем на основании решения 147:

$$\lambda = \frac{p+2s}{1+2} = \frac{p+q+r}{3}.$$

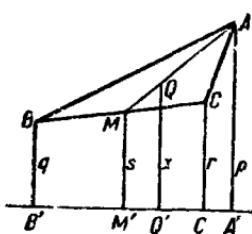


Рис. 108

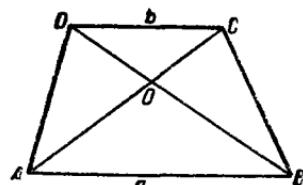


Рис. 109.

149. Из подобия треугольников OAB, OCD (рис. 109) находим:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b},$$

то-есть, диагонали трапеции делят друг друга в отношении оснований.

150. В трапеции $ABCD$ (рис. 110) боковые стороны AD, BC продолжены до пересечения в точке O . По данным основаниям $AB = a, DC = b$ требуется узнать отношения, в которых точка O делит стороны AD, BC , то-есть отношения

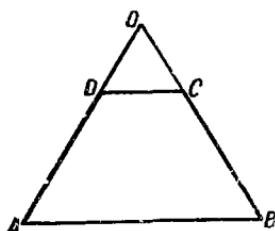


Рис. 110

$$\frac{AO}{OD} \quad \frac{BO}{OC}.$$

Из подобия треугольников OAB, ODC находим:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OC} = \frac{a}{b}.$$

то-есть боковые стороны трапеции делят друг друга в отношении оснований. Сравнивая этот результат с результатом решения 149, видим, что диагонали и боковые стороны трапеции делят друг друга в одинаковом отношении. Разница только в том, что точка пересечения диагоналей лежит на них самих, то-есть делит их внутренним образом в этом отношении, а точка пересечения боковых сторон лежит на их продолжениях, то-есть делит их внешним образом в том же отношении.

151. Согласно решению 149 отрезки AO , OC диагонали AC пропорциональны основаниям AB , CD (рис. 111). Отсюда находим:

$$AO = ka, OC = kb, AC = k(a + b),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Из подобия треугольников AOE , ACD находим:

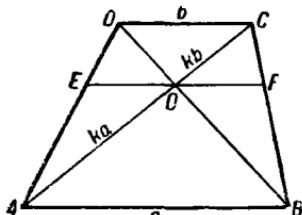


Рис. 111.

$$\frac{OE}{b} = \frac{ka}{k(a+b)} = \frac{a}{a+b}$$

откуда:

$$OE = \frac{ab}{a+b}.$$

Таким же образом найдем:

$$OF = \frac{ab}{a+b}.$$

Складывая оба равенства, получим искомый отрезок:

$$EF = \frac{2ab}{a+b}.$$

152. Согласно решению 150 расстояния AO , CD точки пересечения O боковых сторон от концов боковой стороны AD пропорциональны основаниям AB , DC (рис. 112). Отсюда находим:

$$AO = ka, OD = kb, AD = k(a - b).$$

Из подобия треугольников AOE , ADC легко находим:

$$\frac{OE}{b} = \frac{ka}{k(a-b)} = \frac{a}{a-b},$$

откуда

$$OE = \frac{ab}{a-b}.$$

Таким же образом найдем:

$$OF = \frac{ab}{a-b}$$

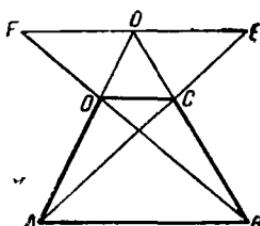


Рис. 112.

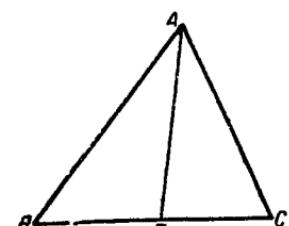


Рис. 113.

Складывая оба равенства, сразу получим искомый отрезок:

$$EF = \frac{2ab}{a-b}.$$

153. Пусть AD — внутренняя биссектриса треугольника ABC (рис. 113). Требуется по сторонам треугольника определить отрезки BD , DC . По известной теореме отрезки BD , DC пропорциональны сторонам AB , AC :

$$BD = kc, \quad DC = kb.$$

Складывая почленно, получаем:

$$a = k(c + b).$$

Отсюда:

$$k = \frac{a}{c + b},$$

и следовательно:

$$BD = \frac{ac}{c + b}, \quad DC = \frac{ab}{c + b}.$$

154. Пусть AD — внешняя биссектриса треугольника ABC (рис. 114). Требуется по сторонам треугольника определить отрезки BD , DC . По известной теореме отрезки BD , DC пропорциональны сторонам AB , AC :

$$BD = kc, \quad DC = kb.$$

Вычитая почленно, находим:

$$a = k(c - b),$$

откуда:

$$k = \frac{a}{c - b},$$

и следовательно:

$$BD = \frac{ac}{c - b}, \quad DC = \frac{ab}{c - b}.$$

На рис. 114 $b < c$. Если бы было $b > c$, то мы имели бы:

$$BD = \frac{ac}{b - c}, \quad DC = \frac{ab}{b - c}.$$

При $b = c$ выражения для BD , DC теряют смысл, или, как говорят, обращаются в бесконечность. И действительно, в этом случае биссектриса внешнего угла при вершине A пересекает основание BC или, как говорят, пересекает его в бесконечности.

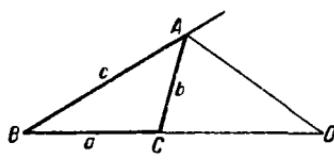


Рис. 114.

155. Прямая пересекает стороны AB , AC , BC треугольника ABC или их продолжения в точках M , N , P (рис. 115). По данным отношениям:

$$\frac{BM}{AM} = m, \frac{CN}{AN} = n$$

требуется определить отношение:

$$\frac{BP}{CP} = p.$$

Проведем AQ , параллельную к прямой MNP . Имеем:

$$\frac{BP}{PQ} = \frac{BM}{AM} = m, \frac{CP}{PQ} = \frac{CN}{AN} = n.$$

Отсюда:

$$BP = m \cdot PQ, CP = n \cdot PQ, \frac{BP}{CP} = \frac{m}{n}.$$

Итак:

$$p = \frac{m}{n}.$$

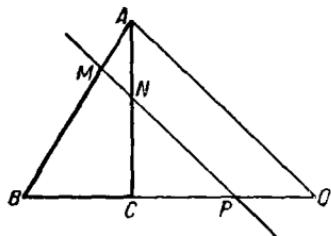


Рис. 115.

Для доказательства безразлично, пересекает ли прямая MNP самые стороны треугольника или их продолжения. Заметим однако, что прямая может или пересекать две стороны и продолжение третьей, как на нашем чертеже, или пересекать продолжения всех трех сторон треугольника. Это нужно иметь в виду, когда из соотношения:

$$p = \frac{m}{n}$$

желательно вывести, что точки M , N , P лежат на одной прямой. Такое обращение нашей теоремы справедливо только в том случае, когда две точки лежат на самих сторонах, а третья — на продолжении стороны, или все три точки лежат на продолжениях сторон треугольника. Ниже будут приведены примеры такого пользования теоремой. В несколько другой форме эта важная теорема носит название теоремы Менелая.

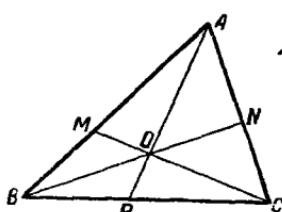


Рис. 116

156. Прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с точкой O , пересекают его стороны AB , AC , BC или их продолжения в точках M , N , P (рис. 116). По данным отношениям

$$\frac{BM}{AM} = m, \frac{CN}{AN} = n$$

требуется определить отношение:

$$\frac{BP}{CP} = p.$$

Обозначим для простоты:

$$\frac{PO}{AO} = k.$$

Применяя теорему Менелая к треугольнику ABP с пересекающей MOC и к треугольнику ACP с пересекающей NOB , получим:

$$\frac{PC}{BC} = \frac{k}{m}, \quad \frac{PB}{CB} = \frac{k}{n}$$

откуда

$$PC = \frac{k \cdot BC}{m}, \quad PB = \frac{k \cdot CB}{n}, \quad \frac{PB}{PC} = \frac{m}{n}$$

Итак:

$$p = \frac{m}{n}$$

Заметим, что точки M, N, P или все лежат на сторонах, или одна лежит на стороне, а две другие на продолжениях сторон треугольника. Полученная теорема называется теоремой Чевы.

157. В треугольнике ABC (рис. 117) проведены внутренние биссектрисы BN, CM и внешняя биссектриса AP . Требуется доказать, что точки M, N, P лежат на одной прямой. Обозначим, как всегда

$$BC = a, AC = b, AB = c.$$

Точки M, N делят стороны BA, CA внутренним образом в отношениях:

$$\frac{BM}{AM} = \frac{a}{b}, \quad \frac{CN}{AN} = \frac{a}{c}$$

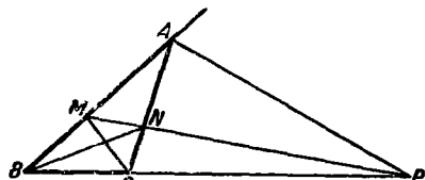


Рис. 117

По теореме Менелая точка пересечения P' прямой MN с основанием BC делит его внешним образом в отношении:

$$\frac{BP'}{CP'} = \frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

но в том же отношении:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{c}{b}$$

делит его и точка P , и тоже внешним образом. Отсюда заключаем, что точки P, P' совпадают, так что точка P лежит на прямой MN , что и требовалось доказать. Мы воспользовались тем, что две несовпадающие точки P, P' не могли бы делить отрезок AC внешним образом в одном и том же отношении. Предоставляем доказательство этого положения читателю.

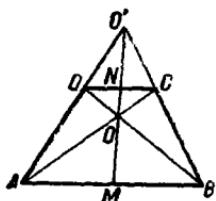


Рис. 118

158. В трапеции $ABCD$ (рис. 118) проведена прямая через точку пересечения O, O' диагоналей и боковых сторон. Требуется доказать, что точки пересечения M, N этой прямой с основаниями суть середины оснований. Применим теорему Чевы к треугольнику $O'AB$ и точке O :

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AD}{O'D} : \frac{BC}{O'C}.$$

Но из параллельности прямых AB, DC следует:

$$\frac{AD}{O'D} = \frac{BC}{O'C}$$

Отсюда находим:

$$\frac{AM}{BM} = 1, \quad AM = BM,$$

что и требовалось доказать относительно точки M . Точно так же, применяя теорему Чевы к треугольнику $O'DC$, получим:

$$\frac{DN}{CN} = \frac{DA}{O'A} : \frac{CB}{O'B} = 1, \quad DN = CN,$$

что заканчивает требуемое доказательство. Можно, впрочем, ограничиться применением теоремы Менелая и даже обойтись без применения обеих теорем, что составляет полезное упражнение.

159. Треугольники $ABC, A'B'C'$ расположены так, что точки пересечения D, E, F соответственных сторон лежат на одной прямой (рис. 119). Требуется доказать, что соединительные прямые AA' , BB' , CC' соответствующих вершин пересекаются в одной точке или параллельны. Выясним сначала расположение частей фигуры. Выберем обозначения так, чтобы точка F лежала на продолжении отрезка DE , что всегда возможно сделать. Рассматривая треугольники $ADE, A'DE$ с пересекающими $FCB, FC'B'$, убеждаемся на основании замечания, сделанного в конце решения 155, что точки B, C должны одновременно лежать на отрезках AD, AE или на их

продолжениях, и точно так же точки B' , C' должны одновременно лежать на отрезках $A'D$, $A'E$ или на их продолжениях. Переходя к треугольникам ADA' , EAA' , заключаем отсюда, что точки B , B' расположены относительно отрезков DA , DA' так же, как точки C , C' расположены относительно отрезков EA , EA' . На основании того же замечания из решения 155 мы вправе сделать вывод, что прямые BB' , CC' или обе пересекают отрезок AA' или обе не пересекают его. Теперь перейдем к количественным соотношениям частей фигуры, рассматривая те же треугольники в том же порядке. Обозначим для краткости:

$$\frac{DF}{EF} = p, \quad \frac{DB}{AB} = m, \quad \frac{EC}{AC} = n,$$

$$\frac{DB'}{A'B'} = m', \quad \frac{EC'}{A'C'} = n'.$$

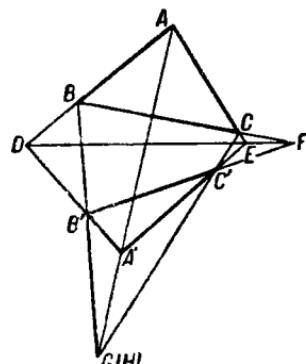


Рис. 119.

По теореме Менелая находим из треугольника ADE с пересекающей FCB и из треугольника $A'DE$ с пересекающей $FC'B$.

$$p = \frac{m}{n}, \quad p = \frac{m'}{n'},$$

откуда:

$$m = np, \quad m' = n'p.$$

Если прямая CC' параллельна прямой AA' , то она делит отрезки EA , EA' одинаковым образом и в равных отношениях n , n' . Тогда прямая BB' делит отрезки DA , DA' также одинаковым образом и также в равных отношениях np , $n'p$. Поэтому прямая BB' также параллельна прямой AA' . Таким же образом можно доказать, что из параллельности прямой BB' к прямой AA' вытекает параллельность прямой CC' к прямой AA' . Следовательно, прямые BB' , CC' или обе параллельны прямой AA' , или обе пересекают ее. Остается доказать, что в последнем случае точки пересечения совпадают. Обозначим точки пересечения прямых BB' , CC' с прямой AA' через G , H . Применяя теорему Менелая к треугольнику DAA' с пересекающей BB' и к треугольнику CAA' с пересекающей CC' , находим:

$$\frac{AG}{A'G} = \frac{1}{m} : \frac{1}{m'} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n},$$

$$\frac{AH}{A'H} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n'} = \frac{n'}{n}.$$

откуда:

$$\frac{AG}{A'G} = \frac{AH}{A'H}.$$

Таким образом, точки G, H делят отрезок AA' в одинаковых отношениях, а по доказанному выше, и одинаковым образом. Следовательно, точки G, H совпадают, что и оставалось доказать.

Задачи на построение

160. Пусть будет A данная точка, K —данный круг, O —его центр (рис. 120). Требуется провести секущую $AM'M$ так, чтобы было:

$$AM' = 2M'M.$$

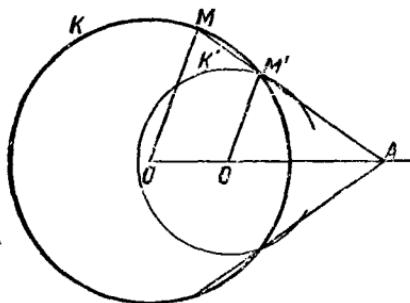


Рис. 120.

Эта задача есть обобщение задачи 102 и может быть решена сходным образом. Проведем $M'O'$ параллельно MO . Из условия находим $AM' = \frac{2}{3} AM$, а затем из подобия треугольников $AM'O'$, AMO получаем $M'O' = \frac{2}{3} MO$. Для точки M'

имеем два геометрических места: окружность K и окружность K' , описанную около точки O' , находящейся на отрезке AO на расстоянии двух третей его от точки A , радиусом, равным двум третям радиуса окружности K . Точки M' суть общие точки этих геометрических мест. Но можно прийти к тому же решению и более общим рассуждением. От точки M требуется, чтобы она лежала на окружности K , а от точки M' чтобы она лежала на отрезке AM на расстоянии $\frac{2}{3} AM$ от его

начала A , и, кроме того, на окружности K . Если отбросим последнее условие, то первые два условия дадут в качестве геометрического места для точки M' окружность, прямоподобно расположенную с окружностью K относительно центра подобия A с отношением подобия $\frac{2}{3}$, то есть уже найденную нами окружность K' . Этот метод применим, конечно, и к задаче 102.

161. Пусть будет K данный круг, O —его центр, b, c —даные прямые, a —прямая, показывающая направление искомой прямой (рис. 121). Если BC искомая прямая, так что $BD=CE$,

и M — середина DE , то M есть также середина BC . Кроме того, по известному свойству хорды, OM будет перпендикулярна к BC . Таким образом для M имеем два геометрических места: диаметр круга K , перпендикулярный к направлению a , и геометрическое место середин отрезков, заключенных между прямыми b , c и параллельных направлению a . Легко доказать, что последнее геометрическое место есть прямая, которая проходит через точку пересечения прямых b , c , если они пересекаются, и параллельна им, если они параллельны между собой; предоставляем доказательство читателю. Чтобы построить это геометрическое место, достаточно построить одну его точку — середину M' какого-нибудь отрезка $B'C'$, заключенного между прямыми b , c и параллельного направлению a ; после этого останется соединить эту точку с точкой пересечения прямых b , c или, в случае параллельности этих прямых, провести через эту точку параллельную к ним. Искомая точка M должна быть точкой пересечения двух найденных геометрических мест. Такой точки может и не быть, но даже если она существует, она все же не дает решения задачи, если она окажется вне круга K . Если же точка M существует и лежит внутри или на окружности круга K , то задача имеет определенное решение. Предлагаем читателю подробно провести исследование и доказательство.

162. Дан треугольник ABC (рис. 122). Требуется построить квадрат $DEFG$ со стороной DE на основании BC , вершиной G на стороне AB и вершиной F на стороне AC . Отбросив последнее требование, получим бесчисленное множество квадратов вида $D'E'F'G'$, к числу которых должен принадлежать и искомый квадрат $DEFG$. Всякие два таких квадрата подобно расположены, потому что они подобны, как всякие вообще квадраты, и сходственные стороны их параллельны в силу условий задачи. Так как сходственные вершины вида D лежат на прямой BC , а сходственные вершины вида G' лежат на прямой BA , то центр подобия есть точка пересечения B прямых BC , BA , и, следовательно, сходственные вершины вида F' также лежат на прямой, проходящей через точку B .

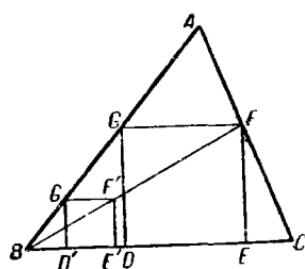


Рис. 122

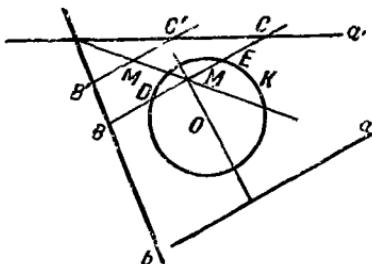


Рис. 121

Отсюда вытекает следующее построение: строим какой-нибудь квадрат вида $D'E'F'G'$; проводим прямую BF' до пересечения со стороной AC в точке F ; строим искомый квадрат $DEFG$. Задача всегда имеет одно решение.

163. Решение этой задачи почти в точности совпадает с решением 162.

164. Пусть будет OAB искомый сектор (рис. 123). Докажем, что искомый квадрат $CDEF$ должен быть симметричен относительно биссектрисы угла AOB .

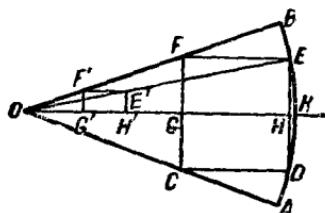


Рис. 123.

Перпендикуляр OH к хорде DE делит ее пополам. Поэтому он также перпендикулярен к стороне FC и делит ее пополам. Следовательно, OH разбивает квадрат $CDEF$ на два симметричных прямоугольника $GHDC$, $GHEF$. Остается доказать, что OH есть биссектриса угла AOB . Но это видно из того, что в треугольнике OCF линия OG есть одновременно медиана и высота; следовательно, он равнобедренный, и OG есть также и биссектриса.

Теперь задача сводится к тому, чтобы вписать в половину KOB сектора AOB прямоугольник $GHEF$ с отношением сторон $GH:GF=2$ так,

чтобы сторона GH лежала на радиусе OK , вершина F на радиусе OB и вершина E на дуге KB . Для этого строим какой-нибудь прямоугольник $G'H'E'F'$, удовлетворяющий всем этим условиям, кроме последнего, проводим прямую OE' до пересечения с дугой KB в точке E и строим искомый прямоугольник $GHEF$. Впрочем, найдя точку E , можно сразу построить квадрат $CDEF$.

Решение всегда одно.

165. Решение этой задачи родственно решению 164.

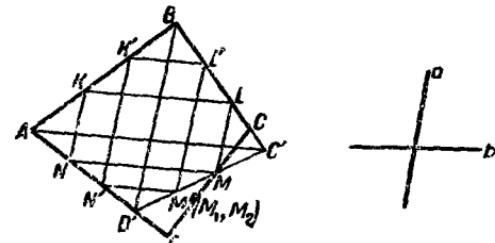


Рис. 124.

166. Требуется вписать в четырехугольник $ABCD$ (рис. 124) параллелограмм, в котором стороны, отсекающие углы A , C , были бы параллельны направлению a , а стороны, отсекающие углы B , D , были бы параллельны направлению b . Указанным требованиям наверное нельзя удовлетворить, если какая-либо из прямых, проведенных через A , C параллельно a , или через B , D параллельно b , не проходит вся снаружи четырехугольника $ABCD$. Предположим поэтому, что направления a , b выбраны в согласии с последним требованием. Мы можем построить

сколько угодно параллелограммов с требуемыми направлениями сторон и с тремя вершинами на требуемых сторонах четырехугольника или их продолжениях. Для этого из произвольной точки K' прямой AB проводим прямую в направлении b до пересечения с прямой BC в точке L' и другую прямую в направлении a до пересечения с прямой AD в точке N' ; затем проводим из точек L', N' прямые в направлениях a, b до пересечения в точке M' . Все параллелограммы $K'L'M'N'$ имеют указанные свойства. Если среди них имеются такие $KLMN$, у которых вершина M лежит на стороне CD , то это и будут искомые. Иначе говоря, искомые вершины M суть общие точки стороны CD и геометрического места вершины M' , когда вершина K' описывает прямую AB . Чтобы найти это геометрическое место, проведем через вершину A прямую в направлении b до пересечения с прямой BC в точке C' и через точку B прямую в направлении a до пересечения с прямой AD в точке D' . Мы докажем, что прямая CD' есть искомое геометрическое место вершины M' . Для этого достаточно доказать, что точки пересечения прямой CD' со сторонами $L'M', N'M'$ совпадают. Обозначим эти точки через M_1, M_2 . Из рис. 124 легко найдем, следя за произведенным выше построением параллелограмма $K'L'M'N'$:

$$\frac{AK'}{K'B} = \frac{C'L}{L'B} = \frac{C'M_1}{M_1D'}, \quad \frac{AK'}{K'B} = \frac{AN'}{N'D'} = \frac{C'M_2}{M_2D'}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{C'M_1}{D'M_1} = \frac{C'M_2}{D'M_2},$$

то-есть точки M_1, M_2 делят отрезок CD' в одинаковых отношениях. Из того же хода рассуждений, который дает равенство всех этих отношений, видно, что точки M_1, M_2 делят отрезок CD' не только в одинаковых отношениях, но и одинаковым образом. Следовательно, точки M_1, M_2 совпадают и сливаются с точкой M' . Когда точка K' описывает прямую BA , точка M' описывает прямую $D'C'$. Если прямая $D'C'$ пересекает сторону DC в некоторой точке M , то от этой точки можно построить параллелограмм $KLMN$, который удовлетворит всем требованиям задачи, так что в этом случае получится одно решение. Если прямая $D'C'$ параллельна стороне BC или пересекает только ее продолжение, то задача не имеет решения.

167. Требуется около четырехугольника $ABCD$ (рис. 125) описать четырехугольник $E'F'G'H'$, подобный четырехуголь-

нику $EFGH$, так чтобы углы E' , F' , G' , H' опирались на стороны AB , BC , CD , DA . Так как угол E' должен быть равен углу E , то он должен лежать на дуге, опирающейся на сторону AB и вмещающей угол, равный E . Так как угол $F'E'G'$ должен быть равен углу FEG , то он должен опираться на часть BE_1 остальной дуги той же окружности, на которую опираются все вписанные углы, равные FEG . Следовательно, диагональ $E'G'$ должна про-

ходить через вполне определенную точку E_1 , которую нетрудно построить по данным задачи. Из такого же рассмотрения угла G' найдем вторую точку G_1 диагонали $G'E'$. Построим точки E_1 , G_1 , проведем прямую E_1G_1 до пересечения с дугами, опирающимися на стороны AB , CD и вмещающими углы E , G , в точках E' , G' , проведем прямые $E'B$, $G'C$ до пересечения в точке F' и прямые $E'A$, $G'D$ до пересечения в точке H' .

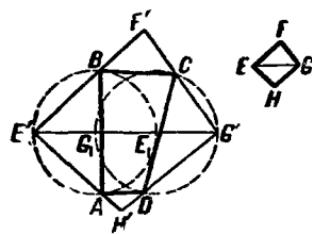
Рис. 125.

Четырехугольник $E'F'G'H'$ и будет искомый. В том, что он подобен четырехугольнику $EFGH$, убедимся проще всего, замечая, что диагонали $E'G'$, EG сходственным образом разбивают эти четырехугольники на треугольники с соответственно равными углами при сторонах $E'G'$, EG .

168. Пусть требуется в четырехугольник Q_1 вписать четырехугольник Q'' , подобный четырехугольнику Q_2 . Применим метод обратности. Опишем около четырехугольника Q_2 четырехугольник Q' , подобный четырехугольнику Q_1 , что мы можем сделать на основании решения 167. После этого разделим стороны четырехугольника Q_1 в тех же отношениях, в каких вершины четырехугольника Q_2 делят стороны четырехугольника Q' . Точки деления и будут вершинами искомого четырехугольника Q'' .

169. Здесь можно применить метод обратности. Опишем круг около данного треугольника и проведем радиусы к его вершинам. Затем проведем в данном круге радиусы под теми же углами и соединим их концы. Получим искомый треугольник.

170. По двум углам можно построить треугольник, подобный искомому, и в нем построить расстояние между центрами описанного и вписанного кругов. После этого останется изменить его линейные размеры в отношении данного расстояния между центрами к построенному только что. Полученный треугольник будет искомый. Самое построение можно выполнить различными способами, и мы рекомендуем читателю поискать самый удобный.



Пропорциональные отрезки в кругах

171. Обозначив искомые отрезки через x, y , имеем:

$$x + y = b, \quad xy = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Отсюда видно, что x, y суть корни квадратного уравнения

$$z^2 - bz + \frac{a^2}{4} = 0,$$

то-есть равны

$$\frac{1}{2} (b + \sqrt{b^2 - a^2}), \quad \frac{1}{2} (b - \sqrt{b^2 - a^2}).$$

172. \sqrt{ab} .

173. Пусть будет A данная точка, O —центр данного круга $BOAC$ —диаметр этого круга, проведенный через точку A , DAE —хорда того же круга, перпендикулярная к этому диаметру в точке A (рис. 126). По свойству отрезков хорд будем иметь:

$$AD \cdot AE = AB \cdot AC = \\ = (OB + OA)(OC - OA),$$

или

$$\left(\frac{1}{2} DE\right)^2 = (r + d)(r - d),$$

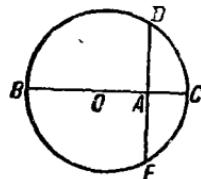


Рис. 126.

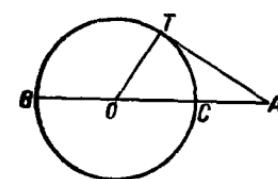


Рис. 127.

откуда

$$DE = 2\sqrt{r^2 - d^2}.$$

174. Пусть будет A данная точка, O —центр данного круга, $BOCA$ —диаметр, проходящий через точку A , AT —касательная из точки A (рис. 127). По свойству отрезков секущей имеем:

$$AT^2 = AB \cdot AC = (OA + OB)(OA - OC),$$

или

$$AT^2 = (d + r)(d - r),$$

откуда

$$AT = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

175. В треугольнике ABC (рис. 128) проведем высоту AH и обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $CH=m$. Опишем около A окружность радиусом $AC=b$ и обозначим вторую точку пересечения ее с AC через D , а точки пересечения с AB через E, F , как показано на чертеже. Имеем:

$$BE \cdot BF = BC \cdot BD.$$

Если угол C острый, то это равенство можно переписать в виде:

$$(AB + AE)(AB - AF) = BC(BC - 2CH),$$

или

$$(c + b)(c - b) = a(a - 2m),$$

откуда найдем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2am.$$

Если угол C тупой, то то же равенство можно переписать в виде:

$$(AB + AE)(AB - AF) = BC(BC + 2CH),$$

или

$$(c + b)(c - b) = a(a + 2m),$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2am.$$

Если угол C прямой, то, очевидно BC из секущей превра-

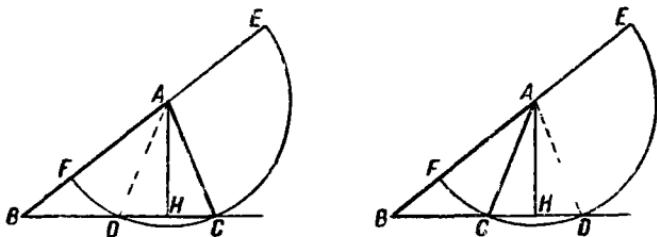


Рис. 128.

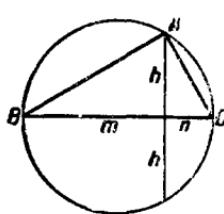


Рис. 129

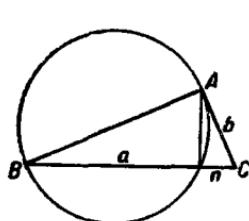


Рис. 130.

щается в касательную, и мы таким же образом будем иметь:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доказательство соотношений в прямоугольном треугольнике

$$h^2 = mn, \quad b^2 = an$$

ясно из рис. 129.

176. Пусть будет A данная точка, BC — данная хорда, AD — перпендикуляр к BC , BE и CF — перпендикуляры к касательной EF в точке A (рис. 130). Требуется доказать:

$$\frac{BE}{AD} = \frac{AD}{CF}.$$

Прямоугольные треугольники ABD , ACF подобны, так как у них острые углы ABD , CAF измеряются половиной одной и той же дуги AC . Таким же образом докажем подобие треугольников ACD , ABE . Четырехугольники $BEAD$, $ADCF$ подобны, так как они сходственным образом составлены из подобных треугольников. Приравнивая отношения сходственных сторон, получим:

$$\frac{BE}{AD} = \frac{AD}{CF},$$

что и требовалось доказать.

177. На рис. 131 изображены два возможных случая расположения точек M , A_1 , B_1 , A_2 , B_2 . В первом случае

точки A_1 , B_1 и A_2 , B_2 расположены по разные стороны от точки M , во втором случае по одну сторону. В обоих случаях проведем окружность через точки A_1 , A_2 , B_2 и обозначим точку пересечения ее с прямой MA_1 через B' . По теореме об отрезках хорд или секущих получим в обоих случаях:

$$MA_1 \cdot MB' = MA_2 \cdot MB_2.$$

Сравнивая это соотношение с предположенным в условии

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2,$$

заключаем, что

$$MB' = MB_1.$$

Теперь рассмотрим каждый случай отдельно. В первом случае точка M лежит на самой хорде A_2B_2 и, следовательно, внутри круга. Поэтому направление отрезка MB' обратно направлению отрезка MA_1 . Таково же по условию и направление отрезка MB_1 . Так как отрезки MB' , MB_1 равны и отложены в одну сторону от точки M , то их концы B' , B_1 совпадают, и, следовательно, точки A_1 , B_1 , A_2 , B_2 лежат на одной окружности. Рассмотрение второго случая предоставляем читателю. Заметим только, что в этом случае точки A_1 , B_1 могут и совпадать. Тогда секущая MA_1 обратится в касательную.

178. Пусть общие хорды A_1B_1, A_2B_2 кругов O_1, O_2 с кругом O сходятся в точке M (рис. 132). Мы не предполагаем обязательно, что точка M принадлежит самим хордам, она может лежать и на их продолжениях; частный случай, когда она совпадает с их концами, мы пока не будем рассматривать.

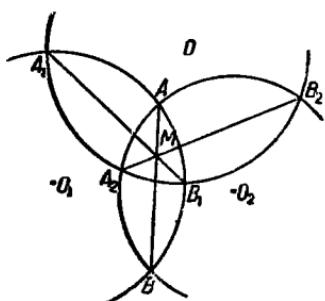


Рис. 132.

Если точка M лежит внутри круга O , то она лежит на симметричных хордах A_1B_1, A_2B_2 и, следовательно, лежит и внутри кругов O_1, O_2 . Если же точка M лежит вне круга O , то она лежит на продолжениях хорд A_1B_1, A_2B_2 и, следовательно, лежит и вне кругов O_1, O_2 . Приложения в первом случае теорему об отрезках хорд, а во втором случае теорему об отрезках секущих, получим в обоих случаях:

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = k.$$

Обозначив через A одну из точек пересечения окружностей O_1, O_2 , проведем прямую MA и отложим на ней отрезок MB , равный $k : MA$, так что

$$MA \cdot MB = k,$$

причем в первом случае отложим его от точки M в направлении, обратном направлению отрезка MA , а во втором случае в направлении отрезка MA . На основании равенства $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1$ и одинаковости расположения точек A, B и A_1, B_1 по отношению к точке M , заключаем по теореме 177, что точка B лежит на окружности, проходящей через точки A, A_1, B_1 , то есть, на окружности O_1 . Так же докажем, что точка B лежит на окружности O_2 . Следовательно, точка B есть общая точка окружностей O_1, O_2 , и, следовательно, AB общая хорда их. Мы видим, что общие хорды AB, A_1B_1, A_2B_2 окружностей O, O_1, O_2 сходятся в одной точке M , что и требовалось доказать в рассматриваемом случае. Если теперь хорды A_1B_1, A_2B_2 параллельны, то диаметр круга O , перпендикулярный к ним, есть также диаметр кругов O_1, O_2 , и, следовательно, перпендикулярен и к хорде AB . Следовательно, хорды AB, A_1B_1, A_2B_2 параллельны, что и нужно было доказать в этом случае. В случае, который мы вначале оставили в стороне, когда точка M лежит на окружности круга O , она лежит также на окружностях кругов O_1, O_2 , так что она будет общим концом хорд AB, A_1B_1, A_2B_2 , которые таким образом и в этом случае сходятся в одной точке.

179. Пусть круги K, K' , проходящие через точки A, B , пересекают круг L (рис. 133). Обозначим общую хорду кругов K, L через CD и один из концов общей хорды кругов K', L через C' . Рассмотрев в решении 178 все возможные случаи, мы ограничимся теперь одним случаем, когда хорда CD пересекает прямую AB , и точка пересечения P лежит вне круга K . По теореме об отрезках секущих имеем:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = k.$$

Отложим на прямой PC' по направлению PC' отрезок PD' , равный $k : PC'$, так что

$$PD' \cdot PC' = k.$$

Так как $PA \cdot PB = PC' \cdot PD'$, и точки A, B и C', D' расположены по одну сторону от точки P , то по теореме 177 точка D' лежит на окружности, проходящей через точки A, B, C' , то есть на окружности K' . Так же убедимся, что точка D' лежит на окружности L . Таким образом точка D' есть общая точка окружностей K', L , и, следовательно, $C'D'$ — общая хорда их. Мы видим, что хорды $CD, C'D'$ пересекают прямую AB в одной и той же точке P , что и требовалось доказать. Заметим, что теорема остается верной и в том случае, когда общая секущая $C'D'$ кругов K', L обращается в их общую касательную.

180. По известной теореме

$$MT^2 = MA \cdot MB, \quad MT'^2 = MA \cdot MB.$$

Отсюда:

$$MT = MT',$$

что и требовалось доказать (рис. 134).

181. Данна окружность K , точка A на ней и прямая CD , перпендикулярная к диаметру AB (рис. 135). Требуется доказать, что для всех прямых, проходящих через точку A и пересекающих прямую CD , произведение отрезков AB', AC' , отсекаемых на них окружностью и прямой, имеет одно и то же значение. Пусть C не совпадает с A . В треугольнике ABB' угол B' прямой, так как он вписанный и опирается на диаметр. Прямоугольные треугольники ABB' , $AC'C$ подобны, так как у них острый угол A общий. Следовательно:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC}{AC'},$$

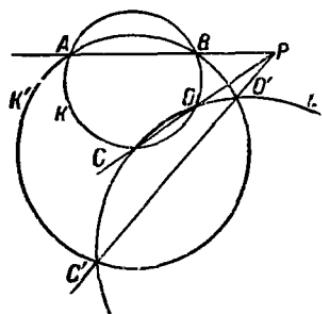


Рис. 133.

откуда:

$$AB' \cdot AC' = AB \cdot AC,$$

что и доказывает теорему в рассматриваемом случае. Если же

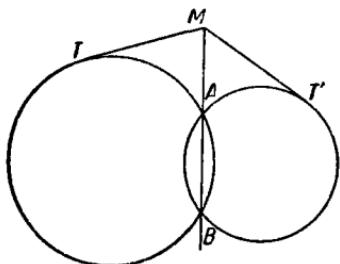


Рис. 134.

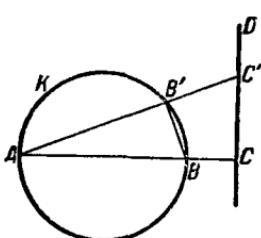


Рис. 135.

C совпадает с A , то теорема вытекает из того, что AC' , а следовательно, и $AB' \cdot AC'$ всегда нуль.

182. Из центра подобия S окружностей K, K' проведены две секущие (рис. 136). Выберем на этих секущих две точки

A, B окружности K и найдем на них же сходственные точки A', B' и несходственные точки A_1, B_1 окружности K' . Требуется доказать:

$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1.$$

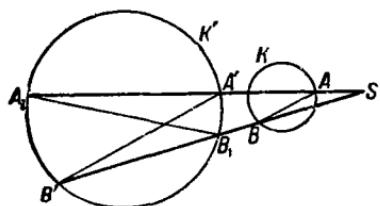


Рис. 136.

Так как точки A', B' сходственны с точками A, B , то прямая $A'B'$ параллельна прямой AB , и следовательно, угол $A'B'S$ равен углу ABS . С другой стороны, угол $A'B'S$ равен углу B_1A_1S , так как оба угла вписаны в круг K' и опираются на одну и ту же дугу $A'B_1$. Следовательно, углы ABS, B_1A_1S равны между собой. Эти углы принадлежат треугольникам ABS, B_1A_1S , которые сверх того имеют общий угол S . По двум углам треугольники ABS, B_1A_1S подобны. Отсюда находим:

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SB_1}{SA_1}.$$

или

$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1,$$

что и требовалось доказать. На рис. 136 S есть центр прямого подобия, но сходными рассуждениями теорема доказывается и для центра обратного подобия.

Задачи на построение

183. Мы можем ограничиться случаем, когда данные прямые пересекаются, и данная точка не лежит на них, потому что случай, когда данные прямые параллельны, есть частный случай задачи 91, а случай, когда данная точка лежит на данной прямой, был предметом задачи

95. Пусть будет PQR тот угол между данными прямыми, внутри которого лежит данная точка A (рис. 137). Искомый круг также должен лежать внутри угла PQR . Построим какой-нибудь круг K , касательный к сторонам угла PQR . К числу таких кругов принадлежит и искомый. Докажем, что каждая пара таких кругов имеет центром прямого подобия точку Q . Действительно, точки касания их к прямой PQ сходственны при прямом подобии, потому что эти точки суть концы параллельных и одинаково направленных радиусов. Поэтому прямая PQ должна проходить через центр прямого подобия. То же самое справедливо и относительно прямой RQ . Следовательно, центр прямого подобия есть точка Q .

Сходственные точки всех этих кругов должны лежать на полуправых, исходящих из точки Q . Так, например, центры их лежат на биссектрисе QS угла PQR . Точки круга K , сходственные с точкой A искомых кругов, должны лежать на полуправой QA . Вследствие этого их легко найти: это будут точки пересечения A' , A'' окружности K с прямой QA . После этого сейчас же находим центры искомых кругов, пользуясь тем, что сходственные радиусы круга K и искомых кругов должны быть параллельны: проводим радиусы OA' , OA'' круга K и параллельные им радиусы $O'A'$, $O'A''$ искомых кругов. Остается описать около точек O' , O'' окружности радиусов $O'A'$, $O'A''$; это и будут искомые окружности. Задача имеет два решения. Если данные прямые пересекаются, то, согласно решению 95, задача имеет два решения также и в том случае, когда данная точка лежит на одной из данных прямых. Исключение составляет только тот случай, когда данная точка совпадает с точкой пересечения обеих данных прямых; в этом случае искомые круги оба обращаются в эту точку пересечения.

184. Случай, когда данные прямые параллельны, был предметом задачи 91. Мы предположим поэтому, что данные прямые пересекаются. В этом случае задачу можно свести к задаче вида 183 при помощи особого преобразования, которое

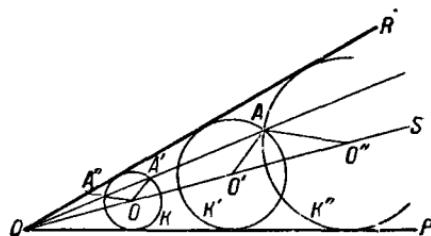


Рис. 137.

мы будем называть увеличением или уменьшением радиуса круга. Увеличить радиус круга K на отрезок d , значит отложить на каждом из его диаметров OA по направлению от центра наружу отрезок $AA_1 = d$; точки A_1 образуют окружность K_1 увеличенного радиуса. Уменьшить радиус круга K на отрезок d , значит отложить на каждом из его диаметров OA по направлению к центру отрезок $AA_2 = d$; точки A_2 образуют окружность K_2 уменьшенного радиуса. Уменьшение радиуса на отрезок, равный самому радиусу, приводит к окружности нулевого радиуса, то-есть к точке. Уменьшение радиуса на еще больший отрезок приводит к окружности отрицательного радиуса; это значит, что радиусы OA_2 направлены противоположно радиусам OA , что и показано на рис. 138.

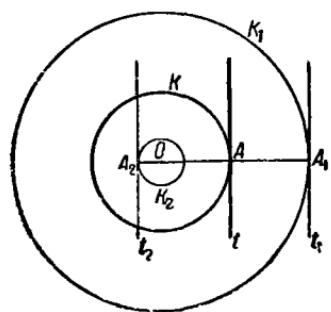


Рис. 138.

Если круг K касается некоторой прямой t , то круги K_1, K_2 будут касаться прямых t_1, t_2 , параллельных прямой t и удаленных от нее на расстояние d . Если два круга внешне

касаются, то касание не нарушится при одновременном увеличении радиуса одного из них и уменьшении радиуса другого на один и тот же отрезок. Если два круга внутренне касаются, то касание не нарушится при одновременном увеличении или уменьшении радиусов обоих на один и тот же отрезок. При этом мы считаем прямую или окружность касательной к окружности нулевого радиуса, то-есть к точке, если она проходит через эту точку. Пусть теперь будет K данный круг и a, b данные прямые (рис. 139). Требуется построить все круги, касательные к кругу K и к прямым a, b . Обозначим радиус круга K через R . Если какой-нибудь круг касается круга K внешним образом, то после увеличения его радиуса на R он пройдет через центр O круга K . Если этот круг, кроме того, касался прямых a, b , то после увеличения радиуса он коснется одной из прямых a_1, a_2 , параллельных прямой a на расстоянии R от нее, и одной из прямых b_1, b_2 , параллельных прямой b на расстоянии R от нее. То же самое произойдет со всяким кругом, внутренне касательным к кругу K и касательным к прямым a, b при уменьшении его радиуса на

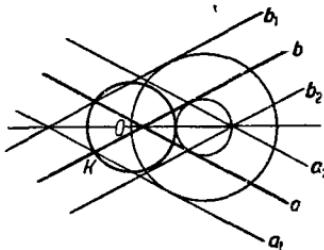


Рис. 139.

R. Таким образом, не изменяя положения центра круга, касательного к кругу K и к прямым a, b , можно одним увеличением или уменьшением его радиуса на R превратить его в круг, проходящий через точку O и касательный к одной из пар прямых $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$. Среди центров этих кругов должны поэому находиться все центры искомых кругов. Но центры искомых кругов должны удовлетворять еще одному условию, которому центры этих кругов не всегда удовлеѓвоят: они должны находиться на биссектрисах пары прямых a, b . Если же мы найдем круг, проходящий через точку O , касательный к одной из пар прямых $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$ и имеющий центр на одной из биссектрис пары прямых a, b , то из этого круга можно действительно получить один из искомых кругов простым увеличением или уменьшением его радиуса на R . В самом деле, центр такого круга находится на той из биссектрис какой-нибудь пары прямых $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$, которая в то же время есть биссектриса пары прямых a, b , то-есть на какой-нибудь диагонали ромба, ограниченного прямыми a_1, a_2, b_1, b_2 . Вследствие такого расположения касательные к этому кругу стороны ромба нужно или обе приблизить к центру круга или обе отдалить от него на расстояние R , чтобы они совпали со средними линиями ромба a, b . Если при этом радиус круга соответственно уменьшить или увеличить на R , то он коснется прямых a, b и круга K , то-есть превратится в один из искомых кругов. Таким образом построение искомых кругов сводится к построению всех кругов, проходящих через точку O и касательных к парам прямых $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$, за исключением тех, центры которых не лежат на диагоналях ромба, ограниченного прямыми a_1, a_2, b_1, b_2 , с последующим увеличением или уменьшением радиусов этих кругов на R . По существу все сводится к решению нескольких задач вида 183, числом не более четырех. Так как число решений задачи 183 не больше двух, то число решений нашей задачи не больше восьми. Нетрудно сделать и более полное исследование. Если точка O находится внутри ромба, ограниченного прямыми a_1, a_2, b_1, b_2 , то она лежит внутри всех четырех углов ромба, и, следовательно, проходящие через нее окружности, касательные к парам соседних сторон ромба $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2$, имеют центры на диагоналях ромба: мы получим четыре пары решений. Но эти решения не всегда различны: если точка O лежит на окружности круга, вписанного в ромб, то этот круг будет одним из решений каждой пары; вместе с остальными решениями каждой пары получим всего пять решений вместо восьми при общем положении точки O внутри ромба. Продолжая рассуждать таким образом, найдем число решений при всевозможных положениях точки O : внутри ромба 8 решений; вне

ромба 4 решения: на сторонах ромба 6 решений; в вершинах ромба 3 решения; кроме того, на окружности вписанного круга 4 решения сливаются в одно, так что внутри ромба на окружности вписанного круга различных решений только 5, а в точках касания вписанного круга к сторонам ромба различных решений только 3. Можно провести исследование еще дальше и выяснить зависимость числа решений и их характера от положения круга K по отношению к прямым a, b , что легко сделать после предыдущего исследования. Получим следующие результаты: 8 решений, если круг K пересекает обе прямые a, b ; 4 из них сливаются в одно, а именно обращаются в точку пересечения прямых a, b , если круг K пересекает прямые a, b в точке пересечения их; 6 решений, если круг K пересекает одну из прямых a, b и касается другой; 4 из них сливаются в одно, а именно, обращаются в точку пересечения прямых a, b , если точка касания круга K к одной из прямых a, b есть точка пересечения их; 4 решения, если круг K не имеет общих точек хотя бы с одной из прямых a, b ; 3 решения, если круг K касается обеих прямых a, b : одно из этих решений есть сам круг K .

185. Пусть будут A, B данные точки и a данная прямая. Перпендикуляр p в середине отрезка AB есть диаметр искомого круга (рис. 140). Прямая b , симметричная с прямой a относительно оси p , должна быть касательна к искомому кругу, как и сама прямая a . Прямая b будет отлична от прямой a , если прямая AB не параллельна прямой a и не совпадает с нею. Если, кроме того, точки A, B лежат по одну сторону от прямой a , то наша задача сводится к задаче 183, так как искомые круги вполне определяются уже требованием проходить через одну только точку A и касаться прямых a, b . В остальных случаях задачу легко решить непосредственно, и мы приведем только результаты: если точки A, B лежат по разные стороны от прямой a , то решений нет; если одна из точек A, B лежит на прямой A , то есть одно решение; если точки A, B лежат по одну сторону от прямой, и прямая AB не параллельна прямой a , то решений два; если точки A, B лежат на прямой a , то решений нет.

186. Пусть будут A, B данные точки и K — данный круг (рис. 141). Проведем через точки A, B какой-нибудь круг, пересекающий круг K в точках C, D , и общую хорду CD . Ограничимся рассмотрением случая, когда прямая CD пересекает продолжение отрезка AB в некоторой точке P . По тео-

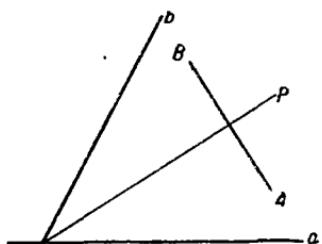


Рис. 140

реме 179 через ту же точку проходят и общие касательные искомых кругов с кругом K . Для построения искомых кругов нужно поэтому провести к кругу K касательные PT, PT' из точки P и описать круги около треугольников ABT, ABT' . Так как $PT^2 = PT'^2 = PC \cdot PD = PA \cdot PB$, то по теореме 177 эти круги коснутся PT, PT' в точках T, T' и, следовательно, будут искомые. В этом случае решений два. В том случае, когда прямая CD параллельна прямой AB , решений будет также два. Эти случаи имеют место, когда точки A, B лежат обе внутри или обе вне круга K . Если одна из точек A, B лежит на окружности круга K , то решение будет одно. Если обе точки A, B лежат на окружности круга K , то решение будет одно — сам круг K . Если одна из точек A, B лежит внутри, а другая вне круга K , то решений не будет.

187. Пусть будет A данная точка, a — данная прямая и K — данный круг (рис. 142). Предположим, что задача решена

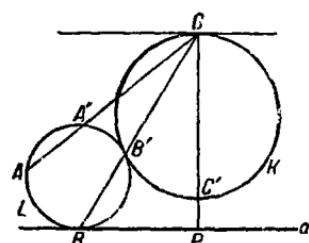


Рис. 142.

откуда имеем:

$$CA \cdot CA' = CB \cdot CB'.$$

а по теореме 181:

$$CB \cdot CB' = CP \cdot CC'.$$

откуда

$$CA \cdot CA' = CP \cdot CC'.$$

Расположение точек A, A' и P, C по отношению к точке C одинаково, так как то и другое одинаково с расположением точек B, B' по отношению к точке C . По теореме 177 точки A, A', P, C лежат на одной окружности. Отсюда ясно, что все искомые круги могут быть построены следующим образом: проводим диаметр $CC'P$ круга K , перпендикулярный к

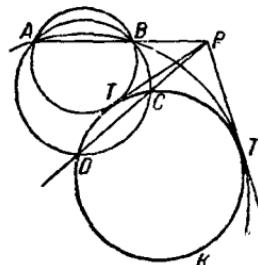


Рис. 141.

прямой a ; соединяем один из его концов C с точкой A ; проводим окружность через другой конец C' , точку A и точку P ; строим все круги, проходящие через точку A , и вторую точку пересечения A' этой окружности с прямой CA и касательные к кругу K , как показано в решении 186. Докажем, что каждый круг, построенный таким образом, коснется и прямой a и, следовательно, есть искомый. Пусть будет L такой круг, B' — точка касания его с кругом K , B — точка пересечения прямой CB' с прямой a . Так как по построению точки A, A', C, P лежат на одной окружности, то по теореме об отрезках хорд или секущих имеем:

$$CA \cdot CA' = CP \cdot CC'.$$

С другой стороны по теореме 181:

$$CP \cdot CC' = CB \cdot CB'.$$

Отсюда:

$$CA \cdot CA' = CB \cdot CB'.$$

Расположения точек A, A' и B, B' по отношению к точке C одинаковы с расположением точек P, C' по отношению к точке C и потому одинаковы между собой. По теореме 177 точка B лежит на окружности, проходящей через точки $A, A', B',$ то-есть на окружности L . По теореме 60 касательная к кругу L в точке B параллельна касательной к кругу K в точке C и, следовательно, совпадает с прямой a . Это и нужно было доказать. Мы предполагали для простоты, что P не совпадает с C', A с A' , и CA с $CC'P$, но наши рассуждения применимы с незначительными изменениями и к этим случаям. При построении мы можем использовать любой конец диаметра и приходим тогда к задаче вида 186. Так как задача вида 186 имеет не более двух решений, то наша задача имеет не более четырех решений. Докажем еще, что круги, построенные с помощью различных концов диаметра $CC'P$, касаются круга K различным образом, то-есть одни внешне, другие внутренне. Прямая a может пересекать окружность K , касаться ее и не иметь с нею общих точек. Рассмотрим только последний случай, который и представлен на рис. 142. В этом случае вся окружность K лежит с одной стороны от прямой a , и мы, очевидно, не получим ни одного решения, если точка A лежит с другой стороны. Предположим поэтому, что и точка A лежит с этой стороны. Если мы используем для построения конец C диаметра $CC'P$, который дальше от прямой a , как это сделано на нашем чертеже, то точки B, B' будут лежать по одну сторону от C , потому что они расположены относительно C так же, как другой конец C' и P . Но точки C, B' также лежат по одну сторону

от B , потому что вся окружность K , на которой лежат C, B' , лежит по одну сторону от прямой a , на которой лежит B . Отсюда следует, что точки C, B лежат по разные стороны от B' , а потому и окружности K, L , проходящие через C, B , лежат по разные стороны от общей касательной, проходящей через B' , т. е. касаются внешним образом, как и получилось на нашем чертеже. Но если мы используем для построения конец C' , то точки B, B' будут лежать по разные стороны от C' , как другой конец C и P . Следовательно, точки C', B будут лежать по одну сторону от B' , и окружности K, L будут касаться внутренним образом. К тому же результату приводят рассмотрение остальных случаев. Итак, в числе решений нашей задачи, которых всего не более четырех, может быть не более двух кругов, внешне касательных к кругу K , и не более двух внутренне касательных.

188. Пусть будут K, L данные круги и a — данная прямая. Предположим сначала, что круги K, L не равны и обозначим радиус меньшего круга K через R . Если какой-нибудь круг касается кругов K, L и прямой a и притом круга K внешним образом, то при увеличении его радиуса на R он пройдет через центр круга K , коснется одной из прямых a_1, a_2 , параллельных прямой a на расстоянии R от нее, и коснется одного из кругов L_1, L_2 , концентрических с кругом L , но с радиусом на R меньшим или большим. Если этот круг касается кругов K, L и прямой a и притом круга K внутренним образом, то то же самое произойдет с ним при уменьшении его радиуса на R . Отсюда ясно, что все искомые круги могут быть получены из кругов, проходящих через центр круга K , касательных к одной из прямых a_1, a_2 и к одному из кругов L_1, L_2 , путем увеличения или уменьшения их радиуса на R . Чтобы построить все эти круги, мы должны решить четыре задачи вида 187, сообразно четырем комбинациям данных $a_1L_1, a_1L_2, a_2L_1, a_2L_2$. Предположим, например, что мы решили задачу a_1L_1 , то есть нашли все круги, проходящие через центр круга K и касательные к прямой a_1 и к кругу L_1 . Если центр круга K не лежит на прямой a_1 , то все найденные круги лежат с той же стороны от прямой a_1 , что и центр круга K . Чтобы заставить найденные круги коснуться прямой a , параллельной прямой a_1 на расстоянии R от нее, придется радиусы этих кругов все уменьшить или все увеличить на R . После этого все они коснутся круга K , но круга L коснутся только те, которые были касательны к кругу L_1 одним определенным образом, а именно: в случае уменьшения всех радиусов только те, которые были внешне касательны к кругу L_1 , а в случае увеличения всех радиусов только те, которые были внутренне касательны к кругу L_1 . Так как число решений задачи вида 187, касательных

к данному кругу каким-нибудь определенным образом, не превышает двух, то число решений нашей задачи, соответствующих комбинации a_1L_1 , также не превышает двух. Если теперь центр круга K лежит на прямой a_1 , то задача вида 187 сводится к задаче вида 97, число решений которой само не превышает двух, так что и число выведенных из них решений нашей задачи, соответствующих комбинации a_1L_1 , не превышает двух. Все сказанное относится, очевидно, к любой из четырех комбинаций $a_1L_1, a_1L_2, a_2L_1, a_2L_2$. Следовательно, общее число решений нашей задачи не превышает восьми, и мы видели, что все они могут быть выведены из решений задач вида 187. В оставленном без рассмотрения случае, когда круги K, L равны, круг L_1 обращается в точку, и наша задача сводится к задаче вида 185. Число решений и в этом случае не превышает восьми.

189. Требуется построить круги L , проходящие через данную точку A и касательные

к двум данным кругам K, K' . Обозначим точки касания круга L к кругам K, K' через B, B' и дока жем, что прямая BB' проходит через центр подобия S кругов K, K' и что точки B, B' несходственны. Рассмотрим случай, когда круг L касается обоих кругов K, K' внешним образом (рис. 143). Проведем радиусы PB, PB' круга L , радиусы OB, OC круга K и радиус $O'B'$ круга K' . В равнобедренных треугольниках OCB, PBB' углы OCB, PBB' равны как вертикальные. Следовательно, и вторые углы при основаниях OCB, PBB' у них равны. Так как круги K, L касаются внешним образом, то их центры O, P расположены по разные стороны от точки B , а следовательно, и от прямой CBB' . Поэтому полуправильные $CO, B'P$ также расположены по разные стороны от прямой CBB' , откуда видно, что углы $OCB, PB'B'$ накрестлежащие при прямых OC, PB' и пересекающей CBB' . Из того же внешнего касания кругов K, L следует, что точка B лежит между точками C, B' , откуда видно, что углы $OCB, PB'B'$ оба внутренние при прямых OC, PB' и пересекающей CBB' . Таким образом углы $OCB, PB'B'$ внутренние накрестлежащие при прямых OC, PB' и пересекающей CBB' . Так как эти углы по предыдущему равны, то мы заключаем, что прямые OC, PB' параллельны. Так как радиусы $OC, O'B'$ параллельны, то концы их C, B' суть сходственные точки кругов K, K' при некотором подобном расположении их. Отсюда ясно, что прямая CBB' проходит через некоторый центр подобия S этих кругов. Ясно

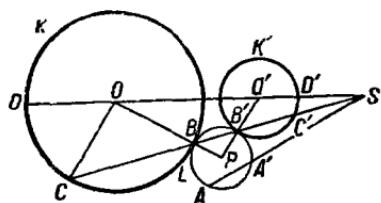


Рис. 143.

реконструкция. Следовательно, и вторые углы при основаниях OCB, PBB' у них равны. Так как круги K, L касаются внешним образом, то их центры O, P расположены по разные стороны от прямой CBB' , а следовательно, и от прямой CBB' . Поэтому полуправильные $CO, B'P$ также расположены по разные стороны от прямой CBB' , откуда видно, что углы $OCB, PB'B'$ накрестлежащие при прямых OC, PB' и пересекающей CBB' . Из того же внешнего касания кругов K, L следует, что точка B лежит между точками C, B' , откуда видно, что углы $OCB, PB'B'$ оба внутренние при прямых OC, PB' и пересекающей CBB' . Таким образом углы $OCB, PB'B'$ внутренние накрестлежащие при прямых OC, PB' и пересекающей CBB' . Так как эти углы по предыдущему равны, то мы заключаем, что прямые OC, PB' параллельны. Так как радиусы $OC, O'B'$ параллельны, то концы их C, B' суть сходственные точки кругов K, K' при некотором подобном расположении их. Отсюда ясно, что прямая CBB' проходит через некоторый центр подобия S этих кругов. Ясно

также, что точки B, B' несходственны при этом подобном расположении, так как точка B' сходственна с точкой C прямой SB' и тем самым не сходственна ни с какой другой точкой этой прямой. Все, что требовалось, доказано, но мы можем добавить, что в данном случае, когда круг L касается обоих кругов внешним образом, мы имеем прямое подобие. Действительно, в этом случае центры O, O' расположены относительно прямой CBB' по другую сторону от точки P . Поэтому направления сходственных радиусов $OC, O'B'$ противоположны направлению радиуса PB' и, следовательно, одинаковы между собой, что и доказывает прямое подобие. Рассуждая сходным образом в трех огальных возможных случаях, убедимся, что во всех случаях точки B, B' суть несходственные точки пересечения кругов K, K' с прямой, проходящей через один из их центров подобия, причем это будет центр прямого подобия, если круг L касается кругов K, K' одинаковым образом, т. е. обоих внешне или обоих внутренне, и это будет центр обратного подобия, если круг L касается кругов K, K' различным образом, то-есть одного внешне, а другого внутренне. Теперь мы покажем, что по данным задачи можно найти вторую точку пересечения A' всякого искомого круга L с прямой AS . Пусть будут D, D' две несходственные точки пересечения окружностей K, K' с какой-нибудь другой прямой, проходящей через S . По теореме об отрезках хорд или секущих имеем:

$$SA \cdot SA' = SB \cdot SB'.$$

С другой стороны, по теореме 182:

$$SB \cdot SB' = SD \cdot SD'.$$

Отсюда:

$$SA \cdot SA' = SD \cdot SD'.$$

Нетрудно проверить, как это не раз делалось выше, что и расположение точек A, A' и D, D' относительно точки S одинаково. По теореме 177 заключаем отсюда, что точка A' есть вторая точка пересечения прямой SA с окружностью, проходящей через точки D, D', A . Таким образом точку A' действительно можно построить по данным задачи. После этого задача сводится к построению круга, проходящего через точки A, A' и касательного к одному из кругов K, K' . Можно доказать, что круги, построенные таким образом, коснутся и второго из кругов K, K' . но мы для краткости опускаем доказательство, которое в общем состоит в повторении предыдущего рассуждения в обратном порядке, как это было и в решении 187. Так как мы можем воспользоваться для построения точки A' любым из

центров подобия, и так как после этого задача сводится к задаче вида 186, имеющей не более двух решений, то наша задача имеет не более четырех решений. При этом круги, построенные с помощью центра прямого подобия, касаются данных кругов одинаковым образом, а круги, построенные с помощью центра обратного подобия, касаются данных кругов различным образом. Кругов каждого рода столько, сколько решений вспомогательной задачи вида 186, т. е. не более двух.

190. Пусть будут K, L, M данные круги. Предположим, что радиус круга K меньше двух других и обозначим его через R . Если какой-нибудь круг касается кругов K, L, M и притом круга K внешним образом, то, увеличив его радиус на R , мы заставим его пройти через центр круга K и коснуться одного из кругов L_1, L_2 и одного из кругов M_1, M_2 , концентрических соответственно с кругами L, M , из которых L_1, M_1 имеют радиусы на R меньшие, а L_2, M_2 радиусы на R большие, чем соответственные круги L, M . Если этот круг касается круга K внутренним образом, то то же самое получится при уменьшении его радиуса на R . Отсюда ясно, что все искомые круги могут быть получены из кругов, проходящих через центр круга K и касательных к одному из кругов L_1, L_2 и к одному из кругов M_1, M_2 путем увеличения или уменьшения их радиуса на R . Наша задача сводится таким образом к четырем задачам вида 189, сообразно четырем комбинациям $L_1M_1, L_1M_2, L_2M_1, L_2M_2$. Предположим, что мы решили одну из этих задач, например, L_1M_1 . Иначе говоря, предположим, что мы нашли все круги, проходящие через центр круга K и касательные к кругам L_1, M_1 . Допустим далее, что один из этих кругов касается круга L_1 внешним образом. Если мы уменьшим его радиус на R , то он коснется кругов K и L , но круга M он коснется только в том случае, если он касался круга M_1 также внешним образом. Точно так же, если один из этих кругов касается круга L_1 внутренним образом, то из него можно получить круг, касательный к кругам K, L и M , только в том случае, если он касается круга M_1 также внутренним образом. Таким образом из решений задачи L_1M_1 пригодны для дальнейшего построения только те круги, которые касаются кругов L_1, M_1 одинаковым образом. То же самое относится и к задаче L_2M_2 . Наоборот, из решений L_1M_2 и L_2M_1 пригодны для дальнейшего построения только те круги, которые касаются данных кругов различным образом. На основании исследования задачи 189 мы можем поэтому утверждать, что каждая из вспомогательных задач дает не более двух пригодных решений. А отсюда ясно, что число решений нашей задачи не превышает восьми. Мы исключили вначале случаи, когда радиус одного из кругов L, M равен R , и когда радиусы обоих кру-

гов L , M равны R . В первом случае один из кругов L_1 , M_1 , а во втором оба обращаются в точку. Соответствующие вспомогательные задачи будут вида 186 или 93. Число решений попрежнему не больше восьми.

Площади

191. Пусть в параллелограмме $ABCD$ угол A острый и $AD \geq AB$ (рис. 144). Опустим перпендикуляр BP из вершины B на сторону AD и докажем, что его основание наверное попадет на самую сторону AD , а не на ее продолжение. В треугольнике ABD угол A острый по условию, а угол D также не может быть прямым или тупым, так как тогда сторона AB была бы наибольшая, и мы имели бы $AD < AB$, вопреки условию. Поэтому точка P лежит внутри отрезка AD , и следовательно, отрезок BP разрезает параллелограмм $ABCD$ на треугольник ABP и трапецию $PBCD$.

Приложив к трапеции треугольник, в положении DCQ сложим прямоугольник $PBCQ$. Если опустим перпендикуляр DP' из вершины D на сторону AB , то построение не всегда удастся, как, например, на рис. 144.

192. Пусть в треугольнике ABC (рис. 145) сторона BC больше или, по крайней мере, не меньше сторон AB , AC . Тогда углы B, C острые, так как в противном случае одна из сторон AB , AC , была бы больше стороны BC . Опустим из середин M , N сторон AB , AC перпендикуляры MP , NQ на сторону BC . В треугольнике MBC углы при стороне BC острые, так как один из них равен углу B , а другой есть часть угла C . Следовательно, точка P лежит на самой стороне BC . По тем же причинам

и точка Q лежит на стороне BC . Таким образом отрезки MP , NQ разрезают треугольник ABC на пятиугольник $AMPQN$ и треугольники MBP , NCQ . Повернув эти треугольники в надлежащих направлениях на сто восемьдесят градусов вокруг вершин M , N , сложим из них и пятиугольника прямоугольник $PQQ'P'$.

193. На рис. 146 показано, как нужно сложить трапеции. Площадь полученного параллелограмма равна $(a + b) \cdot h$. Следовательно, площадь каждой трапеции равна $\frac{1}{2}(a + b) \cdot h$.

194. Треугольники ADC , BDC (рис. 147) равновелики, так как у них основание DC общее и вершины A , B лежат на

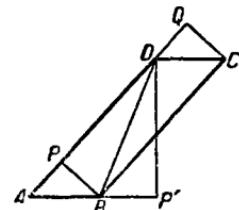


Рис. 144.

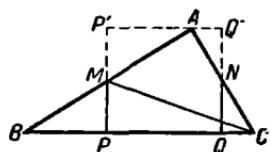


Рис. 145.

прямой, параллельной основанию. Если отрежем от треугольников ADC и BDC по треугольнику ODC , то оставшиеся треугольники OBC , ODA также должны быть равновелики, что и требовалось доказать.

195. Имеем (рис. 148):

$$\text{пл. } MDBE = \text{пл. } ABC - \text{пл. } ADM - \text{пл. } MEC.$$

$$\text{пл. } MD'B'E' = \text{пл. } AB'C - \text{пл. } AD'M - \text{пл. } ME'C.$$

Правые части этих равенств равны почленно; следовательно, и левые части равны:

$$\text{пл. } MDBE = \text{пл. } MD'B'E',$$

что и требовалось доказать.

196. Требуется доказать (рис. 149):

$$\text{пл. } MAB + \text{пл. } MCD = \text{пл. } MBC + \text{пл. } MAD,$$

то-есть, что эти суммы равны $\frac{1}{2}$ пл. $ABCD$. Проведем PMQ

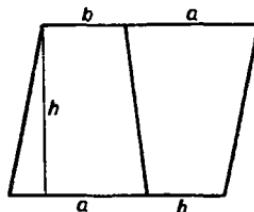


Рис. 146.

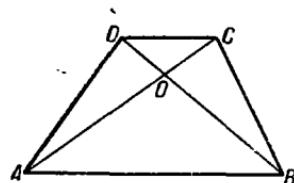


Рис. 147.

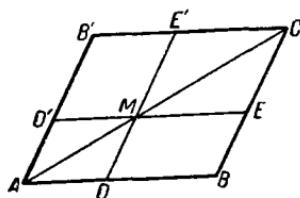


Рис. 148.

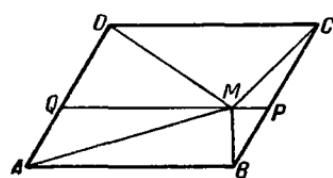


Рис. 149.

параллельно AB и CD . Имеем следующие соотношения:

$$\text{пл. } MAB = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABPQ, \text{ пл. } MCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } CDQP.$$

Складывая почленно, получим:

$$\text{пл. } MAB + \text{пл. } MCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD,$$

что и доказывает теорему.

197. Через середины M, N диагоналей AC, BD проведены параллельные к диагоналям BD, AC до пересечения в точке O , и точка O соединена с серединами P, Q, R, S сторон AB, BC, CD, DA (рис. 150). Требуется доказать, что площади $OSAP, OPBQ, OQCR$ и $ORDS$ равны между собой, то есть каждая из них равна четверти площади $ABCD$. Рассмотрим для примера четырехугольник $ORDS$. Площадь этого четырехугольника не изменится от перенесения вершины O в точку N . В самом деле, прямые ON, SR параллельны между собой, так как обе параллельны прямой AC , первая согласно условию, а вторая как средняя линия треугольника ACD . При перенесении вершины O в точку N треугольник SOR заменится поэтому равновеликим треугольником SNR , и тем самым четырехугольник $SORD$ заменится равновеликим четырехугольником $SNRD$. Но четырехугольник $SNRD$ подобен четырехугольнику $ABCD$ и имеет вдвое меньшие линейные размеры, так что площадь его вчетверо меньше. Следовательно, и площадь четырехугольника $SORD$ составляет четверть площади четырехугольника $ABCD$, что и нужно было проверить.

198. Если $B'C'$ делит площадь ABC пополам (рис. 151), то

$$\text{пл. } ABC : \text{пл. } AB'C' = 2.$$

Рис. 151.

Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, то

$$AB^2 : AB'^2 = 2,$$

откуда

$$AB \cdot AB' = \sqrt{2}, \quad AB = \sqrt{2} \cdot AB',$$

$$BB' = AB - AB' = \sqrt{2} \cdot AB' - AB' = (\sqrt{2} - 1) \cdot AB',$$

$$BB' : AB' = \sqrt{2} - 1.$$

Итак, искомое отношение есть

$$BB' : AB' = CC' : AC' = \sqrt{2} - 1.$$

199. На рис. 152

$$m=4, n=3.$$

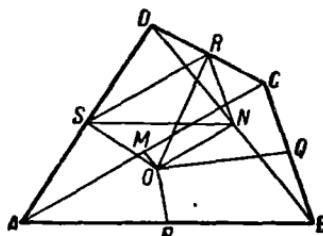
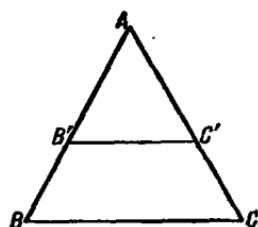


Рис. 150.



Чтобы узнать, во сколько раз площадь данного параллелограмма $ABCD$ больше параллелограмма $HKLM$, найдем сначала, во сколько раз пл. $ABCD$ больше пл. $AEFG$, а затем найдем, во сколько раз пл. $AEFG$ больше пл. $HKLM$. Примем в параллелограммах $ABCD$, $AEFG$ стороны AB , AE за основания. Тогда высоты их будут равны, и площади будут относиться как основания. Так как

$$AB = m \cdot AE,$$

то и

$$\text{пл. } ABCD = m \cdot \text{пл. } AEFG.$$

Примем в параллелограммах $AEFG$, $HKLM$ стороны AG , HM за основания.

Высоты их будут равны и площади будут относиться как основания. Имеем:

$$AG = AM + MG.$$

Из рассмотрения треугольника AMD найдем:

$$AM = n \cdot HM.$$

Из рассмотрения треугольника CDN найдем:

$$MG = \frac{1}{m} \cdot CN.$$

Из рассмотрения треугольника CPQ и параллелограмма $HMNP$ найдем:

$$CN = NP = HM.$$

Сопоставляя все это, получим:

$$AG = n \cdot HM + \frac{1}{m} HM = \left(n + \frac{1}{m} \right) \cdot HM,$$

откуда

$$\text{пл. } AEFG = \left(n + \frac{1}{m} \right) \cdot \text{пл. } HKLM,$$

и затем

$$\text{пл. } ABCD = m \left(n + \frac{1}{m} \right) \cdot \text{пл. } HKLM,$$

или

$$\text{пл. } ABCD = (mn + 1) \cdot \text{пл. } HKLM.$$

Следовательно,

$$\text{пл. } HKLM = \frac{1}{mn + 1} \text{ пл. } ABCD,$$

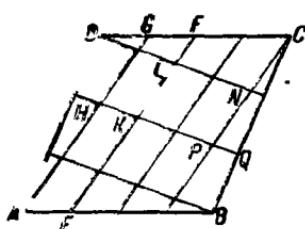


Рис. 152.

т. е. площадь маленького параллелограмма составляет $(mn+1)$ -ую часть площади большого, например на нашем чертеже — тринадцатую часть.

200. Кроме прямых, соединяющих вершины параллелограмма с серединами противоположных сторон, проведем еще его диагонали AC, BD и средние линии EG, FH (рис. 153). Легко видеть, что диагонали и средние линии AC, BD, EG, FH взаимно делятся пополам. Например, диагональ AC и средняя линия EG взаимно делятся пополам, как диагонали параллелограмма $AECG$. Рассмотрим один из отрезков, соединяющих точку O с вершинами параллелограмма, например отрезок OA . Прямые BH, DE отсекают от отрезка OA одну треть OM , так как AO, BH, DE суть медианы треугольника ABD . Точно так же и на отрезках OB, OC, OD пересекается по паре прямых, соединяющих вершины параллелограмма с серединами противолежащих сторон, и отсекают от этих отрезков по одной трети. Рассмотрим теперь один из отрезков, соединяющих точку O с серединами сторон параллелограмма, например отрезок OE . Прямые AF, BH отсекают от отрезка OE половину ON , так как OE есть средняя линия, а AF, BH — диагонали параллелограмма $ABFH$. Точно так же и на отрезках OF, OG, OH пересекается по паре прямых, соединяющих вершины параллелограмма с серединами противолежащих сторон, и отсекают от этих отрезков по половине. Таким образом на каждом из отрезков, соединяющих точку O с вершинами и серединами сторон параллелограмма, пересекается по две прямых, соединяющих вершины с серединами противолежащих сторон. Точки пересечения образуют восьмиугольник, стороны которого лежат на восьми прямых, соединяющих вершины параллелограмма с серединами противолежащих сторон. Этот восьмиугольник и есть фигура, ограниченная этими восьмью прямыми.

Чтобы удостовериться в этом, остается только доказать, что этот восьмиугольник выпуклый, то-есть что ни одна из восьми прямых не входит внутрь его. Рассмотрим для примера прямую BH . Прямая BH разбивает параллелограмм на треугольник ABH и трапецию $BCDH$. Точка O лежит внутри трапеции, как середина ее диагонали BD . Поэтому шесть вершин восьмиугольника, лежащих на отрезках OB, OF, OC, OG, OD, OH , соединяющих точку O с точками B, F, C, G, D, H на контуре трапеции, лежат внутри трапеции. Остальные две вершины M, N лежат на стороне трапеции BH . Следовательно, весь восьмиугольник расположен

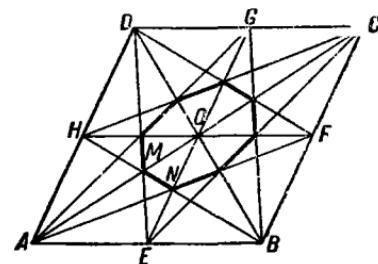


Рис. 153

по одну сторону от прямой BH , что мы и хотели доказать. Вычислим площадь одного из восьми треугольников, на которые наш восьмиугольник разбивается отрезками, соединяющими точку O с вершинами и серединами сторон параллелограмма, например, площадь треугольника OMN . Так как

$$OM = \frac{1}{3} OA, \quad ON = \frac{1}{2} OE,$$

то по известной теореме

$$\text{пл. } OMN = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{пл. } OAE = \frac{1}{6} \text{ пл. } OAE,$$

то-есть площадь части восьмиугольника между двумя соседними отрезками, соединяющими точку O с вершинами и серединами сторон параллелограмма, составляет одну шестую площади части параллелограмма, заключенной между теми же отрезками. Отсюда ясно, что площадь всего восьмиугольника составляет также одну шестую площади параллелограмма, что и требовалось узнать.

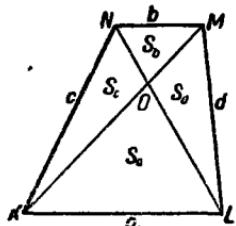


Рис. 154.

S_a, S_b, S_c, S_d . Площади S_a, S_b даны; найдем площади S_c, S_d . Имеем (рис. 154):

$$\frac{S_a}{S_c} = \frac{LO}{NO}, \quad \frac{S_c}{S_b} = \frac{KO}{MO}, \quad \frac{LO}{NO} = \frac{KO}{MO}.$$

Отсюда

$$\frac{S_a}{S_c} = \frac{S_c}{S_b}; \quad S_c^2 = S_a \cdot S_b,$$

и, следовательно,

$$S_c = \sqrt{S_a \cdot S_b}.$$

Также найдем

$$S_d = \sqrt{S_a \cdot S_b}.$$

Складывая все части, получим

$$S = S_a + S_b + 2\sqrt{S_a \cdot S_b} = (\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b})^2,$$

что и решает задачу. Полученное соотношение можно переписать в более изящной форме:

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_a} + \sqrt{S_b}.$$

202. Площадь четырехугольника $AB'DC'$ (рис. 155) не зависит от положения точки D на прямой BC , так как прямая BC параллельна основанию $B'C'$ треугольника $DB'C'$. Поэтому можно заменить площадь четырехугольника $AB'DC'$ площадью треугольника $AB'C$. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{пл. } ABC : \text{пл. } AB'C &= AB : AB', \\ \text{пл. } AB'C : \text{пл. } AB'C' &= AC : AC', \\ AB : AB' &= AC : AC'. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\text{пл. } ABC : \text{пл. } AB'C = \text{пл. } AB'C : \text{пл. } AB'C,$$

или

$$S : \text{пл. } AB'C = \text{пл. } AB'C : s,$$

откуда

$$\text{пл. } AB'C = \sqrt{Ss},$$

и, следовательно, вообще

$$\text{пл. } AB'DC' = \sqrt{Ss}.$$

203. Пусть будет $ABC \dots$ внешний многоугольник $A'B'C' \dots$ внутренний многоугольник, O центр подобия их $D_1D_2 \dots$ многоугольник, вписанный в $ABC \dots$ и описанный около $A'B'C' \dots$ (рис. 156). Обозначим:

$$\text{пл. } OAB = S_1, \text{ пл. } OBC = S_2, \dots;$$

$$\text{пл. } OA'B' = s_1, \text{ пл. } OB'C' = s_2, \dots;$$

$$\text{пл. } OA'D_1B' = \sigma_1,$$

$$\text{пл. } OB'D_2C' = \sigma_2, \dots$$

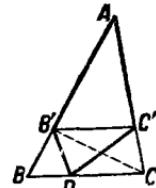


Рис. 155.

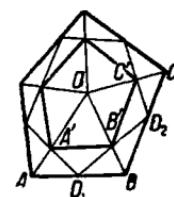


Рис. 156.

Пусть линейные размеры многоугольника $ABC \dots$ в k раз больше линейных размеров многоугольника $A'B'C' \dots$ Тогда

$$S = k^2 s, \quad S_1 = k^2 s_1, \quad S_2 = k^2 s_2, \dots$$

На основании решения 202 имеем

$$\sigma_1 = \sqrt{S_1 s_1} = ks_1, \quad \sigma_2 = \sqrt{S_2 s_2} = ks_2, \dots$$

Складывая, получим:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots = k(s_1 + s_2 + \dots),$$

или

$$\Sigma = ks.$$

С другой стороны,

$$\sqrt{Ss} = ks.$$

Следовательно,

$$\Sigma = \sqrt{Ss}.$$

Применение площадей для доказательств

204. Имеем:

$$\text{пл. } ABM + \text{пл. } ACM = \text{пл. } ABC \text{ (рис. 157),}$$

или

$$\frac{1}{2} AB \cdot MP + \frac{1}{2} AC \cdot MQ = \frac{1}{2} AC \cdot BR.$$

Сокращая на

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC,$$

получим:

$$MP + MQ = BR,$$

что и требуется доказать. Аналогично доказывается и соотношение

$$MP - MQ = BR$$

для случая, когда M лежит на продолжении BC за конец C .

205. Предоставляем вывод читателю.

206. Искомое геометрическое место есть медиана AD . Действительно, для всякой точки M медианы AD имеем (рис. 158):

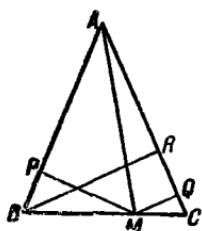


Рис. 157.

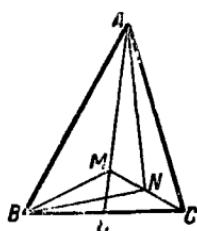


Рис. 158.

$$\text{пл. } ABD = \text{пл. } ACD,$$

$$\text{пл. } MBD = \text{пл. } MCD.$$

Вычитая почленно, получим:

$$\text{пл. } MAB = \text{пл. } MAC,$$

так что точки медианы действительно имеют требуемое свойство. Остается доказать, что точки внутри треугольника, не лежащие на медиане, этого свойства не имеют. Пусть будет N такая точка и M точка пересечения CN с AD .

Имеем:

$$\text{пл. } NAB > \text{пл. } MAB = \text{пл. } MAC > \text{пл. } NAC, \text{ откуда:}$$

$$\text{пл. } NAB > \text{пл. } NAC,$$

что и оставалось доказать.

207. В общей точке Q медиан AM , BN имеем на основании решения 206 (рис. 159):

$$\text{пл. } QAB = \text{пл. } QAC, \text{ пл. } QAB = \text{пл. } QBC.$$

Отсюда следует:

$$\text{пл. } QAC = \text{пл. } QBC.$$

А это показывает на основании того же решения 206, что точка Q лежит и на медиане CP . Далее имеем:

$$\text{пл. } BMQ = \frac{1}{2} \text{ пл. } QBC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \text{ пл. } ABC,$$

$$\text{пл. } BMA = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABC,$$

откуда

$$\text{пл. } MQ = \frac{1}{3} \text{ пл. } BMA,$$

и следовательно,

$$MQ = \frac{1}{3} MA,$$

что заканчивает требуемое доказательство.

208. Каково бы ни было положение точки M площади MAB , MCD не изменятся, если мы передвинем отрезки AB , CD вдоль прямых, на которых они лежат, например в положения

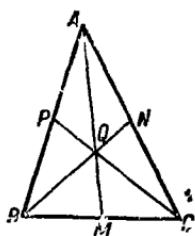


Рис. 159.

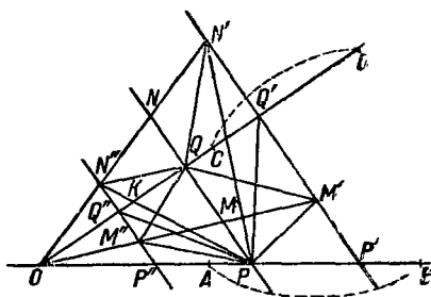


Рис. 160.

OP , OQ (рис. 160). Мы можем поэтому вместо площадей MAB , MCD рассматривать площади MOP , MOQ . Для всякой точки M отрезка PQ имеем:

$$\text{пл. } MOP + \text{пл. } MOQ = \text{пл. } OPQ,$$

для всякой точки N на продолжении отрезка PQ за точку Q

$$\text{пл. } NOP - \text{пл. } NOQ = \text{пл. } OPQ$$

и точно так же для всякой точки N на продолжении отрезка PQ за точку P .

$$\text{пл. } NOQ - \text{пл. } NOP = \text{пл. } OPQ.$$

Таким образом для всех точек M прямой PQ сумма или разность площадей MOP , MOQ равна одной и той же площади OPQ . Проведем прямую $P'Q'$, параллельную прямой PQ и пересекающую продолжения отрезков OP , OQ за точки P , Q . Для точек отрезка $P'Q'$ имеем:

$$\begin{aligned} \text{пл. } M'OP + \text{пл. } M'OQ &= \text{пл. } OPM'Q = \\ &= \text{пл. } OPQ + \text{пл. } QPM' = \text{пл. } OPQ + \text{пл. } QPQ' = \text{пл. } OPQ'. \end{aligned}$$

Для точек продолжения отрезка $P'Q'$ за точку Q' имеем:

$$\begin{aligned} \text{пл. } N'OP - \text{пл. } N'OQ &= \text{пл. } OPN'Q = \\ &= \text{пл. } OPQ + \text{пл. } QPN' = \text{пл. } OPQ + \text{пл. } QPQ' = \text{пл. } OPQ', \end{aligned}$$

и точно так же для точек продолжения отрезка $P'Q'$ за точку P'

$$\text{пл. } N'OQ - \text{пл. } N'OP = \text{пл. } OPQ'.$$

Итак, для всех точек M прямой $P'Q'$ сумма или разность площадей MOP , MOQ равна одной и той же площади OPQ' . Проведем прямую $P''Q''$, параллельную прямой PQ и пересекающую отрезки OP , OQ . Для отрезка $P''Q''$ имеем:

$$\begin{aligned} \text{пл. } M''OP + \text{пл. } M''OQ &= \text{пл. } OPM''Q = \\ &= \text{пл. } OPQ - \text{пл. } QPM'' = \text{пл. } OPQ - \text{пл. } QPQ'' = \text{пл. } OPQ''. \end{aligned}$$

Для продолжения отрезка $P''Q''$ нужно рассмотреть разность

$$\text{пл. } N''OP - \text{пл. } N''OQ.$$

Отняв от уменьшаемого и вычитаемого по площади KON'' и прибавив затем по площади KPQ , превратим эту разность в разность

$$\text{пл. } OPQ - \text{пл. } QPN''.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \text{пл. } N''OP - \text{пл. } N''OQ &= \text{пл. } OPQ - \text{пл. } QPN'' = \\ &= \text{пл. } OPQ - \text{пл. } QPQ'' = \text{пл. } OPQ'', \end{aligned}$$

и точно так же для продолжения отрезка $P''Q''$ за точку P''

$$\text{пл. } N''OQ - \text{пл. } N''OP = \text{пл. } OPQ''.$$

Итак, для всех точек M прямой $P''Q''$ сумма или разность площадей MOP , MOQ равна одной и той же площади OPQ'' .

Объединяя полученные результаты, мы можем сказать, что для точек M всякой прямой P_1Q_1 (рис. 161), параллельной

прямой PQ и пересекающей стороны угла POQ , сумма или разность площадей MOP , MOQ , или равных им площадей MAB , MCD равна площади OPQ_1 . Но мы могли бы перенести отрезки AB , CD в положения OR , OQ и тогда нашли бы, что той же площади OPQ_1 равна сумма или разность площадей MAB , MCD для точек прямой Q_1R_1 , параллельной прямой QR , и т. д.

Продолжая таким образом, найдем, что площадь OPQ_1 равна сумме площадей MAB , MCD для точек M на сторонах параллелограмма $P_1Q_1R_1S_1$ и разность площадей MAB , MCD для точек M на продолжениях сторон того же параллелограмма $P_1Q_1R_1S_1$. Для всякой точки M внутри или вне параллелограмма $P_1Q_1R_1S_1$ сумма площадей MAB , MCD будет, соответственно меньше или больше площади OPQ_1 .

Следовательно, контур параллелограмма $P_1Q_1R_1S_1$ есть геометрическое место точек N , для которых сумма площадей MAB , MCD равна площади OPQ_1 . Точно так же для всякой точки M внутри или вне крестообразной области, ограниченной продолжениями сторон параллелограмма $P_1Q_1R_1S_1$, разность площадей MAB , MCD будет, соответственно, меньше или больше площади OPQ_1 . Следовательно, продолжения сторон параллелограмма $P_1Q_1R_1S_1$ образуют геометрическое место точек M , для которых разность площадей MAB , MCD равна площади OPQ_1 . Площади OPQ_1 можно дать любое неотрицательное значение, так как при перемещении точки Q_1 вдоль полуправой OQ эта площадь растет от нуля до бесконечности. Отдельные части найденных геометрических мест можно рассматривать как геометрические места внутри отдельных углов между прямыми AB , CD . Так например, отрезок P_1Q_1 есть геометрическое место точек M внутри угла POQ , для которых

$$\text{пл. } MAB + \text{пл. } MCD = \text{пл. } OPQ_1,$$

а продолжение Q_1Q' этого отрезка есть геометрическое место точек M внутри смежного угла QOR , для которых

$$\text{пл. } MAB - \text{пл. } MCD = \text{пл. } OPQ_1.$$

Полупрямая R_1R' в том же углу QOR есть геометрическое место точек M внутри этого угла, для которых

$$\text{пл. } MCD - \text{пл. } MAB = \text{пл. } OPQ_1.$$

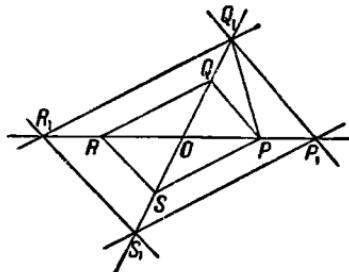


Рис. 161.

209. Пусть будут M_1, M_2, M_3 середины отрезков AC, BD, EF (рис. 162). Имеем:

$$\text{пл. } M_1AB = \frac{1}{2} \text{ пл. } CAB, \quad \text{пл. } M_1CD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ACD.$$

Складывая почленно, найдем:

$$\text{пл. } M_1AB + \text{пл. } M_1CD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD.$$

Точно так же найдем:

$$\text{пл. } M_2AB + \text{пл. } M_2CD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD.$$

Далее имеем:

$$\text{пл. } M_3AB = \frac{1}{2} \text{ пл. } FAB, \quad \text{пл. } M_3CD = \frac{1}{2} \text{ пл. } FCD.$$

Действительно, треугольник M_3AB имеет с треугольником FAB общее основание AB и вдвое меньшую высоту, и точно также треугольник M_3CD имеет с треугольником FCD общее основание CD и вдвое меньшую высоту. Вычитая почленно, найдем:

$$\text{пл. } M_3AB - \text{пл. } M_3CD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD.$$

К полученным соотношениям

$$\text{пл. } M_1AB + \text{пл. } M_1CD = \text{пл. } M_2AB + \text{пл. } M_2CD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD,$$

$$\text{пл. } M_3AB - \text{пл. } M_3CD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD$$

присоединим замечание, что точки M_1, M_2 лежат внутри угла AED , а точка M_3 внутри смежного угла DEG . На основании решения 208 мы сможем заключить отсюда, что точки M_1, M_2 лежат на отрезке PQ , представляющем собой геометрическое место точек M внутри угла AED , для которых

$$\begin{aligned} \text{пл. } MAB + \text{пл. } MCD = \\ = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD, \end{aligned}$$

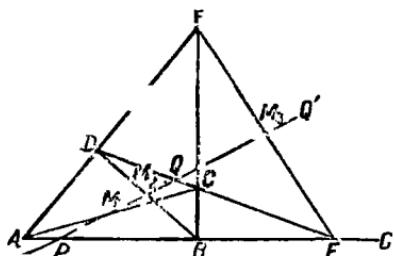


Рис. 162.

и что точка M_3 лежит на продолжении QQ' отрезка PQ .

представляющим собой геометрическое место точек M внутри угла DEG , для которых

$$\text{пл. } MAB - \text{пл. } MCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD.$$

Итак, точки M_1, M_2, M_3 действительно лежат на одной прямой PQQ' .

210. Пусть будет $ABCD$ четырехугольник, описанный около круга, M_1, M_2 середины его диагоналей AC, BD и O центр круга (рис. 163). Если четырехугольник $ABCD$ есть ромб, то точки M_1, M_2, O совпадают, так что точки M_1, M_2 лежат на всякой прямой, проходящей через точку O . Остается рассмотреть случай, когда какие-нибудь две противоположные стороны четырехугольника $ABCD$, например AB, CD , непараллельны. Относительно точек M_1, M_2 уже было доказано в решении 209:

$$\begin{aligned} \text{пл. } M_1AB + \text{пл. } M_1CD &= \\ &= \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD, \end{aligned}$$

$$\text{пл. } M_2AB + \text{пл. } M_2CD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD.$$

Докажем, что и для точки O

$$\text{пл. } OAB + \text{пл. } OCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD.$$

Рис. 163.

Обозначив радиус круга через R , найдем:

$$\text{пл. } OAB + \text{пл. } OCD = \frac{1}{2} R \cdot AB + \frac{1}{2} R \cdot CD = \frac{1}{2} R \cdot (AB + CD),$$

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} R \cdot (AB + BC + CD + DA).$$

Но по известной теореме:

$$AB + CD = AD + BC,$$

откуда

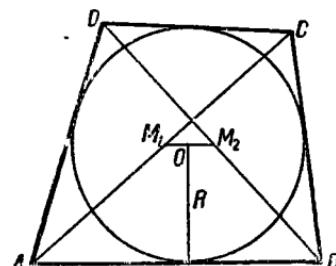
$$AB + CD = \frac{1}{2} (AB + BC + CD + DA).$$

Следовательно,

$$\text{пл. } OAB + \text{пл. } OCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD,$$

что и требовалось доказать. К доказанным соотношениям:

$$\begin{aligned} \text{пл. } M_1AB + \text{пл. } M_1CD &= \text{пл. } M_2AB + \text{пл. } M_2CD = \\ &= \text{пл. } OAB + \text{пл. } OCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD \end{aligned}$$



мы можем добавить, что точки M_1, M_2, O лежат внутри четырехугольника $ABCD$ и, следовательно, внутри одного и того же угла между прямыми AB, CD . На основании решения 208 заключаем отсюда, что точки M_1, M_2, O лежат на отрезке, представляющем собой геометрическое место точек M внутри упомянутого угла, для которых

$$\text{пл. } MAB + \text{пл. } MCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } ABCD.$$

Теорема доказана для всех случаев.

Числовые соотношения в треугольниках и четырехугольниках

211. Проведем $O'Q$ параллельно $P'P$ (рис. 164). В прямоугольнике $OO'Q$ имеем:

$$\begin{aligned} OO' &= d, \\ OQ &= OP - QP = OP - O'P' = R - r, \\ O'Q &= P'P = x. \end{aligned}$$

По теореме Пифагора находим:

$$x = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}.$$

Для длины общей внутренней касательной таким же образом найдем выражение:

$$\sqrt{d^2 - (R + r)^2}.$$

212. Искомую длину найдем по формуле решения 211, полагая в ней $d = R + r$:

$$x = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

213. Обозначим искомый радиус через x и точки касания

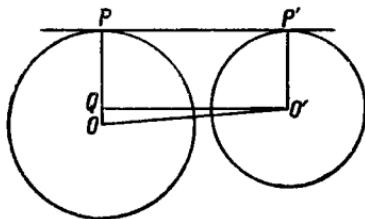


Рис. 164.

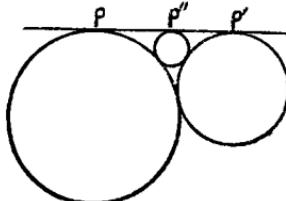


Рис. 165.

общей внешней касательной к кругам радиусов R, r, x соответственно через P, P', P'' (рис. 165). Имеем:

$$PP'' + P'P'' = PP',$$

или по формуле задачи 212

$$2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr},$$

или

$$2(\sqrt{R} + \sqrt{r}) \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{Rr},$$

откуда

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}},$$

$$x = \frac{Rr}{R + r + 2\sqrt{Rr}}.$$

214. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 166) имеем, если обозначим радиус исходного круга через x :

$$AB = R,$$

$$AC = AD - CD = 2R - x,$$

$$BC = BE + CE = R + x.$$

По теореме Пифагора

$$R^2 + (2R - x)^2 = (R + x)^2,$$

или

$$R^2 + 4R^2 - 4Rx + x^2 = R^2 + 2Rx + x^2,$$

или

$$4R^2 = 6Rx,$$

откуда

$$x = \frac{2}{3}R.$$

215. Соединим центр A круга радиуса x с центрами B, C дуг, к которым он прикасается в точках F, G , и

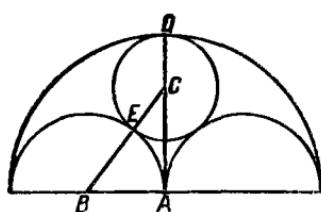


Рис. 166.

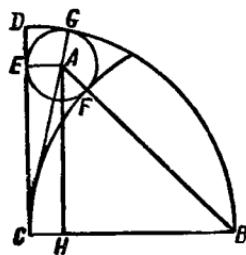


Рис. 167.

с точкой E , в которой он прикасается к отрезку CD (рис. 167). В треугольнике ABC имеем:

$$AB = BF + AF = R + x,$$

$$AC = CG - AG = R - x,$$

$$BC = R.$$

Кроме того, проведя высоту AH , найдем:

$$CH = AE = x.$$

По известной теореме имеем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CH,$$

или

$$(R + x)^2 = (R - x)^2 + R^2 - 2Rx,$$

или

$$R^2 + 2Rx + x^2 = R^2 - 2Rx + x^2 + R^2 - 2Rx,$$

или

$$6Rx = R^2,$$

откуда

$$x = \frac{1}{6}R.$$

216. Соединим центр A круга искомого радиуса x с центрами B, C, D кругов радиусов $R, r, R+r$, к которым он прикасается в точках E, F, G (рис. 168). Имеем:

$$\begin{aligned} AB &= BE + AE = R + x, \\ AC &= CF + AF = r + x, \\ AD &= DG - AG = (R + r) - x, \\ BD &= (R + r) - R = r, \\ CD &= (R + r) - r = R. \end{aligned}$$

Между этими отрезками существует некоторое соотношение, так как отрезок AD вполне определяется заданием остальных отрезков. Чтобы найти это соотношение, опустим перпендикуляр AP на общий диаметр данных кругов и введем сначала вспомогательный отрезок:

$$DP = y.$$

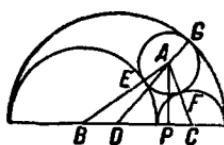
Рис. 168.

По теореме о квадрате стороны для сторон AB, AC треугольников ABD, ACD , из которых один остроугольный, а другой тупоугольный, имеем:

$$\begin{aligned} (R + x)^2 &= [(R + r) - x]^2 + r^2 + 2ry, \\ (r + x)^2 &= [(R + r) - x]^2 + R^2 - 2Ry. \end{aligned}$$

Умножив первое уравнение на R , а второе на r и сложив почленно, исключим y и получим искомое соотношение:

$$R(R + x)^2 + r(r + x)^2 = (R + r)[(R + r) - x]^2 + Rr^2 + R^2r,$$



или

$$R^3 + 2R^2x + Rx^2 + r^3 + 2r^2x + rx^2 = \\ = (R+r)^3 - 2(R+r)^2x + (R+r)x^2 + Rr^2 + R^2r,$$

или

$$2[R^2 + r^2 + (R+r)^2]x = (R+r)^3 + Rr^2 + R^2r - R^3 - r^3,$$

или

$$2[R^2 + r^2 + (R+r)^2]x = 4Rr(R+r),$$

откуда

$$x = 2 \frac{Rr(R+r)}{R^2 + r^2 + (R+r)^2}.$$

217. Из рис. 169 имеем:

$$h^2 = b'c', \quad b^2 = ab', \quad c^2 = ac', \quad b^2 + c^2 = a^2.$$

Отсюда найдем:

$$h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{\frac{b^2}{a} \cdot \frac{c^2}{a}} = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

218. Обозначив (рис. 170) через B острый угол при основании BC треугольника ABC , будем иметь два случая: угол C

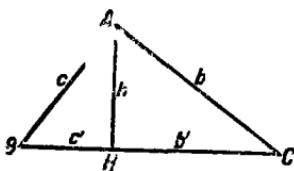


Рис. 169.

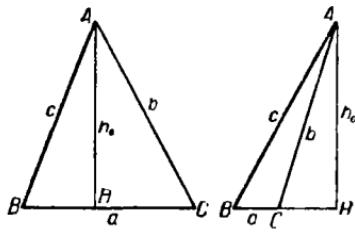


Рис. 170.

также острый, и тогда: $a = BC = BH + CH = \sqrt{c^2 - h_a^2} + \sqrt{b^2 - h_a^2}$; угол C тупой, и тогда $a = BC = BH - CH = \sqrt{c^2 - h_a^2} - \sqrt{b^2 - h_a^2}$.

219. Требуемые выражения выводятся в курсах элементарной геометрии. Замечим только, что их легко получить из решения 218. Действительно, из уравнения

$$\sqrt{c^2 - h_a^2} \pm \sqrt{b^2 - h_a^2} = a,$$

легко найдем:

$$h_a^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

Если разложить числитель на множители, то придем к формуле

$$h_a = \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Если же просто развернуть числитель, то получим формулу:

$$h_a = \frac{1}{2a} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4},$$

также полезную во многих случаях. Отсюда найдем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \end{aligned}$$

где

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

220. Вставим в формулу:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

выражения

$$a = \frac{2S}{h_a}, \quad b = \frac{2S}{h_b}, \quad c = \frac{2S}{h_c}.$$

После простых преобразований найдем:

$$S = S^2 \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \dots \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}.$$

Отсюда получим искомое выражение:

$$S = 1 : \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \dots \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}.$$

221. Дополним треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 171). По известной теореме найдем:

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + BD^2 + DC^2 + CA^2,$$

или

$$4m_a^2 + a^2 = c^2 + b^2 + c^2 + b^2,$$

откуда

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Так же найдем аналогичные формулы:

$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

222. Пусть будет Q центр тяжести треугольника ABC (рис. 172). Продолжим медиану AQM на отрезок MR , равный

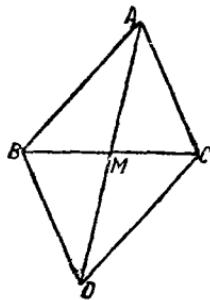


Рис. 171.

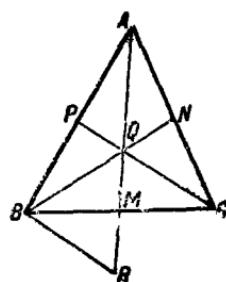


Рис. 172

QM . В треугольнике BQR отрезок $BM = \frac{1}{2}a$ есть медиана, а стороны суть:

$$BQ = \frac{2}{3}m_b, \quad BR = CQ = \frac{2}{3}m_c,$$

$$QR = 2QM = \frac{2}{3}m_a.$$

По формуле решения 221 имеем:

$$4\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 2\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2,$$

или

$$a^2 = \frac{8}{9}m_b^2 + \frac{8}{9}m_c^2 - \frac{4}{9}m_a^2,$$

откуда

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2},$$

и по аналогии:

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2},$$

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

Далее имеем:

$$\text{пл. } BQR = \text{пл. } BQA = \frac{1}{3} \text{ пл. } ABC = \frac{1}{3} S.$$

Отсюда

$$S = 3 \text{ пл. } BQR =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b + \frac{2}{3} m_c \right) \dots \left(\frac{2}{3} m_a + \frac{2}{3} m_b - \frac{2}{3} m_c \right)}.$$

или

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c) \dots (m_a + m_b - m_c)}.$$

Можно также вывести выражение для a , b , c из формул решения 221

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad 4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2,$$

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2,$$

решая их относительно a^2 , b^2 , c^2 . Складывая все три формулы, получим:

$$4m_a^2 + 4m_b^2 + 4m_c^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2.$$

Умножая все три формулы на $\frac{3}{2}$, получим:

$$6m_a^2 = 3b^2 + 3c^2 - \frac{3}{2}a^2, \quad 6m_b^2 = 3a^2 + 3c^2 - \frac{3}{2}b^2,$$

$$\therefore \quad 6m_c^2 = 3a^2 + 3b^2 - \frac{3}{2}c^2.$$

Вычитая полученные формулы из предыдущей, получим:

$$4m_b^2 + 4m_c^2 - 2m_a^2 = \frac{9}{2}a^2, \quad 4m_a^2 + 4m_c^2 - 2m_b^2 = \frac{9}{2}b^2,$$

$$4m_a^2 + 4m_b^2 - 2m_c^2 = \frac{9}{2}c^2.$$

Отсюда найдем, как и выше:

$$a^2 = \frac{8}{9}m_b^2 + \frac{8}{9}m_c^2 - \frac{4}{9}m_a^2, \quad b^2 = \frac{8}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_c^2 - \frac{4}{9}m_b^2,$$

$$c^2 = \frac{8}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_b^2 - \frac{4}{9}m_c^2.$$

После этого можно найти и S , но это требует по сравнению с геометрическим выводом более сложных вычислений.

223. В треугольнике ABC (рис. 173) биссектриса $AD = \beta$ делит основание $BC = a$ на отрезки $CD = b'$, $BD = c'$, пропорциональные боковым сторонам $AC = b$, $AB = c$. Можно положить:

$$b' = kb, \quad c' = kc,$$

и множитель k определится из условия:

$$kb + kc = a,$$

откуда

$$k = \frac{a}{b + c}$$

По отрезкам a , b , c , $b' = kb$, $c' = kc$ можно вычислить биссектрису β . Для этого проведем высоту AH и введем вспомогательный отрезок $DH = m$. Имеем из треугольников ACD , ABD :

$$\begin{aligned} b^2 &= \beta^2 + k^2 b^2 - 2kbm, \\ c^2 &= \beta^2 + k^2 c^2 + 2kcm. \end{aligned}$$

Чтобы исключить m , умножим первое уравнение на c , второе на b и сложим почленно. Получим:

$$b^2c + c^2b = \beta^2c + \beta^2b + k^2b^2c + k^2c^2b,$$

или

$$bc(b + c) = \beta^2(b + c) + k^2bc(b + c),$$

или, по сокращении,

$$bc = \beta^2 + k^2bc,$$

откуда

$$\beta^2 = bc - k^2bc.$$

Подставляя сюда найденное выше значение k , получим:

$$\beta^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b + c)^2}.$$

224. В решении 223 были получены формулы:

$$\beta^2 = bc - k^2bc, \quad kb = b', \quad kc = c'.$$

Отсюда находим:

$$\beta^2 = bc - b'c',$$

что и требуется доказать.

225. В треугольнике ABC проведена высота AH и центр описанного круга O соединен с вершиной A и серединой P

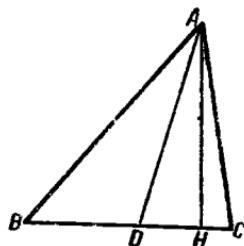


Рис. 173.

стороны AB (рис. 174). В решении 70 было доказано, что углы OAP , CAH равны. Следовательно, прямоугольные треугольники OAP , CAH подобны, и мы можем написать:

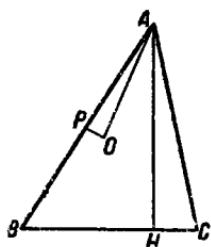


Рис. 174.

$$OA : AP = AC : AH,$$

$$R : \frac{1}{2}c = b : h_a,$$

откуда

$$R = \frac{bc}{2h_a},$$

или, по умножении числителя и знаменателя на a ,

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Чтобы получить искомое выражение R через a , b , c , остается подставить в эту формулу одно из выражений для S .

226. В решении 219 выведены различные выражения S через a , b , c , а в решении 225 выведено выражение R через a , b , c , S . Если мы выведем выражение полупериметра p' треугольника, образуемого основаниями высот, через те же величины, то нам останется только проверить тождество:

$$S = Rp'.$$

Пусть будет HKL этот треугольник (рис. 175), и введем для краткости обозначения:

$$HK = c', \quad KL = a', \quad LH = b',$$

так что

$$p' = \frac{1}{2}(a' + b' + c').$$

Чтобы вычислить $HK = c'$, рассмотрим треугольник HKC .

Угол C общий у треугольников HKC , ABC . Угол K треугольника HKC равен углу B треугольника ABC , вследствие того, что четырехугольник $ABHK$ вписуемый. Следовательно, треугольники HKC , ABC подобны. Отсюда находим пропорцию.

$$HK : AB = HC : AC,$$

или

$$c' : c = HC : b,$$

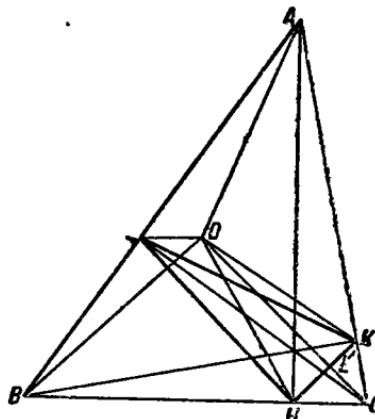


Рис. 175.

откуда

$$c' = \frac{c \cdot HC}{b}.$$

Из уравнения

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot HC$$

находим:

$$HC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

так что

$$c' = \frac{a^2c + b^2c - c^3}{2ab}.$$

По аналогии можем написать:

$$a' = \frac{b^2a + c^2a - a^3}{2bc}, \quad b' = \frac{a^2b + c^2b - b^3}{2ac}.$$

Полусумма полученных уравнений дает для p' выражение:

$$p' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4abc},$$

или, на основании формулы

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4},$$

более простое выражение:

$$p' = \frac{4S^2}{abc}.$$

Так как

$$R = \frac{abc}{4S},$$

то, перемножая, найдем:

$$p'R = S,$$

что и требовалось доказать. К тому же результату можно прийти и геометрическим путем, более соответствующим его простоте. Соединим центр описанного круга O с вершинами треугольников HKL , ABC и вычислим S как сумму площадей треугольников, на которые при этом разобьется треугольник ABC . Заметим, что прямые OC , OA , OB соответственно перпендикулярны к прямым HK , KL , LH . Действительно, по теореме 70 полупрямая $CL'O$ образует с полупрямой CHB такой же угол, как полупрямая CL с полупрямой CA . Так как CH , CA сходственные стороны подобных треугольников HKC , ABC , то CL' , CL также сходственные линии этих треугольников, и

следовательно, CL' есть высота треугольника HKC , то-есть OC перпендикулярна к HK . Так же убедимся, что OA, OB соответственно перпендикулярны к KL, LH . Теперь имеем:

$$\text{пл. } OHC = \frac{1}{2} OC \cdot HL', \quad \text{пл. } OKC = \frac{1}{2} OC \cdot KL'$$

и, складывая почленно,

$$\text{пл. } OHCK = \frac{1}{2} OC \cdot HK = \frac{1}{2} Rc'.$$

Таким образом получим:

$$\text{пл. } OHCK = \frac{1}{2} Rc', \quad \text{пл. } OKAL = \frac{1}{2} Ra', \quad \text{пл. } OLBH = \frac{1}{2} Rb'.$$

Складывая почленно, получим, как и выше:

$$S = Rp'.$$

Изложенные рассуждения относятся к остроугольным треугольникам. Если бы угол C был тупой, то мы имели бы уже

$$c' = -\frac{a^2c + b^2c - c^3}{2ab},$$

и для p' получилось бы иное выражение. Чтобы получить прежнее выражение, достаточно переменить знак c' , от чего p' превратится в $p' - c'$. Получим:

$$p' - c' = \frac{1}{2} (a' + b' - c') = \frac{4S^2}{abc}$$

Отсюда найдем:

$$(p' - c')R = S,$$

т. е. искомое обобщение. Геометрическое рассуждение также можно обобщить, но при этом оно заметно усложняется.

227. Примем центр вписанного круга за вершину, а стороны треугольника за основания трех других треугольников. Основания этих треугольников равны a, b, c , а высоты их равны r .

Складывая их площади $\frac{1}{2} ar, \frac{1}{2} br, \frac{1}{2} cr$, получим площадь данного треугольника S . Таким образом:

$$\frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = S,$$

или

$$\frac{1}{2} (a + b + c)r = S,$$

или

$$pr = S,$$

откуда

$$r = \frac{S}{p}.$$

Для определения радиуса ρ_a вневписанного круга, касательного к стороне a и к продолжениям сторон b, c , найдем таким же образом уравнение:

$$\frac{1}{2} b \rho_a + \frac{1}{2} c \rho_a - \frac{1}{2} a \rho_a = S,$$

откуда получим:

$$\rho_a = \frac{S}{p-a}.$$

Таким путем придем к четырем формулам:

$$r = \frac{S}{p}, \quad \rho_a = \frac{S}{p-a}, \quad \rho_b = \frac{S}{p-b}, \quad \rho_c = \frac{S}{p-c}.$$

228. Обозначим длины касательных к вписанному кругу из вершин A, B, C соответственно через x, y, z (тac. 176):

$$AD_2 = AD_3 = x,$$

$$BD_1 = BD_3 = y,$$

$$CD_1 = CD_2 = z.$$

Эти величины связаны уравнениями:

$$y+z=a, \quad x+z=b, \quad x+y=c.$$

Складывая почленно и деля пополам, найдем:

$$x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)=p.$$

Вычитая из полученного уравнения каждое из предыдущих, найдем:

$$x=p-a, \quad y=p-b, \quad z=p-c,$$

т. е. касательная из вершины треугольника к вписанному кругу равна полупериметру без противолежащей стороны. Теперь обозначим через x, y, z касательные из вершин A, B, C к вневписанному кругу, противолежащему вершине A :

$$AE_2 = AE_3 = x, \quad BE_1 = BE_3 = y, \quad CE_1 = CE_2 = z.$$

Для этих величин имеем уравнения:

$$y+z=a, \quad x-z=b, \quad x-y=c.$$

Складывая их почленно и деля пополам, найдем:

$$x=\frac{1}{2}(a+b+c)=p,$$

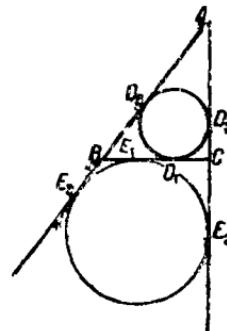


Рис. 176.

то-есть касательная из вершины треугольника к противолежащему вневписанному кругу равна полупериметру. Из второго и третьего уравнений найдем теперь:

$$\begin{aligned} z &= p - b, \\ y &= p - c. \end{aligned}$$

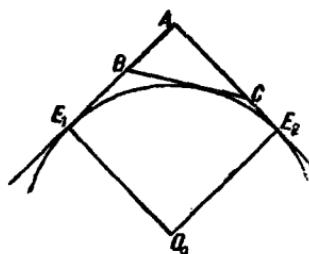


Рис. 177.

Сравнивая эти выражения с выведенными выше для случая вписанного круга, убеждаемся, что сторона треугольника делится точками касания вписанного и вневписанного кругов на отрезки равные, но расположенные в обратном порядке.

229. Радиусы вписанного или вневписанного круга, проведенные к точкам касания с катетами, образуют вместе с касательными к этому кругу из вершины прямого угла квадрат и, следовательно, равны этим касательным. Это показано на рис. 177 для вневписанного круга, противолежащего вершине прямого угла. На основании формул решения 228 для длин касательных найдем:

$$r_a = p, \quad r_b = p - c, \quad r_c = p - b, \quad r = p - a.$$

Те же формулы можно получить из общих формул решения 227. Например:

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{s}{p-a} = \frac{\frac{1}{2}bc}{\frac{1}{2}(b+c-a)} = \frac{bc}{b+c-a} = \\ &= \frac{bc}{b+c-\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{bc(b+c+\sqrt{b^2+c^2})}{(b+c)^2-(b^2+c^2)} = \frac{bc(b+c+\sqrt{b^2+c^2})}{2bc} = \\ &= \frac{1}{2}(b+c+\sqrt{b^2+c^2}) = \frac{1}{2}(a+b+c) = p. \end{aligned}$$

230. В прямоугольных треугольниках OBD_1 , O_aBE_3 (рис. 178) углы OBD_1 , O_aBE_3 , как половины смежных углов, в сумме равны d . Следовательно, углы OBD_1 , BO_aE_3 равны и треугольники OBD_1 , O_aBE_3 подобны. Отсюда следует:

$$OD_1 : BD_1 = BE_3 : O_aE_3,$$

или

$$r : (p - b) = (p - c) : r_a,$$

откуда

$$r r_a = (p - b)(p - c),$$

что и требовалось доказать.

231. В решении 230 получена формула:

$$r\rho_a = (p - b)(p - c).$$

С другой стороны, по общим формулам решения 227

$$r\rho_a = \frac{S^2}{p(p-a)}.$$

Сравнивая, находим:

$$\frac{S^2}{p(p-a)} = (p - b)(p - c),$$

откуда и получаем желаемое выражение:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Изложенный вывод имеет более геометрический характер, чем обычный, так как он не основан на числовых соотношениях в треугольнике и требует сравнительно простых вычислений.

232. Требуется доказать, что для всех точек M высоты AH треугольника ABC (рис. 179) имеет место соотношение

$$MB^2 + AC^2 = MC^2 + AB^2$$

и что это соотношение не имеет места ни для каких других точек. Вместо этого соотношения мы будем рассматривать следующее, равносильное ему:

$$MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2.$$

Пусть будет M какая угодно точка, и H' основание перпендикуляра из этой точки на сторону BC . Имеем:

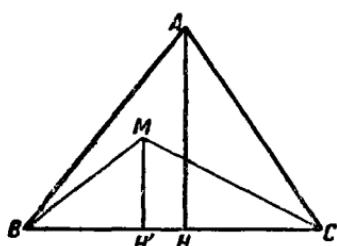


Рис. 179.

$$MB^2 - MC^2 = (BH'^2 + H'M^2) - (CH'^2 + H'M^2) = BH'^2 - CH'^2,$$

$$AB^2 - AC^2 = (BH^2 + HA^2) - (CH^2 + HA^2) = BH^2 - CH^2.$$

Отсюда видно, что соотношение

$$MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2$$

равносильно соотношению

$$BH'^2 - CH'^2 = BH^2 - CH^2,$$

а последнее, как нетрудно убедиться, имеет место тогда и только тогда, когда точка H' совпадает с точкой H , т. е. когда точка M лежит на высоте AH . Итак, мы доказали, что высота AH есть геометрическое место точек M , для которых

$$MB^2 + b^2 = MC^2 + c^2.$$

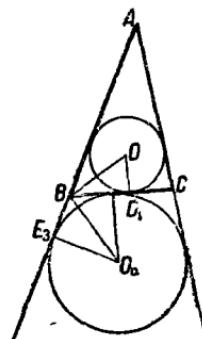


Рис. 178.

Теорема о пересечении высот в одной точке выводится отсюда по методу геометрических мест, совершенно так же, как соответствующие теоремы для перпендикуляров в серединах сторон и биссектрис, и как теорема о пересечении медиан в решении 207. Ортоцентр D есть точка, для которой имеет место соотношение

$$AD^2 + a^2 = BD^2 + b^2 = CD^2 + c^2.$$

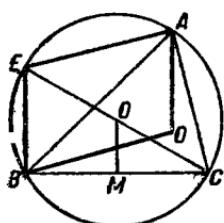


Рис. 180.

233. Пусть будет D ортоцентр треугольника ABC и COD диаметр описанного круга (рис. 180). Четырехугольник $ADBE$ есть параллелограмм, так как стороны AD , BE перпендикулярны к прямой BC и, следовательно, параллельны, а стороны BD , AE перпендикулярны к прямой AC и, следовательно, также параллельны. Отсюда заключаем:

$$AD = BE,$$

после чего находим:

$$AD^2 + BC^2 = BE^2 + BC^2 = CE^2,$$

или

$$AD^2 + a^2 = 4R^2,$$

что и требовалось доказать. То же самое можно получить из теоремы 85:

$$OM^2 + MC^2 = OC^2,$$

$$\frac{AD^2}{4} + \frac{a^2}{4} = R^2,$$

$$AD^2 + a^2 = 4R^2.$$

234. По данным $AH=h$, $BH=m$, $CH=n$ требуется определить $DH=x$, где D — точка пересечения AH с BK (рис. 181). Треугольники BDH , ACH подобны вследствие перпендикулярности сходственных сторон. Отсюда пропорция:

$$DH : BH = CH : AH,$$

или

$$x : m = n : h,$$

откуда

$$x = \frac{mn}{h}.$$

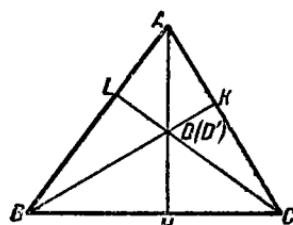


Рис. 181.

Полученное выражение для x симметрично по отношению к m , n и не изменилось бы, если бы мы искали вместо от-

резка DH , отсекаемого высотой BK , отрезок $D'H$, отсекаемый высотой CL . Отсюда видно, что отрезки DH , $D'H$ равны. Нетрудно также проверить, что они во всех случаях расположены по одну сторону от точки H . Следовательно, точки D , D' совпадают. Таким образом высоты BK , CL пересекают высоту AH в одной и той же точке $D(D')$, то-есть все три высоты пересекаются в одной точке.

235. В обозначениях задачи 234 требуется доказать:

$$AH \cdot AD + BK \cdot BD + CL \cdot CD = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Пользуясь тем, что четырехугольники $ALDK$, $BLDH$ вписуемые, найдем по теореме о произведении секущей на внешний отрезок:

$$AH \cdot AD = AB \cdot AL, \quad BK \cdot BD = AB \cdot BL.$$

Складывая почленно, получим:

$$AH \cdot AD + BK \cdot BD = AB \cdot AL + AB \cdot BL = AB(Al + BL) = AB^2.$$

Таким путем найдем:

$$AH \cdot AD + BK \cdot BD = AB^2,$$

$$AH \cdot AD + CL \cdot CD = AC^2,$$

$$BK \cdot BD + CL \cdot CD = BC^2.$$

Складывая почленно и деля пополам, получим:

$$AH \cdot AD + BK \cdot BD + CL \cdot CD = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 + BC^2),$$

что и требовалось доказать. Если угол C тупой, то мы получим сходным образом:

$$AH \cdot AD + BK \cdot BD - CL \cdot CD = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

236. Центр вписанного круга есть ортоцентр треугольника с вершинами в центрах вневписанных кругов. Предложенная теорема непосредственно вытекает из свойства ортоцентра, указанного в конце решения 232.

237. Предложенная теорема непосредственно вытекает из решения 234 в применении к треугольнику с вершинами в центрах вневписанных кругов.

238. Из подобия треугольников ADK , BCK (рис. 182) следует пропорция

$$AD : BC = AK : BK,$$

или

$$AD : a = AK : h_b.$$

Отрезок AK определим из соотношения

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AK.$$

которое дает

$$AK = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

Подставляя это выражение в найденную пропорцию, получим

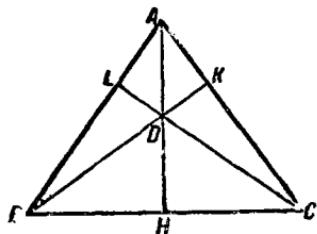


Рис. 182.

$$AD : a = \pm \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} : h_b.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} AD &= \pm \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bh_b} = \\ &= \pm \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{4S}. \end{aligned}$$

Таким путем получим три формулы:

$$AD = \pm \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{4S}, \quad BD = \pm \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{4S},$$

$$CD = \pm \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}.$$

Знак $+$ относится к расстояниям ортоцентра от вершин острых углов, а знак $-$ — к расстояниям от вершин тупых углов.

239. В решении 238 выведены выражения для расстояний ортоцентра от вершин. По теореме 85 расстояния центра описанного круга от сторон вдвое меньше расстояний ортоцентра от противолежащих вершин. Отсюда следует, что расстояния центра описанного круга от сторон a, b, c соответственно равны

$$\pm \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{8S},$$

$$\pm \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{8S},$$

$$\pm \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{8S}.$$

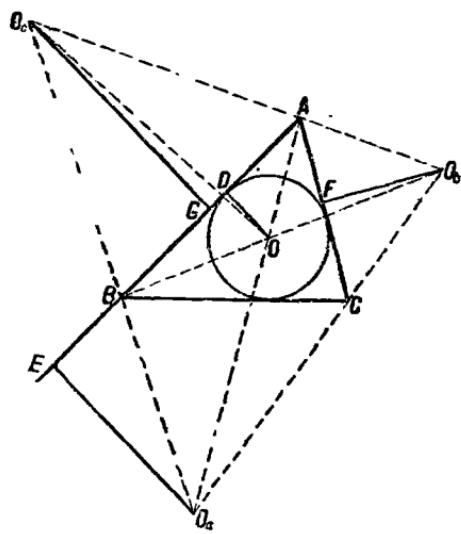


Рис. 183.

240. Пусть будут O, O_a, O_b, O_c центры вписанного и вневписанных кругов, OD, O_aE, O_bF, O_cG радиусы этих кругов

(рис. 183). Имеем:

$$\begin{aligned} OA^2 &= OD^2 + AD^2 = r^2 + (p-a)^2 = \frac{S^2}{p^2} + (p-a)^2 = \\ &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} + (p-a)^2 = \frac{p-a}{p} [(p-b)(p-c) + \\ &+ p(p-a)] = \frac{p-a}{4p} [(a+c-b)(a+b-c) + (a+b+c)(b+c-a)] = \\ &= \frac{p-a}{4p} [a^2 - (b-c)^2 + (b+c)^2 - a^2] = \frac{p-a}{p} bc; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_a A^2 &= O_a E^2 + AE^2 = \rho_a^2 + p^2 = \frac{S^2}{(p-a)^2} + p^2 = \frac{p(p-b)(p-c)}{p-a} + p^2 = \\ &= \frac{p}{p-a} [(p-b)(p-c) + p(p-a)] = \frac{p}{p-a} bc; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OO_a &= O_a A - OA = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}} - \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}} = \\ &= \sqrt{\frac{pbc}{p-a}} \left[1 - \frac{p-a}{p} \right] = \frac{a}{p} \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}. \end{aligned}$$

Присоединив к полученным формулам аналогичные, получим следующую таблицу формул:

$$\begin{aligned} OA &= \sqrt{\frac{(p-a)bc}{p}}, \quad O_a A = \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}, \quad OO_a = \frac{a}{p} \sqrt{\frac{pbc}{p-a}}; \\ OB &= \sqrt{\frac{(p-b)ac}{p}}, \quad O_b B = \sqrt{\frac{pac}{p-b}}, \quad OO_b = \frac{b}{p} \sqrt{\frac{pac}{p-b}}; \\ OC &= \sqrt{\frac{(p-c)ab}{p}}, \quad O_c C = \sqrt{\frac{pab}{p-c}}, \quad OO_c = \frac{c}{p} \sqrt{\frac{pab}{p-c}}. \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} O_b A^2 &= O_b F^2 + AF^2 = \rho_b^2 + (p-c)^2 = \frac{S^2}{(p-b)^2} + (p-c)^2 = \\ &= \frac{p(p-a)(p-c)^2}{p-b} + (p-c)^2 = \frac{p-c}{p-b} [p(p-a) + (p-b)(p-c)] = \\ &= \frac{p-c}{p-b} bc; \quad O_c A^2 = \frac{p-b}{p-c} bc; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_b O_c &= \sqrt{\frac{(p-c)bc}{p-b}} + \sqrt{\frac{(p-b)bc}{p-c}} = \sqrt{\frac{(p-b)bc}{p-c}} \left[\frac{p-c}{p-b} + 1 \right] = \\ &= \frac{a}{p-b} \sqrt{\frac{(p-b)bc}{p-c}} = a \sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}. \end{aligned}$$

Присоединив аналогичные формулы, получим таблицу:

$$\begin{aligned} O_b A &= \sqrt{\frac{(p-c)bc}{p-b}}, O_c A = \sqrt{\frac{(p-b)bc}{p-c}}, O_b O_c = a \sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}}, \\ O_a B &= \sqrt{\frac{(p-c)ac}{p+a}}, O_c B = \sqrt{\frac{(p-a)ac}{p-c}}, O_a O_c = b \sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}}, \\ O_a C &= \sqrt{\frac{(p-b)ab}{p-a}}, O_b C = \sqrt{\frac{(p-a)ab}{p-b}}, O_a O_b = c \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}} \end{aligned}$$

241. Требуется выразить разность квадратов диагоналей $AC=p$, $BD=q$ через расстояния $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$ произвольной точки O от вершин (рис. 184). Треугольники AOC , BOD имеют общую медиану OM . По формулам решения 221 имеем

$$4OM^2 = 2a^2 + 2c^2 - p^2 = 2b^2 + 2d^2 - q^2.$$

Отсюда найдем:

$$p^2 - q^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2 - d^2).$$

242. Требуется выразить разность квадратов диагоналей $AC=p$, $BD=q$ через стороны $AB=CD=m$, $AD=CB=n$ и площадь S (рис. 185). Проведем высоты CH , DK и обозна-

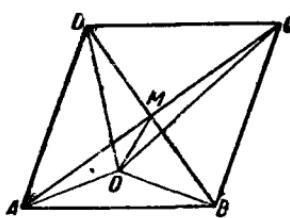


Рис. 184

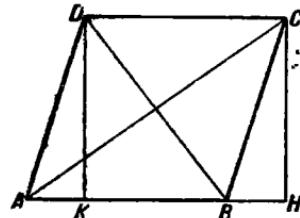


Рис. 185.

чим еще $CH=DK=h$, $BH=AK=k$. Из треугольников ABC , ABD найдем:

$$\begin{aligned} p^2 &= m^2 + n^2 + 2mk, \\ q^2 &= m^2 + n^2 - 2mk. \end{aligned}$$

Вычитая почленно, получим:

$$p^2 - q^2 = 4mk.$$

Из треугольника BCH или ADK найдем:

$$k = \sqrt{n^2 - h^2}.$$

Следовательно.

$$p^2 - q^2 = 4m\sqrt{n^2 - h^2} = 4\sqrt{m^2n^2 - m^2h^2}$$

Но

$$mh = S.$$

так что

$$p^2 - q^2 = 4\sqrt{m^2n^2 - S^2}.$$

243. Сравнивая выражения для $p^2 - q^2$, полученные в решениях 241 и 242, найдем:

$$2(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) = 4\sqrt{m^2n^2 - S^2}.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2n^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2},$$

или

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(2mn + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2mn - a^2 - c^2 + b^2 + d^2)}.$$

244. Даны (рис. 186) стороны $AB = a$, $CD = b$, $AD = c$, $CB = d$. Нужно определить диагонали $AC = m$, $BD = n$. Диагональ m можно было бы определить из треугольника ABC если бы был известен отрезок $BH = k$ от вершины противолежащего угла до основания высоты:

$$m^2 = a^2 + d^2 \mp 2ak$$

Чтобы найти уравнение, связывающее отрезок k с известными величинами, проведем CK параллельно DA . Из треугольника CKB , в котором $CK = DA = c$, $KB = AB - AK = AB - CD = a - b$, найдем искомое уравнение:

$$c^2 = (a - b)^2 + d^2 \mp 2(a - b)k.$$

Чтобы исключить k из двух полученных уравнений, умножаем первое на $a - b$, второе на $-a$ и складываем почленно. Получим уравнение

$$m^2(a - b) - c^2a = ab(a - b) - d^2b,$$

откуда найдем:

$$m^2 = ab + \frac{c^2a - d^2b}{a - b}.$$

По аналогии найдем:

$$n^2 = ab + \frac{d^2a - c^2b}{a - b}.$$

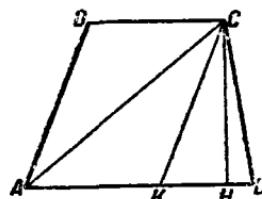


Рис. 186.

245. Складывая выражения для m^2 и n^2 , выведенные в решении 244, найдем:

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= 2ab + \frac{c^2a + d^2a - c^2b - d^2b}{a - b} = \\ &= 2ab + \frac{(c^2 + d^2)(a - b)}{a - b} = c^2 + d^2 + 2ab, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

246. В обозначениях решения 244 имеем:

пл. $CKB =$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(c+d-a+b)};$$

$$\begin{aligned} \text{пл. } ABCD : \text{пл. } CKB &= \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot CH : \frac{1}{2} KB \cdot CH = \\ &= (AB + CD) : KB = (a + b) : (a - b); \end{aligned}$$

$$\text{пл. } ABCD = \frac{a+b}{a-b} \quad \text{пл. } CKB =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(c+d-a+b)}.$$

247. Перенесем параллельно треугольник ABD в положение $CB'D'$ (рис. 187). Имеем:

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } ABD + \text{пл. } CBD = \text{пл. } CB'D' + \text{пл. } CBD.$$

Но по теореме 196

$$\text{пл. } CBD + \text{пл. } CB'D' = \frac{1}{2} \text{ пл. } BB'D'D.$$

Следовательно,

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } BB'D'D.$$

Задача сведена к определению площади параллелограмма

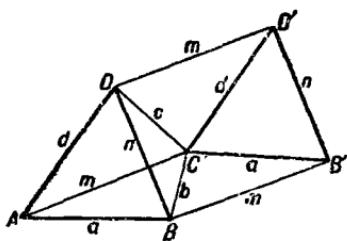


Рис. 187.

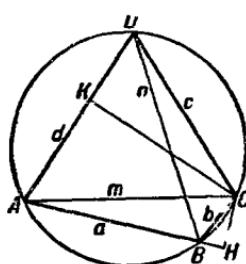


Рис. 188.

BB'D'D. Последнюю можно определить с помощью формулы решения 243 по сторонам, равным диагоналям четырехуголь-

ника, и расстояниям точки C от вершин, равным сторонам четырехугольника. Получим:

$$\text{пл. } ABCD = \frac{1}{2} \text{ пл. } BB'D'D =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(2mn + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2mn - a^2 - c^2 + b^2 + d^2)}.$$

248. Проведем в треугольниках ABC , ADC высоты CH , CK и определим из обоих треугольников диагональ AC (рис. 188):

$$m^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot BH, \quad m^2 = d^2 + c^2 - 2d \cdot DK.$$

Чтобы исключить из этих уравнений BH и DK , достаточно связать эти величины еще одним уравнением. Такое уравнение получим из рассмотрения треугольников CHB и CDK . По свойству вписанного четырехугольника треугольники CBH и CDK имеют равные острые углы $\angle CBH$ и $\angle CDK$. Следовательно, они подобны, и мы имеем пропорцию:

$$BH : DK = b : c,$$

откуда

$$BH \cdot c = DK \cdot b.$$

Полученное соотношение позволяет исключить из наших уравнений BH и DK посредством умножения их соответственно на cd и ab и сложения. Получим уравнение:

$$m^2(ab + cd) = a^2cd + abd^2 + b^2cd + abc^2,$$

или

$$m^2(ab + cd) = (ac + bd)(ad + bc),$$

откуда

$$m^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

В числителе имеем сумму произведений противоположных сторон и сумму произведений сторон, сходящихся в концах определяемой диагонали, а в знаменателе сумму произведений сторон, сходящихся в концах другой диагонали. По аналогии получим:

$$n^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

249. Перемножая формулы решения 248, найдем:

$$m^2 n^2 = (ac + bd)^2,$$

откуда

$$mn = ac + bd,$$

что и составляет теорему Птоломея.

250. Подставляя в формулу

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(2mn + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2mn - a^2 - c^2 + b^2 + d^2)}$$

решения 247 выражение $mn = ac + bd$ из решения 249, получим:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{(2ac + 2bd + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2ac + 2bd - a^2 - c^2 + b^2 + d^2)} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{[(a+c)^2 - (b-d)^2][(b+d)^2 - (a-c)^2]} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+c+b-d)(a+c-b+d)(b+d+a-c)(b+d-a+c)}, \end{aligned}$$

или, полагая $a + b + c + d = 2p$,

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

251. Пусть будут $PA = a$, $PB = b$ данные хорды, $AB = x$ искомая хорда, $PQ = 2R$ диаметр круга (рис. 189). Из треугольников PAQ , PBQ найдем:

$$AQ = \sqrt{4R^2 - a^2}, \quad BQ = \sqrt{4R^2 - b^2}.$$

В случае, когда хорда AB стягивает сумму дуг, стягиваемых хордами PA , PB , который представлен на рис. 189, найдем по теореме Птоломея:

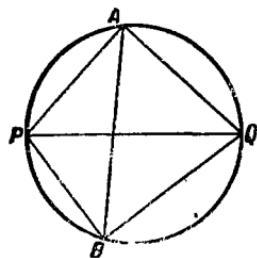


Рис. 189.

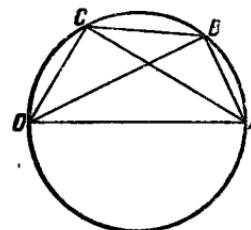


Рис. 190.

$$2Rx = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} + \\ &\quad + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}. \end{aligned}$$

Подобным же образом найдем для хорды разности данных дуг выражение:

$$x = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}} - b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}}.$$

Здесь a большая из данных хорд.

252. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = d$, $AD = 2R = x$ (рис. 190). Тогда из треугольников ABD , ACD найдем:

$$BD = \sqrt{x^2 - a^2}, \quad AC = \sqrt{x^2 - c^2}.$$

По теореме Птоломея:

$$\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - c^2} = bx + ac.$$

Это и есть искомое уравнение. После возвышения в квадрат и приведения подобных членов оно примет вид:

$$x^4 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 - 2abcx = 0.$$

Это уравнение можно еще сократить на x , так как искомый диаметр не может быть равен нулю. Окончательно получим уравнение третьей степени:

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0.$$

Правильные многоугольники

253. Так как между плитками паркета не должно быть промежутков, то углы плиток, сходящихся в одной точке, должны в сумме давать 360° . Следовательно, паркет можно сложить только из таких правильных многоугольников, угол которых содержит целое число раз в 360° . Углы правильных многоугольников равны по порядку:

$$60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ, \dots$$

При увеличении числа сторон угол правильного многоугольника возрастает, но остается все же меньше 180° . Углы 60° , 90° , 120° содержатся в 360° соответственно 6, 4, 3 раза, то-есть целое число раз. Угол 108° содержится в 360° дробное число раз, а именно $3\frac{1}{3}$ раза. Остальные углы, большие 120° и меньшие 180° , содержатся в 360° менее 3 раз и более 2 раз,

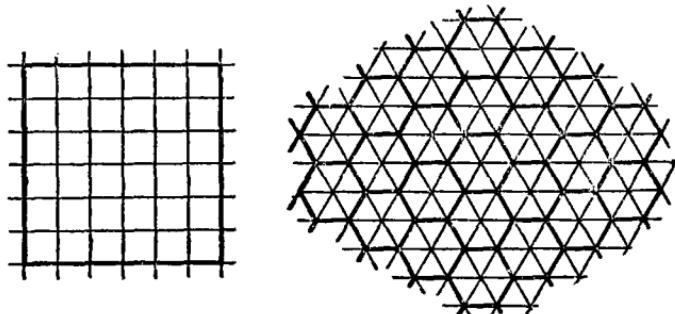


Рис. 191.

то-есть также дробное число раз. Таким образом, ни из каких правильных многоугольников, кроме многоугольников с углом 120° ,

60° , 90° , 120° , то-есть треугольников, квадратов и шестиугольников, нельзя сложить паркет. Остается выяснить, можно ли сложить паркет из многоугольников этих трех видов.

Чтобы построить соответствующую фигуру для квадратов (рис. 191 слева), достаточно провести две системы равноотстоящих параллельных, перпендикулярных между собой. Чтобы получить подобную же сеть из правильных треугольников (рис. 191 справа), достаточно провести две системы равноотстоящих параллельных, наклоненных друг к другу под углом 60° , что приведет к сети ромбов с острым углом 60° , и в каждом ромбе провести меньшую диагональ. Сеть шестиугольников можно получить из сети треугольников, объединяя по шести треугольников в один шестиугольник, как показано на чертеже жирными линиями.

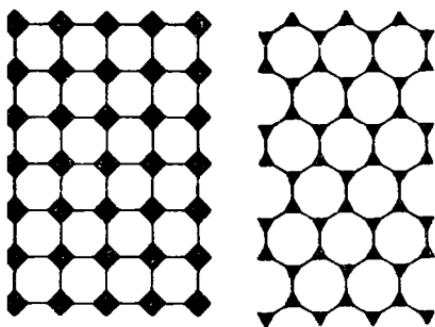


Рис. 192.

из сети квадратов, если в каждый квадрат вписать восьмиугольник, как показано на рис. 192 слева; промежутки между восьмиугольниками окажутся квадратами. Точно так же сеть двенадцатиугольников и треугольников можно получить из сети шестиугольников (рис. 192 справа).

255. Угол десятиугольника равен $\frac{8d}{5}$, а угол пятиугольника $\frac{6d}{5}$. Если в одной точке сходится x десятиугольников и y пятиугольников, то должно иметь место уравнение

$$\frac{8d}{5}x + \frac{6d}{5}y = 4d,$$

или

$$4x + 3y = 10.$$

При этом нужно иметь в виду, что x , y —числа целые и положительные. Полагая $x=1, 2, 3, \dots$, найдем из ур-ния $y=2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$ Из этих чисел первое целое и положительное, второе дробное и положительное, а все дальнейшие отрицательные. Таким образом единственно возможным оказывается предположение $x=1$, $y=2$, то-есть что в каждой точке сходятся один десятиугольник и два пятиугольника.

Но легко убедиться, что паркет из десятиугольников и пятиугольников все же невозможен. Из двух соседних сторон пятиугольника к одной должен прилегать десятиугольник, а к другой пятиугольник, потому что в вершине должны сходиться один десятиугольник и два пятиугольника. При обходе пятиугольника мы должны около одной стороны найти десятиугольник, около следующей пятиугольник, около третьей десятиугольник, около четвертой пятиугольник, около пятой десятиугольник. Но тогда оказалось бы, что к двум соседним сторонам, первой и пятой, прилегают десятиугольники, что невозможно.

256. Вписанный многоугольник может иметь равные углы, но неравные стороны: например, вписанный прямоугольник может и не быть квадратом. Но вписанный многоугольник не может иметь равные стороны и неравные углы. Действительно, если стороны равны, то равны и стягиваемые ими дуги, а следовательно, равны и вдвое большие дуги, вмещающие углы многоугольника.

257. Описанный многоугольник может иметь равные стороны, но неравные углы: например, описанный ромб может и не быть квадратом. Но описанный многоугольник не может иметь равные углы и неравные стороны. Действительно, из равенства углов следует равенство дуг между точками касания соседних сторон, а отсюда легко выводится равенство сторон.

258. Пусть будет O центр данного круга, A , B , C центры вписанных кругов, P точка касания кругов A , B и Q точка касания кругов A , O (рис. 193).

В правильном треугольнике ABC имеем:

$$a = AB = AP + BP = x + x = 2x,$$

$$r = OA = OQ - AQ = R - x.$$

Соотношение

$$a = r\sqrt{3}$$

дает уравнение

$$2x = (R - x)\sqrt{3},$$

из которого находим:

$$x = R(2\sqrt{3} - 3).$$

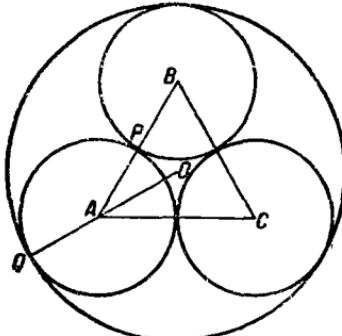


Рис. 193.

259. Центры внешних кругов (рис. 194) образуют квадрат, в котором

$$a = 2x, \quad r = R + x.$$

Соотношение

$$a = r\sqrt{2}$$

дает уравнение

$$2x = (R + x)\sqrt{2},$$

из которого находим:

$$x = R(1 + \sqrt{2}).$$

260. Соединив точки касания сторон правильного описанного треугольника к кругу, получим правильный вписанный треугольник, стороны которого суть средние линии описанного треугольника. Отсюда:

$$b_3 = 2a_3 = 2R\sqrt{3}.$$

Соединив точки касания противоположных сторон описанного квадрата к кругу, получим диаметр круга, который равен стороне квадрата, как средняя линия его. Отсюда

$$b_4 = 2R.$$

Рис. 194.

Сторону описанного шестиугольника вычислим по общей формуле:

$$b_6 = \frac{2a_6 R}{\sqrt{4R^2 - a_6^2}} = \frac{2R \cdot R}{\sqrt{4R^2 - R^2}} = R\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

261. Обозначим для однородности стороны и диагонали правильного вписанного десятиугольника через d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 , по числу десятых полной окружности, содержащихся в стягиваемых ими дугах. На

рис. 195

$$\begin{aligned} AB &= d_1, \quad AC = d_3; \quad BD = d_4, \\ CD &= d_2, \quad AD = d_5. \end{aligned}$$

Для упрощения вычислений примем радиус за единицу длины и десятую часть полной окружности за единицу дуги или угла. В курсах элементарной геометрии можно найти вычисление d_1 , но мы повторим еще раз те же рассуждения, так как они позволяют одновременно найти d_1 и d_3 и объясняют сходство их выражений. Проведем радиусы OB, OC и отметим точку

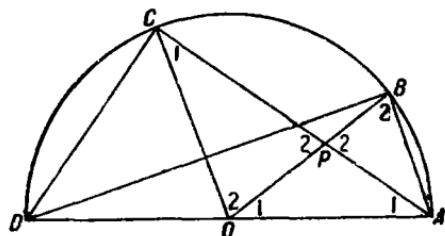
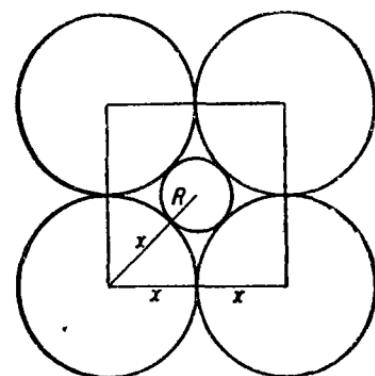


Рис. 195.

пересечения P прямых OB , AC . В выбранной единице угла найдем непосредственно:

$$\angle AOB = 1, \angle BOC = 2, \angle AOC = 3.$$

Так как в той же единице сумма углов треугольника равна 5, то из равнобедренных треугольников AOB , AOC найдем:

$$\angle ABO = 2, \angle ACO = \angle CAO = 1,$$

и по теореме о внешнем угле для треугольника APO :

$$\angle APB = \angle OPC = 2.$$

Из равенства углов при соответствующих основаниях заключаем, что треугольники APB , CPO , PAO равнобедренные. Имеем:

$$OP = PA = AB = d_1, \quad PC = OC = 1.$$

На основании первого из этих равенств и подобия треугольников OAB , APB обычно и вычисляют d_1 :

$$OA : AB = AB : BP; \quad 1 : d_1 = d_1 : 1 - d_1; \quad d_1^2 + d_1 - 1 = 0;$$

$$d_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad d_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Таким же образом можно на основании второго равенства вычислить d_3 :

$$OA : AC = AP : OA; \quad 1 : d_3 = d_3 - 1 : 1; \quad d_3^2 - d_3 - 1 = 0;$$

$$d_3 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad d_3 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Но если считать d_1 известным, то d_3 можно вычислить так:

$$d_3 = AC = AP + PC = d_1 + 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Проще же всего вычислять d_1 , d_3 одновременно:

$$AC - AP = PC; \quad d_3 - d_1 = 1.$$

$$AC : AO = AO : AP; \quad AC \cdot AP = AO^2; \quad d_3 d_1 = 1.$$

Найденная система уравнений

$$d_3 + (-d_1) = 1, \quad d_3 \cdot (-d_1) = -1$$

показывает, что d_3 , $-d_1$ суть корни уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

которое дает

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

За $-d_1$ нужно принять отрицательный корень, а за d_3 положительный корень, откуда и получаем:

$$d_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad d_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Из прямоугольных треугольников ABD , ACD найдем после этого

$$d_4 = BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{4 - d_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$d_5 = CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{4 - d_3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Наконец,

$$d_6 = AD = 2.$$

При произвольном выборе единицы длины те же формулы дают отношения стороны и диагоналей к радиусу и принимают вид:

$$a_{10} = d_1 = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad d_2 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad d_3 = R \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$$d_4 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad d_5 = 2R.$$

Изложенный способ вычисления самый простой, но не единственный. Можно, например, исходить из известного выражения $d_1 = a_{10}$, найти d_2 как хорду, стягивающую дугу вдвое большую, чем d_1 , затем определить d_3 , d_4 из прямоугольных треугольников ABD , ACD . Можно также воспользоваться тем, что высоты прямоугольных треугольников ABD , ACD равны $\frac{1}{2}d_2$, $\frac{1}{2}d_4$. Можно применять теорему Птоломея к различным четырехугольникам, составленным из сторон и диагоналей десятиугольника. Разыскание наивыгоднейших способов вычисления представляет собой полезное упражнение с точки зрения как геометрии, так и алгебры.

262. Искомые величины уже вычислены в решении 261; сторона пятиугольника равна d_2 , а диагональ его равна d_4 .

263. Обозначим сторону правильного десятиугольника через a , апофему через h , радиус описанного круга через R , площадь через S . Тогда:

$$S = 5ah = 5a \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Из соотношения

$$a = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

находим:

$$R = \frac{2a}{\sqrt{5}-1} = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Отсюда

$$S = 5a \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = 5a \sqrt{\frac{a^2(\sqrt{5}+1)^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a^2 \frac{5\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2}.$$

264. Принимая радиус за единицу длины, найдем по формуле удвоения числа сторон:

$$a_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_6^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Но можно получить более удобное выражение, замечая, что сторона двенадцатигольника стягивает дугу, равную разности дуг, стягиваемых стороной треугольника и стороной квадрата

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}.$$

По формуле решения 251 найдем:

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_3 \sqrt{1 - \frac{a_4^2}{4}} - a_4 \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{4}} = \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{4}} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Легко удостовериться в тождественности обоих выражений:

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Второе выражение удобнее для вычисления, так как не содержит знака корня под другим знаком корня.

265. Дуга, стягиваемая a_{15} , равна разности дуг, стягиваемых a_6 и a_{10} . По формуле решения 251 найдем, принимая для простоты $R = 1$:

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_6 \sqrt{1 - \frac{a_{10}^2}{4}} - a_{10} \sqrt{1 - \frac{a_6^2}{4}} = 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} - \\ &- \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}). \end{aligned}$$

266. Дуга, стягиваемая a_{60} , равна разности дуг, стягиваемых a_{10} и a_{12} :

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12}.$$

По формуле решения 251 имеем, полагая $R = 1$:

$$a_{60} = a_{10} \sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}} - a_{12} \sqrt{1 - \frac{a_{10}^2}{4}}.$$

Здесь

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad a_{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}};$$

$$\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}+1}{8}} = \\ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{1 - \frac{a_{10}^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Следовательно,

$$a_{60} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \\ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10+\sqrt{20}}}{4} = \\ = \frac{1}{8} \left(\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sqrt{10 + \sqrt{20}} \right).$$

Измерение круга

267. Длина окружности заключается между периметрами вписанного шестиугольника и описанного квадрата:

$$6a_6 < C < 4b_4,$$

или по известным формулам

$$6R < 2\pi R < 8R,$$

что по сокращении на $2R$ дает:

$$3 < \pi < 4.$$

268. Имеем:

$$C < 6b_6$$

или, полагая $R = 1$,

$$2\pi < 6 \sqrt{\frac{4}{3}} = 2\sqrt{12},$$

откуда

$$\pi < \sqrt{12} = 3,46\dots$$

269. Полагая $R = 1$, будем иметь приближенно с недостатком:

$$2\pi = 60a_{60}, \quad \pi = 30a_{60},$$

или, согласно формуле решения 266:

$$\pi = \frac{15}{4} \left(\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sqrt{10 + \sqrt{20}} \right).$$

С помощью таблицы квадратных корней, приложенной к таблице логарифмов Е. Пржеvalского, найдем с точностью до одной тысячной

$$30a_{60} = 3,140,$$

Иначе говоря,

$$3,139 < 30a_{60} < 3,141.$$

Остается оценить погрешность нашего определения числа π , то есть указать возможно узкие пределы, между которыми это число заключается. Имеем:

$$3,139 < 30a_{60} < \pi < 30b_{60} =$$

$$= 30a_{60} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a_{60}^2}{4}}} < 3,141 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(3,141)}{30^2 \cdot 4}}} < \frac{3,141}{0,998} < 3,1473.$$

Итак, число π заключается между границами 3,139 и 3,1473, разность между которыми равна 0,0083. С ошибкой, не превышающей девяти тысячных, можно поэтому принять

$$\pi = 3,14.$$

270. Имеем, с одной стороны:

$$a_3 + a_4 = R\sqrt{3} + R\sqrt{2} = R \cdot 3,1463,$$

с другой стороны:

$$\frac{1}{2} C = \pi R = R \cdot 3,1419.$$

Следовательно, сумма $a_3 + a_4$ больше полуокружности на $0,0044R$, что составляет около 0,0014 самой полуокружности.

271. Согласно решению 258 (рис. 193) радиус вписанных кругов будет

$$x = R(2\sqrt{3} - 3).$$

Искомая площадь S есть разность площади треугольника, образуемого центрами этих кругов, и площадей трех секторов

этих кругов с углом 60° . Отсюда найдем:

$$\begin{aligned} S = x^2 \sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} \pi x^2 &= x^2 \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2} \pi \right) = \\ &= R^2 (21 - 12\sqrt{3}) \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2} \pi \right). \end{aligned}$$

272. Так как вписанный угол ABC равен 60° , то дуга DEC , на которую он опирается, равна 120° , и следовательно, дуга BD равна 60° (рис. 196).

Так же найдем, что и дуга CE равна 60° . Отсюда видно, что треугольники OBD , OCE также правильные. Площадь каждого из них составляет четверть площади треугольника ABC , и следовательно, остающаяся площадь $ADOE$ составляет половину площади треугольника ABC . Вычтя из площади $ADOE$ площадь ODE , составляющую шестую часть данного круга, получим искомую площадь:

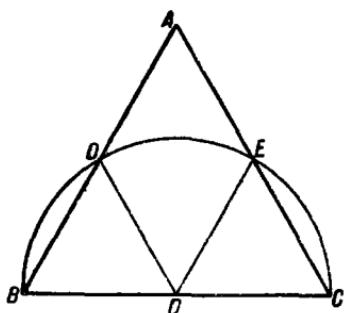


Рис. 196

$$\begin{aligned} \text{пл. } ADE &= \text{пл. } ADOE - \text{пл. } ODE = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3} - \frac{1}{6} \pi R^2 = \\ &= R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Начала геометрии кругов

273. Пусть будут M, M' концы диаметра круга K , проходящего через точку P , причем через M обозначим тот конец, который дальше от P (если точка M совпадает с центром, то выбор обозначений безразличен). Условимся при вычислении не приписывать знаков отрезкам PM, PM' . Тогда степень будет равна $-PM \cdot PM'$ в том случае, когда она отрицательна. Если точка P лежит вне круга K , то $PM = d + r, PM' = d - r$, и степень будет $PM \cdot PM' = d^2 - r^2$. Если точка P лежит внутри круга K , то $PM = d + r, PM' = r - d$ и $PM \cdot PM' = r^2 - d^2$, но степень равна $-PM \cdot PM' = d^2 - r^2$. Если точка P лежит на окружности, то $PM = 0$, так что и степень $PM \cdot PM'$ равна нулю. Это согласуется с выражением $d^2 - r^2$ для степени, так как в этом случае $d = r$.

274. Пусть будут K_1, K_2 данные круги, O_1, O_2 их центры, M какая-нибудь точка искомого геометрического места. Обозначим радиусы кругов K_1, K_2 через r_1, r_2 , расстояние их цен-

тров от точки M через d_1, d_2 и предположим обозначения выбранными так, что $r_1 \geq r_2$. Будем иметь

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2 \text{ или } d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

откуда видно, что $d_1 \geq d_2$. Предположим, что центры O_1, O_2 различны, и выясним сначала, существуют ли точки искомого геометрического места на линии центров O_1O_2 . Такая точка P может лежать на отрезке O_1O_2 или вне его. Если обозначим длину отрезка O_1O_2 через d , то в первом случае имеем $d_1 + d_2 = d$, а во втором $d_1 - d_2 = d$. Чтобы выяснить возможность этих случаев, решим совместно уравнение $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ с каждым из уравнений $d_1 + d_2 = d$ и $d_1 - d_2 = d$. Получим соответственно

$$d_1 = \frac{1}{2d} (d^2 + r_1^2 - r_2^2), \quad d_2 = \frac{1}{2d} (d^2 - r_1^2 + r_2^2)$$

и

$$d_1 = \frac{1}{2d} (d^2 + r_1^2 - r_2^2), \quad d_2 = \frac{1}{2d} (r_1^2 - r_2^2 - d^2).$$

Если какое-либо из этих решений дает для d_1 и d_2 неотрицательные значения, то тем самым найдена точка, удовлетворяющая поставленным условиям. В противном случае такой точки не существует. Так как $d_1 > d_2$, то достаточно, чтобы d_2 не было отрицательным числом. Но полученные формулы показывают, что в зависимости от двух сделанных предположений относительно положения точки P для d_2 получаются значения, равные по величине, но обратные по знаку, если только оба они не равны нулю. В этом последнем случае имеем $d_1 = d$, $d_2 = 0$, т. е. точка P совпадает с точкой O_2 . Во всех других случаях пригодно либо только первое, либо только второе решение. Таким образом, если круги K_1, K_2 неконцентрические, то всегда существует одна и только одна точка P на прямой O_1O_2 , для которой степени относительно кругов K_1, K_2 равны между собой.

Пусть теперь будет M' какая угодно точка, не лежащая на прямой O_1O_2 , и P' основание перпендикуляра, опущенного из P' на O_1O_2 (рис. 197). Имеем

$$\begin{aligned} O_1M'^2 &= O_1P'^2 + M'P'^2, \quad O_2M'^2 = \\ &= O_2P'^2 + M'P'^2, \text{ откуда } O_1M'^2 - O_2M'^2 = O_1P'^2 - O_2P'^2. \text{ Поэтому} \\ O_1M'^2 - O_2M'^2 &\text{ равно } r_1^2 - r_2^2 \text{ тогда и только тогда, когда } O_1P'^2 - \\ - O_2P'^2 &\text{ равно } r_1^2 - r_2^2. \text{ Иными словами, точка } M' \text{ имеет равные сте-} \\ \text{пени относительно кругов } K_1, K_2 \text{ тогда и только тогда, когда } P' &\end{aligned}$$

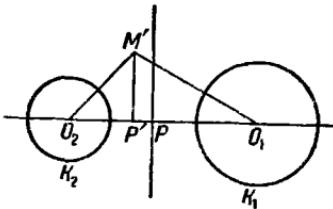


Рис. 197.

совпадает с P , т. е. когда точка M' лежит на перпендикуляре к O_1O_2 в P . Таким образом, искомое геометрическое место (радикальная ось) есть перпендикуляр к линии центров O_1O_2 в точке P , найденной выше.

Нам остается исследовать положение радикальной оси в зависимости от относительного положения кругов K_1 , K_2 . Если круг K_2 лежит вне круга K_1 или касается его внешне, то

$$r_1 + r_2 \leq d, \quad r_1 \leq d - r_2, \quad r_1^2 \leq d^2 + r_2^2 - 2dr_2, \\ d^2 - r_1^2 + r_2^2 \geq 2dr_2,$$

и тем более $d^2 - r_1^2 + r_2^2 > 0$. Отсюда следует, что из двух предполагавшихся выше положений точки P имеет место первое, т. е. на отрезке O_1O_2 . Далее, мы уже видели, что при $r_1 > r_2$ всегда $d_1 > d_2$, т. е. точка P ближе к центру меньшего круга. При $r_1 = r_2$ точка P , очевидно, делит отрезок O_1O_2 пополам при любом относительном положении кругов K_1 , K_2 . Если круг K_2 лежит внутри круга K_1 или касается его внутренним образом, то

$$r_1 - r_2 \geq d, \quad r_1 \geq d + r_2, \quad r_1^2 \geq d^2 + r_2^2 + 2dr_2, \\ r_1^2 - r_2^2 - d^2 \geq 2dr_2,$$

и тем более $r_1^2 - r_2^2 - d^2 > 0$. Следовательно, для точки P имеем второе положение, т. е. вне отрезка O_1O_2 . Из $d_1 > d_2$ следует, что точка P лежит на продолжении O_1O_2 за точку O_2 , т. е. со стороны центра меньшего круга. Остается рассмотреть случай, когда круги K_1 , K_2 пересекаются. В этом случае точки O_1 , O_2 и одна из точек пересечения образуют треугольник со сторонами d , r_1 , r_2 . Из двух углов при стороне $O_1O_2 = d$ большим будет угол при O_2 , так как он лежит против большей стороны. В зависимости от того, будет ли этот угол острый, прямым или тупым, мы будем иметь $d^2 + r_2^2 > r_1^2 = r_1^2$ или $< r_1^2$, т. е. $d^2 - r_1^2 + r_2^2 > 0$, $= 0$, или < 0 , что соответствует положению точки P внутри отрезка O_1O_2 , в точке O_2 или вне отрезка O_1O_2 .

Прёдыущий результат становится, впрочем, очевидным, если заметим, что радикальная ось всегда проходит через общие точки кругов K_1 , K_2 . Последнее следует из того, что эти точки имеют степень нуль относительно обоих кругов. Ясно, что радикальная ось двух пересекающихся кругов есть прямая, соединяющая точки пересечения, а радикальная ось двух касательных кругов есть касательная к ним в их точке касания.

Мы все время предполагали, что центры O_1O_2 кругов K_1 , K_2 различны. Если круги K_1 , K_2 имеют общий центр, то точек, имеющих одинаковую степень относительно этих кругов, не

существует, потому что $d_1 = d_2$, $r_1 \neq r_2$ и равенство $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$ невозможно. Однако к этому случаю можно подойти как к предельному, предположив, что O_2 безгранично приближается к O_1 . Для определения положения точки P имеем формулу

$$d_1 = \frac{1}{2d} (r_1^2 - r_2^2 + d^2) = \frac{1}{2d} (r_1^2 - r_2^2) + \frac{1}{2} d.$$

Эта формула показывает, что при безграничном уменьшении d безгранично растет d_1 , так что при безграничном приближении O_2 к O_1 точка P безгранично удалается от O_1 . Поэтому иногда говорят, что радиальная осью двух концентрических кругов служит бесконечно удаленная прямая.

275. Пусть будут K_1 , K_2 , K_3 три круга и p_{12} , p_{13} , p_{23} — их радиальные оси. Мы предполагаем круги K_1 , K_2 , K_3 неконцентрическими, так как концентрические круги в прямом смысле слова радиальной оси не имеют. Для доказательства предложенной теоремы заметим, что всякая общая точка двух из прямых p_{12} , p_{13} , p_{23} лежит и на третьей прямой. Например, общая точка p_{12} и p_{13} имеет одинаковые степени относительно кругов K_1 и K_2 и относительно кругов K_1 и K_3 . Поэтому она имеет также одинаковые степени относительно кругов K_2 и K_3 и, следовательно, лежит также и на p_{23} . Теперь, если p_{12} и p_{13} совпадают, то все их точки — общие и, следовательно, будут также точками p_{23} , т. е. p_{23} совпадает с p_{12} и p_{13} . Далее, если p_{12} и p_{13} пересекаются, то точка пересечения лежит и на p_{23} , и в этой точке p_{23} пересекает их, так как, если бы p_{23} совпадала с одной из прямых p_{12} , p_{13} , то и вторая совпадала бы с нею, вопреки сделанному предположению. Но может случиться, что p_{12} и p_{13} не имеют общих точек. В этом случае и p_{23} не будет иметь общих точек с p_{12} и p_{13} , т. е. все три прямые будут параллельны. Чтобы теорема осталась в силе, нужно условиться считать, что все прямые, параллельные одному направлению, сходятся в одной бесконечно удаленной точке.

Если круги K_1 , K_2 концентрические, а круг K_3 неконцентричен с ними, то p_{12} есть бесконечно удаленная прямая, а p_{13} , p_{23} параллельны. Если все три круга концентрические, то все три радиальные оси бесконечно удаленные. Наша теорема сохраняет силу и в этих случаях, если примем, что на плоскости имеется только одна бесконечно удаленная прямая и что она является геометрическим местом бесконечно удаленных точек.

Пусть требуется построить радиальную ось p_{12} двух неконцентрических кругов K_1 , K_2 , не имеющих общих точек (рис. 198). Строим два каких-нибудь круга K_3 , K_4 , пересекающих оба

круга K_1 , K_2 . Дальнейшее построение показано на рисунке: p_{hk} — радиальная ось кругов K_h и K_k ; P_{hkl} — радиальный центр кругов K_h , K_k и K_l . Читатель легко докажет правильность этого построения на основании предыдущего.

276. 1. Пусть задан круг K_0 и радиальная ось p пучка. Круг K может принадлежать пучку лишь в том случае, если он имеет с кругом K_0 радиальную ось p . Но совокупность всех таких кругов, вместе с кругом K_0 , действительно образует пучок с радиальной осью p . Действительно, если K_1 и K_2 — два каких-нибудь круга, имеющих с кругом K_0 радиальную ось p , то они и между собой имеют радиальную ось p , как доказано в

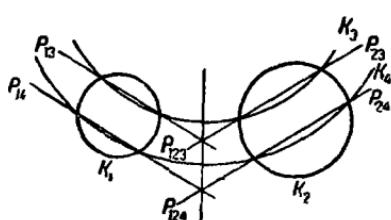


Рис. 198.

предыдущей задаче. Таким образом, круг K_0 и прямая p действительно определяют пучок: пучок состоит из круга K_0 и всех кругов, имеющих с кругом K_0 радиальную ось p .

Если заданы два круга пучка, то можно определить их радиальную ось, и задание сводится к предыдущему решению.

2. Это прямо следует из замечания в конце решения 274.

277. Так как радиальная ось двух неконцентрических кругов перпендикулярна к их линии центров, то центры всех кругов пучка, определяемого двумя неконцентрическими кругами, лежат на одной прямой — линии центров пучка. Только на линии центров такого пучка могут лежать его предельные точки, так как круг нулевого радиуса сводится к своему центру. Степень всякой точки радиальной оси, например точки пересечения P с линией центров, относительно предельной точки та же, что и относительно любого круга пучка. Но степень какой-либо точки относительно предельной точки, очевидно, равна квадрату расстояния между этими точками. В эллиптическом пучке (рис. 199) степень точки P относительно кругов отрицательна и не может поэтому равняться квадрату какого-либо расстояния. Следовательно, в эллиптическом пучке предельных точек нет. В параболическом пучке (рис. 200) степень точки P равна нулю. Следовательно, предельная точка должна совпадать с ней, и действительно, рассматриваемая как круг нулевого радиуса точка P принадлежит пучку, так как этот круг касается в точке P всех других кругов пучка. В гиперболическом пучке (рис. 201) точка P имеет положительную степень, равную квадрату касательной, проведенной из нее к какому-нибудь кругу пучка. Предельными точками пучка могут быть только точки K_1 , K_2 на линии центров на

расстоянии от точки P , равном этой касательной. И действительно, точки K_1, K_2 будут предельными точками, так как степени всякой точки M радикальной оси относительно всех кругов, центр которых лежит на линии центров пучка, отличаются от степеней точки P относительно тех же кругов на одно и то же слагаемое — квадрат расстояния между точками M и P ; поэтому не только степень точки P , но и степень

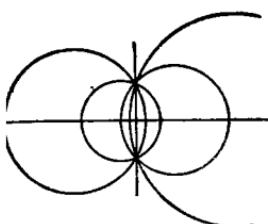


Рис. 199.

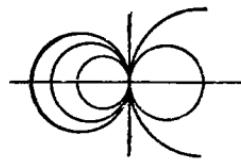


Рис. 200.

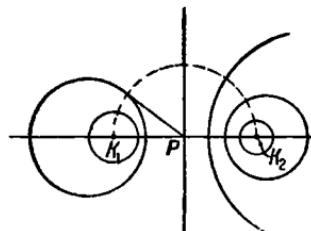


Рис. 201.

всякой точки M радикальной оси относительно кругов K_1, K_2 будет та же, что и относительно всех кругов пучка.

Особый случай гиперболического пучка представляет пучок концентрических кругов; радикальной осью его служит бесконечно удаленная прямая, а единственной предельной точкой — центр всех кругов пучка.

278. 1. Предположим сначала, что заданная точка M не лежит на радикальной оси p заданного пучка. Если пучок эллиптический, то все его круги проходят через две заданные точки A, B прямой p , и задача сводится к построению круга, проходящего через три заданные точки A, B, M , не лежащие на одной прямой.

Если пучок параболический, то все его круги касаются прямой p в заданной точке P , и задача сводится к построению круга, касательного к заданной прямой p в заданной точке и проходящего через заданную точку P , не лежащую на этой прямой. Если пучок гиперболический, то достаточно, кроме точки M , найти еще две точки M', M'' искомого круга. На рис. 202 показано построение одной точки M' . Проводим через точку M какой-нибудь круг K' , пересекающий заданный круг пучка K_0 . Через точки пересечения A', B' проводим прямую до пересечения в C с p . Прямая $C'M$ пересечет K' еще в одной точке M' , которая и есть искомая. Действительно, если K — искомый круг, то p есть радикальная ось K_0 и K ,

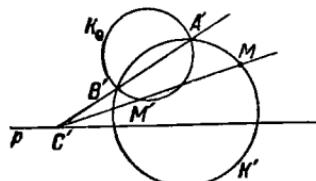


Рис. 202.

$A'B'$ — радиальная ось K_0 и K' , C' — радиальный центр, K_0 , K и K' , $C'M$ — радиальная ось K и K' , и M' — вторая точка пересечения K и K' . Найдя таким же образом еще одну точку M'' круга K , можем построить его по трем известным точкам M , M' , M'' .

Мы предполагали, что M не лежит на p . Этот случай можно рассматривать как предельный и считать, что при M , лежащем на p , искомым кругом будет сама p . Таким образом радиальную ось можно считать за один из кругов пучка. Задача всегда имеет одно решение.

В случае пучка концентрических кругов решение очевидно.

2. Если данный пучок эллиптический, то искомый круг должен проходить через вполне определенные точки A , B , и

задача сводится к следующей: построить круг, проходящий через две данные точки A , B и касательный к данной прямой. Это уже решенная выше задача 185. В случае параболического пучка приходим к еще более простой задаче: построить круг, касательный к данной прямой p в данной точке P и к другой данной прямой d . В случае

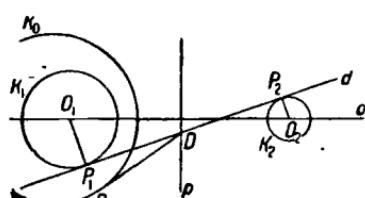


Рис. 203.

гиперболического пучка поступаем так: строим (рис. 203) линию центров пучка o ; из точки пересечения D прямых p и d проводим касательную DP к кругу K_0 ; откладываем на d отрезки DP_1 , DP_2 , равные DP ; восставляем к d перпендикуляры в P_1 , P_2 до пересечений O_1 , O_2 с o ; описываем около O_1 , O_2 круги радиусов O_1P_1 , O_2P_2 . Это и будут искомые круги K_1 , K_2 . Это построение применимо, впрочем, к какому угодно пучку, но в частных случаях может терять силу. Предоставляя подробное исследование читателю, заметим только, что задача имеет не более двух решений.

3. В случае эллиптического пучка задача сводится к уже решенной выше задаче 186. Тот же способ построения можно применить и в общем случае. Задача имеет не более двух решений.

4. В случае пучка концентрических кругов задача имеет одно очевидное решение.

279. Если два круга взаимно ортогональны, то радиус каждого из них, проведенный в одну из точек пересечения, касается в этой точке другого круга. Поэтому степень центра круга радиуса r относительно всякого круга, ортогонального к нему, есть r^2 . И наоборот, если степень круга радиуса r относительно другого круга равна r^2 , то эти круги взаимно ортогональны. Предположим теперь, что круг C радиуса r

ортогонален к двум кругам пучка K_1, K_2 и покажем, что он будет ортогонален ко всякому кругу K того же пучка. Действительно, степень центра круга C относительно обоих кругов K_1, K_2 равна r^2 . Следовательно, центр круга C лежит на радикальной оси пучка и степень его относительно круга K также равна r^2 . Отсюда следует, что круг C ортогонален также и к кругу K , что и требовалось доказать.

280. Пусть будут K_1 и K_2 — два каких-нибудь круга данного пучка, O_1, O_2 — их центры. Все круги C , ортогональные ко всем кругам данного пучка, ортогональны в том числе и к кругам K_1, K_2 . Следовательно, точки O_1, O_2 имеют относительно всех кругов C одинаковые степени — первая степень r_1^2 , вторая степень r_2^2 . Отсюда видно, что любые два круга C имеют радикальной осью прямую O_1O_2 , т. е. принадлежат одному пучку с радикальной осью O_1O_2 . Но других кругов, кроме кругов C , этот пучок не содержит, потому что всякий круг этого пучка имеет относительно точек O_1, O_2 степени r_1^2, r_2^2 и, следовательно, ортогонален к кругам K_1, K_2 , т. е. является одним из кругов C . Таким образом круги C действительно образуют некоторый пучок, который мы и назвали ортогональным к данному. Данный пучок совпадает с пучком ортогональным к ортогональному пучку, потому что круги K_1, K_2 принадлежат обоим пучкам, а два круга определяют

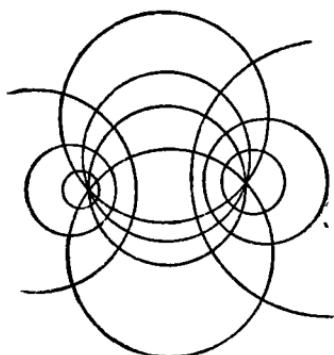


Рис. 204.

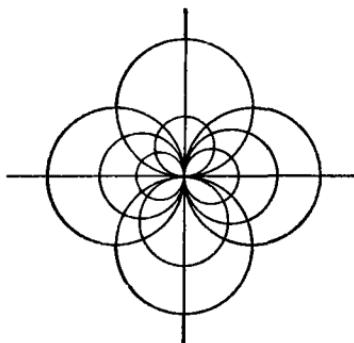


Рис. 205.

один и только один пучок. Если общую точку всех кругов пучка рассматривать как круг нулевого радиуса, то этот круг будет ортогонален ко всем кругам пучка, т. е. будет предельной точкой ортогонального пучка. На рис. 204 и 205 показаны возможные виды пар ортогональных пучков. На рис. 204 один пучок эллиптический, другой гиперболический, а на рис. 205 оба пучка параболические. Отметим следующее

очевидное следствие предыдущих рассуждений: если два пучка ортогональны, то радикальная ось одного есть линия центров другого и наоборот.

Если задача пучок концентрических кругов, то кругов, ортогональных ко всем кругам пучка, не существует, но можно принять за ортогональный круг любой диаметр кругов пучка. Тогда пучком, ортогональным к данному, будет пучок прямых — диаметров всех кругов данного пучка. Это — особый случай эллиптического пучка.

281. 1. Пусть задан круг K_0 и радикальный центр P связки. Круг K может иметь с кругом K_0 и каким-нибудь третьим кругом точку P радикальным центром только в том случае, если радикальная ось круга K с кругом K_0 проходит через точку P . Но совокупность всех таких кругов, вместе с кругом K_0 , действительно обрзает связку с радикальным центром P . Действительно, точка P имеет относительно всех таких кругов ту же степень, что и относительно круга K_0 . Следовательно, точка P будет радикальным центром любых трех из этих кругов.

2. Мы видели, что степень радикального центра относительно всех кругов связки одна и та же. Если она отрицательна, то радикальный центр лежит внутри всех кругов связки, если равна нулю, то на всех кругах связки, если положительна, то вне всех кругов связки.

Предыдущие рассуждения предполагают, что радикальный центр связки — конечная точка. Связка с бесконечно удаленным центром есть особый случай гиперболической связки; она состоит из всех кругов, центры которых лежат на одной прямой.

282. Предельные точки связки — это те точки, квадрат расстояния которых от радикального центра равен степени связки. Если связка гиперболическая, то степень положительна и предельные точки образуют окружность круга, центр которого совпадает с радикальным центром связки, и радиус которого равен квадратному корню из степени связки. В случае параболической связки степень равна нулю, и радиус этого круга обращается в нуль. В случае эллиптической связки предельных точек совсем нет, потому что степень отрицательна и не может равняться квадрату какого-либо расстояния.

В особом случае гиперболической связки с бесконечно удаленным центром предельные точки образуют линию центров кругов связки; эту прямую можно рассматривать как круг, ортогональный ко всем кругам связки.

283. Если некоторый круг ортогонален ко всем кругам связки, то центр этого круга имеет относительно всех кругов

связки одну и ту же степень, равную квадрату его радиуса. Отсюда, прежде всего, следует, что центр этого круга совпадает с радикальным центром связки, а вслед затем, что сам этот круг совпадает с предельным кругом связки. Наоборот, круги, ортогональные к данному кругу, имеют относительно центра этого круга одну и ту же степень, равную квадрату его радиуса, и, следовательно, образуют связку, для которой данный круг служит предельным.

284. Если P — центр связки и M, M' — точки пересечения прямой, проходящей через P , с каким-нибудь кругом связки, то $PM \cdot PM' = \pm k^2$, где $\pm k^2$ — степень связки. Это показывает, что точки M, M' обратны относительно инверсии с центром P и степенью $\pm k^2$.

285. Если некоторый круг проходит через точки M, M' , обратные относительно инверсии с центром P и степенью $\pm k^2$, то $PM \cdot PM' = \pm k^2$. Следовательно, степень этого круга относительно точки P равна $\mp k^2$, т. е. он принадлежит связке с центром P и степенью $\pm k^2$.

286. Пусть будет P центр связки, K_0 — данный круг связки, и A, B — данные необратные точки, через которые требуется провести круг связки (рис. 206).

Построим точку A' , обратную точке A в данной связке. Для этого проводим секущую PMM' к кругу K_0 , затем круг K' через точки M, M', A , наконец, секущую PAA' к кругу K' . Тогда A' и будет искомой обратной точкой. Так как точка B по условию не обратна точке A , то точка A' не может совпасть с точкой B , т. е. точки A, B, A' различны. Искомый круг есть круг, проходящий через точки A, B, A' . Если точки A, B не лежат на одной прямой с центром связки P , то это будет, действительно, некоторый круг K . Если же точки A, B лежат на одной прямой с P , то круг K обращается в прямую PAB .

287. Предположим сначала, что центры P_1, P_2 данных связок не совпадают, и что данная точка A не лежит на прямой P_1P_2 (рис. 207).

Находим, как и в предыдущей задаче, точку A' , обратную A в первой связке, затем точку A'' , обратную A' во второй связке. Эти точки не лежат на одной прямой, и круг K , проходящий через них, есть искомый круг. Если точка A лежит на прямой P_1P_2 , то круг K обращается в прямую P_1P_2 . Если связки имеют общий центр P , то кругом K будет прямая PA .

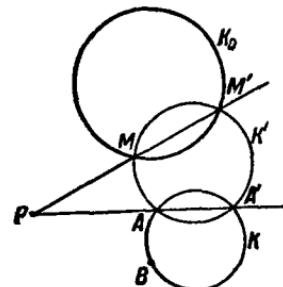


Рис. 206.

288. Пусть связка задана центром P и кругом K_0 . Предположим сначала, что она эллиптическая (рис. 208). Проводим диаметр O_0P и перпендикулярную к нему полухорду PA . Если степень связки равна $-k^2$, то $PA = k$. Через данный центр O искомого круга проводим диаметр OP , на перпендикуляре к OP в точке P откладываем $PB = PA = k$, и описываем круг с центром O и радиусом OB ; это и будет искомый круг K . Задача имеет единственное решение. В случае параболической связки также имеем единственное решение: искомый круг имеет данный центр O и проходит через центр связки P . В случае гиперболической связки (рис. 209) проводим из P касательную PA к K_0 и описываем круг K' с центром P и радиусом PA ; это будет предельный круг связки.

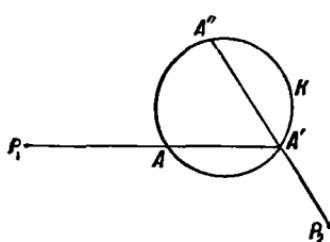


Рис. 207.

Затем проводим, если это возможно, касательную OB из O к K' и описываем круг K с центром O и радиусом OB . Это и будет искомый круг. Задача имеет одно решение, если точка O не лежит внутри круга K' , а в этом последнем случае — ни одного. Если O — бесконечно удаленная точка, то круг K обращается в прямую, перпендикулярную к PO в P .

289. Если два круга пучка принадлежат связке, то центр связки имеет относительно этих кругов одну и ту же степень (связки) и, следовательно, лежит на радикальной оси этих кругов. Но тогда он имеет ту же степень и относительно всех кругов пучка, так что все круги пучка принадлежат той же связке.

290. Линии центров

данных пучков не могут совпадать — в противном случае и сами пучки совпадали бы. Следовательно, эти линии имеют одну общую точку, конечную или бесконечно удаленную, которая только и может быть центром искомого общего круга. Круг связки с этим центром, если таковой существует, и будет искомым кругом.

291. Предположим, что центры связок различны. Построим, как показано в решении 287, два общих круга этих связок.

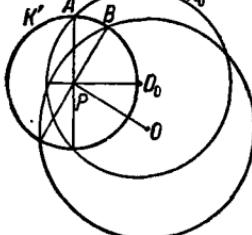


Рис. 208.

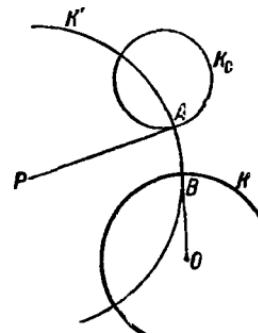


Рис. 209.

По теореме задачи 289 пучок, определяемый этими кругами, принадлежит обеим связкам. Кроме кругов этого пучка, связки не могут иметь ни одного общего круга, потому что три круга, не принадлежащие одному пучку, вполне определяют связку, так что наши связки не могли бы в этом случае быть различны между собой. Итак, в этом случае теорема доказана. В случае же, если центры связок совпадают, общими кругами будут прямые, проходящие через их общий центр. Это уже указанный выше особый случай эллиптического пучка. Его можно получить как предельный, когда одна из двух общих точек кругов пучка удаляется в бесконечность.

292. Если данная прямая d проходит через центр инверсии O , то она, очевидно, обратна сама себе. Предположим теперь, что d не проходит через O , и опустим из O перпендикуляр OF на d (рис. 210). Пусть будет M произвольная точка прямой d и P' , M' — точки, обратные P , M . Из $OM \cdot OM' = OP \cdot OP'$ выводим пропорцию $OM' : OP = OP' : OM$, откуда следует, что треугольники $OM'P'$, OPM подобны. Следовательно, угол $OM'P'$ прямой и точка M' лежит на окружности K , описанной на OP' как на диаметре. Конечным точкам прямой d обратны все точки окружности K , за исключением точки O , а точка O обратна бесконечно удаленной точке прямой d .

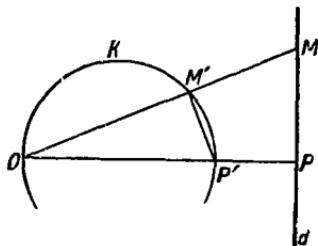


Рис. 210.

293. Если данная окружность K проходит через центр инверсии O , то обратной линией будет некоторая прямая, параллельная касательной к K в O , как это ясно из предыдущего решения. Предположим теперь, что K не проходит через O . Пусть будут P, Q — концы диаметра круга K , проходящего через O , и M — какая-нибудь третья точка круга K (рис. 211). Точки, обратные точкам P, Q, M , обозначим через P', Q', M' . Как и в предыдущем решении, из

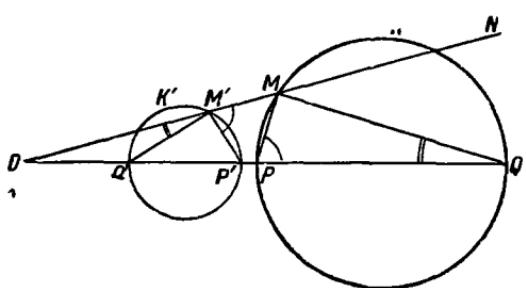


Рис. 211.

$OM \cdot OM' = OP \cdot OP'$ выводим подобие треугольников $OM'P'$ и OPM , а из $OM \cdot OM' = OQ \cdot OQ'$ — подобие треугольников $OQ'M'$ и OQM . Отсюда найдем: $\angle NM'P' = \angle MPQ$,

$\angle OM'Q' = \angle MQP$, $\angle NM'P + \angle OM'Q' = \angle MPQ + \angle MQP$. Но $\angle MPQ + \angle MQP = d$, так как угол PMQ есть вписанный угол в круге K , опирающийся на диаметр PQ . Значит, и $\angle NM'P + \angle OM'Q' = d$, а потому и $\angle P'M'Q' = d$, как дополняющий эту сумму до $2d$. Таким образом, точка M' лежит на окружности K' , описанной на $P'Q'$, как на диаметре, которая и будет линией, обратной окружности K .

294. Пусть будет O — центр данного круга, M и M' — две точки, обратные относительно него, P и Q — концы диаметра OMM' (рис. 212). Выразим отношения, в которых точки M и

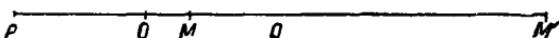


Рис. 212.

M' делят отрезок PQ , через радиус круга r и один из отрезков $OM = x$, $OM' = x'$, принимая во внимание зависимость $xx' = r^2$

$$\frac{PM}{QM} = \frac{r+x}{r-x}; \quad \frac{PM'}{QM'} = \frac{r+x'}{x'-r} = \frac{rx+xx'}{xx'-rx} = \frac{rx+r^2}{r^2-rx} = \frac{r+x}{r-x}.$$

Мы видим, что

$$\frac{PM}{QM} = \frac{PM'}{QM'}$$

что и требовалось доказать.

295. Пусть будут M_1, M_2, M_3 — середины сторон треугольника $A_1 A_2 A_3$; K_1, K_2 — вневписанные круги при сторонах $A_2 A_3, A_1 A_3$; O_1, O_2 — их центры; P_1, P_2 — точки касания их к стороне A_1, A_2 ; t — четвертая общая касательная кругов K_1, K_2 (рис. 213). Прежде всего нужно убедиться, что около точки M_3 действительно можно описать круг K' , проходящий через точки P_1, P_2 , т. е. что $M_3 P_1 = M_3 P_2$. В самом деле, если обозначим стороны треугольника $A_1 A_2 A_3$ через a_1, a_2, a_3 и его полупериметр через p , то будем иметь $A_1 P_1 = A_2 P_2 = p$, $A_1 M_3 = A_2 M_3 = \frac{1}{2} a_3$ и вычитая из первого равенства второе,

$M_3 P_1 = M_3 P_2 = p - \frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{2} (a_1 + a_2)$. Круг девяти точек K определяется тремя точками M_1, M_2, M_3 . Мы дадим два доказательства того, что круг K есть отражение прямой t в круге K' .

1. Прямые t и $A_1 A_2$ суть общие внешние касательные, а прямые $A_1 A_3, A_2 A_3$ — общие внутренние касательные кругов K_1, K_2 . Обе пары прямых поэтому симметричны относительно линии центров $O_1 O_2$. Вследствие этого симметричны и тре-

угольники $A_1A_2A_3$, $B_1B_2A_3$. Далее заметим, что прямые M_3M_1 , M_3M_2 параллельны сторонам A_3A_1 , A_3A_2 треугольника $A_1A_2A_3$, как средние линии его. Воспользуемся этими замечаниями, чтобы вычислить произведения $M_3M_1 \cdot M_3M_1'$, $M_3M_2 \cdot M_3M_2'$. Если окажется, что эти произведения равны квадрату радиуса

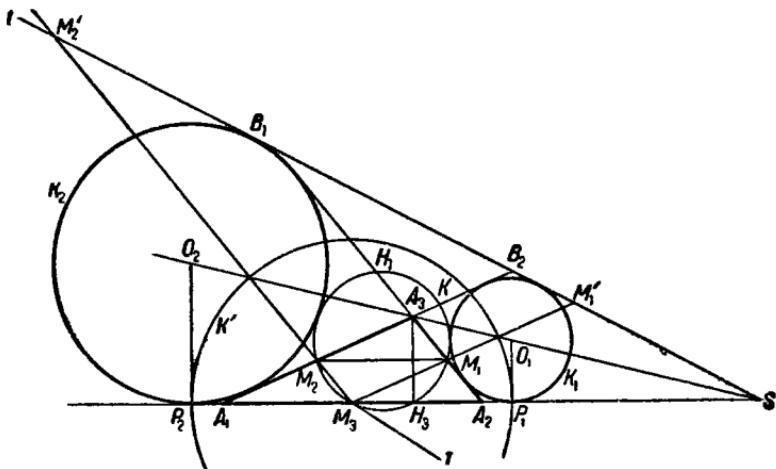


Рис. 213.

$\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ круга K' , то тем самым будет доказано, что точки M_1 , M_2 суть отражения точек M_1' , M_2' прямой t в круге K' . Так как треугольники $M_3M_1A_2$, $B_1M_1M_1'$ подобны равным треугольникам $A_1A_3A_2$, $B_1A_3B_2$, то они подобны между собой. Отсюда

$$M_3M_1 : B_1M_1 = A_2M_1 : M_1M_1',$$

$$M_3M_1 \cdot M_1M_1' = B_1M_1 \cdot A_2M_1 = \left(\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)\frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1a_2);$$

$$\begin{aligned} M_3M_1 \cdot M_3M_1' &= M_3M_1^2 + M_3M_1 \cdot M_1M_1' = \\ &= \frac{1}{4}a_2^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 + 2a_1a_2) = \frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2. \end{aligned}$$

Так же найдем $M_3M_2 \cdot M_3M_2' = \frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2$. Итак, отражения точек M_1' , M_2' в круге K' суть действительно точки M_1 , M_2 . Отражение прямой t в круге K' есть поэтому круг, проходящий через точки M_1 , M_2 . Кроме того, как отражение всякой прямой в круге K' , это отражение проходит через центр M_3 круга K' . Следовательно, оно совпадает с кругом девяти точек K .

2. Покажем, что касательная M_3T к кругу K в точке M_3 параллельна прямой t . Для этого достаточно доказать, что внутренние накрест лежащие углы TM_3M_1 и $B_1M_1'M_1$ равны. Но $\angle B_1M_1'M_1$ равен $\angle A_2$ треугольника $A_1A_2A_3$. Значит, нужно доказать, что $\angle TM_3M_1 = \angle A_2$. Мы можем предположить, что точка A_2 лежит вне круга K , потому что из двух точек A_1, A_2 , по крайней мере, одна лежит вне хорды M_3H_3 ; в противном случае середина M_3 стороны A_1A_2 лежала бы вне этой стороны. Поэтому $\angle A_2$ измеряется половиной дуги $\cup M_3M_2 + \cup M_2H_1 - \cup M_1H_3$ круга K . Но по теореме о дугах, заключенных между параллельными хордами, имеем: $\cup M_3M_2 + \cup M_2H_1 - \cup M_1H_3 = \cup M_2H_1 = \cup M_3M_1$. Половиной дуги M_3M_1 измеряется $\angle TM_3M_1$. Параллельность M_3T и t таким образом доказана. Отсюда следует, что отражение прямой t в круге K' во всяком случае имеет с кругом K в точке M_3 общую касательную. Достаточно теперь доказать, что какая-нибудь точка круга K , отличная от точки M_3 , есть отражение некоторой точки прямой t в круге K . С этой целью заметим, что точки H_3 и S делят отрезок P_1P_2 в тех же отношениях, в каких точки A_3 и S делят отрезок O_1O_2 . Но точки A_3 и S суть центры подобия кругов K_1, K_2 и, следовательно, делят отрезок O_1O_2 внутренним и внешним образом в одинаковых отношениях. То же самое верно поэтому и для точек S, H_3 и отрезка P_1P_2 — диаметра круга K' . Таким образом, точка H_3 есть отражение точки S в круге K' , что и заканчивает доказательство. По сравнению с предыдущим это доказательство имеет тот недостаток, что оно теряет силу, когда $A_1A_3 = A_2A_3$. Напротив, первое доказательство в этом случае только упрощается.

Совершенно аналогичные рассуждения применимы и к рассмотрению вписанного и одного из внеписанных кругов. Представляем это читателю, как очень полезное упражнение.

296. В решении 295 доказано, что круг K есть отражение прямой t в круге K' . Добавим к этому, что круги K_1, K_2 являются своими собственными отражениями в круге K' , так как они ортогональны к этому кругу. Но прямая t касается кругов K_1, K_2 .

Следовательно, и отражение K касается отражений K_1, K_2 , так как число общих точек двух линий и их отражений всегда одно и то же. Из второй части теоремы задачи 295 следует таким же образом, что третий внеписанный круг и вписанный круг также касаются круга K . Относительное положение всех пяти кругов дано на рис. 214.

297. При доказательстве следует, строго говоря, различать случаи эллиптической и гиперболической инверсии и случаи, когда центр инверсии лежит внутри или вне обратных кругов.

Для краткости ограничимся случаем, когда инверсия гиперболическая, центр инверсии лежит вне обратных кругов (рис. 215).

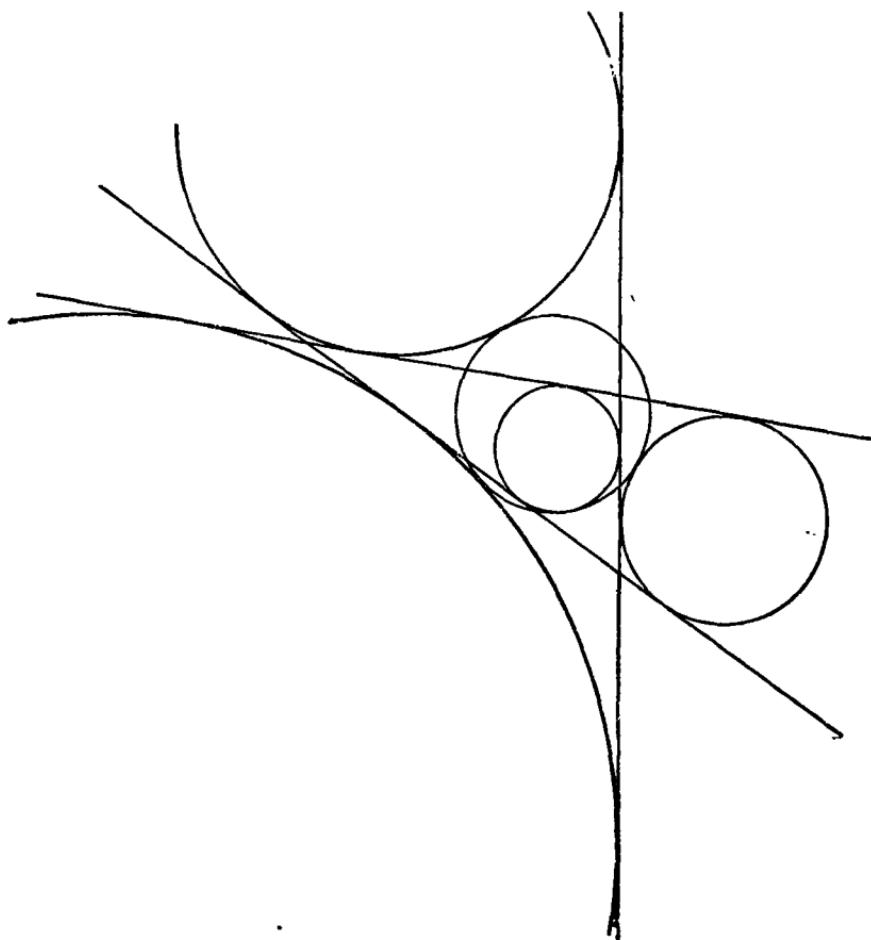


Рис. 214.

Имеем: $\angle O'M'P' = \angle O'P'M' = PMM'$, $\angle P'M'M = \angle MPO = \angle OMP$; отсюда $\angle O'M'P' + \angle P'M'M = \angle OMP + \angle PMM'$, или $\angle O'M'M = \angle OMM'$. Таким образом, радиусы, проведенные во взаимно обратные точки, образуют с секущей равные односторонние углы, а потому то же самое верно и для касательных.

298. Для краткости ограничимся случаем гиперболической инверсии и предположим, что дуги, образующие один из углов, а потому и дуги, образующие другой угол, направлены в одну

сторону от прямой, соединяющей вершины углов с центром инверсии (рис. 216). Имеем: $\angle UMM' = U'M'M$, $\angle TMM' = T'M'M$. Вычитая, найдем: $\angle UMT = U'M'T'$. Чертеж показывает, что направления углов UMT , $U'M'T'$ противоположны.

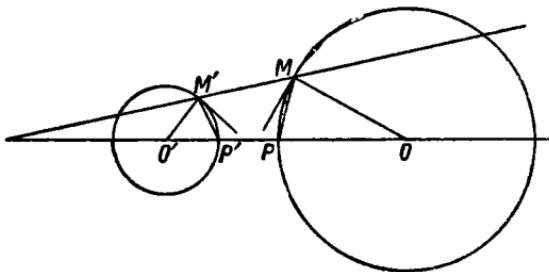


Рис. 215.

299. Инверсия относительно точки, в которой сходятся стороны криволинейного треугольника, превратит его в прямолинейный треугольник, не изменив его углов. В последнем же сумма углов равна двум прямым.

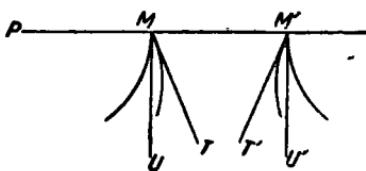


Рис. 216.

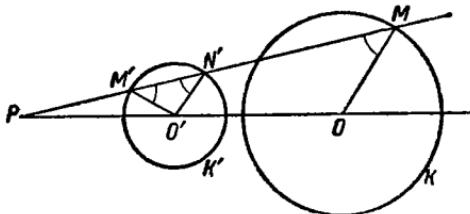


Рис. 217.

300. Пусть будет P центр инверсии, относительно которой круги K , K' взаимно обратны, и M , M' — какие-нибудь две взаимно обратные точки (рис. 217). Радиусы OM , $O'M'$ образуют с секущей $PM'M$ равные односторонние углы. Отсюда видно, что радиусы OM , $O'N'$ образуют с той же секущей равные соответственные углы, и следовательно, параллельны между собой. Так как это относится к любой секущей, проведенной из точки P , то точка P должна быть одним из центров подобия кругов K , K' . Теперь докажем, что каждый центр подобия есть действительно центр вполне определенной инверсии, относительно которой круги K , K' обратны. Имеем $\frac{PM}{PN'} = \frac{r}{r'}$, $PM' \cdot PN' = p'$, где r , r' — радиусы кругов K , K' , и p' — степень центра подобия P относительно круга K' . Пере-

множая, найдем $PM \cdot PM' = \frac{r_p}{r'}$, откуда следует, что круги K, K' обратны относительно инверсии с центром P и степенью $\frac{r_p}{r'}$.

301. Рассмотрим отдельно случаи, когда круг K касается обоих данных кругов внешне, обоих внутренне, и одного внешне, другого внутренне (рис. 218, 219, 220). На рис. 218 имеем:

$$\angle O_2 M_2 T = \angle M_1 M_2 O = \angle M_2 M_1 O = O_1 M_1 N_2 = O_1 N_2 M_1.$$

Чертеж показывает, что равные углы $O_2 M_2 T, O_1 N_2 M_1$ — соответственные при пересечении прямых $O_1 N_2, O_2 M_2$ прямой $PN_2 M_2$. Следовательно, радиусы $O_1 N_2, O_2 M_2$ параллельны и одинаково направлены. Отсюда видим, что точка P есть центр прямого подобия кругов K_1, K_2 и что точки M_1, M_2 взаимно обратны относительно инверсии с центром P , по отношению к которой взаимно обратны круги K_1, K_2 . Так как круг K проходит через взаимообратные точки, то он обратен сам себе. На рис. 219 имеем внутреннее

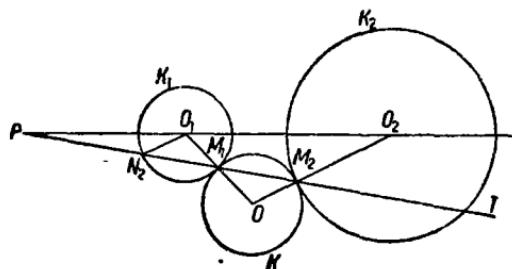


Рис. 218.

касание K к K_1 и K_2 , на рис. 220 внешнее касание к K_1 и внутреннее к K_2 . Результат получается тот же, но в первом случае P есть, как и раньше, центр прямого подобия, а во втором случае — центр обратного подобия.

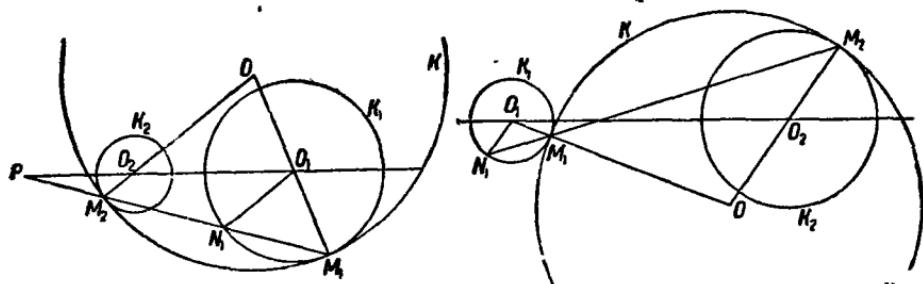


Рис. 219.

Рис. 220.

касание K к K_1 и K_2 , на рис. 220 внешнее касание к K_1 и внутреннее к K_2 . Результат получается тот же, но в первом случае P есть, как и раньше, центр прямого подобия, а во втором случае — центр обратного подобия.

302. На рис. 221 показаны только центры кругов O_1, O_2, O_3 , центры прямого подобия P_{12}, P_{13}, P_{23} и центры обратного подобия Q_{12}, Q_{13}, O_{23} . Точка P_{hk} делит отрезок $O_h O_k$ внешним

образом, а точка $Q_h Q_k$ — внутренним образом в отношении $r_h : r_k$, где r_i — радиус круга с центром O_i . Применяя результат задачи 155, позволяющей по отношениям, в которых прямая делит две стороны треугольника, определить отношение, в котором она делит третью, убедимся, что три центра прямого подобия лежат на одной прямой и что каждый из них лежит

на одной прямой с двумя центрами обратного подобия, относящимися к двум другим парам кругов.

303. Требуется построить круг K , касательный к трем данным кругам K_1, K_2, K_3 . Все круги, касающиеся кругов K_1, K_2 обоих внешне или обоих внутренне, сами себе обратны по отношению к инверсии с центром P_{12} , по отношению к которой круги K_1, K_2 обратны друг другу. Следовательно, они

принадлежат определенной связке R_{12} с центром P_{12} . Точно так же все круги, касающиеся круга K_1 внешне, а круга K_2 внутренне, или круга K_1 внутренне, а круга K_2 внешне, принадлежат определенной связке S_{12} с центром Q_{12} . Аналогичным образом, круги, касающиеся кругов K_1, K_3 , распределяются между двумя связками R_{13}, S_{13} . Следовательно, всякий круг K , касательный ко всем трем кругам K_1, K_2, K_3 , одновременно принадлежит одной из связок R_{12}, S_{12} и одной из связок R_{13}, S_{13} . Но общие круги двух связок образуют пучок, радикальная ось которого проходит через центры связок. Следовательно, искомые круги K распределяются между четырьмя пучками, радикальными осями которых служат оси подобия $P_{12}P_{13}, P_{12}Q_{13}, Q_{12}P_{13}, Q_{12}Q_{13}$. При этом в каждом пучке могут содержаться только круги K , касающиеся всех трех кругов некоторым определенным образом (например, всех трех внешне) или всех трех противоположным образом (в данном примере — всех трех внутренне). Если в каком-либо из этих пучков найдется круг K , касательный к кругу K_1 , то он будет касаться и кругов K_2, K_3 . Действительно, принадлежа одной из связок R_{12}, S_{12} , такой круг обратен сам себе относительно инверсии с центром P_{12} или Q_{12} , по отношению к которой круг K_2 обратен кругу K_1 . Так как круги, обратные двум касательным кругам, также, очевидно, касательны, то круг K будет также касаться круга K_2 , и также докажем, что он касается круга K_3 . После этого построение становится вполне ясным. Пусть, например, желательно построить круги, касающиеся всех трех кругов K_1, K_2, K_3 внешне или всех трех внутренне. Проведя три параллельных и одинаково направлен-

ных радиуса кругов K_1, K_2, K_3 , строим центры подобия P_{12}, P_{13} и ось подобия $P_{12}P_{13}$. Это будет радикальная ось пучка, к которому должны принадлежать искомые круги. Чтобы найти какой-нибудь круг этого пучка, берем какую-нибудь точку M_1 круга K_1 , проводим прямую $P_{12}M_1$ до пересечения

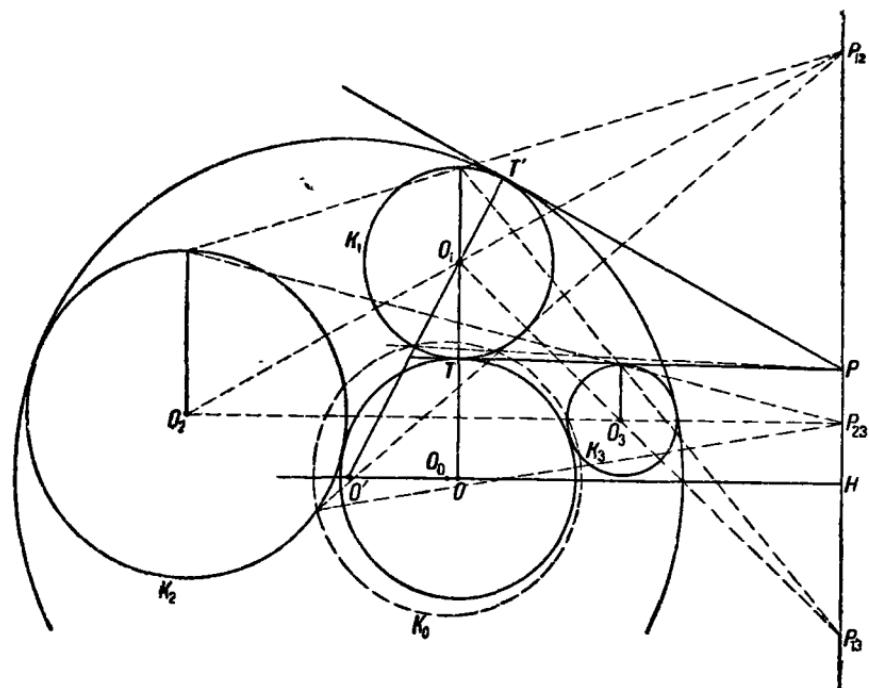


Рис. 222.

с кругом K_2 в точке M_2 , обратной точке M_1 по отношению к инверсии с центром P_{12} , и далее проводим прямую $P_{13}M_2$ до пересечения с кругом K_3 в точке M_3 , обратной точке M_3 по отношению к инверсии с центром P_{13} . Круг K' , проходящий через точки M_1, M_2, M_3 , будет одним из кругов рассматриваемого пучка. Теперь пучок задан радикальной осью $P_{12}P_{13}$ и кругом K' . По этим данным мы можем построить круги пучка, касательные к кругу K_1 , как показано в решении 278, З. Это и будут искомые круги K . Число их не превышает двух, и мы видим отсюда, что общее число кругов K , касательных к кругам K_1, K_2, K_3 , не превышает восьми. Задача Аполлония уже была решена выше другим способом, но динное решение яснее с теоретической точки зрения. Построение представлено на рис. 222.

304. Возможны три случая: 1) данные круги K_1, K_2 пересекаются в двух точках A, B ; тогда любая инверсия с центром в A или B превратит их в две пересекающиеся прямые; 2) круги K_1, K_2 касаются в точке P ; тогда инверсия с центром P превратит их в параллельные прямые; 3) круги K_1, K_2 не имеют общих точек; тогда ортогональные к ним круги имеют две общие точки, и инверсия, превращающая эти круги в прямые, пересекающиеся в одной точке, превратит круги K_1, K_2 в круги, ортогонально пересекающие эти прямые, так что эти прямые будут общими диаметрами этих кругов, а точка пересечения прямых — общим центром кругов.

305. Укажем два способа.

1. Подвергаем данные круги такой инверсии, чтобы два из них превратились в прямые или концентрические круги, и строим круги, касательные к полученным обратным линиям, что сравнительно просто. Затем полученные касательные круги подвергаем той же инверсии. Обратные круги будут касаться первоначально заданных. 2. Имея в виду построить круги, касательные к данным определенным образом, изменяем соответственно радиусы данных кругов так, чтобы один круг превратился в точку. Производим какую-нибудь инверсию двух остальных кругов, принимая эту точку за центр инверсии, и проводим к ним соответствующие общие касательные. Круги, обратные этим касательным, будут проходить через круг нулевого радиуса и касаться двух остальных кругов. Соответствующим изменением радиусов превратим их в искомые круги

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ПОСТРОЕНИЯ

Прямые и плоскости и многогранные углы

306. Проведем через точку A и первую заданную прямую плоскость и аналогично через точку A и вторую прямую. Плоскости эти, имея общую точку (точку A), пересекаются по прямой. Эта прямая, находясь с первой заданной прямой в одной плоскости, пересекает ее (на конечном или бесконечном расстоянии, если ей параллельна), аналогично пересекает она и вторую заданную прямую, т. е. является искомой прямой.

307. Проведем через какую-нибудь точку прямой b прямую a' , параллельную прямой a , и через прямые b и a' плоскость; эта плоскость $ba' \parallel$ прямой a . Аналогично проведем через прямую c плоскость \parallel прямой a . Прямая пересечений этих двух плоскостей будет пересекать обе прямые a и b , так как лежит с каждой из них в одной плоскости и будет \parallel прямой a , т. е. является искомой.

308. Проведем через точку A плоскость $Q \perp$ к прямой a ; плоскость эта пересечет плоскость P по некоторой прямой b . Прямая b плоскости $P \perp$ к прямой a , так как всякая вообще прямая плоскости $Q \perp$ к прямой a .

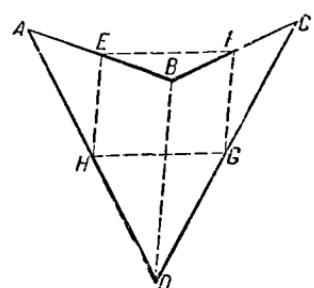
309. Проведем через прямую a плоскость $B \parallel$ прямой b , а через прямую b плоскость $A \parallel$ прямой a . Плоскость P пересечет параллельные между собою плоскости A и B по параллельным прямым p и p' . В плоскости P построим отрезок, концы которого находятся на прямых p и p' и длина которого равна d , что делается одной засечкой циркуля. Очевидно, что этот отрезок будет параллелен искомому, так как, наоборот, искомый отрезок, будучи перенесен в пространстве параллельно самому себе на плоскость P , так чтобы его концы скользили по плоскостям A и B , будет отрезком длины d , имеющим концы на прямых p и p' . Дальше остается провести прямую, параллельную полученному направлению и пересекающую заданные прямые a и b (как это указано в предыдущей задаче),

отрезок ее между прямыми и будет искомый. Если расстояние между параллельными прямыми p и p' больше d , решений нет, если оно равно d , есть одно решение, если оно меньше d , есть два решения, так как засечка циркулем дает два пересечения.

310. Перпендикуляры эти не изменятся, если мы передвижем плоскости, на которые они опущены, параллельно самим себе, например так, чтобы все эти плоскости прошли через точку A . Все эти плоскости будут тогда пересекаться по одной прямой a , проходящей через точку A , а следовательно, все перпендикуляры будут перпендикулярами к этой прямой, восставленными в одной ее точке A , т. е., как известно, будут лежать в одной плоскости.

311. На плоскости две прямые или при продолжении пересекаются или параллельны, т. е. пересекаются на бесконечности, т. е. всегда пересекаются или на конечном расстоянии, или на бесконечности. В пространстве, кроме этих двух случаев, возможен еще один третий случай, когда прямые не лежат в одной плоскости, «скрещиваются»; в этом случае есть один отрезок KL , соединяющий обе эти прямые, который самый короткий из всех таких отрезков. Точки K и L суть те точки этих прямых, расстояние между которыми наименьшее. Требуется найти эти точки. Проведем через прямую a плоскость $B \parallel$ второй прямой b , а через прямую b плоскость $A \parallel$ первой прямой a . Плоскости эти A и B (те же самые, которые рассматриваются в задаче 309) параллельны между собой. Кратчайшее расстояние между точками двух параллельных плоскостей дает перпендикуляр к этим плоскостям, но прямые a и b лежат в этих плоскостях, и следовательно, никакое расстояние между их точками не может быть меньше этого

перпендикуляра. Проведем через прямую a плоскость $P \perp$ к плоскости A , а через прямую b плоскость $Q \perp$ к плоскости B . Плоскости P и Q пересекутся по некоторой прямой c , которая пересечет обе прямые a и b и будет перпендикулярна к обеим плоскостям A и B . Отрезок этой прямой c , заключенный между точками K и L ее пересечения с прямыми a и b , и будет, таким образом, кратчайшим отрезком, соединяющим эти прямые, а точки K и L — ближайшими их точками.



Фиг. 223.

312. Из треугольника ABD (рис. 223) видно, что отрезок $HE \parallel BD$ и равен половине BD , а из треугольника BCD видно,

что отрезок $FG \parallel BD$ и равен его половине. Отрезки HE и FG равны и параллельны, т. е. $HEFG$ — параллелогр. мм.

313. Докажем сначала, что плоскость ACB должна быть \perp к плоскости P (рис. 224). Предположим, что C' не лежала бы в плоскости Q , проходящей через точки A и $B \perp$ к плоскости P . Опустим из точки C' по плоскости P перпендикуляр $C'C''$ на прямую пересечения плоскостей P и Q . Треугольники $AC'C'$ и $BC'C'$ прямоугольные с прямыми углами у вершины C'' , так как $C'C'' \perp$ к плоскости Q и, следовательно, \perp ко всякой прямой плоскости Q . Мы имеем, следовательно, $AC'' < AC'$, $BC'' < BC'$, и следовательно, ломаная $AC''B$ короче $AC'B$, т. е. у кратчайшей ломаной ACB плоскость $ACB \perp$ к плоскости P . Дальше задача становится планиметрической: найти в плоскости Q такую точку C на прямой DE , чтобы ломаная ACB была кратчайшей. Задача эта уже была решена раньше, достаточно построить точку A' плоскости Q , симметричную с точкой A по отношению к прямой DE , и соединить эту точку с точкой B ; искомая точка C будет точкой пересечения прямых DE и $A'B$, углы (падения) ACD и (отражения) BCE равны.

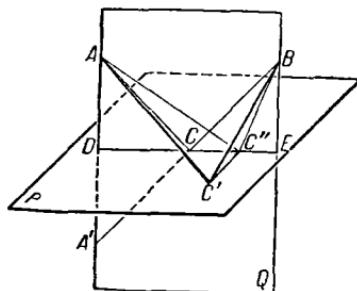


Рис. 224.

314. Пусть a и b две из наших прямых, они пересекаются, по условию, в некоторой точке A . Все остальные прямые наши или 1) проходят через эту точку A , т. е. все прямые пересекаются в одной точке, или 2) есть хоть одна такая прямая c среди них, которая через точку A не проходит. Но c , по условию, должна пересекать a и b , следовательно, прямые a , b , c образуют треугольник и сами лежат в плоскости P этого треугольника. Если теперь d какая либо из остальных прямых, то она, как пересекающая все три прямые a , b и c , имеет с плоскостью P по крайней мере две общие точки, т. е. лежит в P . В этом втором случае все прямые наши лежат, следовательно, в одной плоскости.

315. Пусть A одна из таких точек; тогда и расстояние ее проекции C на плоскость P треугольника от вершин треугольника должно быть тоже одинаково, т. е. C должно быть центром круга, описанного вокруг треугольника, а A лежит, следовательно, на перпендикуляре к плоскости P треугольника, восставленном из этого центра. Очевидно и обратное, что всякая точка этого перпендикуляра равноудалена от вершин треугольника.

316. Так как углы между прямыми не меняются при их параллельном перенесении, то можно заменить заданные прямые a и b параллельными им a' и b' , проходящими через заданную точку A . Если провести в плоскости P этих прямых биссектрису угла между ними и через нее плоскость $Q \perp$ плоскости P , то все искомые прямые будут прямыми плоскости Q , проходящими через точку A . Действительно, пусть AB такая прямая; проведем через точку B плоскость $Q \perp$ к биссектрисе, пусть C и D — точки ее пересечения с прямыми a' и b' . Треугольник ACD равнобедренный; если B_0 проекция B на плоскость P , то, следовательно, $B_0C = B_0D$, но если проекции равны, то и наклонные равны, т. е. $BD = BC$. Треугольники ABC и ABD равны по трем сторонам, т. е. $\angle BAC = \angle BAD$. Аналогично доказываем обратное. Очевидно, что условия задачи будут удовлетворены тоже плоскостью Q , построенной на второй биссектрисе прямых a' и b' .

317. Геометрическим местом будет плоскость, проходящая через ребро угла и через биссектрису линейного угла двухгранных угла, т. е. биссекториальная плоскость.

318. Геометрическим местом будет плоскость \perp к плоскости прямых и проходящая через биссектрису угла между ними.

319. Прямая пересечения двух из биссекториальных плоскостей есть геометрическое место точек, равноудаленных от первой и второй и от первой и третьей граней трехгранного угла, т. е. равноудаленных от всех трех граней трехгранного угла, т. е. и от второй и третьей. Но все точки, равноудаленные от второй и третьей грани, суть все точки третьей биссекториальной плоскости, следовательно, она проходит через прямую пересечения первых двух.

320. Прямая пересечения двух из указанных плоскостей есть геометрическое место точек, равноудаленных от первого и второго и от первого и третьего ребра трехгранного угла и т. д., как в предыдущей задаче.

321. Отложим на всех трех ребрах от вершины O трехгранного угла одинаковые отрезки OA , OB и OC ; получится треугольник ABC . Биссектрисы граней трехгранного угла делят каждую из сторон AB , AC , BC пополам, так как треугольники OAB , OAC , OBC равнобедренные. Рассматриваемые в задаче плоскости пересекают, следовательно, треугольник ABC по медианам. Но медианы пересекаются в одной точке D , а следовательно, все эти три плоскости имеют две общие им всем точки O и D , т. е. пересекаются по одной прямой OD . Эти плоскости можно назвать медианными плоскостями трехгранного угла.

322. Пусть OK , OL прямые пересечения двух из рассматриваемых в задаче плоскостей с гранями трехгранного угла

(рис. 225). Возьмем на одном из ребер произвольную точку A и опустим из нее по граням перпендикуляры AKC и ALB на OK и OL . Тогда, так как плоскость $BOK \perp$ к плоскости AOC , то KO есть проекция наклонной BK на плоскость AOC , прямая же $AC \perp$ к KO в плоскости AOC , и следовательно, $BK \perp$ к AC , т. е. BK высота треугольника ABC ; аналогично покажем, что и CL высота этого треугольника. Плоскость BOK , таким образом, \perp к прямой AC , а следовательно, и к плоскости треугольника ABC , плоскость COL по такой же причине \perp к плоскости ABC , следовательно, прямая $OD \perp$ к этой плоскости. Проведем плоскость $AOMD$. AM проходит через точку D пересечения двух высот треугольника, следовательно, AM третья высота, т. е. $BC \perp AM$. Но OD есть перпендикуляр к плоскости ABC , а OM

наклонная и MD ее проекция, причем $MD \perp BC$, и следовательно, $OM \perp BC$. Таким образом BC как перпендикуляр к AM и $MO \perp$ к плоскости AOM . Отсюда следует, что плоскость

$AOM \perp$ к плоскости BOC , т. е. и есть третья из рассматриваемых в задаче плоскостей. Все три плоскости пересекаются по одной прямой OD . Эти три плоскости можно назвать высотными плоскостями трехгранного угла.

323. Пусть $A, A' B, B'$ грани четырехгранного угла, причем A противоположна A' , а B противоположна B' . Пусть при продолжении грани A и A' пересекаются по прямой a , а грани B и B' — по прямой b (прямые a и b проходят через вершину угла). Любая плоскость, параллельная обеим прямым a и b , т. е. параллельная плоскости ab , пересекает четырехграницный угол по параллелограмму, так как она пересекает грани A и A' по параллельным прямым, а также и грани B и B' по параллельным прямым.

324. Треугольники OAO' , OBO' , OCO (рис. 226) равны (по трем сторонам); следовательно, если опустить на сторону OO' перпендикуляры из вершины A, B, C , то основания их будут в одной и той же точке D . Прямая OO' , таким образом, перпендикулярна к двум (даже трем) прямым плоскости ABC , а следовательно, перпендикулярна и к самой этой плоскости.

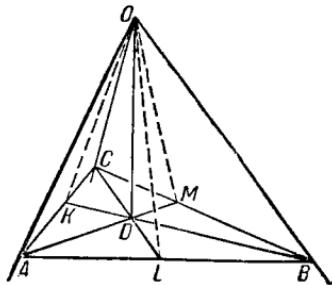


Рис. 225.

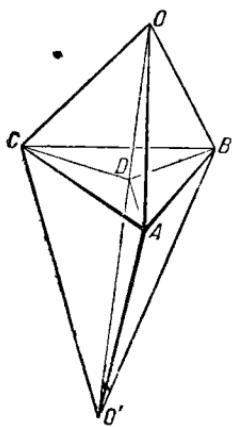


Рис. 226.

Куб

325. Сечения ABC и $A'B'C'$ представляют равносторонние треугольники, плоскости их параллельны, так как $AB \parallel A'B'$ и т. д. Если провеси плоскость, параллельную этим сечениям и по середине между ними, то в сечении получится шестиугольник $DEFGHK$. Стороны его равны, так как каждая из них равна половине диагонали грани куба, например, DE равна половине CB , так как D есть середина $A'C$ и E —середина $A'B$, а следовательно, DE —средняя линия в треугольнике $A'BC$. Но и углы этого шестиугольника все одинаковы, по 120° , так как стороны их \parallel сторонам равностороннего треугольника ABC . Шестиугольник $DEFGHK$, таким образом, правильный (рис. 227).

326. Продолжим мысленно плоскость ABC и проведем через точку C прямую \parallel диагонали DD' до пересечения в F с этой

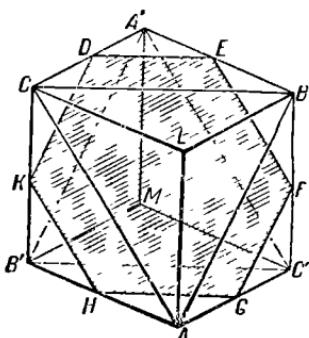


Рис. 227.

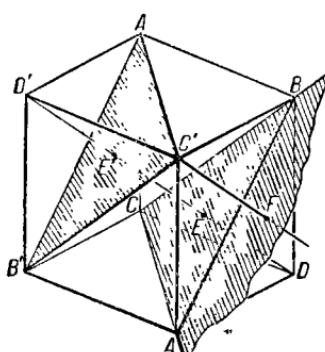


Рис. 228.

плоскостью (рис. 228). Так как $ADBC$ —параллелограмм, а плоскость ABC проходит через его диагональ AB , то очевидно, что параллельные между собою отрезки $C'F$ и DE , проведенные через две другие вершины параллелограмма до пересечения в точках F и E с плоскостью ABC , равны. Но $C'F = EE'$ как параллельные отрезки между параллельными плоскостями ABC и $A'B'C'$. Итак, $DE = EE'$. Аналогично покажем, что $D'E = EE'$. Итак, $DE = EE' = E'D'$.

327. Пусть рассматриваемые диагонали суть AB и $B'C'$ (рис. 229б). Диагональ DD' куба \perp к плоскостям ABC и $A'B'C'$, что следует из рассмотрения двух правильных пирамид $ABCD$ и $ABCD'$, сложенных основаниями (см. задачу 324). Плоскости ABC и $A'B'C'$ проходят через прямые AB и $B'C'$ и каждая \parallel прямой, через которую проходит другая, т. е. это как раз те плоскости, которые надо проводить, чтобы найти величину наименьшего расстояния между прямыми (см. зада-

чу 311). Наименьшее расстояние между прямыми AB и $B'C'$ равно, следовательно, EE' , т. е. трети диагонали куба. Для того чтобы найти ближайшие точки K и L этих прямых, надо (см. задачу 311) провести через каждую из прямых AB и $B'C'$ по плоскости \perp к параллельным плоскостям ABC и $A'B'C'$. Спроектируем куб на плоскость ABC параллельно диагонали $D'D$. Мы тогда получим (рис. 229б) правильный шестиугольник $ACB'A'CB'$, причем отрезок KL спроектируется в одну точку. Легко видеть, что $AL = \frac{1}{3} AB$. Точки K и L расположены, следовательно, на одной трети диагоналей граней куба.

328. На каждой из граней куба образуется правильная четырехугольная пирамида (рис. 230 и 231). Легко убедиться, что эти пирамиды как раз равны тем пирамидам, которые получаются, если за вершину взять центр куба, а за основание его грань. Границы двух таких пирамид, смежные по одному и тому же ребру куба, служат продолжением одна другой и образуют ромб. Получающийся многогранник называется ромбическим додекаэдром. Объем его, очевидно, вдвое больше объема куба.

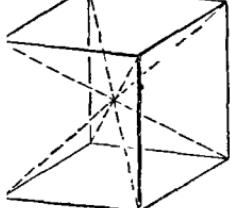


Рис. 230.

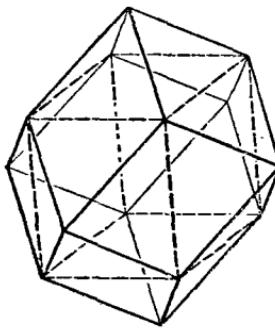


Рис. 231

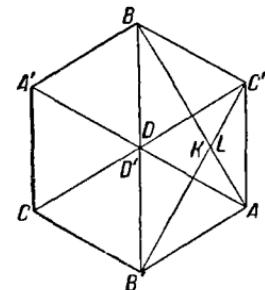


Рис. 229а.

Рис. 229б.

329. Если провести секущую $L'L$ через точку O (рис. 232) пересечения диагоналей, то очевидно, что OL лежит по другую сторону от плоскостей $ABC'D'$, $BCD'A'$, $CDA'B'$, $DAB'C$, чем OL' , т. е. OL' лежит внутри пирамиды $OA'B'C'D'$, а OL внутри пирамиды $OABCD$, т. е. L' на грани $A'B'C'D'$, а L на

Параллелепипед

грани $ABCD$. Треугольники $OL'D'$ и OLB подобны, так как $L'D'$ и BL , как прямые пересечения параллельных плоскостей одной и той же плоскостью $BL'D'L$, параллельны, но $OB = OD'$ и, следовательно, треугольники эти равны, т. е. $OL = OL'$.

330. Пусть заданы прямые, a , b , c . Проведем через каждую из них по две плоскости, параллельные двум другим; получатся три пары параллельных плоскостей. Тело, замкнутое этими шестью плоскостями, и будет искомый параллелепипед.

331. Легко видеть, что доказательство этого же свойства, данное для куба в задаче 326, дословно годится и для параллелепипеда.

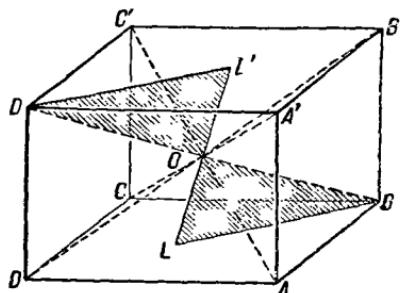


Рис. 232

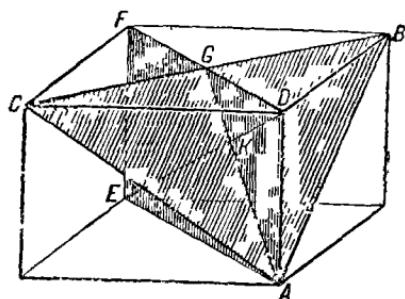


Рис. 233.

332. Точка G есть середина BC , следовательно, AG — медиана треугольника ABC (рис. 233). Диагональ DE пересекает, следовательно, треугольник ABC в точке K , лежащей на медиане AG , но аналогично покажем, что K лежит и на двух других медианах, т. е. есть точка их пересечения.

Правильный тетраэдр

333. Построим вспомогательный куб, такой, что вершины нашего тетраэдра будут в его вершинах, для чего достаточно построить куб, диагональ грани которого равна ребру тетраэдра. Теперь очевидно, что ребро $CD \parallel$ диагонали грани $C'D'$ и, следовательно, \perp к ребру AB (рис. 234).

334. Пересечем тетраэдр плоскостью, параллельной двум граням вспомогательного куба и проходящей посередине между ними; в сечении, очевидно, получится квадрат, вершины которого находятся в центрах граней куба (рис. 235).

335. Пусть внутренняя точка O , а длины перпендикуляров, опущенных из нее на грани A , B , C , D тетраэдра T , суть a , b , c , d . Надо доказать, что $a + b + c + d = h$, где h — высота тетраэдра T . Проведем через точку O вспомогательную плоскость \parallel грани A . Точка O окажется на грани A' оставшегося тетраэдра T' , и остается доказать, что $b + c +$

$+ d = h'$, где h' — высота этого нового тетраэдра T . Проведем, далее, через точку O секущую плоскость \parallel грани B' этого тетраэдра T ; тогда точка O окажется на ребре оставшегося тетраэдра T'' , и остается доказать, что $c + d = h''$, где h'' — высота этого нового тетраэдра T'' . Проведем, наконец, через точку O секущую плоскость \parallel грани C'' этого тетраэдра T'' ;

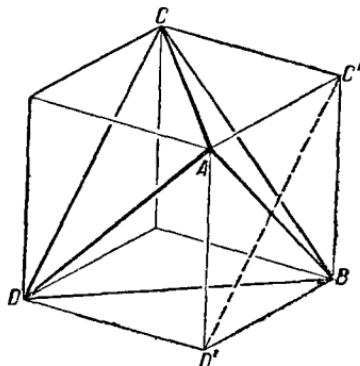


Рис. 234.

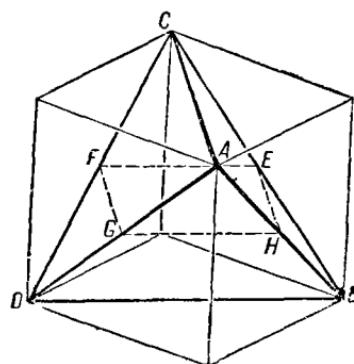


Рис. 235.

тогда точка O окажется в вершине оставшегося тетраэдра T''' , а отрезок d , единственный не отрезанный, его высотой (рис. 236).

336. Плоскости ABC и $A'B'C'$ (рис. 237) параллельны между собою, так как $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$. Если, следова-

тельно, пересечь параллелепипед плоскостью, параллельной этим плоскостям и проходящей посередине между ними, то ребра AC' , AB' , BC' , BA' , CA' , CB' пересекутся этой плоско-

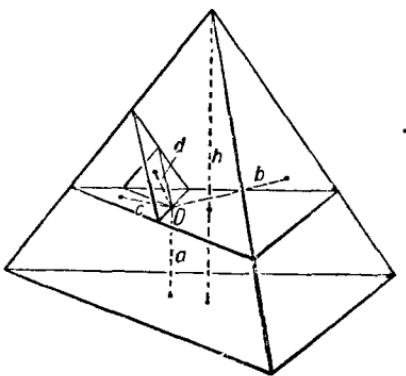


Рис. 236.

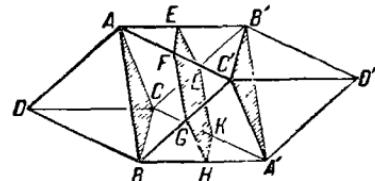


Рис. 237

стью в их серединах. Треугольники ABC' , $AB'C'$, ACB' , $AB'C$, $A'BC$, $BA'C'$ равносторонние и, следовательно, все стороны шестиугольника $EFGHKL$ равны половине ребра тетраэдра. Все же углы его имеют по 120° , так как, например, стороны угла EFG параллельны сторонам равностороннего треугольника ABC . Шестиугольник этот, таким образом, правильный.

Произвольный тетраэдр

337. Весьма советуем читателю испробовать «достроить» тетраэдр через четыре его грани. Получается четырехрогое тело, состоящее из четырех параллелепипедов, имеющих общую частью достраиваемый тетраэдр $ABCD$. Границы DA' , DB' и DC' параллелепипедов AA' , BB' и CC' параллельны грани ABC тетраэдра и имеют общую точку D , следовательно, лежат в одной плоскости, которая есть грань $A'B'C'$ большего тетраэдра $A'B'C'D'$. Легко видеть, что тетраэдр $CDKL$ равен (или, вернее, симметричен) заданному. Таким образом, полученное рогатое тело получается из большего тетраэдра $A'B'C'D'$ вырезанием шести (по числу ребер заданного тетраэдра) тетраэдров, симметричных заданному. Объем большего тетраэдра, как подобного тетраэдру $CDKL$, но линейно в три раза большего, равен $27v$, если объем заданного есть v . Объем четырехрого тела равен, следовательно, $27v - 6v = 21v$ (рис. 238).

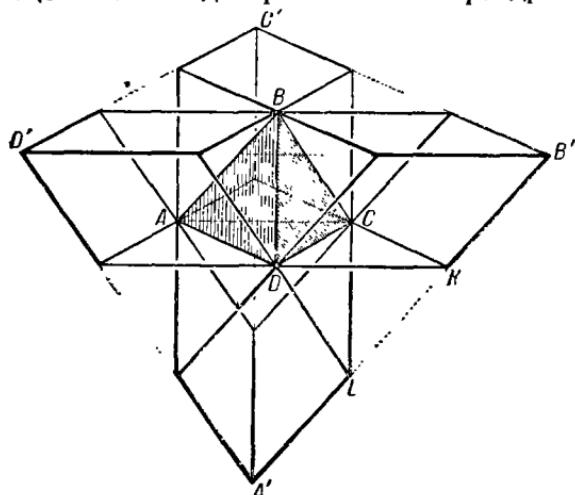


Рис. 238.

338. Один из способов разрезания на такие тетраэдры указан на рис. 239. Отрезается тетраэдр $ABCD'$, достройкой которого получается параллелепипед и противолежащий ему тетраэдр $A'B'C'D$. Оставшееся тело $BCB'C'DD'$ представляет октаэдр, состоящий из двух сложенных друг с другом основаниями симметричных четырехугольных пирамид с параллелограммическими основаниями $BCB'C'$ и вершинами D и D' . Раз-

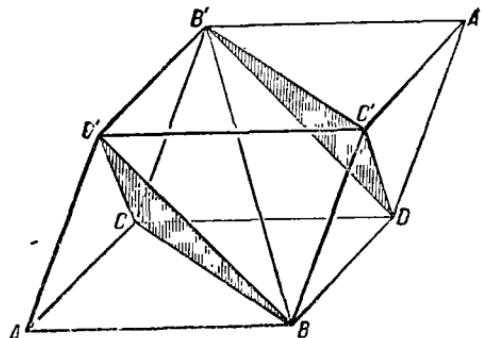


Рис. 239.

резав обе эти пирамиды или диагонально плоскостью $BB'CC'$, как показано на рисунке, или диагонально плоскостью $DD'CC'$, мы получим еще четыре тетраэдра. Таким образом параллелепипед оказывается разрезанным на шесть тетраэдов одинаковых объемов, но разных по форме. Среди них три пары симметричных друг с другом тетраэдов. Так, тетраэдры $ABCD'$ и $A'B'C'D$ друг другу симметричны, $BCDB'$ и $B'CD'B$ симметричны и $BCDB'$ и $B'C'D'B$ симметричны. Существенно иной способ разрезания параллелепипеда на тетраэдры указан на рис. 240. Отрезают от параллелепипеда тетраэдры $ABCD'$, $A'BCD$, $AB'CD$, $ABC'D$ и остается еще тетраэдр $ABCD$. Объем каждого из четырех первых

равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, объем последнего равен, следовательно, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ объема параллелепипеда.

Предлагается читателю самому разыскать все другие, существенно отличающиеся от двух этих, способы разбития параллелепипеда на тетраэдры, вершины которых лежат в вершинах параллелепипеда.

339. Отложим на ребрах

- трехгранных углов от вершины его O отрезки OA , OB , OC , равные единице длины (рис. 241). Получится некоторый специальный тетраэдр $OABC$. Пусть высота его основания AOB есть h , а высота его самого, опущенная на это основание, есть H . Пусть $OA'B'C'$ — какой-либо тетраэдр с этим же трехгранным углом, и пусть ребра его равны

$OA' = a$, $OB' = b$, $OC' = c$, высота его основания h' , а его собственная высота H' . Мы имеем $h':h = b:1$, т. е. $h' = hb$. Кроме того, мы имеем $H':H = c:1$; $H' = Hc$.

Объем тетраэдра $OA'B'C'$ равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah'H' = \frac{1}{6} hHabc$,

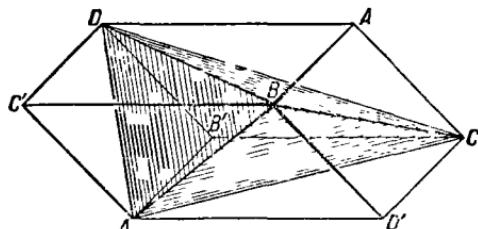


Рис. 240.

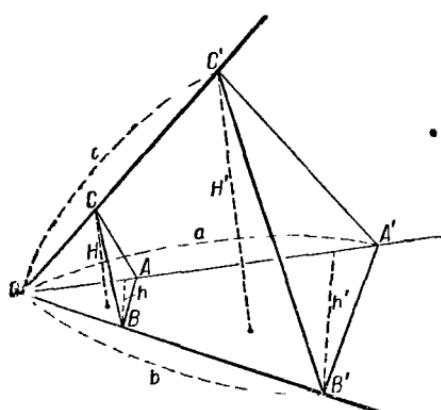


Рис. 241.

но $\frac{1}{6} hH$ есть объем тетраэдра $OABC$, и, следовательно, объем тетраэдра $OA'B'C'$ равен произведению abc его ребер на постоянный объем v_0 специального тетраэдра $OABC$, ребра которого OA , OB и OC равны 1. Совершенно аналогично объем параллелепипеда с данным трехгранным углом равен произведению его ребер, сходящихся в этом углу, на объем v_0 такого же специального п. параллелепипеда, у которого эти ребра равны 1.

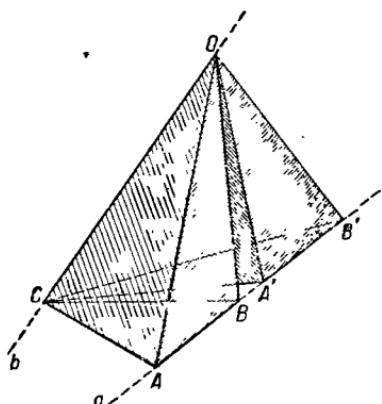


Рис. 242.

340. Действительно, при передвижении ребра AB в новое положение $A'B'$, площадь основания ABC не меняется, а высота тоже не изменяется, так как она есть перпендикуляр, опущенный из точки D на плоскость, проходящую через точку C и прямую a (рис. 242).

341. Плоскость CDE , проходящая через середины E и G двух противоположных ребер, делит тетраэдр на две равновеликие части (рис. 243). Если повернуть эту плоскость вокруг прямой EG в положение $EFGH$, то от одной из этих двух частей отрежется пирамида с основанием $EFGH$ и вершиной D , а к другой прибавится пирамида с тем же основанием и вершиной C . Но эти пирамиды равновелики, так как G — середина отрезка CD .

лит тетраэдр на две равновеликие части (рис. 243). Если повернуть эту плоскость вокруг прямой EG в положение $EFGH$, то от одной из этих двух частей отрежется пирамида с основанием $EFGH$ и вершиной D , а к другой прибавится пирамида с тем же основанием и вершиной C . Но эти пирамиды равновелики, так как G — середина отрезка CD .

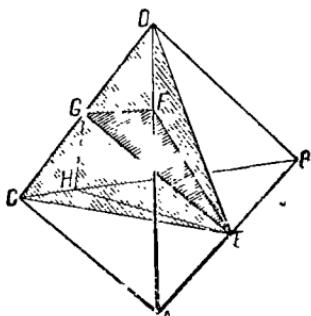


Рис. 243.

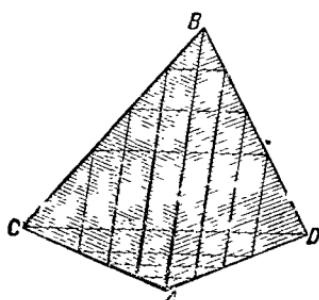


Рис. 244.

342. Пересечем тетраэдр любою плоскостью, параллельно двум противоположным ребрам тетраэдра AB и CD (рис. 244); эта плоскость пересечет грани ABC и ABD по \parallel прямым, грани CDA и CDB она пересечет тоже по \parallel прямым. В сечении получится параллелограмм. Таких систем параллелограмматиче-

ских сечений у тетраэдра три, по числу пар противоположных ребер.

343. Рассмотрим три из этих плоскостей, например, соответствующие ребрам AB , AC и AD ; точка O их пересечения равноудалена от всех четырех вершин тетраэдра (центр описанного шара), так как она так же удалена от B , C и D , как и от A . Плоскость, соответствующая каждому из трех оставшихся ребер, например, плоскость, соответствующая ребру BC , есть геометрическое место точек, равноудаленных от B и C , т. е. точка O должна на ней лежать. Таким образом все шесть плоскостей проходят через точку O .

344. Прямые эти представляют прямые, по которым пересекаются каждые три плоскости предыдущей задачи, соответствующие ребрам, принадлежащим одной грани (см. задачу 343), т. е. геометрические места точек, равноудаленных от трех вершин тетраэдра. Ясно, что они должны проходить через точку, равноудаленную от всех трех вершин тетраэдра.

345. Три биссекториальные плоскости одного из трехгранных углов тетраэдра пересекаются по одной прямой (см. задачу 319), которая есть геометрическое место точек, равноудаленных от граней этого трехгранного угла. Возьмем какую-нибудь из трех других биссекториальных плоскостей; пусть она пересечет эту прямую в точке O . Точка O равно удалена от всех четырех граней тетраэдра (центр вписанного шара). Две оставшиеся биссекториальные плоскости суть геометрические места точек, равноудаленных от пары граней; они должны проходить через точку O .

346. Проведем через каждое из ребер тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру (рис. 245). Таким образом получится параллелепипед, для которого прямые DE , соединяющие вершины с центрами тяжести (точками пересечения медиан) противоположных граней тетраэдра, являются диагоналями DD' (см. задачу 332). Но диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке.

347. Читателю самому предлагается найти красивую форму этого условия.

348. Для этого достаточно доказать, что если в трехгранином угле имеется не острый плоский угол, и прилежащие к нему двугранные углы острые, то противолежащий ему двугранный

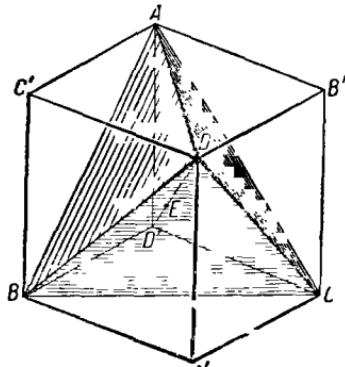


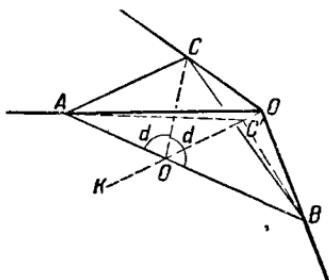
Рис. 245.

угол тупой. Пусть AOB прямой или тупой угол рассматриваемого трехгранных углов $OABC$ (рис. 246). Если прилежащие к нему двугранные углы острые, то проекция OK третьего ребра трехгранных углов на плоскости AOB будет лежать внутри угла AOB . Через любую точку C этого третьего ребра проводим плоскость, перпендикулярную к этому ребру, пересекающую трехгранный угол по треугольнику ABC , в котором угол ACB — плоский угол двугранных углов с ребром OC . Повернем треугольник ABC вокруг AB так, чтобы

он слился с плоскостью AOB ; тогда точка C упадет на прямую OK и будет лежать внутри треугольника AOB , например в точке C' , так как $DC < \angle OOD$ (DC — катет, а OD — гипотенуза в COD). Отсюда следует, что $\angle ACB < \angle AOB$, следовательно, $\angle ACB$ тупой.

Когда $\angle AOB$ тупой, проекция третьего ребра OK может составлять с одной из его сторон прямой или же тупой угол. В первом случае (рис. 247)

плоскость, перпендикулярная к третьему ребру, будет параллельна OA , во втором случае (рис. 248) она пересечется с продолжением OA по другую сторону точки O в некоторой точке



Фиг. 246.

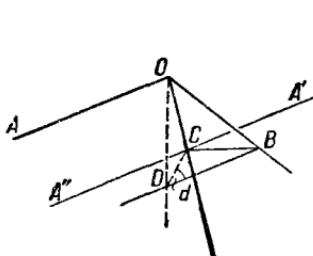


Рис. 247.

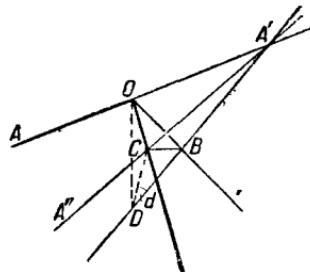


Рис. 248.

A' . В первом случае $\angle BCA'$ равен острому углу CBD , а во втором случае $\angle BCA' < \angle CBD$ как внутренний угол треугольника $CA'B$. Следовательно, $\angle A'CB$ острый, а дополнительный ему $\angle A''CB$ тупой.

Правильный октаэдр

349. Пересечем октаэдр плоскостью, параллельной грани и проходящей посередине между этой гранью и противоположной параллельной ей гранью. Эта плоскость разделит пополам все шесть ребер AB , AF , DF , DC , EC , EB , соединяющие эти грани (рис. 249). В сечении, следовательно, получится шести-

угольник, все стороны которого равны половине ребра октаэдра. Углы между ними также равны (по 120°), так как стороны их параллельны сторонам равностороннего треугольника FBC . Таким образом, шестиугольник $GHKLMN$ правильный.

350. Куб и правильный октаэдр обладают некоторой взаимностью. Центры граней куба (рис. 250) могут быть взяты за вершины правильного октаэдра, и обратно. У октаэдра столько же граней, ребер и вершин, сколько у куба, наоборот, вершин, ребер и граней, а именно: 8, 12 и 6. Наименования граней у октаэдра такие же, как наименования многогранных углов при вершинах куба, и наоборот. Те же точки на сфере могут быть приняты за вершины вписанного октаэдра, которые суть точки касания граней описанного куба и обратно (рис. 251). [Можно доказать, что для всякого многогранника

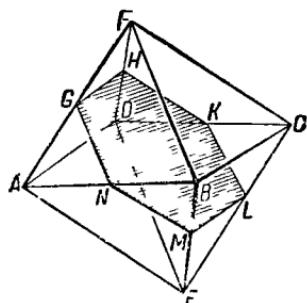


Рис. 249.

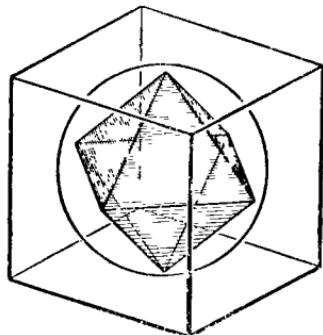


Рис. 250

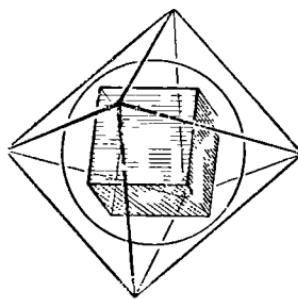


Рис. 251.

(и неправильного) существует ему взаимный, подобно тому как куб взаимен октаэдру.]

Правильные додекаэдр и икосаэдр

351. Возьмем по произволу одну из граней куба $ABCD$ (рис. 252) и проведем через ребра AB и CD плоскости P и Q , которые делали бы с гранью $ABCD$ одинаковые углы ϕ , а через ребра BC и AD плоскости R и S , которые делали бы с гранью $ABCD$ одинаковые углы ψ , дополнительные к ϕ до 90° (т. е. ϕ не только же больше 45° , насколько ψ меньше). Над гранью $ABCD$ получится, очевидно, «крыша», ребра AE , BE , CF и DF которой все одинаковы, «конек» же EF , в зависимости от величины угла ψ , может быть той или иной длины. Увеличивая угол

φ (а следовательно, уменьшая дополнительный к нему до 90° угол ψ), непрерывно начиная от 45° , когда «конек» $EF = 0$ (см. задачу 328), мы можем получить, наконец, такой угол φ ,

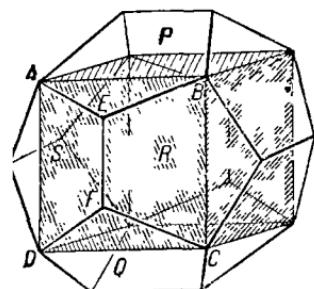


Рис. 252.

что $EF = AE$. Действительно, при таком вращении плоскостей P и Q и плоскостей R и S высота крыши очевидно уменьшается, конек ее, очевидно, увеличивается, а следовательно, ребро AE уменьшается. Конек увеличивается от 0 до b , если b — ребро куба, а ребро AE уменьшается до половины AB , т. е. до $\frac{b}{2}$, т. е. будет такой угол φ между 45° и 90° , при котором $AE = EF$. Если на всех гранях куба построить крыши, у которых углы φ и ψ дополнительные

до 90° , и повернуть их коньками соответственно, то треугольный скат одной буде продолжением трапециoidalного ската

соседней, и получится додекаэдр (двенадцатигранник), ограниченный пятиугольниками, но, вообще говоря, непра-

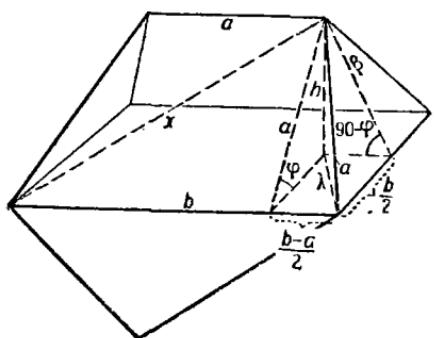


Рис. 253.

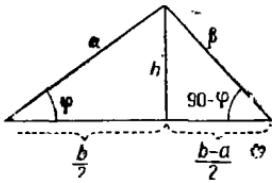


Рис. 254.

вильными. Если же за угол φ взять тот, при котором $EF = AE$, то все эти пятиугольники будут равносторонними (рис. 252).

Теперь надо показать, что кроме того они будут одновременно и равноугольными. Для этого опустим (рис. 253) из одной из двух вершин крыши перпендикуляр h на ту грань куба, на которой крыша стоит, и по скатам крыши перпендикуляры α и β на стороны этого квадрата. Тогда вследствие того, что углы, которые делают эти два перпендикуляра с плоскостью квадрата, дополнительные до 90° , выходит, что, если «расправить» треугольники αh и βh в одну плоскость, то α и β будут катетами прямоугольного треугольника (рис. 254), высота которого h делит гипотенузу на части $\frac{b}{2}$ и $\frac{b-a}{2}$. Мы имеем, следовательно, $a^2 = \frac{2b-a}{2} \cdot \frac{b}{2}$; $h^2 =$

$= \frac{b-a}{2} \cdot \frac{b}{2}$. С другой стороны, из треугольника $h\lambda$ мы имеем $a^2 = h^2 + \lambda^2$ или так как

$$\lambda^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2; \quad a^2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{b-a}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

или, после сокращений,

$$b^2 - ab - a^2 = 0, \quad (1)$$

а из треугольника ax мы имеем

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

или

$$x^2 = \frac{3b^2 + ab + a^2}{4}.$$

Принимая во внимание (1), мы имеем $x^2 = \frac{4b^2}{4} = b^2$, т. е.

$x = b$. Приняв, далее, во внимание равнобедренность треугольников, составленных парами смежных сторон рассматриваемой пятиугольной грани (рис. 255), и равнобедренность треугольника, составленного диагоналями b и x , мы получим равенство всех его углов.

352. Рассмотрим две противолежащие вершины додекаэдра A и B (рис. 256). В каждой из этих двух вершин сходится

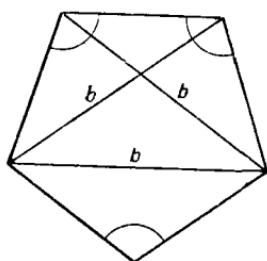


Рис. 255.

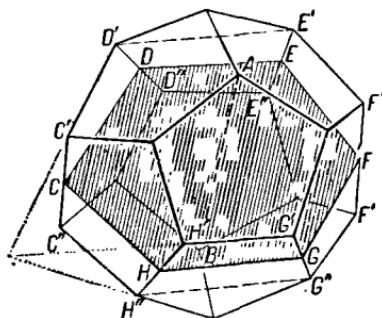


Рис. 256.

по три пятиугольные грани; остается еще шесть граней, которые образуют «венчик» граней, соединяющий эти две «шапочки». Ребра, по которым смежны эти грани венчика, суть $C'C'$, $D'D''$, $E'E'$, $F'F''$, $G'G''$, $H'H''$; эти ребра соединяют между собою шапочки. Рассмотрим верхние концы этих ребер C' , D' , E' , F' , G' , H' . Все эти шесть точек лежат в одной плоскости, так как ребра $C'D'$ и $G'H'$, например, при продолжении пересекаются в силу того, что все пять граней, смеж-

ные с некоторой гранью, делают с ней одинаковые углы, и следовательно, при продолжении образуют над ней правильную пятиугольную пирамиду. Соединив середины рассмотренных ребер венчика, мы получаем шестиугольник $CDEFH$, все вершины которого лежат в одной плоскости, параллельной плоскости $C'D'E'F'G'H'$, так как стороны его, как средние линии трапеций, параллельны сторонам шестиугольника $C'D'E'F'G'H'$. Стороны этого шестиугольника равны, так как

трапеции равны. Углы тоже равны; так например, углы при C и H' равны, как дополнительные до 180° к углам при основании в равнобедренном треугольнике $C'H'K$. Углы при C и H равны углам при C и H' как углы с \parallel сторонами. Шестиугольник $CDEFH$, следовательно, правильный.

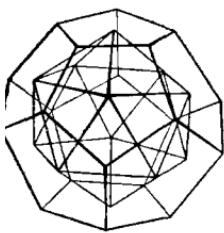


Рис. 257.

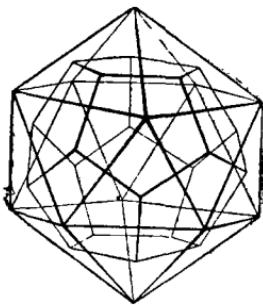


Рис. 258.

353. Подобно тому как куб и правильный октаэдр многограниники взаимные, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр также взаимные многограниники. Число граней, ребер и вершин правильного додекаэдра равны 12, 30, 20; таковы же числа вершин, ребер и граней правильного додекаэдра. Наименование многогранных углов при вершинах правильного икосаэдра таково же, как наименование граней правильного додекаэдра, и обратно. Свойство описанного и вписанного шара, указанное для куба и октаэдра, тут тоже имеет место (рис. 257 и 258).

354. Срежем пятигранные углы правильного икосаэдра плоскостями, проходящими через центры граней, сходящихся в каждом из этих углов; получится правильный додекаэдр (см. задачу 353); срежем «крыши» правильного додекаэдра (рассмотренные в задаче 351); получится куб; срежем четыре трехгранные пирамиды, основания которых проходят через вершины, находящиеся на концах трех ребер, сходящихся в одной вершине (см. задачу 333); получится правильный тетраэдр.

Задачи на растяжение и сдвиги в пространстве

355. Пусть AB — некоторая прямая, причем A — та точка, где она пересекается с плоскостью P . Рассмотрим произвольную точку C прямой AB . Пусть B_1 и C_1 — проекции точек B и C на плоскость P , а B' и C' — те точки, куда точки B и C

перейдут после сжатия пространства к плоскости P с коэффициентом k (рис. 259). Очевидно, что точка C' останется лежащей на прямой AB' , так как

$$CC_1 : CC_1 = B'B_1 : BB_1 = k.$$

356. Следует из предыдущей.

357. Следует из подобия треугольников.

358. Так как, если бы они пересекались, то пересекались бы и до аффинитета.

359. Покажем, что это верно для треугольной прямой призмы, основание которой лежит в плоскости P . Объем V такой призмы равен:

$$V = \frac{1}{3} S(h_1 + h_2 + h_3),$$

где S — площадь ее основания, а h_1, h_2, h_3 — длины ее ребер (сумма объемов трех пирамид, основанием которых является основание призмы, а вершинами — вершины верхнего основания призмы). Но после сжатия основание не изменяется, а высоты заменяются высотами h_1k, h_2k, h_3k , т. е. объем V заменяется объемом $V \cdot k$.

Всякий многогранник можно составить сложением и вычитанием из таких призм. Объем всякого многогранника, после сжатия, помножится, следовательно, на k .

От многогранников можно перейти к любым телам, применяя способ пределов.

360. Из подобия треугольников.

361. Формула

$$V = \frac{1}{3} S(h_1 + h_2 + h_3)$$

годится и для косой призмы, если через h обозначены высоты пирамид. Но если основание S лежит в плоскости P , то при сдвиге ни оно, ни высоты не меняются.

362. Сделаем сдвиг пространства параллельно одной из сторон основания, так чтобы плоскость P , неподвижная при сдвиге, проходила через эту сторону \perp к основанию, такой, чтобы основание сделалось равнобедренным треугольником. Затем сделаем сжатие (или растяжение от этой плоскости P) такое, чтобы основание сделалось равносторонним треугольником. После этого сделаем сдвиг по отношению к плоскости основания, как к неподвижной, такой, чтобы проекция вер-

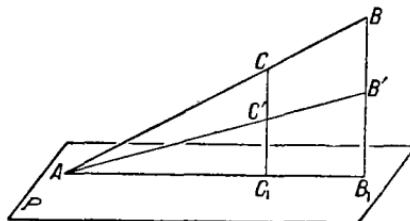


Рис. 259.

шины оказалась в центре основания, и, наконец, сжатие (или растяжение) по отношению к плоскости основания, такое, чтобы боковые ребра сделались равны сторонам основания.

363. Подобно тому, как в предыдущей задаче, можно сдвигами и растяжениями тетраэдра, ребрами которого являются три ребра параллелепипеда, исходящие из одной вершины, превратить в такой, у которого эти ребра взаимно перпендикулярны и равны между собою. После этого параллелепипед станет кубом.

Цилиндр и конус

364. Пусть прямая имеет три точки A, B, C , общие с цилиндрической поверхностью. Спроектируем на плоскость, перпендикулярную к образующим. Цилиндрическая поверхность спроектируется в виде окружности, прямая, если она не параллельна образующей, спроектируется в виде прямой, которая будет иметь с этой окружностью три (разные) общие точки, что невозможно. Прямая эта должна быть, следовательно, \parallel образующей (тогда она спроектируется в одну точку), но, имея с поверхностью общую точку, т. е. с одной из ее образующих, она должна совпадать с этой образующей.

Доказательство для конической поверхности совершенно аналогично, но проектировать надо на секущую плоскость \perp к оси конуса лучами, исходящими из вершины конуса.

365. Пусть A — общая точка двух цилиндрических поверхностей с \parallel образующими, через A , следовательно, проходят как образующая первой, так и образующая второй, которые \parallel и, следовательно, совпадают, т. е. поверхности пересекаются по целым образующим. Чтобы узнать, по скольким, надо спроектировать \parallel образующим на плоскость P , перпендикулярную к образующим. Все сведется на пересечение окружностей. Для двух конусов с общими вершинами рассуждение аналогично.

366. Проведем через точку A плоскость P , перпендикулярную к образующим цилиндра. В плоскости P получится окружность. Проведем в плоскости P две касательные из точки A к этой окружности; пусть точки касания суть B_1 и B_2 . Плоскости Q_1 и Q_2 , проходящие через точку A и через те образующие B_1C_1 и B_2C_2 цилиндра, на которых лежат точки B_1 и B_2 , и будут искомыми касательными плоскостями. Для конуса плоскость P надо проводить \perp оси конуса.

367. За ось конуса надо, очевидно, принять ту прямую, о которой говорится в задаче 320.

368. За ось конуса надо, очевидно, принять ту прямую, о которой говорится в задаче 319.

369. Пусть задан четырехгранный угол $OABCD$, вокруг которого может быть описан конус вращения (т. е. такой, четыре ребра которого суть четыре образующие некоторого конуса вращения) (рис. 260, 261). Построим к этому конусу касательные плоскости $OA'D'OA'B'$, $OB'C$, $OC'D'$, касающиеся его по образующим OA , OB , OC , OD . Двугранные углы, образованные плоскостью OAB с плоскостями OAA' и OBA' , равны, так как пирамиды с основаниями $O'AA'$ и $O'BA'$, и вершиной O равны (симметричны относительно плоскости $OO'A$). Мы предполагаем, что $ABCD$ — круговое сечение конической поверхности вращения, O' — его центр, т. е. OO' — ось конуса, а $OA=OB=OC=OD$. Для того чтобы проще было рассуждать, пересечем все плоскостью $ABCD$ и будем соответственные двугранные углы обозначать так же, как плоские углы, получающиеся в результате их сечения плоскостью $ABCD$. Итак, мы имеем относительно двугранных углов $\angle 1=\angle 1'$, аналогично получим $\angle 2=\angle 2'$, $\angle 3=\angle 3'$, $\angle 4=\angle 4'$. Двугранные углы $1'$, β , 2 имеют общее ребро OB и представляют в сумме весь угол по одну сторону от плоскости $OA'B'$, т. е. 180° . Мы имеем таким образом

$$\angle 1 + \angle \alpha + \angle 4' = 180^\circ; \quad \angle 1' + \angle \beta + \angle 2 = 180^\circ;$$

$$\angle 2' + \angle \gamma + \angle 3 = 180^\circ; \quad \angle 3' + \angle \delta + \angle 4 = 180^\circ;$$

все относительно двугранных углов; отсюда мы получаем

$$\angle \alpha + \angle \gamma = 360^\circ - \angle 1 - \angle 2' - \angle 3 - \angle 4';$$

$$\angle \beta + \angle \delta = 360^\circ - \angle 1' - \angle 2 - \angle 4' - 4,$$

или, принимая во внимание, что

$$\angle 1 = \angle 1', \quad \angle 2 = \angle 2', \quad \angle 3 = \angle 3', \quad \angle 4 = \angle 4'.$$

мы получаем

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

Суммы противоположных двугранных углов четырехгранныго угла, если этот четырехгранный угол может быть вписан в конус вращения, должны быть, следовательно, одинаковы. Можно показать, что это условие не только необходимо, но

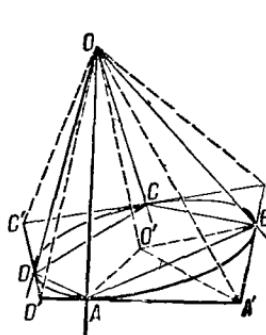


Рис. 260.

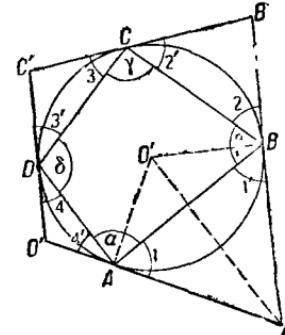


Рис. 261.

и достаточно для вписуемости четырехгранного угла в конус вращения.

У четырехугольника, вписанного в круг, сумма противоположных углов равна $2d$; здесь этого нет. Действительно,

плоские углы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не суть линейные углы двугранных углов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, а меньше их, но сумма плоских углов $\alpha + \gamma$ четырехугольника $ABCD$, вписанного в круг, равна $2d$, а следовательно, сумма двугранных углов $\alpha + \gamma$ четырехгранного угла, вписанного в конус вращения, больше $2d$.

370. Из подобия прямоугольных треугольников ABC и $A'B'C'$ видно (рис. 262), что все перпендикуляры к диаметру DE в одно и то же число раз больше у линии, получаемой в сечении, чем у окружности с диаметром DE . Следовательно, эта линия есть равномерное растяжение окружности

от прямой (в данном случае, например, от диаметра ее DE). С другой стороны, если эту линию во столько же раз растянуть от перпендикулярного этому диаметру, то получится большая окружность с радиусом AC , так как, как легко видеть, два последовательных одинаковых растяжения от двух взаимно перпендикулярных прямых просто удаляют все точки плоскости равномерно в это число раз во все стороны от точки пересечения этих прямых. Следовательно, обратно: можно рассматривать нашу линию как равномерное сжатие к прямой этой большой окружности. (Равномерное растяжение или сжатие окружности к прямой называется эллипсом.)

371. Впишем в цилиндр два одинаковых шара (рис. 263), касающиеся цилиндра по окружностям ab и $a'b'$ и касающиеся секущей плоскости P один снизу в точке F , а другой сверху в точке F' . Возьмем любую точку M на линии, получаемой в сечении, соединим ее по плоскости P отрезками с точками F и F' и проведем через нее образующую цилиндра до пересечения в точках A и A' с окружностями ab и $a'b'$. Ввиду того, что две касательные, проведенные из одной и той же точки к одному и тому же шару, одинаковы, мы имеем $MF = MA$ и аналогично $MF' = MA'$ и, следовательно, складывая эти равенства, $MF + MF' = MA + MA' = AA'$, т. е. образующей прямого кругового цилиндра с нижним основанием ab и верхним

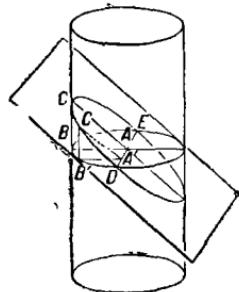


Рис. 262.

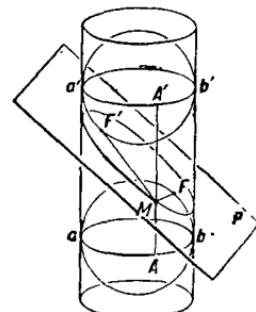


Рис. 263.

$a'b'$, т. е. постоянной величине, независимо от выбора точки M на линии, получаемой в сечении. (Точки F и F' называются фокусами эллипса.)

372. Впишем в конус два шара (рис. 264), из которых один касался бы поверхности конуса по окружности ab и секущей плоскости P снизу в точке F , а другой — поверхности конуса по окружности $a'b'$ и секущей плоскости сверху в точке F' . Возьмем любую точку M на линии, получаемой в сечении, соединим ее по плоскости P отрезками с точками F и F' и проведем через нее образующую конуса до пересечения в точках A и A' с окружностями ab и $a'b'$. Как в предыдущей задаче, получаем $MF + MF' = AA'$, где AA' — образующая прямого кругового конуса с нижним основанием ab и верхним $a'b'$, т. е. величина постоянная. Таким образом сечение конуса есть эллипс, т. е. равномерное растяжение круга от прямой.

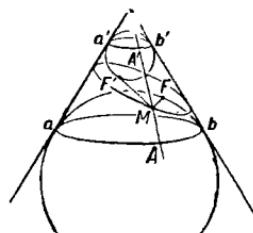


Рис. 264.

373. Можно рассматривать косой круговой конус (рис. 265) как результат сдвига некоторого прямого кругового конуса

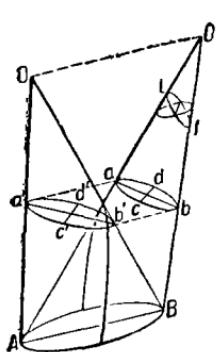


Рис. 265.

параллельно его основанию. Рассмотрим сечение ab косого конуса плоскостью, наклоненою в направлении сдвига и делающую одинаковые углы с образующими, лежащими в плоскости $OO'AB$. Оно получается при сдвиге, очевидно, из некоторого сечения $a'b'$ прямого конуса сжатием его к его диаметру $c'd'$, растяжением которого сечение $a'b'$ получается из окружности. Следовательно, и сечение ab есть тоже эллипс. Вершина O косого конуса лежит в силу выбора наклона сечения ab на перпендикуляре, восставленном в центре этого эллипса.

Так как диаметр cd является осью симметрии этого эллипса, то плоскость Ocd является плоскостью симметрии косого конуса. Но в таком случае, кроме системы круговых сечений, параллельных основанию, он имеет еще другую их систему, к этой плоскости симметричных.

Шар

374. Пусть O центр круга, описанного вокруг треугольника ABC ; искомое геометрическое место есть перпендикуляр к плоскости этого треугольника, восставленный в точке O .

375. Точки, общие сферам I и II , лежат на окружности, по которой эти сферы пересекаются. Эта окружность пересекает, вообще говоря, третью сферу III в двух точках, т. е. точек, общих всем трем сферам, две. Может, однако, быть, что эта окружность только касается сферы III , или сферы I и II , только касаются в одной точке, но эта точка лежит как раз на сфере. В этих двух случаях общая точка у сфер I , II и III только одна. Если же сферы I и II вовсе не имеют общих точек; или же окружность, по которой они пересекаются, не имеет общих точек со сферой III , или точка, по которой они касаются, не лежит на сфере III , то точек, общих всем трем сферам, нет. Сферы же могут, тем не менее, каждая пересекаться с двумя другими.

Чтобы найти построением точки, общие всем трем сферам, проведем плоскость P через центры сфер и опишем из этих центров по плоскости P три окружности радиусами этих сфер.

Проведем через хорды, общие этим кругам, плоскости, перпендикулярные к плоскости P , т. е. \perp к линиям центров сфер. Плоскости эти будут плоскостями окружностей пересечения сфер. Искомые точки должны лежать на всех трех этих плоскостях, т. е. если есть точки, общие этим трем сферам, то плоскости эти пересекаются по одной прямой, перпендикулярной плоскости P . Пусть a — эта прямая. Проведем через центр одной из сфер, например I , и эту прямую плоскость Q . Искомые точки лежат на пересечении прямой a с окружностью, центр которой лежит в центре сферы I , а радиус равен радиусу этой сферы.

376. 1) Пусть R — заданный радиус, A и B — заданные точки, P — заданная плоскость. Искомый центр есть точка, общая двум сферам радиуса R , с центрами в точках A и B и той или другой из плоскостей, параллельных плоскости P , проходящих по одну или другую сторону от нее на расстоянии R . Так как две сферы пересекаются по окружности, а окружность может пересекать и ту и другую из этих плоскостей, каждую в двух точках, то может быть четыре решения, но может быть и меньше — три, два, одно или ни одного. Чтобы найти центр O построением, т. е. проведением прямых и плоскостей в пространстве и построениями в этих плоскостях циркулем и линейкой, надо провести прямую AB и через нее две плоскости, в каждой из которых восставить к прямой AB в середине C отрезка AB перпендикуляр. Плоскость Q , проходящая через оба эти перпендикуляра, будет геометрическим местом точек, равноудаленных от A и B . Аналогично построим плоскости P' и $P'' \parallel P$, проходящие на расстоянии R от нее. Пусть, например, P' пересекается с Q по прямой a' ; эта прямая есть геометрическое место точек, равноудаленных

от A и B и удаленных на R от плоскости P (и лежащих по ту сторону ее, где лежит P'). O лежит на a' . Проведем через A и a' плоскость и в этой плоскости окружность радиусом R из центра A . Точка пересечения этой окружности с прямой a' и аналогично полученные точки на прямой a'' пересечения плоскости Q с P'' и будут искомыми центрами.

Вопросы 2), 3), 4), 5), 6) этой задачи решаются аналогично.

377. Пусть имеются две сферы (рис. 266), и плоскость P касается их обоих. Радиусы OD и $O'D'$ перпендикулярны к плоскости P , следовательно \parallel между собою. Прямая DD' лежит, следовательно, с прямой OO' в одной плоскости (перпендикулярной к плоскости P). Пусть C — точка пересечения этих прямых. Если провести через OD , $O'D'$ и C плоскость, то она пересечет каждую из сфер по большому кругу и прямая $DD'C$ будет общей внешней касательной к этим двум кругам. Если эти два круга и прямую $CD'D$ вращать вокруг линии центров $OO'C$, то круги дадут наши сферы, а прямая $CD'D$ опишет общий внешний касательный конус. Для того, чтобы получить точку C , достаточно, следовательно, пересечь обе

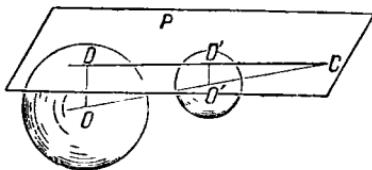


Рис. 266.

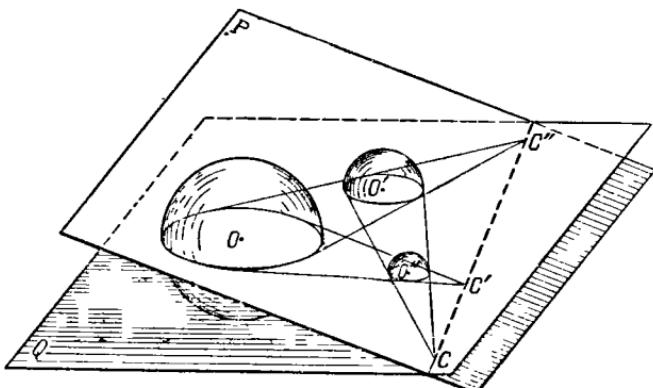


Рис. 267.

сферы произвольной плоскостью, проходящей через их центры O и O' и построить внешние касательные. Точка их пересечения одной из них с линией центров и будет точка C . Для построения плоскости P (рис. 267), касательной к трем заданным сферам O, O', O'' , достаточно, следовательно, провести плоскость Q через их центры, найти в этой плоскости точки C' и C , соответствующие парам сфер OO' и OO'' , и тогда

плоскость P должна проходить через точки C' и C'' (причем точка C , соответствующая сферам O' и O'' , должна, следовательно лежать на прямой $C'C''$, так как она лежит и в плоскости P и в плоскости Q (см. задачу 392). Проведем затем через точки C' , O'' , O плоскость \perp к плоскости P , и в этой плоскости внешнюю касательную $C'D''D$ к кругам, описанным на этой плоскости из центров O'' и O радиусами, равными радиусам сфер O'' и O . Плоскость, проведенная через прямые $C'C''$ и $C'D$, и есть плоскость P . Другая общая касательная плоскость P' получится, если исходить от второй внешней касательной к указанным кругам.

378. Восставим в центре O' вращающейся окружности перпендикуляр к плоскости этой окружности; он пересечет ось вращения a в некоторой точке O , так как точка O' лежит на проекции оси a на плоскости окружности. Опишем из точки O сферу таким радиусом, чтобы она прошла хоть через одну точку вращаемой окружности; тогда и вся вращаемая окружность будет лежать на поверхности этой сферы, так как плоскость ее перпендикулярна к радиусу сферы, проходящей через ее центр. Шар есть тело вращения относительно любой оси, проходящей через его центр, т. е. и относительно оси a . Но если какую угодно линию, начертенную на поверхности вращения, вращать вокруг оси этой поверхности, то она будет оставаться в этой поверхности, что непосредственно следует из определения поверхности вращения. Наша окружность будет, следовательно, описывать часть поверхности нашего шара, как легко видеть — шаровой пояс.

379. Пусть центр заданной сферы — O , центр сечения — O' , заданная точка — A . Отрезок соединяющий центр сферы O с центром сечения O' , перпендикулярен к плоскости сечения, угол $OO'A$, следовательно, прямой. Точка O' описывает, следовательно, часть геометрического места вершин прямых углов, опирающихся на отрезок OA , т. е. часть сферической поверхности, для которой OA — диаметр, а именно, как легко видеть, ту часть этой сферы, которая заключена внутри заданной сферы.

380. Получается, очевидно, сфера, для которой отрезок, соединяющий обе заданные точки, есть диаметр.

381. Заставим один конец A' отрезка $A'B'$ (рис. 268), равного и параллельного заданному отрезку AB , описать всю поверхность одной из заданных сфер, например сферу O ; тогда другой его конец B' опишет такую же сферу O' , получаемую из сферы O передвижением ее параллельно AB и на величину AB . Затем заставим отрезок $A'B'$ скользить по сфере O концом B' ; тогда его конец A опишет такую же сферу O'' , лежащую по другой сторону от сферы O . Одна или обе эти сферы могут пересечься со сферой O' по некоторой окружности каждой. Искомым местом

концов отрезка будут эти окружности, а геометрическим местом самого отрезка — боковая поверхность цилиндра, для которого эти окружности являются окружностями основания.

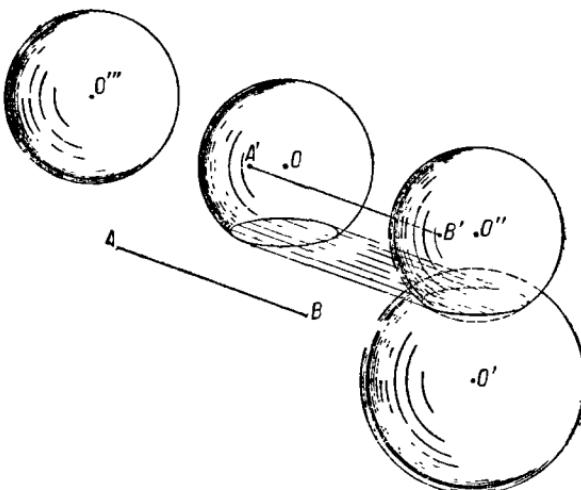


Рис. 268.

382. Пусть $BB'B''$ — заданный в пространстве треугольник (рис. 269). Пусть мы хотим, чтобы вершина равного ему и параллельного треугольника, соответственная B , лежала на сфере O , а соответственные B' и B'' — на сферах O' и O'' . Пусть C' — окружность, лежащая на сфере O , которая (см. пред. задачу) есть геометрическое место концов A отрезка AA' , равного и $\parallel BB'$, а окружность C'' — соответственная окружность для отрезка AA'' , равного и $\parallel BB''$. Эти окружности могут пересекаться в двух точках, и тогда есть два треугольника, удовлетворяющие требованиям задачи, как изображено на рис. 237; если они только касаются — один треугольник. Если вовсе не имеют общих точек, то нет решений. Кроме того, может быть, что сфера O' преды-

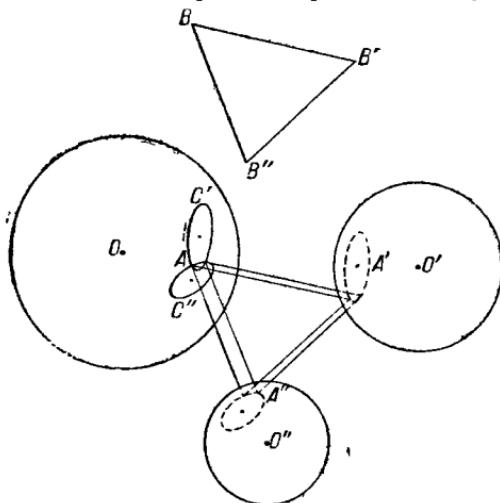


Рис. 269.

дущей задачи только коснется сферы O' или соответственно — O'' , тогда окружности C' или C'' превратятся в точки, и может быть не больше одного решения и т. д.

383. Легко видеть, что как раз те «ямки», которые не заняты шарами верхнего слоя (заштрихованными) на первом рисунке, заняты на втором, и наоборот (рис. 270—271). Это и есть два

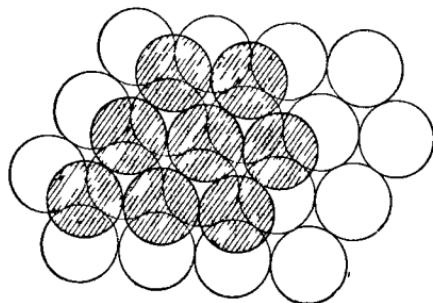


Рис. 270.

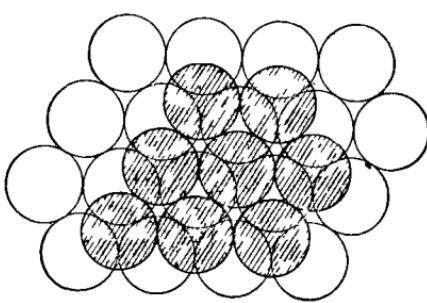


Рис. 271.

различных возможных наложения второго слоя на первый так, чтобы шары второго пришлись над „ямками“ первого. Очевидно, что других таких наложений быть не может, так как если положить один шар верхнего слоя, то тем самым уже предопределено положение всех других шаров верхнего слоя, а первый шар можно наложить либо над одной из ямок, занятых на первом, либо над одной из занятых на втором рисунке.

384. Рассмотрим плоскости P и P' , в которых лежат центры шаров двух соседних слоев. Если мы вырежем этими двумя плоскостями из всех пространства «пластину», то ясно, что расположение полушаров в пластине, вырезанной плоскостью P' и соседней еще кверху такой плоскостью P'' , будет совершенно такое же, как в пластине PP' , так что обе эти пластины можно, параллельно перенеся и в случае необходимости повернув на 180° , совместить. Достаточно, следовательно, найти отношение части, занятой шарами, к незанятой для

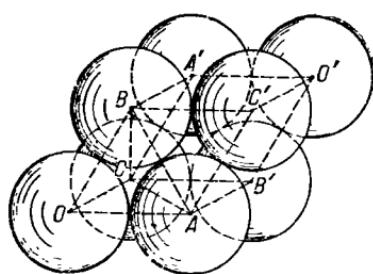


Рис. 272.

одной такой пластины. Рассмотрим (рис. 272) четыре такие шара, что каждый касается трех остальных; центры их $OABC$ образуют, правильный тетраэдр. „Достроим“ этот правильный тетраэдр до параллелепипеда $OAB'C, BC'O'A'$ так, как указано в задаче 337. Легко видеть, что точка B' будет центром шара нижнего

слоя OAC , а точки A' , C' , O' — центрами шаров сверху наложенного на него слоя, предопределенного способом наложения шара B . Легко также видеть, что вся пластина, вырезанная плоскостями OAC и $O'A'C'$, будет составлена из равно таких же параллелепипедов и с равно так же входящими в них шарами. Достаточно, следовательно, подсчитать только, какую часть этого одного параллелепипеда занимают шары. Для этого заметим, что если бы окружить точку O восемью такими параллелепипедами, то оказалось бы, что куски шаров, входящих в параллелепипед $OABC O'A'B'C'$, как раз все вместе составляют один шар. Пусть радиус шара есть r ; тогда ребро тетраэдра $OABC$ есть $2r$ и объем параллелепипеда $OABC O'A'B'C'$ равен $6 \frac{8\sqrt{2}}{12} r^3$ (см. задачу 436), а объем одного шара $\frac{4}{3} \pi r^3$, т. е. отношение объема, занятого шарами, к объему, не занятому, равно

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{6} : \left(1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\right).$$

385. Пусть на слой P_1 положен слой P . Хотя слой P и можно класть на слой P_1 или в одни, или в другие ямки (см. зада-

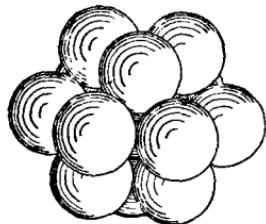


Рис. 273.

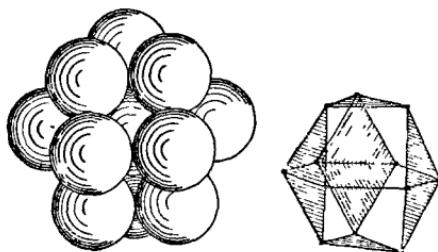


Рис. 274.

чу 383), т. е. двумя разными способами, однако пока слоя только два, оба расположения совершенно подобны, так что одну систему обоих слоев шариков P_1 и P можно совместить с другой, повернув на 180° и параллельно перенеся в пространстве. Итак, пусть как-нибудь наложен слой P на слой P_1 . Будем на слой P накладывать третий слой P' ; теперь уже не все равно, как класть: можно класть двумя и только двумя способами (см. задачу 383), и эти способы уже дадут существенно разные расположения: 1) можно класть шарики слоя P' в те ямки, которые снизу не заняты шариками слоя P_1 , 2) можно класть шарики слоя P' в те «ямки», которые снизу заняты шариками слоя P_1 . Никаких других способов, очевидно, нет. И в том и в другом случае каждого шарика слоя P касается всего 12 шариков, а

именно 6 шариков самого слоя P , 3 шарика слоя P_1 и 3 шарика слоя P' . Обратимся к рисункам обоих случаев (рис. 273 и 274).

На каждом левом рисунке нарисован шарик и 12 шариков, его облегающих, а на каждом правом — пространственная схема из восьми заштрихованных треугольников, все вершины которых представляют центры 12 шариков, прилегающих к облегаемому среднему шарику. Все эти 12 шариков касаются среднего, касания же их между собою происходят так, как связывают их центры стороны нарисованных заштрихованных треугольников.

386. Если всякий раз следующий слой класть по отношению к двум предыдущим первым способом, то все шары системы будут окружены 12-ю прилегающими первым способом. Если всякий следующий слой класть по отношению к двум предыдущим вторым способом, то и все шары будут окружены вторым способом. Если же путать оба способа наложения последующих слоев, то не все шары будут окружены одинаково.

387. Всякое сечение исследуемой поверхности плоскостью есть круг или прямая (круг с бесконечно большим радиусом), или точка, или же по крайней мере состоит из кругов. Пересечем поверхность плоскостью, и пусть — O одна из окружностей,

при этом получаемых. Пересечем ее перпендикулярной плоскостью, пересекающей окружность в точках A и B ; если поверхность наша не есть та самая плоскость, в которой лежит круг O , то в сечении получится опять окружность P с центром O' . Восставим в центрах этих окружностей перпендикуляры к их плоскости; они пересекутся в некоторой точке C . Опишем из этой точки C , как из центра, шар радиусом CA . Обе окружности O и O' будут его малыми (или может

быть большими) кругами. Плоскость OCO' пересечет нашу поверхность по кругу N , плоскость, ей перпендикулярная, проходящая через диаметр DCE , по кругу M . Если пересекать поверхность плоскостями \perp к CD , будут получаться круги, например KFG , геометрическое место которых будет поверхность шара C . Никакая точка S , не принадлежащая этому шару, не принадлежит нашей поверхности, так как иначе любая прямая, проходящая через точку S и пересекающая поверхность нашего шара в двух точках, как проходящая через три точки нашей поверхности, должна была бы вся в ней лежать, и если продолжить это рассуждение, то вышло бы, что всякая точка пространства принадлежит нашей поверхности (рис. 275).

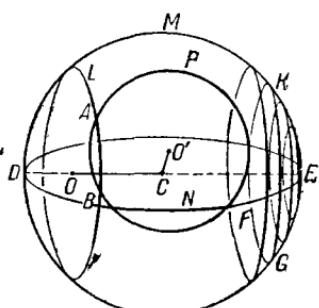


Рис. 275.

388. Действительно, углы δ , γ , которые делает луч SE с касательной плоскостью P' и с плоскостью проекции P , одинаковы, так как каждый из них (левая половина рис. 276 и 277) измеряется соответственно $\frac{1}{2}(SD + DE)$ и $\frac{1}{2}(SC + DE)$ и следовательно, если провести через него две плоскости, то углы, высекаемые ими на плоскостях P' и P , одинаковы.

389. Возьмем плоскость проекции P проходящую через центр сферы. Так как от большего или меньшего ее удаления от точки S будет

только зависеть величина проекций, но не их форма, они будут подобны. Если AB есть окружность на поверхности шара, а $A'B'$ — ее проекция из точки S на плоскость P (правая половина рис. 276 и 277), то угол α измеряется дугой $\frac{1}{2}(SC + CB)$, а угол β — дугой

$\frac{1}{2}(SD + CB)$, но $SC = SD = 90^\circ$, и следовательно, $\alpha = \beta$.

Теперь можно применить доказанное в задаче 373 свойство косого кругового конуса, которым здесь является конус с вершиной S и основанием AB , и получается, что $A'B'$ — тоже круговое его сечение, но из другой системы круговых сечений.

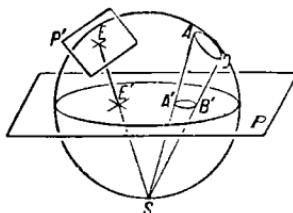


Рис. 276.

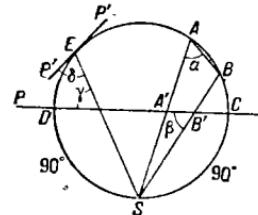


Рис. 277.

Задачи, в которых соображения стереометрии применяются для решения вопросов планиметрии

390. Пусть точки K, L, M лежат в плоскости P чертежа. Представим себе, что точка O' лежит над плоскостью P так, что проекция ее получается в O . Получается трехгранный угол $O'KLM$. Проведем через точки A, B, C плоскости P (рис. 278) перпендикуляры до пересечения с гранями трехгранного угла в точках A', B', C' ; проекции этих точек на плоскость P суть A, B, C . Пересечем трехгранный угол плоскостью Q , проходящей через точки A', B', C' пространства. Эта плоскость пересечет трехгранный угол по треугольнику $D'E'F'$. Проекция этого треугольника на плоскость P рисунка дает искомый треугольник DEF , вершины которого лежат на полупрямых OK, OL, OM , а стороны которого проходят через точки A, B, C . Очевидно, что другого такого треугольника быть не может, так как, если бы был другой \bar{DEF} , то,

проводя через его стороны плоскости \perp к P , мы получили бы пересечения с гранями трехгранных углов по прямым, проходящим через те же три точки $A'B'C'$ и пересекающимся в некоторых точках D', E', F' с ребрами, т. е. плоскость Q , проходящая через эти прямые, была бы второй секущей плоскостью, проходящей через те же три точки пространства A', B', C' , что невозможно.

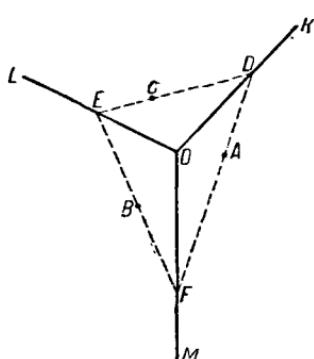


Рис. 278.

рой пересекается основание его (продолжение основания) с секущей плоскостью $A'B'C$. Эти три точки, следовательно, лежат на одной прямой, а именно на проекции на плоскость чертежа этой пространственной прямой.

392. Построим на каждом круге, как на экваторе, сферу. Вокруг каждой пары сфер опишем внешний касательный конус.

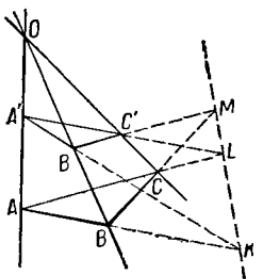


Рис. 279.

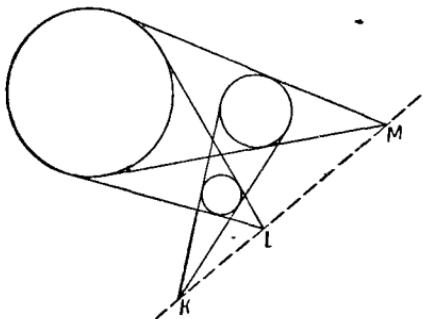


Рис. 280.

Точки K, L, M пересечения внешних касательных к кругам будут вершинами этих конусов (рис. 280). Проведем две плоскости P и Q , из которых первая сверху, вторая снизу касается всех трех сфер; эти плоскости каждого из трех конусов касаются по образующей (см. задачу 377), т. е. проходят через их вершины, т. е. точки K, L, M . Все три точки K, L, M

лежат, следовательно, на прямой пересечения этих двух касательных плоскостей.

393. Построим на каждом круге, как на экваторе, сферу. Проекция A обеих точек, общих всем этим трем сферам, на плоскость центров сфер есть точка, через которую проходят все три их общие хорды, которые являются проекциями на плоскость, проходящую через центры сфер, плоскостей, проходящих через общие окружности сфер. Эти плоскости, как известно, \perp к линиям центров, а следовательно, и к плоскости центров (рис. 280 и 281).

394. Пусть задан любой неправильный шестиугольник, описанный вокруг круга. Обозначим точки касания номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6; этими же номерами будем обозначать и соответственные его стороны (рис. 282 и 283).

Рассмотрим следующую вспомогательную пространственную фигуру. Выведем из плоскости чертежа в пространство каждую из сторон нашего шестиугольника, повернув его в пространстве вокруг радиуса круга, проведенного в точку ее касания, на одинаковые углы к плоскости чертежа (например на 45°), но так, чтобы у всех нечетных сторон передняя часть (указанная на чертеже стрелкой) была поднята кверху от плоскости чертежа, а задняя, следовательно, опущена под плоскость чертежа, а у всех четных наоборот. Обозначим прямые, получаемые при продолжении этих повернутых в пространство сторон,

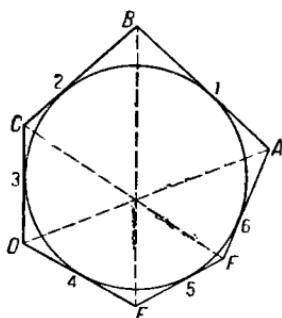


Рис. 282.

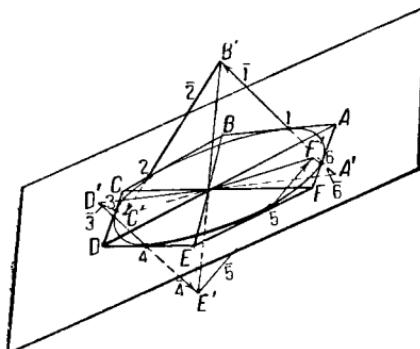


Рис. 283.

через $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$. Докажем сначала, что каждая такая нечетная прямая пересекается с каждой четной в пространстве (а не скрещивается). Это почти очевидно; действительно,

например $\bar{1}$ и $\bar{2}$ симметрично расположены в пространстве по отношению к плоскости, проходящей через биссектрису угла между радиусами, проведенными в точке 1 и 2, и перпендикулярной к плоскости круга, а следовательно, в какой точке пересекает эту плоскость прямая $\bar{1}$, в той же прямая $\bar{2}$, т. е. прямые $\bar{1}$ и $\bar{2}$ пересекаются. Аналогично пересекаются $\bar{1}$ и $\bar{4}$, и т. д. Таким образом прямые $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$ образуют пространственный (т. е. стороны которого не лежат в одной плоскости) шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$. Заданный плоский шестиугольник $ABCDEF$ есть, очевидно, проекция этого пространственного шестиугольника. Диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника $A'B'C'D'E'F'$, очевидно, в пространстве попарно пересекаются; например $B'E'$ и $A'D'$ потому пересекаются, что прямые $\bar{1}$ и $\bar{4}$ разной четности, и, следовательно, как было доказано, пересекаются, т. е. лежат в одной плоскости; но тогда в этой же плоскости лежат и прямые $B'E'$ и $A'D'$; но проекции их BE и AD пересекаются, а следовательно, и сами они пересекаются. Итак, все три диагонали $A'D', B'E', C'F'$ попарно пересекаются в пространстве. Но в таком случае они или лежат в одной плоскости, или пересекаются все три в одной точке (см. задачу 314). Однако лежать в одной плоскости они не могут, так как тогда и все шесть точек A', B', C', D', E', F' лежали бы в одной плоскости (этой же). Но в той же плоскости тогда лежали бы и точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, т. е. это была бы плоскость чертежа, что противоречит тому, что прямые $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}$ делают некоторый угол с плоскостью чертежа. Диагонали $A'D', B'E', C'F'$ пересекаются в пространстве, следовательно, в одной точке; значит и их проекции AD, BE, CF тоже пересекаются все три в одной точке.

395. Доказательство теоремы Паскаля предоставляем читателю.

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЯ

Перпендикуляры и наклонные

396. Мы имеем (рис. 284):

$$CD = \sqrt{a^2 - h^2}; \quad BD = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}(a^2 - h^2)};$$

$$BE = \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}(a^2 - h^2) + \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}.$$

397. Мы имеем (рис. 285):

$$AD = \sqrt{a^2 - h^2}; \quad CD = \sqrt{c^2 - h^2}; \quad BD = \sqrt{b^2 - h^2},$$

но

$$AD^2 + CD^2 = BD^2,$$

т. е.

$$a^2 - h^2 + c^2 - h^2 = b^2 - h^2,$$

откуда

$$h = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}.$$

398. Из того, что сама точка M равноудалена от вершин треугольника, следует, что и ее проекция O тоже равноуда-

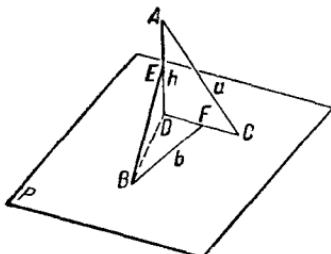


Рис. 284.

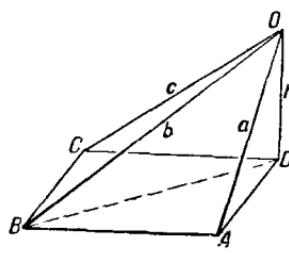


Рис. 285.

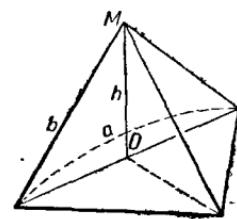


Рис. 286.

лена от вершин треугольника, так как основания равных наклонных равноудалены от основания перпендикуляра (рис. 286), O есть, следовательно, центр круга, описанного вокруг заданного прямоугольного треугольника, т. е. середина гипotenузы. Следовательно,

$$b = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}.$$

399. Треугольник, образованный наклонными и отрезком x , соединяющим их основания, равнобедренный, так как наклонные равны. Но угол его при вершине 60° , и, следовательно, треугольник равносторонний. Наклонные, следовательно, тоже имеют величину x . Из прямоугольного треугольника ABM имеем, следовательно (рис. 287),

$$x = \frac{2h}{\sqrt{3}}.$$

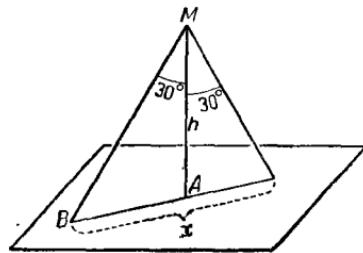


Рис. 287.

Параллельные прямые и плоскости и перпендикуляры, опущенные на плоскости

400. Опустив перпендикуляры из концов отрезка на плоскость P (рис. 288) и соединив основания этих перпендикуляров, мы получаем трапецию, основания которой суть a и b .

Перпендикуляр, опущенный на плоскость P из середины отрезка, есть средняя линия этой трапеции; он равен, следовательно:

$$\frac{a+b}{2}.$$

401. Проведем (рис. 289) на расстоянии h , большем чем a , вспомогательную плоскость $P \parallel$ плоскости P' . Мы будем тогда (как в предыдущей задаче) иметь:

$$x+h = \frac{(b+a)+(h-a)}{2}$$

откуда

$$x = \frac{b-a}{2}.$$

(Если длины перпендикуляров, опущенных с разных сторон на плоскость, считать разных знаков, например опущен-

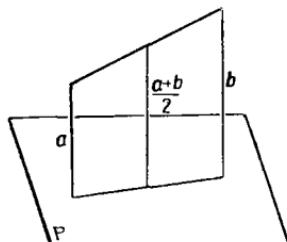


Рис. 288.

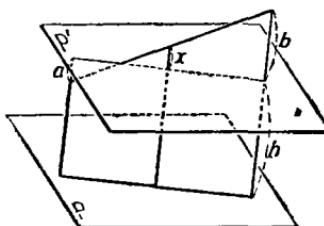


Рис. 289.

ные сверху положительными, а снизу — отрицательными, то во всех случаях мы получаем одну и ту же формулу:

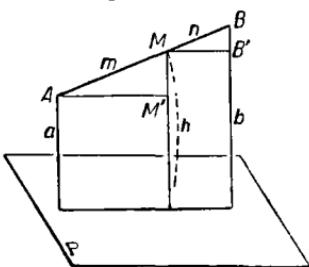


Рис. 290.

причем, если

$$\frac{a+b}{2},$$

выйдет отрицательным, это значит, что середина отрезка лежит снизу от плоскости P .)

402. Пусть искомое расстояние есть h ; тогда (рис. 290) из подобия треугольников AMM' и MBB' мы получаем:

$$MM' : BB' = m : n,$$

но

$$MM' = h - a; \quad BB' = b - h,$$

следовательно,

$$n(h-a) = m(b-h),$$

откуда

$$h = \frac{an+bm}{m+n}.$$

(Можно сделать то же замечание относительно правила знаков.)

403. На применение предыдущей задачи (рис. 291). Центр тяжести треугольника есть точка пересечения его медиан. Медианы отсекают трети друг от друга, т. е.

$$DM:MC=1:2.$$

Мы имеем, следовательно (по формуле предыдущей задачи),

$$MM' = h = \frac{2 \cdot DD' + 1 \cdot CC'}{3},$$

но

$$CC' = c, \quad DD' = \frac{AA' + BB'}{2} = \frac{a+b}{2};$$

откуда

$$h = \frac{\frac{2(a+b)}{2} + c}{3} = \frac{a+a+c}{3}.$$

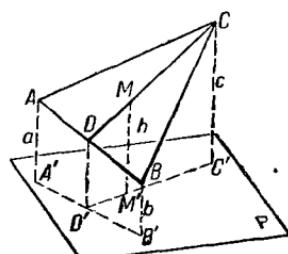


Рис. 291.

404. Пусть a, b, d заданы, а c ищется (рис. 292). Очевидно, что c настолько же больше d , насколько b больше a , т. е. $c-d=b-a$, откуда $c=d+b-a$. Опустим из точки A перпендикуляр AB' на b , а из точки D перпендикуляр DC' на c . Треугольники ABB' и DCC' равны, так как $DC=AB$, углы

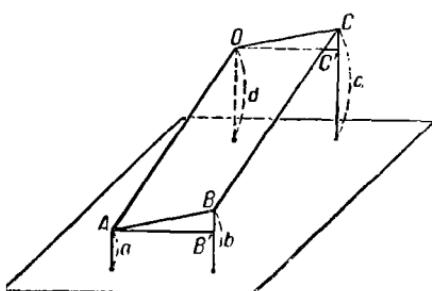


Рис. 292.

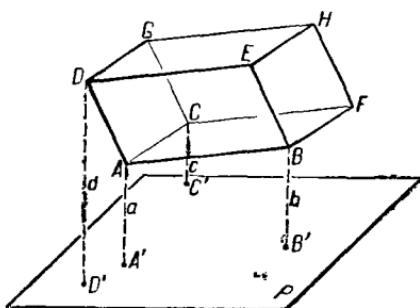


Рис. 293.

при A и B равны, вследствие параллельности сторон, углам при D и C , следовательно, $CC' = BB'$.

405. Аналогично тому, как в предыдущей задаче, мы получаем сначала расстояния e, f, g точек E, F, G (рис. 293): $e=d+b-a; f=b+c-a; g=d+c-a$, а затем расстоя-

ние h точки H при помощи, например, расстояний точек G , A и B ,

$$h = g + b - a = d + c - a + b - a.$$

406. Центр тяжести однородного тетраэдра или, что все равно, четырех одинаковых масс, сосредоточенных в вершинах тетраэдра, есть точка пересечения (рис. 294) медиоанальных прямых тетраэдра (см. задачу 346); эта точка M лежит на медиоанальной прямой DE на $\frac{1}{4}$ ее длины, считая от основы

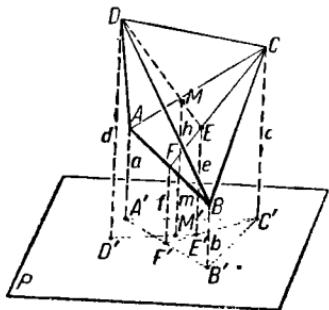


Рис. 294.

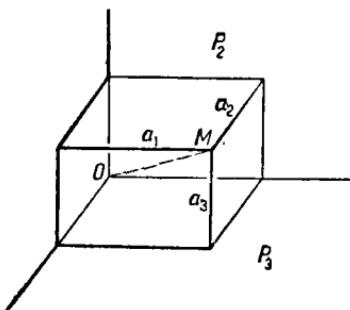


Рис. 295.

вания ее E . Для нахождения высоты e точки E пользуемся формулой задачи 403 и получаем:

$$e = \frac{a + b + c}{3}.$$

Для нахождения высоты h точки M пользуемся формулой задачи 402 и получаем

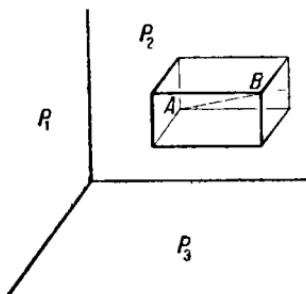


Рис. 296.

$$\begin{aligned} h &= \frac{1 \cdot d + 3 \cdot e}{4} = \\ &= \frac{d + 3 \cdot \frac{a + b + c}{3}}{4} = \frac{a + b + c + d}{4}. \end{aligned}$$

407. Проведем через точку M три плоскости \parallel плоскостям P_1 , P_2 , P_3 (рис. 295); они замкнут вместе с плоскостями P_1 , P_2 , P_3 прямоугольный параллелепипед, ребра которого суть a_1 , a_2 , a_3 , отрезок же OM есть диагональ этого параллелепипеда, т. е.

$$OM = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

408. Проведем через каждую из точек A и B по три плоскости \parallel плоскостям P_1 , P_2 , P_3 (рис. 296). Эти три плоскости

замкнут прямоугольный параллелепипед, грани которого \parallel плоскостям P_1, P_2, P_3 . Ребра этого параллелепипеда равны, очевидно,

$$b_1 - a_1, \quad b_2 - a_2, \quad b_3 - a_3.$$

Мы имеем, следовательно,

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

409. Построим тот же параллелепипед, как в предыдущей задаче. Проекции b_1, b_2, b_3 отрезка AB на плоскости P_1, P_2, P_3 равны, очевидно, диагоналям граней параллелепипеда. Пусть ребра параллелепипеда суть a_1, a_2, a_3 ; тогда мы имеем:

$$AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

но

$$b_1^2 = a_2^2 + a_3^2, \quad b_2^2 = a_3^2 + a_1^2, \quad b_3^2 = a_1^2 + a_2^2$$

и, следовательно,

$$AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}.$$

410. Пусть p_1, p_2, p_3 — три заданные взаимно перпендикулярные прямые. Обозначим через P_1, P_2, P_3 плоскости, параллельные $p_2, p_3, p_1; p_3, p_1; p_1, p_2$, и построим тот же параллелепипед, как в предыдущей задаче. Проекции a_1, a_2, a_3 равны ребрам этого параллелепипеда, т. е.

$$AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

411. Пусть расстояния (координаты) точек A, B, C, D от плоскостей P_1, P_2, P_3 суть $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3), (d_1, d_2, d_3)$. Опустим из всех четырех вершин A, B, C, D тетраэдра (рис. 297)

перпендикуляры на плоскость P_3 . Длины этих перпендикуляров суть a_3, b_3, c_3, d_3 . Основания их A', B', C', D' . Получились четыре призмы с вертикальными ребрами a_3, b_3, c_3, d_3 и с верхними основаниями ABD, ACD, BCD и ABC и нижними $A'B'D', A'C'D', B'C'D'$ и $A'B'C'$. Если сложить три первые и вычесть четвертую, то останется тетраэдр $ABCD$. Для вычисления объема тетраэдра достаточно, следовательно, уметь вычислять объемы таких призм. Займемся призмой $ABDA'B'D'$. Объем такой призмы равен, как известно, одной трети произведения площади S ее нижнего основания на сумму высот вершин

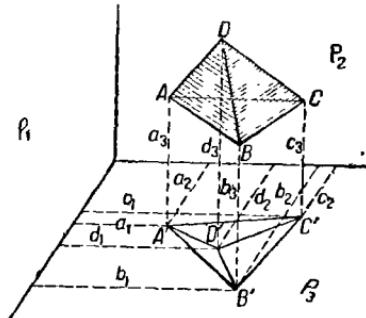


Рис. 297.

верхнего основания над плоскостью нижнего, т. е. в данном случае $\frac{1}{3}S(a_3 + b_3 + d_3)$. Остается уметь вычислять S . Но расстояния от вершин треугольника $A'B'D'$ до прямых p_1 и p_2 , которые взаимно перпендикулярны, равны $a_1, a_2; b_1, b_2; d_1$ и d_2 и, следовательно, его площадь по известной формуле равна

$$\frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2d_1 + b_1d_2 - b_2d_1 - a_2b_1 - a_1d_2)^*).$$

Подставив это значение S , получаем объем призмы $ABDA'B'D'$. Аналогично вычисляем объемы трех остальных и затем складываем три первых и, вычитая четвертый, получаем объем тетраэдра в виде следующей, весьма сложной формулы:

$$V = \frac{1}{6}(-b_1c_2d_3 - b_2c_3d_1 - b_3c_1d_2 + b_3c_2d_1 + b_2c_1d_3 + b_1c_3d_2 + \\ + a_1c_2d_3 + a_2c_3d_1 + a_3c_1d_2 - a_3c_2d_1 - a_2c_1d_3 - a_1c_3d_2 - a_1b_2d_3 - \\ - a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2 + a_3b_2d_1 + a_2b_1d_3 + a_1b_3d_2 + a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + \\ + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2).$$

В так называемой «теории определителей» дается простой способ запомнить эту формулу.

Трехгранные углы

412. Проведем секущую плоскость ABC , перпендикулярную к ребру OA интересующего нас двугранного угла, и пусть $OA = a$. Треугольники OAB и OAC суть равные равнобедренные (так как острые их углы равны 45°) прямоугольные треугольники, следовательно,

$$AB = AC = a, \quad OB = OC = a\sqrt{2}.$$

Но так как $\angle BOC = 60^\circ$, то,

$$BC = OB = OC,$$

т. е.

$$BC = a\sqrt{2}.$$

Итак, в треугольнике BAC

$$AB = AC = a;$$

$$BC = a\sqrt{2};$$

следовательно, треугольник этот равнобедренный прямоугольный, т. е. $\angle BAC$ прямой, но это линейный угол интересую-

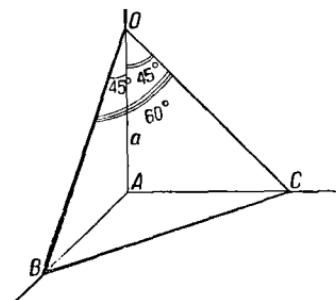


Рис. 298.

*) Эта формула для площади треугольника выводится в планиметрии совершенно аналогичным способом путем представления площади треугольника, как суммы площадей двух трапеций за вычетом площади некоторой третьей трапеции.

щего нас двугранного угла, следовательно, последний прямой (рис. 298).

413. Рассмотрим половину правильного октаэдра (рис. 299 и 300) с ребром a . Очевидно, что пирамида $OABC$ есть половина этой верхней пирамиды октаэдра. Но у правильного октаэдра плоскость $OAB \perp$ к плоскости ABC (рис. 299, 300).

Если не прибегать к октаэдру, то доказательство может быть, например, следующее. Мы имеем:

$$AC = BC = a; AB = a\sqrt{2}.$$

Пусть D середина AB ; тогда

$$DC = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

откуда видим, что в треугольнике CDO $\angle CDO$ прямой. Но $OD \perp AB$, $CD \perp AB$ (из равнобедренности треугольника AOB

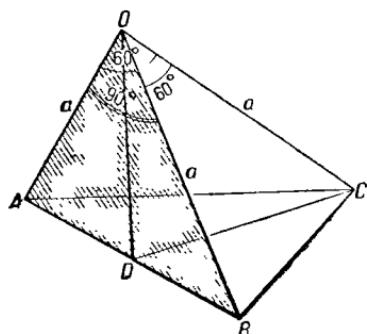


Рис. 299.

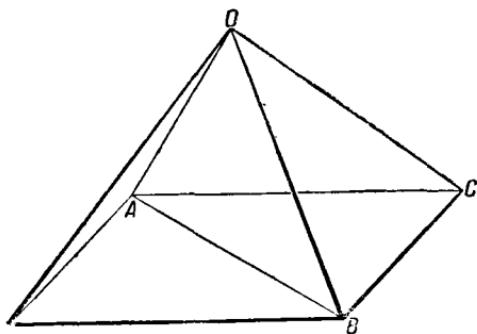


Рис. 300.

и ACB) и, следовательно, плоскость $CDO \perp$ к AB , т. е. угол CDO линейный угол интересующего нас двугранного угла.

Куб

414. Диагональ куба равна

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}.$$

Диагонали граней суть

$$\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Отрезок AB , соединяющий середины двух непараллельных и не сходящихся в вершине ребер куба, равен

$$AB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

415. Площади граней равны a^2 . Площади диагональных сечений

$$a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}.$$

Площади сечений, проходящих через центры граней и ребра противоположных граней, равны

$$a \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a^2 \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Сечение, проходящее через концы трех ребер, сходящихся в одной вершине, есть равносторонний треугольник, сторона которого есть диагональ грани, т. е. равна $a\sqrt{2}$; площадь этого сечения равна, следовательно,

$$\frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

416. Сторона этого шестиугольного сечения (рис. 301) равна (см. задачу 325) половине диагонали грани куба. т. е.

$$\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Площадь этого сечения, как площадь правильного шестиугольника со стороной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, равна

$$6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

417. Если соединить середину диагонали куба O с серединой K ребра, скрещивающегося с ней (рис. 302), то отрезок

$OK \perp$ к ребру AB , так как $OA = OB$, и \perp к диагонали CD , так как $KC = KD$. Отрезок OK представляется, следовательно, кратчайший отрезок, соединяющий диагональ CD с ребром AB :

$$OK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

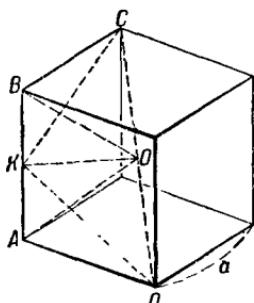


Рис. 302.

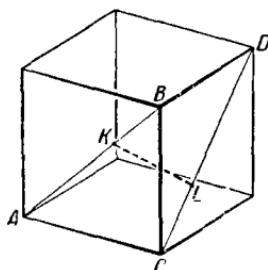


Рис. 303.

418. Кратчайший отрезок, соединяющий две такие диагонали AB и CD , имеет свои концы в точках K и L таких, что (рис. 303)

$$BK = \frac{1}{3} AB, \quad CL = \frac{1}{3} CD$$

(см. задачу 326), причем KL равен $\frac{1}{3}$ диагонали куба, т. е.

$$KL = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

419. Получается, очевидно, правильная восьмиугольная призма, высота которой есть a . В основании этой призмы лежит правильный восьмиугольник. Мы имеем (рис. 304):

$$BC = BE = AB\sqrt{2}; \quad CD = AB,$$

следовательно,

$$AD = a = AB + AB\sqrt{2} + AB = AB(2 + \sqrt{2}),$$

откуда

$$AB = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}.$$

Треугольник ABE есть половина квадрата со стороной AB ; площадь его, следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{(2 + \sqrt{2})^2}.$$

Площадь восьмиугольника, лежащего в основании призмы, равна площади квадрата со стороной a за вычетом площадей четырех таких треугольников, т. е.

$$a^2 - \frac{2a^2}{(2 + \sqrt{2})^2}$$

или

$$2a^2(\sqrt{2} - 1).$$

Объем призмы равен, следовательно,

$$2a^3(\sqrt{2} - 1).$$

Совокупность обоих кубов представляет невыпуклую 16-гранную призму, получающую из куба, если на каждую из его боковых граней положить узенькую треугольную призму. Объем этого тела равен удвоенному объему куба минус ординарный объем общей части (так как при удвоении объема куба эта общая часть будет сосчитана дважды), т. е.

$$2a^3 - 2a^3(\sqrt{2} - 1) = 2a^3(2 - \sqrt{2}).$$

420. Легко видеть, что общая часть этих двух кубов представляет собою пару правильных треугольных пирамид, сло-

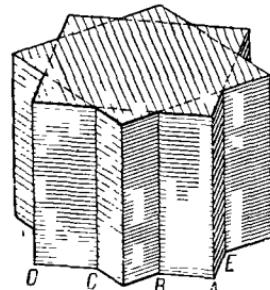


Рис. 304.

женных вместе основаниями, причем плоские углы при вершинах этих пирамид все прямые, так что каждая из них представляет собою $\frac{1}{6}$ куба с ребром $b = AB$. Искомый объем V общей части кубов равен, следовательно,

$$2 \frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Остается найти ребро b . Для этого заметим, что высота каждой из пирамид равна $\frac{b\sqrt{3}}{3}$ (рис. 305), как треть диагонали куба

с ребром b (см. задачу 326). Но удвоенная высота пирамиды равна половине OB диагонали заданного куба с ребром a , т. е.

$$\frac{2}{3} b \sqrt{3} = \frac{a \sqrt{3}}{2},$$

т. е.

$$b = \frac{3}{4} a.$$

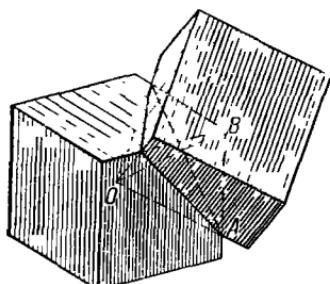


Рис. 305.

Объем V равен, следовательно, $\frac{9a^3}{64}$.

421. Пересечем куб плоскостью, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей на таком расстоянии от точки A , чтобы получающийся в сечении прямоугольник $CDEF$ был квадратом, т. е. чтобы $CF = FE = a$. Очевидно, что повернутый куб

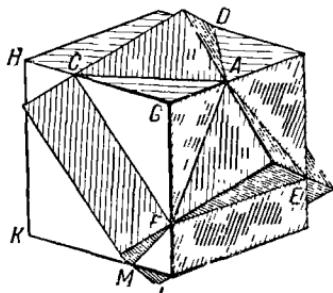


Рис. 306.

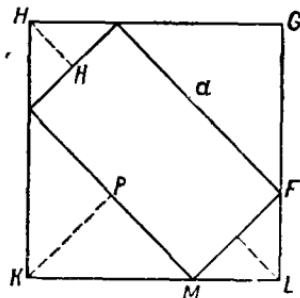


Рис. 307.

будет пересекать заданный куб по этому квадрату и по тому же квадрату, лежащему по другую сторону от центра куба. Вся часть, общая обоим кубам, представляет правильную четырехугольную призму, основаниями которой служат указанные два квадрата, а высота которой есть FM , на каждом из оснований которой поставлено по правильной четырехуголь-

ной пирамиде с этими же основаниями и вершинами в точках A и B (B противоположна точке A по отношению к центру куба и на рисунке не видна) (рис. 306 и 307).

Мы имеем:

$$FM = 2HN = a\sqrt{2} - a,$$

т. е. объем призмы равен

$$a^2(a\sqrt{2} - a) = a^3(\sqrt{2} - 1).$$

Высота же каждой из пирамид равна (рис. 307)

$$KP = \frac{a}{2}.$$

Объем всей общей части равен, таким образом,

$$a^3(\sqrt{2} - 1) + 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \frac{a}{2} = a^3 \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3} \right).$$

422. Легко видеть (рис. 308), что общая часть обоих кубов представляет собою две правильные шестиугольные пирамиды, сложенные вместе основаниями, вершины которых находятся в концах A и B диагонали, а основаниями служит правильный шестиугольник, рассмотренный в задаче 325, плоскость которого \perp к диагонали AB . Высота каждой из этих пирамид есть, следова-

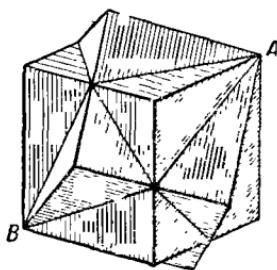


Рис. 308.

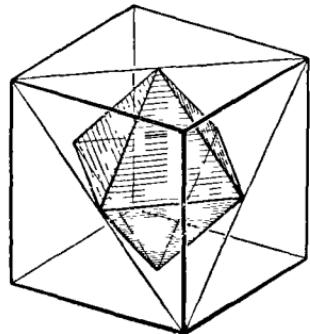


Рис. 309.

тельно, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а площадь основания (см. задачу 416) равна $\frac{a^2 3\sqrt{3}}{4}$. Объем V всей общей части обоих кубов равен, следовательно,

$$2 \cdot \frac{1}{2} \frac{a^2 3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} a^3.$$

423. Получается, очевидно, правильный октаэдр, вершины которого лежат в центрах граней куба (рис. 309). Ребро этого

октаэдра равно, очевидно, половине диагонали грани куба, т. е. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Высота каждой из двух пирамид, половин октаэдра, равна $\frac{a}{2}$. Объем октаэдра равен. следовательно.

$$2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6},$$

т. е. одной шестой объема куба.

424. Получается правильный тетраэдр с ребром $a\sqrt{2}$. Он получается, если отрезать от куба четыре пирамиды такие, как $EBCD$ (рис. 310).

Объем каждой из пирамид равен

$$\frac{a^3}{6}.$$

Объем тетраэдра равен, следовательно,

$$a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3},$$

Рис. 310.

т. е. равен одной трети объема куба.

425. 1) Пусть плоскость пересекает: все четыре вертикальных ребра куба (а не их продолжения) и пусть отрезки этих ребер, прилежащие к нижнему основанию куба (рис. 311), равны r, s, t, u . Рассматривая трапеции с основаниями r, t, s, u , мы видим, что

$$\frac{r+t}{2} = \frac{s+u}{2},$$

т. е.

$$u = r + t - s,$$

т. е. что если три из отрезков, например r, s, t , даны, то четвертый тем самым уже задан. Повернем секущую плоскость вокруг одной из диагоналей параллелограмма, получившегося в сечении так, чтобы отрезки, идущие к концам другой диагонали, например u и s , сравнялись. К отсеченному телу (отсеченным телом мы будем называть нижнюю часть куба) прибавится некоторый тетраэдр и равно такой же отрежется, так что объем

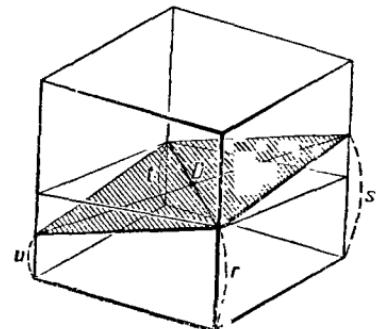


Рис. 311.

тела не изменится. Повернем теперь секущую плоскость вокруг этой второй диагонали сечения, которая теперь горизонтальна, так, чтобы сравнялись и два других отрезка r и t . Совершенно аналогично отрежется и прибавится по одинаковому тетраэдру, и следовательно, объем не изменится. В результате обе диагонали сечения окажутся горизонтальны, т. е. секущая плоскость \parallel основанию куба. При обоих поворотах точка D секущей плоскости (т. е. точка пересечения диагоналей параллелограмма сечения) оставалась на месте. Высота правильной четырехугольной призмы, получившейся в результате, равна, следовательно, $\frac{r+t}{2}$, а объем ее, т. е. и объем исходного тела, равен

$$V = a^2 \frac{r+t}{2}.$$

2) Пусть отрезки r , s , t суть отрезки ребер куба, а отрезок u есть отрезок продолжения ребра вниз под плоскость основания куба (рис. 312). Дополним куб книзу еще на высоту u . Так же, как и в предыдущей задаче, вычисляем объем нижней части этого «дополненного» куба, только теперь вместо r , s , t , u мы имеем

$$r+u, \quad s+u, \quad t+u, \quad 0.$$

Объем этот равен, таким образом,

$$a^2 \frac{r+u+t+u}{2}.$$

Остается вычесть из этого объема объем $a^2 u$, дополняющий куб книзу правильной четырехугольной призмы с высотою u , и прибавить затем объем маленькой пирамидки с ребрами u , w , v . Искомый объем получается в форме

$$V = a^2 \frac{r+t+2u}{2} - a^3 u + \frac{1}{6} uvw.$$

Остается вычислить v и w . Из подобия треугольников мы имеем:

$$v : u = a : (s-t); \quad w : u = a : (s-r),$$

откуда

$$v = \frac{au}{s-t}; \quad w = \frac{au}{s-r}.$$

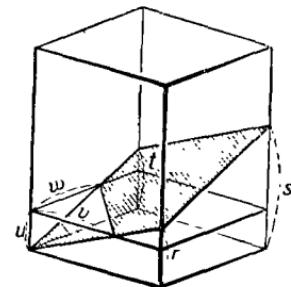


Рис. 312.

Подставляя эти величины и упрощая, мы находим, если заменим u через $s - r - t$,

$$V = a^2 \frac{s^3 - r^3 - t^3}{6(s-t)(s-r)}.$$

3) Пусть отрезки s и t суть отрезки ребер куба, а отрезки r и u суть отрезки продолжений двух других ребер вниз под

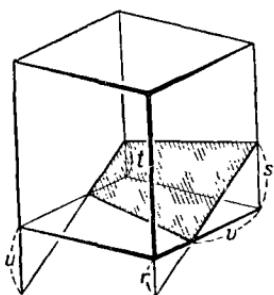


Рис. 313.

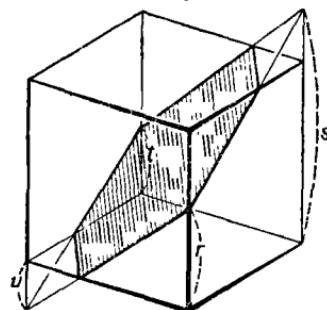


Рис. 314.

плоскость основания куба (рис. 313). Отсеченное тело есть треугольная усеченная пирамида. Из подобия треугольников мы имеем:

$$v:s = (a-v):r,$$

откуда

$$v = \frac{as}{r+s}.$$

Линейные размеры верхнего и нижнего оснований нашей усеченной пирамиды относятся как $t:s$, площадь большего (на рисунке) основания равна

$$\frac{vs}{2} = \frac{as^2}{2(r+s)},$$

следовательно, площадь меньшего

$$\frac{as^2}{2(r+s)} \cdot \frac{t^2}{s^2},$$

а площадь среднепропорционального

$$\frac{as^2}{2(r+s)} \cdot \frac{t}{s}.$$

Искомый объем V равен, следовательно,

$$V = a^2 \frac{s^2 + st + t^2}{6(r+s)}.$$

4) Пусть r и t суть отрезки ребер куба, s — отрезок от нижнего основания куба до точки на продолжении ребра квадрата от верхнего основания, а u — отрезок продолжения четвертого ребра под плоскость нижнего основания (рис. 314). Искомый объем нижнего куска куба можно вычислять, как в 2), только тогда будет еще захвачена лишняя пирамидка, стоящая над верхним основанием куба. Ее надо вычесть. Объем нижней пирамидки с ребрами u , v , w оказался в 2) равным

$$\frac{a^3 u^3}{6(s-t)(s-r)},$$

верхняя пирамидка, как легко видеть, подобна нижней, причем отношение их линейных размеров равно $s-a:u$. Объем верхней пирамидки равен, следовательно,

$$\frac{a^2 u^3}{6(s-t)(s-r)} \cdot \frac{(s-a)^3}{u^3} = \frac{a^2 (s-a)^3}{6(s-t)(s-r)}.$$

Объем V всего искомого тела равен, следовательно,

$$V = \frac{[a^2(s^3 - r^3 - t^3) - (s-a)^3]}{6(s-t)(s-r)}.$$

5) Пусть только s отрезок ребра куба, отрезки же r , t , u суть отрезки продолжений ребер куба вниз. Из подобия треугольников мы имеем (рис. 315)

$$k = \frac{as}{r+s}, \quad l = \frac{as}{s+t}.$$

Искомое тело есть пирамида с ребрами s , k , l , взаимно перпендикулярными, т. е. $\frac{1}{6}$ прямоугольного параллелепипеда с этими же ребрами, т. е. искомый объем V равен

$$V = \frac{1}{6} \frac{a^2 s^3}{(s+r)(s+t)}.$$

Легко убедиться, что этими пятью возможностями исчерпаны все случаи, так как секущая плоскость может или пересекать четыре параллельных ребра куба (а не их продолжения) (случай 1), или только три (случай 2) или только два, прилежащие по грани (случай 3), или только два, не прилежащие по грани (случай 4), или только одно (случай 5).

Всего существенно различных сечений куба плоскостью на две части получилось пять.

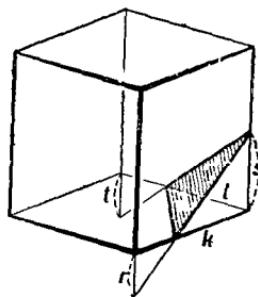


Рис. 315.

Соответственно этому и возможных существенных различных сечений тоже пять: параллелограмм, пятиугольник (получаемый из параллелограмма отрезанием уголка), шестиугольник (противоположные стороны которого параллельны) и треугольник. Сами куски куба получаются восьми сортов.

426. 1) Стороны параллелограмма сечения равны (из прямоугольных треугольников):

$$\sqrt{a^2 + (s-r)^2} \text{ и } \sqrt{a^2 + (s-t)^2}.$$

Одна из диагоналей

$$\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (s-u)^2};$$

следовательно, по формуле площади через стороны треугольника можно вычислить площади треугольников половин параллелограмма, а следовательно, и самого параллелограмма.

2) Вычислив площадь всего параллелограмма сечения «продолженного» куба, как в предыдущем случае, остается вычесть площадь треугольника, стороны которого суть:

$$\sqrt{u^2 + v^2}; \quad \sqrt{u^2 + w^2}; \quad \sqrt{v^2 + w^2},$$

т. е. известны, и площадь которого опять вычисляем по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3) Сечение есть трапеция. Легко вычислить ее боковые стороны и основания, а следовательно, и высоту, а затем площадь.

4) Разбиваем шестиугольник, получающийся в сечении, на четыре треугольника диагоналями, проведенными из одной из его вершин. Все стороны получившихся треугольников нетрудно вычислить из подобия треугольников и прямоугольных треугольников. Применяем формулу площади по сторонам.

5) Стороны треугольника, получившиеся в сечении, равны

$$\sqrt{s^2 + k^2}; \quad \sqrt{s^2 + l^2}; \quad \sqrt{k^2 + l^2}.$$

Как вычислить k и l , было показано в задаче 120; применяя формулу площади треугольника по сторонам, получаем результат.

Правильный тетраэдр

427. Пусть AB и CD — два противоположных ребра (рис. 316) правильного тетраэдра; если соединить середины E, F, G, H остальных четырех ребер, то получится квадрат, так как:

$$EF = \frac{CD}{2} \text{ и } GH = \frac{DC}{2}$$

и $EF \parallel CD$, $GH \parallel CD$; аналогично и FG равен и $\parallel EH$. Площадь этого квадрата равна, следовательно,

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

428. Общая часть (рис. 317 и 318) есть правильная шестигранная пирамида. Высота этой пирамиды равна высоте тетраэдра, т. е. равна $a \sqrt{\frac{6}{3}}$ (см. задачу 436), сторона же

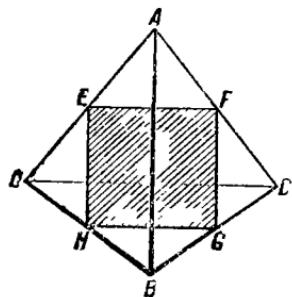


Рис. 316.

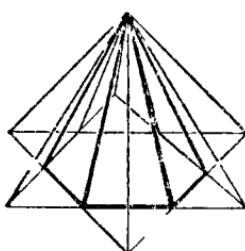


Рис. 317.

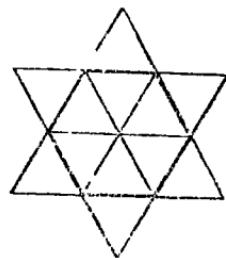


Рис. 318

основания равна $\frac{a}{3}$. Площадь основания равна, следовательно,

$$6 \left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6},$$

а объем

$$v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a \sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{18}.$$

Апофема этой шестигранной пирамиды равна высоте грани тетраэдра, т. е. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, и следовательно, полная боковая ее поверхность равна

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2},$$

и полная поверхность пирамиды равна

$$\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} = a^2 \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

429. Общая часть есть шестигранник, который представляет собою два одинаковых сложенных вместе основаниями правильных тетраэдра (рис. 319), линейные размеры которых вдвое меньше

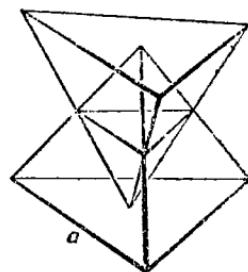


Рис. 319.

чем у заданных. Ребра их суть, следовательно, $\frac{a}{2}$, объем каждого из них равен, следовательно (см. задачу 436), $\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$, т. е. объем всей общей части равен

$$v = a^3 \frac{\sqrt{2}}{48}.$$

430. Общая часть есть параллелепипед (рис. 320), все грани которого суть одинаковые ромбы с углом в 60° . Рассмотрим треугольник ABC . Так как AC — медиана основания тетраэдра, а D — точка пересечения медиан, то $CD = \frac{1}{3} AC$, а следовательно, и $DE = \frac{1}{3} AB$, т. е. ребро получающегося параллелепипеда равно $\frac{a}{3}$. Но объем такого параллелепипеда в 6 раз больше объема правильного тетраэдра с ребром $\frac{a}{3}$, т. е. (см. задачу 436) равен

$$v = 6 \left(\frac{a}{3}\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{54}.$$

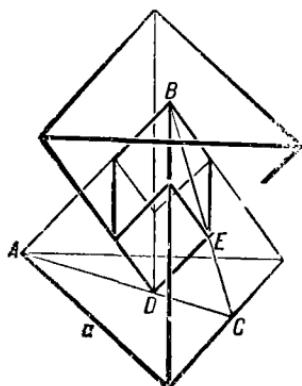


Рис. 320.

431. Представить себе непосредственно, какая получится общая часть, довольно трудно. Однако это совсем просто, если воспользоваться кубом (рис. 321). Вершины обоих тетраэдров будут вершинами одного куба. Каждому тетраэдру будет принадлежать четверка вершин куба, попарно не связанных ребром. Общая часть тетраэдров — как раз тот октаэдр, который рассмотрен в задаче 423. Если ребро тетраэдра a , то ребра куба $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, и следовательно (см. задачу 423), объем v октаэдра равен

$$v = \frac{1}{6} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = a^3 \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

432. Рассмотрим три ребра, сходящиеся в одной вершине A . Секущая плоскость должна пересекать хотя бы одно из этих ребер так как иначе (т. е. если бы она пересекала только их продолжения) она проходила бы мимо тетраэдра (вовсе его не пересекая).

1) Пусть секущая плоскость пересекает все три ребра, сходящиеся в A , и отсекает на них отрезки r, s, t (рис. 322).

Известно (см. задачу 339), что объемы двух тетраэдров с одинаковыми трехгранными углами относятся как произведение ребер этих трехгранных углов. Объем правильного тетраэдра с ребром a равен $\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$ (см. задачу 436). Отсекаемый тетраэдр с вершиной A имеет такой же трехгранный

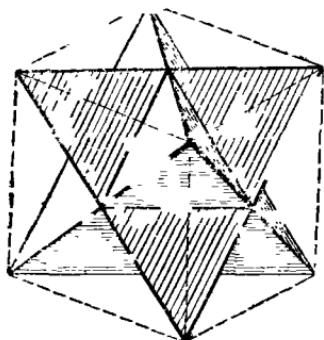


Рис. 321.

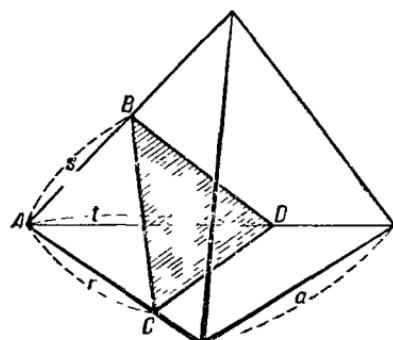


Рис. 322.

угол, как у правильного, и ребра r, s, t , а следовательно, объем его равен $\frac{rst \sqrt{2}}{12}$.

2) Пусть секущая плоскость пересекает только два из ребер, сходящихся в вершине A , и дает на них от вершины A отрезки r и s , третье же ребро не пересекает, но пересекает лишь продолжение его в точке B , и отрезок $AB = t$ (рис. 323). Часть тетраэдра, отсеченная этой плоскостью и прилегающая к вершине A , представляет собою пятигранник $ACDEG$; он получается, если от тетраэдра $ABCD$ отрезать тетраэдр $BEFG$. Объем тетраэдра $ABCD$, так же как в предыдущей задаче, получается равным $\frac{rst \sqrt{2}}{12}$. Для вычисления

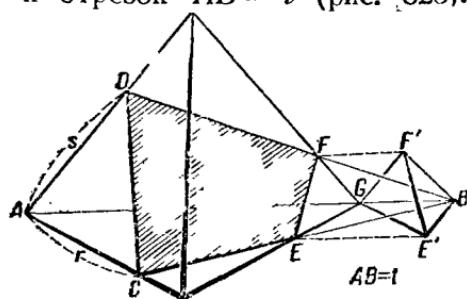


Рис. 323

объема тетраэдра $BEFG$ заметим, что он, очевидно, равновелик тетраэдру $BE'F'G$, который из него получается, если точку E перенести $\parallel AB$ в точку E' так, чтобы было $GE' \parallel AC$, а точку F в точку F' так, чтобы было $GF' \parallel AD$. Но $GE' = GE$, $GF' = GF$ и, следовательно, объем тетраэдра $BEFG$ = объему

тетраэдра $GE'F'B$, у которого при вершине G такой же трехгранный угол, как у правильного. Итак, объем $GE'F'B$ равен

$$GB \cdot GE' \cdot GF' \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Но $GB = t - a$. Проведем (рис. 324) $GH \parallel AD$. Из подобия треугольников ADB и GHB имеем:

$$GH = \frac{s(t-a)}{t}.$$

Из подобия треугольников DKF и HGF имеем:

$$GF : GH = (a - GF) : (a - s),$$

откуда

$$GF = \frac{a \cdot GH}{a - s + GH} = \frac{s(t-a)}{t-s}$$

Аналогично получим:

$$GE = \frac{r(t-a)}{t-r}$$

Объем тетраэдра $BEGF$ равен, следовательно,

$$\frac{r(t-a)}{t-r} \cdot \frac{s(t-a)}{t-s} \cdot (t-a) \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{rs(t-a)^3 \sqrt{2}}{(t-r)(t-s) \cdot 12},$$

а объем исследуемого пятигранника $ACDEF$ равен, таким образом,

$$V = rst \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{rs(t-a)^3}{(t-r)(t-s)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Легко убедиться, что этими двумя возможностями исчерпываются все случаи, так как остающийся еще случай, когда секущая плоскость пересекает только одно из ребер, сходящихся в вершине A , дает то же сечение, как и в случае 1) только по отношению к другой вершине.

433. 1) В треугольнике ABC (рис. 322) $\angle BAC$ имеет 60° , следовательно, сторона $BC = r^2 - rs + s^2$. Аналогично

$$BD = s^2 - st + t^2; CD = r^2 - rt + t^2.$$

Далее применяем формулу площади треугольника по его сторонам.

2) Площадь треугольника BCD (рис. 323) вычисляем, как в предыдущем случае. Затем, зная GB , GE , GF (см. задачу 432) и то, что углы BGE и BGF имеют по 120° , а угол $EGF = 60^\circ$, находим стороны BE , BF и EF треугольника BEF и затем, все по той же формуле, площадь этого треугольника. Вычитание дает площадь четырехугольника $CDEF$, получаемого в сечении.

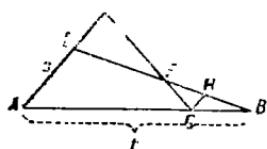


Рис. 324.

Призматоиды

434. Предположим, что a больше a' и b больше b' ; тело $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 325) может тем не менее не быть усеченной пирамидой, так как плоскость $DCD'C'$ может быть так наклонена, что она не проходит через ту точку плоскости $ABA'B'$, в которой пересекаются прямые AA' и BB' (продолжения ребер). Проведем плоскости $A'B'A'B'' \parallel D'C'DC$ и $B'C'B'C' \parallel A'D'AD$. Тело наше разрежется на параллелепипед I , две треугольные призмы II и III и четырехугольную пирамиду IV . Так как призмы II и III суть половины параллелепипеда с основаниями II и III и высотой h , то четыре казанных тела будут иметь последовательно объемы:

$$V_I = a'b'h; V_{II} = \frac{1}{2}a'(b - b') \cdot h;$$

$$V_{III} = \frac{1}{2}(a - a')(b' - b)h;$$

$$V_{IV} = \frac{1}{3}(a - a')(b - b')h.$$

Объем всего тела равен, следовательно,

$$V = V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV} = \frac{h}{6}(2a' \cdot b' + a \cdot b' + a' \cdot b + 2a \cdot b).$$

Предположим теперь, что a больше a' , но b меньше b' (рис. 326). Проведем плоскости $B'C'B'E \parallel A'D'AD$ и $D'E'DC \parallel A'B'AB$.

Тело наше разрежется на параллелепипед I , две треугольные призмы II и III и треугольную пирамиду $ECE'C$. Передвинем точку C' параллельно EE' , так, чтобы она оказалась на плоскости основания $ABCD$ в точке F . Очевидно, что пирамида $ECE'C'$ равновелика пирамиде, имеющей основанием треугольник CEF и вершиною точку E .

Объем V_{IV} этой пирамиды равен (угол GEF прямой)

$$\frac{1}{2}CE \cdot EF \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}(a - a')(b' - b)h.$$

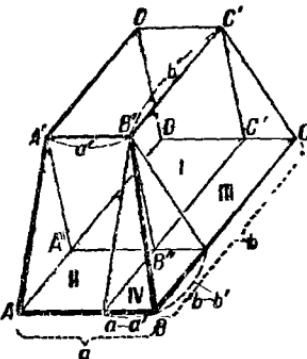


Рис. 325.

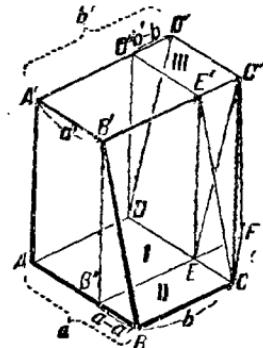


Рис. 326.

Объемы параллелепипеда I и призм II и III суть:

$$V_I = a'b \cdot h; V_{II} = \frac{1}{2} (a - a') b \cdot h;$$

$$V_{III} = \frac{1}{2} a' (b' - b) \cdot h.$$

Объем всего тела равен, следовательно,

$$V = V_I + V_{II} + V_{III} + V_{IV} = \frac{h}{6} (2a'b' + ab' + a'b + 2ab).$$

Получилась та же самая формула, как в предыдущем случае. Очевидно, что предположения: a меньше a' , b меньше b' и a меньше a' ; b больше b' равносильны предыдущим, если только повернуть наш призматоид. Выведенная формула есть, следовательно, общая для такого рода тел.

435. Боковые грани такого выпуклого призматоида, если основания уже даны, получаются так: через каждую из сторон нижнего основания проведем плоскость и будем ее вращать вокруг этой стороны до тех пор, пока она не прикоснется к верхнему основанию. Аналогично проведем плоскости

через все стороны верхнего основания и будем их вращать вокруг этих сторон до тех пор, пока каждая из них не прикоснется к нижнему основанию. Замкнутые основаниями и этими плоскостями тело и называется призматоидом с этими основаниями (это есть наименьшее выпуклое тело, имеющее эти основания). Призма с параллельными основаниями и усеченная пирамида суть частные случаи призматоида. Если у оснований призматоида нет «прямопараллельных» сторон (т. е. таких, которые параллельны и имеют основания по одну сторону от них), то все боковые грани суть, очевидно, треугольники. Каждой же паре прямопараллельных сторон оснований соответствуют трапециoidalные грани (рис. 327). Проведем среднее сечение. Возьмем где-нибудь на нем (все равно где) внутри призматоида точку O и разобьем весь призматоид на пирамиды, имеющие вершину в точке O и основаниями верхнее и нижнее основание призматоида и его боковые грани. Первые две пирамиды будут иметь объемы

$$\frac{1}{3} s_1 \frac{H}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{3} s_2 \frac{H}{2}.$$

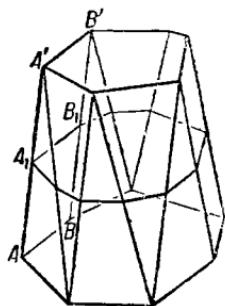


Рис. 327

ни суть, очевидно, треугольники. Каждой же паре прямопараллельных сторон оснований соответствуют трапециoidalные грани (рис. 327). Проведем среднее сечение. Возьмем где-нибудь на нем (все равно где) внутри призматоида точку O и разобьем весь призматоид на пирамиды, имеющие вершину в точке O и основаниями верхнее и нижнее основание призматоида и его боковые грани. Первые две пирамиды будут иметь объемы

Рассмотрим какую-нибудь из пирамид (рис. 328), основанием которой является одна из боковых граней призматоида, и предположим, что эта грань трапеция, так как, если бы она была треугольником, то мы только считали бы, что одно из оснований трапеции равно нулю. Опустим из точки O перпендикуляр OD на эту боковую грань $ABA'B'$ и через точку D проведем по боковой грани $CC' \perp AB$. Тогда A_1B_1 — средняя линия трапеции $ABA'B'$, CC' — ее высота, т. е. площадь ее равна $A_1B_1 \cdot CC'$, а следовательно, объем пирамиды $OABA'B'$ равен $\frac{1}{3} A_1B_1 \cdot CC' \cdot OD$. Опустим из точки C перпендикуляр $C'K_1$ на плоскость OA_1B_1 среднего сечения; тогда он будет высотой треугольника $OC'C_1$. Вычисляя площадь этого треугольника, мы имеем:

$$CC' \cdot OD = 2OC_1 \cdot C'K_1 = OC_1 \cdot H,$$

так как

$$C'K_1 = \frac{H}{2}.$$

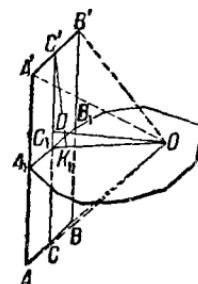


Рис. 328.

Подставляя, мы получаем, что объем пирамиды $OABA'B' = \frac{1}{3} \cdot A_1B_1 \cdot OC_1 \cdot H$. Но $OC_1 \perp A_1B_1$ и, следовательно, $\frac{1}{2} A_1B_1 \cdot OC_1$ есть площадь треугольника OA_1B_1 ; следовательно, объем пирамиды $OABA'B'$ равен

$$\frac{1}{6} \cdot (\text{пл. } \Delta OA_1B_1) \cdot 4 \cdot H.$$

Складывая все эти пирамиды с двумя первыми, основаниями которых служат основания призматоида, мы получаем для объема всего призматоида:

$$V = \frac{H}{6} (s + s' + 4s_1),$$

так как сумма площадей всех треугольников, аналогичных треугольнику OA_1B_1 , даст площадь s_1 среднего сечения.

Правильные многогранники

436. Из равенства прямоугольных треугольников AED, BED и CED (по катету и гипotenузе) мы видим, что основание E высоты есть точка, равноудаленная от вершин основания (рис. 329), но так как основание — равносторонний треугольник, то E — точка пересечения его медиан (они же и биссектрисы и высоты). Ввиду того, что CF — высота и, следовательно,

\perp к AB и EF проекция DF (рис. 317), то $DF \perp AB$. Мы имеем, таким образом,

$$DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(как высота равностороннего треугольника со стороны a),

$$EF = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

(как $\frac{1}{3}$ медианы CF , которая одновременно и высота равностороннего треугольника со стороной a). Из прямоугольного треугольника DEF получаем, следовательно,

$$h = DE = \sqrt{DF^2 - EF^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Площадь основания s как площадь равностороннего треугольника со стороной a равна

$$s = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно, объем V правильного тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{3} sh = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

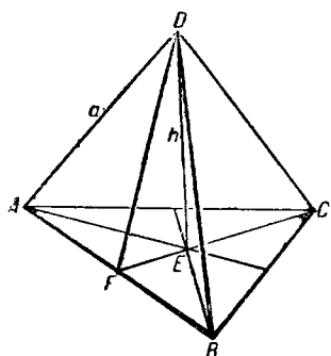


Рис. 329. 1

Другой способ. Рассмотрим куб, четыре из вершин которого суть вершины данного правильного тетраэдра (см. задачу 333). Объем тетраэдра

представляет $\frac{1}{3}$ объема куба, так как объем каждой из четырех пирамид, отрезание которых от куба дает тетраэдр, равен $\frac{1}{6}$ объема куба, так как высота такой пирамиды равна высоте куба, а площадь ее основания вдвое меньше площади основания куба. Если ребро тетраэдра a , то ребро куба, для которого ребро тетраэдра — диагональ грани, равно $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, объем куба равен

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}.$$

и объем тетраэдра

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

437. Шар, описанный вокруг правильного тетраэдра, очевидно, есть тот же самый, который описан вокруг вспомогательного куба, рассмотренного в предыдущей задаче, т. е. радиус его равен половине диагонали этого куба, т. е.

$$K = \frac{1}{2} \frac{a \sqrt{2}}{2} \sqrt{3} = \frac{a \sqrt{6}}{4}.$$

438. Шар, вписанный в параллельный тетраэдр, будет касаться его граней в точках пересечения их биссектрис. Соединяя эти точки, мы получим меньший правильный тетраэдр (рис. 330) с ребром a' , для которого этот же шар будет описаным. Но $B'C = \frac{1}{3} BC$ и $A'C = \frac{1}{3} AC$ (так как точки B' и A' суть точки пересечения медиан), и следовательно, $A'B' = \frac{1}{3} AB$, т. е. $r' = \frac{1}{3} a$, т. е. малый тетраэдр в три раза меньше в отношении своих линейных размеров, чем заданный. Радиус r впи-

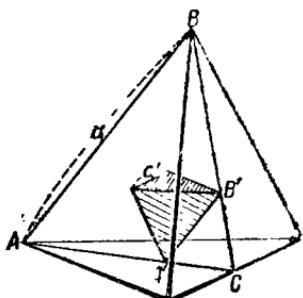


Рис. 330.

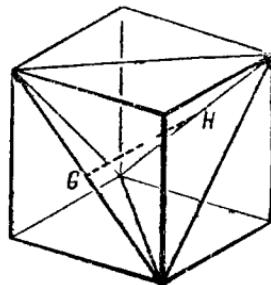


Рис. 331.

занного шара, следовательно, в три раза меньше радиуса R описанного, т. е.

$$r = \frac{1}{3} \frac{a \sqrt{6}}{4} = \frac{a \sqrt{6}}{12}$$

439. Рассмотрим опять вспомогательный куб. Отрезок GH (рис. 331), соединяющий середины двух противоположных ребер тетраэдра, соединяет центры противоположных граней куба и, следовательно, \perp к этим граням, т. е. представляет собою \perp к обоим этим ребрам, а следовательно, кратчайший отрезок между ними GH , очевидно, равен ребру куба, т. е. $\frac{a \sqrt{2}}{2}$

440. Объем куба равен $V = a^3$, радиус описанного шара $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, радиус вписанного шара $r = \frac{a}{2}$.

441. Сечение $AECF$ правильного октаэдра (рис. 332) есть квадрат, следовательно, высота пирамиды $ABCDF$, половины октаэдра, равна

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Объем этой пирамиды равен, следовательно,

$$\frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

и, следовательно, объем V всего октаэдра

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

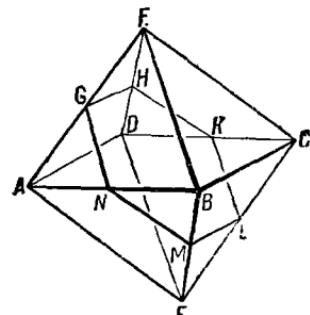


Рис. 332.

442. Диаметр описанного шара равен диагонали EF , и следовательно, радиус

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

443. Вписанный шар будет касаться граней октаэдра в точках пересечения их биссектрис. Эти точки будут вершинами куба, а сам вписанный в октаэдр шар — шаром, описанным вокруг этого куба. Для нахождения ребер куба рассмотрим проекцию (рис. 333) октаэдра и этого вписанного куба на плоскость сечения $ABCD$. Вершина K

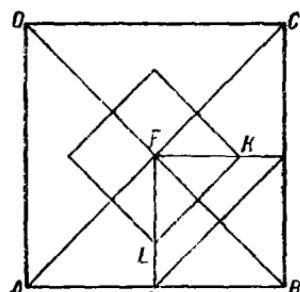


Рис. 333

куба будет находиться на $\frac{1}{3}$ медианы MF грани октаэдра (в точке пересечения ее медиан), т. е. $KM = \frac{1}{3} MF$, но

в таком случае и проекция $\bar{KM} = \frac{1}{3}$

проекции MF . Проекция же \bar{KL} ребра KL куба, как параллельного плоскости, на которую проектируем, сохранит свою длину, т. е. $KL = \bar{KL}$. Мы имеем:

$$AB = a, \quad M\bar{F} = \frac{a}{2} \quad MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \bar{KL} = \frac{2}{3} MN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

т. е. ребро вписанного куба равно

$$a' = \frac{a\sqrt{2}}{3},$$

следовательно, радиус шара, описанного вокруг этого куба, равен

$$\frac{a'\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

т. е.

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

444. Площадь правильного пятиугольника со стороной a равна

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}},$$

следовательно, полная поверхность S правильного додекаэдра с ребром a равна

$$S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

445. Разрезав додекаэдр по отрезкам, соединяющим середины C, D, E, F, G, H 6 ребер, показанным на рис. 334, мы, повернув «шапочку» A , сможем ее в точности вложить в шапочку B так, что они совместятся. При этом окажется, что $AC=BC, AD=BD, AE=BE, AF=BF, AG=BG, AH=BH$, т. е. все шесть точек C, D, E, F, G, H лежат в одной плоскости (\perp к AB и проходящей через середину O отрезка AB , т. е. через центр додекаэдра) (см. задачу 324). Шестиугольник $CDEFGH$, следовательно, плоский и правильный. Из свойств правильного пятиугольника находим, что сторона a' этого шестиугольника, как полусумма стороны a и диагонали $b=a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ правильного пятиугольника, равна

$$a' = a\frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника ODK получаем, следовательно,

$$R=OK=\sqrt{a'^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}.$$

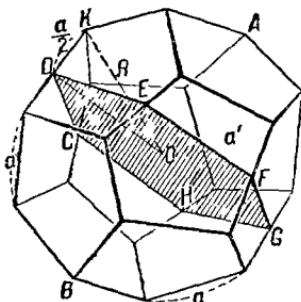


Рис. 334.

Замечание. Как в этой задаче, так и в задаче 323, доказательство того, что

$$AC=BC, AD=BD, AE=BE, AF=BF, AG=BG, AH=BH$$

можно произвести и следующим образом. Повернем додекаэдр вокруг оси проходящей через точку E , так, чтобы грань ED совместила с равной ей гранью EF , и обратно — грань EF с равной ей гранью ED ; тогда, вследствие равенства всех граней и всех двугранных углов между ними, все грани додекаэдра совместятся с соответствующими гранями, т. е. весь додекаэдр совместится сам с собою. Отрезок EA совместится при этом с отрезком EB , т. е. $EA=EB$. Аналогично и для других пар отрезков Ось, вокруг которой при этом приходится поворачивать додекаэдр, проходит, как легко видеть, через середины двух противоположных ребер его.

446. Вписанный шар касается граней додекаэдра в центрах кругов, описанных вокруг его граней. Если, следовательно, R — радиус описанного шара, r — радиус вписанного и ρ — радиус круга, описанного вокруг грани, то r и ρ — катеты прямоугольного треугольника, в котором R — гипотенуза, т. е.

$$r=\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

Радиус ρ круга, описанного вокруг правильного пятиугольника со стороной a , есть

$$\rho=a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

Радиус R шара, описанного вокруг додекаэдра, равен

$$R=\frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$$

(см. предыдущую задачу). Мы имеем, следовательно,

$$r=a\sqrt{\frac{18+6\sqrt{5}}{16}-\frac{5+\sqrt{5}}{10}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}.$$

447. Разобьем додекаэдр на 12 пирамид, основаниями которых служат его грани, а вершины которых — в центре додекаэдра. Площадь основания каждой из этих пирамид, как площади правильного пятиугольника со стороной a , равна

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}},$$

высоты же равны радиусу r вписанного шара, т. е.

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$$

(см. предыдущую задачу). Объем V додекаэдра равен, следовательно,

$$V=\frac{12a^3}{3\cdot 8}\sqrt{(25+10\sqrt{5})\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}=\frac{a^3}{4}\sqrt{10(47+21\sqrt{5})}$$

448. Площадь правильного треугольника со стороной a равна $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, следовательно, полная поверхность правильного икосаэдра с ребром a равна

$$20 \cdot \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{4} = 5a^2 \sqrt{3}.$$

449. Очевидно, что отрезок, соединяющий любые две противоположные вершины (рис. 335) икосаэдра, например FG , есть диаметр описанного шара, т. е. $FG=2R$. Рассмотрим треугольник FAG . Угол FAG , как имеющий вершину A на поверхности описанного шара и опирающийся на диаметр его прямой; треугольник этот, следовательно, прямоугольный. При поворачивании икосаэдра вокруг диаметра FG на $\frac{360^\circ}{5}, 2\frac{360^\circ}{5}$ и т. д., треугольники FAG, FBG и т. д. совмещаются, следовательно, пятиугольник $ABCDE$ плоский и правильный, и плоскость его \perp к отрезку FG . Если H — точка пересечения плоскости этого пятиугольника с FG , то $AH \perp FG$, т. е. AH — высота прямоугольного треугольника FAG . Мы имеем, следовательно,

$$AF^2 = GF \cdot FH \text{ или } a^2 = 2R \cdot FH.$$

Остается вычислить FH ; AH как радиус круга, описанного вокруг правильного пятиугольника с стороной a , равен

$$AH = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

Теперь из треугольника AFH получаем:

$$FH = \sqrt{AF^2 - AH^2} = a \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

Мы получаем таким образом

$$a^2 = 2Ra \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$$

откуда

$$R = \frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

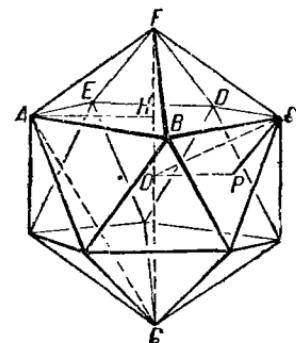


Рис. 335.

450. Вписанный шар касается граней икосаэдра (рис. 335) в центрах кругов, описанных вокруг граней:

$$OP = r, OC = R = \frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

(см. предыдущую задачу),

$$PC = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

треугольник OPC — прямоугольный, следовательно,

$$OP = \sqrt{OC^2 - PC^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}.$$

451. Объем V правильного икосаэдра, как сумма объемов 20 пирамид с площадями оснований $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ и высотами

$$OP = r = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}$$

(см. предыдущую задачу), равен

$$V = \frac{20}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{5}{6} a^3 \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}.$$

Цилиндр

452. Пусть r радиус основания, а h — высота цилиндра; тогда $h=a$ и $2\pi r=a$, т. е. $r=\frac{a}{2\pi}$, и, следовательно,

$$V = \pi r^2 h = \frac{a^3}{4\pi}.$$

453. Пусть P — наклонное сечение цилиндра (рис. 336). Рассмотрим сечение Q плоскостью \perp к оси и проходящей через ту точку C оси, где ось пересекается плоскостью P . Плоскость P пересекает плоскость Q по диаметру AB того круга, который получается при пересечении цилиндра плоскостью Q . Боковая поверхность цилиндра и плоскости P и Q ограничиваюют два ломтообразных тела p и q ; объемы этих тел одинаковы. Действительно, если повернуть тело q вокруг диаметра AB , как вокруг оси, на 180° , то оно совместится с телом p . Из этого замечания выходит, что рассматриваемый кусок цилиндра равновелик цилиндру с тем же радиусом r и высотою $CC'=a$, т. е.

$$V = \pi r^2 a.$$

454. Срежем косо (рис. 337) два параллельно расположенных цилиндра одинаковых радиусов, так чтобы секущие плоскости были параллельны. Очевидно, что линии, получаемые в

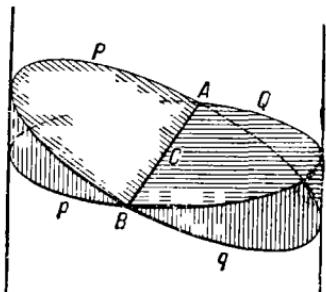


Рис. 336.

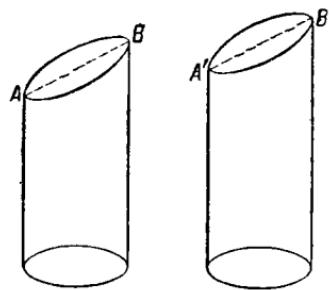


Рис. 337.

сечении, будут одинаковы (эллипсы). Очевидно также, что эти линии симметричны по отношению к прямым AB и $A'B'$,

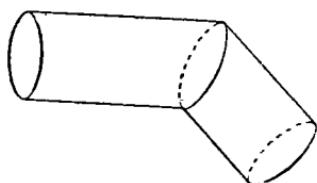


Рис. 338.

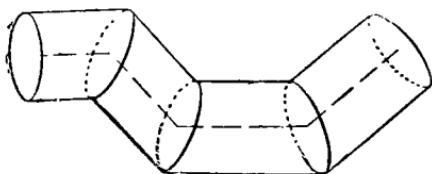


Рис. 339.

получаемым в пересечении секущих плоскостей с плоскостями, проходящими через оси цилиндров и им перпендикулярными. Если, следовательно, повернув второй из срезанных цилиндров вокруг $A'B'$ как вокруг оси на 180° и перенеся его затем параллельно самому себе, так приставить к первому, чтобы отрезок $A'B'$ совпадал с отрезком AB , то срезы совместятся и образуется (рис. 338) колено. Принимая во внимание предыдущую задачу, мы видим, что объем и полная поверхность такой коленчатой цилиндрической трубы равновелики объему и боковой поверхности такого прямого цилиндра, радиус r которого равен радиусу трубы, а высота — длине (ломаной) оси (рис. 339) трубы.

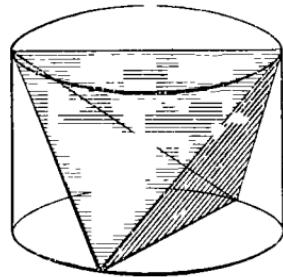


Рис. 340.

455. Цилиндр, описанный так вокруг тетраэдра, есть вместе с тем и цилиндр, описанный вокруг куба (рис. 340) с реб-

ром $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (см. задачу 333), и следовательно, радиус его $r = \frac{a}{2}$. а высота $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, т. е.

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{8}.$$

$$456. r = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad h = a; \quad V = \pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{2}.$$

457. Радиус r основания цилиндра есть радиус круга, описанного вокруг правильного треугольника со стороной a ,

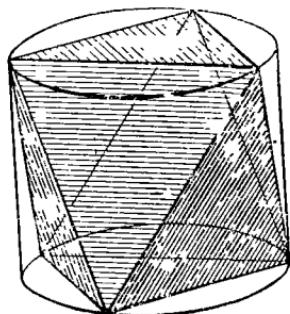


Рис. 341.

т. е. $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (рис. 341). Высота h равна диаметру шара, вписанного в октаэдр, т. е. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (см. задачу 443).

Мы получаем, следовательно,

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{9}.$$

458. Это возможно (см., например, рис. 334); для этого достаточно взять за ось цилиндра отрезок, соединяющий центры двух противоположных

граней додекаэдра, а радиус его такой, чтобы он был радиусом круга, описанного вокруг правильного пятиугольника, сторона которого равна диагонали

$$b = a \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

правильного пятиугольника со стороной a . Тогда вершины тех двух граней, центры которых лежат в центрах оснований цилиндра, лежат на основаниях цилиндра, все же остальные 10 вершин распадаются на два правильных пятиугольника и лежат на боковой поверхности цилиндра. Мы имеем, следовательно,

$$r = b \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} = a \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{5}}{10}},$$

высота же h цилиндра, как диаметр шара, вписанного в дodeкаэдр (см. задачу 446),

$$h = a \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}},$$

откуда

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{10} \sqrt{47 + 21\sqrt{5}}.$$

459. Это возможно (см., например, рис. 335); для этого достаточно взять за ось цилиндра отрезок, соединяющий центры двух противоположных граней икосаэдра, а радиус его такой, чтобы он был радиусом круга, описанного вокруг равностороннего треугольника, сторона которого есть диагональ b правильного пятиугольника со стороной a . Тогда вершины тех двух граней, центры которых лежат в центрах оснований цилиндра, лежат на основаниях цилиндра, а остальные шесть вершин разбиваются на два равносторонних треугольника и лежат на боковой поверхности цилиндра. Мы имеем, следовательно,

$$r = \frac{b\sqrt{3}}{3} = a \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{6},$$

а высота, как диаметр шара, вписанного в икосаэдр (см. задачу 450),

$$h = a \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}},$$

откуда

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi a^3}{36} \sqrt{6(3+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}.$$

Конус

460. Пусть r — радиус основания полученного конуса, а h — его высота, очевидно, $l = R$. Длина окружности основания

$$\frac{2\pi R}{2} = 2\pi r,$$

откуда

$$r = \frac{R}{2}; \quad h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

и, следовательно,

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{24}.$$

461. Получаются (рис. 342) сложенные основаниями конус и усеченный конус и коническая выемка. Остается вычислить радиус $R = BE$ основания конуса, его высоту $h = AB$, радиус $r = CF$ малого основания усеченного конуса, его высоту $H = BC$ и высоту $h' = CD$ конической выемки. Задача эта планиметрическая, как, впрочем, почти всегда бывает в столь

многочисленных задачах на тела вращения, предлагаемых в разных задачниках. Треугольники ABE , DGA , DCF , EKF подобны:

$$AD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

следовательно,

$$BE = \frac{2a\sqrt{5}}{5}; \quad AB = a\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$CF = AB = \frac{a\sqrt{5}}{5}; \quad CD = \frac{a\sqrt{5}}{10}; \quad BC = KF = BE = \frac{2a\sqrt{5}}{5},$$

и тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi BE^2 \cdot AB + \frac{1}{3}\pi (BE^2 + BE \cdot CF + CF^2) BC - \frac{1}{3}CF^2 \cdot CD.$$

462. Пусть стороны треугольника a, b, c , пусть h_a — высота, опущенная на сторону a , и a_1 и a_2 — отрезки от основания высоты до концов основания a . При вращении вокруг стороны

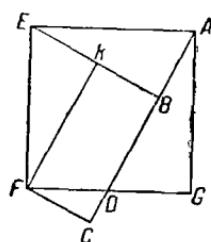


Рис. 342.

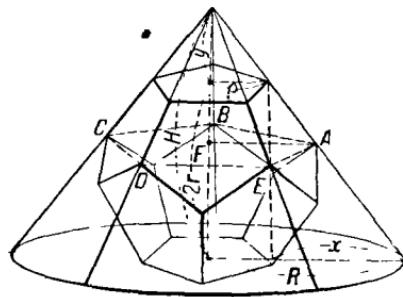
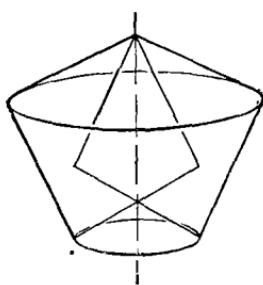


Рис. 343.

a получаются два конуса, сложенных вместе основаниями, если углы при основании оба острые, один конус, если один из углов прямой, или конус с конической выемкой, если один из углов тупой. Объем тела получается соответственно

$$V_a = \frac{\pi h^2 a_1}{3} + \frac{\pi h^2 a_2}{3}; \quad V_a = \frac{\pi h^2 a_1}{3}; \quad V_a = \frac{\pi h^2 a_1}{3} - \frac{\pi h^2 a_2}{3},$$

что дает во всех трех случаях

$$V = \frac{\pi h^2 a}{3},$$

но это иначе можно переписать так:

$$V_a = \frac{4}{3} \frac{\pi}{a} \frac{h^2 a^2}{4} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{a} Q^2,$$

где Q — площадь треугольника. И мы получаем

$$V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

463. Из правильного пятиугольника $ABCDE$, чья сторона (рис. 343) которой b есть диагональ правильного прямоугольника, со стороной a , т. е.

$$b = a \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

мы получаем, что FA — радиус круга, описанного вокруг этого пятиугольника, равен

$$FA = b \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} = a \sqrt{\frac{10 + 4\sqrt{5}}{10}}.$$

Отрезок $\tau = FA - \rho$, где $\rho = a \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$; далее, из подобия треугольников мы имеем $y : \rho = \sqrt{a^2 - \tau^2} : \tau$; откуда

$$y = \frac{\rho \sqrt{a^2 - \tau^2}}{\tau};$$

далее опять из подобия $x : 2r = \rho : y$, т. е.

$$x = \frac{2r\tau}{\sqrt{a^2 - \tau^2}}; \quad H = 2r + y; \quad R = \rho + x;$$

r , как радиус вписанного шара, равен

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$$

(см. задачу 446 на стр. 270), и объем легко вычисляется.

Шар

464. Угол между радиусом OA и гранью AB есть (рис. 344) угол между OA и диагональю грани AB , так как перпендикуляр, опущенный из центра сферы O на грань AB , очевидно, имеет основание в центре этой грани, т. е. в середине D ее диагонали. OD есть, следовательно, половина стороны правильного восьмиугольника, вписанного в круг радиуса R , так как

$$\varphi = 22\frac{1}{3}^\circ, \text{ т. е. } OD = \frac{1}{2} R \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

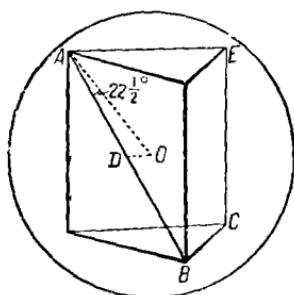


Рис. 344.

следовательно,

$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \frac{1}{2} R \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

т. е.

$$AB = R \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

BC есть сторона восьмиугольника, вписанного в круг с радиусом AB , т. е.

$$BC = AB \sqrt{2 - \sqrt{2}} = R \sqrt{2} = AE.$$

Но

$$h = CE = \sqrt{AB^2 - AE^2}, \text{ т. е. } R \sqrt{2}.$$

465. Если шар касается двух пересекающихся прямых, то центр его лежит на плоскости, перпендикулярной к плоскости этих прямых и проходящей через их биссектрису. Отсюда ясно, что центр шара лежит в центре куба (рис. 345 и 346). Шар этот выступает из куба шестью сегментами, окружности оснований которых (сегментов) вписаны в квадраты граней куба. Мы имеем, следовательно, радиус шара

$$R = \frac{a \sqrt{2}}{2},$$

высота сегмента

$$h = \frac{a \sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = a \frac{\sqrt{2} - 1}{2};$$

радиус окружности основания сегмента $\rho = \frac{a}{2}$, следовательно, объем сегмента

$$\begin{aligned} V &= \pi \rho^2 \frac{h}{2} + \frac{1}{6} \pi h^3 = \pi \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a \sqrt{2} - 1}{2} + \\ &+ \frac{1}{6} \pi a^3 \frac{(2 \sqrt{2} - 3 \cdot 2 + 3 \sqrt{2} - 1)}{8} = \pi a^3 \frac{4 \sqrt{2} - 5}{24}. \end{aligned}$$

Объем, общий шару и кубу, равен, следовательно,

$$W = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{2 \sqrt{2}}{8} - 6 \pi a^3 \frac{4 \sqrt{2} - 5}{24} = \pi a^3 \frac{15 - 8 \sqrt{2}}{12} = \pi R^3 \frac{15 \sqrt{2} - 16}{6}.$$

466. Площадь шаровой поверхности сегмента равна $S = 2\pi R \cdot h$, но из прямоугольного треугольника $2Rh = r^2$ и, следовательно,

$$S = \pi r^2,$$

т. е. не зависит от величины радиуса R (рис. 347).

467. Продолжим все четыре грани тетраэдра до пересечения с поверхностью сферы. Поверхность сферы разрежется этими четырьмя плоскостями на следующие куски: четыре «треугольных» куска, соответствующих граням тетраэдра, и шесть

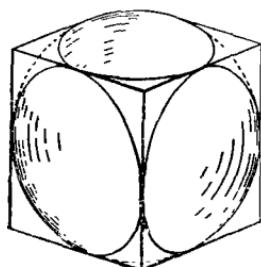


Рис. 345.

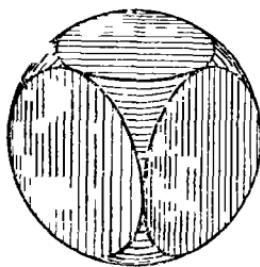


Рис. 346.

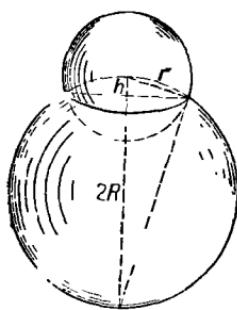


Рис. 347.

«двуугольных» кусков, соответствующих ребрам тетраэдра. Обозначая через x и y площади этих кусков, мы имеем, с одной стороны,

$$4x + 6y = \text{пов. сферы},$$

а с другой,

$$x + 3y = \text{пов. сегмента},$$

откуда

$$x = \frac{\text{пов. сферы} - 2 \cdot \text{пов. сегмента}}{2}.$$

Высота h сегмента равна разности между R и радиусом r сферы, вписанной в тетраэдр, вписанный в сферу R ;

$$r = \frac{1}{3}R$$

(см. задачу 438), и следовательно,

$$h = \frac{2}{3}R.$$

Мы имеем, следовательно,

$$x = \frac{2}{3}\pi R^2.$$

468. Вот то единственное положение, которое могут при этом иметь эти предметы (рис. 348). Это нетрудно доказать.

Пусть O (рис. 349) — центр одного из больших шаров, A — точка их касания, B — точка касания малых шаров (эти обе точки лежат, очевидно, на перпендикуляре к плоскости, вос-

ставленном в середине между точками прикосновения больших шаров к плоскости, которая есть вместе с тем и середина между точками прикосновения малых шаров к плоскости,

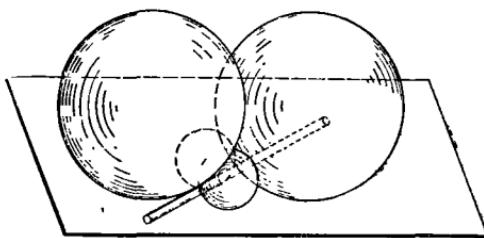


Рис. 348.

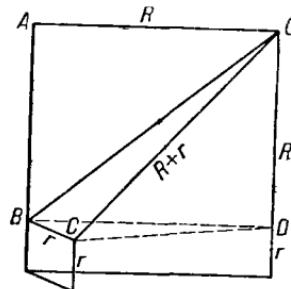


Рис. 349.

C — центр одного из малых шаров. Опустим из точки C перпендикуляр на OD и соединим B с D .

$$OC = R + r, \quad OD = R - r.$$

Из треугольников OBD и OBC мы имеем

$$OB^2 = R^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2 - r^2,$$

откуда для определения R мы имеем квадратное уравнение

$$R^2 - 4Rr + r^2 = 0,$$

т. е.

$$R = 2r \pm \sqrt{3r^2};$$

только одно значение корня годится, так как при

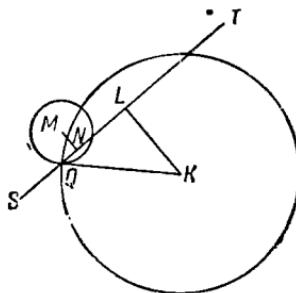


Рис. 350.

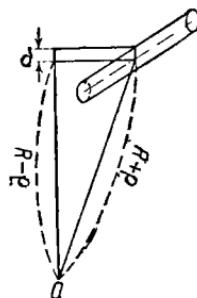


Рис. 351.

$R = 2r - \sqrt{3r^2}$ мы будем иметь $R < r$, что невозможно, и, следовательно,

$$R = r(2 + \sqrt{3}).$$

Пусть (рис. 350) теперь ST — проекция оси цилиндра, а M и K — проекции центров шаров на плоскость. Мы имеем (рис. 351)

$$KL^2 = (R + \rho)^2 - (R - \rho)^2 = 4R\rho,$$

аналогично

$$MN^2 = 4r\rho.$$

Из треугольников KLQ и QNM , которые подобны, получаем

$$KL : KQ = QN : QM$$

или

$$KL : KQ^2 = QN^2 : QM^2,$$

т. е.

$$4R\rho : R^2 = (r^2 - 4r\rho) : r^2,$$

откуда

$$\rho = \frac{rR}{4(r+R)}$$

или

$$\rho = r \frac{(3 + \sqrt{3})}{24}.$$

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Некоторые задачи из общей теории выпуклых многогранников

469. Рассмотрим бесконечную прямую AB . Части ее, не принадлежащие нашему многограннику, лежат по внешнюю сторону по отношению к плоскости хоть одной из его граней. Станем отрезать от бесконечной прямой AB части последовательно всеми плоскостями его граней. Очевидно, что в результате останется некоторый один отрезок $A'B'$, состоящий из точек, принадлежащих нашему многограннику. Точки A и B принадлежат, следовательно, отрезку $A'B'$, и, следовательно, все точки отрезка AB принадлежат многограннику. Предположим теперь, что многогранник не выпуклый, т. е. что он имеет хоть одну грань, которая при продолжении пересекает его. Пусть A — какая-нибудь внутренняя точка этой грани и около нее многогранник лежит по нижнюю сторону этой грани (мы предполагаем, что он так повернут, что грань эта горизонтальна); тогда, так как плоскость этой грани его пересекает, он имеет часть, лежащую по верхнюю сторону от плоскости этой грани. Пусть B — какая-нибудь точка этой части. Очевидно, что отрезок AB соединяет две точки нашего многогран-

ника, но не весь ему принадлежит; так например, наверно, лежит вне его некоторая часть этого отрезка, прилежащая к точке A .

470. Станем последовательно отрезать от секущей плоскости части всеми плоскостями граней нашего многогранника; очевидно, что останется выпуклый многоугольник, который и есть сечение нашего многогранника этой плоскостью.

471. В вершине многогранника сходится по крайней мере три грани, следовательно, число граней замкнутого многогранника по крайней мере равно четырем. У многогранника, у которого четыре грани, все они не могут сходиться в одной вершине; следовательно, все его углы трехгранные. Возьмем один из этих трехгранных углов, плоскость четвертой грани должна пересекать его ребра на конечных расстояниях от его вершины. Получается тетраэдр.

472. В многограннике с пятью гранями наивысшее наименование многогранного его угла 4 . Пусть имеется такой угол; тогда, как в предыдущей задаче, убеждаемся, что наш многогранник — четырехугольная пирамида. Если же все углы тройные, то возьмем один из них и рассмотрим четвертую и пятую грани. Через каждый из концов ребер рассматриваемого трехгранных угла OAB проходит только одна из этих граней, так как, по предположению, нет четырехгранных углов. Пусть, например через два из этих концов A и B проходит четвертая грань, а через третий C — пятая. Грань OAB тогда треугольная, а грани OAC и OBC — четырехугольные, причем четвертая и пятая грани пересекаются по ребру, соединяющему четвертые вершины граней OAC и OBC , и получается «треугольная призма», «основания» которой суть грань OAB и пятая грань.



Рис. 352.

473. Если число всех граней многогранника n , то наивысшее возможное наименование его граней $n-1$, что будет только, если он $n-1$ -угольная пирамида, а рассматриваемая грань — ее основание. Итак, в зависимости от n ограничены наименования всех граней многогранника, а следовательно, и число различных типов смежности его граней.

474. Возьмем любой многогранник, число вершин которого не меньше чем число граней (например куб — такой многогранник), и срежем все его вершины плоскостями (рис. 352) так, чтобы образовались маленькие новые грани, такие, которые бы не касались друг друга даже вершинами. Представим себе, что старые грани выкрашены белым, а новые черным. Покажем, что многогранник такого топологического типа не

может быть описан вокруг шара. Действительно, предположим противное и рассмотрим на всех гранях, как белых, так и черных, точки их касания к шару. Построим на всех этих гранях все треугольники, для которых вершинами будут эти точки, а основаниями те стороны этих граней, которые суть стороны черных граней. Тогда каждая черная грань вся разобьется на такие треугольники, а на всякой белой грани они займут только часть, образуя как бы крест или звезду, так как по предложению черные грани нигде не доходят друг до друга, и, следовательно, на каждой белой грани те ее стороны, по которым она смежна с черными гранями, идут через одну со сторонами, по которым она смежна с белыми гранями. Каждый из таких треугольников имеет себе парный, а именно: каждому такому треугольнику на белой грани соответствует тот черный, который имеет с ним общее основание. Два треугольника такой пары равны, так как, если провести две касательные плоскости к одному и тому же шару, то треугольники, основания которых представляют собою один и тот же отрезок прямой пересечения этих плоскостей, а вершины лежат в точках касания, одинаковы. Рассмотрим суммы углов при вершинах (лежащих в точках касания) во всех наших белых треугольниках и во всех черных. Эти суммы должны быть равны. А между тем сумма эта для черных равна 2π раз число черных граней, а эта же сумма для белых равна меньше чем 2π раз число белых граней, так как углы эти при точке касания белой грани, не налегая друг на друга, не покрывают всей плоскости вокруг этой точки. Но число белых граней само тоже меньше, чем число черных, и мы приходим к противоречию.

Замечание. Даже многогранников, получаемых таким срезанием, как легко показать (среди многогранников с данным числом граней), весьма много, но можно было провести все доказательство, предположив еще меньше, а именно, что на многограннике нашем как-либо можно выделить комплекс граней, друг до друга не доходящих, в котором не менее половины, всех граней многогранника.

475. Рассмотрим какую-нибудь сторону разбиваемого «большого» многоугольника; она состоит из одной или нескольких сторон прилегающих к ней «малых» многоугольников, на которые разбит «большой». Но каждый «малый» имеет центр симметрии и, следовательно, имеет сторону, равную и параллельную противоположной стороне его, прилежащей к рассматриваемой стороне «большого», она одновременно сторона другого прилегающего к ней «малого» (предположим, для простоты, что «малые» многоугольники смежны по целым сторонам, а не по их частям) и т. д. Мы убедимся так, что каждая из частей, на которые разбита рассматриваемая сторона

«большого», будет иметь соответствующую себе часть на противоположной стороне «большого». Рассматриваемый «большой» многоугольник имеет таким образом для каждой своей стороны противоположную ей равную (так как она составлена из таких же частей) и параллельную; отсюда легко следует, что он имеет центр симметрии, а именно в точке пересечения прямых, соединяющих накрест концы таких двух параллельных сторон.

476. Рассмотрим выпуклый многогранник, все грани которого имеют центры симметрии. Пусть α_1 — какое-нибудь его ребро и P_1 — одна из граней, сходящихся в этом ребре. Ввиду того, что она имеет центр симметрии, она имеет ребро α_2 , равное и параллельное и противоположное ребру α_1 . Пусть по ребру α_2 к грани P_1 прилегает грани P_2 . Ввиду того, что и грани P_2 имеет центр симметрии, она имеет ребро α_3 , равное и параллельное и противоположное ребру α_2 . Пусть по ребру α_3 к грани P_2 прилегает грани P_3 и т. д. Таким образом получается замкнутая «зона» граней, окружающая поясом весь многогранник. Замкнута эта зона потому, что если мы спроектируем весь многогранник параллельно ребру α_1 на некоторую плоскость, ему перпендикулярную, то грани P_1 , P_2 , P_3 и т. д. спроектируются в виде отрезков, так как они все параллельны направлению проекции, и отрезки эти, очевидно, будут последовательными сторонами того многоугольника, в виде которого на эту плоскость проектируется весь многогранник. Если же принимать во внимание и проекции отдельных граней многогранника, видимых с той стороны, например, с которой идет проектирующий луч, т. е. граней той «шапочки», которая с этой стороны покрывает зону, то получится „большой“ многоугольник, разбитый на ряд «малых», которые будут проекциями отдельных граней этой «шапочки». Но очевидно, что проекция многоугольника с центром симметрии есть опять многоугольник с центром симметрии, и следовательно, так как грани нашего многогранника, по предположению, все имеют центры симметрии, то и все эти «малые» многоугольники будут иметь центры симметрии. Применяя теперь результат, полученный в предыдущей задаче, мы видим, что рассматриваемый «большой» многоугольник тоже имеет центр симметрии. Итак, каждая проекция нашего многогранника вдоль его ребра имеет центр симметрии, т. е. каждой проекции грани P_k параллельно ее стороне соответствует параллельная ей проекция некоторой грани P_l , т. е. каждой грани P_k соответствует на многограннике некоторая грани P_l , ей параллельная и противоположная на многограннике. Следовательно, во всякой зоне граней, содержащих P_k , будет содержаться и P_l , т. е. для каждой стороны грани P_k есть равная и параллельная ей сторона у грани

P_k . Отсюда ясно, что грани P_k и P_l равны и параллельны. Так как, кроме того, грани P_k и P_l имеют центры симметрии, то они имеют общий центр симметрии O их совокупности, лежащий в пространстве посередине между их центрами. Переходя теперь от этих граней к соседним через симметричные по отношению к O их ребра и т. д., мы убедимся, что и сам многогранник имеет центр симметрии.

477. Теорема Эйлера. *Если поверхность шара разбита на N многоугольных областей с M сторонами и L вершинами, то $N - M + L \geq 2$. Если при этом ни один многоугольник не лежит внутри другого, то $N - M + L = 2$.* Докажем сначала это последнее утверждение. Выбросим одну область; N уменьшится на единицу, а M и L останутся без изменения, потому что все стороны и вершины выброшенной области принадлежат в то же время и другим областям. Раз внутри выброшенной области не было многоугольников, то оставшиеся многоугольники образуют один сплошной кусок, ограниченный многоугольником P . Если у нас осталось больше одной области, то возьмем на P вершину A многоугольника T , имеющего на P хоть одну сторону. A берем так, что от нее идет сторона внутрь (такая вершина имеется, так как иначе все многоугольники лежали бы внутри P). Пойдем от A внутрь нашего куска. Идя все время по сторонам многоугольника T , мы где-то впервые снова выйдем на границу P , в какой-то вершине P . Если дальше от B к A можно перейти только по сторонам многоугольника T , идя только по границе P , то значит линия AB отрезает от всего куска только одну область, ограниченную как раз многоугольником T . В противном случае она отделяет от нашего куска вместе с нею еще и другие области. Возьмем вершину A' , лежащую на P и принадлежащую одной из этих областей. Берем A' так, что от нее идет сторона внутрь. Чтобы выбранная область не лежала внутри куска, берем, как и раньше, вершину области, имеющей на P целую сторону. Исходя из A' , отрежем от нашего куска еще новую часть, и так дальше, до тех пор, пока не отрежем одну область, имеющую на P хоть одну сторону. Выбросим эту область: число M уменьшится на единицу; число N уменьшится на m , если выброшенная область имела на P m сторон; число L уменьшится на $m-f$, потому что мы выбросили только те вершины, которые разделяют выброшенные стороны (крайние вершины остаются). Следовательно, число $N - M + L$ не изменится. Повторяя эту операцию, мы дойдем наконец до того, что у нас останется один многоугольник; но у него число сторон равно числу вершин, так что, когда мы выбросим и этот многоугольник, число $N - M + L$ уменьшится на единицу и станет равным нулю, раз ничего больше не

осталось. Но $N - M + L$ уменьшалось на единицу только при выбрасывании самого первого и самого последнего многоугольника. Следовательно, $N - M + L = 2$.

Пусть теперь поверхность шара разбита на произвольные многоугольные области. Пусть внутри многоугольника Q лежит многоугольник R . Возьмем точку A на Q и точку B на R и соединим их новым ребром AB . Если A , скажем, не было вершиной Q , то число вершин увеличится на единицу, но зато и число сторон у Q увеличилось на единицу (точка A разделит одну сторону на две), так что на число $N - M + L$ окажет влияние только прибавление ребра AB . Проводя одно или два таких ребра (в зависимости от того, имели ли Q и R соединяющее их ребро или общую вершину, или нет), мы получим, что многоугольник R не будет лежать внутри другого многоугольника. При этом у нас появится одна новая область, так что число $N - M + L$ или не изменится, или уменьшится на единицу, если нам пришлось добавить два ребра. Но таким образом мы получим наконец, что ни один многоугольник не будет лежать внутри другого, а для такого разбиения $N - M + L = 2$, так что для нашего разбиения $N - M + L \geq 2$.

478. Теорема Коши. *Два выпуклых многогранника, одинаково составленных из равных граней, равны.* Возьмем многогранник и перенумеруем его грани I, II, III, \dots и стороны каждой грани $I_1, I_2, \dots, II_1, II_2, \dots$ Другой многогранник называется составленным из тех же граней I, II, III, \dots , если всякие две грани, имевшие общие стороны на первом многограннике (например, грани II и III имели общие стороны II_3 и III_1), имеют общие стороны на втором многограннике. Два таких выпуклых многогранника могли бы отличаться друг от друга двугранными углами между соседними гранями. Если все эти углы у одного многогранника те же, что и у другого, то многогранники равны, т. е. их можно совместить или просто путем движения, или взяв сперва многогранник, симметричный одному из них. Действительно, приложим один многогранник к другому так, чтобы грани I их совпали так, чтобы совпали их соответственные стороны. Тогда могло бы оказаться, что многогранники будут лежать по разные стороны плоскости этой грани. В этом случае отразим один многогранник в этой плоскости. Теперь оба многогранника лежат по одну сторону от этой плоскости. Пусть, например, по стороне I_1 к грани I прилегает грань II . Раз двугранные углы между гранями I и II равны и грани I обоих многогранников совпали, то совпадут и грани II . Переходя таким образом все к новым граням, убедимся, что все они совпали, так что многогранники равны. Таким образом для того, чтобы доказать нашу теорему, достаточно доказать, что у двух выпуклых многогранников,

одинаково составленных из равных граней, соответственные двугранные углы между соседними гранями должны быть равны. Возьмем два таких многогранника. Если соответственный двугранный угол на втором из них больше, чем на первом, то будем писать на ребре этого угла плюс, если он меньше, то — минус, а если они равны, то — нуль. Приняв это, докажем следующую лемму.

Число перемен знаков при обходе от ребра к ребру вокруг вершины $\geqslant 4$, или равно нулю, и тогда на всех ребрах стоит нуль. (Нули при подсчете перемен знаков просто не считаются.)

Опишем вокруг вершины A шар радиуса единицы. Плоскости граней, сходящихся в A , вырежут на нем выпуклый многоугольник. Стороны этого многоугольника измеряют углы на гранях с вершиной в A , а углы между сторонами равны двугранным углам между гранями. Поэтому вместо того, чтобы говорить о гранях и двугранных углах, мы можем говорить о выпуклых сферических многоугольниках. Поэтому нашу лемму можно формулировать так: если у двух выпуклых многоугольников стороны равны, а углы не равны, то число перемен знаков разностей между углами при обходе вокруг многоугольника $\geqslant 4$, или оно равно нулю, и тогда все углы равны.

1. Если в двух треугольниках стороны равны, а углы, заключенные между ними, не равны, то против большего угла лежит большая сторона. Эта теорема известна для плоских треугольников (она доказывается, например, в книге Киселева). Для того чтобы доказать ее для сферических треугольников, достаточно повторить ее доказательство для плоских, заменив слово «прямая» словом «дуга большого круга».

2. Если у двух выпуклых многоугольников все стороны, кроме одной AG , равны, а углы, кроме прилегающих к стороне AG , во втором многоугольнике больше (или меньше), чем в первом, то сторона a во втором многоугольнике больше (или меньше), чем в первом. (Для краткости мы говорим, что все «углы больше», когда хотя бы один из них больше, а другие равны. То же относится к слову «меньше».)

Возьмем первый многоугольник и начнем увеличивать (уменьшать) угол B так, чтобы он стал равным соответствующему углу во втором многоугольнике. Раз длины сторон и прочие углы при этом не меняются, то BG останется на месте, а AB будет поворачиваться так, что угол β в треугольнике ABC будет расти (убывать), а значит, в силу п. 1 будет расти (убывать) и сторона AG . Повторяя те же рассуждения последовательно для всех углов, докажем то, что нам нужно.

3. Если у двух выпуклых многоугольников все стороны равны, то углы в одном не могут быть все больше (или мень-

ше), чем в другом. Если бы так было, то по п. 2 хоть одна сторона в одном многоугольнике должна была бы быть больше (или меньше), чем в другом, а они равны.

4. Если у двух выпуклых многоугольников все стороны равны, а углы не равны (хотя бы не все), то число перемен знаков разностей углов при обходе вокруг многоугольника ≥ 4 . По п. 3 разности всех углов не могут быть все одного знака (нули не считаются). Число перемен знаков, если они есть, — четное число, потому что при обходе мы возвращаемся к прежнему знаку. Число их больше двух. Допустим, что мы имеем всего две перемены знаков. Соединим две вершины многоугольника диагонально так, что по одну сторону от нее все углы больше, а по другую меньше, чем в другом многоугольнике. Тогда, применяя теорему п. 2 сперва к одной части нашего многоугольника, а потом к другой, получим, что диагональ должна быть одновременно больше и меньше аналогичной диагонали в другом многоугольнике, а это абсурд. Следовательно, число перемен знаков больше двух, а раз оно четное, то оно ≥ 4 .

Теперь мы можем приступить к доказательству основной теоремы. Возьмем выпуклый многогранник, на ребрах которого по указанному нами принципу написаны плюсы, минусы и нули. Выбросим из рассмотрения все ребра, на которых стоят нули. Ни одно из оставшихся ребер не будет иметь свободного конца, так как к вершине, к которой подходит ненулевое ребро, подходят в силу леммы и другие ненулевые ребра. В результате получим разбиение поверхности многогранника на некоторое число N областей с M ребрами и L вершинами. При обходе от ребра к ребру вокруг вершины мы получаем не меньше четырех перемен знаков (вершины, в которых сходятся только ребра с нулями, у нас отброшены), так что при обходе вокруг L вершин число перемен знаков будет $\geq 4L$. Но это число перемен знаков можно считать и иначе, идя от ребра к ребру не вокруг вершин, а вокруг областей; получится, конечно, тоже самое, потому что ребра, соседние при обходе вокруг вершины, будут соседними и при обходе вокруг области. При обходе треугольника число перемен знаков не больше 2 (оно, конечно, четное), при обходе четырехугольника не больше 4, пятиугольника — тоже не больше 4 и т. д. Если у нас есть N_3 треугольников, N_4 четырехугольников и т. д., то число перемен знаков

$$\nu \leq 2N_3 + 4N_4 + 4N_5 + 6N_6 + \dots \quad (1)$$

с другой стороны, $\nu \geq 4L$. Но

$$N_3 + N_4 + N_5 + \dots = N, \quad 3N_3 + 4N_4 + 5N_5 + \dots = 2M$$

$(2M -$ потому что каждое ребро принадлежит двум областям и поэтому при подсчете, произведенном в левой части равенства, оно учитывается дважды), и по теореме Эйлера

$$N - M + L \geq 2.$$

Отсюда

$$4L \geq 4(M - N + 2) = 2(3N_3 + 4N_4 + 5N_5 + \dots) - \\ - 4(N_3 + N_4 + N_5 + \dots) + 8 = 8 + 2N_3 + 4N_4 + 6N_5 + \dots$$

Но

$$v \geq 4L \geq 8 + 2N_3 + 4N_4 + 6N_5 + \dots \quad (2)$$

Это неравенство противоречит неравенству (1). Следовательно, когда мы выбрасывали все ребра, на которых стояли нули, мы должны были выбросить все ребра, так что никакого разбиения на области не получилось. Следовательно, на всех ребрах должны стоять нули, т. е. все двугранные углы у обоих многогранников равны и равны сами многогранники.

Параллелоэдры

479. Пусть $1, 2, 3, 4, 5$ — ряд одинаковых (рис. 353) правильных шестиугольников, сложенных параллельными сторонами. Легко показать, что ровно такой же ряд $1', 2', 3', 4'$ можно приложить к этому первому ряду так, чтобы между ними не оставалось не покрытых ими частей плоскости. Прикладывая так дальнейшие ряды $1'', 2'', 3'', 4'', \dots$ мы покроем такими равными и параллельно расположеными шестиугольниками всю плоскость (так расположены ячейки в пчелиных сотах). Построим теперь на каждом шестиугольнике, как на основании, правильные шестиугольные призмы одинаковой высоты h . Легко видеть, что верхние основания этих призм будут все лежать в одной и той же плоскости, параллельной плоскости, в которой находятся их нижние основания, и находящейся от нее на расстоянии h , а боковые грани призм будут прилегать друг к другу, так что весь промежуок между указанными плоскостями будет заполнен призмами.

Если построить ровно такой же второй слой таких же призм и наложить на первый так, чтобы призмы верхнего слоя

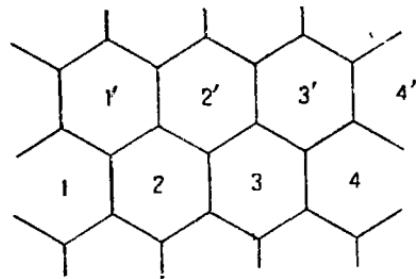


Рис. 353.

были параллельны призмам нижнего и т. д., то и получится заполнение всего пространства такими призмами в параллельном положении.

480. Разрежем додекаэдр задачи 328 плоскостью, проходящую через центр куба параллельно его основаниям; эта

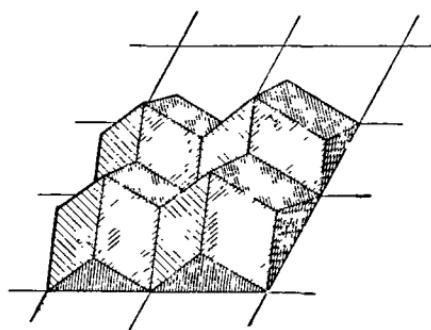


Рис. 354.

плоскость пройдет через вершины четырех ромбов и даст в сечении квадрат. Верхняя половина додекаэдра будет представлять собою нечто вроде пирамидальной крыши, ограниченной четырьмя половинами ромбов и четырьмя ромбами. Построим в некоторой плоскости P сетку квадратов, покрывающих всю эту плоскость, и поставим на каждый такой квадрат (рис. 354) такую крышу. (Четыре такие

крыши изображены на чертеже.) Так как вершины крыши A , B , C , D и т. д. проектируются в центры квадратов и лежат все на одной и той же высоте над плоскостью P , то они образуют опять совершенно такую же параллельную первой сетку квадратов в некоторой плоскости P' , параллельной плоскости P . (Один из таких квадратов намечен на чертеже пунктиром.) Под каждым из таких квадратов плоскости P' расположена выемка, образованная четырьмя крышами, поставленными на плоскость P , вершины которых A , B , C , D суть вершины соответствующего квадрата плоскости P' . Выемка эта O , A , B , C , D представляет собою как раз нижнюю половину нашего додекаэдра, в чем легко убедиться наложением. Вставив во все эти выемки додекаэдры, мы, очевидно, над плоскостью P' получим ровно такую же совокупность крыш, какая была построена над плоскостью P .

На этот слой додекаэдров можно наложить новый слой и т. д. Если так продолжать до бесконечности кверху и книзу, то все пространство заполнится такими додекаэдрами.

481. Если между верхней и нижней половиной додекаэдра предыдущей задачи вдвинуть правильную четырехугольную призму $OKLM$, $O_1K_1L_1M_1$, то получится додекаэдр, у которого четыре грани шестиугольные (рис. 355). Для доказательства заполнения ими пространства достаточно в доказательстве предыдущей задачи заменить плоскости P , P' и т. д. слоями квадратных призм $OKLM$, $O_1K_1L_1M_1$.

482. Если мы заполним такими кубами (рис. 356) все пространство так, чтобы кубы прилегали друг к другу плотно

целыми гранями, то четырнадцатигранники, каждый из которых находится внутри своего куба и занимает лишь часть его объема, заполнят еще не все пространство — останутся пустоты. Рассмотрим восемь больших кубов, сходящихся в одной

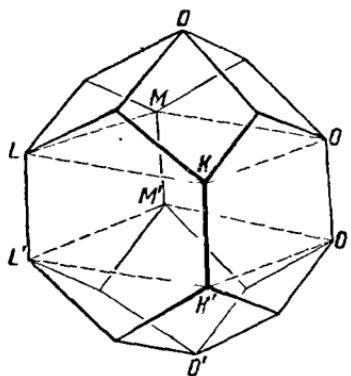


Рис. 355

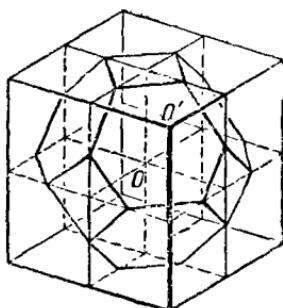


Рис. 356

вершине O' , и затем те восемь малых кубов (восьмушек больших), которые сходятся в этой же вершине O' . Половины этих восьми малых кубов (отрезанные по шестиугольным сечениям), не прилежащие к вершине O' , будут заняты восьмушками тех восьми 14-гранников, которые вписаны в восемь больших кубов. Половины же восьми малых кубов, прилежащие к вершине O' , образуют пустоту, представляющую как раз такой же 14-гранник, но вписанный в большой куб, составленный из этих восьми малых кубов. Точка O' будет центром этого большого куба и вписанного в него 14-гранника. Если все такие пустоты заполнить такими 14-гранниками, то все пространство окажется ими заполнено.

Дело обстоит совершенно так, как было бы в следующем планиметрическом построении: вся плоскость (рис. 357) разбита на большие квадраты $ABCD$; каждый из них разбит (пунктиром) на четыре малых квадрата. Из четырех половинок каждого из четырех малых квадратов, на которые разбит один большой квадрат, прилежащих к центру O большого квадрата, составлен многоугольник (там 14-гранник, здесь квадрат, заштрихованный). Квадраты эти (заштрихованные) не покрывают всей плоскости, между ними остаются пустоты. Если рассмотреть четыре больших квадрата, сходящихся в одной

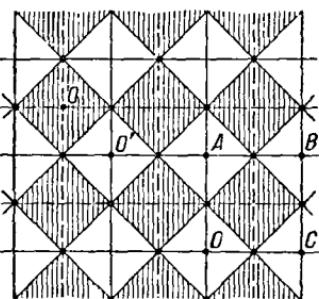


Рис. 357.

вершине O' , и четыре малых — сходящихся в этой вершине, то четыре половинки этих четырех малых составляют как раз «пустоту» с центром в O' ; она есть опять такой же квадрат (белый). Совокупность всех таких черных и белых квадратов заполняет всю плоскость.

Эту задачу можно решить способом, примененным в задаче 480, и наоборот, задачу 480 — способом, примененным в этой задаче.

483. Так как система точек E , нами рассматриваемая, предполагается трехмерной, то в ней есть по крайней мере четыре точки O, A, B, C , не лежащие в одной плоскости. Рассмотрим параллелепипед, получаемый «достроением» тетраэдра $OABC$ (см. задачу 337) до параллелепипеда, и ту параллелепипедальную систему T , которая получается в результате заполнения пространства этим параллелепипедом и равными этому параллелепипедами, смежными с ним и друг с другом по целым граням. Из свойства 1 следует, очевидно, что в нашу систему точек, кроме точек O, A, B, C , входят во всяком случае все точки (вершины параллелепипедов) этой параллелепипедальной системы. Если ни внутри, ни на границе параллелепипеда $OABC$, кроме точек в его вершинах, нет других точек E , то же самое имеет место и для других параллелепипедов системы T , так как в силу свойства 1, если была бы точка в каком-нибудь из этих параллелепипедов, то была бы точка и в параллелепипеде $OABC$. В таком случае система T исчерпывает все точки системы E , и, следовательно, наша система E — параллелепипедальная система. Предположим теперь, что, кроме точек E , в вершинах параллелепипеда $OABC$, внутри или на границе его, есть другие точки E . Заметим прежде всего следующее. Соединяя свойства 1 и 2, мы получаем, что вокруг каждой точки рассматриваемой нами системы точек можно описать шар радиуса r , такой, что в нем не будет других точек нашей системы, т. е., другими словами, что если вокруг всех точек нашей системы E описать шарики радиусами $\frac{r}{2}$, то эти шарики не будут входить друг в друга. Отсюда следует, что в параллелепипеде $OABC$ есть только ограниченное число точек системы E , так как иначе, если мы увеличим этот параллелепипед, отодвинув его грани во вне параллельно самим себе на расстояние $\frac{r}{2}$, то в этом увеличенном параллелепипеде было бы неограниченное число шариков радиуса $\frac{r}{2}$, которые не входят друг в друга, что невозможно. Нельзя в конечный ящик насыпать бесконечно много шариков. Итак, если в параллелепипеде $OABC$ внутри

или на границе, кроме точек в его вершинах, есть еще другие точки E , то число их ограничено. Пусть A' есть сама точка A , если на ребре OA нет других точек E , кроме точек в его концах, и ближайшая из его внутренних точек E к точке O , если такие точки есть. Пусть B' — сама точка B , если внутри или на границах параллелограмма $OA'B$ нет точек E , кроме точек E в его вершинах (на стороне его OA' и параллельной ей стороне точек E нет в силу выбора точки A'), и ближайшая к прямой OA' точка этого параллелограмма, если такие точки есть. Пусть C' — сама точка C , если внутри и на границе параллелепипеда $OA'B'C$ нет точек E , кроме точек E в его вершинах (на основании его $OA'B'$ и ему противоположном основании таких точек нет в силу выбора точек A' и B'), и ближайшая к плоскости $OA'B'$ точка E этого параллелепипеда, если такие точки есть. В силу выбора точек $A'B'C'$ очевидно, что внутри и на границе параллелепипеда $OA'B'C'$ нет точек E , кроме точек E , которые лежат во всех его вершинах, в силу того, что точки O, A', B', C' принадлежат E и в силу свойства 1. Система E , следовательно, совпадает с параллелепипедальной системой I' , построенной на параллелепипеде $O'A'B'C'$.

484. Пусть A, B, C — центры трех параллелоэдров. От параллелоэдра A можно дойти до параллелоэдра B , переходя через цепь параллелоэдров, попарно смежных по граням, так как параллелоэдры заполняют все пространство. Построим от параллелоэдра C такую же цепь параллелоэдров, т. е. которые последовательно касались бы друг друга по граням, соответственным тем, по которым касаются друг друга последовательные параллелоэдры цепи AB ; тогда ввиду равенства, параллельности всех параллелоэдров и того, что они касаются по целым граням, следует, что отрезок CD , где D — центр последнего параллелоэдра цепи, построенной от параллелоэдра C , равен и параллелен отрезку AB , и следовательно, для системы E центров параллелоэдров выполняется условие 1 предыдущей задачи. С другой стороны, ни к одному центру параллелоэдра не лежит центр никакого другого ближе, чем на некотором расстоянии r , которое равно, например, удвоенной длине перпендикуляра, опущенного из центра параллелоэдра на ту из его граней, которая ближе всего к его центру. Следовательно, удовлетворяется и условие 2.

485. Ввиду того, что сами параллелоэдры имеют центры симметрии и равны и параллельны, то совокупность любых двух параллелоэдров имеет центр симметрии, лежащей посередине между их центрами. Если эти параллелоэдры смежны по грани, то этот центр их совокупности, как легко видеть, лежит на этой грани и является ее центром.

486. Рассуждаем совершенно аналогично тому, как в задаче 476.

487. Рассуждаем аналогично тому, как в задаче 476.

488. Проведем от ребра ϵ во все стороны те плоскости, которые разделяют между собою все параллелоэдры разбиения пространства, которые сходятся в этом ребре. Очевидно, что проекции этих плоскостей будут сторонами многоугольников, являющихся проекциями этих параллелоэдров, что они в плоскости проекции окружают точку ϵ , являющуюся проекцией этого ребра, и что эти прямые, следовательно, разделяют между собою эти многоугольники, т. е. что многоугольники эти не налегают друг на друга.

489. Пусть A и B —два из этих многоугольников, смежных по стороне τ , исходящей из точки ϵ . Толщина такого многоугольника в направлении τ нигде не меньше, чем длина τ , так как многоугольник этот выпуклый и имеет центр симметрии. Сторона δ , по которой смежные два других C и D из этих многоугольников, облагающих точку ϵ (если предположить, что их всех больше трех), не может быть не параллельна τ (т. е. не быть продолжением τ), так как иначе тот из этих многоугольников C , D , для которого сторона δ была бы нижней (мы мыслим себе τ вертикальной, и что ϵ —ее нижний конец), имел бы в соседстве с точкой ϵ толщину нуль в направлении τ . В точке ϵ могут, следовательно, сходиться только три или четыре (рис. 358) таких многоугольника, и в случае, когда сходятся четыре, стороны, по которым они смежны, суть попарно продолжения одна другой.

490. В случае тройного схода в точке ϵ многоугольник A имеет три угла, равных и параллельных последовательным

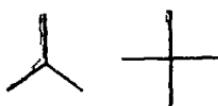


Рис. 358.

углам при точке ϵ , так как все сходящиеся в ней многоугольники (проекции параллелоэдров) равны и параллельны. Но A имеет центр симметрии, а следовательно, он имеет

и углы, симметричные этим трем углам.

Если мы еще заметим, что прямо-параллельные стороны (т. е. такие, которые параллельны и имеют многоугольник по одну и ту же сторону от себя) выпуклого многоугольника должны быть идентичны, мы убедимся, что многоугольник A есть шестиугольник с центром симметрии. В случае четверного схода мы аналогично убедимся, что многоугольник этот параллелограмм.

491. Будем образовывать этот слой таким образом. Будем пристраивать к исходному параллелоэдру все следующие и

следующие параллелоэдры по граням, параллельным некоторой грани зоны, и образуем так бесконечную в обе стороны «колонну» параллелоэдров, центры которых, очевидно, будут лежать на одной прямой, образуя на ней ряд равноудаленных точек. В проекции на плоскость P параллельно ребру ϵ этой зоны получится полоска (рис. 359) шестиугольников A (предполагая, что A — шестиугольник). Затем будем пристраивать по другим граням этой зоны ту аналогичную колонну параллелоэдров, которая будет проектироваться в виде смежной полоски шестиугольников. Вследствие существования центров у шестиугольников A выступающие углы этой полоски будут точно входить во входящие углы первой полоски, так что полоски эти, не налегая друг на друга, будут без зазоров прилегать друг к другу. Будем пристраивать так следующие и следующие такие колонны; очевидно, что образуется бесконечный во все стороны слой параллелоэдров, все центры которых лежат в одной плоскости и образуют в ней параллограмматическую систему точек. Очевидно также, что слой этот непроницаем, т. е. не имеет дырок в том смысле, что нельзя даже сколь угодно малый шарик пронести с одной его стороны на другую.

Если многоугольник A — параллелограмм, рассуждаем аналогично.

В обоих случаях все дело связано с тем, что эти многоугольники A (шестиугольники с центрами симметрии и параллелограммы) суть параллелоэдры плоскости (так называемые параллелогоны), заполняющие ее без налеганий в параллельном положении и соприкасаясь целыми сторонами.

492. Ввиду непроницаемости два слоя могли бы пересекаться только, если бы они имели общие параллелоэдры, но тогда эти слои можно было бы начать строить с параллелоэдра, общего им обоим, и мы убедились бы, что слои эти тождественны.

493. Действительно, ввиду того, что слои непроницаемы и не пересекаются, существует такой слой, первый, который принадлежит к слоям, лежащим над нулевым, и не отделен от него никаким другим слоем. По любой грани F верхней шапочки параллелоэдра нулевого слоя к этому параллелоэдру смежен некоторый параллелоэдр первого слоя, так как все параллелоэдры более высоких слоев отделены от нулевого слоя непроницаемым первым слоем.

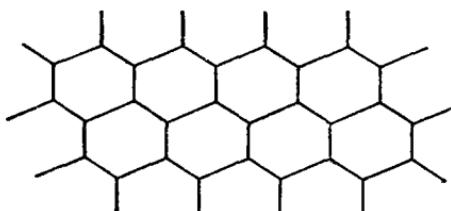


Рис. 359.

494. Из предыдущей задачи очевидно, что проекция верхних шапочек параллелоэдров первого слоя на плоскость P параллельно ребру ϵ получится, если на сетку многоугольников A , являющихся проекциями параллелоэдров нулевого слоя, наложить сетку многоугольников A , являющихся проекциями параллелоэдров первого слоя, т. е. сетку такую же и ей параллельную, но, вообще говоря, смещенную.

495. Легко видеть, что топологически разных проекций шапочки (рис. 360 и 361) всего 7, а именно:

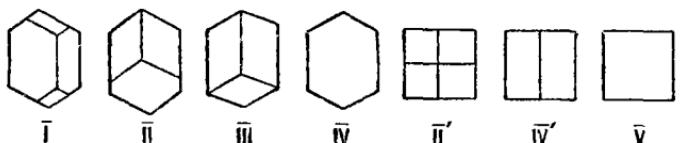


Рис. 360.

откуда получаются семь многогранников:

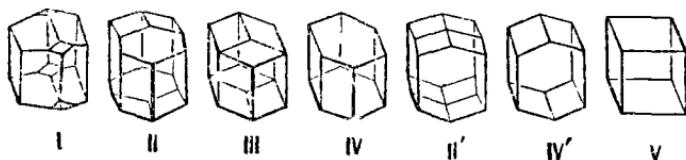


Рис. 361.

Из этих многогранников только пять топологически различны.

496. Пусть Π —такой многогранник. В силу результата задачи 476 он будет тогда иметь центр симметрии. Стремим выстраивать, подобно тому как в задаче 491, такие многогранники в колонны, а затем из таких колонн слой; мы убедимся тогда, что в силу топологического типа параллелоэдра и того, что он сам и его грани имеют центры симметрии, выпуклости последующей колонны будут в точности приходиться в выемки предыдущей, и получится непроницаемый слой, центры многогранников которого будут лежать в одной плоскости и составлять в ней параллелограмматическую систему. Будем теперь сверху на этот слой накладывать такие же слои друг на друга; тогда опять вследствие указанных свойств наших многогранников выпуклости последующего слоя будут в точности приходиться в выемки предыдущего, и пространство окажется все заполнено такими равными и параллельно расположенными многогранниками, смежными по целым граням.

Задачи на прямолинейные преобразования плоскости и перспективу

497. Пусть на плоскости P начерчена квадратная сетка (сетка равных квадратов). После преобразования, т. е. на плоскости P' (через P' мы обозначим новое расположение точек на плоскости P), она опять превратится в квадратную сетку, так как вследствие сохранения прямых прямыми и сохранения углов, квадраты ее превратятся в прямоугольники, а вследствие сохранения и углов между диагоналями ее квадратов эти прямоугольники будут квадратами, так как если прямоугольник не квадрат, то угол между его диагоналями не прямой. Так как исходная квадратная сетка могла быть взята сколь угодно густой, то очевидно, что всякая фигура плоскости P преобразуется на P' в фигуру, ей подобную, т. е. все линейные размеры будут в одно и то же число раз k больше (или меньше), чем соответственные линейные размеры фигуры на P , и угловые величины такие же.

498. Если квадратная сетка плоскости P' не параллельна сетке плоскости P , то можно, повернув ее на известный угол, сделать параллельной сетке на P . Взяв теперь две пары соответственных точек этих сеток A и A' , B и B' , мы получим на пересечении прямых AA' и BB' точку O такую, что, как это легко видеть из подобия треугольников, если C и C' — любые две соответственные точки сеток, то прямая CC' тоже проходит через точку O и мы имеем $OA:OA' = OB:OB' = OC:OC' = k$. O называется центром, а k — коэффициентом гомотетии.

499. Гомотетия просто увеличивает квадратную сетку на P в k раз, и следовательно, очевидно, где бы ни лежала на ней фигура, она претерпевает, если она расположена параллельно тому, как в первом положении, то же самое преобразование независимо от того, близко или далеко от центра гомотетии O она лежит.

500. Раз прямые остаются прямыми и параллельные параллельными, то квадратная сетка плоскости P пре-

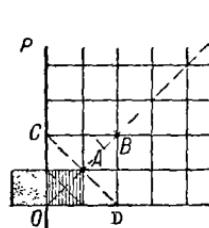


Рис. 362.

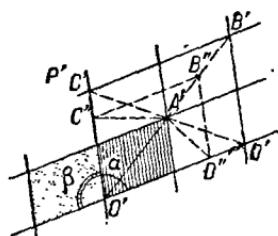


Рис. 363.

вращается на плоскости P' в сетку параллелограммов. Покажем, что все эти параллелограммы (рис. 362 и 363) будут одинаковы. Действительно, пусть заштрихованный квадрат сетки P преобразуется в заштрихованный параллелограмм на P' ;

тогда прямая OB превратится в прямую $O'B'$. Где на этой прямой будет лежать точка B' ? Очевидно, что так, что $A'B' = O'A'$, так как, если бы, например, она лежала ближе в точке B' , то диагональ CD преобразовалась бы на P' в ломаную $C''A'D''$ (аналогично — если дальше); так как прямые переходят в прямые, то это невозможно. Таким образом получается, что все четыре нарисованных параллелограмма одинаковы. Аналогично покажем, что и все к ним прилежащие одинаковы, и т. д.

Будем теперь постепенно поворачивать квадратную сетку в P вокруг точки O , ее изображение в P' будет тоже постепенно

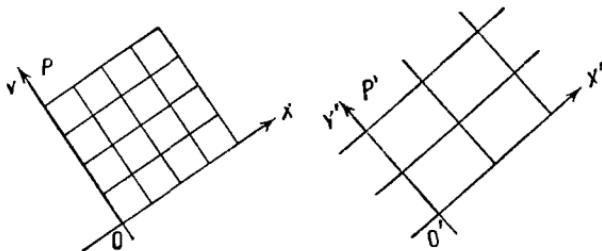


Рис. 364.

Рис. 365.

изменяться, оставаясь сеткой равных параллелограммов. Когда заштрихованный квадрат в P повернется в запунктирный, заштрихованный параллелограмм в P' превратится в запунктирный; при этом угол его α из острого превратится в тупой β ; следовательно, в силу непрерывности изменения угла α , будет такое положение сетки P , при котором этот угол будет прямой. Если, значит, в плоскости P взять разумно повернутую (рис. 364 и 365) квадратную сетку, то ее изображением в плоскости P' будет сетка равных прямоугольников. Таким образом рассматриваемое преобразование равномерно растягивает всю плоскость P перпендикулярно от прямой OX (или сжимает) и равномерно растягивает плоскость P перпендикулярно от перпендикулярной к ней прямой OY (или сжимает), причем коэффициенты растяжений k_1, k_2 , вообще говоря, различны. OX и OY называются осями рассматриваемого афинного преобразования. После указанных растяжений вся плоскость может быть еще передвинута как целое и отражена в прямой.

501. Такое равномерное растяжение плоскости от прямой превращает сетку равных квадратов в сетку равных прямоугольников, и следовательно, это растяжение совершенно одинаково влияет на все размеры двух одинаковых и параллельных между собою фигур, где бы они ни лежали на этой квадратной сетке.

502. Действительно, пусть A, B, C — три точки в P , не лежащие на одной прямой, и пусть после афинного преобразования P в P' эти точки получают положения A', B', C' . Построим на A, B, C параллелограмм $ABCD$. Тогда точка D' , соответственная D на P' , будет в четвертой вершине параллелограмма, построенного на A', B', C' . Сетка равных параллелограммов $ABCD$ на P превращается, что можно показать, как в задаче 500, на P' в сетку равных параллелограммов $A'B'C'D'$, и следовательно, положением всякой точки M на P будет определено и ее положение на P' .

503. Пусть имеется (рис. 366) на плоскости P любой выпуклый четырехугольник. Проведем противоположные стороны этого четырехугольника до взаимного пересечения в точках A и B (четырехугольник, нами рассматриваемый, предполагается произвольным, т. е. что его противоположные стороны попарно не параллельны; если в одной или обеих парах они были бы параллельны, мы бы это рассматривали

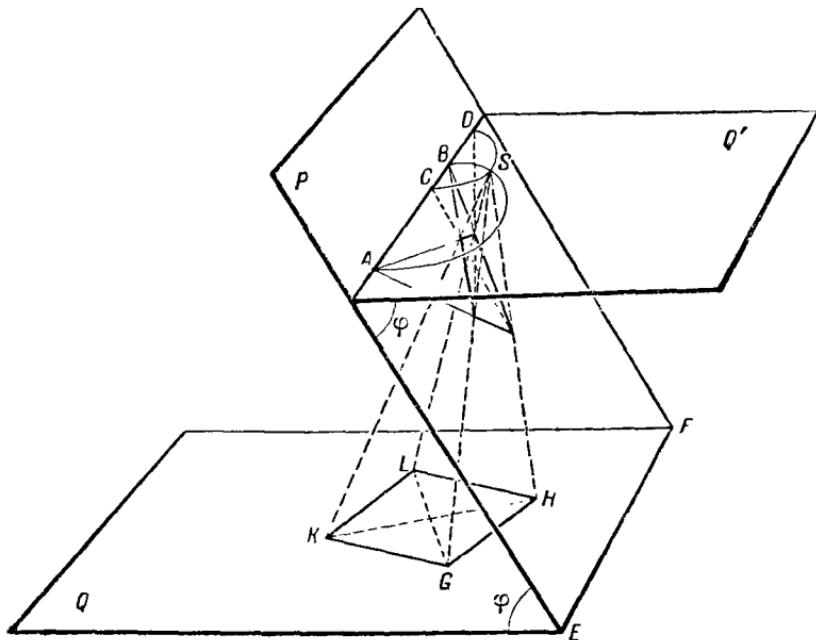


Рис. 366.

как предельный случай). Рассмотрим также точки C и D , в которых продолжения диагоналей нашего четырехугольника пересекают прямую AB (то же замечание надо сделать о случае, когда одна из этих точек уходит на бесконечность).

Проведем через прямую AB плоскость Q' под любым углом φ к плоскости P и какую-нибудь плоскость Q , параллельную плоскости Q' . Начертим в плоскости Q' две полуокружности, опирающиеся на AB и на CD как на диаметры, и пусть они пересекутся в точке S ; тогда, проектируя из точки S наш четырехугольник с плоскости P на плоскость Q , мы получим в плоскости Q квадрат. Действительно, стороны его GH и KL проектируются плоскостями, проходящими через прямую SA , лежащую в плоскости Q' , параллельной плоскости Q , и следовательно, они параллельны SA ; стороны же GK и HL аналогично параллельны SB , но угол ASB вписанный, опирающийся на диаметр, т. е. прямой. Таким образом $GHKL$ прямоугольник. Аналогично убеждаемся, что диагонали его параллельны SC и SD , следовательно, тоже взаимно-перпендикулярны. Но если у прямоугольника диагонали взаимно-перпендикулярны, то он — квадрат.

504. Пусть A, B, C, D — четыре точки на плоскости P и $A'B'C'D'$ — те точки плоскости P' , куда перешли эти точки в результате рассматриваемой коллинеации (рис. 367 и 368)

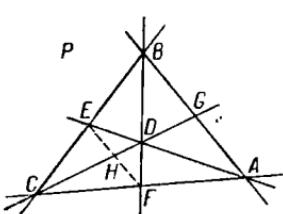


Рис. 367.

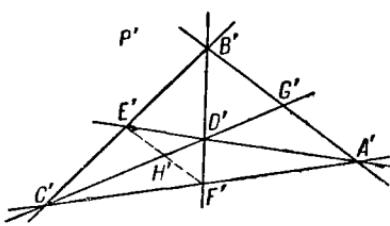


Рис. 368.

В таком случае точки E, F, G , очевидно, перейдут в точки E', F', G' , так как любая прямая, проходящая через две точки плоскости P , преобразуется в прямую плоскости P' , проходящую через те две точки плоскости P' , в которые эти точки преобразовались, и точка пересечения двух прямых, конечно, переходит в точку пересечения тех прямых, в которые эти прямые преобразовались. Проводя прямые на P через так новополученные точки, мы будем получать все новые точки пересечения, например точку H и т. д., относительно которых мы тоже будем знать, в какие они точки преобразуются, если будем проводить соответственные прямые на P' . Получаемая так сетка прямых называется сеткой Мебиуса (см. *Möbius, Der barizentrische Kalkül*, 1829). Если бы показать, что получаемые так все новые точки пересечения густо покроют всю плоскость P и аналогично плоскость P' , то все и было бы доказано, так как тогда вследствие пред-

полагаемой непрерывности преобразования, т. е. что, вообще говоря, бесконечно близкие точки переходят в бесконечно близкие, окажется, что если мы знаем, куда перешли точки

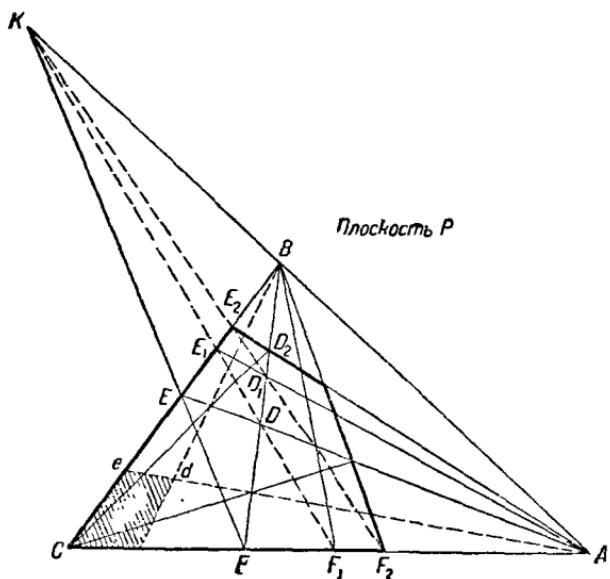


Рис. 369.

A, B, C, D , то мы знаем и куда переходит любая точка M плоскости P . Дело в том,

если даже точка M не будет сама одной из точек пересечения, то во всяком случае будет сколь угодно много точек пересечения сколь угодно к ней близких, а об этих точках мы будем знать, куда они переходят.

Рассмотрим перспективную проекцию плоскости P на плоскость Q , подобную рассмотренной в предыдущей задаче, при которой четырехугольник $CEDF$ сетки Мебиуса (рис. 369) перейдет в квадрат $C'E'D'F'$ (рис. 370) на плоскости Q . При этом точки B и A и вообще вся прямая AB , а следовательно, и точки пересечения ее K с диагональю EF сетки Мебиуса, уйдут на бесконечность.

Прямые, пересекающие прямую EF плоскости P в точке K , превратятся вследствие этого на плоскости Q в прямые, парал-

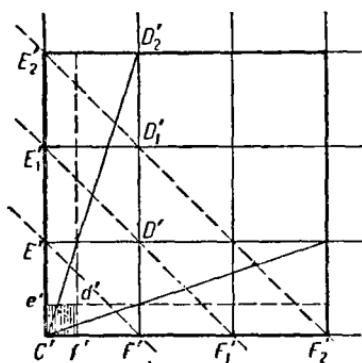
Плоскость Q 

Рис. 370.

лельные прямой $E'F'$, прямые исходящие на плоскости P из точки B — в прямые, параллельные прямой $C'E'$, а исходящие из точки A , — в прямые, параллельные прямой $C'F'$. На плоскости Q , начиная с четырех прямых, являющихся сторонами квадрата $C'E'D'F'$, можно построить постепенно все прямые квадратной сетки с квадратом $C'E'D'F'$, как основным, если поступать так: провести через точку D' диагональ, параллельную диагонали $E'F'$, и так получить точки E'_1 и F'_1 ; затем через эти точки провести прямые, параллельные $C'F'$ и $C'E'$; через точку D'_1 провести диагональ, параллельную $E'F'$, и там получить точки E'_2 и F'_2 , затем через эти точки провести прямые, параллельные $C'F'$ и $C'E'$, и т. д. Параллельно с этим построением на плоскости Q производим аналогичное построение на плоскости P , заменяя только, конечно, проведение прямых, параллельных прямым $E'F'$, $C'F'$ и $C'E'$, соответственно проведением прямых, проходящих через точки K , A и B .

Проделав затем на Q и соответственно на P построение, указанное пунктиром, можно получить на Q более мелкий квадрат $C'e'd'f'$ и затем соответственно более густую квадратную сетку, и параллельно более густую сетку P и т. д.

Итак, точки пересечения прямых сетки Мебиуса при неограниченном продолжении ее построения густо покроют плоскость P и соответственно плоскость P' . Отсюда следует, как мы это уже указали, что самая произвольная коллинеация вполне определяется тем, куда перешли четыре точки по три, не лежащие на одной прямой.

505. Пусть имеется некоторая коллинеация, преобразующая плоскость P в плоскость P' . Рассмотрим на плоскости P' некоторый квадрат; он будет получен при помощи рассматриваемой коллинеации из некоторого четырехугольника плоскости P . В задаче 503 было показано, что всякий четырехугольник может быть спроектирован перспективой в квадрат (любой величины, так как плоскость Q можно было взять на любом расстоянии от точки S). Рассмотрим ту перспективу, при помощи которой рассматриваемый четырехугольник плоскости P будет проектироваться в рассмотренный квадрат плоскости P' . При перспективной проекции прямые преобразуются в прямые, т. е. перспектива есть коллинеация. Итак, рассмотренная сейчас перспектива есть коллинеация, преобразующая четыре вершины нашего четырехугольника плоскости P в четыре вершины нашего квадрата плоскости P' , но рассматриваемая нами коллинеация преобразует те же четыре точки плоскости P в эти же четыре точки плоскости P' , и следовательно, она и есть эта перспектива.

506. Геометрическое место в плоскости точек, из которых данный отрезок на этой плоскости виден под данным углом,

есть одна из двух дуг некоторой окружности, для которой этот отрезок есть хорда; следовательно, геометрическое место таких точек в пространстве есть поверхность вращения, получаемая, если эту дугу вращать в пространстве вокруг этого отрезка как оси. Оказывается, что три такие поверхности, построенные для каждой из сторон основания пирамиды, соответственно углу при вершине пирамиды той ее боковой грани, которая из этой стороны основания исходит, если их подробно рассмотреть, вообще говоря, пересекаются в четырех разных точках (этот результат очень важен для аэро-съемки).

О Г И З
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
«ГОСТЕХИЗДАТ»

Москва, Орликов пер., 3

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ:

- Берман Г. Н., Число и наука о нём. 164 стр., цена 2 р. 50 к.
Берман Г. Н., Циклоида. 116 стр., цена 2 р.
Бронштейн И. Н. и Семеняев К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. 556 стр., цена 27 р.
Выгодский М. Я., Справочник по элементарной математике. 280 стр., цена 7 р. 50 к.
Выгодский М. Я., Краткий учебник высшей математики. Пособие для самообразования. 479 стр., цена 11 р. 50 к.
Зетель С. И., Задачи на максимум и минимум. 224 стр., цена 4 р.
Каган В. Ф., Великий русский учёный Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке. 84 стр., цена 1 р. 50 к.
Хохлов А. И., Карманные математические таблицы. 209 стр., цена 7 р. 85 к.

КНИГИ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ:

- Моденов П. С. и Невяжский Г. Л., Курс высшей математики. 560 стр., цена 17 р.
Перепёлкин Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. I. Геометрия на плоскости. 343 стр., цена 8 р. 20 к.

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

- Перепёлкин Д. И., Курс элементарной геометрии, ч. II. Геометрия в пространстве.