А. А. ДЕТЛАФ, Б. М. ЯВОРСКИЙ,
Л. Б. МИЛКОВСКАЯ

КУРС ФИЗИКИ

МЕХАНИКА. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Издание четвертое, переработанное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов втузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1973 г.

531+530 1/3
Д 38
УДК 531+539. 1+536. 7(075)

Детлаф А. А. и др.
Д 38 Курс физики. Изд. 4-е, перераб Учеб пособие для втузов М., «Высшая школа», 1973.
384 с. с илл.

Перед загл. авт.: А. А. Детлаф, Б. М. Яворский, Л. Б. Милковская.

Настоящая книга является переработанным изданием первого тома трехтомного учебника по физике для студентов высших технических учебных заведений, неоднократно издававшегося в Советском Союзе и за рубежом.

В результате переработки было уточнено и расширено изложение ряда вопросов механики, молекулярной физики и термодинамики.

В своей работе авторы основывались на опыте использования этого учебника в различных вузах, а также имели в виду происходящую в настоящее время перестройку преподавания физики и математики в средней школе.

Д $\frac{0231—265}{001(01)—73}$ 56—73 531+530 1/3

Рецензент: зав. кафедрой физики МТИПП
проф., д. т. н. В. В. Красников

© Издательство «Высшая школа», 1973 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к четвертому изданию 6
Из предисловия ко второму изданию 6
Введение 8

Часть I
МЕХАНИКА

Глава I. **Кинематика** 11
§ 1.1. Предварительные понятия 11
§ 1.2. Скорость 15
§ 1.3. Ускорение 18
§ 1.4. Простейшие виды движения материальной точки . . . 22
§ 1.5. Кинематика абсолютно твердого тела 23
Вопросы для повторения 28
Примеры решения задач 28
Глава II. **Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела** 32
§ 2.1. Первый закон Ньютона 32
§ 2.2. Сила 34
§ 2.3. Масса. Второй закон Ньютона 37
§ 2.4. Третий закон Ньютона. Движение центра инерции . . 43
§ 2.5. Закон сохранения импульса 49
§ 2.6. Механический принцип относительности 52
Вопросы для повторения 53
Примеры решения задач 54
Глава III. **Энергия и работа** 56
§ 3.1. Энергия, работа и мощность 56
§ 3.2. Энергия кинетическая и потенциальная 60
§ 3.3. Закон сохранения и превращения энергии в механике . . 65
Вопросы для повторения 70
Примеры решения задач 70
Глава IV. **Динамика вращательного движения твердого тела** . . 73
§ 4.1. Основной закон динамики вращательного движения . . 73
§ 4.2. Кинетическая энергия вращающегося тела 80
§ 4.3. Закон сохранения момента импульса 82
Вопросы для повторения 85
Примеры решения задач 86
Глава V. **Силы упругости и трения** 89
§ 5.1. Категории и виды сил 89
§ 5.2. Понятие об основных видах упругих деформаций . . . 89
§ 5.3. Виды трения 95
§ 5.4. Статическое трение 96
§ 5.5. Кинематическое трение 97

Вопросы для повторения 99
Примеры решения задач 100
Глава VI. **Всемирное тяготение. Движение в поле центральных сил** 101
§ 6.1. Закон всемирного тяготения 101
§ 6.2. Поле тяготения 106
§ 6.3. Движение в центральном силовом поле 114
§ 6.4. Проблема космических полетов. Космические скорости . 119
§ 6.5. Столкновение двух частиц, взаимодействующих по закону центральных сил 124
Вопросы для повторения 129
Примеры решения задач 129
Глава VII. **Движение в неинерциальных системах** отсчета . . . 132
§ 7.1. Кинематика относительного движения 132
§ 7.2. Силы инерции 135
Вопросы для повторения 144
Примеры решения задач 144
Глава VIII. **Колебательное движение** 146
§ 8.1 Гармоническое колебательное движение 146
§ 8.2. Динамика гармонических колебаний 152
§ 8.3 Сложение гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой 157
§ 8.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний . . . 161
§ 8.5. Затухающие колебания 163
§ 8.6. Вынужденные колебания 167
Вопросы для повторения 171
Примеры решения задач 172

Часть II

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Глава IX. **Идеальные газы** 175
§ 9.1 Введение 175
§ 9.2. Законы идеальных газов 179
Вопросы для повторения 184
Примеры решения задач 184
Глава X. **Первый закон термодинамики** 186
§ 10.1. Внутренняя энергия системы 186
§ 10.2. Теплота и работа 187
§ 10.3. Первый закон термодинамики 190
§ 10.4. Графическое изображение термодинамических процессов и работы 192
§ 10.5. Теплоемкость вещества. Изопроцессы идеального газа . 194
Вопросы для повторения 204
Примеры решения задач 204
Глава XI. **Кинетическая теория газов** 207
§ 11.1. Основное уравнение кинетической теории газов . . . 207
§ 11.2. Закон распределения молекул по скоростям 211
§ 11.3. Барометрическая формула. Опыт Перрена 215
§ 11.4. Длина свободного пробега молекул 219
§ 11.5. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы 222
§ 11.6. Теория теплоемкостей газов 227
§ 11.7. Явления переноса в газах 231
§ 11.8. Закономерности и коэффициенты явлений переноса . . 233
§ 11.9. Понятие о свойствах разреженных газов 240
Вопросы для повторения 244
Примеры решения задач 245

Глава XII **Второй закон термодинамики** 248
§ 12.1. Круговые процессы. Цикл Карно 248
§ 12.2. Обратимые и необратимые процессы 252
§ 12.3. Второй закон термодинамики 254
§ 12.4. Энтропия и свободная энергия 257
§ 12.5. Статистическое истолкование второго закона термодинамики 263
§ 12.6. Флуктуации 266
§ 12.7. Броуновское движение 270
Вопросы для повторения 271
Примеры решения задач 271
Глава XIII. **Реальные газы и пары** 274
§ 13.1. Силы межмолекулярного взаимодействия в газах . . . 274
§ 13.2. Уравнение Ван-дер-Ваальса 279
§ 13.3. Изотермы реальных газов. Понятие о фазовых переходах 284
§ 13.4. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля—Томсона 288
§ 13.5. Сжижение газов и получение низких температур . . . 291
§ 13.6 Сверхтекучесть гелия 293
Вопросы для повторения 296
Примеры решения задач 296
Глава XIV **Жидкости** 298
§ 14.1. Строение и некоторые свойства жидкостей 298
§ 14.2. Дырочная теория жидкого состояния 301
§ 14.3. Явления диффузии и внутреннего трения в жидкостях . 303
§ 14.4 Поверхностное натяжение жидкостей 306
§ 14.5 Поверхностно-активные вещества. Адсорбция . 309
§ 14.6 Смачивание и капиллярные явления . . 311
§ 14.7 Давление насыщенных паров над искривленной поверхностью жидкости 317
§ 14.8 Кипение жидкостей 319
Вопросы для повторения 321
Примеры решения задач 321
Глава XV **Твердые тела** 324
§ 15.1 Строение твердых тел 324
§ 15.2 Тепловое расширение твердых тел 326
§ 15.3 Теплопроводность твердых тел 330
§ 15.4 Теплоемкость твердых тел 332
§ 15.5 Фазовые превращения твердых тел 338
Вопросы для повторения 345
Глава XVI. **Механика жидкостей и газов** 346
§ 16.1. Течение жидкостей и газов 346
§ 16.2. Уравнение неразрывности и уравнение Бернулли . . 348
§ 16.3. Течение вязких жидкостей в трубах 353
§ 16.4. Движение тел в жидкостях и газах 358
§ 16.5. Движение сжимаемой жидкости 362
Вопросы для повторения 366
Примеры решения задач 366

Приложение

СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Измерение физических величин 368
§ 2. Основные единицы механических систем единиц . . . 369
§ 3. Производные единицы измерения 370
§ 4. Единицы измерения термодинамических величин 370
§ 5. Формулы размерностей 371
Предметный указатель 377

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке к 4-му изданию книга подверглась существенной переработке по сравнению с предыдущим изданием, вышедшим в 1965 г. Это было сделано в связи с перестройкой содержания и научного уровня физико-математической подготовки в средней школе, осуществляемой в настоящее время. Кроме того, был учтен опыт использования книги в различных вузах. Особенно значительные изменения были внесены в главы I, II, III, IX и X. Вся переработка первого тома осуществлена А. А. Детлафом.

Авторы благодарят рецензента книги проф. Красникова В. В., сделавшего ряд полезных указаний.

Авторы будут признательны за все замечания и советы, необходимые для дальнейшей работы над книгой, и просят направлять их на кафедру физики Московского Энергетического института по адресу: 111250, Москва, Е-250, Красноказарменная ул., д. 14.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первый том («Механика. Основы молекулярной физики и термодинамики») трехтомного «Курса физики» для студентов высших технических учебных заведений является 2-м переработанным и дополненным изданием I тома «Курса лекций по физике» (изд-во «Советская наука», 1958 г.). Он написан в соответствии с программой по физике для втузов, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

В связи с введением с 1 января 1963 года Международной системы единиц (СИ) в качестве предпочтительной во всех областях науки и техники курс написан в этой системе. Содержание первого тома примерно соответствует тому курсу, который читается во втузах.

При отборе материала авторы старались исходить из тех задач и целей, которые стоят перед курсом физики во втузе, а также из «удельного веса» соответствующих разделов в современной физике.

В конце каждой главы помещены примеры решения задач и вопросы для повторения, цель которых — помочь студенту закрепить полученные им теоретические сведения и научиться применять их при решении задач. Число этих примеров и вопросов по необходимости ограничено общим объемом каждой части курса.

Главы I—III, V и VIII написаны А. А. Детлафом и Л. Б. Милковской, главы IX—XV — А. А. Детлафом и Б. М. Яворским, глава

XVI — А. А. Детлафом и Г. П. Сергеевым, главы IV, VI и VII написаны А. А. Детлафом, Приложение и § 11.3 — Л. Б. Милковской, примеры решения задач — Г. П. Сергеевым. В написании главы XIV принимала участие Н. А. Богуславская.

При подготовке второго издания книги авторы использовали советы и замечания, содержащиеся в рецензиях проф. Брюхатова Н. Л. и доц. Балога И. И. («Вестник высшей школы», № 12, 1961), а также высказанные рядом других товарищей. Всем этим товарищам, способствовавшим улучшению книги, авторы выражают глубокую благодарность.

ВВЕДЕНИЕ

1. Предметом физики является изучение простейших и в то же время наиболее общих форм движения материи. При этом под материей понимается объективная реальность, существующая независимо от человеческого сознания и отображаемая им. «Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от них»[1]. Вся история физики, как и других естественных наук (химии, астрономии, биологии и др.), неопровержимо доказывает материальность мира, объективность и познаваемость законов его развития.

2. Физика теснейшим образом связана с философией Крупнейшие открытия в области физики, такие, как законы сохранения в механике, закон сохранения и превращения энергии, второй закон термодинамики и др., всегда являлись ареной острой борьбы между материализмом и идеализмом. В начале нашего столетия, в связи с потоком открытий современной физики, эта борьба стала особенно ожесточенной Идеалистически настроенные физики и философы пытались и пытаются поныне использовать конкретные достижения физики, ломку установившихся физических теорий и представлений для «ниспровержения» материализма. Как известно, еще в 1908 г. В. И. Ленин в своем выдающемся произведении «Материализм и эмпириокритицизм» посвятил специальную главу кризису в физике и показал, что этот кризис вызван неправильным философским истолкованием величайших достижений современной физики. Верные философские выводы из научных открытий в области физики всегда подтверждали и подтверждают основные положения диалектического материализма. Поэтому изучение этих открытий и их философское обобщение играют важную роль в формировании подлинно научного мировоззрения.

3. Последние 100 лет внесли существенные изменения в положение физики среди других наук о природе. В этот период физика развивалась такими темпами и достигла таких результатов, каких не знала ни одна из других естественных наук за всю историю своего существования.

---

[1] В И Ленин. Соч., т. 18, стр 131.

Во второй половине XIX в. была создана теория электромагнитного поля, открыты и изучены электромагнитные волны. На этой базе началось бурное развитие радиотехники. Начало XX столетия ознаменовалось созданием теории относительности, которая стала ведущей теорией движений со скоростями, близкими к скорости света, и явилась основой методов расчета ускорителей заряженных частиц, применяемых в современной ядерной технике. В двадцатых годах нашего века возникла и с поразительной быстротой стала развиваться квантовая механика, позволившая глубоко проникнуть в тайны внутреннего строения ядер и электронных оболочек атомов.

Исключительные по своей значимости новые методы экспериментальных физических исследований позволили изучить и практически осуществить различные ядерные превращения. Искусственная радиоактивность стала основой метода меченых атомов, широко применяемого в различных отраслях производства, в биологии и медицине.

Быстро развилась физика полупроводников, почти немедленно получившая практическое приложение в технике полупроводниковых устройств и приборов. Даже простой перечень выдающихся достижений физики, свидетелями которых мы являемся, занял бы слишком много времени. Однако в этом нет необходимости тем более, что только систематическое изучение курса физики позволяет понять смысл и значение этих достижений.

4. Известно, что развитие науки и техники определяется экономическими потребностями общества. Технический уровень производства в значительной степени зависит от состояния науки История развития физики и техники показывает, какое большое значение имели открытия в физике для создания и развития новых отраслей техники. Физика явилась фундаментом, на котором выросли такие новые области техники как электро- и радиотехника, электронная и вычислительная техника, приборостроение, ядерная техника и др. Физики вооружают промышленность принципиально новыми приборами и установками, создают основы новых, более совершенных методов производства

В свою очередь техника оказывала и оказывает большое влияние на прогресс физики. Известно, что именно технические потребности общества привели в свое время к развитию механики, необходимой для строительства различных сооружений. Задача создания наиболее экономичных тепловых двигателей вызвала быстрое развитие термодинамики. Построение промышленных электрических генераторов и двигателей потребовало развития теории намагничивания железа. Подобных примеров можно привести очень много.

Развитие техники оказывает огромное влияние на совершенствование экспериментальных методов физических исследований, позволяет применять новые, более точные приборы и установки (электронные микроскопы, автоматические счетчики заряженных частиц, масс-спектрографы, полупроводниковые фото- и термоэлементы и т. д.).

5. Одним из условий выполнения решений XXIV съезда КПСС по созданию материально-технической базы коммунизма в нашей

стране является внедрение в производство новейших достижений науки и в особенности физики. Оценивая роль физики, С. И. Вавилов писал: «Физика в целом — одно из самых замечательных достижений в развитии человеческого общества. Влияние сознательного применения физики в современной фазе истории чрезвычайно велико. Несомненно, оно приобретает исключительное значение в том громадном историческом сознательном процессе развития общества на пути к коммунизму, в котором мы, советские люди, участвуем»[1].

Если в прошлом между открытием нового физического явления или области явлений и их практическим использованием проходили многие десятилетия, то современное состояние физики и техники характеризуется резким сокращением этого времени. Так, например, в 1939 г. было открыто явление деления ядер урана под воздействием нейтронной бомбардировки, сопровождающееся выбросом вторичных нейтронов, а уже в 1954 г. в Советском Союзе была пущена в эксплуатацию первая в мире промышленная электростанция, работающая на энергии, выделяющейся в результате расщепления урана.

Советская наука в исключительно короткие сроки добилась огромных успехов в таких решающих направлениях развития естествознания, как освоение космоса, изучение строения элементарных частиц и свойств высокомолекулярных соединений и многих других.

6. Современный этап развития всех естественных наук характеризуется особенно интенсивным развитием «пограничных» наук, возникающих на «стыке» различных областей знаний (радиоастрономия, биофизика и др.).

Величайшим достижением совместных усилий различных отраслей науки и техники явились полеты человека в космос, осуществленные впервые в нашей стране в 1961 г. Эти полеты являются предвестниками будущих межпланетных путешествий.

7. Из приведенной выше краткой характеристики физики и ее связи с производством ясна та роль, которую играет курс общей физики в высшей технической школе. Не претендуя на полноту, роль курса физики во втузе можно сформулировать следующим образом:

а) изучение физики имеет большое значение для формирования диалектико-материалистических представлений о явлениях, происходящих в природе, т. е. для выработки научного мировоззрения;

б) физика является базовой дисциплиной для большого числа общеинженерных и специальных дисциплин. Ее законы и методы исследования широко применяются в курсах сопротивления материалов, электротехники, теплотехники, в различных технологических курсах и др.;

в) пути развития любой отрасли современного производства весьма тесно переплетаются с физикой. Поэтому инженер любого профиля должен владеть физикой в такой степени, чтобы быть в состоянии применять достижения физики в своем производстве.

[1] С. И. Вавилов. Ленин и философские проблемы современной физики. Сборник статей «Великая сила идей ленинизма» Госполитиздат, 1950, стр. 175

Часть I
МЕХАНИКА

Глава I
КИНЕМАТИКА

§ 1.1. Предварительные понятия

1. **Механикой** называют раздел физики, посвященный изучению закономерностей простейшей формы движения материи — механического движения. **Механическое движение** состоит в изменении с течением времени взаимного расположения тел или их частей в пространстве.

Понятия пространства и времени — основные не только для механики или физики в целом, но также для всего естествознания Всякое материальное тело имеет объем, т. е. пространственную протяженность. Время выражает последовательность состояний материи, составляющих любой процесс, любое движение; оно служит мерой длительности процесса. Таким образом, пространство и время представляют наиболее общие формы существования материи. Ф. Энгельс писал: «... основные формы всякого бытия суть пространство и время; бытие вне времени есть такая же величайшая бессмыслица, как бытие вне пространства»[1]. Равно также бессмысленны понятия о «пустом» пространстве и «чистом» времени, не связанных с движущейся материей. Важную роль в выяснении свойств пространства и времени сыграла теория относительности, которая указала на наличие взаимосвязи этих двух форм существования материи и зависимости их свойств от движения материи.

Механика состоит из трех основных разделов — статики, кинематики и динамики. В **статике** рассматривают законы сложения сил и условия равновесия тел. В **кинематике** исследуют характеристики и закономерности различных типов механического движения тел безотносительно к тем причинам, которые обеспечивают осуществление рассматриваемого типа движения. Наконец, в **динамике** изучают влияние взаимодействия между телами на их механическое движение.

2. В механике не рассматривают вопросы внутреннего строения тел и физической природы взаимодействий между телами и их частями, обусловливающих, в частности, механические свойства тел и изменения их механического движения. Закономерности этих взаимодейст-

[1] К Маркс, Ф. Энгельс Сочинения, т. 20, стр. 55.

вий предполагаются известными из опыта, а для описания самих движущихся тел в механике пользуются, в зависимости от условий каждой конкретной задачи, различными приближенными моделями. Выбор той или иной модели должен производиться таким образом, чтобы это позволило учесть все существенные особенности поведения реального тела в данной задаче и отбросить все второстепенные факторы, мало влияющие на результат решения задачи.

Простейшая модель тела — материальная точка. **Материальной точкой** называют тело, формой и размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Например, изучая движение Земли и других планет по орбитам вокруг Солнца, их рассматривают как материальные точки, так как линейные размеры планет пренебрежимо малы по сравнению с линейными размерами их орбит. В то же время Землю нельзя считать материальной точкой, например, в задачах о движении тел по ее поверхности. Движение корабля из одного порта в другой в первом приближении можно рассматривать как движение материальной точки. Однако если мы захотим учесть такую «деталь» этого движения, как качка корабля при волнении моря, то нам нужно будет принять во внимание взаимодействие волн с корпусом корабля, т. е. придется рассматривать корабль как протяженное тело

Понятием материальной точки, представляющим собой известное абстрагирование от реальных свойств движущихся тел, широко пользуются в механике, так как введение этого понятия вносит значительное упрощение в исследование движения тел

Всякое тело можно мысленно разбить на большое число частей, сколь угодно малых по сравнению с размерами всего тела. Каждую такую часть можно рассматривать как материальную точку, а само тело или любую систему тел — как **систему материальных точек.**

Если деформации тела при его взаимодействии с другими телами в рассматриваемом процессе пренебрежимо малы, то удобно пользоваться моделью абсолютно твердого тела. **Абсолютно твердым телом** называют тело, расстояния между любыми двумя точками которого в условиях данной задачи можно считать постоянными. Иначе говоря, это тело, форма и размеры которого не изменяются при его движении. Абсолютно твердое тело обычно рассматривают как систему материальных точек, жестко связанных друг с другом.

3. Положение тела в пространстве можно определить только по отношению к другим телам. Абсолютно твердое тело, по отношению к которому рассматривают движение исследуемого тела, называют **системой отсчета.** С телом, выбранным в качестве системы отсчета, жестко связывают систему координат, так что положение каждой точки движущегося тела относительно системы отсчета однозначно определяется значениями трех координат этой точки. Наиболее часто пользуются прямоугольными декартовыми координатами x, y, z (рис. 1.1). Система отсчета, кроме того, должна быть хронометризована, т. е. снабжена часами, с помощью которых однозначно[1] определяют моменты

[1] С точностью до произвольного постоянного слагаемого, зависящего от выбора начала отсчета времени.

времени, соответствующие различным положениям в пространстве движущихся тел.

Положение точки M (см. рис. 1.1) относительно системы отсчета можно задать не только с помощью трех ее декартовых координат x, y, z, но также с помощью одной векторной величины $\mathbf{r}$ — радиуса-вектора точки M, проведенного в эту точку из начала O системы координат. Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы[1] (орты) осей прямоугольной декартовой системы координат, то

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}. \tag{1.1}$$

Векторы $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ и $z\mathbf{k}$ представляют собой составляющие (компоненты) радиуса-вектора $\mathbf{r}$ вдоль соответствующих осей координат. Проекции $\mathbf{r}$ на оси координат соответственно равны x, y и z.

При движении материальной точки M ее координаты x, y, z и радиус-вектор $\mathbf{r}$ изменяются с течением времени t. Поэтому для задания закона движения материальной точки необходимо указать либо вид функциональной зависимости всех трех ее координат от времени:

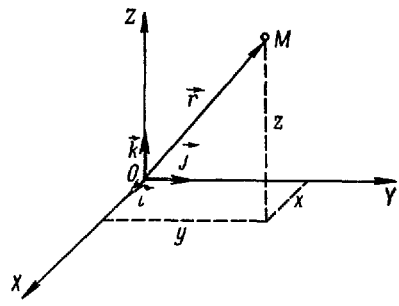

Рис 1 1

$$x = x(t),\ y = y(t) \text{ и } z = z(t), \tag{1.2}$$

либо зависимость от времени радиуса-вектора этой точки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{1.2'}$$

Три скалярных уравнения (1.2) или эквивалентное им одно векторное уравнение (1.2′) называют **кинематическими уравнениями движения материальной точки.**

4. **Траекторией** материальной точки называют линию, описываемую в пространстве этой точкой при ее движении. Уравнения движения (1.2) задают траекторию точки в так называемой параметрической форме. Роль параметра играет время t. Решая эти три уравнения совместно и исключая из них параметр t, найдем уравнение траектории, указывающее связь между тремя координатами любой точки траектории. В зависимости от формы траектории различают **прямолинейное** и **криволинейное** движения точки. Если все участки траектории точки лежат в одной плоскости, то движение точки называют **плоским.**

Из самого определения механического движения следует, что это движение о т н о с и т е л ь н о. Характер механического движения данного тела, в частности форма траекторий точек тела, зависит от выбора системы отсчета. Пусть, например, материальная точка M равномерно движется по диску вдоль его радиуса от центра, а диск в

[1] В тексте векторные величины набраны жирным шрифтом, а на рисунках обозначены буквами со стрелкой наверху.

свою очередь равномерно вращается вокруг оси симметрии O, перпендикулярной к его плоскости (рис. 1.2). Тогда по отношению к системе отсчета, связанной с диском, точка M движется равномерно и прямолинейно вдоль оси OX, а по отношению к системе отсчета, связанной с осью вращения, точка M движется вдоль плоской раскручивающейся спирали, называемой спиралью Архимеда (рис. 1.3).

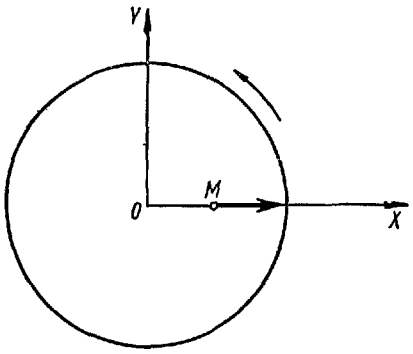

Рис. 1.2.

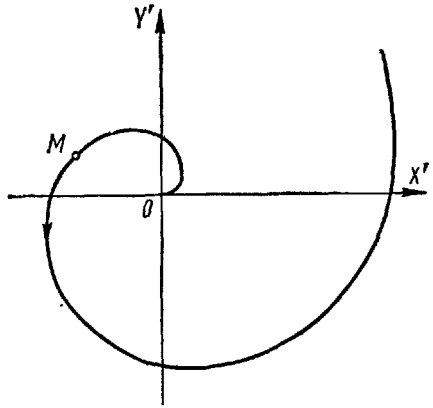

Рис. 1.3.

5. **Длиной пути** s материальной точки называют сумму длин всех участков траектории, пройденных точкой за рассматриваемый промежуток времени. Очевидно, что длина пути s не может быть отрицательной. Пусть материальная точка движется вдоль произвольной криволинейной траектории AM (рис. 1.4), причем A — положение материальной точки в момент начала отсчета времени ($t = 0$), а M — ее положение в произвольный момент t. Если в промежутке времени от 0 до t движение точки по траектории происходит в одном и том же направлении от A к M, то путь, пройденный точкой за это время, $s = \overset{\frown}{AM}$. В общем случае материальная точка может двигаться по траектории более сложным образом. Например, пусть за время от 0 до $t' < t$ она перемещается из A в B, а затем возвращается по той же траектории назад и к моменту t попадает в точку M. В этом слу-

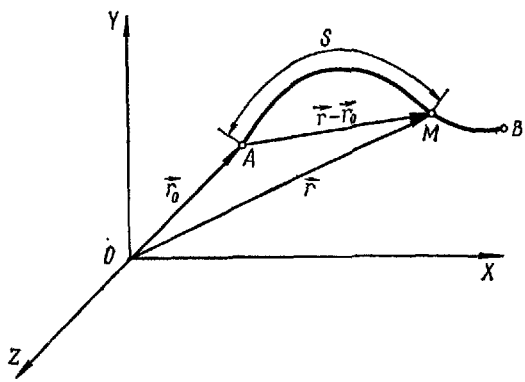

Рис. 1.4.

чае путь, пройденный точкой за время от 0 до t, $s = (\smile AB + \smile BM) > \smile AM$.

6. **Вектором перемещения** материальной точки за время от t_1 до t_2 называют вектор, проведенный из положения этой точки в момент t_1 в ее положение в момент t_2, т. е. приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени:

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1).$$

На рис. 1.4 показан вектор перемещения точки за время от 0 до t, равный $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)$. При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории. Из того что перемещение — вектор, следует подтверждающийся на опыте **закон независимости движений:**

если точка одновременно участвует в нескольких движениях, то результирующее перемещение точки равно векторной сумме перемещений, совершаемых ею за то же время в каждом из движений порознь.

7. Для измерения длины пути, перемещения и других расстояний служат меры длины. За основную меру длины принимается м е т р (м).

Из определения механического движения следует, что, изучая движение, необходимо измерять и время. За единицу времени принимается с е к у н д а (с). Определения метра и секунды приведены в Приложении (§ 2).

§ 1.2. Скорость

1. Для характеристики движения материальной точки вводят векторную физическую величину — скорость, определяющую как быстроту движения, так и направление движения в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории MN (рис. 1.5) так, что в момент времени t она находится в точке M,

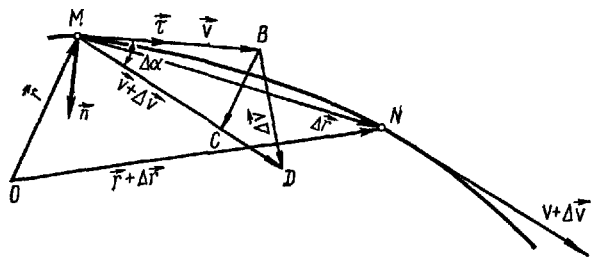

Рис. 1.5.

а в момент времени $t + \Delta t$ — в точке N. Радиусы-векторы точек M и N соответственно равны $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, а длина дуги MN равна Δs.

Вектором средней скорости $\mathbf{v}_{ср}$ точки в интервале времени от

t до $t + \Delta t$ называют отношение приращения $\Delta \mathbf{r}$ радиуса-вектора точки за этот интервал времени к его величине Δt:

$$\mathbf{v}_{ср} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{1.3}$$

Вектор $\mathbf{v}_{ср}$ направлен так же, как $\Delta \mathbf{r}$, т. е. вдоль хорды MN. Если в выражении (1.3) перейти к пределу, устремляя Δt к нулю, то мы получим выражение для **скорости** (ее часто называют **мгновенной скоростью**) материальной точки в момент t прохождения ее через точку M траектории:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{1.4}$$

В процессе уменьшения величины Δt точка N неограниченно приближается к точке M, и хорда MN, поворачиваясь вокруг точки M, в пределе совпадает по направлению с касательной к траектории в точке M. Поэтому вектор $d\mathbf{r}$ и скорость $\mathbf{v}$ движущейся точки направлены по касательной к траектории в сторону движения.

Из математики известно, что предел отношения длины Δs дуги к длине стягивающей ее хорды равен единице при $\Delta s \to 0$. Поэтому модуль малого (элементарного) приращения $d\mathbf{r}$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$ равен длине ds соответствующей ему дуги траектории:

$$|d\mathbf{r}| = ds.$$

Из этого соотношения и уравнения (1.4) следует, что численное значение скорости материальной точки равно первой производной от длины ее пути по времени.

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} \tag{1.5}$$

Интегрируя по t в пределах от t до $t + \Delta t$, найдем длину пути Δs, пройденного точкой за промежуток времени Δt:

$$\Delta s = \int_{t}^{t+\Delta t} v\,dt \tag{1.6}$$

2. Вектор $\mathbf{v}$ скорости материальной точки можно разложить на три составляющие, направленные вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \tag{1.4'}$$

где v_x, v_y и v_z — проекции вектора скорости на оси координат. Подставив в (1.4) значение (1.1) для радиуса-вектора материальной точки и выполнив почленное дифференцирование, получим

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{1.4''}$$

Из сопоставления выражений (1.4′) и (1.4″) следует, что проекции скорости материальной точки на оси прямоугольной декартовой системы координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.7}$$

Поэтому численное значение скорости

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{1.5′}$$

3. Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть направление вектора скорости $\mathbf{v}$ во время движения материальной точки не изменяется. Это означает, что точка движется по такой траектории, касательные к которой во всех ее точках имеют одно и то же направление. Таким свойством обладают только прямолинейные траектории. Значит, рассматриваемое движение — прямолинейное.

В том случае, если направление вектора скорости $\mathbf{v}$ материальной точки изменяется с течением времени, точка обязательно описывает криволинейную траекторию.

Если численное значение мгновенной скорости точки остается во время движения неизменным, то такое движение называют **равномерным**. В этом случае величину v в уравнении (1.6) можно вынести из-под знака интеграла.

$$\Delta s = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v\Delta$$

Следовательно, при равномерном движении за произвольные равные промежутки времени материальная точка проходит пути равной длины

Если же за произвольные равные промежутки времени точка проходит пути разной длины, то численное значение ее мгновенной скорости с течением времени изменяется. Такое движение называют **неравномерным**. В этом случае часто пользуются скалярной величиной $v_{ср}$, называемой средней путевой скоростью или просто средней скоростью неравномерного движения на данном участке Δs траектории. Она равна численному значению скорости такого равномерного движения, при котором на прохождение пути Δs затрачивается то же время Δt, что и при заданном неравномерном движении.

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Так как $\Delta s = |\Delta \mathbf{r}|$ только в случае прямолинейного движения с неизменной по направлению скоростью, то в общем случае

$$v_{ср} \neq |\mathbf{v}_{ср}|$$

4. Если материальная точка одновременно участвует в нескольких движениях, то ее результирующее элементарное перемещение $d\mathbf{r}$, в соответствии с законом независимости движений, равно сумме элементарных перемещений, обусловленных каждым из этих движений в отдельности. Поэтому скорость $\mathbf{v}$ результирующего движения может быть найдена по обычному правилу сложения векторов. Она равна геометрической сумме скоростей $\mathbf{v}_i$ всех тех (n) движений, в которых участвует материальная точка **(закон сложения скоростей):**

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i.$$

§ 1.3. Ускорение

1. В движениях, с которыми чаще всего приходится иметь дело, вектор скорости изменяется как по численному значению (модуля), так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости движения вводится понятие ускорения.

Пусть за время Δt движущаяся точка перешла из положения M в положение N (см. рис. 1.5), и вектор ее скорости $\mathbf{v}$ изменился на $\Delta\mathbf{v}$. Перенесем вектор $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ из точки N в точку M ($\overrightarrow{MD}$). Очевидно, что вектор $\Delta\mathbf{v} = \overrightarrow{BD}$.

Средним ускорением неравномерного движения в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называют вектор $\mathbf{a}_{ср}$, равный отношению вектора $\Delta\mathbf{v}$ к промежутку времени Δt:

$$\mathbf{a}_{ср} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Очевидно, что вектор $\mathbf{a}_{ср}$ совпадает по направлению с вектором изменения скорости $\Delta\mathbf{v}$.

Ускорением, или **мгновенным ускорением**, точки в момент времени t называют векторную величину $\mathbf{a}$, равную пределу, к которому стремится среднее ускорение этой точки в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ при неограниченном уменьшении Δt:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (1.8)$$

Из (1.4) следует, что

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \qquad (1.8')$$

Таким образом, ускорение точки равно первой производной от ее скорости $\mathbf{v}$ или, что то же самое, второй производной от ее радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по времени.

2. Вектор $\mathbf{a}$ ускорения материальной точки можно разложить на

три составляющие, направленные вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \tag{1.9}$$

где a_x, a_y и a_z — проекции вектора ускорения на оси координат. Из (1.9), (1.4′) и (1.4″) видно, что

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \tag{1.9′}$$

Следовательно, проекции ускорения материальной точки на оси прямоугольной декартовой системы координат равны первым производным по времени от соответствующих проекций скорости этой точки или, что то же самое, вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{и} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{1.10}$$

Численное значение ускорения

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \tag{1.10′}$$

3. Вектор **a** ускорения материальной точки характеризует быстроту изменения ее скорости **v** как по численному значению, так и по направлению. Оказывается, что вектор **a** можно разложить на две составляющие так, чтобы одна из них характеризовала быстроту изменения только численного значения (модуля) скорости, а вторая — только направления скорости. Такое разложение возможно при любом виде движения точки. Ради простоты мы докажем его справедливость на примере плоского движения материальной точки вдоль участка MN ее траектории (см. рис. 1.5). Ускорение в точке M

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{BD}}{\Delta t}.$$

Отложим на прямой MD отрезок MC, равный MB. Тогда $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ и

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{BC}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{CD}}{\Delta t}. \tag{1.11}$$

Проведем в точке M два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\boldsymbol{\tau}$ и **n**, лежащих в плоскости траектории (см. рис. 1.5). Вектор $\boldsymbol{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения материальной точки, т. е. в направлении ее скорости **v**. Вектор **n** проведен в сторону вогнутости траектории. Его называют единичным вектором **главной нормали** к траектории в точке M.

Из рис. 1.5 видно, что модули векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ и их проекции на касательную и главиую нормаль соответственно равны:

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = 2v \sin\frac{\Delta\alpha}{2}, \quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = CD = \Delta v,$$

$$BC_\tau = BC\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = 2v\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}, \quad BC_n = BC\cos\frac{\Delta\alpha}{2} = v\sin\Delta\alpha,$$

$$CD_\tau = CD\cos\Delta\alpha = \Delta v\cos\Delta\alpha, \quad CD_n = CD\sin\Delta\alpha = \Delta v\sin\Delta\alpha.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{\tau}\, 2v\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2} + \mathbf{n}\, v\sin\Delta\alpha,$$

$$\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{\tau}\,\Delta v\cos\Delta\alpha + \mathbf{n}\,\Delta v\sin\Delta\alpha.$$

При вычислении пределов в выражении (1.11) точка M предполагается фиксированной на траектории, так что значения v, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ при $\Delta t \to 0$ остаются постоянными. С другой стороны, если $\Delta t \to 0$, то $\Delta v \to 0$ и $\Delta\alpha \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{BC}}{\Delta t} = \mathbf{n}v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t} = \mathbf{n}v\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = v\frac{d\alpha}{dt}\mathbf{n},$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{CD}}{\Delta t} = \boldsymbol{\tau}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\lim_{\Delta\alpha\to 0}\cos\Delta\alpha = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \tag{1.11'}$$

где $\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$ — касательная и нормальная составляющие вектора ускорения:

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{a}_n = v\frac{d\alpha}{dt}\mathbf{n}, \tag{1.13}$$

называемые соответственно **тангенциальным (касательиым)** и **нормальным ускорениями** материальной точки

4. Из выражения (1.12) следует, что *тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения численного значения скорости материальной точки.* Проекция вектора $\mathbf{a}_\tau$ на направление скорости движения точки

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{1.12'}$$

При равномерном движении $a_\tau = 0$. Если $a_\tau > 0$, то движение называют **ускоренным**, если $a_\tau < 0$ — **замедленным.** Наконец, если $a_\tau = \text{const} \neq 0$, то движение называют **равнопеременным:** за равные

промежутки времени численное значение скорости изменяется на одну и ту же величину.

Производная $d\alpha/dt$, входящая в выражение (1.13) для $\mathbf{a}_n$, выражает быстроту изменения направления движения материальной точки. Поэтому *нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости материальной точки.* Если движение прямолинейное, то $a_n = 0$

За малое время dt материальная точка перемещается из точки M вдоль траектории на расстояние ds. Малый участок траектории ds можно рассматривать как малую дугу окружности радиуса R, соответствующую центральному углу $d\alpha$. Эту окружность называют соприкасающейся. Она представляет собой предельное положение окружности, проведенной через три точки траектории M_1, M и M_2 (точки M_1 и M_2 лежат по разные стороны от M), когда $M_1 \to M$ и $M_2 \to M$. Ее радиус R и центр называют соответственно **радиусом кривизны и центром кривизны траектории** в точке M. Центр кривизны лежит на главной нормали, проведенной в точке M, причем единичный вектор $\mathbf{n}$ главной нормали направлен от точки M к центру кривизны

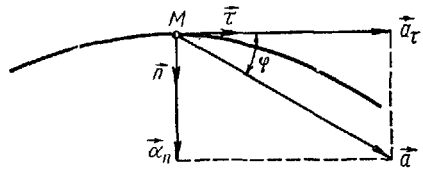

Рис. 1.6.

Так как $ds = R\,d\alpha$, то $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$ и

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \qquad (1.13)$$

Проекция $\mathbf{a}_n$ на направление $\mathbf{n}$

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad (1.13')$$

т. е. проекция не может быть отрицательной Следовательно, вектор нормального ускорения направлен по главной нормали к центру кривизны траектории. Поэтому нормальное ускорение часто называют также **центростремительным ускорением.**

Векторы $\mathbf{a}_\tau$ и $\mathbf{a}_n$ взаимно перпендикулярны (рис. 1.6), так что модуль ускорения $\mathbf{a}$ материальной точки равен

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \qquad (1.14)$$

Направление ускорения определяется углом φ между векторами $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{a}$. Из рис. 1.6 видно, что

$$\cos\varphi = \frac{a_\tau}{a}. \qquad (1.14')$$

§ 1.4. Простейшие виды движения материальной точки

1. В случае равномерного прямолинейного движения материальной точки вдоль положительного направления оси OX

$$a_\tau = a_n = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = v_x \mathbf{i} = \text{const}, \quad \text{причем} \quad v_x = |\mathbf{v}| = v > 0.$$

Зависимость координаты x точки от времени t имеет вид

$$x = \int_0^t v_x dt + x_0 = vt + x_0, \tag{1.15}$$

где x_0— значение x в момент начала отсчета времени. Длина пути s, пройденного точкой за промежуток времени от 0 до t,

$$s = x - x_0 = vt. \tag{1.15'}$$

2. В качестве второго примера прямолинейного движения материальной точки рассмотрим равнопеременное прямолинейное движение. В этом случае $a_n = 0$ и $a_\tau = \text{const}$. Если $a_\tau > 0$, то движение называют **равноускоренным**, а если $a_\tau < 0$ — **равнозамедленным**. Так как $a_\tau = dv/dt$, то зависимость численного значения скорости точки от времени имеет вид

$$v = \int_0^t a_\tau \, dt + v_0 = v_0 + a_\tau t, \tag{1.16}$$

где v_0— начальная скорость, т. е. скорость материальной точки в момент $t = 0$.

Если движение происходит вдоль положительного направления оси OX, то $v = v_x = dx/dt$ и координата x материальной точки зависит от t по следующему закону:

$$x = \int_0^t v dt + x_0 = x_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \tag{1.17}$$

где x_0— значение x при $t = 0$. Соответственно длина пути, пройденного точкой с момента начала отсчета времени,

$$s = x - x_0 = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}. \tag{1.18}$$

Численное значение скорости не может быть отрицательным: $v = |\mathbf{v}| \geqslant 0$. Следовательно, в случае равнозамедленного движения соотношения (1.16) — (1.18) справедливы только при $t \leqslant -(v_0/a_\tau)$.

Часто ради простоты в формулах (1.16) — (1.18) вместо a_τ пишут просто a:

$$v = v_0 + at, \tag{1.16'}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{1.17'}$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{1.18'}$$

Пользуясь этими формулами, нужно помнить, что в них a — не модуль вектора **a**, а алгебраическая величина ускорения: при равноускоренном движении $a = |\mathbf{a}| > 0$, а при равнозамедленном движении $a = -|\mathbf{a}| < 0$.

Если $v_0 = 0$, то, как видно из (1.16′) и (1.18′), скорость материальной точки после прохождения пути s в равноускоренном прямолинейном движении

$$v = \sqrt{2as}. \qquad (1.18')$$

В качестве примера прямолинейного равноускоренного движения укажем на свободное падение тел без начальной скорости. Опыты Г. Галилея (XVI в.), а также все последующие более точные опыты показали, что численное значение g ускорения при свободном падении одинаково для всех тел и зависит только от высоты над уровнем моря и географической широты места проведения опыта. На широте Москвы и уровне моря $g = 9{,}8156$ м/с^2.

3. Наиболее простой вид криволинейного движения — равномерное движение материальной точки по окружности. Численное значение вектора скорости в этом движении остается неизменным ($a_\tau = 0$), но направление его все время изменяется ($\mathbf{a}_n \neq 0$), причем по уравнению (1.13″)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \text{const}.$$

§ 1.5. Кинематика абсолютно твердого тела

1. В этом параграфе мы рассмотрим кинематические характеристики двух простейших типов движения абсолютно твердого тела—поступательного и вращательного. Движение твердого тела называют **поступательным**, если любая прямая, жестко связанная с телом, перемещается, оставаясь параллельной ее первоначальному направлению (рис. 1.7). Поступательно движутся относительно земли, например, кабина лифта, резец токарного станка, пассажирские кабины «колеса обозрения», стрелка компаса при любом перемещении его корпуса в горизонтальной плоскости и т. д.

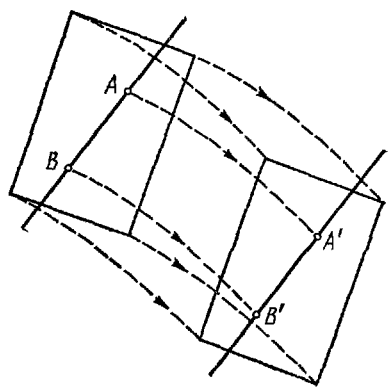

Рис. 1.7.

При поступательном движении тела траектории AA' и BB' любых двух его точек A и B (рис. 1.7) совершенно идентичны: их можно

полностью совместить путем параллельного переноса вдоль прямой AB. Поэтому приращения радиусов-векторов всех точек тела за любой произвольно выбранный промежуток времени одинаковы. Следовательно, в любой момент времени все точки тела имеют одинаковые скорости и ускорения, а кинематическое рассмотрение поступательного движения абсолютно твердого тела сводится к изучению движения любой из его точек.

2. Если в процессе движения твердого тела (рис. 1.8) две его точки A и B остаются неподвижными, то и любая точка C тела, находящаяся на прямой AB, также должна оставаться неподвижной. В противном случае расстояния AC и BC должны были бы изменяться, что противоречило бы предположению об абсолютной твердости тела. Поэтому движение твердого тела, при котором две его точки A и B остаются неподвижными, называют **вращением тела вокруг неподвижной оси,** а неподвижную прямую AB называют **осью вращения тела.**

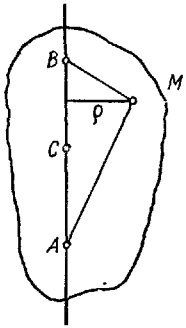

Рис. 1.8.

Рассмотрим произвольную точку M тела, не лежащую на оси вращения AB. При вращении твердого тела расстояния MA, MB и расстояние ρ от точки M до оси вращения должны оставаться неизменными. Таким образом, все точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости перпендикулярны к этой оси. Вращение вокруг неподвижной оси совершают, например, роторы турбин, электрических двигателей и генераторов, коленчатые валы двигателей внутреннего сгорания и т. д.

Движение абсолютно твердого тела, закрепленного в одной неподвижной точке, называют **вращением тела вокруг неподвижной точки — центра вращения.** Такое движение абсолютно твердого тела в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через центр вращения и называемой **мгновенной осью вращения тела.** Положение мгновенной оси относительно неподвижной системы отсчета и самого тела с течением времени может изменяться.

3. При вращательном движении, в отличие от поступательного, скорости $\mathbf{v}$ разных точек тела неодинаковы. Поэтому скорость $\mathbf{v}$ какой-либо точки вращающегося тела не может служить кинематической характеристикой движения всего тела.

Пусть O — центр вращения тела, а OO' — неподвижная (или мгновенная) ось вращения. Положение произвольной точки M тела (рис. 1.9) будем задавать с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из центра O. Из рис. 1.9 видно, что

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \overrightarrow{OO'}, \qquad (1.19)$$

где $\boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{O'M}$ — радиус-вектор, проведенный в точку M из центра O' дуги окружности, по которой движется точка M. За малое время

dt вектор ρ поворачивается в плоскости, перпендикулярной оси OO', на малый угол $d\varphi$. На такой же угол поворачивается за время dt радиус-вектор любой другой точки тела, так как в противном случае расстояния между этими точками должны были бы изменяться. Таким образом, угол поворота $d\varphi$ характеризует перемещение всего вращающегося тела за малый промежуток времени. Удобно ввести вектор $d\boldsymbol{\varphi}$ **элементарного** (малого) **поворота тела**, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения OO' так, чтобы из его конца поворот тела был виден происходящим против часовой стрелки (см. рис. 1.9). Направление этого вектора совпадает с направлением поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается вместе с телом, т. е. подчиняется **правилу буравчика**.

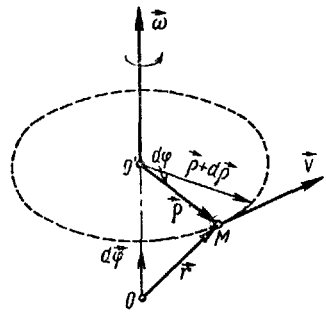

Рис. 1.9.

Можно показать, что при совершении телом последовательно двух элементарных поворотов ($d\boldsymbol{\varphi}_1$, а затем $d\boldsymbol{\varphi}_2$) результирующее перемещение тела эквивалентно одному повороту $d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2$. Таким образом, элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов, т. е. их действительно можно рассматривать как векторы.

4. **Угловой скоростью** тела называют вектор $\boldsymbol{\omega}$, численно равный первой производной от угла поворота φ по времени и направленный вдоль оси вращения по правилу буравчика, т. е. так же как вектор элементарного поворота $d\boldsymbol{\varphi}$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}. \tag{1.20}$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ характеризует направление и быстроту вращения тела вокруг оси. Если $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$, то движение тела называют равномерным вращением вокруг неподвижной оси.

Скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки M тела, вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, часто называют **линейной скоростью** этой точки. За время dt точка M проходит по дуге окружности радиуса ρ путь $ds = v\,dt = \rho d\varphi$, так что

$$v = \rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho\omega \tag{1.21}$$

Из рис. 1.9 видно, что вектор $\mathbf{v}$ направлен перпендикулярно и к $\boldsymbol{\omega}$ и к $\boldsymbol{\rho}$ в ту же сторону, что и векторное произведение $[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}]$. Так как, кроме того, векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\rho}$ взаимно перпендикулярны, то $|[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}]| = \rho\omega = v$.

Следовательно,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}]. \tag{1.22}$$

Подставляя значение ρ из (1.19) и учитывая, что векторное произведение коллинеарных векторов ω и $\overrightarrow{OO'}$ равно нулю, получим

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]. \qquad (1.22')$$

Очевидно, что в случае вращения тела вокруг неподвижной оси за начало координат, из которого проводят радиусы-векторы $\mathbf{r}$, можно выбрать любую точку оси вращения.

5. Наряду с угловой скоростью вращения тела пользуются понятиями периода и частоты вращения. **Периодом вращения** T называют промежуток времени, в течение которого тело, равномерно вращаясь с угловой скоростью ω, совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$. **Частотой вращения** n называют число оборотов, совершаемых телом за 1 с при равномерном вращении с угловой скоростью ω. Связь между ω, T и n имеет вид

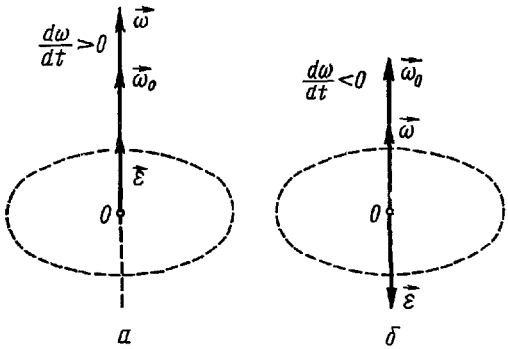

Рис. 1.10.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n \qquad (1.23)$$

6. Для характеристики неравномерного вращения тела вводится понятие углового ускорения. **Угловым ускорением** называют вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, равный первой производной по времени от угловой скорости:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \qquad (1.24)$$

В случае вращения тела вокруг неподвижной оси изменение вектора $\boldsymbol{\omega}$ обусловлено только изменением его численного значения. При этом вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлен вдоль оси вращения (рис. 1.10) в ту же сторону, что и $\boldsymbol{\omega}$, при ускоренном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$ и в противоположную сторону — при замедленном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$.

Направим ось OZ вдоль неподвижной оси вращения, тогда проекция вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ на эту ось

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \qquad (1.24')$$

Если единичный вектор $\mathbf{k}$ оси OZ направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{\omega}$, то $\omega_z = |\boldsymbol{\omega}| = \omega$ и

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega}{dt}.$$

Часто, ради упрощения, эту формулу записывают в виде

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (1.24'')$$

Здесь ε не модуль вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$, а алгебраическая величина: при ускоренном вращении $\varepsilon = |\boldsymbol{\varepsilon}| > 0$, а при замедленном вращении $\varepsilon = -|\boldsymbol{\varepsilon}| < 0$.

7. Выразим тангенциальное и нормальное ускорения произвольной точки M тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, через угловую скорость и угловое ускорение тела:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega\rho) = \rho\frac{d\omega}{dt} = \rho\varepsilon; \qquad (1.25)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2\rho = \frac{4\pi^2}{T^2}\rho = 4\pi^2 n^2 \rho. \qquad (1.26)$$

Из рис. 1.11 и уравнения (1.25) следует, что вектор тангенциального ускорения $\mathbf{a}_\tau$ равен векторному произведению вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ на радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ или на радиус-вектор $\mathbf{r}$, соединяющий произвольную точку на оси вращения с точкой M:

$$\mathbf{a}_\tau = [\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}] = [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}]. \qquad (1.27)$$

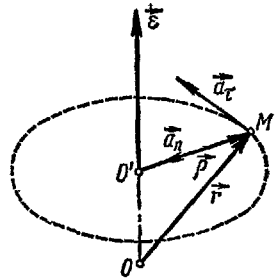

Рис. 1.11.

Вектор $\mathbf{a}_n$ нормального ускорения направлен к оси вращения, т. е. в сторону, противоположную $\boldsymbol{\rho}$:

$$\mathbf{a}_n = -\frac{v^2}{\rho}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} = -\frac{v^2}{\rho^2}\boldsymbol{\rho}. \qquad (1.28)$$

8. В заключение рассмотрим формулы для простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

а) равномерное вращение:

$$\varepsilon = 0, \quad \omega = \text{const}, \quad \varphi = \omega t;$$

б) равнопеременное вращение вокруг оси OZ:

$$\varepsilon_z = \text{const}, \quad \omega_z = \omega_{0Z} + \varepsilon_z t, \quad \varphi = \omega_{0Z}\, t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2},$$

где ω_{0Z} — проекция на ось OZ начальной угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}_0$.

9. Поступательное и вращательное движения твердого тела являются лишь простейшими типами его движения. В общем случае твердое тело может двигаться весьма сложным образом. Сложными являются, например, движения шатуна в двигателе внутреннего сгорания, самолета, выполняющего фигуры высшего пилотажа и др. Однако в теоретической механике доказывается, что любое сложное движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений.

Понятия поступательного и вращательного движений, как видно из их определений, неприменимы к материальной точке. Действительно, точка не имеет размеров, так что говорить о ее вращении просто бессмысленно. Поэтому представление реального тела в виде материальной точки возможно только в тех случаях, когда вращение тела не играет сколько-либо существенной роли. В частности, это условие выполняется для твердого тела, движущегося поступательно

Вопросы для повторения

1 Перечислите основные кинематические характеристики движения точки, а также поступательного и вращательного движений твердого тела и дайте их определения Укажите связи между ними

2 Почему в общем случае нельзя написать: $a = \frac{dv}{dt}$ или $a = \frac{d^2s}{dt^2}$? Для какого движения эта запись справедлива?

3 Какое движение называют равнопеременным?

4 Каков смысл нормального и тангенциального ускорений точки? Как направлены эти ускорения и чему они численно равны (вывод)?

Примеры решения задач

Задача 1 1 Камень брошен с вышки со скоростью 29,4 м/с в горизонтальном направлении Найти радиус кривизны траектории камня в точке, где он будет через 4с после начала движения Сопротивлением воздуха пренебречь

Дано

$v_0 = 29{,}4$ м/с
$t = 4$ с

$R - ?$

Решение

Для определения радиуса кривизны траектории в заданной точке воспользуемся формулой (1 13″) для нормального ускорения $a_n = \frac{v^2}{R}$, откуда

$$R = \frac{v^2}{a_n} \qquad (a)$$

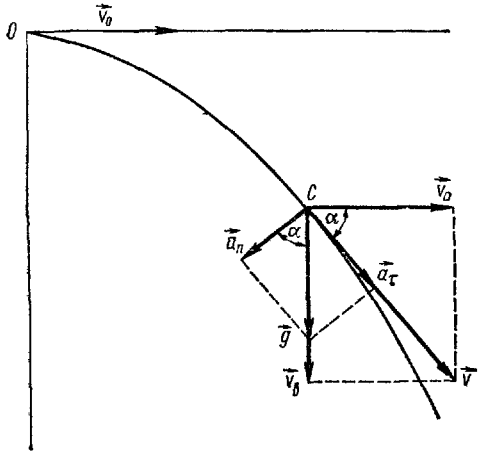

Рис. 1.12.

Камень участвует в двух взаимно перпендикулярных движениях. равномерном движении по горизонтали со скоростью $\mathbf{v}_г = \mathbf{v}_0$ и свободном падении со скоростью $\mathbf{v}_в = \mathbf{g}t$ (рис. 1.12). Поэтому его скорость $\mathbf{v}$ в точке C (через t с после начала движения) будет

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t,$$

причем численное значение вектора $\mathbf{v}$ равно

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2},$$

а его направление определяется углом α Из рис. 1.11 видно, что

$$\cos\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Нормальное ускорение a_n, как видно из рисунка, численно равно

$$a_n = g \cdot \cos\alpha = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Подставив найденные для v и a_n выражения в формулу (а), получим

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}{gv_0},$$

или

$$R = \frac{\left(v_0^2 + g^2t^2\right)^{3/2}}{gv_0}$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
1) проверка размерности результата:

$$[R] = \frac{[v_0]^3}{[g]\,[v_0]} = \frac{[v^2]}{[g]} = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}} = L,$$

так как

$$[g] \cdot [t] = LT^{-2} \cdot T = LT^{-1} = [v];$$

2) вычисления:

$$R = \frac{[(29{,}4)^2 + (9{,}81)^2 \cdot 4^2]^{3/2}}{9{,}81 \cdot 29{,}4}\ \text{м} = 409\ \text{м}.$$

Задача 1.2. Маховик приведен в равноускоренное вращательное движение с угловым ускорением 314 рад/с^2. Найти угловую скорость маховика через 16 полных оборотов.

Дано

$\varepsilon = 314$ рад/с
$N = 16$
$\omega_0 = 0$

$\omega - ?$

Решение

Из уравнений для равнопеременного вращательного движения без начальной скорости имеем

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \text{ и } \omega = \varepsilon t,$$

или

$$t = \sqrt{\frac{2\varphi}{\varepsilon}} \text{ и } \omega = \varepsilon t.$$

Угол поворота $\varphi = 2\pi N$, поэтому

$$\omega = 2\sqrt{\pi N\varepsilon}$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
1) проверка размерности результата:

$$[\omega] = [N]^{1/2}\,[\varepsilon]^{1/2} = T^{-1},$$

2) вычисления;

$$\omega = 2\sqrt{3{,}14 \cdot 16 \cdot 314}\ \text{рад/с} = 251\ \text{рад/с}.$$

Задача 1.3. Колесо диаметром 0,07 м, насажеиное на горизоитальную ось, катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Центр колеса движется со скоростью 0,168 м/с и описывает окружность радиусом 0,12 м. Найти величину результирующей угловой скорости колеса и угол ее наклона к вертикали.

Дано

$d = 0{,}07$ м,
$v = 0{,}168$ м/с,
$R = 0{,}12$ м

ω — ?
α — ?

Решение

Пусть колесо катится так, что сверху его движение видно происходящим по часовой стрелке (рис. 1.13). Колесо одновременно участвует в двух движениях: вращении вокруг оси OO_1 с угловой скоростью ω_2 и вращении вокруг собственной оси с угловой скоростью ω_1, направленной вдоль радиуса от оси OO_1. Вектор результирующей угловой скорости равен сумме ω_1 и ω_2:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Так как векторы ω_1 и ω_2 взаимно перпендикулярны, то

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \qquad (а)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (б)$$

Угловая скорость ω_2 численно равна отиошению линейной скорости к радиусу вращения:

$$\omega_2 = \frac{v}{R}. \qquad (в)$$

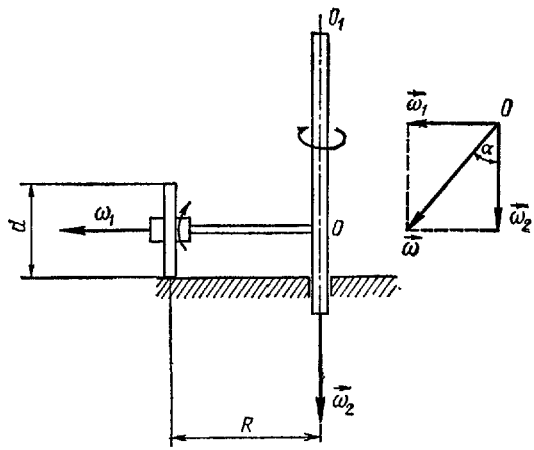

Рис. 1.13.

Численное значение угловой скорости ω_1 найдем из условия, что колесо катится по плоскости без скольжения. Отсутствие скольжения означает, что линейная скорость v_1 точки колеса, касающейся плоскости, равна скорости точек плоскости, т. е. равна нулю. Скорость v_1 численно равна разности линей-

ной скорости v, соответствующей вращению колеса вокруг оси OO_1, и линейной скорости $\omega_1 \cdot \frac{d}{2}$, соответствующей вращению колеса вокруг собственной оси:

$$v_1 = v - \frac{\omega_1 \cdot d}{2} = 0.$$

Поэтому

$$\omega_1 = \frac{2v}{d}. \qquad (г)$$

Заменив в формулах (а) и (б) ω_1 и ω_2 выражениями (в) и (г), получим окончательно

$$\omega = \sqrt{\frac{4v^2}{d^2} + \frac{v^2}{R^2}} = \frac{v}{dR}\sqrt{4R^2 + d^2}$$

и

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2R}{d}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
1) проверка размерности результата:

$$[\omega] = \frac{[v]}{[d]\,[R]} \cdot [R] = \frac{[v]}{[d]} = \frac{LT^{-1}}{L} = T^{-1};$$

2) вычисления:

$$\omega = \frac{0{,}168}{0{,}07 \cdot 0{,}12}\sqrt{4 \cdot 0\ 0144 + 0{,}0049}\ \text{рад/с} = 5\ \text{рад/с},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 0{,}12}{0{,}07} = 73°45'.$$

Глава II

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 2.1. Первый закон Ньютона

1. В кинематике рассматривают механические движения безотносительно к причинам и способам их изменений. Задача динамики более общая — в ней изучают связь между взаимодействиями тел и изменениями в их движении. Поэтому динамика представляет основной раздел механики.

В основе динамики лежат три закона И. Ньютона, сформулированные им в труде «Математические начала натуральной философии» (1687). Эти законы — результат гениального обобщения тех опытных данных и теоретических сведений в области механики, которые были получены до Ньютона и самим Ньютоном.

2. **Первый закон Ньютона** гласит: *всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

Первый закон Ньютона показывает, что состояние покоя и равномерного прямолинейного движения не требуют для своего поддержания каких-либо внешних воздействий. В этом проявляется особое динамическое свойство тел, называемое **инертностью.** Соответственно первый закон Ньютона обычно называют **законом инерции,** а движение тела, свободного от внешних воздействий,— **движением по инерции.**

3. Мы уже указывали выше, что всякое механическое движение относительно и его характер зависит от выбора системы отсчета. Так, например, пассажир, сидящий в вагоне поезда, неподвижен относительно стенок вагона. В то же время он движется относительно Земли вместе с поездом, причем это движение может быть неравномерным и непрямолинейным. Поэтому возникает вопрос, о каком покое или прямолинейном и равномерном движении идет речь в первом законе Ньютона? Как при этом нужно выбирать систему отсчета?

Ответ на указанные вопросы дает опыт. Оказывается, что первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета. Например, тела, лежащие неподвижно на идеально гладком полу каюты корабля, который движется равномерно и прямолинейно по спокойной поверхности воды, могут прийти в движение по полу без всякого воздействия на них со стороны других тел. Для этого достаточно, чтобы корабль начал двигаться с ускорением.

Системы отсчета, по отношению к которым выполняется закон инерции, называют **инерциальными системами отсчета.** Естественно, что если бы такие системы отсчета нельзя было указать, то и первый закон Ньютона потерял бы всякий смысл. Следовательно, в первом законе Ньютона содержатся два утверждения: во-первых, что все тела обла-

дают свойством инертности, и, во-вторых, что существуют инерциальные системы отсчета.

4. В приведенной выше формулировке первого закона Ньютона предполагается, что рассматриваемое тело — а б с о л ю т н о т в е р д о е. Для тел, способных деформироваться, можно привести множество примеров явной неприменимости этой формулировки. Так, например, первоначально неподвижная сжатая пружина после одновременного прекращения всех внешних воздействий, вызвавших ее деформацию, не остается ни в состоянии покоя, ни в состоянии равномерного прямолинейного движения, а совершает колебания, периодически растягиваясь и сжимаясь.

Кроме того, в указанной формулировке первого закона Ньютона речь идет только о возможном п о с т у п а т е л ь н о м движении абсолютно твердого тела в отсутствие внешних воздействий, т. е. по инерции. Между тем, как показывает опыт, такое тело может еще и равномерно вращаться по инерции.

Необходимость во всех этих предположениях автоматически отпадает, если говорить не о теле, а о материальной точке, которая по самому ее определению не может ни деформироваться, ни вращаться. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться следующей формулировкой **первого закона Ньютона**: *материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не выведет ее из этого состояния.*

Иначе говоря, *материальная точка, на которую не действуют другие тела, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.* Соответственно, инерциальными являются такие системы отсчета, относительно которых материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

5. Опыты показали, что с очень большой степенью точности можно считать инерциальной **гелиоцентрическую систему отсчета.** Начало координат этой системы жестко связано с Солнцем (точнее говоря, совпадает с центром инерции (см. § 2.4) солнечной системы), а оси проведены в направлении трех удаленных звезд, выбранных, например, так, чтобы оси были взаимно перпендикулярны.

Если материальная точка свободна от внешних воздействий, то ее ускорение относительно любой инерциальной системы отсчета должно быть равно нулю. Исходя из этого, легко показать, что любые две инерциальные системы отсчета могут двигаться друг относительно друга только поступательно и притом лишь равномерно и прямолинейно. В частности, они могут быть взаимно неподвижны.

Лабораторная система отсчета, жестко связанная с Землей, неинерциальна, главным образом, из-за суточного вращения Земли. Однако вращение Земли происходит очень медленно. Поэтому в большинстве практических задач эффекты, обусловленные неинерциальностью лабораторной системы отсчета, пренебрежимо малы, и эту систему отсчета можно приближенно считать инерциальной.

Инерциальные системы отсчета играют особую роль не только в механике, но и во всех других разделах физики. Это связано с тем, что, согласно специальной теории относительности, математическое выражение любого физического закона должно иметь один и тот же вид во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться только инерциальными системами отсчета, не оговаривая этого каждый раз. Особенности описания закономерностей движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета специально рассмотрены в VII главе.

§ 2.2. Сила

1. Из опыта известно, что в результате действия на тело со стороны других тел это тело может изменять состояние своего механического движения, а также форму и размеры, т. е. деформироваться. Для описания такого механического действия тел друг на друга вводят понятие силы. **Силой**, действующей на тело (или приложенной к телу), называют физическую величину, являющуюся мерой механического действия на это тело со стороны какого-либо другого тела. Таким образом, движение тела под действием других тел можно рассматривать как движение тела под действием приложенных к нему сил.

Толкая тележку, поднимая груз, растягивая пружину, мы действуем на эти тела с некоторой силой. Электровоз приводит в движение состав, прикладывая к нему силу тяги. Очень часто в механике приходится встречаться с силами тяжести и трения. Сила, приложенная к телу, полностью определена, если указаны ее численное значение, направление действия и точка приложения. Прямую, проведенную через точку приложения силы в направлении действия этой силы, называют **линией действия силы.**

2. Для определения численного значения силы, т. е. для сравнения ее с силой, принятой за единицу силы, можно воспользоваться вызываемыми ими деформациями одного и того же упругого тела. На этом принципе основаны известные из курса средней школы пружинные весы и динамометры. Измерение сил с помощью пружинного динамометра нуждается в некоторых дополнительных пояснениях. При пользовании таким динамометром предполагается, что численное значение измеряемой силы **F**, действующей вдоль оси пружины, пропорционально величине x вызываемой ею деформации пружины:

$$F = kx, \tag{2.1}$$

где k — так называемый коэффициент упругости пружины.

Если зависимость (2.1) неверна, то измерять силы с помощью пружинного динамометра нельзя, так как зависимость x от F неизвестна и динамометр невозможно проградуировать. Следовательно, прежде чем пользоваться пружинным динамометром, нужно убедиться в справедливости соотношения (2.1). Для этого на динамометр поочередно действуют двумя разными по величине, но одинаково направленными

силами F_1 и F_2 (например, подвешивая к динамометру два разных груза), а затем — одновременно обеими силами F_1 и F_2, т. е. силой $F_3 = F_1 + F_2$. Соответствующие деформации обозначим через x_1, x_2 и x_3. Из уравнения (2.1) следует, что

$$x_1 = \frac{F_1}{k}, \quad x_2 = \frac{F_2}{k} \quad \text{и} \quad x_3 = \frac{F_3}{k},$$

т. е.

$$x_3 = x_1 + x_2.$$

Согласие значений x_1, x_2 и x_3, найденных из опыта, с этой формулой является косвенной проверкой справедливости уравнения (2.1). Такого рода опыты показали, что при достаточно малых деформациях x, т. е. при действии на пружину не слишком больших сил F, соотношение (2.1) выполняется с большой степенью точности. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 5.2.

3. Две силы называют численно равными и противоположными по направлению, если одновременное приложение этих сил в одной и той же точке тела не вызывает изменения его механического движения. В частности, если до приложения таких двух сил тело покоилось, то оно продолжает оставаться в покое и после их приложения. Поэтому говорят, что две численно равные и противоположные по направлению силы, приложенные в одной и той же точке тела, **взаимно уравновешиваются.**

Уравновешивая измеряемую силу с помощью пружинного динамометра, можно определить как численное значение силы, так и ее направление. Если пружина динамометра сжата, то сила, приложенная к телу, направлена вдоль оси пружины от тела к динамометру, если пружина растянута, то сила направлена в обратную сторону.

Опыты показывают, что две силы, приложенные одновременно в одной и той же точке тела, можно уравновесить одной силой. Эта сила численно равна и противоположна по направлению геометрической сумме указанных двух сил, определяемой по известному правилу параллелограмма. Следовательно, силы складываются по правилу сложения векторов, т. е. сила — величина векторная.

Если на тело одновременно действуют n сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$, приложенных в одной и той же точке A тела, то их можно заменить одной эквивалентной им силой $\mathbf{F}$, равной их геометрической сумме:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

и приложенной в той же точке A. В частности, это верно для системы сил, действующих на материальную точку. Силу $\mathbf{F}$ называют **результирующей**, или **равнодействующей, силой.** Очевидно, что силы, приложенные в одной и той же точке тела, взаимно уравновешиваются в том и только в том случае, если результирующая этих сил равна нулю.

Действие силы на абсолютно твердое тело не изменяется при переносе ее точки приложения вдоль линии действия силы.

4. До сих пор мы рассматривали только статический метод измерения сил, основанный на уравновешивании измеряемой силы силой, нам известной (например, силой, действующей со стороны эталонной пружины — динамометра). Между тем действие силы на тело может проявляться не только статически, но также и динамически в изменении состояния механического движения тела. Поэтому возможен также динамический метод измерения сил путем сравнения изменений движения одного и того же эталонного тела, вызываемых измеряемой силой и силой, принятой за единичную. Однако для осуществления этого метода измерения сил нужно предварительно знать закон изменения движения тел под действием сил. Таким законом для материальной точки и абсолютно твердого тела, движущегося поступательно, является второй закон Ньютона. Основываясь на нем, можно, конечно, производить измерение сил, как это обычно и делают. Но в то же время совершенно ясно, что при установлении самого второго закона нужно было пользоваться не связанным с ним методом измерения сил.

5. Тело называют **свободным,** если оно может занимать всевозможные положения в пространстве и двигаться любым образом. Например, космический корабль в процессе полета ведет себя как свободное тело.

В большинстве случаев движущиеся тела не являются свободными. Так, шарик, подвешенный на нерастяжимой нити, не может удалиться от точки подвеса на расстояние, превосходящее длину нити. Поршень двигателя внутреннего сгорания может двигаться в цилиндре двигателя только поступательно, а коленчатый вал того же двигателя, наоборот, может только вращаться. Поезд движется только вдоль железнодорожного пути. Всякие ограничения на возможные положения или движения тела называют **связями,** наложенными на это тело. Связи осуществляются путем воздействия на рассматриваемое тело со стороны других тел, соприкасающихся или скрепленных с ним. Так, в примерах, приведенных выше, связи осуществляются: в первом — нитью, во втором — стенками цилиндра и шатуном, в третьем — подшипниками коленчатого вала, в четвертом — рельсами.

6. При исследовании движения несвободных тел в динамике широко пользуются следующим приемом, называемым **принципом освобождаемости**: *несвободное тело* (или систему тел) *можно рассматривать как свободное, если отбросить все наложенные на него связи и заменить действие тел, осуществляющих связи, соответствующими силами.*

Эти силы называют **реакциями связей,** а все остальные силы, действующие на тело,— **активными силами**. Так, например, задача о движении шарика, подвешенного на нерастяжимой нити, сводится к задаче о движении свободного шарика, т. е. отсоединенного от нити, на который помимо всех активных сил действует еще сила реакции нити. В отличие от активных сил, которые в каждой конкретной задаче должны быть заданы, реакции связей (например, реакция нити) заранее неизвестны. Они подлежат определению в ходе решения зада-

чи. Их значения должны быть такими, чтобы реакции связей совместно с активными силами вызывали такое движение «освобожденного» тела, которое полностью согласуется с ограничениями, накладываемыми связями на рассматриваемое несвободное тело. Так, при скатывании или соскальзывании шарика по наклонной плоскости на него действуют сила тяжести и реакция плоскости, которую обычно бывает удобно представить в виде суммы двух составляющих — нормальной к плоскости (нормальная реакция) и касательной (сила трения). Под действием силы тяжести и реакции плоскости шарик должен двигаться так, чтобы его центр все время находился на одном и том же расстоянии от плоскости, равном радиусу шарика. Если же шарик скатывается без проскальзывания, то, кроме того, должно выполняться еще одно условие: скорость точки касания шарика о плоскость должна быть равна скорости соответствующей точки плоскости.

Принцип освобождаемости непосредственно вытекает из самого понятия силы, как меры механического действия тел друг на друга. Ведь тела, осуществляющие связи, именно потому и ограничивают движение рассматриваемого тела, что действуют на него с некоторыми силами — реакциями связей.

В дальнейшем, рассматривая закономерности движения тел под действием сил, мы всегда будем пользоваться принципом освобождаемости. Иными словами, мы всегда будем считать, не оговаривая этого особо, что рассматриваемое тело свободно, а под действующими на него силами будем понимать совокупность как всех активных сил, так и всех реакций связи, если в действительности тело несвободно.

§ 2.3. Масса. Второй закон Ньютона

1. Основная задача динамики заключается в установлении законов изменения механического движения тел под влиянием приложенных к ним сил. Опыты показывают, что под действием силы $\mathbf{F}$ свободное тело изменяет скорость своего поступательного движения, приобретая ускорение $\mathbf{a}$. При этом выполняется следующий закон[1]: *ускорение тела прямо пропорционально вызывающей его силе и совпадает с ней по направлению*, т. е.

$$\mathbf{a} = k_1\mathbf{F}, \tag{2.2}$$

где k_1— положительный коэффициент пропорциональности, постоянный для каждого конкретного тела, но, вообще говоря, неодинаковый для разных тел. Кроме того величина k_1 зависит, конечно, от выбора единиц измерения силы и ускорения.

2. Из соотношения (2.2) следует, что тела, действительно, обладают свойством инертности. Ведь именно благодаря своей инертности тело приобретает под влиянием силы к о н е ч н о е по величине ускорение, т. е. изменяет скорость своего поступательного движения не мгновенно, а лишь п о с т е п е н н о.

[1] При скоростях движения тел $v \ll c$, где c — скорость света в вакууме.

В качестве меры инертности тела в поступательном движении вводят положительную скалярную величину m, называемую **массой тела.** Чем меньше инертность тела, тем большее ускорение оно должно приобретать под действием какой-либо определенной силы (например, равной единице силы). Следовательно, коэффициент k_1 в формуле (2.2) обратно пропорционален массе тела: $k_1 = k/m$, и

$$\mathbf{a} = k\frac{\mathbf{F}}{m},$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий только от выбора единиц измерения силы, массы и ускорения. Из курса физики средней школы известно, что если все эти величины измеряют в единицах одной системы (системы единиц приведены в Приложении, стр. 368), то $k = 1$ и

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \tag{2.3}$$

Таким образом, *ускорение тела прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела.*

3. Из постоянства для данного тела коэффициента k_1 следует, что *масса тела — величина постоянная*, не зависящая ни от состояния движения тела, ни от его местоположения в пространстве, ни от того, действуют на него другие тела или нет. Поэтому для сравнения масс m_1 и m_2 двух тел достаточно измерить численные значения a_1 и a_2 ускорений, приобретаемых этими телами под действием одной и той же силы. Из (2.3) следует, что

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если взять N совершенно одинаковых тел с массами m каждое и жестко скрепить их друг с другом, то, как показывают опыты, сила $\mathbf{F}$ сообщает такому составному телу ускорение, в N раз меньшее, чем каждому из тел порознь. Следовательно, масса составного тела равна Nm. Иначе говоря, *масса — величина аддитивная*: масса тела равна сумме масс всех частей этого тела. Например, масса тела равна сумме масс всех материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить. Масса системы тел равна сумме масс всех тел, входящих в состав системы.

Обычно массу тела определяют путем взвешивания на рычажных весах. Этот метод основывается на следующей экспериментально установленной закономерности для свободного падения тел: в одной и той же точке земного шара все тела свободно падают с одинаковым ускорением $\mathbf{g}$. Свободное падение вызывается действием силы тяжести тела $\mathbf{P}$, так что по закону (2.3)

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{P}}{m}. \tag{2.4}$$

Поэтому отношение масс двух тел равно отношению их сил тяжести, измеренных в одном и том же месте:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2}{P_1}.$$

При взвешивании тела на рычажных весах сила тяжести тела и сила тяжести гири (или набора гирь) уравновешиваются, так что масса тела и масса гирь должны быть равны. Таким образом, зная массы гирь, можно измерять массы тел, взвешивая их на рычажных весах.

За основную единицу массы, называемую **килограммом** (кг), принимают массу эталонного тела, хранящегося в Международном бюро мер и весов.

4. Инертность тел можно продемонстрировать с помощью ряда опытов. Рассмотрим два из них.

О п ы т 1. Стеклянную колбу ставят на край листа бумаги, лежащей на горизонтальной поверхности стола. Затем, взявшись за другой край листа, медленно тянут его вдоль стола. При этом бумага вместе со стоящей на ней колбой перемещается по столу. Если же бумагу потянуть рывком, то она выдергивается из-под колбы, которая остается стоять на столе. Различное поведение колбы в этих двух случаях непосредственно связано с ее инертностью. Для приведения колбы в движение относительно стола с ускорением **a** к ней нужно приложить горизонтальную силу $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, где m — масса колбы. Роль этой силы может играть только сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ между колбой и листом бумаги. Однако $F_{тр} \leqslant f_0 mg$, где f_0 — коэффициент трения. Поэтому, если ускорение a_1, сообщаемое листу бумаги, невелико ($a_1 < f_0 g$), то сила трения достаточна для сообщения колбе такого же ускорения, так что колба движется вместе с бумагой. Если же ускорение a_1 листа бумаги очень велико, то колба под действием силы трения приобретает ускорение $a = f_0 g \ll a_1$. За очень малое время, в течение которого происходит выдергивание бумаги из-под колбы, последняя не успевает практически сдвинуться с места.

О п ы т 2. Два кольца одинакового размера, вырезанные из ватманской бумаги, подвешивают на одном уровне на горизонтальные стержни, укрепленные в двух штативах. В вырезы колец вставляют тонкую и длинную деревянную планку так, что она своими концами опирается на кольца и висит горизонтально. Затем медленно нажимают массивным металлическим стержнем на середину планки, при этом одно из двух колец рвется, и планка падает на пол. Вновь подвешивают деревянную планку на бумажных кольцах и металлическим стержнем наносят резкий удар по середине планки. В этом случае планка ломается посредине, а бумажные кольца остаются целыми, так как благодаря инертности планки ее концы не успевают за короткое время удара сместиться на столько, чтобы порвать кольца.

5. Уравнение (2.3) описывает изменение движения протяженного тела под действием силы только при условии, что тело не деформируется и движется поступательно. В противном случае ускорения разных

точек тела неодинаковы, и изменение движения всего тела нельзя описать с помощью единого ускорения $\mathbf{a}$.

Материальная точка, по самому смыслу этого понятия, не может ни деформироваться, ни вращаться. Для нее, в отличие от протяженного тела, уравнение (2.3) должно всегда полностью описывать изменение движения под влиянием силы. Поэтому уравнение (2.3) обычно называют **основным уравнением динамики материальной точки.** Оно показывает, что *ускорение материальной точки прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки.*

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$, то, как показывает опыт, ускорение точки

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m},$$

где $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$ — результирующая сила. Иначе говоря, и в динамике силы подчиняются обычному закону сложения векторов. Подставив значение $\mathbf{F}$ в формулу для $\mathbf{a}$, получим

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i,$$

где $\mathbf{a}_i$ — ускорение рассматриваемой материальной точки, вызываемое действием на нее одной силы $\mathbf{F}_i$. Таким образом, *если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то каждая из них сообщает материальной точке такое же ускорение, как если бы других сил не было.* Это утверждение называют **принципом независимости действия сил.**

6. Результирующую силу $\mathbf{F}$, действующую на материальную точку, можно разложить на две составляющие — касательную к траектории точки ($\mathbf{F}_\tau$) и нормальную к ней ($\mathbf{F}_n$):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_n.$$

С другой стороны, в § 1.3 было показано, что ускорение $\mathbf{a}$ материальной точки равно векторной сумме ее касательного ($\mathbf{a}_\tau$) и нормального ($\mathbf{a}_n$) ускорений:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n.$$

Из основного уравнения динамики материальной точки следует, что

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{\mathbf{F}_\tau}{m} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{F}_n}{m},$$

где m — масса материальной точки.

Нормальная сила $\mathbf{F}_n$ так же, как и $\mathbf{a}_n$, направлена к центру кривизны траектории. Поэтому ее обычно называют **центростремительной**

силой. Эта сила вызывает изменение только направления вектора **v** скорости точки, т. е. искривляет ее траекторию. В соответствии с формулой (1.13″) центростремительная сила численно равна

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R}, \tag{2.5}$$

где R — радиус кривизны траектории материальной точки.

Изменение численного значения v скорости точки, характеризуемое касательным ускорением, вызывает касательная сила $\mathbf{F}_\tau$. Если $\mathbf{F}_\tau$ совпадает по направлению с вектором **v**, то точка движется ускоренно $\left(\frac{dv}{dt} > 0\right)$, если $\mathbf{F}_\tau$ противоположна по направлению вектору **v**, то точка движется замедленно $\left(\frac{dv}{dt} < 0\right)$. Наконец, при $\mathbf{F}_\tau = 0$ точка движется равномерно ($v = \text{const}$). Если, кроме того, $F_n = \text{const}$, то и $R = \frac{mv^2}{F_n} = \text{const}$, т. е. точка движется равномерно по траектории с постоянным радиусом кривизны. Из плоских кривых таким свойством обладает окружность, а из пространственных кривых — винтовая линия.

7. **Импульсом,** или **количеством движения, материальной точки** называют вектор $\mathbf{K} = m\mathbf{v}$, где m — масса материальной точки, а **v** — скорость ее движения. Импульс материальной точки является одной из важнейших ее динамических характеристик, зависящей как от быстроты движения точки, так и от ее инертности.

Масса материальной точки постоянна, а ее ускорение **a** связано со скоростью **v** соотношением (1.8): $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.
Поэтому

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{K}}{dt},$$

и уравнение (2.3) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{2.6}$$

Это уравнение является математическим выражением **второго закона Ньютона:** *скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе.*

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил, то в соответствии с принципом независимости действия сил под **F** во втором законе Ньютона надо понимать результирующую силу.

8. Как мы уже отмечали, в ньютоновской механике считают, что масса материальной точки остается постоянной при любых изменениях состояния движения этой точки. Соответственно уравнения (2.3) и (2.6) представляют собой две совершенно эквивалентные формы записи второго закона динамики. Аддитивность и неизменность массы полностью согласовались с представлениями Ньютона о том, что масса

тела определяется количеством вещества, содержащегося в этом теле. Однако в начале XX в. выяснилось, что такое истолкование массы неправильно. После открытия электрона (конец XIX в.) и проведения экспериментальных исследований движения электронов в электрических и магнитных полях было обнаружено, что закон (2.3) отнюдь не универсален. Если скорость электрона близка по величине к скорости c света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), то ускорение электрона не удовлетворяет уравнению (2.3). Оказывается, например, что ускорение электрона совпадает по направлению с вызывающей его силой **F** только в двух частных случаях: если сила **F** параллельна скорости электрона **v** или если она перпендикулярна к **v**. При одних и тех численных значениях **F** и **v** численные значения ускорения электрона оказываются неодинаковыми в этих двух случаях.

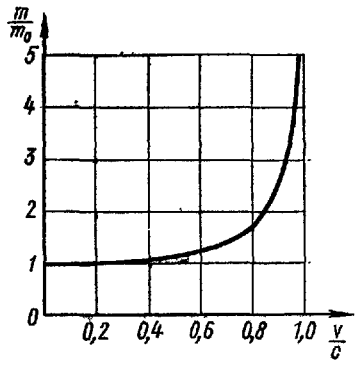

Рис. 2.1.

Все эти особенности поведения электронов при очень больших скоростях движения нашли свое объяснение в специальной теории относительности Эйнштейна, которую мы подробно рассмотрим в III томе. Сейчас же лишь укажем, что в теории относительности изменение движения материальной точки под действием силы **F** полностью описывается уравнением (2.6), причем масса m точки не постоянна, а зависит от скорости **v** по следующему закону:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

где m_0 — **масса покоя** материальной точки, т. е. ее масса при скорости $v = 0$. Из этой формулы видно, что массу движущегося тела нельзя отождествлять с количеством содержащегося в нем вещества. По мере увеличения скорости тела его масса возрастает, а количество вещества в теле, определяемое числом и составом содержащихся в нем атомов и молекул, не изменяется. Согласно современным представлениям масса материальной точки одновременно является мерой ее инерционных и гравитационных свойств (см. § 6.1).

Зависимость массы от скорости становится заметной только при очень больших скоростях, соизмеримых со скоростью света в вакууме (рис. 2.1). Поэтому в классической механике Ньютона, изучающей движения тел со сравнительно малыми скоростями ($v \ll c$), массы тел можно считать постоянными и равными их массам покоя.

9. Перепишем второй закон Ньютона (2.6) в следующем виде:

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}\,dt. \qquad (2.6')$$

Вектор $\mathbf{F}\,dt$ называют **элементарным импульсом силы** за малый промежуток времени ее действия dt. Таким образом, *изменение импульса материальной точки за малый промежуток времени dt равно элементарному импульсу за тот же промежуток времени результирующей силы, действующей на материальную точку.* Соответственно изменение импульса материальной точки за конечный промежуток времени от t до $t+\Delta t$ равно

$$\Delta(m\mathbf{v}) = \int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{F}\,dt, \qquad (2.6'')$$

где $\int_{t}^{t+\Delta t} \mathbf{F}\cdot dt$ — импульс результирующей силы $\mathbf{F}$ за рассматриваемый промежуток времени.

Если на материальную точку действует постоянная сила ($\mathbf{F} = \text{const}$), то импульс точки является линейной функцией времени:

$$m\mathbf{v} = \int_{0}^{t} \mathbf{F}\,dt + m\mathbf{v}_0 = \mathbf{F}t + m\mathbf{v}_0, \qquad (2.7)$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость материальной точки в момент начала отсчета времени ($t = 0$). В частности, если $\mathbf{F} = 0$, то импульс точки не изменяется — она движется равномерно и прямолинейно в соответствии с первым законом Ньютона.

Из (2.7) следует, что приращение импульса за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно

$$\Delta(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}(t_2 - t_1) = \mathbf{F}\Delta t, \qquad (2.7')$$

т. е. изменение импульса материальной точки под действием постоянной силы равно произведению силы на продолжительность промежутка времени, в течение которого произошло это изменение.

Если сила $\mathbf{F}$ переменная, то

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \mathbf{F}_{ср}(t_2 - t_1). \qquad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{F}_{ср}$ — среднее значение переменной силы $\mathbf{F}$ в интервале времени от t_1 до t_2, т. е. такая постоянная сила, импульс которой за промежуток времени $t_2 - t_1$ равен импульсу переменной силы $\mathbf{F}$ за тот же промежуток времени.

§ 2.4. Третий закон Ньютона. Движение центра инерции

1. Наблюдения и опыты показывают, что механическое воздействие двух тел друг на друга всегда представляет собой их взаимодействие: если тело *1* действует на тело *2*, то при этом тело *2* в свою очередь действует на тело *1*. Так, например, Луна дви-

жется по своей орбите под влиянием тяготения к Земле. В то же самое время на Землю действует тяготение Луны, которое вызывает, в частности, периодически повторяющиеся морские приливы и отливы. Человек, прыгая с лодки на берег, отталкивает лодку назад, а на него со стороны лодки действует сила, направленная вперед. Поэтому человек и лодка движутся в прямо противоположных направлениях. При столкновении двух биллиардных шаров одновременно изменяются скорости обоих шаров, т. е. каждый из них действует на другой. На ведущие колеса электровоза действуют со стороны рельс силы трения покоя, направленные в сторону движения электровоза и обусловливающие его силу тяги. В свою очередь ведущие колеса действуют на рельсы с силами трения покоя, имеющими прямо противоположное направление.

2. На основе количественного анализа механического взаимодействия тел Ньютон установил свой **третий закон динамики**, который можно сформулировать следующим образом: *действия двух тел друг на друга всегда равны и направлены по одной прямой в противоположные стороны*, т. е.

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \tag{2.9}$$

Здесь $\mathbf{F}_{12}$— сила, действующая на первое тело со стороны второго, а $\mathbf{F}_{21}$— сила, действующая на второе тело со стороны первого. Следует отметить, что силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ приложены к разным телам и потому не уравновешивают друг друга.

В дальнейшем мы будем пользоваться третьим законом Ньютона, сформулированным применительно к взаимодействию двух материальных точек: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, которые численно равны и направлены во взаимно противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

Третий закон Ньютона является существенным дополнением к его первому и второму законам, так как позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной системы материальных точек, т. е. произвольной механической системы.

3. В динамике широко пользуются понятием центра инерции механической системы. **Центром инерции**, или **центром масс**, системы материальных точек называют такую точку C, радиус-вектор которой

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i, \tag{2.10}$$

где m_i и $\mathbf{r}_i$ — масса и радиус-вектор i-й точки системы, m — общая масса всей системы, а n — число материальных точек, входящих в состав системы. Соответственно соотношения между декартовыми координатами центра инерции и всех точек системы имеют вид

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \text{и} \quad z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{2.10'}$$

Как известно из курса физики средней школы, **центром тяжести системы** называют точку приложения равнодействующей параллельных сил тяжести всех частей системы. Радиус-вектор центра тяжести равен

$$\mathbf{r}_{\text{ц. т.}} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} P_i \mathbf{r}_i,$$

где P_i — численное значение силы тяжести i-й материальной точки, $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$. Так как $P_i = m_i g$ и $P = mg$, где g — численное значение ускорения свободно падающих тел, то центр тяжести системы совпадает с ее центром инерции:

$$\mathbf{r}_{\text{ц. т}} = \frac{1}{mg} \sum_{i=1}^{n} m_i g \mathbf{r}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C.$$

В этом выводе мы предполагали, что величина g одинакова во всех точках системы. Такое допущение справедливо, если линейные размеры системы во много раз меньше радиуса Земли.

4. Скорость центра инерции системы

$$\mathbf{v}_C = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i, \qquad (2.11)$$

где $\mathbf{v}_i$ — скорость i-й материальной точки. Геометрическую сумму импульсов всех материальных точек системы называют **импульсом системы** $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i.$$

Таким образом, из (2.11) следует, что импульс системы равен произведению массы всей системы на скорость ее центра инерции:

$$\mathbf{K} = m \mathbf{v}_C. \qquad (2.12)$$

5. Тела, не входящие в состав рассматриваемой механической системы, называют **внешними телами,** а силы, действующие на систему со стороны этих тел,— **внешними силами.** Соответственно, силы взаимодействия между материальными точками, принадлежащими рассматриваемой системе, называют **внутренними силами.**

Если $\mathbf{F}_{ik}$ — сила, действующая на i-ю точку системы со стороны k-й, то результирующая всех внутренних сил, приложенных к i-й точке, равна

$$\mathbf{F}_i^{\text{внутр}} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} \mathbf{F}_{ik} = \mathbf{F}_{i1} + \mathbf{F}_{i2} + \cdots + \mathbf{F}_{i,\,i-1} + \mathbf{F}_{i,\,i+1} + \cdots + \mathbf{F}_{in}. \qquad (2.13)$$

В сумме, стоящей справа, индекс k пробегает все значения от 1 до n, кроме i, так как i-я точка не может действовать сама на себя. Обозначим через $\mathbf{F}_i^{\text{внеш}}$ результирующую всех внешних сил, приложенных к i-й точке системы. Тогда по второму закону Ньютона можно написать следующую систему уравнений движения всех материальных точек системы:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1) = \mathbf{F}_1^{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \cdots + \mathbf{F}_{1n},\\
&\frac{d}{dt}(m_2\mathbf{v}_2) = \mathbf{F}_2^{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \cdots + \mathbf{F}_{2n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d}{dt}(m_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{F}_n^{\text{внеш}} + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \cdots + \mathbf{F}_{n,\,n-1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Складывая почленно эти уравнения и группируя попарно силы $\mathbf{F}_{ik}$ и $\mathbf{F}_{ki}$, находим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{\text{внеш}} + (\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{F}_{13}+\mathbf{F}_{31}) + \cdots + (\mathbf{F}_{n-1,\,n}+\mathbf{F}_{n,\,n-1}).$$

Согласно третьему закону Ньютона $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, поэтому все скобки в правой части этого уравнения равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{\text{внеш}}$$

Так как производная от суммы равна сумме производных от всех слагаемых, то

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{K}}{dt},$$

где $\mathbf{K}$ — импульс системы. Силу $\mathbf{F}$, равную сумме всех внешних сил, приложенных к системе:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i^{\text{внеш}},$$

называют **главным вектором внешних сил.** Таким образом, окончательно можно написать

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F}. \qquad (2.15)$$

Это уравнение, полученное нами с помощью второго и третьего законов Ньютона, является обобщением уравнения (2.6) на произвольную механическую систему, так как ее всегда можно мысленно представить в виде системы материальных точек, взаимодействующих друг с другом и с внешними телами. Оно показывает, что *скорость изменения импульса механической системы равна главному вектору всех внешних сил, действующих на эту систему.*

В проекциях на оси декартовой системы координат векторное уравнение (2.15) эквивалентно системе трех уравнений:

$$\frac{dK_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dK_y}{dt} = F_y \quad \text{и} \quad \frac{dK_z}{dt} = F_z, \tag{2.15'}$$

причем

$$K_x = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{ix}, \quad K_y = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iy} \quad \text{и} \quad K_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_{iz}.$$

6. С помощью формулы (2.12) можно переписать уравнение (2.15) в форме

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C) = \mathbf{F}, \quad \text{или} \quad m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{a}_C = \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}$ — ускорение центра инерции системы, а m — масса всей системы.

Таким образом, *центр инерции механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.*

В общем случае движение твердого тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного со скоростью $\mathbf{v}$, равной скорости $\mathbf{v}_C$ центра инерции тела, и вращения вокруг центра инерции. Поэтому уравнение (2.16) часто называют основным уравнением динамики поступательного движения твердого тела.

7. Рассмотрим несколько примеров.

а. Лошадь тянет повозку вперед с такой же силой, с какой повозка тянет лошадь назад. Под действием одних этих в н у т р е н н и х сил система лошадь — повозка не могла бы сдвинуться с места. Все дело в том, что лошадь тянет повозку, упираясь при этом в землю. Следовательно, на лошадь действует со стороны земли горизонтальная внешняя сила — сила трения, которая и приводит в движение систему лошадь — повозка.

б. При переходе человека с носа на корму лодки, которая первоначально стояла неподвижно на спокойной воде озера, лодка перемещается относительно берега в противоположном направлении. Если бы не было сопротивления воды движению лодки, то при переходе человека лодка должна была бы перемещаться таким образом, чтобы центр инерции системы лодка — человек оставался в покое относи-

тельно берега. Благодаря действию горизонтальной внешней силы **F** сопротивления воды перемещение лодки несколько уменьшается. Соответственно центр инерции системы смещается относительно берега в направлении вектора **F**, т. е. в направлении перемещения человека.

в. Пренебрегая сопротивлением воздуха, можно считать, что на летящий снаряд действует единственная внешняя сила — сила его тяжести $m\mathbf{g}$. Поэтому центр инерции снаряда движется с ускорением свободного падения **g**. Пусть после разрыва в воздухе осколки снаряда разлетаются в разные стороны с различными начальными скоростями. Однако если и для осколков можно пренебречь влиянием сопротивления воздуха, то общий центр инерции всех осколков должен продолжать двигаться с ускорением **g** по той же траектории, по которой он двигался бы, если бы снаряд не разорвался.

8. До сих пор мы предполагали, что масса тела остается постоянной, так как само тело не изменяется в процессе его движения. Однако это условие далеко не всегда выполняется. Например, продукты сгорания запасенного в ракете топлива выбрасываются из сопла ракетного двигателя и масса ракеты уменьшается по мере сгорания топлива. Уравнение поступательного движения тела переменной массы впервые было предложено профессором Петербургского университета И. В. Мещерским (1897). Для вывода этого уравнения воспользуемся дифференциальным уравнением (2.15) для поступательного движения системы, состоящей из тела переменной массы и присоединяющихся или отделяющихся от него частиц. Если в момент времени t масса тела и его скорость равны m и $\mathbf{v}$, а в момент времени $t + dt$ они равны $m + dm$ и $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, то изменение импульса системы тело — частицы, присоединившиеся (отделившиеся) за время dt, равно

$$d\mathbf{K} = (m + dm)\ (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - m\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \cdot dm,$$

где $\mathbf{v}_1$ — скорость присоединяющихся частиц (если $\frac{dm}{dt} > 0$) до присоединения или отделяющихся частиц (если $\frac{dm}{dt} < 0$) после отделения. В результате простых преобразований получим

$$d\mathbf{K} = m \cdot d\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)\, dm + dm \cdot d\mathbf{v}.$$

Третий член в правой части этого уравнения можно отбросить, так как он является малым высшего порядка малости по сравнению с остальными двумя членами. Поэтому

$$d\mathbf{K} = m \cdot d\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)\, dm.$$

Из уравнения (2.15) следует, что $d\mathbf{K} = \mathbf{F} \cdot dt$, где **F** — главный вектор внешних сил. Таким образом,

$$m \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot dt + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) dm = \mathbf{F} \cdot dt + \mathbf{u} \cdot dm,$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ — скорость присоединяющихся или отделяющихся частиц по отношению к телу, называемая их **относительной скоростью.**

Уравнение движения тела переменной массы имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_p, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ — ускорение тела, а дополнительную силу

$$\mathbf{F}_p = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})\frac{dm}{dt} = \mathbf{u} \cdot \frac{dm}{dt}, \tag{2.17'}$$

обусловленную переменностью массы тела, называют **реактивной силой.**

9. Идея применения реактивной силы для создания летательных аппаратов высказывалась уже давно. Так, в 1881 г. революционер-народоволец Н. И. Кибальчич, находясь в Петропавловской крепости перед казнью за участие в убийстве царя Александра II, составил проект реактивного летательного аппарата. Однако этот проект, затерявшийся в тюремных архивах, был обнаружен лишь после Великой Октябрьской социалистической революции. Вся жизнь выдающегося ученого и изобретателя К. Э. Циолковского была посвящена вопросам ракетной техники и применению ракет для межпланетных сообщений. Уже в 1903 г. он опубликовал статью, в которой была рассмотрена теория движения ракеты и впервые были даны основы теории жидкостного реактивного двигателя. Теория воздушно-реактивного двигателя впервые была опубликована в 1929 г. академиком Б. С. Стечкиным.

Из-за ряда технических трудностей широкое развитие реактивной и ракетной техники началось лишь в период второй мировой войны и особенно после ее окончания. Применение реактивных двигателей в авиации позволило во много раз увеличить скорости самолетов. Например, скорость современного транспортного самолета ТУ-144 в четыре раза превосходит скорость истребителей с поршневыми двигателями внутреннего сгорания, применявшихся в период второй мировой войны и составляет около 2500 км/ч. Ракетная техника явилась той базой, на основе которой стали возможными запуски искусственных спутников Земли, пилотируемых космических кораблей и автоматических орбитальных, лунных и межпланетных станций.

§ 2.5. Закон сохранения импульса

1. Механическую систему называют **замкнутой,** или **изолированной,** если на нее не действуют внешние силы, т. е. если она не взаимодействует с внешними телами. Строго говоря, каждая реальная система тел всегда не замкнута, так как подвержена, например, тяготению со стороны внешних тел. Однако если внутренние силы в системе во много раз превосходят внешние, то такую систему приближенно можно считать замкнутой. Например, наша Солнечная система находится на таких гигантских расстояниях даже до ближайших к к ней звезд, что их тяготение не играет практически никакой роли в движении планет. Оно определяется взаимодействием планет с Солн-

цем и, в значительно меньшей степени, друг с другом. Поэтому с довольно большой степенью точности можно считать Солнечную систему замкнутой. При выстреле из орудия силы взаимодействия орудия и снаряда намного превосходят все внешние силы, действующие на орудие и снаряд. Поэтому в процессе выстрела можно рассматривать систему орудие — снаряд как замкнутую.

2. Для замкнутой системы главный вектор внешних сил тождественно равен нулю. Поэтому из (2.15) вытекает следующий закон, называемый **законом сохранения импульса:** *импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени*, т. е.

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \text{const}, \tag{2.18}$$

где m_i и $\mathbf{v}_i$ — масса и скорость i-й материальной точки системы, а n — общее число материальных точек, входящих в состав системы. Так как согласно (2.12) $\mathbf{K} = m\mathbf{v}_C$, где m — масса всей системы, а $\mathbf{v}_C$ — скорость ее центра инерции, то из (2.18) следует, что *при любых процессах, происходящих в замкнутой системе, скорость ее центра инерции сохраняется неизменной.*

3. Закон сохранения импульса является одним из основных законов природы. Мы получили его как следствие законов Ньютона. Однако это вовсе не означает, что закон сохранения импульса справедлив лишь в тех пределах, в каких выполняются законы Ньютона и построенная на них классическая ньютоновская механика. Например, процессы, происходящие в микромире, описываются не ньютоновской, а квантовой механикой. Между тем эксперименты убедительно свидетельствуют о том, что закон сохранения импульса в равной мере справедлив как для замкнутой системы макроскопических тел, так и для замкнутой системы микрочастиц. Этот фундаментальный закон природы, как показывается в теоретической физике, является следствием определенного физического свойства пространства — его однородности. Однородность пространства означает, что параллельный перенос в нем замкнутой системы как целого (иначе говоря, изменение выбора начала системы координат) не должно отражаться на физических свойствах системы и законах ее движения.

4. Если система не замкнутая, но главный вектор внешних сил $\mathbf{F} = 0$, то в соответствии с уравнением (2.15) импульс системы остается постоянным так же, как если бы внешних сил не было совсем.

Обычно приходится иметь дело с незамкнутыми системами, для которых главный вектор внешних сил $\mathbf{F} \not\equiv 0$ и импульс $\mathbf{K} \not\equiv \text{const}$. Однако, как видно из уравнений (2.15′), *если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось, неподвижную относительно инерциальной системы отсчета, тождественно равна нулю, то проекция на эту же ось вектора импульса системы не зависит от времени.* Например, если $F_x \equiv 0$, то

$$\frac{dK_x}{dt} \equiv 0 \quad \text{и} \quad K_x = \text{const}.$$

Этот закон называют **законом сохранения проекции импульса.** Его можно продемонстрировать с помощью тяжелого маятника, установленного на тележке, которая имеет возможность свободно перемещаться по горизонтальным рельсам практически без всякого трения (рис. 2.2). Если, придерживая тележку, отклонить маятник от положения равновесия, а затем одновременно отпустить маятник и тележку, то они оба приходят в движение. Скорость тележки всегда противоположна по направлению горизонтальной составляющей скорости центра инерции маятника. В те моменты времени, когда при колебаниях шар маятника проходит через положения наибольших отклонений и имеет нулевую скорость, тележка также останавливается.

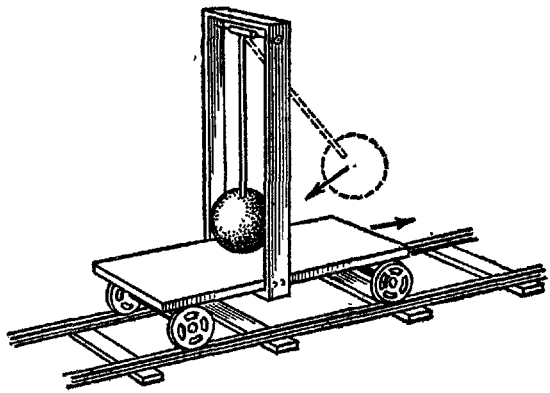

Рис. 2.2.

4. Рассмотрим применение закона сохранения импульса к расчету абсолютно неупругого прямого центрального удара двух тел. **Ударом** называют явление изменения скоростей тел на конечные величины за очень малый промежуток времени, происходящее при их столкновениях. В процессе удара возникают кратковременные ударные силы взаимодействия между сталкивающимися телами, причем величина этих сил во много раз превосходит величины всех остальных сил, действующих на тела, например, их сил тяжести. Поэтому в процессе удара систему соударяющихся тел можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса. Общую нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения называют **линией удара.** Удар называют **прямым,** если перед ударом скорости центров инерции соударяющихся тел параллельны линии удара. Удар называют **центральным,** если центры инерции соударяющихся тел лежат на линии удара. Прямой центральный удар называют **абсолютно неупругим,** если после удара тела движутся как одно целое, т. е. с одной и той же скоростью.

Если скорости тел до удара равны $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, а их массы равны m_1 и m_2, то в соответствии с законом сохранения импульса общая скорость $\mathbf{u}$ тел после абсолютно неупругого прямого центрального удара равна

$$\mathbf{u} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (2.19)$$

Скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ могут быть направлены как в одну и ту же, так и в противоположные стороны. Об этом нужно помнить при определении численного значения скорости $\mathbf{u}$.

§ 2.6. Механический принцип относительности

1. Из данного в § 2.1 определения инерциальной системы отсчета следует, что во всех инерциальных системах отсчета ускорение изолированной материальной точки должно быть равно нулю. Это позволяет установить, как должна двигаться относительно инерциальной системы отсчета какая-либо другая система отсчета для того, чтобы она также была инерциальной. Оказывается, что две инерциальные системы отсчета могут двигаться друг относительно друга только поступательно и притом равномерно и прямолинейно. Вопрос о неинерциальности системы отсчета, обусловленной ее вращением или ускоренным поступательным движением, будет подробно рассмотрен в VII главе. Здесь же мы ограничимся доказательством достаточности высказанного выше ограничения возможных относительных движений двух инерциальных систем отсчета.

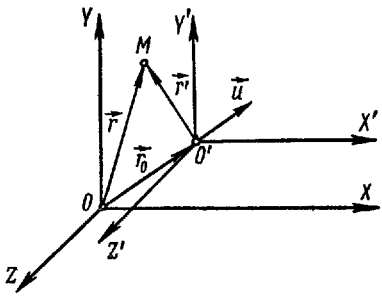

Рис. 2.3.

2. Рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему X, Y, Z, которую будем условно считать неподвижной, и подвижную систему X', Y', Z', скорость которой в поступательном движении $\mathbf{u} = \text{const}$. Примем для упрощения задачи, что в начальный момент времени $t = 0$ начала O и O' обеих систем координат и сходственные оси совпадают. Тогда взаимное расположение этих систем в произвольный момент времени t имеет вид, изображенный на рис. 2.3. Скорость $\mathbf{u}$ направлена вдоль прямой OO', а радиус-вектор, проведенный из O в O', $\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}t$. Положение произвольной материальной точки M в неподвижной и подвижной системах отсчета определяется радиусами-векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, причем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t. \tag{2.20}$$

В проекциях на оси координат это векторное равенство записывают в следующем виде, называемом **преобразованием координат Галилея:**

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + u_x t; \\ y &= y' + u_y t; \\ z &= z' + u_z t. \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

В классической ньютоновской механике принимают, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчета. Поэтому систему (2.21) можно дополнить еще одним уравнением:

$$t = t'. \tag{2.21'}$$

Дифференцируя уравнение (2.20) по времени и учитывая, что $\mathbf{u} = \text{const}$, найдем соотношение между скоростями и ускорениями точки M относительно обеих систем отсчета:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \tag{2.22}$$

Если точка M не подвержена действию других тел, то $\mathbf{a} = 0$. Поскольку $\mathbf{a}'$ также равно нулю, рассматриваемая нами подвижная система действительно является инерциальной — изолированная материальная точка либо движется относительно нее равномерно и прямолинейно, либо покоится.

3. В общем случае силы взаимодействия между телами зависят от взаимного расположения этих тел и от скоростей их движения друг относительно друга. Из соотношений (2.20) и (2.22) следует, что для любых двух материальных точек *1* и *2*

$$\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

Следовательно, силы, действующие на данную материальную точку (или тело) со стороны других тел, одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, т. е.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'. \tag{2.23}$$

Из соотношений (2.22) и (2.23) для инерциальных систем отсчета следует, что

$$\frac{F'}{a'} = \frac{F}{a} = m.$$

Таким образом, *уравнения Ньютона для материальной точки, а также для произвольных систем материальных точек одинаковы во всех инерциальных системах отсчета* — инвариантны по отношению к преобразованию Галилея.

Этот результат называется **механическим принципом относительности (принципом относительности Галилея)** и часто формулируется следующим образом: *равномерное и прямолинейное движение* (относительно какой-либо инерциальной системы отсчета) *замкнутой системы не влияет на закономерности протекания в ней механических процессов.*

Следовательно, в механике все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. На основе законов механики нельзя выделить из множества инерциальных систем отсчета какую-то «главную» инерциальную систему отсчета, которая обладала бы какими-либо преимуществами перед другими, так что движение тел относительно нее можно было бы рассматривать как их «абсолютное движение», а покой — как «абсолютный покой».

Вопросы для повторения

1. Что называют массой тела? Какой смысл вкладывают в понятие силы?
2. Сформулируйте три закона Ньютона. В каких системах отсчета они справедливы? Какова взаимосвязь между этими законами?

3. В чем состоит закон сохранения импульса? К каким системам он применим? Дайте вывод этого закона и приведите примеры, иллюстрирующие этот закон.

4. Выведите уравнение движения тела переменной массы. От чего зависит величина реактивной силы? Как направлена эта сила?

5. Как могут двигаться друг относительно друга инерциальные системы отсчета? Напишите преобразование Галилея.

6. В чем состоит механический принцип относительности?

Примеры решения задач

Задача 2.1. К веревке подвешен груз. Груз поднимают первый раз с ускорением 2 м/с^2 и второй раз с ускорением 8 м/с^2. В первом случае натяжение веревки 98,1 Н Во втором случае натяженне веревки таково,что она обрывается. Найти массу груза и натяжение веревки при обрыве.

Дано

$a_1 = 2$ м/с^2,
$a_2 = 8$ м/с^2,
$F_1 = 98{,}1$ Н

m — ?
F_2 — ?

Решение

Груз приобретает ускорение **a**, направленное вертикальнио вверх, под действием двух вертикальных сил: силы тяжести **P** (направлена вниз) и реакции **R** веревки (направлена вверх) По второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{P} + \mathbf{R},$$

или

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$$

Все векторы, входящие в это уравнение, направлены вдоль одной прямой. Поэтому в проекции на направление вектора $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ оно имеет вид

$$-ma = mg - R,$$

откуда

$$m = \frac{R}{g + a}.$$

По третьему закону Ньютона сила **F** натяжения веревки телом численно равна реакции веревки: $F = R$. Следовательно,

$$m = \frac{F}{g + a} = \frac{F_1}{g + a_1} = \frac{F_2}{g + a_2}.$$

Поэтому искомая сила

$$F_2 = F_1 \frac{g + a_2}{g + a_1}.$$

Вычисления производнм в Международной системе единиц (СИ)

1) проверка размерности результатов:

$$[m] = \frac{[F_1]}{[g + a_1]} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-2}} = M,$$

$$[F_2] = [F_1] \frac{[g + a_2]}{[g + a_1]} = [F_1] = MLT^{-2};$$

2) вычисления:

$$m = \frac{98{,}1}{9{,}81 + 2} \text{ кг} = 8{,}31 \text{ кг},$$

$$F_2 = 98{,}1\,\frac{9{,}81+8}{9{,}81+2}\ \text{Н} = 148\ \text{Н}.$$

Задача 2.2. Летчик давит на сиденье кресла в нижней точке петли Нестерова с силой 6250 Н. Радиус петли 250 м. Определить скорость самолета, если сила тяжести летчика 780 Н.

Дано

$F = 6250$ Н,
$P = 780$ Н,
$r = 250$ м,
$g = 9{,}81$ м/с^2

v — ?

Решение

В нижней точке петли летчик движется по дуге окружности под действием центростремительной силы $\mathbf{F}_1$, которая является равнодействующей силы тяжести летчика $\mathbf{P}$ и реакции сиденья $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{P} + \mathbf{R}.$$

Силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{R}$ направлены вертикально вверх, а сила $\mathbf{P}$ — вертикально вниз. Поэтому

$$F_1 = R - P.$$

По третьему закону Ньютона реакция сиденья $\mathbf{R}$ численно равна силе $\mathbf{F}$, прижимающей летчика к сиденью. Следовательно,

$$F_1 = F - P. \qquad \text{(а)}$$

По формуле (2.10) центростремительная сила

$$F_1 = \frac{mv^2}{r}, \text{ или } F_1 = \frac{Pv^2}{gr}.$$

Подставив это выражение в уравнение (а), получим

$$\frac{Pv^2}{gr} = F - P,$$

откуда

$$v = \sqrt{gr\left(\frac{F}{P} - 1\right)}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
1) проверка размерности результата:

$$[v] = [g]^{1/2} \cdot [r]^{1/2} = L^{1/2}T^{-1}L^{1/2} = LT^{-1};$$

2) вычисления:

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 250\left(\frac{6250}{780} - 1\right)}\ \text{м/с} = 131\ \text{м/с}.$$

Глава III

ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

§ 3.1. Энергия, работа и мощность

1. В § 2.3 мы познакомились с понятием импульса тела, являющегося мерой его поступательного движения. Однако эта динамическая характеристика тела не может служить универсальной мерой для всех форм движения. Покажем это на примерах.

1) Если однородное тело, например цилиндр или шар, равномерно вращается вокруг неподвижной оси его симметрии, то, как легко проверить, векторная сумма импульсов всех его материальных точек равна нулю при л ю б о й угловой скорости тела. Следовательно, импульс тела не может быть мерой вращательного движения тела.

2) Две гири массами в 1 кг и 2 кг, свободно падая на Землю с высот, соответственно равных 20 и 5 м, имеют у поверхности Земли одинаковые по величине импульсы. Между тем, как показывают опыты, при ударе о Землю первая гиря способна сжать две одинаковые пружины на столько же, на сколько вторая гиря может сжать только одну из этих пружин. Таким образом, импульс не может полностью количественно характеризовать динамические свойства тел даже в поступательном движении.

3) Рассмотрим равномерное прямолинейное движение тела, происходящее с трением. В этом случае сила трения $\mathbf{F}_{тр}$ уравновешивается силой $\mathbf{F}$, приложенной к телу, причем $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_{тр}$. Трение, как известно, влечет за собой нагревание, связанное с преобразованием механического движения трущихся тел в беспорядочное тепловое движение молекул, из которых состоят тела. Однако вектор импульса тела $m\mathbf{v}$ при равномерном прямолинейном движении остается постоянным и никак не характеризует количество выделившейся теплоты.

2. Единой мерой различных форм движения служит физическая величина, называемая **энергией.** Энергия механической системы количественно характеризует эту систему с точки зрения возможных в ней количественных и качественных превращений движения. Эти превращения обусловлены взаимодействием тел системы как между собой, так и с внешними (по отношению к системе) телами.

Движение является неотъемлемым свойством материи. Поэтому всякое тело обладает энергией или, как часто говорят, запасом энергии, являющейся мерой его движения. Для количественной характеристики качественно различных форм движения, изучаемых в физике, вводятся соответствующие им виды (формы) энергии — механическая, внутренняя (см. § 10.1), электромагнитная и т. д. В этой главе мы ограничимся рассмотрением механической энергии, соответствующей механическому движению тел и связанным с ним взаимодействиям.

3. Изменение механического движения и энергии тела происходит в процессе силового взаимодействия этого тела с другими телами. Для количественной характеристики этого процесса в механике вводят

понятие **работы**, совершаемой силой. Если рассматриваемая сила **F** постоянна, а тело, к которому она приложена, движется поступательно и прямолинейно, то, как известно из курса средней школы, работой, совершаемой силой **F** при прохождении телом пути s, называют величину

$$A = Fs\cos\alpha = F_\tau s, \tag{3.1}$$

где α — угол между силой **F** и направлением движения тела, т. е. точки приложения силы, а $F_\tau = F\cos\alpha$ — проекция силы **F** на направление вектора **v** скорости тела (рис. 3.1).

В общем случае тело может двигаться произвольным, достаточно сложным образом, а сила **F** — изменяться, так что формулой (3.1) пользоваться нельзя. Однако рассматривая достаточно малое (элементарное) перемещение тела, можно считать силу **F** постоянной, а движение точки ее приложения — прямолинейным. Поэтому **элементарной работой**, совершаемой произвольной силой **F** при перемещении точки ее приложения на малое расстояние ds, называют величину

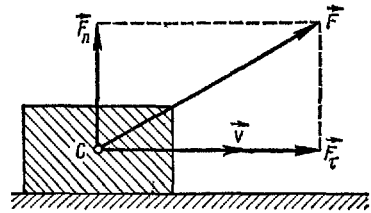

Рис. 3.1

$$\delta A = F\cos\alpha\, ds = F_\tau ds. \tag{3.1'}$$

Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы, то $ds = |d\mathbf{r}|$ и $F\cos\alpha\, ds = (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$ — скалярное произведение векторов силы **F** и элементарного перемещения $d\mathbf{r}$ точки ее приложения. Следовательно, формулу (3.1′) можно также записать в виде

$$\delta A = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v})dt, \tag{3.1''}$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — скорость точки приложения силы.

Нужно заметить, что в общем случае сила **F**, действующая на материальную точку, изменяется вместе с изменением координат этой точки. Иными словами, **F** является функцией трех координат, а ее касательная составляющая $\mathbf{F}_\tau$, кроме того, зависит от направления элементарного перемещения $d\mathbf{r}$. Поэтому, как показывается в математике, элементарная работа, равная $(\mathbf{F}, d\mathbf{r})$, или $F\cos\alpha\, ds$, вообще говоря, не является полным дифференциалом какой-либо функции координат. Следовательно ее нельзя обозначать через dA, так как для функций многих переменных d — общепринятый в математике символ полного дифференциала На основании сказанного мы применяем для элементарной работы символ δA.

4. Работа, совершаемая силой **F** на конечном пути s, равна сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути; эта сумма приводится к интегралу:

$$A = \int_0^s F\cos\alpha\, ds = \int_0^s F_\tau\, ds. \tag{3.2}$$

Если величина F_τ касательной составляющей силы $\mathbf{F}$ задана как функция от длины пути s (рис. 3.2), то, как видно из уравнения (3.2), работа A, совершаемая силой $\mathbf{F}$ на пути s, измеряется площадью, заштрихованной на рис. 3.2. Если $\mathbf{F}_\tau$ не зависит от s ($F_\tau = \text{const}$), то

$$A = F_\tau s.$$

Из уравнения (3.1′) видно, что сила, действующая на тело, не совершает работы, если:

а) точка приложения силы покоится ($ds = 0$);

б) сила перпендикулярна к направлению перемещения $d\mathbf{r}$ точки ее приложения ($\alpha = 90°$; $F_\tau = 0$).

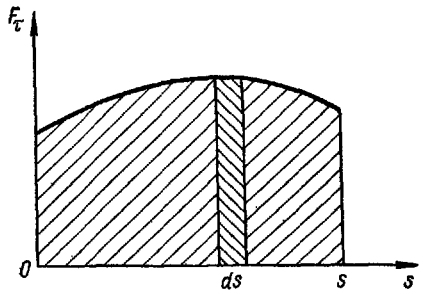

Рис. 3.2.

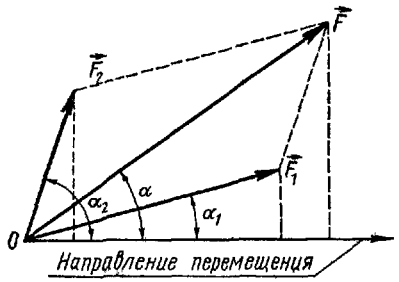

Рис. 3.3.

В последнем случае сила лишь искривляет траекторию движущегося тела. Таково, например, действие центростремительной силы на материальную точку, равномерно движущуюся по окружности.

Если угол $\alpha < 90°$, то работа силы $\mathbf{F}$ положительна. В этом случае составляющая $\mathbf{F}_\tau$ силы совпадает по направлению с вектором $\mathbf{v}$ скорости точки приложения силы. Поэтому силу $\mathbf{F}$ называют **движущей силой**. Если угол $\alpha > 90°$, то работа силы $\mathbf{F}$ отрицательна. В этом случае $\mathbf{F}_\tau$ и $\mathbf{v}$ противоположны по направлению, поэтому силу $\mathbf{F}$ называют **силой сопротивления.** Примером силы сопротивления может служить сила трения скольжения.

5. Пусть на материальную точку одновременно действуют несколько сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ (на рис. 3.3 принято, что $n = 2$). Тогда алгебраическая сумма работ, совершаемых всеми этими силами на малом перемещении $d\mathbf{r}$ материальной точки, равна работе, совершаемой на том же перемещении результирующей силой $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i \, ds = ds \sum_{i=1}^{n} F_{i_\tau} = F_\tau ds.$$

В случае протяженного тела силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ могут быть приложены в разных точках тела, перемещения которых за одно и то же малое время dt также могут быть неодинаковы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i),$$

где $d\mathbf{r}_i$— перемещение за рассматриваемое время dt точки приложения силы $\mathbf{F}_i$. Если тело можно считать твердым и оно движется п о с т у п а т е л ь н о, то перемещения всех его точек за время dt одинаковы: $d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_k = d\mathbf{r}$ и

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$— главный вектор внешних сил, приложенных к телу.

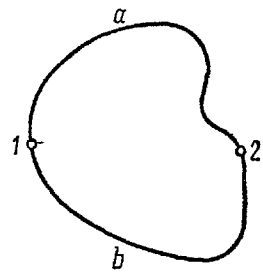

Рис. 3.4.

6. Силу $\mathbf{F}$, действующую на материальную точку, называют **консервативной**, или **потенциальной**, если работа A_{1-2}, совершаемая этой силой при перемещении точки из одного произвольного положения (*1*) в другое (*2*), не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло:

$$A_{1-a-2} = A_{1-b-2} = A_{1-2},$$

где A_{1-a-2}— работа при перемещении точки из положения *1* в *2* по траектории *1 — a — 2* (рис. 3.4), A_{1-b-2}— вдоль траектории *1 —b—2*. Изменение направления движения точки вдоль траектории на противоположное вызывает изменение знака работы консервативной силы, так как величина F_τ в выражении (3.2) меняет свой знак. Поэтому *при перемещении материальной точки вдоль замкнутой траектории L, например 1—a—2—b—1, работа консервативной силы тождественно равна нулю*:

$$\oint_{(L)} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} \equiv 0. \qquad (3.2')$$

Примерами консервативных сил могут служить силы всемирного тяготения (см. гл. VI), силы упругости (см. гл. V), силы электростатического взаимодействия между заряженными телами.

Из тождества (3.2′) следует, как доказывается в математике, что подынтегральное выражение $(\mathbf{F}, d\mathbf{r})$, т. е. элементарная работа консервативных сил, представляет собой полный дифференциал функции координат.

Все силы, не удовлетворяющие условию (3.2′), называются **неконсервативиыми.** Характерным примером таких сил являются силы трения скольжения. Сила трения скольжения всегда направлена в

сторону, противоположную направлению движения, так что $\cos\alpha \equiv \equiv -1$. Поэтому работа силы трения скольжения при перемещении точки ее приложения вдоль замкнутой траектории всегда отрицательна и никогда не равна нулю.

7. Для характеристики скорости совершения работы силой вводится понятие мощности. **Мощностью** N силы $\mathbf{F}$ называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой этой силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \tag{3.3}$$

Подставляя в эту формулу выражение (3.1′) для элементарной работы, получим

$$N = F\cos\alpha\frac{ds}{dt} = Fv\cos\alpha = F_\tau v = (\mathbf{F}, \mathbf{v}), \tag{3.4}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость точки приложения силы.

Следовательно, мощность (или мгновенная мощность) силы равна произведению численных значений касательной составляющей силы и скорости движения, т. е. скалярному произведению векторов силы и скорости. Если $N \neq \text{const}$, то часто пользуются средней мощностью $N_{ср}$ за некоторый конечный промежуток времени t, в течение которого сила совершила работу A:

$$N_{ср} = \frac{A}{t}. \tag{3.4′}$$

§ 3.2. Энергия кинетическая и потенциальная

1 В механике различают два вида энергии. кинетическую и потенциальную **Кинетической энергией** тела называют энергию $W_к$, являющуюся мерой его механического движения и измеряемую той работой, которую может совершить тело при его торможении до полной остановки. Найдем выражение для кинетической энергии твердого тела B, имеющего массу m и движущегося поступательно со скоростью $\mathbf{v}$.

Пусть тело B тормозится, наталкиваясь на неподвижно закрепленное тело C и деформируя его. При этом тело B действует на тело C с некоторой силой $\mathbf{F}$ (в общем случае переменной) и на малом участке пути ds совершает элементарную работу

$$\delta A = F_\tau ds$$

По третьему закону Ньютона на тело B одновременно действует сила — $\mathbf{F}$, касательная составляющая которой — $\mathbf{F}_\tau$ вызывает изменение численного значения скорости тела. По второму закону Ньютона

$$-F_\tau = m\frac{dv}{dt}$$

Следовательно,

$$\delta A = -m\frac{dv}{dt}ds = -m\frac{ds}{dt}dv,$$

или

$$\delta A = -mvdv. \tag{3.5}$$

Работа, совершаемая телом B до полной его остановки,

$$A = -\int_{v}^{0} mvdv = \frac{mv^2}{2}.$$

Итак, кинетическая энергия поступательно движущегося тела равна половине произведения массы этого тела на квадрат его скорости:

$$W_к = A = \frac{mv^2}{2}. \tag{3.6}$$

Из формулы (3.6) видно, что кинетическая энергия тела не может быть отрицательной ($W_к \geqslant 0$).

Формула (3.6) справедлива, в частности, для кинетической энергии материальной точки. Любую механическую систему можно рассматривать как систему материальных точек. Поэтому кинетическая энергия $W_к$ механической системы равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, образующих эту систему:

$$W_к = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}, \tag{3.7}$$

где m_i и v_i — масса и скорость i-й материальной точки. Таким образом, кинетическая энергия системы полностью определяется величинами масс и скоростей движения входящих в нее материальных точек. Она не зависит от того, каким образом части рассматриваемой системы приобрели данные значения скоростей.

Кратко этот важный вывод можно сформулировать следующим образом: *кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.*

2. Скорости $\mathbf{v}_i$ существенным образом зависят от выбора системы отсчета. При выводе формул (3.6) и (3.7) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы пользоваться законами Ньютона. Однако в разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, значения скорости $\mathbf{v}_i$ i-й материальной точки системы, а следовательно, ее кинетическая энергия и кинетическая энергия всей системы неодинаковы. Иными словами, значение кинетической энергии системы зависит от выбора системы отсчета, т. е. является величиной относительной.

3. Если на систему материальных точек или тел действуют консервативные силы, то можно ввести понятие потенциальной

энергии этой системы. В самом деле, работа A_{1-2}, совершаемая консервативными силами при изменении **конфигурации системы**, т. е. расположения всех ее частей по отношению к системе отсчета, не зависит от того, как было осуществлено это изменение при переводе системы из начальной конфигурации (*1*) в конечную (*2*). Работа A_{1-2} полностью определяется начальной и конечной конфигурациями системы. Иначе говоря, ее можно выразить в форме

$$A_{1-2} = W_{\text{п}_1} - W_{\text{п}_2}, \tag{3.8}$$

где $W_{\text{п}}$ — некоторая функция состояния системы, зависящая только от координат всех материальных точек системы[1]. Эту функцию называют **потенциальной энергией системы.**

Из соотношения (3.8) следует, что работа консервативных сил, действующих на механическую систему, равна убыли потенциальной энергии этой системы.

Работа консервативных сил при бесконечно малом (элементарном) изменении конфигурации системы является полным дифференциалом функции — $W_{\text{п}}$:

$$dA = -dW_{\text{п}} \tag{3.8'}$$

Формулы (3.8) и (3.8′) позволяют найти зависимость потенциальной энергии системы от ее конфигурации только с точностью до произвольного постоянного слагаемого C, не влияющего на величину разности $W_{\text{п}_1} - W_{\text{п}_2}$. Поэтому в каждой конкретной задаче для получения однозначной зависимости потенциальной энергии от конфигурации системы выбирают так называемую **нулевую конфигурацию**, для которой потенциальную энергию системы условно считают равной нулю.

Из (3.8) следует, что потенциальная энергия системы в произвольном состоянии равна работе, совершаемой консервативными силами при переводе системы из этого состояния в состояние, соответствующее нулевой конфигурации.

4. В качестве первого примера рассмотрим потенциальную энергию тела, обусловленную действием на него силы тяжести P. Если высота H подъема тела над поверхностью Земли во много раз меньше радиуса Земли, то можно считать, что сила тяжести не зависит от H: $P = mg = \text{const}$, где m — масса тела.

Работа, совершаемая силой тяжести при падении тела по вертикали с высоты H до поверхности Земли, $A = PH = mgH$.

Если это же тело падает по наклонной плоскости длиной l и с уг-

[1] Здесь и всюду в дальнейшем мы предполагаем, что в случае незамкнутой системы внешние консервативные силы стационарны, т. е. могут изменяться с течением времени только вследствие изменения положения системы относительно системы отсчета. Для этого необходимо, чтобы внешние тела, действующие с указанными силами на незамкнутую систему, были неподвижны относительно системы отсчета.

лом наклона α к вертикали ($l \cos \alpha = H$), то работа силы тяжести равна прежней величине:

$$A = Pl \cos \alpha = mgH,$$

где H — высота наклонной плоскости.

Если, наконец, тело движется по произвольной криволинейной траектории (рис. 3.5), то мы можем представить себе эту кривую состоящей из n малых прямолинейных участков Δl_i. Работа силы тяжести на каждом из таких участков равна

$$\Delta A_i = P \cdot \Delta l_i \cos \alpha_i = P \cdot \Delta H_i,$$

где ΔH_i — проекция участка Δl_i на вертикальную прямую. На всем криволинейном пути работа силы тяжести, очевидно, равна

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} P \cdot \Delta H_i = P \cdot H = mgH.$$

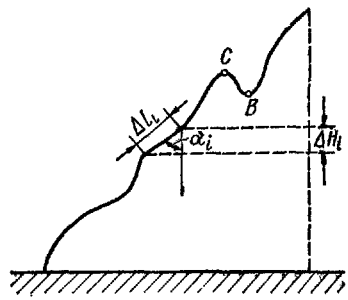

Рис. 3.5.

Итак, работа силы тяжести зависит только от разности высот начальной и конечной точек пути. Сила тяжести тела приложена к его центру тяжести (см. § 2.4). Поэтому работа силы тяжести при любом движении тела равна произведению этой силы на разность высот начального и конечного положений его центра тяжести. Отсюда следует, что работа силы тяжести вдоль замкнутой траектории центра тяжести тела равна нулю, т. е. что сила тяжести, действительно, является консервативной. Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту H над поверхностью Земли, как видно из формулы (3.8), равна

$$W_п = mgH + W_{п_0}, \qquad (3.9)$$

где $W_{п_0}$ — потенциальная энергия тела, лежащего на поверхности Земли. Обычно принимают $W_{п_0} = 0$, так что

$$W_п = mgH. \qquad (3.9')$$

5. Найдем потенциальную энергию упруго деформированного тела. Сила упругости $\mathbf{F}_{упр}$, как известно из опыта, пропорциональна величине деформации x, т. е.

$$\mathbf{F}_{упр} = -kx,$$

где k — коэффициент упругости, характеризующий упругие свойства тела (см. § 5.2), а знак минус показывает, что сила упругости направлена в сторону, противоположную направлению деформации: упруго деформированное тело стремится восстановить свои первоначальные форму и размеры.

Элементарная работа, совершаемая силой $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ при бесконечно малом изменении деформации тела на величину dx, равна

$$dA = (\mathbf{F}_{\text{упр}}, dx) = -kxdx.$$

Работа этой силы при конечном изменении деформации тела, например, при переводе его из недеформированного состояния ($x = 0$) в состояние, соответствующее деформации x, равна

$$A = -\int_0^x kxdx = -\frac{kx^2}{2}.$$

Работа A не зависит от хода процесса деформации тела и полностью определяется значениями деформации тела в начальном и конечном состояниях. Следовательно, силы упругости являются консервативными, а потенциальная энергия упруго деформированного тела

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} + W_{\text{п}_0},$$

где $W_{\text{п}_0}$ — потенциальная энергия недеформированного тела. Полагая ее равной нулю, получим

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}. \tag{3.10}$$

6. Если рассматриваемая система замкнута, то ее потенциальная энергия обусловлена только внутренними консервативными силами взаимодействия частей системы. На незамкнутую систему могут действовать также внешние консервативные силы. В соответствии с формулой (3.8′) изменение потенциальной энергии системы

$$dW_{\text{п}} = -dA = -dA^{\text{внутр}} - dA^{\text{внеш}},$$

где $dA^{\text{внутр}}$ и $dA^{\text{внеш}}$ — работы, совершаемые при малом изменении конфигурации системы, соответственно, всеми внутренними и всеми внешними консервативными силами. Поэтому потенциальную энергию $W_{\text{п}}$ системы можно представить в виде суммы ее **внутренней и внешней потенциальных энергий:**

$$W_{\text{п}} = W_{\text{п}}^{\text{внутр}} + W_{\text{п}}^{\text{внеш}}, \tag{3.11}$$

причем

$$dW_{\text{п}}^{\text{внутр}} = -dA^{\text{внутр}} \quad \text{и} \quad dW_{\text{п}}^{\text{внеш}} = -dA^{\text{внеш}}. \tag{3.11′}$$

Примером внешней потенциальной энергии может служить рассмотренная выше потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли, так как она обусловлена действием на тело постоянной внешней консервативной силы — силы тяжести. Примером внутренней потенциальной энергии является потенциальная энергия упруго деформированного тела.

7. **Полной механической энергией** системы называют величину W, равную сумме кинетической и потенциальной энергий этой системы:

$$W = W_к + W_п. \tag{3.12}$$

Из предыдущего видно, что полная механическая энергия системы — функция ее состояния, так как зависит только от координат, скоростей и масс всех малых частей (материальных точек) системы (см. сноску на стр. 62).

§ 3.3. Закон сохранения и превращения энергии в механике

1. Путь к правильному пониманию переходов движения из одной формы в другую был намечен М. В. Ломоносовым (1748 г.). Он сформулировал закон сохранения общей массы вещества при химических превращениях и закон сохранения материи и движения. Через сто лет после Ломоносова Р. Майер и Г. Гельмгольц дали количественную формулировку **закона сохранения и превращения энергии.** Этот закон состоит в следующем:

в замкнутой системе энергия может переходить из одних видов в другие и передаваться от одного тела другому, но ее общее количество остается неизменным.

Закон сохранения и превращения энергии является одним из фундаментальных законов природы, справедливых как для систем макроскопических тел, так и для систем элементарных частиц. В теоретической физике доказывается, что этот закон вытекает из однородности времени, т. е. независимости законов физических явлений от выбора начала отсчета времени. Закон сохранения и превращения энергии имеет глубокий философский смысл. Он блестяще подтверждает одно из основных положений диалектического материализма о том, что движение является неотъемлемым свойством материи, что оно не сотворимо и не уничтожимо, а лишь преобразуется из одних форм в другие.

2. Найдем условие, которому должна удовлетворять система тел для того, чтобы ее полная механическая энергия не изменялась с течением времени. Если $\mathbf{v}$ — скорость i-й материальной точки с массой m_i, то ее кинетическая энергия

$$W_{к_i} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i}{2}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i).$$

Изменение этой энергии за малый промежуток времени dt, связанное с изменением скорости $\mathbf{v}_i$ на $d\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \cdot dt$ ($\mathbf{a}_i$ — ускорение рассматриваемой материальной точки), равно

$$dW_{к_i} = \frac{m_i}{2}[(d\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) + (\mathbf{v}_i, d\mathbf{v}_i)] = m_i(\mathbf{a}_i dt, \mathbf{v}_i) = (m_i\mathbf{a}_i, \mathbf{v}_i dt) =$$
$$= (m_i\mathbf{a}_i, d\mathbf{r}_i),$$

где $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$ — приращение радиуса-вектора $\mathbf{r}_i$ материальной точки. По второму закону Ньютона

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i,$$

где $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{f}_i$ — результирующие, соответственно, консервативных и неконсервативных сил, действующих на i-ю материальную точку. Поэтому

$$dW_{\text{к}_i} = (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i) + (\mathbf{f}_i, d\mathbf{r}_i)$$

Кинетическая энергия $W_\text{к}$ всей системы равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, образующих эту систему, а ее изменение за малый промежуток времени dt

$$dW_\text{к} = \sum_{i=1}^{n} dW_{\text{к}_i},$$

т. е.

$$dW_\text{к} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{f}_i, d\mathbf{r}_i). \qquad (3.13)$$

Первая сумма в правой части этого уравнения представляет собой суммарную работу dA, совершаемую всеми консервативными силами за промежуток времени dt. Эта работа равна убыли за то же время dt потенциальной энергии системы $W_\text{п} = W_\text{п}^{\text{внутр}} + W_\text{п}^{\text{внеш}}$ (см. сноску на стр. 62):

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i) = dA = -dW_\text{п}.$$

Вторая сумма в правой части уравнения (3.13) представляет собой суммарную работу $\delta A_{\text{н.к}}$, совершаемую всеми неконсервативными силами. Таким образом, уравнение (3.13) можно переписать в форме

$$dW_\text{к} + dW_\text{п} = \delta A_{\text{н.к.}}$$

или

$$dW = \delta A_{\text{н.к.}}, \qquad (3.14)$$

где $W = W_\text{к} + W_\text{п}$ — полная механическая энергия рассматриваемой системы.

Консервативной системой называют систему тел (материальных точек), внутренние силы взаимодействия между которыми консервативны, а все внешние силы — стационарны и консервативны. Для такой системы $\delta A_{\text{н.к.}} \equiv 0$ и из (3.14) следует, что

$$W = W_\text{к} + W_\text{п} = \text{const},$$

т. е. *полная механическая энергия консервативной системы не изменяется с течением времени.*

Этот закон называют **законом сохранения механической энергии.** Он справедлив, в частности, для замкнутой консервативной системы т. е. системы, на которую внешние силы вообще не действуют, а все внутренние силы — консервативны.

3. Рассмотрим применение закона сохранения механической энергии к расчету абсолютно упругого прямого центрального удара двух тел. **Абсолютно упругим** называют такой удар, в результате которого не происходит превращения механической энергии системы соударяющихся тел в другие виды энергии.

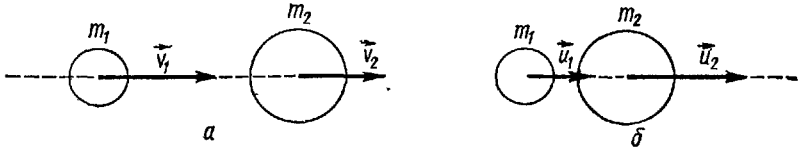

Рис. 3.6.

Пусть два абсолютно упругих шара с массами m_1 и m_2 до удара (рис. 3.6, *а*) движутся поступательно со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, направленными в одну и ту же сторону вдоль линии их центров, причем $\mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_2$. Нужно найти скорости шаров $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ после соударения (рис. 3.6, *б*).

В процессе удара систему соударяющихся тел можно считать замкнутой. При абсолютно упругом ударе она, кроме того, консервативна. Следовательно, для решения этой задачи можно воспользоваться законами сохранения механической энергии и импульса. Перед ударом и после его завершения соударяющиеся тела не деформированы, т. е. потенциальную энергию системы в этих двух состояниях можно считать одинаковой и равной нулю. Тогда из закона сохранения механической энергии имеем

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \qquad (3.15)$$

По закону сохранения импульса

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2. \qquad (3.16)$$

При прямом центральном ударе векторы скоростей шаров до и после удара направлены вдоль одной прямой — линии удара. Поэтому из (3.16) следует, что

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \qquad (3.17)$$

где v_1, v_2, u_1 и u_2 — проекции векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ на ось координат, параллельную линии удара.

Совместное решение уравнений (3.17) и (3.15) дает

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.18)$$

Следует помнить, что в формулах (3.18) скорости v_1 и v_2 могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки в зависимости от направлений векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) Массы шаров одинаковы ($m_1 = m_2 = m$). Тогда

$$u_1 = v_2;\ u_2 = v_1;$$

т. е. при ударе шары обмениваются скоростями.

б) Масса второго шара во много раз больше массы первого шара ($m_2 \gg m_1$). Тогда

$$u_1 \approx 2v_2 - v_1;\quad u_2 \approx v_2.$$

Если при этом второй шар до удара был неподвижен ($v_2 = 0$), то

$$u_1 = -v_1;\ u_2 = 0;$$

т. е. первый шар отскакивает от неподвижного массивного шара и движется в обратную сторону со скоростью $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{v}_1$.

4. Систему тел называют диссипативной, если ее механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс называют процессом **диссипации (рассеяния) энергии.** В качестве примера рассмотрим диссипацию энергии при абсолютно неупругом прямом центральном ударе двух поступательно движущихся тел.

При абсолютно неупругом ударе потенциальная энергия соударяющихся тел не изменяется, так как тела полностью неупруги. Поэтому изменение ΔW полной механической энергии системы соударяющихся тел равно изменению их кинетической энергии

$$\Delta W = \Delta W_к = \frac{(m_1 + m_2)\,u^2}{2} - \left[\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right].$$

Общая скорость тел после удара выражается формулой (2.19):

$$\mathbf{u} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Так как

$$u^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}^2,\quad v_1^2 = \mathbf{v}_1^2 \text{ и } v_2^2 = \mathbf{v}_2^2,$$

то

$$\Delta W = \frac{(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{m_1\mathbf{v}_1^2}{2} - \frac{m_2\mathbf{v}_2^2}{2},$$

или, после преобразований,

$$\Delta W = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 < 0, \qquad (3.19)$$

где $\mathbf{v}_1$— $\mathbf{v}_2$— скорость первого тела по отношению ко второму перед ударом.

Уменьшение механической энергии рассматриваемой системы обусловлено неконсервативностью сил взаимодействия соударяющихся тел. При ударе неупругие тела приобретают деформацию, которая сохраняется и после завершения удара. Для осуществления такой деформации тел, называемой остаточной, необходимо совершать работу деформации $A_д$, т. е. затрачивать энергию. Опыт показывает, что работа деформации неупруго соударяющихся тел в точности равна убыли их полной механической энергии:

$$A_д = -\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2. \qquad (3.20)$$

Если второе тело до удара было неподвижно ($v_2 = 0$), то

$$A_д = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W_{к_1}. \qquad (3.21)$$

Неупругий удар применяют для целей двоякого рода. Во-первых, для изменения формы тел (ковка и штамповка металла, раздробление тел и т. п.). В этом случае нужно, чтобы возможно большая часть кинетической энергии первого тела затрачивалась на совершение работы деформации (уравнение 3.21), т. е. чтобы масса неподвижного тела m_2 (например, наковальни вместе с куском металла) была во много раз больше массы ударяющего тела m_1 (например, молота).

Вторая цель состоит в перемещении тел после удара и преодолении при этом сопротивлений (забивка свай в землю, вбивание клиньев, гвоздей и т. д.). В этом случае выгодно, чтобы работа деформации была как можно меньше и чтобы общая кинетическая энергия обоих тел после удара $\left(\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}\right)$ была наибольшей. Для этого необходимо, чтобы масса ударяющего тела m_1 (копровой бабы, молотка) была во много раз больше массы второго тела m_2 (сваи, гвоздя).

5. На основе закона сохранения механической энергии замкнутой консервативной системы можно рассмотреть вопрос о равновесии такой системы. Говорят, что система тел находится **в равновесии, если** она может быть выведена из этого состояния только в результате внешнего воздействия. Например, система Земля — тело находится в равновесии, если тело неподвижно лежит на дне ямы или на горизонтальной вершине горы. Состояние равновесия называют **устойчивым, если** малое внешнее воздействие на систему вызывает малое изменение ее состояния. При этом в системе возникают внутренние силы, стремящиеся возвратить систему в прежнее состояние. Например, тело, лежащее на дне ямы, находится в состоянии устойчивого равновесия. Состояние равновесия называют **неустойчивым**, если даже при сколь угодно малом внешнем воздействии система выводится из этого состояния. Например, тело, лежащее у края пропасти, падает вниз, если его слегка толкнуть, и не возвращается в первоначальное состояние неустойчивого равновесия.

Рассмотрим замкнутую систему Земля и шар, находящийся на склоне горы, профиль которой изображен на рис. 3.5. Легко видеть, что положение C шара соответствует неустойчивому равновесию системы, а положение B — состоянию устойчивого равновесия. Для того чтобы выкатить шар из ямы B, необходима работа A внешних сил, равная разности потенциальных энергий шара в положениях C и B: $A = W_{п_C} - W_{п_B}$. Чем глубже яма B, тем большую работу A против силы тяжести нужно произвести для поднятия шара из этой «потенциальной ямы». Из этого примера ясно, что в состоянии устойчивого равновесия замкнутой системы ее потенциальная энергия имеет минимум; в состоянии неустойчивого равновесия — максимум. Наиболее устойчивому состоянию системы соответствует абсолютный минимум ее потенциальной энергии, т. е. наименьшее из всех возможных значение ее потенциальной энергии.

Вопросы для повторения

1. В чем состоит различие между понятиями энергии и работы?
2. Какие существуют виды механической энергии? Дайте их определения.
3. Для каких систем тел справедлив закон сохранения механической энергии и как он формулируется?
4. Какой смысл вкладывают в термин «рассеяние энергии»?
5. Приведите примеры консервативной системы тел, диссипативной системы.
6. Каковы условия устойчивого равновесия замкнутой консервативной системы?

Примеры решения задач

Задача 3.1. Паровой молот массой 12 т падает со скоростью 5 м/с на наковальню, масса которой вместе с отковываемым куском железа 250 т. Определить производимую молотом работу расплющивания железа и энергию, потерянную на сотрясение фундамента, считая удар абсолютно неупругим.

Дано

$m_1 = 1{,}2 \cdot 10^4$ кг,
$v_1 = 5$ м/с,
$m_2 = 2{,}5 \cdot 10^5$ кг

$A_д$ — ? ΔW — ?

Решение

В момент удара молот обладает кинетической энергией $W'_к = m_1 v_1^2/2$, которая расходуется частично на работу $A_д$ расплющивания железа, частично на сотрясение фундамента (ΔW). По закону сохранения и превращения энергии

$$W'_к = A_д + \Delta W.$$

Так как удар неупругий, то скорости молота и наковальни после удара одинаковы и равны v. Энергия ΔW, потерянная на сотрясение фундамента, равна кинетической энергии молота и наковальни после удара:

$$\Delta W = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Ввиду массивности наковальни и кратковременности удара влиянием реакции фундамента в процессе удара можно пренебречь, т. е. считать систему молот — наковальня замкнутой. Поэтому для нахождения скорости v можно воспользоваться законом сохранения импульса (§ 2.5). По формуле (2.18)

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\, \mathbf{v}.$$

До удара наковальня была неподвижна, так что $v_2 = 0$. Скорости v_1 и v направлены одинаково. Поэтому

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, v,$$

откуда

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставим это значение v в выражение для ΔW:

$$\Delta W = \frac{(m_1 + m_2)\, m_1^2 v_1^2}{2 (m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 v_1^2}{2 (m_1 + m_2)}.$$

Работа $A_д$ расплющивания железа равна:

$$A_д = W_к' - \Delta W = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1^2 v_1^2}{2 (m_1 + m_2)},$$

или

$$A_д = \frac{m_1 v_1^2}{2} \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{2 (m_1 + m_2)}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
1) проверка размерности результатов:

$$[\Delta W] = \frac{[m]^2 [v]^2}{[m]} = [m]\, [v]^2 = ML^2T^{-2},$$

$$[A_д] = [m]\, [v^2] = ML^2T^{-2}$$

2) вычисления:

$$\Delta W = \frac{(1{,}2 \cdot 10^4)^2 \cdot 25}{2 \cdot (1{,}2 \cdot 10^4 + 2{,}5 \cdot 10^5)} \text{ Дж} = 6{,}87 \cdot 10^3 \text{ Дж};$$

$$A_д = \frac{1{,}2 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 25}{2 \cdot (1{,}2 + 25) \cdot 10^4} \text{ Дж} = 1{,}43 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Задача 3.2 Определить работу поднятия груза по наклонной плоскости, среднюю и максимальную мощности подъемного устройства, если масса груза 100 кг, длина наклонной плоскости 2 м, угол ее наклона к горизонту 30°, коэффициент трения 0,1 и ускорение при подъеме 1 м/с^2. У основания наклонной плоскости груз находился в покое.

Дано

$m = 100$ кг,
$s = 2$ м,
$\alpha = 30°$,
$f = 0{,}1$,
$a = 1$ м/с^2

A — ? $N_{ср}$ — ?
$N_{макс}$ — ?

Решение

На груз действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{P}$, сила тяги $\mathbf{F}$ и реакция наклонной плоскости, равная геометрической сумме двух ее составляющих, изображенных на рис. 3.7, — нормальной реакции $\mathbf{R}$ и силы трения $\mathbf{F}_{тр}$. Силу тяжести тоже можно разложить на две составляющие — нормальную $\mathbf{P}_n$ и касательную $\mathbf{P}_\tau$.

По второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_\tau + \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{R}.$$

Так как силы $\mathbf{P}_\tau$, $\mathbf{F}_{тр}$ и $\mathbf{F}$ и ускорение груза $\mathbf{a}$ направлены вдоль наклонной плоскости, то нормальные к плоскости силы $\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{R}$ взаимно уравновешиваются, т. е. $\mathbf{P}_n + \mathbf{R} = 0$. Силы $\mathbf{P}_\tau$ и $\mathbf{F}_{тр}$ противоположны по направлению силе $\mathbf{F}$ и ускорению $\mathbf{a}$, поэтому

$$ma = F - P_\tau - F_{тр},$$

где $P_\tau = mg\sin\alpha$, а $F_{тр} = fP_n = fmg\cos\alpha$, так что $F = m(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha)$.

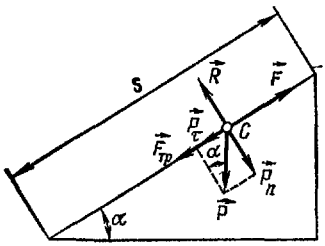

Рис. 3.7.

Сила тяги $\mathbf{F}$ постоянна по величине и направлена вдоль перемещения груза. Поэтому совершаемая ею работа

$$A = Fs = ms(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha).$$

Мощность N, развиваемая подъемным устройством, по формуле (3.4) равна:

$$N = Fv = mv(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha),$$

где v — скорость груза.

Груз движется равноускоренно с начальной скоростью, равной нулю, так что $v = at$. Поэтому мощность N в процессе подъема груза возрастает. Средняя и максимальная мощности, развиваемые подъемным устройством, равны:

$$N_{ср} = \frac{A}{t_0} \text{ и } N_{макс} = Fv_{макс} = Fat_0,$$

где t_0 — время подъема груза

По формуле (1.18)

$$t_0 = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

Следовательно,

$$N_{ср} = A\sqrt{\frac{a}{2s}} = m\sqrt{\frac{sa}{2}}(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha),$$

$$N_{макс} = m\sqrt{2sa}(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha) = 2N_{ср}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

1) проверка размерности результатов:

$$[A] = [m][s][a] = MLLT^{-2} = ML^2T^{-2};$$

$$[N_{ср}] = [m][s]^{1/2}[a]^{3/2} = ML^{1/2}(LT^{-2})^{3/2} = ML^2T^{-3};$$

2) вычисления:

$$A = 100 \cdot 2 \cdot (1 + 9{,}81 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 9{,}81 \cdot \sqrt{3}/2) \text{ Дж} = 1350 \text{ Дж},$$

$$N_{ср} = 100 \cdot (1 + 9{,}81 + 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 9{,}81 \cdot \sqrt{3}/2) \text{ Вт} = 675 \text{ Вт},$$

$$N_{макс} = 2N_{ср} = 1350 \text{ Вт},$$

Глава IV

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 4.1. Основной закон динамики вращательного движения

1. Мы уже говорили о том, что любое тело или систему тел можно мысленно представить в виде системы материальных точек — достаточно малых частей этих тел. Рассмотрим произвольную механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть m_i — масса i-й точки системы, а $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный в эту точку из начала координат O неподвижной инерциальной системы отсчета. Обозначим через $\mathbf{F}_{ik}$ силу, действующую на i-ю точку со стороны k-й материальной точки системы, а через $\mathbf{F}_i^{\text{внеш}}$ — равнодействующую всех внешних сил, приложенных к i-й точке.

По второму закону Ньютона уравнение движения этой материальной точки имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i^{\text{внеш}},$$

где $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$ — скорость i-й точки, а индекс суммирования k пробегает все значения от 1 до n, причем $\mathbf{F}_{ii} = 0$, так как i-я точка сама на себя не действует.

Умножим обе части этого равенства векторно на $\mathbf{r}_i$:

$$\left[\mathbf{r}_i,\ \frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i)\right] = \left[\mathbf{r}_i,\ \sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}_{ik}\right] + \left[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{F}_i^{\text{внеш}}\right]. \qquad (4.1)$$

Легко видеть, что знак производной по времени в левой части этого уравнения можно вынести за знак векторного произведения. В самом деле,

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_i,\ m_i\mathbf{v}_i] = \left[\frac{d\mathbf{r}_i}{dt},\ m_i\mathbf{v}_i\right] + \left[\mathbf{r}_i,\ \frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i)\right] = \left[\mathbf{r}_i,\ \frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i)\right],$$

потому что

$$\left[\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\quad m_i\mathbf{v}_i\right] = [\mathbf{v}_i,\ m_i\mathbf{v}_i] = 0,$$

как векторное произведение двух одинаково направленных векторов.

Следовательно, уравнение (4.1) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_i,\ m_i\mathbf{v}_i] = \sum_{k=1}^{n}[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{F}_{ik}] + [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{\text{внеш}}]. \qquad (4.1')$$

2. Векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}_i$ материальной точки на ее импульс $m_i\mathbf{v}_i$ называют **моментом импульса** $\mathbf{L}_i$ этой **материальной точки** относительно точки O:

$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{v}_i]. \tag{4.2}$$

Вектор $\mathbf{L}_i$ иногда называют также **моментом количества движения материальной точки.** Он направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы $\mathbf{r}_i$ и $m_i\mathbf{v}_i$ и образует с ними **правую тройку векторов** (при наблюдении из конца $\mathbf{L}_i$ видно, что вращение по кратчайшему расстоянию от $\mathbf{r}_i$ к $m_i\mathbf{v}_i$ происходит против часовой стрелки, рис. 4.1)

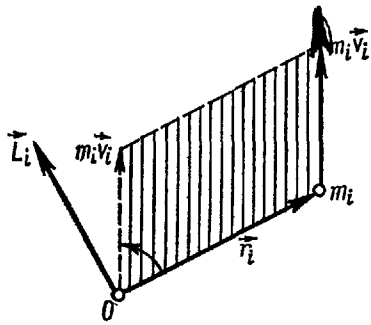

Рис. 4.1.

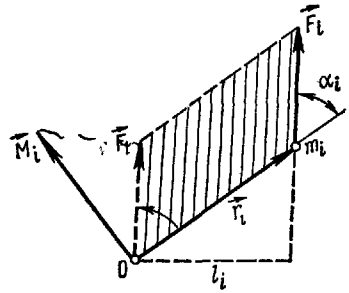

Рис. 4.2.

Векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}_i$, проведенного в точку приложения силы $\mathbf{F}_i$, на эту силу называют **моментом** $\mathbf{M}_i$ **силы** $\mathbf{F}_i$ **относительно точки** O:

$$\mathbf{M}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i]. \tag{4.3}$$

Векторы $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{M}_i$ образуют правую тройку (рис. 4.2). Численное значение момента силы $\mathbf{F}_i$ равно

$$M_i = F_i r_i \sin\alpha_i = F_i l_i, \tag{4.3'}$$

где α_i — угол между векторами $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{F}_i$, а $l_i = r_i \sin\alpha_i$ — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $\mathbf{F}_i$. Величина l_i называется **плечом силы** $\mathbf{F}_i$. Если линия действия силы проходит через точку O, то $l_i = 0$ и момент силы относительно точки O равен нулю.

3. Из (4.1'), (4.2) и (4.3) следует, что скорость изменения момента импульса i-й материальной точки равна

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{ik} + \mathbf{M}_i^{\text{внеш}}. \tag{4.4}$$

Сложим почленно все эти уравнения, записанные для каждой из n материальных точек системы:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i^{\text{внеш}}. \tag{4.5}$$

Векторную сумму моментов $M_i^{\text{внеш}}$ всех внешних сил, приложенных ко всем материальным точкам системы, называют **результирующим, или главным, моментом M внешних сил относительно точки O**:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i^{\text{внеш}}]. \tag{4.6}$$

Векторную сумму моментов импульса $\mathbf{L}_i$ всех материальных точек системы **называют моментом импульса (количества движения)** $\mathbf{L}$ системы относительно точки O:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i]. \tag{4.7}$$

Так как производная от суммы равна сумме производных от всех слагаемых, то

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\mathbf{L}_i}{dt}. \tag{4.7'}$$

Наконец, векторная сумма моментов относительно точки O всех внутренних сил $\mathbf{F}_{ik}$ взаимодействия между материальными точками системы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_{ik} = 0. \tag{4.8}$$

Это связано с тем, что по третьему закону Ньютона силы $\mathbf{F}_{ik}$ и $\mathbf{F}_{ki}$ численно равны, имеют общую линию действия, но направлены во взаимно противоположные стороны. Поэтому их моменты $\mathbf{M}_{ik} = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ik}]$ и $\mathbf{M}_{ki} = [\mathbf{r}_k, \mathbf{F}_{ki}]$ относительно точки O численно равны и противоположны по направлению (на рис. 4.3 точки m_i, m_k и O лежат в горизонтальной плоскости, а векторы $\mathbf{M}_{ik}$ и $\mathbf{M}_{ki}$ перпендикулярны к этой плоскости). Действительно, $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{ki}$, где $\mathbf{r}_{ki}$ — вектор, проведенный из точки m_i в точку m_k. Поэтому

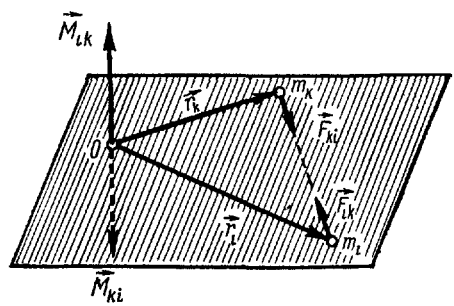

Рис. 4.3.

$$\mathbf{M}_{kl} = [\mathbf{r}_l \mathbf{F}_{kl}] + [\mathbf{r}_{kl}, \mathbf{F}_{kl}] = -[\mathbf{r}_l, \mathbf{F}_{lk}] = -\mathbf{M}_{lk},$$

так как векторное произведение векторов $\mathbf{r}_{kl}$ и $\mathbf{F}_{kl}$, направленных вдоль одной прямой, равно нулю.

На основании соотношений (4.6), (4.7′) и (4.8) уравнение (4.5) можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \tag{4.9}$$

Таким образом, *скорость изменения момента импульса системы относительно неподвижной точки равна результирующему моменту относительно той же точки всех внешних сил, действующих на систему.*

Соотношение (4.9) справедливо, в частности, для твердого тела, закрепленного в точке O. В этом случае оно выражает **основной закон динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.** Из него следует, что момент импульса $\mathbf{L}$ является основной динамической характеристикой тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

4. Пусть теперь твердое тело закреплено в двух неподвижных точках O и O_1 так, что оно может вращаться вокруг неподвижной оси Oz, проходящей через эти точки. В этом случае составляющие момента $\mathbf{M}$ относительно точки O, направленные вдоль осей Ox и Oy, компенсируются соответствующими моментами сил реакции закрепления в точке O_1. Поэтому вращение тела вокруг оси Oz происходит под действием составляющей $\mathbf{M}_z$ момента внешних сил относительно точки O. Из (4.9) следует, что уравнение движения тела имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \mathbf{M}_z, \tag{4.10}$$

где $\mathbf{L}_z$ и $\mathbf{M}_z$ — составляющие векторов момента импульса тела и результирующего момента внешних сил относительно точки O, направленные вдоль неподвижной оси Oz вращения тела и называемые, соответственно, **моментом импульса тела относительно оси** Oz и **результирующим моментом внешних сил относительно** той же **оси.**

Уравнение (4.10) выражает **основной закон динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:**

скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело.

Из этого закона следует, что основной динамической характеристикой тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, является момент импульса тела относительно этой оси.

5. Найдем выражение для момента импульса $\mathbf{L}_z$ тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Так как

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i \quad \text{то} \quad \mathbf{L}_z = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_{iz}.$$

Из рис. 4.4 видно, что радиус-вектор i-й материальной точки

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i + \boldsymbol{\rho}_i,$$

где $\mathbf{b}_i$— вектор, проведенный из точки O в точку O_1, лежащую на оси вращения Oz и являющуюся центром окружности, по которой движется рассматриваемая i-я точка тела. Поэтому

$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = [\mathbf{b}_i, m_i \mathbf{v}_i] + [\boldsymbol{\rho}_i, m_i \mathbf{v}_i].$$

Вектор $[\mathbf{b}_i, m_i \mathbf{v}_i]$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{b}_i$, т. е. его составляющая вдоль оси Oz равна нулю. Векторы $\boldsymbol{\rho}_i$ и $\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}_i]$ (см. формулу (1.22)) взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела. Поэтому вектор $[\boldsymbol{\rho}_i, m_i \mathbf{v}_i]$ численно равен $\rho_i m_i v_i = m_i \rho_i^2 \omega$ и направлен вдоль оси Oz вращения тела в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{\omega}$. Таким образом,

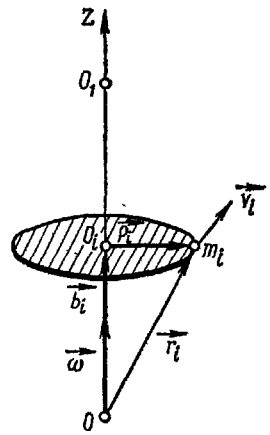

Рис. 4.4.

$$\mathbf{L}_{iz} = m_i \rho_i^2 \boldsymbol{\omega}$$

и

$$\mathbf{L}_z = \boldsymbol{\omega} \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2. \qquad (4.11)$$

Сумму произведений массы каждой материальной точки тела на квадрат ее расстояния до оси называют **моментом инерции тела относительно этой оси.** Момент инерции относительно оси Oz равен

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2. \qquad (4.12)$$

Следовательно,

$$\mathbf{L}_z = J_z \boldsymbol{\omega}. \qquad (4.13)$$

Момент импульса тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость вращения вокруг этой оси.

При вычислении момента инерции тела его мысленно разбивают на бесконечно большое число бесконечно малых элементов с массами dm. Поэтому в формуле (4.12) сумму $\sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2$ заменяют интегралом:

$$J_z = \int_0^m \rho^2 dm, \qquad (4.12')$$

где ρ — расстояние от элемента dm до оси Oz.

6. Неподвижная ось вращения может проходить как через центр инерции тела (например, ось вращения маховика, турбины, ротора электродвигателя и т. д.), так и вне его (например, ось вращения рычага).

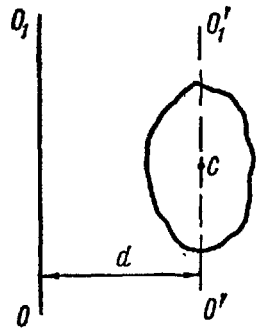

Рис. 4.5.

Можно доказать следующую **теорему о переносе осей инерции:**

момент инерции J тела относительно произвольной оси OO_1 равен сумме момента инерции J_C тела относительно оси $O'O'_1$, проведенной через центр инерции C тела параллельно OO_1, и произведения массы m тела на квадрат расстояния d между этими осями (рис 4.5):

$$J = J_C + md^2. \qquad (4.14)$$

В самом деле,

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2 \quad \text{и} \quad J_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^{*2},$$

где ρ_i и ρ_i^* — расстояния от i-й материальной точки массой m_i до осей OO_1 и $O'O_1'$. Проведем ось координат Ox так, чтобы она пересекала оси OO_1 и $O'O_1'$ и была перпендикулярна к ним (см. рис. 4.6, на котором оси OO_1 и $O'O_1'$ расположены перпендикулярно к плоскости чертежа). Тогда по теореме косинусов

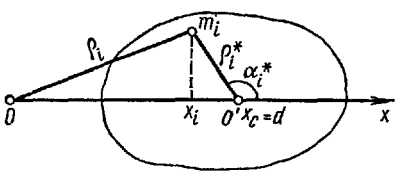

Рис. 4.6.

$$\rho_i^2 = \rho_i^{*2} + d^2 + 2d\rho_i^* \cos\alpha_i^*,$$

причем

$$\rho_i^* \cos\alpha_i^* = x_i - x_C,$$

где x_i и x_C — абсциссы i-й точки тела и его центра инерции C. Таким образом, момент инерции тела относительно оси OO_1 можно представить в виде

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^{*2} + d^2 \sum_{i=1}^{n} m_i + 2d \left[\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - x_C \sum_{i=1}^{n} m_i \right].$$

Из определения понятия центра инерции (см. формулы (2.10) и (2.10′)) следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Поэтому для момента инерции тела J, действительно, справедливо соотношение (4.14):

$$J = J_C + md^2.$$

В таблице 1 приведены формулы для вычисления моментов инерции однородных тел простейшей формы. Из выражений (4.12′) и (4.14), а также из данных таблицы 1 видно, что момент инерции тела зависит не только от его массы, но и от ее распределения относительно оси вращения. Например, момент инерции прямого тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец, в 4 раза больше, чем момент инерции этого же стержня относительно его оси симметрии.

Таблица 1

Тело	Положение оси Oz	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R, имеющий массу m	Ось симметрии	$J_z = mR^2$
Сплошной цилиндр (или диск) радиуса R, имеющий массу m	Ось симметрии	$J_z = \frac{1}{2} mR^2$
Прямой тонкий стержень, имеющий длину l и массу m	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	$J_z = \frac{1}{12} ml^2$
Тот же стержень	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	$J_z = \frac{1}{3} ml^2$
Шар радиуса R, имеющий массу m	Ось проходит через центр шара	$J_z = \frac{2}{5} mR^2$
Тот же шар	Ось проходит на расстоянии d от центра шара	$J_z = m\left(\frac{2}{5}R^2 + d^2\right)$

7. Из формулы (4.13) следует, что основное уравнение (4.10) динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz, можно представить в такой форме

$$\frac{d}{dt}(J_z\omega) = \mathbf{M}_z. \qquad (4.15)$$

Если тело абсолютно твердое, то его момент инерции J_z не зависит от времени. Поэтому

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{M}_z \quad \text{или} \quad J_z\varepsilon = \mathbf{M}_z, \qquad (4.16)$$

где ε — угловое ускорение тела.

Из уравнения (4.16) видно, что *угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz, прямо пропорционально результирующему моменту относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно той же оси.*

Таким образом, момент инерции тела является мерой его инертности во вращательном движении вокруг неподвижной оси.

8. Зависимость углового ускорения твердого тела от его момента инерции можно продемонстрировать на опыте с помощью прибора Обербека (рис. 4.7). Крестовина, состоящая из четырех взаимно перпендикулярных одинаковых стержней с надетыми и закрепленными на них четырьмя одинаковыми цилиндрическими грузами B, может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси O. Грузы B расположены на равных расстояниях от оси O. Крестовина жестко скреплена со шкивом A, на котором намотана нить D. Один конец нити закреплен на шкиве, а к другому привязан груз C. Если груз C отпустить, то он будет падать вниз, натягивая нить и приводя крестовину во вращательное движение.

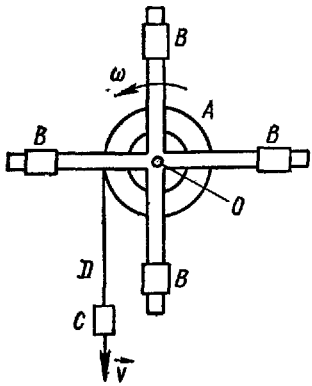

Рис. 4.7.

Изменяя расстояние r от центров грузов B до оси вращения O, можно убедиться в том, что угловое ускорение крестовины тем меньше, чем больше r, т. е. чем больше ее момент инерции относительно оси O.

Обычно шкив A имеет две цилиндрические поверхности с разными радиусами R_1 и R_2. Если нить D сначала намотать на часть шкива с радиусом R_1, а затем — с радиусом $R_2 > R_1$, то оказывается, что в первом случае угловое ускорение крестовины меньше, чем во втором. Это свидетельствует о том, что угловое ускорение прямо пропорционально моменту относительно оси O, создаваемому силой натяжения нити.

§ 4.2. Кинетическая энергия вращающегося тела

1. Кинетическая энергия тела, движущегося произвольным образом, равна сумме кинетических энергий всех n материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить:

$$W_к = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (4.17)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω, то линейная скорость i-й точки равна:

$$v_i = \omega \rho_i,$$

где ρ_i — расстояние от этой точки до оси вращения. Следовательно,

$$W_{к.\,вр.} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}, \qquad (4.18)$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения.

Сопоставление формулы (4.18) с выражением для кинетической энергии тела, движущегося поступательно со скоростью v:

$$W_{\text{к. пост.}} = \frac{mv^2}{2},$$

служит подтверждением уже высказанного выше утверждения о том, что мерой инертности тела во вращательном движении является момент инерции тела.

2. Если момент $\mathbf{M}_z$ внешних сил относительно неподвижной оси вращения твердого тела отличен от нуля, то угловая скорость и кинетическая энергия тела изменяются. Из формулы (3.13) следует, что изменение кинетической энергии тела за малый промежуток времени dt:

$$dW_{\text{к}} = \delta A,$$

где δA — элементарная работа, совершаемая за время dt одними только внешними силами, приложенными к телу, так как тело не деформируется и внутренние силы работы не совершают. Выражение (4.18) для кинетической энергии вращающегося тела перепишем в форме

$$W_{\text{к}} = \frac{J_z}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}).$$

Тогда

$$\delta A = dW_{\text{к}} = J_z(\boldsymbol{\omega}, d\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}, J_z d\boldsymbol{\omega}),$$

или, учитывая соотношение (4.16),

$$\delta A = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}_z dt) = M_z \omega dt = M_z d\varphi, \tag{4.19}$$

где M_z — проекция результирующего момента внешних сил на направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела, а $d\varphi = \omega dt$ — угол поворота тела за рассматриваемый малый промежуток времени dt.

3. Вращение тела вокруг неподвижной точки в каждый момент времени можно рассматривать как его вращение вокруг некоторой **мгновенной оси,** проходящей через эту точку. Поэтому кинетическая энергия тела в этом случае

$$W_{\text{к}} = \frac{J_{\text{м}}\omega^2}{2}, \tag{4.20}$$

где $J_{\text{м}}$ — момент инерции тела относительно мгновенной оси, ω — соответствующая угловая скорость. В общем случае положение мгновенной оси вращения по отношению к системе координат, связанной с телом, в процессе вращения изменяется. Следовательно, момент инерции $J_{\text{м}}$ зависит от времени.

4. В общем случае движение твердого тела можно представить в виде суммы двух движений — поступательного со скоростью, равной скорости $\mathbf{v}_C$ центра инерции тела, и вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции. При этом

выражение (4.17) для кинетической энергии тела преобразуется к виду

$$W_к = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \qquad (4.20')$$

где J_C — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

§ 4.3. Закон сохранения момента импульса

1. Для замкнутой системы тел момент **M** внешних сил всегда равен нулю, так как внешние силы вообще не действуют на замкнутую систему. Поэтому из уравнения (4.9) следует, что для такой системы

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{L} = \text{const} \qquad (4.21)$$

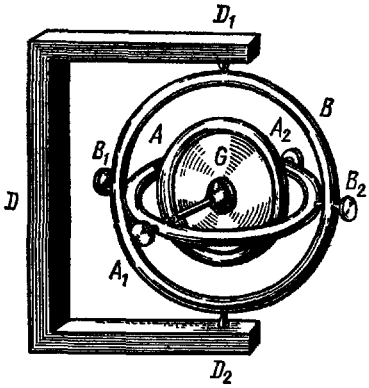

Рис. 4.8.

Этот результат называют **законом сохранения момента импульса:** *момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.*

Закон сохранения момента импульса, подобно законам сохранения импульса и энергии, является одним из фундаментальных законов природы. В теоретической физике доказано, что этот закон — следствие изотропности пространства. Изотропность пространства означает, что при повороте в нем замкнутой системы как целого (иначе говоря, при изменении ориентации осей координат) физические свойства замкнутой системы и законы ее движения не изменяются.

2. Если на тело, вращающееся вокруг неподвижной точки O, внешние силы действуют, но результирующий момент **M** этих сил относительно точки O тождественно равен нулю, то, как видно из (4.9), момент импульса тела **L** относительно точки O остается постоянным. В справедливости этого закона можно убедиться на опыте с уравновешенным гироскопом, имеющим три степени свободы. **Гироскопом** называют быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве. Гироскоп имеет три степени свободы, если он закреплен таким образом, что может совершать любой поворот вокруг некоторой неподвижной точки, называемой **центром подвеса.** Если центр подвеса гироскопа совпадает с его центром тяжести, то результирующий момент сил тяжести всех частей гироскопа относительно центра подвеса равен нулю. Такой гироскоп назы-

вают **уравновешенным.** На рис. 4.8 показан простейший уравновешенный гироскоп, имеющий три степени свободы. Гироскоп G быстро вращается во внутренней кольцевой обойме A вокруг оси A_1A_2, которая совпадает с осью симметрии гироскопа и проходит через его центр тяжести C. Обойма A в свою очередь может свободно вращаться во внешней обойме B вокруг оси B_1B_2 перпендикулярной к A_1A_2. Наконец, обойма B может свободно вращаться в стойке D вокруг оси D_1D_2, перпендикулярной к осям A_1A_2 и B_1B_2. Все три оси пересекаются в центре подвеса, совпадающем с центром тяжести гироскопа C.

На опыте с таким гироскопом легко убедиться в том, что при любых поворотах стойки D ось вращения гироскопа A_1A_2 сохраняет неизменное направление по отношению к лабораторной системе отсчета. Объяснение этого явления состоит в следующем Момент относительно точки подвеса C всех внешних сил, прикладываемых к гироскопу через стойку D при ее поворотах, равен только моменту сил трения (момент силы тяжести равен нулю, так как гироскоп уравновешен). Обычно момент сил трения очень мал, так что за малый промежуток времени, в течение которого производится поворот стойки D, момент импульса гироскопа $\mathbf{L}$ относительно центра подвеса C практически не изменяется. Так как гироскоп симметричен и вращается вокруг своей оси симметрии, то его момент импульса $\mathbf{L}$ направлен вдоль оси вращения A_1A_2. Поэтому при всевозможных поворотах стойки D ориентация оси вращения гироскопа должна сохраняться неизменной.

3. Из основного закона динамики для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Oz (уравнение 4 10), следует **закон сохранения момента импульса тела относительно этой оси:**

если момент внешних сил относительно неподвижной оси вращения тела тождественно равен нулю, то момент импульса тела относительно этой оси не изменяется в процессе движения, т. е. если $\mathbf{M}_z \equiv \equiv 0$, то

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{L}_z = \text{const}, \tag{4.22}$$

или, на основании соотношения (4.13),

$$J_z\omega = \text{const}, \tag{4 22'}$$

где ω — угловая скорость тела, J_z — его момент инерции относительно оси вращения.

Этот закон может быть обобщен на любую незамкнутую систему тел: *если результирующий момент всех внешних сил, приложенных к системе, относительно какой-либо неподвижной оси тождественно равен нулю, то момент импульса системы относительно той же оси не изменяется с течением времени.*

В частности, этот закон справедлив для замкнутой системы тел.

4. Справедливость закона сохранения момента импульса относительно неподвижной оси вращения можно продемонстрировать на ряде

опытов. На рис. 4.9 изображена квадратная рамка $ABCD$, изготовленная из тонких стержней. На стержни AD и CD надеты одинаковые цилиндрические грузы K, имеющие возможность свободно скользить по этим стержням. Грузы K удерживаются в верхнем положении прикрепленной к ним ниткой N, перекинутой через крючки E в рамке.

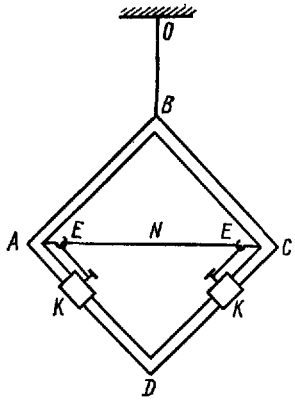

Рис. 4.9.

Рамка подвешена на неупругой нити BO. Если рамку привести во вращение вокруг вертикальной оси BD, а затем нитку N пережечь, то грузы K опускаются по стержням AD и CD вниз, приближаясь к оси вращения, а угловая скорость вращения рамки заметно возрастает. Это связано с тем, что момент внешних сил — сил тяжести, приложенных к рамке и грузам, относительно неподвижной оси BD равен нулю. Поэтому произведение момента инерции рамки с грузами (относительно оси BD) на ее угловую скорость до $(J_1\omega_1)$ и после пережигания нитки N $(J_2\omega_2)$ должно остаться неизменным: $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$. Так как $J_2 < J_1$, то $\omega_2 > \omega_1$.

Аналогичное явление наблюдается в опыте со скамьей Жуковского, изображенном на рис. 4.10. **Скамьей Жуковского** называют горизонтальную площадку, свободно вращающуюся без трения вокруг неподвижной вертикальной оси OO_1. Человек, стоящий на скамейке, держит в вытянутых руках гимнастические гантели и вращается вместе со скамейкой вокруг оси OO_1. Приближая гантели к себе, человек уменьшает момент инерции системы и угловая скорость ее вращения возрастает. По закону сохранения момента импульса относительно оси OO_1

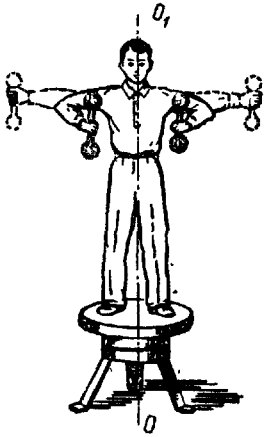

Рис. 4.10.

$$(J_0 + 2mr_1^2)\omega_1 = (J_0 + 2mr_2^2)\omega_2, \qquad (4.23)$$

где J_0 — момент инерции человека и скамьи; $2mr_1^2$ и $2mr_2^2$ — момент инерции гантелей в первом и во втором положениях; ω_1 и ω_2 — соответствующие этим положениям гантелей угловые скорости системы; m — масса одной гантели; r_1 и r_2 — расстояния от гантелей до оси OO_1.

В рассмотренном опыте изменение момента инерции системы связано с изменением ее кинетической энергии, равным

$$\Delta W_к = W_{к_2} - W_{к_1} = \frac{(J_0 + 2mr_2^2)\,\omega_2^2}{2} - \frac{(J_0 + 2mr_1^2)\,\omega_1^2}{2}.$$

Воспользовавшись выражением для угловой скорости ω_2, полученным из формулы (4.23):

$$\omega_2 = \frac{J_0 + 2mr_1^2}{J_0 + 2mr_2^2}\,\omega_1,$$

найдем после несложных преобразований

$$\Delta W_к = \frac{J_0 + 2mr_1^2}{2}\,\omega_1(\omega_2 - \omega_1) \neq 0. \qquad (4.24)$$

Это изменение кинетической энергии системы равно работе, совершаемой человеком при перемещении гантелей.

Закон сохранения момента импульса используют балерины, мастера фигурного катания и другие для выполнения различных фигур, связанных с изменением угловой скорости их вращения вокруг вертикальной оси.

Рассмотрим еще один опыт со скамьей Жуковского. Человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и держит в руках ось массивного колеса так, что она является продолжением оси вращения скамейки (рис. 4.11). Вначале колесо не вращается, затем человек раскручивает его до угловой скорости ω_1. При этом он сам вместе со скамьей приходит во вращение в обратном направлении с угловой скоростью ω_2, которая, как показывает опыт, находится в полном согласии с законом сохранения момента импульса системы:

Рис. 4.11.

$$\omega_2 = -\frac{J_1}{J_2}\,\omega_1,$$

где J_1 — момент инерции колеса и J_2 — момент инерции человека и скамейки.

Человек, стоящий на идеально гладком полу, не может повернуться вокруг вертикальной оси, пользуясь для этого обычными приемами, т. е. отталкиваясь ногами от пола. Однако если он поднимет вверх руку и будет вращать ее вокруг вертикальной оси, то он сам начнет вращаться в противоположном направлении.

Вопросы для повторения

1. Что называют моментом силы и моментом импульса тела относительно неподвижной точки и относительно неподвижной оси?
2. Какая физическая величина служит основной динамической характеристикой вращающегося тела?
3. От чего зависит момент инерции тела? Какую роль он играет во вращательном движении?
4. Сформулируйте закон сохранения момента импульса и проиллюстрируйте его примерами.

Примеры решения задач

Задача 4.1[1]. Рамка может вращаться вокруг проходящей через ее центр тяжести вертикальной оси Oz. В рамке симметрично относительно оси Oz на расстояниях $l = 0{,}15$ м от нее укреплены вертикальные оси двух одинаковых дисков, имеющих вес $P = 96{,}2$ Н каждый (рис. 4.12). Момент инерции рамки относительно оси Oz равен $J_1 = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг · м²; момент инерции каждого диска относительно собственной оси равен $J_2 = 9{,}81 \cdot 10^{-2}$ кг · м². Вначале система находится в покое, а затем диски начинают вращаться в одну сторону с одинаковыми угловыми скоростями, делая по $n_2 = 10$ об/с относительно рамки. Это осуществляется имеющимся в системе, но не показанным на рисунке часовым механизмом, отпускающим в некоторый момент первоначально напряженную пружину. Определить угловую скорость рамки.

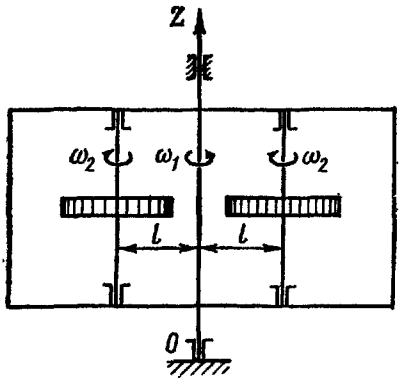

Рис. 4.12.

Дано

$P = 96{,}2$ Н,
$l = 0{,}15$ м,
$J_1 = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг·м²,
$J_2 = 9{,}81 \cdot 10^{-2}$ кг · м²,
$n_2 = 10$ об/с

$\omega_1 - ?$

Решение

Момент относительно оси Oz параллельных ей сил тяжести частей системы равен нулю. Следовательно, к системе можно применить закон сохранения момента импульса: момент импульса данной системы относительно оси Oz остается неизменным и равным нулю как до, так и после приведения в движение обоих дисков. Таким образом, задача состоит в том, чтобы выразить момент импульса системы относительно оси Oz. Он складывается из: а) момента импульса рамки $J_1\omega_1$, где ω_1 — угловая скорость рамки, б) момента импульса двух дисков, связанного с их вращением вокруг оси Oz вместе с рамкой и равного $2(J_2 + Pl^2/g)\omega_1$, в) момента импульса двух дисков, связанного с их вращением с угловой скоростью ω_2 вокруг собственных осей и равного $2J_2\omega_2$. Итак, имеем

$$J_1\omega_1 + 2(J_2 + Pl^2/g)\omega_1 + 2J_2\omega_2 = 0$$

или

$$\omega_1(J_1 + 2J_2 + 2Pl^2/g) = -2J_2\omega_2.$$

Скобка, стоящая в левой части этого уравнения, и J_2 — величины положительные. Поэтому знак минус в правой части уравнения указывает лишь на то, что рамка и диски вращаются в противоположные стороны, и в дальнейших расчетах он может быть опущен.

Заменив $\omega_2 = 2\pi n_2$, получим

$$\omega_1 = \frac{4\pi J_2 n_2}{J_1 + 2(J_2 + Pl^2/g)}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

[1] Содержание задачи 4.1 заимствовано из кн. Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье. Курс теоретической механики, т. II, ГТТИ, 1954, стр. 175.

1) проверка размерности результата:

$$[\omega_1] = \frac{[J_2]\,[n_2]}{[J_1]} = [n_2] = T^{-1};$$

2) вычисление результата:

$$\omega_1 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{4{,}9 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot \left(9{,}81 \cdot 10^{-2} + \dfrac{96{,}2}{9{,}81} 0{,}15^2\right)} \text{ рад/с} = 17{,}9 \text{ рад/с}.$$

Задача 4.2. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный диск. Найти ускорение центра диска. Решить задачу в общем виде, полагая, что вначале диск был неподвижен, а трением качения можно пренебречь.

Решение

Пусть к некоторому моменту времени t центр тяжести диска прошел расстояние $BC = x$ от вершины наклонной плоскости (рис. 4.13). При этом потенциальная энергия диска изменилась на величину $\Delta W_{\text{п}} = -mgx \sin\alpha$. Сила трения покоя, действующая на диск со стороны наклонной плоскости, работы не совершает, так как мгновенная скорость точки A приложения этой силы равна нулю. Следовательно, для диска справедлив закон сохранения механической энергии. Кинетическая энергия диска в момент времени t

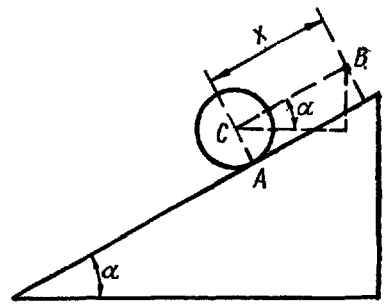

Рис. 4.13.

$$W_{\text{к}} = -\Delta W_{\text{п}} = mgx \sin\alpha.$$

Диск одновременно участвует в двух движениях — поступательном со скоростью v и вращательном с угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. Следовательно, по формуле (4.20′) имеем

$$mgx \sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2},$$

где $J_C = mr^2/2$ — момент инерции диска относительно его оси, r — радиус диска.

Отсутствие скольжения при скатывании диска по наклонной плоскости означает, что скорость точки A касания диска с плоскостью равна скорости плоскости, т. е. нулю. В то же время скорость точки A численно равна разности скоростей этой точки в поступательном (v) и вращательном (ωr) движениях:

$$v_A = v - \omega r = 0$$

Следовательно, $\omega = v/r$. Заменив в формуле (а) J_C и ω их выражениями через m, r и v, получим

$$mgx \sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{4} mv^2$$

или

$$x = \frac{3}{4g \sin \alpha} v^2.$$

Дифференцируя это равенство по времени t и учитывая, что $\frac{dx}{dt} = v$ $\frac{dv}{dt} = a$ — искомое ускорение центра диска, получаем

$$v = \frac{3}{2g \sin \alpha} va$$

или

$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Глава V

СИЛЫ УПРУГОСТИ И ТРЕНИЯ

§ 5.1. Категории и виды сил

1. Понятие силы играет важную роль в механике, так как позволяет решать задачи, отвлекаясь от конкретной физической природы взаимодействий между телами. Все силы можно разделить на следующие категории: силы, обусловленные взаимодействием непосредственно соприкасающихся тел (например, удар, давление, тяга, трение), и силы, которые связаны с особой формой материи, называемой полем и осуществляющей взаимодействие между телами без их непосредственного соприкосновения. В механике (гл. VI) мы познакомимся с гравитационным полем (полем тяготения), а в дальнейшем — с электрическим и магнитным полями и с полем ядерных сил. Особую категорию представляют силы инерции, действующие в неинерциальных системах отсчета (см. гл. VII).

2. С другой стороны, с точки зрения закона сохранения энергии в механике, силы можно разделить на консервативные и диссипативные. Работа консервативных сил зависит лишь от изменения в расположении тел или частей системы друг относительно друга, но не зависит от пути, по которому это изменение произошло; она связана с изменением потенциальной энергии системы. К консервативным силам относятся, например, силы тяготения и силы упругости. Работа диссипативных сил приводит к превращению механической энергии в энергию беспорядочного теплового движения частиц тел, т. е. к рассеянию механической энергии. К диссипативным силам принадлежат, например, силы трения скольжения и качения.

§ 5.2. Понятие об основных видах упругих деформаций

1. В курсе физики рассматривают лишь некоторые первоначальные сведения об упругих свойствах твердых тел. Подробное изучение этих свойств относится к курсам сопротивления материалов и теории упругости.

Твердые тела, как известно из курса средней школы, имеют кристаллическое строение, т. е. частицы, составляющие твердое тело, расположены в определенном порядке. Каждая частица испытывает воздействия со стороны всех соседних частиц, и ее равновесие соответствует тому, что равнодействующая этих сил равна нулю. При деформации твердого тела под влиянием внешних сил его частицы смещаются из первоначальных положений равновесия в новые. Этому перемещению частиц препятствуют силы взаимодействия между ними. Если сдвиг частиц был не слишком большим, то после прекращения действия внешней силы они под влиянием внутренних сил возвращаются в исходные положения. Деформацию, соответствующую такому «об-

ратимому» смещению частиц, называют **упругой**. Если же внешняя сила велика и перемещает частицы настолько, что силы их взаимодействия уже не могут вернуть частицы в исходные положения после прекращения действия внешней силы, то деформацию называют **пластической**. При длительном воздействии даже малых внешних сил упругая деформация может перейти в пластическую. Это происходит из-за того, что при длительной нагрузке происходит перестройка кристаллической решетки твердого тела.

Степень упругости характеризуют отношением работы, которую может совершить тело при постепенном устранении деформирующих сил, к работе, которая была затрачена на деформацию тела.

2. Мысленно рассечем упруго деформированное тело на две части. Результирующая всех внешних сил, приложенных к каждой из этих двух частей тела, уравновешивается упругой силой $\mathbf{F}_{\text{упр}}$, действующей на рассматриваемую часть со стороны другой. Физическую величину, численно равную упругой силе $d\mathbf{F}_{\text{упр}}$, приходящейся на единицу площади dS сечения тела, называют **напряжением** σ:

$$\sigma = \frac{dF_{\text{упр}}}{dS}.$$

Напряжение называют **нормальным**, если сила $d\mathbf{F}_{\text{упр}}$ направлена по нормали к площадке dS, и **касательным**, если она направлена по касательной к этой площадке.

Величину деформации, при которой изменяется некоторая величина x, характеризующая форму или размеры тела, определяют **относительной деформацией**, равной отношению абсолютной деформации Δx к первоначальному значению величины x: $\Delta x/x$.

3. Английский физик Р. Гук экспериментально установил, что *напряжение упруго деформированного тела прямо пропорционально его относительной деформации* **(закон Гука):**

$$\sigma = K_x \frac{\Delta x}{x}, \qquad (5.1)$$

где K_x — модуль упругости, а Δx — абсолютная величина изменения x. Величина K_x определяется свойствами материала, из которого изготовлено тело. В зависимости от вида деформации модуль упругости имеет различные наименования, обозначения и численные значения. Величину $\alpha_x = 1/K_x$ называют **коэффициентом упругости**. Закон Гука справедлив лишь для достаточно малых относительных деформаций. Напряжение $\sigma_п$, при котором пропорциональность между напряжением и деформацией нарушается, называют **пределом пропорциональности** (рис. 5.4, точка A).

Любая сложная деформация твердого тела может быть представлена как результат наложения более простых деформаций. Рассмотрим основные виды деформаций: одностороннее растяжение (или сжатие), сдвиг, всестороннее растяжение (или сжатие) и кручение.

4. При **продольном растяжении** (рис. 5.1) процесс деформации прекращается, когда упругие силы становятся равными растягивающей силе **F**. В этом случае модуль упругости носит название **модуля Юнга** E.

Из формулы (5.1), заменив

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta l}{l},$$

получим

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}, \qquad (5.2)$$

где l — первоначальная длина образца, Δl — изменение длины при нагрузке F, S — площадь поперечного сечения.

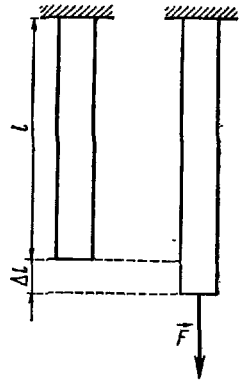

Рис. 5.1.

Из формулы (5.2) следует, что при $\Delta l = l$ модуль Юнга $E = \frac{F}{S} = \sigma$. Иначе говоря, модуль Юнга равен нормальному напряжению, которое возникало бы в образце при увеличении его длины в два раза, если бы для столь большой деформации был бы справедлив закон Гука. Уменьшение длины образца при его продольном сжатии также описывается формулой (5.2), где в этом случае Δl — абсолютная величина изменения длины l.

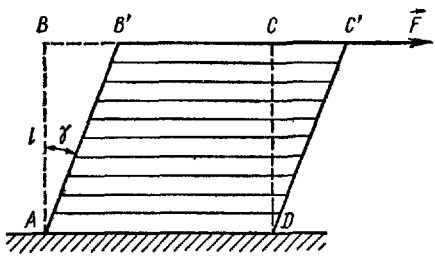

Рис. 5.2.

Растяжение (или сжатие) образцов сопровождается их поперечным сужением (или расширением) $\Delta d/d$, где d — поперечный размер образца, Δd — абсолютная величина его изменения. Отношение поперечного сужения $\Delta d/d$ к продольному удлинению $\Delta l/l$ называют **коэффициентом Пуассона** μ:

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l}. \qquad (5.3)$$

5. **Сдвигом** называют такую деформацию твердого тела, при которой все его плоские слои, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу (рис. 5.2). Сдвиг происходит под действием касательной силы **F**, приложенной к грани BC, параллельной плоскости сдвига. Грань AD параллельная BC, закреплена неподвижно. При малом сдвиге

$$\gamma \approx \operatorname{tg}\gamma = \frac{CC'}{CD}, \qquad (5.4)$$

где $\Delta x = CC'$ — **абсолютный сдвиг**, а γ — **угол сдвига**, называемый также **относительным сдвигом**, выраженный в радианах. По закону

Гука, относительный сдвиг пропорционален касательному («скалывающему») напряжению $\sigma_\tau = F/S$ (S — площадь поверхности грани BC), т. е.

$$\sigma_\tau = G\gamma. \tag{5.5}$$

Величина G носит название **модуля сдвига**. Модуль сдвига равен касательному напряжению, которое возникло бы в образце при относительном сдвиге, равном единице, если бы в этом случае выполнялся закон Гука.

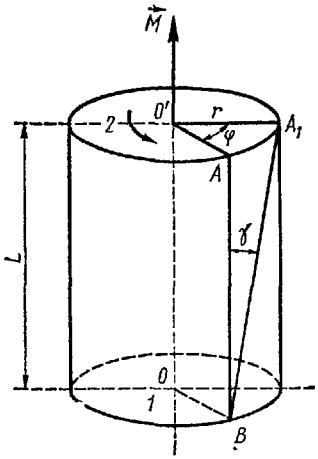

Рис. 5.3.

6. Деформация **всестороннего сжатия** (или растяжения) возникает при равномерном распределении сжимающих (или растягивающих) сил по всей поверхности тела. Согласно закону Гука, наблюдаемое при этой деформации относительное уменьшение (или увеличение) объема $\Delta V/V$ изотропного образца[1] пропорционально возникающему в теле напряжению σ:

$$\sigma = K\,\frac{\Delta V}{V}, \tag{5.6}$$

где K — модуль упругости, а ΔV — абсолютная величина изменения объема. Можно показать, что относительное уменьшение (или увеличение) объема изотропного тела $\Delta V/V$ приблизительно в три раза больше относительного уменьшения (увеличения) его линейных размеров. Объемной упругостью обладают не только твердые, но также жидкие и газообразные тела.

7. Деформация **кручения** возникает в образце (проволоке, стержне и т. п.), если одно сечение образца закреплено неподвижно (рис. 5.3), а во втором действуют две равные по модулю и противоположные по направлению касательные силы, момент **M** которых относительно центра O' этого сечения направлен по оси образца.

Под действием крутящего момента **M** все поперечные сечения стержня, изображенного на рис. 5.3, поворачиваются вокруг оси OO' на некоторые углы тем большие по величине, чем дальше эти сечения расположены от сечения *1*, закрепленного неподвижно. Угол поворота φ сечения *2* называют **углом кручения.** В результате деформации кручения возникает перекос на угол γ образующих цилиндрической поверхности стержня (рис. 5.3), причем $r\varphi = \gamma L$. Поэтому расчет деформации кручения может быть сведен к расчету деформации сдвига.

Приводим без вывода окончательное выражение для момента M,

[1] Тело называют изотропным, если его свойства одинаковы по всем направлениям.

закручивающего на угол φ однородный круглый стержень, имеющий длину L и радиус r:

$$M = \frac{\pi G}{2} \frac{r^4}{L} \varphi, \qquad (5.7)$$

где G — модуль сдвига для материала стержня.

Деформацию кручения часто используют в физических опытах и в измерительных приборах, например, в крутильных весах, в зеркальном гальванометре и т. д.

8. Рассмотрим результаты испытаний какого-либо однородного образца на растяжение, представленные в виде **диаграммы растяжения** — зависимости нормального напряжения σ от относительной деформации $\Delta l/l$ (рис. 5.4). При небольших относительных деформациях σ пропорционально $\Delta l/l$, т. е. справедлив закон Гука. Наибольшее напряжение $\sigma_п$, до которого еще выполняется закон Гука, называют **пределом пропорциональности**. На рис. 5.4 ему соответствует точка A. Дальнейшее увеличение σ вызывает значительное возрастание относительного удлинения. При достижении напряжения $\sigma_т$, называемого **пределом текучести** (точка B), относительная деформация образца продолжает возрастать без дальнейшего увеличения нагрузки (горизонтальная площадка BB'). Иногда горизонтальная площадка отсутствует. Тогда за предел текучести принимается напряжение, при котором значение $\Delta l/l$ отличается от линейной зависимости OA на 0,002. В точке O' начинается дальнейший рост напряжения с увеличением деформации. Наибольшее напряжение $\sigma_в$, соответствующее точке C, называют **пределом прочности**, или **временным сопротивлением**. В точке D образец разрывается.

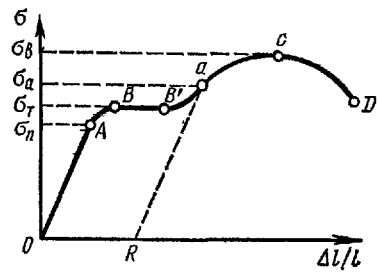

Рис. 5.4.

Если образец, деформированный до напряжения $\sigma_а > \sigma_п$, постепенно разгружать, то соответствующий график $\sigma = f(\Delta l/l)$ пойдет параллельно прямолинейному участку OA кривой и пересечет ось абсцисс в некоторой точке R. Отрезок OR определяет **остаточную деформацию** образца. Если деформацию, при которой перейден предел пропорциональности, и последующее освобождение образца от деформирующих сил повторить несколько раз, то упругость материала образца увеличится и предел пропорциональности будет соответствовать значительно большему напряжению, чем в первый раз. Это явление называют **наклепом**. Для того чтобы вернуть материалу первоначальные свойства, его необходимо отжечь, т. е. выдержать при высокой температуре, несколько меньшей температуры плавления, и затем медленно охладить.

9. В таблице 2 приведены характеристики упругих свойств для некоторых металлов и сплавов.

Таблица 2

Материал	Модуль Юнга E, 10^7 Па	Модуль сдвига σ, 10^7 Па	Коэффициент Пуассона μ	Коэффициент объемной упругости $\frac{1}{K}$, 10^{-10} Па$^{-1}$	Предел прочности $\sigma_в$, 10^8 Па
Алюминий . . .	7000	2600	0,31	0,14	7,8—14,7
Железо кованое	19 600	8100	0,28	0,06	29—44
Сталь 30 ХГСА (улучшеиная) . .	19 600	8100	0,25	0,06	127
Дюралюминий Д-16	7000	2600	0,31	—	40
Чугун	17 500	—	0,17	0,05	19—28
Латунь	9800—11 200	2600—3600	0,3—0,4	0,1	29—49
Свинец	1600	560	0,446	0,24	1.5

10. Вычислим потенциальную энергию упруго деформированного тела, например, сжатой или растянутой проволоки. По закону Гука при деформации проволоки от нуля до Δl ее напряжение возрастает от нуля до σ, а внутренняя сила противодействия проволоки — сила упругости — от 0 до F. Работа, совершаемая при деформации, равна произведению среднего значения $F/2$ этой силы на величину деформации Δl. Следовательно, потенциальная энергия упруго деформированной проволоки равна

$$W_п = A = \frac{1}{2} F\Delta l. \tag{5.8}$$

Подставив в эту формулу значение Δl из (5.2), получим

$$W_п = \frac{1}{2E} \frac{F^2 l}{S}. \tag{5.9}$$

Для того чтобы найти потенциальную энергию, заключенную в единице объема тела, разделим обе части последнего выражения на объем тела $V = lS$:

$$w_п = \frac{W_п}{V} = \frac{1}{2E} \frac{F^2}{S^2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{5.10}$$

Величину $w_п$ называют **объемной плотностью потенциальной энергии.**

Аналогичным путем можно вычислить энергию упругой деформации при сдвиге (рис. 5.2). На грань куба с ребром l, лежащую в плоскости сдвига, действует касательная сила F, равная

$$F = \sigma_\tau l^2, \tag{5.11}$$

или, согласно (5.5),

$$F = G\gamma l^2. \tag{5.11'}$$

При бесконечно малом сдвиге $d\gamma$ верхняя грань перемещается на величину $dx = ld\gamma$. Поэтому элементарная работа, совершаемая внешними силами,

$$dA = Fld\gamma = Gl^3\gamma d\gamma. \tag{5.12}$$

При конечном сдвиге от нуля до γ совершается работа

$$A = W_п = Gl^3 \int_0^\gamma \gamma d\gamma = \frac{G\gamma^2}{2} l^3. \tag{5.12'}$$

Объемная плотность потенциальной энергии

$$w_п = \frac{W_п}{l^3} = \frac{1}{2} G\gamma^2,$$

или, на основании соотношения (5.5),

$$w_п = \frac{\sigma_\tau \gamma}{2} = \frac{\sigma_\tau^2}{2G}. \tag{5.13}$$

Из формул (5.10) и (5.13) видно, что объемная плотность энергии упругой деформации прямо пропорциональна квадрату напряжения и обратно пропорциональна модулю упругости. Подобные формулы можно получить и для других деформаций. Однако все они справедливы лишь в пределах применимости закона Гука.

Если при деформации тела перейден предел пропорциональности, то при уменьшении напряжения до нуля снимается, как мы видели, лишь часть деформации (так называемая упругая деформация). Соответственно возвращается лишь часть работы, затраченной на деформацию тела.

§ 5.3. Виды трения

1. Всякое движущееся тело встречает сопротивление своему движению со стороны окружающей его среды и других тел, с которыми оно во время движения соприкасается. Иначе говоря, на любое движущееся тело действуют **силы трения.** Природа этих сил может быть различной, но в результате их действия всегда происходит превращение механической энергии во внутреннюю энергию трущихся тел, т. е. в энергию теплового движения их частиц. Остановимся на классификации сил трения.

Внутренним трением (вязкостью) называют явление, которое состоит в возникновении касательных сил, препятствующих перемещению частей одного и того же тела по отношению друг к другу (например, трение в жидкостях и газах). При этом превращение механической энергии во внутреннюю происходит во всех точках объема тела

Внутреннее трение в газах и жидкостях будет рассмотрено в главах XI и XIV.

Внешним трением называют явление, заключающееся в возникновении в месте контакта двух соприкасающихся твердых тел касательных сил, которые препятствуют относительному перемещению этих тел.

При скольжении относительно друг друга двух твердых тел, разделенных прослойкой вязкой жидкости (смазки), трение происходит в слое смазки. Эту мысль впервые высказал Н. П. Петров, создавший гидродинамическую теорию смазки. **Гидродинамическим** называют трение, происходящее в достаточно толстом слое смазки. Если толщина смазочной прослойки меньше 0,1 микрометра[1], трение называют **граничным**. Чисто внешнее трение происходит лишь при отсутствии смазки **(сухое трение)**.

2. Различают два вида внешнего трения: **трение кинематическое**, которое происходит между телами, движущимися относительно друг друга и **трение статическое** между взаимно неподвижными телами. В зависимости от характера относительного движения соприкасающихся тел, кинематическое трение подразделяют на **трение скольжения, трение верчения и трение качения.**

§ 5.4. Статическое трение

1. Если к телу, лежащему на горизонтальной плоскости (рис. 5.5), приложить малую силу **F**, направленную по касательной к плоскости, то оно будет продолжать оставаться в покое, так как силу **F** будет уравновешивать сила статического трения, действующая на тело со стороны опоры. При увеличении силы **F** сила статического трения также будет возрастать. Однако из опыта известно, что сила статического трения может увеличиваться лишь до некоторого предельного значения F_0: при $F > F_0$ тело приходит в движение. Г. Амонтон, а затем Ш. Кулон опытным путем установили следующий **закон статического трения**: *предельное значение F_0 силы статического трения прямо пропорционально величине N силы нормального давления тела на опору*, т. е.

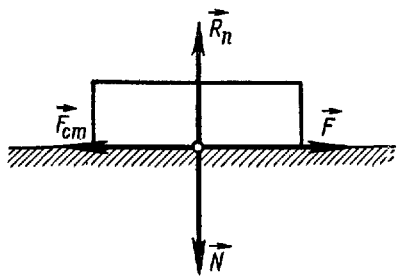

Рис. 5.5.

$$F_0 = f_0 N. \qquad (5.14)$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности f_0 называют **коэффициентом статического трения**. Он, как показывает опыт, зависит от материала и состояния поверхностей соприкосновения тел.

[1] 1 микрометр $= 10^{-6}$ м.

2. Если тело находится на наклонной плоскости, то, как видно из рис. 5.6,

$$N = P\cos\varphi \text{ и } F = P\sin\varphi,$$

где P—сила тяжести тела, φ—угол наклона плоскости к горизонту.

При малых углах φ сила $F < F_0$ и тело лежит неподвижно на наклонной плоскости. По мере увеличения угла φ сила F возрастает и при некотором угле φ_0, называемом **углом трения**, становится равной F_0. При $\varphi > \varphi_0$ тело скользит по наклонной плоскости. Полагая

$$P\sin\varphi_0 = F_0 = f_0 N = f_0 P\cos\varphi_0,$$

найдем связь между коэффициентом статического трения и углом трения:

$$f_0 = \operatorname{tg}\varphi_0. \qquad (5.15)$$

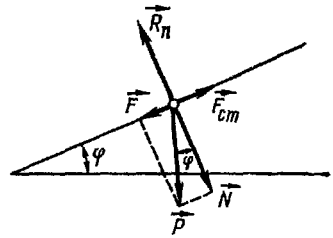

Рис. 5.6.

При действии на соприкасающиеся два тела касательных сил, величина которых меньше предельного значения силы статического трения, тела не проскальзывают друг относительно друга. Это явление, называемое **явлением застоя**, широко используют в технике для передачи усилий от одних частей машин к другим (ременные передачи, фрикционные муфты, ленточные транспортеры и т. д.). На явлении застоя основано скрепление деталей с помощью гвоздей и винтов, движение по поверхности Земли различных видов транспорта. Например, сила тяги автомобиля не может быть больше суммы предельных значений сил статического трения ведущих колес по поверхности дорогн. Если коэффициент статического трения будет мал (например, на обледенелой дороге), то сила тяги может оказаться недостаточной для того, чтобы автомобиль тронулся с места, и его ведущие колеса будут буксовать.

§ 5.5. Кинематическое трение

1. **Закон Амонтона—Кулона для трения скольжения** можно выразить формулой, аналогичной (5.14):

$$F_{ск} = f' N, \qquad (5.16)$$

где f' — **коэффициент трения скольжения**, а N — сила нормального давления. Коэффициент трения скольжения зависит от материала тел и состояния их соприкасающихся поверхностей. Он также несколько зависит от скорости движения. При малых скоростях $f' \approx f_0$.

2. Остановимся на причинах, вызывающих трение скольжения. Во время движения одного тела относительно другого происходит разрушение зацепившихся друг за друга выступов шероховатостей на соприкасающихся поверхностях. До тех пор, пока внешняя сила F

меньше предельного значения, определяемого формулой (5.14), т. е. пока

$$F < f_0 N,$$

происходит лишь незначительная деформация зацеплений и, соответственно, исчезающе малое смещение соприкасающихся поверхностей. Увеличение внешней силы влечет за собой разрушение зацеплений, и при $F > F_0 = f_0 N$ начинается скольжение.

Из сказанного следует, что для уменьшения трения необходимо делать соприкасающиеся поверхности тел возможно более гладкими. Однако, как показывает опыт, целесообразно уменьшать шероховатости этих поверхностей лишь до определенного предела. Дальнейшее уменьшение шероховатости приводит не к уменьшению, а к возрастанию сил трения. Это связано с тем, что между частицами тел с гладкими поверхностями, вплотную прилегающими друг к другу, действуют значительные силы межмолекулярного притяжения. Поэтому «эффективная» сила нормального давления может значительно превосходить силу нормального давления N, обусловленную внешними нагрузками. Для учета указанного явления Б. В. Дерягиным был предложен **двучленный закон трения скольжения:**

$$F_{ск} = f(N + N_0), \tag{5.17}$$

где N_0— дополнительная нормальная сила, являющаяся результирующей сил молекулярного притяжения в областях непосредственного контакта поверхностей трущихся тел, f — **истинный коэффициент трения скольжения.**

Силы межмолекулярного притяжения очень быстро убывают с увеличением расстояния между частицами. Поэтому можно считать, что они проявляются лишь в областях действительного контакта между телами. Если p_0— давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, а S_0— площадь действительного контакта, то формула (5.17) принимает вид

$$F_{ск} = f(N + p_0 S_0). \tag{5.18}$$

Необходимо отметить, что S_0 всегда во много раз меньше площади S кажущегося контакта. Для шероховатых поверхностей S_0 мало и $f \approx f'$, так что двучленный закон трения (5.18) совпадает с законом Амонтона—Кулона (5.16).

3. К трению движения относятся еще **трение при качении и трение при верчении.** Различие этих движений состоит в следующем.

При качении (например, цилиндра по плоскости) точки контакта соприкасаются лишь на мгновение, и одно из тел вращается вокруг мгновенной оси, проходящей через точки контакта. При верчении (например, оси волчка на опоре, стрелки компаса вокруг острия — ее опоры) точки контакта соприкасаются длительно. В случае верчения трение связано со скольжением в местах контакта. Для его уменьшения применяют острия с малыми радиусами закругления и увеличивают твердость острия и опорной поверхности.

Причина возникновения трения качения состоит в следующем. При качении по плоской поверхности кругового цилиндра или шара возникают деформации. Поэтому точка A приложения силы $\mathbf{R}$ реакции поверхности несколько смещается вперед, а линия действия силы отклоняется от вертикали — назад (рис. 5.7). Нормальная составляющая реакции $\mathbf{R}_n = -\mathbf{N}$, а касательная составляющая $\mathbf{R}_\tau$ и является силой трения качения:

$$\mathbf{F}_{\text{кач}} = \mathbf{R}_\tau .$$

При равномерном качении сила $\mathbf{F}_{\text{кач}}$ компенсируется силой тяги $\mathbf{F}$, а реакция $\mathbf{R}$ направлена вдоль прямой AO, так что ее момент относительно оси симметрии O катящегося тела равен нулю. Если r — радиус катящегося тела (цилиндра или шара), а $f_к$ — величина смещения точки A приложения реакции $\mathbf{R}$, то из условия равенства нулю момента силы $\mathbf{R}$ относительно оси O следует, что

$$F_{\text{кач}} \cdot r = R_n f_к = N f_к.$$

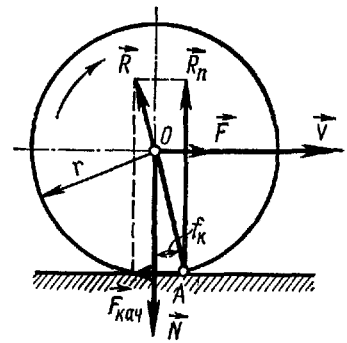

Рис. 5.7.

Поэтому для силы трения качения справедлив **закон Кулона:**

$$F_{\text{кач}} = f_к \frac{N}{r}. \qquad (5.19)$$

Величину $f_к$ называют **коэффициентом трения качения.**

Значения коэффициентов трения скольжения f' и качения $f_к$ для некоторых случаев приведены в табл. 3.

Таблица 3

Материал	f'	Материал	$f_к$, см
Сталь по стали	0,12—0,17	Железный обод по рельсам	0,003
Железо по чугуну	0,18	То же по асфальту . .	0,1
Металл по дереву	0,4—0,6	То же по песку	0,3—0,5
Сталь по льду	0,027	Резиновая шина по твердому грунту	0,4

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте и запишите закон Гука.
2. Опишите рассмотренные в § 5.2 деформации и дайте определения характеризующих их величин.
3. Начертите и поясните диаграмму растяжения
4. Каковы физические причины трения?
5. Изложите законы трения.

Примеры решения задач

Задача 5.1. Стальная проволока длиной в 1 м и сечением 0,8 мм^2 укреплена одним своим концом в подвесном устройстве так, что легко может принимать любое положение в вертикальной плоскости. К противоположному концу проволоки прикреплен груз в 49 Н. Вытянутую проволоку с грузом отклоняют до высоты подвеса и отпускают. Определить удлинение проволоки в нижней точке траектории движения груза. Собственным весом проволоки пренебречь.

Дано

$l = 1$ м,

$S = 8 \cdot 10^{-7}$ м^2,

$P = 49$ Н.

Из таблиц:

$E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ Па

$\Delta l - ?$

Решение

Из формулы (5.2), выражающей закон Гука для деформации растяжения, определяем удлинение:

$$\Delta l = \frac{Fl}{FS},$$

где E — модуль Юнга.

Сила F, растягивающая проволоку в нижней точке траектории груза, численно равна сумме значений силы тяжести груза и центростремительной силы, действующей на груз:

$$F = P + \frac{mv^2}{l + \Delta l},$$

где v — скорость груза.

Из закона сохранения энергии следует, что кинетическая энергия груза в нижней точке траектории равна убыли его потенциальной энергии в поле тяготения Земли при опускании с высоты $l + \Delta l$:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(l + \Delta l)$$

Следовательно,

$$mv^2 = 2mg(l + \Delta l)$$

и

$$F = P + \frac{2mg(l + \Delta l)}{l + \Delta l} = 3P.$$

Искомое удлинение проволоки равно

$$\Delta l = \frac{3Pl}{ES}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

1) проверка размерности результата:

$$[\Delta l] = \frac{[P]\,[l]}{[E]\,[S]} = \frac{LMT^{-2} \cdot L}{L^{-1}MT^{-2} \cdot L^2} = L;$$

2) вычисления:

$$\Delta l = \frac{3 \cdot 49 \cdot 1}{8 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}96 \cdot 10^{11}}\ \text{м} = 9{,}36 \cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Глава VI

ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ. ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

§ 6.1. Закон всемирного тяготения

1. Закономерности движения планет и их спутников, падения тел на Землю, движения артиллерийских снарядов, колебаний маятников свидетельствуют о существовании сил взаимного притяжения тел друг к другу. Эти силы подчиняются **закону всемирного тяготения** (гравитации), установленному И. Ньютоном в 1687 г.:

между всякими двумя материальными точками действует сила всемирного тяготения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек (m_1 и m_2) и обратно пропорциональная квадрату расстояния r между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (6.1)$$

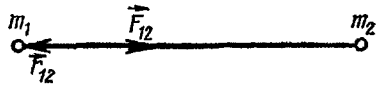

Рис. 6.1.

В векторной форме этот закон записывают следующим образом:

$$\mathbf{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \qquad (6.2)$$

где $\mathbf{F}_{12}$— сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй, $\mathbf{r}_{12}$— радиус-вектор, соединяющий вторую точку с первой, $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$ — расстояние между точками, а знак минус указывает на то, что $\mathbf{F}_{12}$— сила притяжения, т. е. противоположна по направлению вектору $\mathbf{r}_{12}$ (рис. 6.1).

Коэффициент пропорциональности γ называют **гравитационной постоянной**, или **постоянной тяготения.** Как видно из уравнения (6.1), гравитационная постоянная численно равна силе взаимного тяготения двух материальных точек, массы которых одинаковы и равны единице массы, а расстояние между точками равно единице длины.

Размерность гравитационной постоянной в Международной системе единиц (СИ) найдем из уравнения (6.1):

$$[\gamma] = \frac{[F] \cdot [r]^2}{[m]^2} = L^3 M^{-1} T^{-2}.$$

2. Для нахождения сил взаимного тяготения двух тел произвольных размеров и формы их необходимо мысленно разбить на столь большое число малых частей, чтобы каждую из них можно было считать материальной точкой. Если масса i-й точки первого тела m_i, а k-й точки второго тела m_k, то силу $\mathbf{F}_{ik}$ тяготения первой точки ко второй можно найти по формуле (6.2):

$$\mathbf{F}_{ik} = -\gamma \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik},$$

где $\mathbf{r}_{ik}$ — радиус-вектор, проведенный из k-й точки в i-ю.

Результирующая $\mathbf{F}_i$ сил притяжения i-й точки первого тела всеми n_2 материальными точками второго тела равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_{i1}, \ldots, \mathbf{F}_{in_2}$:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{k=1}^{n_2} \mathbf{F}_{ik} = -\gamma m_i \sum_{k=1}^{n_2} \frac{m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}.$$

Сила $\mathbf{F}$ тяготения всего первого тела ко второму равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_i$, распространенной на все n_1 материальных точек первого тела:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{F}_i = -\gamma \sum_{i=1}^{n_1} m_i \sum_{k=1}^{n_2} \frac{m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}. \qquad (6.3)$$

Можно показать, что формула (6.3) эквивалентна (6.2), где m_1 и m_2 — массы тел, а $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, соединяющий их центры масс, в следующих двух случаях:

а) оба тела имеют шарообразную форму, а их плотности зависят только от расстояний до центров этих тел;

б) размеры одного из тел во много раз меньше размеров другого, причем второе тело удовлетворяет условиям случая а).

В первом приближении можно считать, что Земля имеет шарообразную форму, а ее плотность зависит только от расстояния до центра Земли. Поэтому силу тяготения всякого тела к Земле можно определять по формулам (6.2) и (6.1).

3. Численное значение гравитационной постоянной было впервые экспериментально измерено Г. Кэвендишем в 1798 г. с помощью крутильных весов, принципиальная схема которых изображена на рис. 6.2. Легкое коромысло A с двумя одинаковыми маленькими шариками m было подвешено на упругой нити L. На другом коромысле B были укреплены на той же высоте два одинаковых массивных шара M. Поворачивая коромысло B вокруг вертикальной оси, можно было изменять расстояния между шарами m и M. Под действием пары сил, приложенных к шарам m со стороны шаров M, коромысло A поворачивалось в горизонтальной плоскости, закручивая нить L до тех пор, пока момент сил упругости не уравновешивал момент сил тяготения. Угол закручивания нити L определяли по смещению на шкале светового зайчика, отбрасываемого зеркальцем S, прикреплённым к середине коромысла A. Зная упругие свойства нити L и угол ее закручивания, Кэвендиш

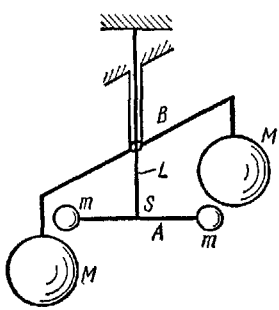

Рис. 6.2.

вычислял силы взаимного тяготения шаров m и M для различных расстояний между ними. Опыты Кэвендиша подтвердили справедливость закона всемирного тяготения и дали возможность определить значение гравитационной постоянной.

Более точные измерения гравитационной постоянной были произведены в 1898 г. Рихарцем. Идея этих опытов заключалась в следующем. Два одинаковых шара m были подвешены к разным концам коромысла рычажных весов B (рис. 6.3), установленных на массивной плоскопараллельной плите A. Один шар находился над плитой, а другой — под ней. Если шары находятся вдали от краев плиты, а расстояния r от шаров до плиты во много раз меньше ширины a и длины L плиты, то, как можно показать, силы тяготения шаров к плите не зависят от r и равны $\frac{2\pi\gamma mM}{S}$, где m и M — массы шара и плиты, а S — площадь поверхности плиты. На левый шар действовала сила, направленная вертикально вверх, а на правый — такая же по величине сила, направленная вертикально вниз. Поэтому равновесие весов нарушалось. По отклонению стрелки весов из положения равновесия можно было измерить силы, действовавшие на шары со стороны плиты.

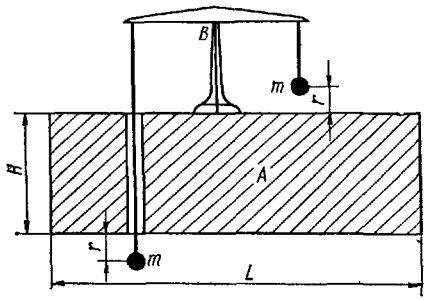

Рис. 6.3.

Из опытов получено следующее значение гравитационной постоянной:

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \quad \text{с}^2}.$$

4. Сила $\mathbf{F}$ тяготения к Земле каждого находящегося на ней тела направлена к центру Земли и численно равна

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}, \tag{6.4}$$

где m и M — массы тела и Земли, R — расстояние от тела до центра Земли.

Наблюдения показывают, что сила $\mathbf{F}$ вызывает два вида движения тела. Во-первых, тело, лишенное опоры, падает на Землю. Во-вторых, тело участвует в суточном вращении Земли, т. е. движется по окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения Земли. Поэтому силу тяготения $\mathbf{F}$ целесообразно разложить на две составляющие $\mathbf{P}$ и $\mathbf{F}_\text{ц}$ (рис. 6.4):

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_\text{ц}. \tag{6.5}$$

Центростремительная сила $\mathbf{F}_ц$ обусловливает участие тела в суточном вращении Земли. Она направлена к центру O' окружности радиусом R_φ, по которой движется тело, и численно равна

$$F_ц = \frac{mv^2}{R_\varphi} = m\omega^2 R_\varphi ,$$

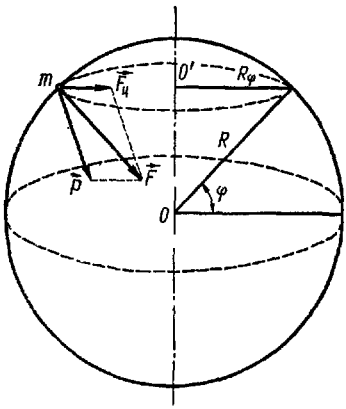

Рис. 6.4.

где $v = \omega R_\varphi$ — линейная скорость тела, ω — угловая скорость суточного вращения Земли. Как видно из рис. 6.4, $R_\varphi = R \cdot \cos\varphi$, где R — расстояние от тела до центра Земли, φ — географическая широта места нахождения тела. Таким образом,

$$F_ц = m\omega^2 R \cdot \cos\varphi . \qquad (6.6)$$

Сила **P** вызывает падение незакрепленного тела на Землю. Ее называют **силой тяжести тела.** Она равна силе, с которой неподвижное относительно Земли тело давит на опору вследствие тяготения к Земле, и может быть измерена с помощью пружинного динамометра. Точку приложения силы тяжести тела, т. е. равнодействующей сил тяжести всех частиц тела, называют **центром тяжести тела.**

Из уравнения (6.6) видно, что численное значение центростремительной силы зависит от географической широты φ того места, где находится тело. На полюсах $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ $F_ц = 0$, а на экваторе ($\varphi = 0$) она достигает максимального значения, равного $m\omega^2 R$. Следовательно, во всех точках земной поверхности, за исключением полюсов, сила тяжести тела меньше силы его тяготения к Земле. Кроме того, везде, кроме полюсов и экватора, вектор **P** не перпендикулярен к поверхности Земли. Вследствие суточного вращения Земли сила тяжести тела максимальна на полюсах, где она равна силе тяготения, и минимальна на экваторе:

$$P_{пол} = \gamma \frac{mM}{R^2_{пол}} \quad \text{и} \quad P_{экв} = \gamma \frac{mM}{R^2_{экв}} - m\omega^2 R_{экв},$$

$$P_{экв} = \gamma \frac{mM}{R^2_{экв}} \left(1 - \frac{\omega^2 R^3_{экв}}{\gamma M}\right)$$

где $R_{пол} = 6357$ км и $R_{экв} = 6378$ км — полярный и экваториальный радиусы Земли. Небольшое различие величин $R_{пол}$ и $R_{экв}$ связано с тем, что Земля не имеет строго сферической формы, а весьма близка к эллипсоиду вращения. Так как масса Земли

$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг и $\omega = \dfrac{2\pi}{24 \cdot 3600}$ рад/с, то

$$\frac{\omega^2 R_{\text{экв}}^3}{\gamma M} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot (6{,}38 \cdot 10^6)^2}{(24 \cdot 3600)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}} = 0{,}00345.$$

Поэтому в большинстве практических задач можно пренебречь отличием силы тяжести тела от силы тяготения его к Земле, полагая

$$P = \gamma \frac{mM}{R^2}. \tag{6.7}$$

5. Движение тела под действием одной только силы тяжести P называют **свободным падением**, а ускорение g, приобретаемое при этом телом, называют **ускорением свободно падающего тела.** По второму закону Ньютона

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{P}}{m}. \tag{6.8}$$

Воспользовавшись уравнением (6.7), т. е. пренебрегая влиянием суточного вращения Земли, найдем

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} = \gamma \frac{M}{(R_0 + h)^2}, \tag{6.9}$$

где R_0— радиус поверхности Земли, h — расстояние от центра тяжести тела до поверхности Земли.

Из (6.9) следует, что:

а) ускорение свободно падающего тела не зависит от массы, размеров и других характеристик тела, поэтому все тела свободно падают в безвоздушном пространстве с одинаковыми ускорениями;

б) при удалении от поверхности Земли ускорение свободно падающего тела изменяется по закону

$$\frac{g_0}{g} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 = \left(\frac{R_0 + h}{R_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{R_0}\right)^2, \tag{6.10}$$

где g и g_0— ускорения тела при его свободном падении соответственно на высоте h и у поверхности Земли.

Вблизи поверхности Земли $h \ll R_0$ и

$$\frac{g_0}{g} \approx 1 + \frac{2h}{R_0},$$

т. е. с подъемом на 1 км ускорение силы тяжести уменьшается приблизительно на 0,03%.

Нешарообразность формы Земли и влияние суточного вращения приводят к тому, что ускорение силы тяжести g_0 оказывается зависящим от географической широты места, изменяясь от 9,83 м/с^2 на полюсах до 9,78 м/с^2 на экваторе. На широте 45° оно равно 9,80665 м/с^2 и называется «нормальным ускорением».

6. Ньютон подтвердил правильность закона всемирного тяготения, доказав, что сила, удерживающая Луну на ее орбите, есть сила тяготения Луны к Земле. Если считать, что Луна равномерно движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом R, то центростремительное ускорение Луны равно

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

где T — период обращения Луны. Из астрономии было известно, что $T = 27{,}3$ сут, а R больше радиуса Земли R_0 в 60,3 раза, поэтому $a = 2{,}70 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. Ускорение g на расстоянии R от центра Земли, как видно из формулы (6.10), равно

$$g = g_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = \frac{9{,}81}{(60{,}3)^2} = 2{,}70 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2,$$

т. е. совпадает с a.

Таким образом, центростремительная сила, действующая на Луну, действительно равна силе тяготения Луны к Земле:

$$F_\text{ц} = m_\text{л} a = m_\text{л} g = \gamma \frac{m_\text{л} M}{R^2},$$

где $m_\text{л}$ — масса Луны.

С помощью закона всемирного тяготения и законов динамики Ньютон обосновал законы движения небесных тел. Он определил отношение массы Солнца к массе каждой из планет, у которых были известны спутники; дал метод вычисления орбит комет, объяснил явление приливов и отливов и т. д.

Труды Ньютона послужили основой дальнейших открытий в небесной механике. Так, изучение возмущений в движении Урана привело к открытию новой планеты — Нептуна, а исследование возмущений в движении Нептуна — к открытию Плутона.

§ 6.2. Поле тяготения

1. Закон всемирного тяготения, устанавливая зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, не дает ответа на вопрос о том, как осуществляется это взаимодействие. Тяготение, в отличие от таких механических взаимодействий, как удар и трение, принадлежит к особой группе взаимодействий. Оно проявляется между телами, удаленными друг от друга, причем силы тяготения не зависят от того, в какой среде эти тела находятся (в воздухе, воде или в каком-либо другом веществе). Тяготение в равной мере существует даже тогда, когда взаимодействующие тела находятся в вакууме.

2. Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется посредством **поля тяготения (гравитационного поля)**. Это поле порождается телами и так же, как вещество и другие физические поля (например, электромагнитное), с которыми мы познакомимся в после-

дующих частях курса, является одной из форм материи. Основное свойство поля тяготения, отличающее его от других физических полей, состоит в том, что на всякую материальную точку с массой m, внесенную в это поле, действует сила тяготения $\mathbf{F}$, пропорциональная m:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G}. \tag{6.11}$$

Вектор $\mathbf{G}$, входящий в эту формулу, не зависит от m. Его называют **напряженностью** поля тяготения. Он численно равен силе, действующей со стороны поля на материальную точку *единичной массы*, и совпадает с этой силой по направлению. Вектор напряженности является *силовой характеристикой* гравитационного поля и в общем случае изменяется при переходе от одной точки поля к другой.

Если материальная точка движется только под действием сил поля тяготения, то, как видно из сопоставления (6.11) со вторым законом Ньютона, ее ускорение в каждой точке поля совпадает с вектором $\mathbf{G}$.

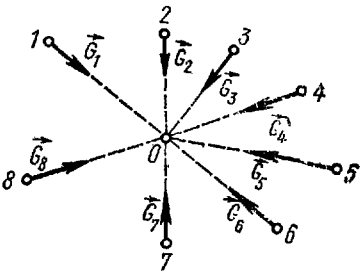

Рис. 6.5.

Поле называют **однородным**, если его напряженность во всех точках одинакова. Поле называют **центральным**, если во всех его точках векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной и той же точке O, *неподвижной* по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (рис. 6.5). Если начало координат совместить с точкой O, а положение точек поля C (x, y, z) определять с помощью радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из O, то для центрального поля тяготения

$$\mathbf{G} = \frac{G_r}{r} \cdot \mathbf{r}, \tag{6.12}$$

где $G_r = G_r(x, y, z)$ — проекция вектора $\mathbf{G}$ на направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$, а $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Точку O называют **центром сил.**

Центральное поле называют **сферически симметричным**, если численное значение вектора напряженности зависит только от расстояния r до центра сил O:

$$G = G(r) \text{ и } G_r = G_r(r).$$

Пример. Поле тяготения, создаваемое неподвижной материальной точкой с массой M. По закону всемирного тяготения (6.2) сила $\mathbf{F}$, действующая на материальную точку с массой m со стороны поля тяготения точки с массой M, равна

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}.$$

Напряженность поля

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3}\mathbf{r}. \tag{6.13}$$

Поле является центральным и сферически симметричным, так как

$$G_r = -\gamma \frac{M}{r^2}. \tag{6.14}$$

3. Рассмотрим поле тяготения, создаваемое системой неподвижных материальных точек с массами m_1, m_2, ..., m_n.

Сила $\mathbf{F}_i$, которая действует со стороны i-й точки системы на материальную точку с массой m, помещенную в произвольную точку C поля, равна

$$\mathbf{F}_i = -\gamma \frac{mm_i}{r_i^3}\mathbf{r}_i = m\mathbf{G}_i, \tag{6.15}$$

где $\mathbf{r}_i$— радиус-вектор, проведенный из i-й точки системы в точку C, $\mathbf{G}_i$— напряженность в точке C поля тяготения, создаваемого одной материальной точкой с массой m_i.

Результирующая сила $\mathbf{F}$, действующая на точку m со стороны всех точек системы, равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_i$:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = m \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G},$$

где $\mathbf{G}$ — искомая напряженность поля системы материальных точек. Из двух последних формул следует, что

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i. \tag{6.16}$$

Таким образом, *при наложении нескольких полей тяготения напряженность результирующего поля равна векторной сумме напряженностей всех этих полей.*

Это утверждение называют **принципом суперпозиции** (наложения) **полей.** На основе принципа суперпозиции можно доказать, что для напряженности поля тяготения вне шарообразного тела, плотность которого всюду одинакова или изменяется только в радиальных направлениях ($\rho = \rho(r)$), справедлива формула (6.13):

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3}\mathbf{r} \quad (\text{при } r \geqslant R),$$

где M — масса всего тела, R — радиус его поверхности, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра тела.

Иными словами, поле такого тела подобно полю материальной точки, расположенной в центре тела и обладающей массой, равной массе тела.

Если поле тяготения создается шаровым слоем, плотность которого $\rho = \rho(r)$, то напряженность этого поля внутри полости, ограниченной слоем, равна нулю.

4. В соответствии со вторым законом Ньютона и выражением (6.11) для силы тяготения **F** ускорение **a**, приобретаемое в поле тяготения телом, которое свободно от других воздействий, равно напряженности **G** поля тяготения в месте нахождения тела в рассматриваемый момент времени:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{G}.$$

Если тело несвободно (например, находится на поверхности Земли, лежит на полу или подвешено к потолку кабины лифта и т. п.). то под влиянием поля тяготения тело действует с некоторой силой **Q** на опору или подвес, удерживающие его от свободного движения в поле тяготения. Эту силу называют **весом тела**. В свою очередь опора или подвес действуют на тело с силой реакции, равной $-\mathbf{Q}$. В отличие от силы тяготения, вес тела зависит от величины ускорения $\mathbf{a}_0$, с которым движутся опора или подвес и неподвижное относительно них тело. В самом деле, по второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{Q},$$

откуда вес тела

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 = m(\mathbf{G} - \mathbf{a}_0),$$

где m — масса тела. Например, для тела, неподвижно лежащего на поверхности Земли, $\mathbf{a}_0$— центростремительное ускорение, обусловленное суточным вращением Земли. Поэтому вес тела, покоящегося относительно Земли, равен его силе тяжести. Вес тела, подвешенного в лифте, больше силы тяжести этого тела, если ускорение лифта направлено вверх, т. е. в сторону, противоположную направлению вектора **G** напряженности поля тяготения Земли (лифт опускается замедленно или поднимается ускоренно). Если ускорение лифта совпадает по направлению с вектором **G**, т. е. лифт опускается ускоренно или поднимается замедленно, то вес тела меньше его силы тяжести. В частности, при свободном падении лифта вес тела равен нулю. Такое состояние называют **состоянием невесомости**. Оно реализуется в любой системе, движущейся только под действием поля тяготения, которое в пределах системы можно считать однородным. Состояние невесомости характерно для тел, находящихся в космическом корабле, так как основную часть своей траектории в поле тяготения корабль проходит с выключенным двигателем.

5. Докажем, что силы тяготения — консервативные силы. Элементарная работа δA, совершаемая силами поля тяготения при перемещении в нем материальной точки с массой m, равна

$$\delta A = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = m(\mathbf{G}, d\mathbf{r}), \qquad (6.17)$$

где $\mathbf{G}$ — напряженность поля, $d\mathbf{r}$ — вектор элементарного перемещения.

В простейшем случае поля, создаваемого материальной точкой с массой M (рис. 6.6),

$$\mathbf{G} = -\gamma \frac{M}{r^3}\mathbf{r}$$

и

$$\delta A = -\gamma \frac{mM}{r^3}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}).$$

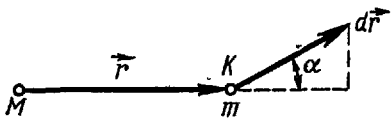

Рис. 6.6.

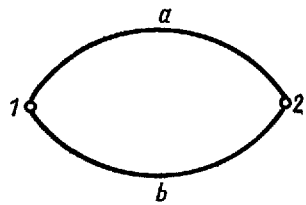

Рис. 6.7.

Так как

$$(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \frac{1}{2}d(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}d(r^2) = rdr,$$

то

$$\delta A = -\gamma mM \frac{dr}{r^2} \tag{6.18}$$

При конечном перемещении точки m из точки *1* в точку *2* (рис. 6.7) работа сил поля равна

$$A_{1-2} = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma mM \frac{dr}{r^2} = -\gamma mM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \gamma mM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{6.19}$$

Из выражения (6.19) следует, что работа A_{1-2} не зависит от того, вдоль какой траектории точка m перемещалась из положения *1* в положение *2*. Она одинакова при перемещении точки вдоль произвольных кривых *1a2* и *1b2*. Работа A_{1-2} пропорциональна произведению масс m и M материальных точек и зависит только от начального и конечного расстояний между ними. Таким образом, силы поля тяготения, создаваемого одной материальной точкой M, действительно являются консервативными. Работа этих сил при перемещении точки m вдоль произвольного замкнутого контура L (например, контура *1a2b1*) тождественно равна нулю:

$$\oint_L (\mathbf{F}\ d\mathbf{r}) \equiv 0, \tag{6.20}$$

или, учитывая, что $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$,

$$\oint_L (\mathbf{G},\ d\mathbf{r}) \equiv 0. \tag{6.20'}$$

Интегралы $\oint_L (\mathbf{F}, d\mathbf{r})$ и $\oint_L (\mathbf{G}, d\mathbf{r})$ называют **циркуляцией, соответственно, вектора F и вектора G вдоль замкнутого контура.** Условие (6.20) или эквивалентное ему условие (6.20′) является необходимым и достаточным признаком консервативности силового поля **F**.

Легко показать, что тождество (6.20′) справедливо для любого поля тяготения, создаваемого сколь угодно сложной совокупностью тел.

В самом деле, любую совокупность тел можно заменить эквивалентной им системой n материальных точек. Поэтому напряженность **G** произвольного поля тяготения в соответствии с принципом суперпозиции полей равна

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i,$$

где $\mathbf{G}_i$ — напряженность поля, создаваемого i-й материальной точкой системы. Следовательно, скалярное произведение:

$$(\mathbf{G}_i\ d\mathbf{r}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i,\ d\mathbf{r}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{G}_i,\ d\mathbf{r})$$

и

$$\oint_L (\mathbf{G},\ d\mathbf{r}) = \oint_L \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{G}_i, d\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} \oint_L (\mathbf{G}_i,\ d\mathbf{r}) \equiv 0,$$

так как по доказанному выше циркуляция вдоль замкнутого контура L вектора $\mathbf{G}_i$ напряженности поля тяготения, создаваемого одной i-й материальной точкой, тождественно равна нулю.

6. В § 3.1 показано, что работа A, совершаемая консервативными силами, равна уменьшению потенциальной энергии системы. В рассматриваемом нами случае она равна уменьшению потенциальной энергии $W_{\text{п}}$ материальной точки m, перемещающейся в поле тяготения:

$$A_{1-2} = -\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}_1} - W_{\text{п}_2} \tag{6.21}$$

или, для элементарного перемещения [1],

$$dA = -dW_{\text{п}}. \tag{6.21'}$$

Из (6.21) и (6.19) следует, что в случае поля тяготения, создаваемого материальной точкой с массой M,

$$W_{\text{п}_1} - W_{\text{п}_2} = -\gamma m M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

[1] Элементарная работа консервативных сил является полным дифференциалом. Поэтому в дальнейшем мы ее обозначим через dA

Если, как это обычно принято, условиться считать, что потенциальная энергия точки m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от источника поля — точки M:

$$\lim_{r_2 \to \infty} W_{п_2} = 0,$$

то

$$W_{п_1} = -\frac{\gamma m M}{r_1},$$

или, в силу произвольности выбора точки 1,

$$W_п = -\frac{\gamma m M}{r}. \tag{6.22}$$

Формула (6.22) в равной мере справедлива для потенциальной энергии материальной точки с массой M в поле тяготения, создаваемом материальной точкой с массой m. Поэтому $W_п$ часто называют **взаимной потенциальной энергией** обеих точек.

Все величины, входящие в правую часть уравнения (6.22), положительны. Следовательно, потенциальная энергия $W_п < 0$

Можно показать, что потенциальная энергия материальной точки с массой m в поле тяготения, создаваемом произвольной системой материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, равна

$$W_п = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m m_i}{r_i}, \tag{6.23}$$

где r_i — расстояние от точки с массой m до i-й точки системы.

Если поле создается телом шарообразной формы, плотность которого зависит только от расстояний до его центра, то формула (6.23) оказывается эквивалентной формуле (6.22), где M — масса всего тела, а $r \geqslant R$ (R — радиус поверхности тела).

7. Величина $\varphi_т$, равная отношению потенциальной энергии материальной точки в поле тяготения к массе m этой точки, как видно из (6.23), не зависит от m:

$$\varphi_т = \frac{W_п}{m} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m_i}{r_i}. \tag{6.24}$$

Иными словами, $\varphi_т$ служит энергетической характеристикой самого поля тяготения. Ее называют **потенциалом поля тяготения.** Размерность $\varphi_т$ совпадает с размерностью квадрата скорости.

Из формулы (6.22) следует, что потенциал поля тяготения, создаваемого одной материальной точкой с массой M, равен

$$\varphi_т = -\frac{\gamma M}{r}, \tag{6.25}$$

где r — расстояние от этой точки до рассматриваемой точки поля.

Эта же формула справедлива для поля тяготения тел шарообразной формы, удовлетворяющих указанным выше условиям.

Из сопоставления формул (6.24) и (6.25) следует, что

$$\varphi_т = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{т_i}, \tag{6.26}$$

т. е. потенциал в некоторой точке поля, являющегося результатом наложения ряда полей, равен сумме потенциалов в этой точке, соответствующих каждому из полей в отдельности.

8. Между двумя характеристиками поля тяготения, его напряженностью и потенциалом, существует взаимосвязь. Элементарная работа dA, совершаемая силами поля при малом перемещении материальной точки с массой m, как видно из уравнений (6.21) и (6.24), равна

$$dA = -m \cdot d\varphi_т.$$

С другой стороны, в соответствии с (6.17)[1]

$$dA = m(\mathbf{G},\ d\mathbf{r}) = mG\cos\alpha \cdot dl = m \cdot G_l dl,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{G}$ и $d\mathbf{r}$, $dl = |d\mathbf{r}|$ и $G_l = G\cos\alpha$ — проекция вектора $\mathbf{G}$ на направление элементарного перемещения $d\mathbf{r}$.

Таким образом,

$$mG_l \cdot dl = -m \cdot d\varphi_т,$$

или

$$G_l = -\frac{d\varphi_т}{dl}. \tag{6.27}$$

Величина $\frac{d\varphi_т}{dl}$ характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения $d\mathbf{r}$ в поле тяготения. Если вектор $d\mathbf{r}$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{G}$, то $G_l = G$ и $\left|\frac{d\varphi_т}{dl}\right|$, как видно из (6.27), имеет максимальное значение, причем в силу положительности G величина $\frac{d\varphi_т}{dl} < 0$. Таким образом, *в каждой точке поля тяготения вектор напряженности* $\mathbf{G}$ *направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.*

Можно показать, что

$$\mathbf{G} = -\text{grad}\varphi_т, \tag{6.28}$$

где $\text{grad}\,\varphi_т = \frac{\partial\varphi_т}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi_т}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi_т}{\partial z}\mathbf{k}$ — вектор, называемый **градиентом потенциала**, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — орты прямоугольной декартовой системы координат.

9. Рассмотренная нами теория поля тяготения так же, как и лежащий в ее основе закон всемирного тяготения Ньютона, является при-

[1] См сноску на стр 111

ближенной. Она достаточно точно описывает движение тела в поле тяготения при соблюдении следующих двух условий:

а) скорость v тела во много раз меньше скорости света в вакууме ($v \ll c$);

б) поле тяготения сравнительно слабое, т. е. его потенциал $|\varphi_т| \ll c^2$.

Более точная теория поля тяготения, основанная на теории относительности, была разработана А. Эйнштейном (1916). Теория относительности, которая будет рассмотрена в III томе курса, указала на существование тесной взаимосвязи между пространством и временем. В связи с этим для описания физических процессов оказалось необходимым использование четырехмерного пространства-времени. Согласно современным воззрениям геометрические свойства (метрика) пространства-времени зависят от распределения в пространстве тяготеющих масс и их движения. Поле тяготения вызывает отклонение метрики пространства-времени от метрики, описываемой геометрией Евклида: массы, создающие поле тяготения, «искривляют» реальное трехмерное пространство и по-разному изменяют ход времени в различных точках этого пространства. В свою очередь движение тел в поле тяготения можно рассматривать как движение по инерции в пространстве, метрика которого неэвклидова, так что это движение тел не является равномерным и прямолинейным.

Теория тяготения позволила предсказать и объяснить ряд явлений, подтвержденных астрономическими измерениями: медленное вращение эллиптических орбит планет вокруг осей, перпендикулярных к плоскостям этих орбит; искривление световых лучей в поле тяготения и др.

Оказалось также, что в общем случае произвольных полей тяготения принцип суперпозиции не выполняется. Этот принцип соблюдается лишь для слабых полей ($|\varphi_т| \ll c^2$) и движений с малыми скоростями ($v \ll c$).

§ 6.3. Движение в центральном силовом поле

1. Рассмотрим движение материальной точки B под действием центральной силы

$$\mathbf{F} = \frac{F_r}{r}\,\mathbf{r}, \tag{6.29}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра сил O в движущуюся точку, F_r — проекция вектора силы на направление радиуса-вектора, зависящая только от расстояния r между точками O и B. В случае притяжения точки B к центру сил $F_r = -|\mathbf{F}|$, в случае отталкивания $F_r = |\mathbf{F}|$.

2. Момент $\mathbf{M}$ силы $\mathbf{F}$ относительно точки O равен нулю:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \frac{F_r}{r}[\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0.$$

Поэтому в соответствии с законом сохранения момент импульса материальной точки B относительно точки O

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = \text{const}, \tag{6.30}$$

где m — масса точки B, а $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — ее скорость.

Вектор $\mathbf{L}$ перпендикулярен к плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Из (6.30) следует, что в центральном силовом поле эта плоскость не меняет своей ориентации в пространстве, т. е. *траектория точки B является плоской кривой*. Таким образом, положение точки B можно задать с помощью двух полярных координат r и φ (рис. 6.8), а ее скорость $\mathbf{v}$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие — **радиальную скорость** $\mathbf{v}_r$ и **трансверсальную скорость** $\mathbf{v}_\varphi$:

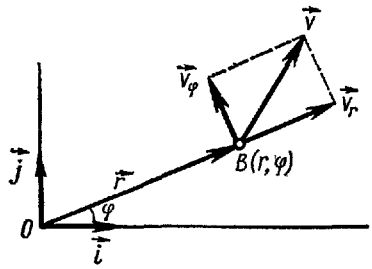

Рис. 6.8.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi \quad \text{и} \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2},$$

где

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{и} \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}.$$

Действительно, $\mathbf{r} = r(\cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \sin\varphi \cdot \mathbf{j})$, где $\mathbf{i}$ — единичный вектор полярной оси, а $\mathbf{j}$ — единичный вектор, образующий с $\mathbf{i}$ угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Скорость точки B $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, или

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}(\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi) + r\frac{d\varphi}{dt}(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi).$$

Единичный вектор $\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi = \frac{\mathbf{r}}{r}$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{r}$, а единичный вектор $-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi$ перпендикулярен к $\mathbf{r}$. Поэтому первый член правой части написанного выше выражения для $\mathbf{v}$ является радиальной скоростью, а второй — трансверсальной.

Из (6.30) и (6.31) следует, что

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}_r] + [\mathbf{r}, m\mathbf{v}_\varphi] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}_\varphi],$$

или, в силу взаимной перпендикулярности векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}_\varphi$,

$$L = mr^2\frac{d\varphi}{dt} = \text{const}. \tag{6.32}$$

При повороте радиуса-вектора $\mathbf{r}$ за время dt на малый угол $d\varphi$ радиус-вектор прочерчивает круговой сектор, площадь которого $dS = \frac{1}{2}r^2 \cdot d\varphi$.

Поэтому величину

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

называют **секториальной**, или **секторной, скоростью**. Из (6.32) видно, что *при движении материальной точки в центральном силовом поле секториальная скорость точки постоянна*:

$$\sigma = \frac{L}{2m} = \text{const}. \tag{6.33}$$

Этот закон впервые был установлен Кеплером применительно к движению планет в поле тяготения Солнца. Его называют **вторым законом Кеплера.**

3. Для определения траектории материальной точки B воспользуемся законами сохранения момента импульса (уравнение 6.32) и энергии:

$$W = W_к + W_п = \text{const}. \tag{6.34}$$

На основе соотношений (6.31) и (6.32) кинетическая энергия может быть представлена в виде:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{L}{mr}\right)^2\right].$$

Подставив это значение $W_к$ в уравнение (6.34) и разрешив его относительно $\frac{dr}{dt}$, получим:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(W - W_п) - \left(\frac{L}{mr}\right)^2}.$$

Из (6.32)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}.$$

Таким образом,

$$d\varphi = \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(W - W_п) - \left(\frac{L}{r}\right)^2}}\, dr$$

и

$$\varphi = -\int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2m(W - W_п) - \left(\frac{L}{r}\right)^2}}. \tag{6.35}$$

Для нахождения этого интеграла необходимо знать зависимость потенциальной энергии $W_п$ от r. Большой практический интерес представляет движение материальной точки B в таком с ф е р и ч е с к и

симметричном центральном силовом поле, для которого

$$W_{\text{п}} = \frac{\beta}{r}, \tag{6.36}$$

где $\beta = \text{const}$. В случае поля тяготения, создаваемого материальной точкой с массой M, $\beta = -\gamma mM < 0$ (см. формулу 6.22). Соотношение (6.36) справедливо также для потенциальной энергии точечного электрического заряда q_1, находящегося в электростатическом поле другого точечного заряда q_2. Во II томе курса физики будет показано, что β пропорционально произведению q_1q_2, причем $\beta < 0$, если заряды взаимно притягиваются (разноименные заряды), и $\beta > 0$, если заряды взаимно отталкиваются (одноименные заряды).

Подставим значение (6.36) для $W_{\text{п}}$ в уравнение (6.35)

$$\varphi = -\int \frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2mW - 2\frac{m\beta}{r} - \left(\frac{L}{r}\right)^2}} =$$

$$= -\int \frac{d\left(\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}\right)}{\sqrt{\left[2mW + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2\right] - \left[\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}\right]^2}}.$$

Последний интеграл сводится к табличному, если ввести обозначения:

$$\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L} = x \quad \text{и} \quad 2mW + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2 = a^2,$$

$$\varphi = -\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos\frac{x}{a} + \varphi_0,$$

где φ_0 — постоянная интегрирования, которую можно обратить в нуль, выбрав начало отсчета угла φ таким образом, чтобы $\varphi = 0$ при $x = a$. Подставив значения x и a, получим уравнение траектории точки B:

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{L}{r} + \frac{m\beta}{L}}{\sqrt{2mW + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}}$$

или

$$r = \frac{L}{-\frac{m\beta}{L} + \cos\varphi\sqrt{2mW + \left(\frac{m\beta}{L}\right)^2}}. \tag{6.37}$$

4. Если точка B притягивается к силовому центру, то $\beta < 0$ и уравнение ее траектории (6.37) можно переписать в такой

форме:

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi}, \tag{6.38}$$

где

$$p = \frac{L^2}{m|\beta|} \quad \text{и} \quad e = \sqrt{\frac{2WL^2}{m\beta^2} + 1}. \tag{6.39}$$

Траектория, или орбита, точки B представляет собой кривую второго порядка, причем p — ее фокальный параметр, а e — эксцентриситет.

Возможны следующие типы траекторий точки B:

а) эллиптическая орбита ($e < 1$) при $W < 0$;

б) параболическая орбита ($e = 1$) при $W = 0$;

в) гиперболическая орбита ($e > 1$) при $W > 0$;

г) прямолинейная траектория, проходящая через центр сил ($p = 0$, $e = 1$) при $L = 0$.

В первых трех случаях центр сил совпадает с одним из фокусов орбиты. Для планет, движущихся в поле тяготения Солнца, $W < 0$. Поэтому для них справедлив **первый закон Кеплера:**

все планеты Солнечной системы движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

В соответствии со вторым законом Кеплера секториальная скорость σ каждой из планет постоянна. Следовательно, период T обращения планеты по орбите равен отношению площади S, ограниченной орбитой, к σ:

$$T = \frac{S}{\sigma}.$$

Площадь эллипса $S = \pi ab$, где a и b — его большая и малая полуоси. Учитывая, что

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad \text{и} \quad p = a(1 - e^2),$$

а также используя соотношение (6.33), получаем

$$T^2 = \frac{\pi^2 p}{L^2/4m^2} a^3.$$

Так как по формуле (6.39) $p = L^2/m|\beta|$, где $|\beta| = \gamma mM$ (M — масса Солнца), то

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3. \tag{6.40}$$

Уравнение (6.40) является математической записью **третьего закона Кеплера:**

квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца прямо пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

5. В случае движения материальной точки B в сферически симметричном центральном поле сил о т т а л к и в а н и я ($\beta > 0$) урав-

нение ее траектории (6.37) также представляет собой уравнение кривой второго порядка:

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\varphi}, \tag{6.41}$$

где p и e определяются по формулам (6.39).

Полная энергия материальной точки B:

$$W = W_к + W_п > 0,$$

так как $W_п > 0$, а кинетическая энергия всегда положительна. Поэтому точка B может двигаться только либо по гиперболической орбите, либо вдоль прямой, проходящей через центр сил (при $L = 0$).

§ 6.4. Проблема космических полетов. Космические скорости

1. Запуск в Советском Союзе 4 октября 1957 г. первого в истории человечества искусственного спутника Земли положил начало освоению человеком космического пространства и явился выдающимся достижением советской науки и техники. В последующие годы изучение и освоение космоса развивалось невиданно быстрыми темпами. Перечислим лишь некоторые наиболее важные достижения в этой области. 12 апреля 1961 г. Ю. А. Гагарин совершил первый в истории космический полет на пилотируемом космическом корабле «Восток», а в 1965 г. А. А. Леонов впервые осуществил выход из космического корабля в открытое космическое пространство. В 1966 г. советские автоматические межпланетные станции (АМС) «Луна-9» и «Луна-13» впервые осуществили мягкую посадку на поверхность Луны, а АМС «Луна-10» впервые вывела на окололунную орбиту искусственный спутник Луны. В 1968 г. советский космический аппарат «Зонд-5» впервые совершил облет Луны с последующим возвращением и мягкой посадкой на Землю. В конце того же года облет Луны и возвращение на Землю было осуществлено американским лунным космическим кораблем (ЛКК) «Аполлон-8» с тремя космонавтами на борту. В июле 1969 г. с помощью ЛКК «Аполлон-11» впервые была осуществлена высадка на поверхность Луны двух американских космонавтов — Н. Армстронга и Э. Олдрина, взявших и доставивших на Землю первые пробы лунного грунта. В сентябре 1970 г. советская АМС «Луна-16», совершив мягкую посадку на Луну и взяв с помощью автоматической буровой установки пробы лунного грунта, возвратилась на Землю. В ноябре 1970 г. АМС «Луна-17» доставила на Луну первый автоматический лунный самоходный аппарат «Луноход-1», который управлялся с Земли и был оборудован научной аппаратурой, приборами и системами управления, радиосвязи и телевизионного наблюдения. Весьма ценные сведения о составе, температуре и давлении атмосферы планеты Венера были получены с помощью советских АМС «Венера-4» (1967 г.), «Венера-5», «Венера-6» (1969 г.) и «Венера-7» (1970 г.). Аналогичные исследования атмосферы и фотографирование поверхности

планеты Марс были проведены американскими космическими аппаратами «Маринер-4» (1964 г.), «Маринер-6» и «Маринер-7» (1969 г.). Запущенные в 1971 г. «Маринер-9» и советские АМС «Марс-2» и «Марс-3» стали первыми искусственными спутниками Марса, а спускаемый аппарат АМС «Марс-3» впервые произвел мягкую посадку на поверхность Марса.

2. Практическое осуществление космических исследований и проведение полетов в космосе автоматических и пилотируемых космических аппаратов связано с решением очень широкого комплекса сложных научных и технических проблем. Эти проблемы далеко выходят за рамки не только механики, но и физики в целом. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь некоторых простейших вопросов механики, связанных с проблемой космических полетов.

3. **Первой космической, или круговой, скоростью** для Земли называют ту скорость v_1, которой должен обладать спутник Земли, обращающийся вокруг нее по круговой орбите. Так как эксцентриситет круговой орбиты $e = 0$, а ее фокальный параметр $p = r$, где r — радиус орбиты, то из формулы (6.39) следует, что полная энергия спутника

$$W = -\frac{m\beta^2}{2L^2} = -\frac{\beta^2}{2r\,|\beta|} = \frac{\beta}{2r},$$

так как для поля тяготения Земли $\beta = -\gamma mM < 0$ (γ — гравитационная постоянная и M — масса Земли).

Полная энергия спутника равна сумме его кинетической энергии $mv_1^2/2$ и потенциальной энергии β/r (см. формулу (6.36)). Поэтому

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{\beta}{r} = \frac{\beta}{2r}$$

и

$$v_1 = \sqrt{-\frac{\beta}{mr}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{gr}, \qquad (6.42)$$

где $g = \frac{\gamma M}{r^2}$ — ускорение тел при их свободном падении на расстоянии r от центра Земли.

Первая космическая скорость возрастает по мере уменьшения радиуса орбиты и у поверхности Земли ($r = R_0$ и $g = g_0$) равна

$$v_1^0 = \sqrt{g_0 R} = \sqrt{9{,}81 \cdot 10^{-3} \cdot 6370}\ \text{км/с} = 7{,}9\ \text{км/с}.$$

Величина v_1^0 представляет собой ту *теоретически наименьшую* скорость, которую нужно сообщить телу у поверхности Земли для того, чтобы это тело могло стать искусственным спутником Земли. В действительности скорость v_1^0 недостаточна для осуществления этой цели, так как при движении тела вблизи Земли на него действует не только сила тяготения Земли, но также и сила сопротивления воздуха, вызывающая постепенное уменьшение полной энергии тела. Поэтому тело, выброшенное с Земли со скоростью v_1^0, будет двигаться не по

круговой орбите, а по скручивающейся спирали, и упадет обратно на Землю.

4. **Второй космической, или параболической, скоростью** для Земли называют ту наименьшую скорость v_2, которую нужно сообщить телу для того, чтобы тело могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца т. е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической. Для параболической орбиты $e = 1$ и полная энергия тела $W = 0$:

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{\beta}{r} = 0.$$

Следовательно,

$$v_2 = \sqrt{-\frac{2\beta}{mr}} = \sqrt{2v_1} = \sqrt{2gr} \qquad (6\ 43)$$

Вблизи поверхности Земли вторая космическая скорость равна

$$v_2^0 = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Это значение v_2^0 получено без учета влияния сопротивления атмосферы.

5. Для запуска искусственных спутников Земли и космических кораблей применяют специальные ракеты — так называемые **ракеты-носители.** На борту ракеты-носителя находятся топливо и окислитель, необходимые для работы жидкостного реактивного двигателя ракеты. Они составляют значительную часть стартовой массы ракеты m_0. По мере работы двигателя масса ракеты уменьшается. Если отвлечься от действия на ракету гравитационного поля и силы сопротивления воздуха, то, положив в уравнении движения ракеты (2.19) $\mathbf{F} = 0$, получим

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})\frac{dm}{dt}$$

или

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt}, \qquad (6.44)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ — скорость истечения продуктов сгорания по отношению к системе отсчета, скрепленной с ракетой. Эту скорость называют **относительной скоростью истечения.** При прямолинейном полете ракеты скорость $\mathbf{u}$ противоположна по направлению скорости $\mathbf{v}$ ракеты. Поэтому, проектируя все члены уравнения (6.44) на направление вектора $\mathbf{v}$, получим

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt},$$

или

$$dv = -u\frac{dm}{m}.$$

При постоянном режиме работы двигателя ракеты $u = \text{const}$, и зависимость скорости ракеты от ее массы имеет вид

$$v = -u\int\frac{dm}{m} = -u\cdot\ln m + \text{const}.$$

В момент старта $v = 0$ и $m = m_0$. Поэтому постоянная интегрирования равна $u\cdot\ln m_0$, а скорость ракеты

$$v = u\cdot\ln\frac{m_0}{m}. \qquad (6.45)$$

Уравнение (6.45) называют **уравнением К. Э. Циолковского.** Из него следует, что максимальная скорость, развиваемая ракетой в отсутствие внешнего силового воздействия, равна ее скорости в момент окончания работы двигателя из-за использования всего запаса топлива и окислителя:

$$v_{\text{макс}} = u\ln\frac{m_0}{m_0 - m_\text{т}} = u\ln\frac{1}{1 - m_\text{т}/m_0},$$

или

$$v_{\text{макс}} = -u\cdot\ln(1 - m_\text{т}/m_0), \qquad (6.46)$$

где m_0 — стартовая масса всей ракеты, а $m_\text{т}$ — начальная масса топлива и окислителя.

6. Влияние тяготения Земли и сопротивление атмосферы вызывают значительное уменьшение максимальной скорости ракеты по сравнению с ее значением по формуле (6.46), называемым **характеристической скоростью.** Однако даже эта приближенная формула позволяет сделать ряд существенных выводов. Для увеличения характеристической скорости ракеты необходимо увеличивать относительную скорость u истечения продуктов сгорания и относительную массу топлива и окислителя $m_\text{т}/m_0$. Максимальные значения u для реактивных двигателей, работающих на жидких топливах, ограничиваются свойствами этих топлив и в настоящее время не могут превосходить 3,5—5 км/с. Отношение

$$\frac{m_\text{т}}{m_0} = 1 - \frac{m_\text{к}}{m_0} - \frac{m_\text{п}}{m_0} < 1 - \frac{m_\text{к}}{m_0},$$

где $m_\text{к}$ — масса конструкции ракеты и ее двигателя, а $m_\text{п}$ — масса полезного груза (искусственного спутника или космического корабля). Уменьшение относительной массы конструкции $m_\text{к}/m_0$ лимитируется прочностью и плотностью имеющихся материалов. Поэтому, как показывают расчеты, на современном уровне развития техники ракета не может развить даже первую космическую скорость.

Путь преодоления этой трудности был указан К. Э. Циолковским, который впервые научно обосновал возможность межпланетных сообщений. Для достижения космических скоростей Циолковский предложил использовать не обычную (одноступенчатую) ракету, а **составную, или многоступенчатую, ракету.** Многоступенчатая ракета состоит из нескольких соединенных между собой ракет, каждая из которых имеет свой двигатель и несет в себе запас топлива и окислителя. Во время старта включается двигатель одной из этих ракет, называемой первой ступенью составной ракеты. После выгорания всего топлива, имеющегося в первой ступени, происходит автоматическое включение двигателя следующей ракеты (второй ступени) и отделение первой ступени от составной ракеты. После выгорания топлива во второй ступени она также отделяется и начинает работать двигатель третьей ступени. Так продолжается вплоть до последней ступени составной ракеты, несущей на себе полезный груз.

Увеличение характеристической скорости многоступенчатой ракеты по сравнению с одноступенчатой ракетой, имеющей ту же стартовую массу и запас топлива и окислителя, связано с уменьшением массы конструкции по мере выгорания топлива.

7. В настоящее время проводятся интенсивные работы по созданию новых типов ракетных двигателей, которые принципиально отличаются от жидкостных реактивных двигателей, использующих химическую энергию топлива. В проектах **атомных ракетных двигателей** рабочее вещество нагревается в ядерном реакторе и затем вытекает через сопло Предполагается, что таким образом удастся значительно повысить скорость истечения u. Еще более значительное увеличение скорости u предполагается осуществить в **ионном ракетном двигателе.** В этом двигателе реактивная сила тяги создается в результате выбрасывания из двигателя заряженных частиц-ионов, которые предварительно разгоняются в электрическом поле до скоростей порядка сотен и даже тысяч километров в секунду. Сила тяги ионного двигателя

$$F_{\text{р}} = -u\frac{dm}{dt}$$

не может быть сделана большой, так как секундный массовый расход $\frac{dm}{dt}$, численно равный массе всех ионов, образующихся в двигателе за 1 с, крайне невелик.

Для запуска ракеты с Земли требуется двигатель, сила тяги которого больше силы тяжести ракеты на старте. Поэтому для осуществления старта ракеты с Земли ионный двигатель непригоден. Зато он может с успехом применяться для ускорения движения ракеты и управления ее движением в космическом пространстве вдали от небесных тел, т. е. когда результирующая сил притяжения ракеты этими телами ничтожно мала. Малый расход массы при работе ионного двигателя позволяет значительно увеличить как массу полезной нагрузки, так и длительность работы ионного двигателя по сравнению с жидкостным реактивным двигателем.

§ 6.5. Столкновение двух частиц, взаимодействующих по закону центральных сил

1. Рассмотрим столкновение двух взаимодействующих друг с другом частиц *1* и *2*, массы которых равны m_1 и m_2. Решение этой задачи сильно упрощается, если вместо системы отсчета, скрепленной со стенами лаборатории (**лабораторная система отсчета**), выбрать систему отсчета, скрепленную с центром инерции (центром масс) материальных точек *1* и *2* и называемую **системой центра инерции**. Центр масс системы материальных точек *1* и *2* движется по инерции — равномерно и прямолинейно, так как на эту систему внешние силы не действуют. Поэтому система центра инерции является *инерциальной* и движение точек *1* и *2* в этой системе описывается вторым законом Ньютона:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}, \\ m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} &= -\mathbf{F}, \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$— радиусы-векторы точек, а $\mathbf{F}$ — сила, действующая на точку *1* со стороны точки *2* и зависящая от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Радиус-вектор центра масс

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

т. е.

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0. \tag{6.48}$$

Обозначим радиус-вектор, соединяющий точки *1* и *2*, через $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r},$$

тогда из (6.48) следует, что

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \tag{6.49}$$

Если эти значения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ подставить в систему уравнений (6.47), то она сведется к одному уравнению для $\mathbf{r}$:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \tag{6.50}$$

где величину

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{6.51}$$

называют **приведенной массой системы.**

Таким образом, в системе центра масс задача о соударении двух частиц сводится к задаче о движении одной частицы с приведенной массой m в центральном силовом поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, центр которого совпадает с началом координат. Эта задача была рассмотрена в § 6.3.

2. Пусть скорость частицы с массой m вдали от силового центра численно равна v_∞ и направлена вдоль прямой AB, отстоящей на расстоянии ρ от силового центра O (рис. 6.9). Величину ρ называют **прицельным расстоянием.** Вдали от силового центра потенциальная энергия частицы $W_\text{п}(\infty) = 0$, а ее полная энергия W и численное значение момента импульса относительно точки O равны:

$$W = \frac{mv_\infty^2}{2} \quad \text{и} \quad L = mv_\infty\rho,$$

В процессе движения частицы в центральном силовом поле значения W и L не изменяются (см. § 6.3). Поэтому в полярных координатах r и φ уравнение (6.35) траектории точки имеет вид:

$$\varphi = \int \frac{mv_\infty \rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2m\left(\frac{mv_\infty^2}{2} - W_\text{п}\right) - \left(\frac{mv_\infty \rho}{r}\right)^2}},$$

или

$$\varphi = \int \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2}{mv_\infty^2} W_\text{п}}}. \qquad (6.52)$$

3. Если между соударяющимися частицами действуют силы гравитационного или электростатического взаимодействия, то центральное силовое поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ является сферически симметричным и потенциальная энергия $W_\text{п}$ выражается формулой (6.36):

$$W_\text{п} = \frac{\beta}{r}.$$

Полная энергии $W = mv_\infty^2/2$ частицы с приведенной массой m положительна. Поэтому при $\rho \neq 0$ эта частица, как показано в п. 4 и 5 § 6.3, движется

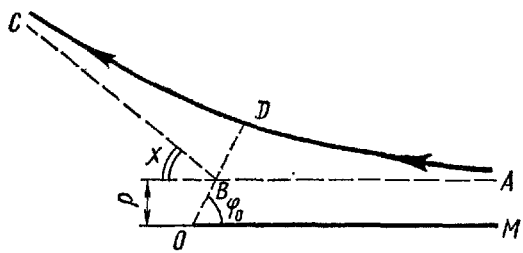

Рис. 6.9.

по *гиперболической орбите*. На рис. 6.9 изображен случай движения частицы в сферически симметричном центральном поле сил отталкивания: OM —полярная ось. Точка D соответствует наибольшему сближению частицы с силовым центром O: $r_D = r_\text{мин}$. Полярный угол φ_0 точки D по формулам (6.52) и (6.36) равен

$$\varphi_0 = \int_\infty^{r_\text{мин}} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\beta}{mv_\infty^2 r}}}. \qquad (6.53)$$

Для нахождения угла φ_0 по формуле (6.53) необходимо предварительно определить $r_{\text{мин}}$. Из (6.52) и (6.36) следует, что

$$d\varphi = \frac{\rho}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2\beta}{mv_\infty^2 r}}}\,dr.$$

В соответствии с известным из математического анализа правилом нахождения экстремумов функции $r = r(\varphi)$ при $r = r_{\text{мин}}$ производная $dr/d\varphi$ должна быть равна нулю. Поэтому

$$\left(\frac{\rho}{r_{\text{мин}}}\right)^2 + \frac{2\beta}{mv_\infty^2\rho}\cdot\frac{\rho}{r_{\text{мин}}} - 1 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что $\frac{\rho}{r_{\text{мин}}} > 0$, находим

$$\frac{\rho}{r_{\text{мин}}} = -\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2 + 1}. \tag{6.54}$$

Так как

$$1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2\beta}{mv_\infty^2 r} = 1 + \left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{r}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2$$

и

$$\rho\frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{\rho}{r}\right) = -d\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right),$$

то формулу (6 53) можно записать в таком виде:

$$\varphi_0 = -\int_\infty^{r_{\text{мин}}} \frac{d\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2\right]-\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}} =$$

$$= \arccos\frac{\frac{\rho}{r}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}\Bigg|_\infty^{r_{\text{мин}}} = \arccos\frac{\frac{\rho}{r_{\text{мин}}}+\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}} -$$

$$- \arccos\frac{\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}}.$$

В соответствии с соотношением (6.54)

$$\varphi_0 = \arccos 1 - \arccos \frac{\frac{\beta}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}}$$

или

$$-\varphi_0 = \arccos \frac{\beta}{\sqrt{(mv_\infty^2 \rho)^2 + \beta^2}}.$$

Так как $\cos(-\varphi_0) = \cos\varphi_0$, то

$$\cos\varphi_0 = \frac{\beta}{\sqrt{(mv_\infty^2 \rho)^2 + \beta^2}},$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi_0 = \frac{1 - \cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} = \left(\frac{mv_\infty^2 \rho}{\beta}\right)^2.$$

Следовательно, связь между прицельным расстоянием ρ и углом φ_0 имеет вид

$$\rho^2 = \frac{\beta^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2\varphi_0. \tag{6.55}$$

Линия OD является осью симметрии орбиты частицы (рис. 6.9). Поэтому угол между второй асимптотой BC орбиты и осью OD также равен φ_0:

$$\angle DBC = \angle ABD = \varphi_0$$

Таким образом, в результате движения частицы в рассматриваемом силовом поле происходит изменение направления ее скорости, т. е. отклонение частицы на угол

$$\chi = \pi - 2\varphi_0. \tag{6.56}$$

Из формул (6.55) и (6.56) следует, что

$$\rho^2 = \frac{\beta^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}. \tag{6.57}$$

4. Во многих задачах физики приходится встречаться с отклонением в сферически симметричном центральном силовом поле не одной частицы, а целого пучка одинаковых частиц, обладающих одинаковыми скоростями v_∞ и практически не взаимодействующих друг с другом. Это явление называют **рассеянием частиц** на неподвижном силовом центре, который называют **рассеивающим центром**. Углы χ рассеяния (отклонения) частиц пучка зависят от прицельных расстояний ρ (см. уравнение 6.57), которые для разных частиц пучка, вообще говоря, неодинаковы.

Пучок частиц вдали от рассеивающего центра называется **однородным**, если число частиц n, проходящих за единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (плотность пучка), одинаково по всему сечению. Для количественной характеристики процесса рассеяния однородного пучка частиц пользуются **дифференциальным эффективным сечением рассеяния**:

$$d\sigma = \frac{dN}{n},$$

где dN — число частиц, рассеиваемых за единицу времени на углы от χ до $\chi + d\chi$. Этому условию удовлетворяют те частицы пучка, прицельные расстояния которых заключены в пределах от ρ до $\rho + d\rho$, т. е.

$$dN = n2\pi\rho\, d\rho.$$

Из (6.57) следует, что

$$2\rho\, d\rho = -\frac{\beta^2}{m^2 v_\infty^4}\operatorname{ctg}\frac{\chi}{2}\cdot\frac{d\chi}{\sin^2\frac{\chi}{2}} = -\frac{\beta^2}{m^2 v_\infty^4}\cdot\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}\,d\chi.$$

Величина $\frac{d\rho}{d\chi} < 0$, так как для увеличения угла рассеяния нужно уменьшать прицельное расстояние. Величины dN и $d\sigma$ по самому их физическому смыслу не могут быть отрицательными. Поэтому

$$d\sigma = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi = \frac{\pi\beta^2}{m^2 v_\infty^4}\cdot\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}\,d\chi. \qquad (6.58)$$

5. Часто дифференциальное эффективное сечение рассеяния $d\sigma$ удобнее относить не к элементарному диапазону $d\chi$ плоского угла рассеяния, а к соответствующему телесному углу. Телесный угол ω, ограниченный конической поверхностью, равен отношению площади S поверхности шарового сегмента, вырезаемого конической поверхностью на сфере произвольного радиуса R с центром в вершине конической поверхности, к квадрату радиуса:

$$\omega = \frac{S}{R^2}.$$

Рассеянию под углом χ соответствует коническая поверхность с углом при вершине, равным 2χ. Площадь поверхности соответствующего шарового сегмента

$$S = 4\pi R^2 \sin^2\frac{\chi}{2},$$

а телесный угол

$$\omega = 4\pi\sin^2\frac{\chi}{2}.$$

Следовательно, рассеянию в пределах значений плоских углов от χ до $\chi + d\chi$ соответствует телесный угол

$$d\omega = 4\pi\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}d\chi.$$

Поэтому выражение (6.58) можно представить в виде

$$d\sigma = \left(\frac{\beta}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{d\omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}. \qquad (6.59)$$

Это соотношение называют **формулой Резерфорда.**

Вопросы для повторения

1. Как вычислить силу всемирного тяготения между двумя телами, имеющими произвольные размеры и форму?
2. Что такое сила тяжести тела и от чего она зависит?
3. Что такое поле тяготения? Какие величины вводятся для характеристики этого поля и как они связаны между собой?
4. Как доказать консервативность сил тяготения?
5. Какие силы называют центральными? Приведите примеры центральных сил.
6. Выведите законы Кеплера.
7. Что называют первой и второй космическими скоростями? Найдите их значения.
8. Почему для запуска искусственных спутников Земли и космических кораблей применяют многоступенчатые ракеты?
9. Что называют прицельным расстоянием и углом рассеяния? Какую форму имеют траектории частиц, рассеиваемых неподвижным центром?

Примеры решения задач

Задача 6.1. Пользуясь понятием потенциала поля тяготения найдите численные значения второй космической скорости для Земли ($M_{\text{I}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг; $R_{\text{I}} = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ м), Луны ($M_{\text{II}} = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг; $R_{\text{II}} = 1{,}74 \times 10^{6}$ м) и Марса ($M_{\text{III}} = 6{,}50 \cdot 10^{23}$ кг; $R_{\text{III}} = 3{,}39 \cdot 10^{6}$ м) вблизи их поверхности.

Дано

$M_{\text{I}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг,
$M_{\text{II}} = 7{,}36 \cdot 10^{22}$ кг,
$M_{\text{III}} = 6{,}50 \cdot 10^{23}$ кг,
$R_{\text{I}} = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ м,
$R_{\text{II}} = 1{,}74 \cdot 10^{6}$ м,
$R_{\text{III}} = 3{,}39 \cdot 10^{6}$ м.

$v_2 - ?$

Решение

В первом приближении можно считать, что Земля, Луна и Марс представляют собой тела шарообразной формы, плотности которых зависят только от расстояний до их центров. Поэтому потенциал поля тяготения, создаваемого этими телами, для точек, лежащих на их поверхности, можно найти по формуле (6.25)

$$\varphi_{\text{т}} = -\frac{\gamma M}{R},$$

где M — масса тела, R — его радиус.

Потенциальная энергия в поле тяготения для материальной точки с массой m, находящейся на поверхности тела, равна

$$W_{\text{п}} = m\varphi_{\text{т}} = -\frac{\gamma mM}{R}.$$

При удалении материальной точки в бесконечность ее потенциальная энергия возрастает до величины, равной нулю. Следовательно, для осуществления этого процесса необходимо совершить работу A против сил тяготения, причем

$$A = -W_{\text{п}} = \frac{\gamma mM}{R}.$$

Работа A производится материальной точкой за счет уменьшения ее кинетической энергии. Точка может преодолеть притяжение тела, если ее начальная скорость v_0 у поверхности тела такова, что

$$\frac{mv_0^2}{2} \geqslant \frac{\gamma mM}{R}.$$

Наименьшее значение v_2 скорости v_0, удовлетворяющее этому условию, и есть искомая вторая космическая скорость у поверхности тела:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{\gamma mM}{R},$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
а) проверка размерности результата:

$$[v_2] = \frac{[\gamma]^{1/2} \cdot [M]^{1/2}}{[R]^{1/2}} = \frac{L^{3/2} \cdot M^{-1/2} \cdot T^{-1} \cdot M^{1/2}}{L^{1/2}} = LT^{-1},$$

б) вычисления:
Для Земли

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6}}\ \text{м/с} = 11{,}2 \cdot 10^3\ \text{м/с};$$

для Луны

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{II}}{R_{II}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{11} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}}{1{,}74 \cdot 10^6}}\ \text{м/с} = 2{,}38 \cdot 10^3\ \text{м/с}$$

для Марса

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_{III}}{R_{III}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}50 \cdot 10^{23}}{3{,}39 \cdot 10^6}}\ \text{м/с} = 5{,}05 \cdot 10^3\ \text{м/с}.$$

Задача 6.2. Ракету запускают с поверхности Земли вертикально вверх. Отношение стартовой массы топлива и окислителя к общей массе ракеты равно 0,75. Относительная скорость истечения газов из сопла ракетного двигателя 4000 м/с. Через сколько времени после старта ракета начнет падать на Землю? Неоднородностью поля тяготения Земли и сопротивлением воздуха пренебречь

Дано

$$\frac{m_т}{m_0} = 0{,}75,$$
$$u = 4 \cdot 10^3\ \text{м/с}$$

t — ?

Решение

В процессе работы двигателя на ракету действуют две противоположные по направлению силы: реактивная сила тяги двигателя

$$\mathbf{F}_р = \mathbf{u}\frac{dm}{dt},$$

направленная вертикально вверх, и сила тяготения к Земле $\mathbf{F}_т = m\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ — напряженность поля тяготения Земли. $\mathbf{G} = \text{const}$, так как по условию задачи неоднородностью поля можно пренебречь. Полагая, что сила $\mathbf{F}_т$ равна силе тяжести ракеты $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, получаем

$$\mathbf{G} = \mathbf{g} = \text{const},$$

где $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения.

Поэтому в промежутке времени от 0 до τ (τ — продолжительность работы двигателя) уравнение движения ракеты имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt} + m\mathbf{g}.$$

или, в проекции на направление скорости v,

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt} - mg,$$

откуда

$$dv = -u\frac{dm}{m} - g \cdot dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$v = -u \ln m - gt + C,$$

где C — постоянная интегрирования. Ее значение можно определить из начальных условий. В момент старта ракеты $t = 0$, $v = 0$ и $m = m_0$ — стартовая масса ракеты. Следовательно,

$$C = u \ln m_0$$

и

$$v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Скорость ракеты в момент окончания работы двигателя ($t = \tau$ и $m = m_0 - m_т$, где $m_т$ — масса топлива и окислителя):

$$v_1 = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_т} - g\tau = -u \ln\left(1 - \frac{m_т}{m_0}\right) - g\tau.$$

Дальше ракета движется равнозамедленно под действием ее силы тяжести $P_0 - P_т$, т. е. с ускорением, численно равным g, до тех пор, пока ее скорость не становится равной нулю и ракета не начинает падать обратно на Землю. Продолжительность t_1 равнозамедленного движения ракеты равна

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = -\frac{u}{g} \ln\left(1 - \frac{m_т}{m_0}\right) - \tau.$$

Таким образом, искомую продолжительность t подъема ракеты вверх можно определить следующим образом:

$$t = \tau + t_1 = -\frac{u}{g} \ln\left(1 - \frac{m_т}{m_0}\right).$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

а) проверка размерности результата:

$$[t] = \frac{[u]}{[g]} = \frac{LT^{-1}}{LT^{-2}} = T,$$

б) вычисления:

$$t = -\frac{4000}{9{,}81} \ln(1 - 0{,}75)\ \text{с} = \frac{4000}{9{,}81} \ln 4\ \text{с} = 565\ \text{с}.$$

Глава VII

ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

§ 7.1. Кинематика относительного движения

1. До сих пор для описания движения материальной точки или тела, т. е. системы материальных точек, мы всегда пользовались инерциальными системами отсчета. В то же время во многих случаях необходимо изучать движение материальной точки или тела по отношению к неинерциальной системе отсчета. Так, например, движение тел на Земле естественно рассматривать в скрепленной с ней земной системе отсчета, которая, строго говоря, не является инерциальной. В § 2.1 мы говорили, что в первом приближении можно обычно пренебречь неинерциальностью этой системы отсчета. Однако возможность такого допущения требует специального обоснования, так как иначе неясна величина допускаемых при этом погрешностей. Целый ряд явлений — «самопроизвольный» поворот плоскости качаний маятника (опыт Фуко), отклонение свободно падающих тел к востоку, подмывание одного из берегов реками, текущими в меридиональном направлении, и т. д. — вообще не могут быть объяснены в случае пренебрежения неинерциальностью земной системы отсчета.

2. Рассмотрим движение материальной точки M относительно двух прямоугольных декартовых систем координат X, Y, Z и X', Y', Z' (рис. 7.1). Пусть первая система координат является *инерциальной*, а вторая движется относительно нее произвольным образом. Систему X, Y, Z будем условно считать н е п о д в и ж н о й, а движение точки M относительно этой системы отсчета будем называть **абсолютным движением**. Движение точки M относительно подвижной системы отсчета X', Y', Z' будем называть **относительным движением**. Единичные векторы (орты), определяющие положительные направления осей неподвижной и подвижной систем координат, обозначим, соответственно через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$. Положение точки M относительно неподвижной системы координат определяется радиусом-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, а относительно подвижной — радиусом-вектором $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$, где x, y, z и x', y', z' — координаты точки M в этих системах. Из рис. 7.1 видно, что

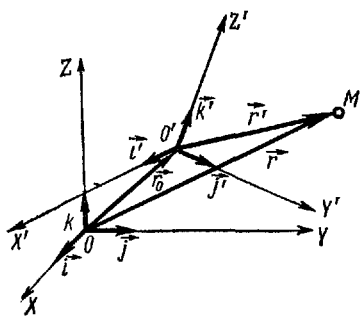

Рис. 7.1.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}', \tag{7.1}$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор, проведенный из начала O неподвижной системы в начало O' подвижной системы координат.

3. Скорость точки M относительно н е п о д в и ж н о й системы координат равна

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{7.2}$$

и называется **абсолютной скоростью** точки

M. Из (7.1) следует, что

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_r}{dt}, \tag{7.2'}$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \left(\frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'\right) + \left(x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right), \tag{7.3}$$

где

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \tag{7.4}$$

— абсолютная скорость точки O', т. е. скорость подвижной системы координат в ее поступательном движении. Вектор

$$\mathbf{v}_r = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' \tag{7.5}$$

по аналогии с (7.2) определяет скорость точки M относительно подвижной системы координат. Его называют **относительной скоростью** точки M.

Изменение ортов $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ подвижной системы координат может быть вызвано лишь тем, что эта система движется не только поступательно, но одновременно вращается вокруг точки O'. Следовательно, векторы $\frac{d\mathbf{i}'}{dt}$, $\frac{d\mathbf{j}'}{dt}$ и $\frac{d\mathbf{k}'}{dt}$ являются линейными скоростями концов соответствующих ортов в этом вращательном движении. Если угловая скорость подвижной системы равна $\boldsymbol{\omega}$, то на основании формулы (1.22)

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{i}'], \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{j}'] \text{ и } \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}'], \tag{7.6}$$

а

$$x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, x'\mathbf{i}'] + [\boldsymbol{\omega}, y'\mathbf{j}'] + [\boldsymbol{\omega}, z'\mathbf{k}'] =$$

$$= [\boldsymbol{\omega}, (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}')] = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']. \tag{7.7}$$

На основании соотношений (7.4), (7.5) и (7.7) уравнение (7.3) можно теперь переписать в таком виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'] + \mathbf{v}_r. \tag{7.8}$$

Сумма первых двух членов правой части этого равенства представляет собой абсолютную скорость той точки подвижной системы (т. е. жестко связанной с этой системой), через которую в данный момент времени проходит рассматриваемая нами материальная точка M. Эту скорость называют **переносной скоростью** точки M и обозначают через $\mathbf{v}_e$:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']. \tag{7.9}$$

Таким образом, *абсолютная скорость точки M равна сумме ее переносной и относительной скоростей*:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r. \tag{7.10}$$

4. **Абсолютным ускорением** точки M называют ее ускорение по отношению к неподвижной инерциальной системе отсчета:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Из уравнений (7.10) и (7.9) следует, что

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \mathbf{r}'\right] + \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right] + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt},$$

или, на основании (7.5) и (7 6),

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}'] + \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r] + \mathbf{a}_r, \tag{7.11}$$

где

$$\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \tag{7.12}$$

— ускорение подвижной системы в ее поступательном движении,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{7.13}$$

— угловое ускорение подвижной системы,

$$\mathbf{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\,\mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\,\mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\,\mathbf{k}' \tag{7.14}$$

— **отиосительное ускорение** точки M (ее ускорение по отношению к подвижной системе).

Из сопоставления формул (7.2′), (7.4) и (7.8) видно, что

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'] + \mathbf{v}_r.$$

Поэтому уравнение (7 11) можно записать в такой форме:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] + 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r] + \mathbf{a}_r, \tag{7.15}$$

или

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_\text{К} + \mathbf{a}_r, \tag{7.16}$$

где

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}'] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] \tag{7.17}$$

— **переносиое ускорение** точки M, равное абсолютиому ускореиию той точки подвижной системы, через которую в данный момеит времени проходит рассматриваемая материальная точка M;

$$\mathbf{a}_\text{К} = 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r] \tag{7.18}$$

— **кориолисово**, или **поворотное**, **ускорение** точки M, обусловленное вращением подвижной системы.

Таким образом, равенство (7.16) свидетельствует о том, что *абсолютное ускорение точки равно сумме ее переносного, кориолисова и относительного ускорений.*

Квк видно из (7.18), кориолисово ускорение максимально, если относительиая скорость точки $\mathbf{v}_r$, перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости подвижной системы. Если угол между векторами $\mathbf{v}_r$ и $\boldsymbol{\omega}$ равен 0 или π, то корнолисово ускореиие равно нулю

5. Если подвижная система так же, как и неподвижная, является инерциальной, то $\omega = \varepsilon = a_0 = 0$, $v_e = v_0$, $a_e = a_к = 0$, и уравнения (7.10) и (7.16) переходят в известные соотношения:

$$v = v_0 + v_r \quad и \quad a = a_r = \frac{dv_r}{dt}$$

вытекающие из преобразований Галилея (см. § 2.5).

В том случае, когда подвижная система движется только поступательно ($\omega = \varepsilon = 0$), уравнения (7.10) и (7.16) имеют следующий вид:

$$v = v_0 + v_r \quad и \quad a = a_0 + a_r = a_0 + \frac{dv_r}{dt}$$

§ 7.2. Силы инерции

1. В неинерциальных системах отсчета не выполняются законы Ньютона. Оказывается, что ускорение a_r материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета не удовлетворяет второму закону Ньютона, т. е. не равно отношению равнодействующей F всех сил, приложенных к материальной точке со стороны взаимодействующих с ней тел, к массе m этой точки:

$$a_r \neq \frac{F}{m}$$

В частности, при $F = 0$ ускорение a_r, вообще говоря, отлично от нуля. Иными словами, материальная точка или твердое тело могут изменять состояние своего движения по отношению к неинерциальной системе отсчета без всякого воздействия на них со стороны других тел. В справедливости сказанного каждый не раз убеждался, пользуясь любым из видов транспорта. Так, например, люди, неподвижно стоящие в равномерно и прямолинейно движущемся трамвае, отклоняются назад при ускорении движения трамвая или вперед — при его замедлении. При переходе трамвая с прямолинейного пути на закругление пассажиры отклоняются в сторону, противоположную центру кривизны траектории. Если бы пол трамвая был идеально гладким, то при всяком изменении скорости трамвая его пассажиры должны были бы скользить по полу, несмотря на то, что на них не действуют никакие горизонтальные силы. Это явление проще всего обнаружить, наблюдая за движением гладкого стального шарика по поверхности горизонтальной стеклянной пластины, прикрепленной к полу вагона трамвая.

2. Для нахождения относительного ускорения a_r материальной точки в неинерциальной системе отсчета и зависимости a_r от действующих на точку сил воспользуемся соотношением (7.16):

$$a_r = a - a_e - a_к;$$

откуда

$$ma_r = ma - ma_e - ma_к,$$

где m — масса материальной точки.

Поскольку $\mathbf{a}$ — ускорение точки по отношению к инерциальной системе отсчета, то в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{7.19}$$

где $\mathbf{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке со стороны других тел. Следовательно,

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_e - m\mathbf{a}_к.$$

Величины $\mathbf{I}_e = -m\mathbf{a}_e$ и $\mathbf{I}_к = -m\mathbf{a}_к$ имеют размерность силы. Их называют, соответственно, **переносной** и **кориолисовой (поворотной) силами инерции.**

Таким образом,

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{I}_e + \mathbf{I}_к. \tag{7.20}$$

Уравнения относительного (7.20) и абсолютного (7.19) движений материальной точки, т. е. ее движений по отношению к произвольной (неинерциальной) и инерциальной системам отсчета, сходны по форме. Различие между ними состоит лишь в том, что в относительном движении необходимо, помимо «обычных» сил (сил взаимодействия между телами), учитывать две дополнительные силы инерции. Силы инерции реально действуют на материальную точку в неинерциальной системе отсчета и могут быть измерены, например, с помощью пружинного динамометра. Однако в отличие от «обычных» сил для сил инерции нельзя указать, действие каких именно тел на рассматриваемую материальную точку они выражают. Следовательно, к этим силам неприменим третий закон Ньютона. Эта особенность сил инерции не является неожиданной, так как величины $\mathbf{I}_e$ и $\mathbf{I}_к$ в уравнении (7.20) обусловлены только неинерциальностью системы отсчета и никак не связаны с действием на материальную точку со стороны других тел, учитываемым вектором $\mathbf{F}$. Иными словами, силы инерции по существу нельзя называть силами (см. определение силы, данное в § 2.2). Введение этих «сил» оправдывается лишь тем, что с их помощью уравнение относительного движения точки приводится к виду, соответствующему второму закону Ньютона.

Важно подчеркнуть, что благодаря отмеченной особенности сил инерции в неинерциальных системах отсчета не существует замкнутых систем тел — для любого из тел системы силы инерции являются внешними. Поэтому в *неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии.*

3. Рассмотрим некоторые простейшие примеры неинерциальных систем.

а) Система движется поступательно с ускорением $\mathbf{a}_0$. В этом случае переносное ускорение $\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_0$, а кориолисово ускорение $\mathbf{a}_к = 0$. Поэтому на материальную точку действует только переносная сила инерции $\mathbf{I}_e = -m\mathbf{a}_0$.

Если отвлечься от сравнительно слабого влияния суточного вращения Земли, то примером такой системы отсчета может слу-

жить лифт, ускоренно поднимающийся или опускающийся по вертикали. Пусть к потолку кабины лифта прикреплен пружинный динамометр, к которому подвешено тело массой m. Требуется определить силу, действующую на динамометр, а также ускорение, с которым будет двигаться тело, если его освободить. Рассмотрим решения этой задачи, основанные на использовании как скрепленной с лифтом подвижной неинерциальной системы отсчета, так и неподвижной земной системы отсчета, которую с достаточной степенью точности можно считать инерциальной, если вместо силы тяготения тела к Земле рассматривать его силу тяжести (см. ниже случай б). При первом способе рассмотрения мы будем, как это принято для краткости, говорить о подвижном наблюдателе, а при втором — о неподвижном наблюдателе.

Для неподвижного наблюдателя на тело действуют две противоположно направленные силы — его сила тяжести $\mathbf{P}=m\mathbf{g}$ и реакция динамометра $\mathbf{R}$. Равнодействующая этих сил сообщает телу ускорение $\mathbf{a}_0$. На основании второго закона Ньютона

$$m\mathbf{a}_0 = m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

Следовательно, сила $\mathbf{T}=-\mathbf{R}$, действующая на динамометр, равна:

$$\mathbf{T} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0).$$

Если тело освободить, т. е. нарушить его связь с динамометром, то оно будет свободно падать под действием силы тяжести с ускорением

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{g}.$$

Для подвижного наблюдателя тело неподвижно ($\mathbf{v}_r=\mathbf{a}_r=0$), причем на тело действуют три силы $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{I}_e$. Поэтому на основании уравнения (7.20)

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{I}_e = 0 \quad \text{или} \quad m\mathbf{g} + \mathbf{R} - m\mathbf{a}_0 = 0,$$

откуда для $\mathbf{T}$ получается то же самое значение, что и найденное выше:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{R} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0).$$

Если тело освободить, то оно будет двигаться под действием двух сил $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}_e$ с ускорением

$$\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{I}_e}{m} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_0.$$

б) Система равномерно вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ и движется поступательно с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$. В этом случае $\mathbf{a}_0=0$ и $\varepsilon=0$, поэтому переносное и кориолисово ускорения равны соответственно

$$\mathbf{a}_e = [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_к = 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r].$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']$ взаимно перпендикулярны. Следовательно, численное значение переносного ускорения материальной точки M равно

$$a_e = \omega\,|[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']| = \omega^2 r' |\sin\alpha| = \omega^2 \rho,$$

где α — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}'$, $\rho = r'|\sin\alpha|$ — расстояние от точки M до оси вращения системы отсчета. Вектор $\mathbf{a}_e$ перпендикулярен к этой оси и направлен от точки M к оси. Таким образом, переносное ускорение a_e представляет собой не что иное, как *центростремительное* ускорение точки M. Переносная сила инерции

$$\mathbf{I}_e = -m\,\mathbf{a}_e = -m\,[\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']]$$

численно равна $m\omega^2\rho$ и направлена в противоположную сторону, т. е. от оси вращения. Иными словами, сила $\mathbf{I}_e$ является **центробежной силой инерции.**

Центробежной силой инерции $\mathbf{I}_e$, связанной с суточным вращением Земли, обусловлено отличие силы тяжести тела $\mathbf{P}$ от силы $\mathbf{F}$ тяготения его к Земле:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{I}_e$$

Поэтому, вводя вместо силы $\mathbf{F}$ силу тяжести тела во все уравнения механики, мы можем в первом приближении не учитывать неинерциальность земной системы отсчета. Основная погрешность, которую мы при этом допускаем, состоит в пренебрежении более слабым влиянием кориолисовой силы инерции. Явления, обусловленные этим влиянием, будут рассмотрены ниже в п. 6—8.

4. Действие центробежной силы инерции можно обнаружить с помощью следующего опыта. Установим на скамье Жуковского стул с прикрепленным к нему горизонтальным гладким столиком. Человек, сидящий на стуле, кладет на столик небольшой шар. Если скамья Жуковского не вращается, то шар неподвижно лежит на столике. Если скамья вращается, то шар соскальзывает со столика и падает на пол. Рассмотрим объяснения этого опыта неподвижным и подвижным наблюдателями.

Для неподвижного наблюдателя на шар, положенный на столик, действуют две взаимно уравновешивающиеся силы — сила тяжести шара $\mathbf{P}$ и реакция столика $\mathbf{R}$ (влиянием трения шара о гладкий столик можно пренебречь). Начальная скорость шара $\mathbf{v}_0$ равна линейной скорости той точки A столика, куда был положен шар. Если расстояние от оси вращения до точки A равно ρ_0, а угловая скорость вращения $\boldsymbol{\omega}$, то вектор $\mathbf{v}_0$ направлен по касательной к окружности радиуса ρ_0 и численно равен $\omega\rho_0$. Так как $\mathbf{P} + \mathbf{R} = 0$, то шар, положенный на столик, движется по инерции с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ до тех пор, пока не упадет, дойдя до края столика.

Для подвижного наблюдателя, сидящего на вращающемся стуле, на шар действуют три силы: $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$ и центробежная сила инерции $\mathbf{I}_e$. Первые две силы взаимно уравновешиваются. По-

этому шар движется под действием силы $\mathbf{I}_e$, ускоренно удаляясь от оси вращения.

В процессе движения шара по столику на шар действует также кориолисова сила инерции $\mathbf{I}_к = -2\,m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r]$. Эта сила перпендикулярна к скорости шара относительно столика и параллельна горизонтальной плоскости. Поэтому относительно подвижного наблюдателя шар движется по криволинейной траектории.

Для измерения центробежной силы инерции человек, сидящий на вращающемся стуле, должен удерживать шар с помощью пружинного динамометра так, чтобы шар был неподвижен относительно столика и кориолисова сила инерции равнялась нулю.

5. Действие центробежной силы инерции широко используют в технике: в центробежных насосах, сепараторах, центробежном регуляторе Уатта и т. д. При проектировании быстро вращающихся деталей машин — роторов паровых и газовых турбин, компрессоров, электрических двигателей и генераторов, коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания, винтов самолетов и других принимаются специальные меры для уравновешивания центробежных сил инерции. Например, в случае деталей, симметричных относительно оси вращения, производят их тщательную статическую и динамическую балансировку, так как малейшее смещение центра инерции в сторону от оси вызывает при быстром вращении детали столь большие дополнительные нагрузки на ее подшипники, что они быстро разрушаются.

В случае несимметричных деталей, например коленчатых валов, применяют специальные противовесы.

При расчете на прочность быстро вращающихся деталей машин учет центробежных сил инерции совершенно необходим, так как эти силы во многих случаях играют определяющую роль.

6. Рассмотрим некоторые явления, обусловленные неинерциальностью земной системы отсчета. Основной причиной неинерциальности этой системы является суточное вращение Земли. Из опытов известно, что тело, свободно падая с вершины башни, движется не по вертикали, а слегка отклоняется к востоку. Это отклонение Δ тем больше, чем больше высота башни h, и зависит от географической широты места проведения опыта. При прочих равных условиях величина Δ максимальна на экваторе и равна нулю на полюсах. Поясним этот результат в простейшем случае падения тела на экваторе, пользуясь как неподвижной (инерциальной), так и подвижной (земной) системами отсчета, т. е. излагая точки зрения неподвижного и подвижного наблюдателей.

Для неподвижного наблюдателя на свободно падающее тело действует только сила $\mathbf{F}$ тяготения его к Земле. Эта сила сообщает телу ускорение $\mathbf{a}$, направленное к центру Земли. Следовательно, сила $\mathbf{F}$ не изменяет численного значения линейной скорости тела в суточном вращении вместе с Землей. Иными словами, в процессе падения тело сохраняет значение v_1 этой скорости, соответствующее вершине башни (рис. 7.2.). В то же время линейная скорость

v_0 основания башни меньше v_1:

$$v_1 - v_0 = \omega(R+h) - \omega R = \omega h,$$

где R — радиус Земли, ω — угловая скорость ее суточного вращения. Поэтому точка приземления тела должна быть несколько смещена к востоку (в направлении вращения Земли) по сравнению с вершиной башни.

Для подвижного наблюдателя на тело, помимо силы $\mathbf{F}$ тяготения к Земле, действуют центробежная $\mathbf{I}_e$ и кориолисова $\mathbf{I}_к$ силы инерции. Первые две силы направлены радиально: $\mathbf{F}$ — к центру Земли, $\mathbf{I}_e$ — от центра Земли. Поэтому их равнодействующая должна была бы вызывать строго вертикальное падение тела. Однако кориолисова сила инерции

$$\mathbf{I}_к = -2m\,[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r],$$

перпендикулярная к скорости $\mathbf{v}_r$ падения тела, вызывает искривление его траектории и смещение точки приземления к востоку (рис. 7. 3).

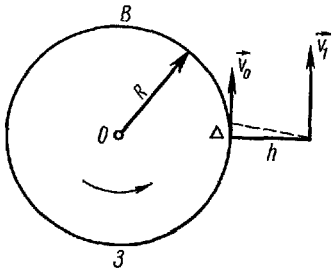

Рис. 7.2.

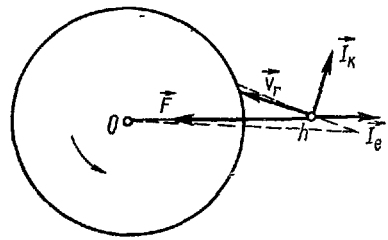

Рис. 7.3.

На полюсах Земли этот эффект отсутствует, так как векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}_r$ направлены вдоль одной прямой — оси вращения Земли, и $\mathbf{I}_к = 0$.

7. Аналогичным образом можно объяснить, почему реки, текущие в меридиональном направлении, всегда подмывают вполне определенный берег: правый по течению — для рек северного полушария Земли и левый — для рек южного полушария. Например, реки северного полушария, текущие с севера на юг, подмывают западный берег.

Рассмотрим объяснение этого явления неподвижным наблюдателем. Численные значения линейных скоростей точек поверхности Земли в ее суточном вращении зависят от географической широты φ:

$$v = v_0 \cos\varphi,$$

где v_0 — линейная скорость точек экватора. Поэтому частицы воды, перемещаясь с севера на юг, должны увеличивать свою линейную скорость v. Так как эта скорость направлена с запада на восток, то ее увеличение может осуществляться только за счет взаимодействия частиц воды с западным берегом реки, который подмывается при этом.

Для подвижного наблюдателя на частицы воды, движущиеся с севера на юг с относительной скоростью v_r, действуют кориолисовы силы инерции $I_к$, которые направлены с востока на запад (рис. 7.4.). Поэтому частицы воды отклоняются в том же направлении, подмывая западный берег реки.

8. Неинерциальность земной системы отсчета легко обнаружить на опыте с помощью **маятника Фуко.** Маятник Фуко представляет собой симметричное тяжелое тело, подвешенное на длинной нити. Крепление нити к опоре осуществляется таким образом, чтобы вращение опоры не сказывалось на свободных колебаниях маятника под дейст-

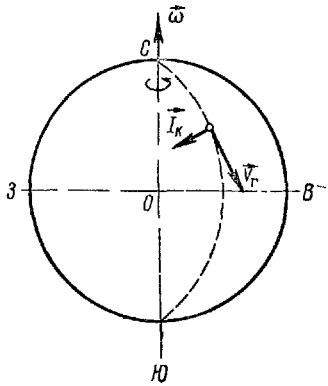

Рис. 7.4.

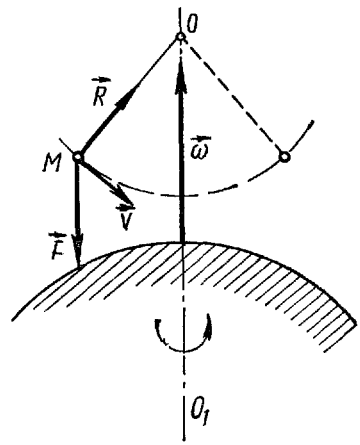

Рис. 7.5.

вием его силы тяжести. Опыт с таким маятником был проведен в 1851 г. французским физиком Л. Фуко. Фуко обнаружил, что плоскость качаний маятника постепенно изменяет свою ориентацию по отношению к земной системе отсчета. Угловая скорость Ω этой плоскости зависит от географической широты φ места проведения опыта. Она максимальна на полюсах Земли и равна нулю на экваторе:

$$\Omega = \omega \sin \varphi,$$

где ω — угловая скорость суточного вращения Земли.

Рассмотрим объяснение этого явления неподвижным наблюдателем. Предположим вначале, что маятник установлен на северном полюсе Земли (рис. 7.5). На маятник (груз M) действуют две силы — сила **F** тяготения к Земле и реакция **R** нити. Обе эти силы лежат в вертикальной плоскости качания маятника, проходящей через ось OO_1 вращения Земли и точку начального отклонения маятника. Никакие иные силы на маятник не действуют. Поэтому плоскость качаиия маятника сохраняет неизменную ориентацию по отношению к неподвижному наблюдателю. В то же время любая вертикальная плоскость, скрепленная с Землей, вращается с запада на восток с угловой

скоростью ω суточного вращения Земли. Следовательно, плоскость качаний маятника вращается относительно земной системы отсчета с угловой скоростью $\Omega = -\omega$, т. е. с востока на запад.

Пусть теперь маятник Фуко установлен в произвольной точке поверхности Земли (рис. 7.6). На маятник по-прежнему действуют две силы — сила тяготения к Земле и реакция нити, которые вновь лежат в вертикальной плоскости, проходящей через прямую AO, где O — центр Земли. Для дальнейшего анализа удобно разложить вектор ω угловой скорости вращения Земли на две составляющие: вектор ω_1, направленный вдоль вертикали OA, и перпендикулярный к нему вектор ω_2. Такое разложение соответствует представлению суточного вращения Земли в виде двух одновременных ее вращений вокруг взаимно перпендикулярных осей. Если географическая широта точки A равна φ, то, как видно из рис. 7.6,

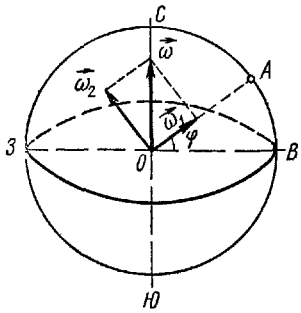

Рис. 7.6.

$$\omega_1 = \omega \sin\varphi \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega \cos\varphi.$$

Вращение Земли с угловой скоростью ω_2 вызывает соответствующее перемещение точки подвеса маятника, т. е. поворот вместе с Землей вертикали OA и проходящей через нее плоскости качаний маятника. При этом не происходит никакого изменения ориентации плоскости качаний маятника относительно земной системы отсчета

Вращение Земли с угловой скоростью ω_1 сказывается на маятнике Фуко, установленном в точке A, так же, как вращение с угловой скоростью ω сказывается на маятнике, установленном на полюсе. Поэтому плоскость качаний маятника вращается относительно земной системы отсчета с угловой скоростью

$$\Omega = -\omega_1,$$

или, по абсолютной величине,

$$\Omega = \omega_1 = \omega \sin\varphi.$$

Подвижный наблюдатель, находящийся на Земле, объясняет вращение плоскости качаний маятника Фуко действием перпендикулярной к этой плоскости кориолисовой силы инерции

$$\mathbf{I}_к = -2m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_r],$$

где m — масса маятника, а $\mathbf{v}_r$ — скорость его движения относительно Земли. При малой амплитуде качаний маятника с длинной нитью его траектория близка к горизонтальной прямой, т. е. скорость $\mathbf{v}_r$ перпендикулярна к вертикали OA (см. рис. 7.6). Поэтому численное значение кориолисовой силы инерции равно

$$I_к = 2m\omega_1 v_r = 2m\omega\, v_r \sin\varphi.$$

Сила Кориолиса вызывает искривление траектории маятника, которая благодаря этому имеет сложную форму. На рис. 7.7 изображен примерный вид траектории маятника, установленного на северном полюсе Земли. В начальный момент времени маятник отпускают из крайнего отклоненного положения A_0 без начальной скорости по отношению к Земле. Предполагается, что затухание колебаний отсутствует, а точка O соответствует положению равновесия. Сплошной стрелкой показано направление вращения Земли. Из рис. 7.7 видно, что, выйдя из точки A_0, маятник после одного полного колебания возвращается не в точку A_0, а в точку A_1; после второго полного колебания — в точку A_2 и т. д. Несовпадение точек A_1, A_2 и т. д. с A_0 объясняется искривлением траектории маятника под действием кориолисовой силы инерции. Эта сила и кривизна траектории максимальны там, где маятник имеет наибольшую скорость v_r, т. е. вблизи точки O. В крайних отклоненных положениях маятника (точки на окружности) $v_r = 0$, $l_к = 0$ и кривизна траектории тоже равна нулю.

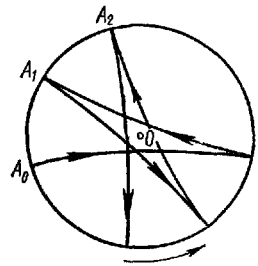

Рис 7.7

Из сказанного следует, что земной наблюдатель может лишь более или менее условно говорить о существовании плоскости качаний маятника и ее вращении, понимая под последним перемещение крайних положений маятника из точки A_0 в точки A_1, A_2 и т. д. в направлении, противоположном направлению вращения Земли.

9. Различное объяснение рассмотренных нами явлений неподвижным и подвижным наблюдателями отнюдь не свидетельствует об отсутствии объективных закономерностей этих явлений и произвола в их истолковании в зависимости от субъективных особенностей того или иного наблюдателя. Рассматривая движения тел относительно неинерциальной системы отсчета с позиций механики Ньютона, подвижный наблюдатель, хочет он того или нет, должен вводить силы инерции. Необходимость использования сил инерции является выражением того объективного, т е не зависящего от воли и сознания наблюдателя, факта, что законы Ньютона неприменимы в неинерциальных системах отсчета.

10. В заключение необходимо указать на важное сходство, существующее между силами инерции и силами тяготения. Как видно из предыдущего, силы инерции пропорциональны массам материальных точек и при прочих равных условиях сообщают им одинаковые относительные ускорения. Точно таким же свойством обладают силы тяготения: сила, действующая на материальную точку, равна произведению массы этой точки на напряженность поля тяготения. Следовательно, в одной и той же точке поля тяготения эти силы, подобно силам инерции, пропорциональны массам материальных точек и всем им сообщают одинаковые ускорения, равные напряженности поля. Таким образом, действие на материальную точку (или систему материальных

точек) сил инерции можно заменить действием эквивалентного им поля тяготения. Например, силам инерции, которые возникают в системе отсчета, движущейся поступательно с постоянным ускорением $\mathbf{a}_0$, эквивалентно однородное поле тяготения с напряженностью $\mathbf{G} = -\mathbf{a}_0$.

Из сказанного вытекает следующий вывод, называемый принципом эквивалентности: *движение тела по отношению к неинерциальной системе отсчета эквивалентно его движению относительно инерциальной системы, совершающемуся под влиянием всех реально взаимодействующих с ним тел, а также некоторого дополнительного поля тяготения.*

Принцип эквивалентности не следует понимать как утверждение тождественности сил инерции и тяготения. Поле тяготения, движение в котором (по отношению к инерциальной системе отсчета) эквивалентно движению в какой-либо неинерциальной системе отсчета, существенно отличается от реального гравитационного поля, создаваемого телами. В самом деле, как указывалось выше, поле тяготения, «эквивалентное» поступательно движущейся неинерциальной системе однородно и его напряженность $\mathbf{G} = -\mathbf{a}_0$. Следовательно, если в какой-то момент времени ускорение $\mathbf{a}_0$ системы изменится, то и напряженность «эквивалентного» поля тоже должна измениться, притом одновременно во всех точках пространства. Иными словами, изменения «эквивалентного» поля должны распространяться в пространстве с бесконечно большой скоростью в то время, как согласно теории относительности эта скорость для реальных полей не может превосходить скорость света в вакууме. Далее, напряженность поля тяготения, создаваемого телами, убывает при удалении от этих тел и стремится к нулю в бесконечности. Напряженность «эквивалентного» поля этому условию не удовлетворяет. Например, напряженность поля, «эквивалентного» центробежным силам инерции, неограниченно возрастает при беспредельном удалении от оси вращения.

Вопросы для повторения

1. Приведите примеры, иллюстрирующие неприменимость законов Ньютона в неинерциальных системах отсчета
2. Чему равны переносная и кориолисова силы инерции? В чем отличие этих сил от сил взаимодействия между телами?
3. Выведите уравнение движения материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета.
4. Почему в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения?
5. Чему равна и как направлена центробежная сила инерции?
6. Перечислите известные Вам явления, обусловленные неинерциальностью земной системы отсчета. Дайте объяснения этих явлений.
7. Сформулируйте и поясните принцип эквивалентности.

Примеры решения задач

Задача 7.1. Тело свободно падает с высоты 100 м на Землю. Определить отклонение тела к востоку под влиянием кориолисовой силы инерции, вызванной вращением Земли. Широта места падения 45°.

Дано

$h = 100$ м,
$\omega = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ рад/с,
$\varphi = 45°$.

s — ?

Решение

В земной системе отсчета на свободно падающее тело действует кориолисова сила инерции:

$$\mathbf{I}_к = -2m\,[\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{v}_r],$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли, а $\mathbf{v}_r$ — скорость движения тела относительно Земли. Кориолисова сила инерции во много раз меньше силы тяготения тела к Земле. Поэтому в первом приближении при определении $\mathbf{I}_к$ можно считать, что скорость $\mathbf{v}_r$ направлена вдоль радиуса Земли и численно равна gt, где g — ускорение свободного падения и t — продолжительность падения. Из рис. 7.8 видно, что сила $\mathbf{I}_к$ направлена перпендикулярно $\mathbf{v}_r$ с запада на восток. Численно она равна

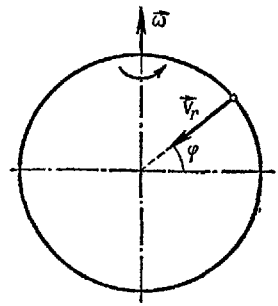

Рис. 7.8.

$$I_к = 2m\omega gt\cos\varphi.$$

Эта сила сообщает телу ускорение $\mathbf{a}_к$, направленное по касательной к поверхности Земли с запада на восток и численно равное:

$$a_к = 2\omega gt\cos\varphi.$$

Так как $a_к = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$, где v — численное значение составляющей скорости тела, касательной к поверхности Земли, s — смещение свободно падающего тела к востоку, то

$$v = \omega gt^2\cos\varphi + C_1$$

и

$$s = \frac{1}{3}\,\omega gt^3\cos\varphi + C_1 t + C_2.$$

В начале падения тела ($t = 0$) $v = s = 0$, поэтому постоянные интегрирования C_1 и C_2 равны нулю и

$$s = \frac{1}{3}\,\omega gt^3\cos\varphi.$$

Продолжительность свободного падения тела с высоты h

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

так что искомое отклонение тела к востоку

$$s = \frac{2}{3}\,\omega h\,\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
а) проверка размерности результата:

$$[s] = \frac{[\omega]\cdot[h]^{3/2}}{[g]^{1/2}} = \frac{T^{-1}\cdot L^{3/2}}{L^{1/2}\cdot T^{-1}} = L;$$

б) вычисления:

$$s = \frac{2}{3}\,7{,}27\cdot 10^{-5}\cdot 100\,\sqrt{\frac{2\cdot 100}{9{,}81}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{м} = 1{,}55\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Глава VIII

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 8.1. Гармоническое колебательное движение

1. **Колебательным движением,** или просто колебаниями, называют всякое движение или изменение состояния, характеризуемое той или иной степенью повторяемости во времени значений физических величин, определяющих это движение или состояние. С колебаниями мы встречаемся при изучении самых различных физических явлений: звука, света, переменных токов, радиоволн, качаний маятников и т. д. Оказывается, что существует общность закономерностей этих явлений и математических методов их исследования. Поэтому основные законы учения о механических колебаниях, которые мы рассмотрим в этой главе, должны послужить прочным фундаментом для изучения различных видов колебаний в последующих разделах физики. Примерами колебательного движения в механике могут служить колебания маятников, струн, мембран телефонов, балансиров карманных часов, поршней двигателей внутреннего сгорания, мостов и других сооружений, подвергающихся переменной нагрузке, и т. д.

Колебательное движение называют **периодическим,** если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через р а в н ы е промежутки времени Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые **гармонические колебания.** Колебания какой-либо физической величины x называются гармоническими, если ее зависимость от времени t имеет вид

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0), \tag{8.1}$$

или

$$x = A \cos (\omega t + \varphi_1), \tag{8.1'}$$

причем A, ω, φ_1 и φ_0 с течением времени не изменяются. Физический смысл этих величин будет пояснен дальше.

2. Рассмотрим колебания, происходящие под действием упругой силы, например колебания пружинного маятника. Пружинный маятник состоит из массивного шара, насаженного на горизонтальный стержень, вдоль которого он может скользить (рис. 8.1). На стержень надета стальная пружина, закрепленная на его конце и на шаре. Массой пружины по сравнению с массой шара можно пренебречь. В состоянии покоя шар находится в положении O (рис. 8.1, *а*). Если его передвинуть в поло-

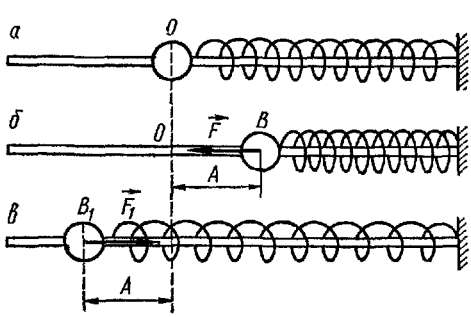

Рис. 8.1.

жение B (рис. 8.1, *б*), сжав пружину, а затем отпустить, то он начнет ускоренно двигаться влево под действием упругой силы пружины $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ (см. уравнение 3.10), где $\mathbf{x}$ — вектор смещения шара из положения равновесия O.

По мере приближения шара к положению равновесия численное значение упругой силы пружины, а значит и ускорение, с которым движется шар, уменьшаются и в точке O становятся равными нулю. За счет приобретенной кинетической энергии шар будет продолжать свое движение влево, растягивая пружину. Когда вся кинетическая энергия шара превратится в потенциальную энергию пружины (рис. 8.1, *в*), шар на мгновение остановится, после чего упругая сила

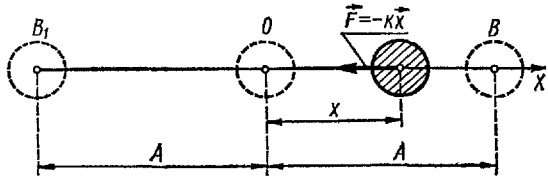

Рис. 8.2.

$\mathbf{F}_1$, растянутой пружины заставит его возвращаться в положение равновесия O и т. д.

В реальном случае часть энергии пружинного маятника будет затрачиваться на работу против сил трения, возникающих при скольжении шара вдоль стержня. Когда вся энергия маятника израсходуется на эту работу, колебания прекратятся.

Колебания, которые возникают в системе, не подверженной действию переменных внешних сил, в результате какого-либо начального отклонения этой системы от состояния устойчивого равновесия, называют **свободными.** Если система консервативная, то при колебаниях не происходит рассеяния энергии В этом случае свободные колебания называют **незатухающими.**

3. Покажем, что свободные незатухающие колебания, происходящие под действием упругих сил, являются гармоническими.

На рис. 8.2 изображен шар рассмотренного выше пружинного маятника в тот момент времени, когда его смещение равно x. Полная энергия W маятника в этом положении равна сумме кинетической энергии шара $W_к = \frac{mv^2}{2}$, потенциальной энергии упруго деформированной пружины $W_п = \frac{kx^2}{2}$ и потенциальной энергии шара в поле тяготения $W_{тяг}$. В положении B, соответствующем максимальному смещению A шара из положения равновесия O, его кинетическая энергия равна нулю ($W_к = 0$), и полная энергия пружинного маятника

складывается из энергии упруго деформированной пружины $W'_{\text{п}} = \frac{kA^2}{2}$ и потенциальной энергии тяготения $W'_{\text{тяг}}$. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + W_{\text{тяг}} = \frac{kA^2}{2} + W'_{\text{тяг}}. \tag{8.2}$$

Маятник колеблется вдоль горизонтальной прямой, поэтому $W_{\text{тяг}} = W'_{\text{тяг}}$, и из уравнения (8.2) следует, что

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2),$$

отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

или

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, dt. \tag{8.3}$$

Смещение x как функцию времени t можно определить путем интегрирования уравнения (8.3). Масса m шара и коэффициент k упругости пружины являются величинами, постоянными для данного пружинного маятника. Поэтому можно написать

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \int dt,$$

откуда

$$\arcsin \frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi_0, \tag{8.4}$$

где φ_0 — постоянная интегрирования. Численное значение φ_0 зависит от выбора момента начала отсчета времени:

а) если принять $t = 0$ при $x = 0$, то, как следует из уравнения (8.4), $\varphi_0 = \arcsin 0 = 0$, и уравнение (8.4) можно записать в виде

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right); \tag{8.4'}$$

б) если принять $t = 0$ при $x = A$, то $\varphi_0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, и уравнение (8.4) принимает вид

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right); \tag{8,4''}$$

в) если принять $t = 0$ при $x = A\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$ и

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{3}\right) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t - \frac{\pi}{6}\right), \tag{8.4'''}$$

и т. д.

В общем случае уравнение (8.4) можно записать в форме

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right), \tag{8.5}$$

или

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right), \tag{8.5'}$$

где $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$, так как при этом условии

$$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_1\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right),$$

и выражения (8.5) и (8.5′) тождественны.

Формулы (8.5) и (8.5′) полностью совпадают с формулами (8.1) и (8.1′), если ввести замену

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{8.6}$$

Таким образом, мы доказали, что свободные незатухающие колебания пружинного маятника действительно являются гармоническими.

4. Величину A, равную максимальному смещению маятника (шара) из положения равновесия, называют **амплитудой** колебаний. Выражение $\Phi = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0$, стоящее под знаком синуса (или, соответственно, выражение $\omega t + \varphi_1$, стоящее под знаком косинуса), определяет смещение x в данный момент времени t. Его называют **фазой** колебания. В момент начала отсчета времени ($t = 0$) фаза колебания равна φ_0 (или φ_1). Поэтому величину φ_0 (φ_1) называют **начальной фазой колебания.** Фазу измеряют в радианах.

Величину ω, входящую в выражение для фазы колебания, называют **циклической** (или **круговой**) **частотой** колебаний. Физический смысл циклической частоты связан с понятиями периода колебаний T и частоты колебаний ν. **Периодом незатухающих колебаний** называют тот наименьший промежуток времени T, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания. За время T совершается одно полное колебание.

Обратимся вновь к колебаниям пружинного маятника. Колебания шара характеризуются не только его смещением, но также скоростью $\mathbf{v}$ и ускорением $\mathbf{a}$. Шар движется прямолинейно вдоль оси OX (см. рис. 8.2). Поэтому значения v_x и a_x проекций векторов скорости и ускорения шара на положительное направление оси OX можно получить, дифференцируя по времени выражение (8.5):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)$$

и

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right) = -\frac{k}{m}x.$$

Так как по формуле (8.6) $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$, то окончательно:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= A\omega\cos(\omega t + \varphi_0), \\ a_x &= -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x, \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

а при дифференцировании выражения (8.5′) получаем аналогично:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -A\omega\sin(\omega t + \varphi_1), \\ a_x &= -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_1) = -\omega^2 x. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Из определения периода колебаний T и уравнений (8.5), (8.6) и (8.7) следует, что за время T фаза колебаний изменяется на 2π рад. В самом деле, это наименьшее изменение фазы, при котором одновременно повторяются значения x, v_x и a_x. Следовательно,

$$[\omega(t + T) + \varphi_0] - (\omega t + \varphi_0) = 2\pi$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{8.9}$$

Период колебаний пружинного маятника зависит только от его массы m и коэффициента упругости k пружины, но не зависит от амплитуды колебаний.

Частотой колебаний называют число полных колебаний, совершаемых за единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{8.10}$$

Для пружинного маятника

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{8.10′}$$

Из сравнения формул (8.9) и (8.10) следует, что

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{8.11}$$

Таким образом, циклическая частота ω численно равна числу полных колебаний, совершаемых за 2π с. В этом и состоит ее физический смысл.

5. Запишем полученные выше выражения для смещения, скорости и ускорения пружинного маятника [уравнения (8.5) и (8.7)] в следующей форме:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{8.5″}$$

$$v_x = v_0\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{8.7′}$$

$$a_x = -a_0\sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x, \tag{8.7″}$$

где $v_0 = A\omega$ — амплитуда скорости и $a_0 = A\omega^2$ — амплитуда ускорения.

Шар пружинного маятника движется поступательно и по существу подобен материальной точке, колеблющейся по закону (8.5″). Из формул (8.5″), (8.7′) и (8.7″) можно сделать следующие выводы:

а) смещение, скорость и ускорение гармонически колеблющейся точки являются периодическими функциями от времени с одинаковыми периодами T;

б) скорость колеблющейся точки максимальна и по абсолютной величине равна амплитуде скорости в моменты прохождения колеблющейся точки через положение равновесия ($x = 0$). При максималь-

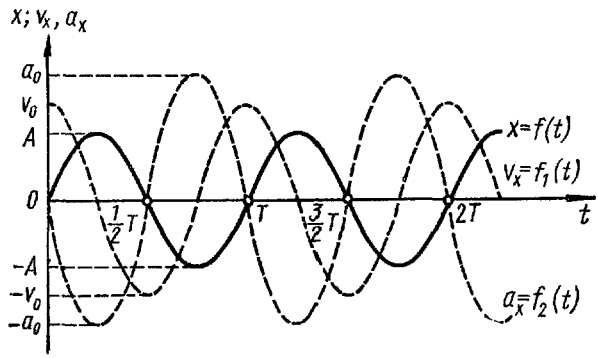

Рис. 8.3.

ных смещениях ($x = \pm A$) скорость равна нулю. Скорость всегда направлена в сторону движения;

в) ускорение равно нулю при прохождении колеблющейся точки через положение равновесия и достигает максимальных по абсолютной величине значений, равных амплитуде ускорения, при наибольших смещениях. Ускорение всегда направлено к положению равновесия: удаляясь от положения равновесия, колеблющаяся точка движется замедленно, приближаясь к нему — ускоренно. Из уравнения (8.7″) видно, что *ускорение прямо пропорционально смещению, а его направление противоположно направлению смещения*. Этот результат может служить определением гармонических колебаний.

Зависимость x, v_x и a_x от времени t по формулам (8.5″), (8.7′) и (8.7″) представлена графически на рис. 8.3, причем для простоты принято, что $\varphi_0 = 0$.

6. Начальная фаза φ_0, как было показано в п. 3, определяется из начальных условий конкретной задачи. То же следует сказать и об амплитуде колебаний A. Так, например, в рассмотренном примере с пружинным маятником (см. рис. 8.1) амплитуда колебаний зависит от того, насколько была сжата пружина перед началом колебаний.

Найдем разность $\Delta\Phi$ между фазами смещения x и скорости v_x.

Для этого воспользуемся выражениями (8.5″) и (8.7′) и приведем их к сопоставимому виду:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin(\omega t+\varphi_0) = A\sin\Phi_x,\\ v_x &= v_0\cos(\omega t+\varphi_0) = v_0\sin\left(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right) = v_0\sin\Phi_v, \end{aligned}\right\} \quad (8.12)$$

где Φ_x и Φ_v — фазы смещения и скорости. Из (8.12) видно, что

$$\Delta\Phi = \Phi_x - \Phi_v = -\frac{\pi}{2}, \quad (8.13)$$

т. е. скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$.

Аналогично можно показать, что ускорение в свою очередь опережает скорость по фазе на $\frac{\pi}{2}$:

$$\Phi_a - \Phi_v = \frac{\pi}{2}. \quad (8.14)$$

§ 8.2. Динамика гармонических колебаний

1. Второй закон Ньютона позволяет в общем виде записать связь между силой и ускорением при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или твердого тела) с массой m. Подставляя в уравнение (2.3) второго закона Ньютона выражение (8.7) для ускорения при гармонических колебаниях, получим

$$F_x = -m\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi_0) = -m\omega^2 x, \quad (8.15)$$

где F_x — проекция силы на направление оси OX, вдоль которой совершаются колебания.

Сила, действующая на колеблющуюся материальную точку, как видно из формулы (8.15), прямо пропорциональна смещению и всегда направлена к положению равновесия. Поэтому ее часто называют **возвращающей силой.** Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

2. Примером сил, удовлетворяющих соотношению (8.15), являются уже рассмотренные нами упругие силы. Силы, имеющие иную природу, чем упругие силы, но также удовлетворяющие условию (8.15), называют **квазиупругими:**

$$F_x = -kx, \quad (8.15')$$

где $k = m\omega^2$ — коэффициент квазиупругой силы.

В случае прямолинейных колебаний вдоль оси OX проекция ускорения на эту ось

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Подставив это выражение для a_x и значение F_x в форме (8.15′) во второй закон Ньютона, получим **основное уравнение прямолинейных**

гармонических колебаний, вызываемых упругими или квазиупругими силами:

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \\ \text{или} \quad & m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

3. Рассмотрим несколько примеров свободных незатухающих колебаний тел.

Колебания тела, подвешенного на невесомой пружине (рис. 8.4), аналогичны рассмотренным выше колебаниям пружинного маятника. В самом деле, на тело массой m действуют упругая сила пружины $F_x = -kx$ и сила тяжести P. Напишем основное уравнение динамики для этого случая

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + P = -k(x - x_0),$$

где $x_0 = \frac{P}{k}$ — статическая деформация пружины под действием силы тяжести тела.

Обозначая через $x_1 = x - x_0$ и учитывая, что $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}$, так как x_0 не зависит от времени, получим уравнение движения тела

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1,$$

тождественное уравнению (8.16).

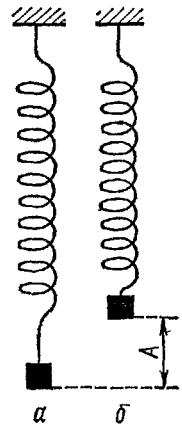

Рис. 8.4.

Поэтому формулы (8.6) и (8.9) справедливы также для колебаний тела, подвешенного на пружине.

4. В качестве второго примера рассмотрим малые колебания физического маятника. **Физическим маятником** называют абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси O, не проходящей через его центр тяжести. На рис. 8.5 изображено сечение физического маятника плоскостью, перпендикулярной к его оси вращения O и проходящей через его центр масс C. Расстояние OC равно L.

Пусть маятник отклонен из положения равновесия на небольшой угол α. Составляющая $\mathbf{F}_2$ силы тяжести маятника $\mathbf{P}$, направленная вдоль OC, уравновешивается

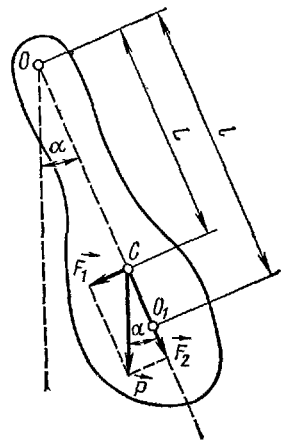

Рис. 8.5.

реакцией оси O. Составляющая $\mathbf{F}_1$, перпендикулярная к OC, стремится возвратить маятник в положение равновесия. При малых углах α отклонения маятника из положения равновесия $\sin\alpha \approx \alpha$, где α измеряется в радианах.

Поэтому при малых колебаниях физического маятника момент его силы тяжести относительно оси вращения O равен

$$M = -mgL\alpha.$$

Знак минус в правой части этой формулы показывает, что сила тяжести всегда препятствует отклонению маятника из положения его равновесия, соответствующего значению $\alpha = 0$, т. е. что M — возвращающий момент.

Для получения зависимости угла поворота α от времени воспользуемся основным законом динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$-mgL\alpha = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

или

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgL\alpha = 0,$$

где J — момент инерции маятника относительно оси O.

Если в последнем уравнении заменить α и J соответственно на x и m и обозначить mgL через k, то оно совпадает с уравнением (8.16). Поэтому период T малых колебаний физического маятника можно определить по формуле (8.9) для периода колебаний пружинного маятника, заменив в ней m и k соответственно через J и mgL:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}} \qquad (8.17)$$

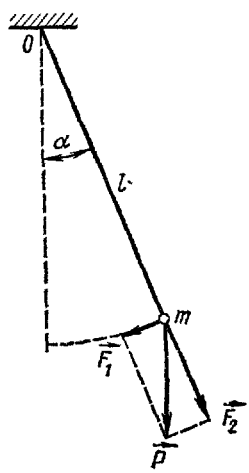

Рис. 8.6.

5. **Математическим маятником** называют материальную точку, подвешенную на невесомой, нерастяжимой нити и совершающую колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. На практике математическим маятником можно считать тяжелое тело, подвешенное на легкой нити, длина которой во много раз больше размеров тела. При отклонении маятника на угол α из положения равновесия (рис. 8.6) силу тяжести маятника $\mathbf{P}$ можно разложить на две составляющие $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, направленные, соответственно, перпендикулярно к нити и вдоль нее. Составляющая $\mathbf{F}_2$ вызывает натяжение нити маятника и уравновешивается реакцией, действующей на нить со стороны подвеса в точке O. Составляющая $\mathbf{F}_1$ стремится возвратить маятник

в положение равновесия ($\alpha = 0$). Так как невесомая нить все время натянута и нерастяжима, то математический маятник можно рассматривать как частный случай физического маятника, у которого вся масса m сосредоточена в его центре масс. Поэтому, положив в формуле (8.17) $J = ml^2$ и $L = l$, получим следующее выражение для периода малых колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{8.18}$$

Таким образом, период малых колебаний математического маятника не зависит от его массы и амплитуды колебаний.

Можно показать, что в общем случае период колебаний математического маятника выражается формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\alpha_0}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\sin^4\frac{\alpha_0}{2} + \cdots\right),$$

где α_0 — максимальный угол отклонения маятника.

Если $\alpha_0 \leqslant 15°$, то относительная ошибка при вычислении по формуле (8.18) менее 0,5%.

Наблюдения над колебаниями маятников используются для определения ускорения g свободно падающих тел. Такие наблюдения имеют большое значение для изучения геологической структуры земной коры в верхних ее частях. Наличие под землей залежей руды или нефти влияет на численное значение g. Поэтому маятники применяются при геологических разведках этих ископаемых.

6. **Приведенной длиной** физического маятника называется длина такого математического маятника, который колеблется синхронно с физическим, т. е. имеет равный с ним период колебаний. Для нахождения приведенной длины l приравняем правые части формул (8.17) и (8.18):

$$2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда

$$l = \frac{J}{mL}. \tag{8.19}$$

По теореме о переносе осей инерции

$$J = J_C + mL^2,$$

где J_C — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс и параллельной оси качания O. Следовательно,

$$l = \frac{J_C + mL^2}{mL} = L + \frac{J_C}{mL}. \tag{8.19'}$$

Величины J_C, m и L всегда положительны, поэтому $l > L$. Точку O_1 (см. рис. 8.5), лежащую на продолжении прямой OC на расстоянии l от оси вращения O, называют **центром качаний** маятника. Можно

показать, что период колебаний любого физического маятника остается неизменным, когда ось вращения переносят в центр качаний.

7. Вычислим энергию тела массой m, совершающего свободные гармонические колебания с амплитудой A, и циклической частотой ω. Потенциальная энергия $W_п$ тела, смещенного на расстояние x от положения равновесия, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила $F_x = -kx$, перемещая тело в положение равновесия. Эту работу можно найти, воспользовавшись формулой (3.10). Заменив x по формуле (8.1), получим

$$W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0). \tag{8.20}$$

Кинетическую энергию найдем, подставив в формулу (3.6), где $v^2 = v_x^2$, выражение для v_x из уравнения (8.7):

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \tag{8.21}$$

Заменив в уравнении (8.20) k через $m\omega^2$ и сложив почленно уравнения (8.20) и (8.21), получим следующее выражение для полной энергии W колеблющегося тела:

$$\left.\begin{aligned} W = W_п + W_к = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)], \\ \text{или} \\ W = W_п + W_к = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Таким образом, полная механическая энергия тела, совершающего гармонические колебания, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. В случае свободных незатухающих колебаний полная механическая энергия W не должна зависеть от времени (см. § 8.1). Поэтому амплитуда A колебаний тоже не зависит от времени.

Из (8.20) и (8.21) видно, что как потенциальная, так и кинетическая энергия колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Кинетическая и потенциальная энергии при свободных незатухающих гармонических колебаниях изменяются периодически. Однако период изменения энергии в два раза меньше периода изменения смещения, скорости и ускорения. За время одного полного колебания кинетическая и потенциальная энергии дважды достигают своих амплитудных значений и дважды обращаются в нуль. Это связано с тем, что $W_к$ и $W_п$ пропорциональны квадратам косинуса и синуса фазы колебаний.

Максимальная потенциальная энергия тела, совершающего свободные гармонические колебания, как следует из уравнения (8.21), равна $\frac{1}{2}kA^2$. Максимальная кинетическая энергия этого тела (уравнение 8.22) равна $\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$.

§ 8.3. Сложение гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой

1. Прежде чем рассматривать сложение колебательных движений, остановимся на способе представления колебаний посредством **вращающегося вектора амплитуды**. Пусть гармоническое колебательное движение можно описать уравнением:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_1).$$

Проведем прямую линию OX, которую условно назовем «опорной», и построим вектор $\mathbf{A}_0$, численно равный амплитуде A и направленный из точки O под углом φ_1 к опорной линии (рис. 8.7). Если начальная фаза положительна, то угол φ_1 откладывается от опорной линии в сторону, противоположную вращению часовой стрелки; если начальная фаза отрицательна, то угол φ_1 откладывается по часовой стрелке. Проекция вектора $\mathbf{A}_0$ на опорную линию равна смещению x_0 в момент начала отсчета времени ($t=0$):

$$x_0 = A\cos\varphi_1.$$

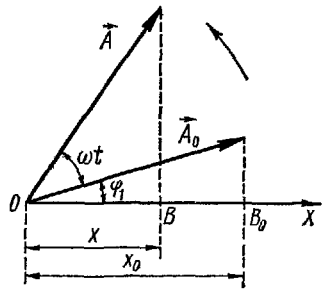

Рис. 8.7.

Будем вращать вектор амплитуды вокруг оси O, перпендикулярной к плоскости чертежа, с угловой скоростью ω (против часовой стрелки, если $\omega > 0$). За промежуток времени t вектор амплитуды повернется на угол ωt и займет положение, изображенное на рис. 8.7 вектором $\mathbf{A}$. Его проекция x на опорную линию равна

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_1).$$

За время T, равное периоду колебаний, вектор амплитуды повернется на угол 2π, а проекция B его конца совершит одно полное колебание около положения равновесия O. Следовательно, вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание. Представлением гармонических колебаний в виде вращающихся векторов широко пользуются при сложении колебаний.

2. Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой. Сложение этих колебаний удобно производить, пользуясь методом векторных диаграмм. Пусть колебания заданы уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned}\right\} \qquad (8.23)$$

Так как колебания совершаются вдоль одной прямой, то и результирующие колебания будут происходить вдоль этой же прямой.

Отложим из точки O опорной линии под углом φ_1 вектор амплитуды $\mathbf{A}_1$ и под углом φ_2 вектор амплитуды $\mathbf{A}_2$ (рис. 8.8). Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью ω, поэтому угол $\varphi_2 - \varphi_1$ между ними все время остается неизменным. Из математики известно, что проекция на любую ось равнодействующего вектора равна алгебраической сумме проекций на эту же ось всех составляющих векторов. Поэтому результирующие колебания могут быть изображены вектором амплитуды $\mathbf{A}$, равным сумме векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

и вращающимся вокруг точки O с той же угловой скоростью ω, что и векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Результирующие колебания должны быть гармоническими с циклической частотой ω:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где A — амплитуда результирующих колебаний, а φ — их начальная фаза.

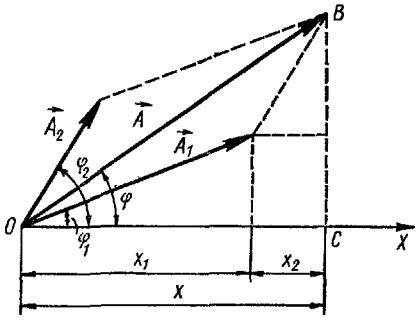

Рис. 8.8.

Из рис. 8.8 видно, что квадрат амплитуды результирующих колебаний равен

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (8.24)$$

а начальная фаза φ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BC}{OC},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \qquad (8.25)$$

3. Из выражения (8 24) следует, что амплитуда A результирующих колебаний зависит от разности начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складываемых колебаний. Так как разность $\varphi_2 - \varphi_1$ с течением времени не изменяется (такие синхронные колебания называют **когерентными**), то по формуле (8.24) можно получить определенное значение амплитуды A. Косинус любого угла не может быть больше $+1$ и меньше -1. Следовательно, возможные значения A заключены в пределах[1]:

$$A_1 + A_2 \geqslant A \geqslant |A_2 - A_1|.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

[1] Из определения понятия амплитуды колебаний следует, что амплитуда A не может быть отрицательной

1) Разность фаз складываемых колебаний равна нулю или целому числу 2π:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1 \text{ и } A = A_1 + A_2.$$

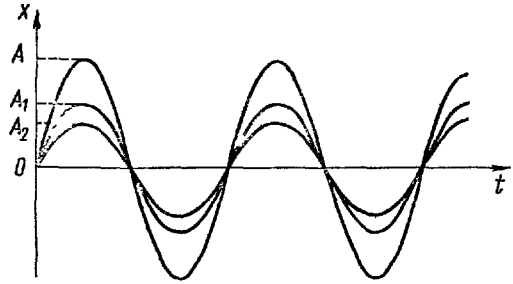

Рис. 8.9.

На рис. 8.9 приведены графики зависимости смещения от времени для складываемых и результирующего колебаний.

2) Разность фаз складываемых колебаний равна нечетному числу π:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n + 1), \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Тогда

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1,$$
$$A = |A_2 - A_1| = |A_1 - A_2|.$$

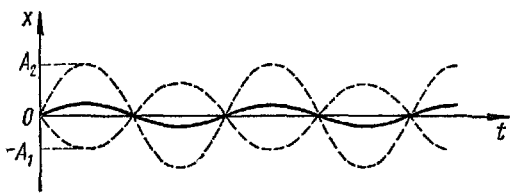

Рис. 8.10

Соответствующие графики зависимости смещения от времени для складываемых и результирующего колебаний приведены на рис 8.10 пунктирными и сплошной линиями.

4. Иначе обстоит дело, когда разность фаз складываемых некогерентных колебаний вида

$$x_1 = A_1 \cos[\omega t + \varphi_1(t)]$$

и

$$x_2 = A_2 \cos[\omega t + \varphi_2(t)]$$

произвольным образом изменяется во времени. В этом случае, как видно из уравнения (8.24), амплитуда A результирующих колебаний не остается постоянной, а изменяется в соответствии с изменением $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$. Поэтому при наложении некогерентных колебаний не имеет смысла говорить о сложении амплитуд.

В оптике будет показано, что при наложении одинаково направленных когерентных колебаний имеет место сложение амплитуд колебаний, а при наложении аналогичных, но некогерентных колебаний имеет место сложение их энергий.

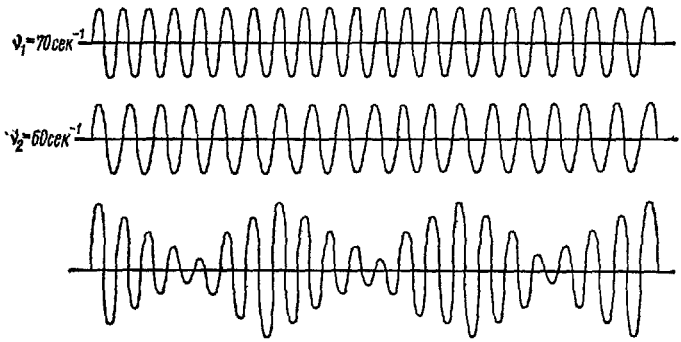

Рис. 8.11.

5. Если амплитуды двух гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой, одинаковы, а их частоты мало отличаются друг от друга, то в результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Происхождение этого явления легко представить себе из следующих рассуждений. Пусть вначале фазы обоих колебаний совпадают и амплитуда результирующего колебания равна сумме их амплитуд. Затем второе колебание начинает отставать по фазе от первого и амплитуда результирующего колебания убывает. Когда разность фаз слагаемых колебаний достигнет величины π, результирующая амплитуда станет равной разности амплитуд составляющих колебаний, т. е. в рассматриваемом случае будет равна нулю. При дальнейшем увеличении разности фаз амплитуда результирующего колебания снова возрастает и при разности фаз, равной 2π, становится равной сумме амплитуд и т. д. (рис. 8.11). Периодические изменения амплитуды от минимального значения до максимального называют **биениями.** Можно показать, что амплитуда результирующего колебания меняется с циклической частотой $\omega = |\omega_2 - \omega_1|$, которой соответствует частота $\nu = |\nu_2 - \nu_1|$. Таким образом, частота биений равна разности частот складываемых колебаний.

Явление биений часто наблюдается при звуковых и электрических колебаниях. Демонстрировать биения можно, заставив одновремен-

но звучать два камертона, обладающих несколько различными частотами свободных колебаний.

6. Колебания вида $x = A(t)\cos[\omega t + \varphi(t)]$ называют **модулированными.** Различают **амплитудно-модулированные** колебания, у которых $\left|\frac{dA}{dt}\right| \ll \omega A_{\text{макс}}$ и $\varphi = \text{const}$, где $A_{\text{макс}}$ — наибольшее значение амплитуды, и колебания, **модулированные по фазе или частоте,** у которых $A = \text{const}$ и $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \ll \omega$. Биения представляют собой простейший пример модулированных колебаний, у которых $A(t)$ и $\varphi(t)$ — периодические функции времени. Важной задачей теории колебаний является **гармонический анализ,** т. е. представление сложных модулированных колебаний в виде ряда простых гармонических колебаний. В общем виде эта задача была разрешена французским математиком Ж. Фурье, который показал, что любые сложные периодические колебания можно представить в виде ряда простых гармонических колебаний с кратными периодами: $x = f(t) = A_0 + A_1\sin(\omega t + \varphi_1) + A_2\sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3\sin(3\omega t + \varphi_3) + \ldots + A_n\sin(n\omega t + \varphi_n) + \ldots$, где $x = f(t)$ — функция, описывающая сложное колебание, ω — ее основная циклическая частота.

Число членов в ряде Фурье, вообще говоря, бесконечно велико. Однако возможны такие колебания, для которых ряды Фурье не содержат некоторых членов.

§ 8.4. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

1. Пусть материальная точка C одновременно участвует в двух гармонических колебаниях, совершающихся с одинаковыми периодами T в двух взаимно перпендикулярных направлениях. С этими направлениями можно связать прямоугольную систему координат XOY, расположив начало координат в положении равновесия точки (рис. 8.12). Обозначим смещение точки C вдоль осей OX и OY, соответственно, через x и y. Для того чтобы найти положение колеблющейся точки в какой-нибудь момент времени t, надо для этого момента времени найти ее смещения x и y и построить на них прямоугольник (рис. 8.12). Конец диагонали прямоугольника определит положение колеблющейся точки в момент времени t, а отрезок OC — результирующее смещение s.

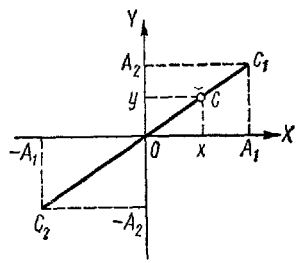

Рис. 8.12.

2. Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Начальные фазы колебаний одинаковы. Выберем момент начала отсчета времени таким образом, чтобы началь-

ные фазы обоих колебаний были равны нулю. Тогда смещения вдоль осей OX и OY можно выразить уравнениями

$$x = A_1 \sin \omega t,$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Поделив почленно эти равенства, получим уравнение траектории точки C:

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{или} \quad y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

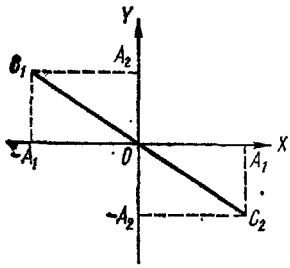

Рис. 8.13.

Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний точка C колеблется вдоль отрезка C_1C_2 прямой, проходящей через начало координат (рис. 8.12). Такие колебания называют **линейно поляризованными.**

б) Начальная разность фаз равна π. Уравнения колебаний в этом случае имеют вид:

$$x = A_1 \sin (\omega t + \pi) = -A_1 \sin \omega t,$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Уравнение траектории точки C

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x.$$

Следовательно, точка C колеблется вдоль отрезка C_1C_2 прямой, проходящей через начало координат, но лежащей в других квадрантах, чем в первом случае (рис. 8.13). Амплитуда A результирующих колебаний в обоих рассмотренных случаях равна:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

в) Начальная разность фаз равна $\frac{\pi}{2}$. Уравнения колебаний имеют вид:

$$x = A_1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \cos \omega t,$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

Разделим первое уравнение на A_1, второе — на A_2:

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t; \quad \frac{y}{A_2} = \sin \omega t.$$

Возведем оба равенства в квадрат и сложим их. Получим следующее уравнение траектории результирующего движения колеблющейся точки

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

Колеблющаяся точка C движется по эллипсу с полуосями A_1 и A_2 (рис. 8.14). Мы получили случай так называемых **эллиптически поляризованных колебаний.** Выясним, в каком направлении будет совершаться движение точки по эллипсу. Для этого, пользуясь уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega t$, найдем положения точки C в два последующих момента времени и отметим их на рис. 8.14: при $t_1 = 0$; $x_1 = A_1$; $y_1 = 0$ — точка C_1, при $t_2 = T/4$; $x_2 = 0$; $y_2 = A_2$. Следовательно, точка C движется по эллипсу п р о т и в ч а с о в о й с т р е л к и.

Предлагаем читателю доказать, что при разности фаз, равной $3\pi/2$ получится такое же эллиптически поляризованное колебание, но точка C будет двигаться по часовой стрелке. Если, кроме того, равны амплитуды обоих колебаний ($A_1 = A_2$), то точка C будет двигаться по окружности. Такие колебания называют **циркулярно поляризованными.**

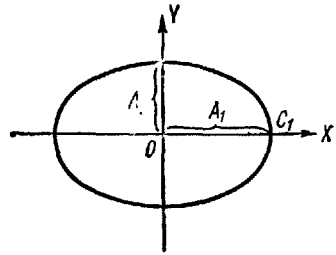

Рис. 8.14.

г) Все остальные разности фаз, кроме рассмотренных, дают эллипсы, не приведенные к осям OX и OY.

3. Различные кривые, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний, принято называть **фигурами Лиссажу.** Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз колебаний. Поэтому в простейших случаях частоты двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний можно сравнивать по форме фигур Лиссажу.

§ 8.5. Затухающие колебания

1. Все реальные колебательные системы являются диссипативными (см. § 3.3). Энергия механических колебаний такой системы постепенно расходуется на работу против сил трения, поэтому свободные колебания всегда затухают — их амплитуда постепенно уменьшается.

Это можно наблюдать на опыте с маятником Д. Максвелла, представляющим собой диск, ось которого подвешена на двух накручивающихся на нее нитях (рис. 8.15). Под действием силы тяжести маятник Максвелла совершает колебания в вертикальном направлении и вместе с тем крутильные колебания вокруг своей оси. Закрутив маятник, мы приподнимаем его на высоту H над положением равновесия (условным нулевым уровнем) и сообщаем ему потенциальную энергию mgH. Опустившись до положения равновесия, маятник, энергия которого перешла

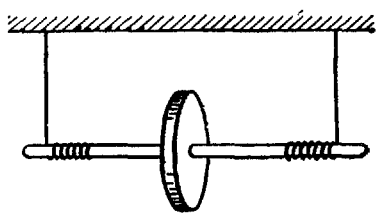
Рис. 8.15.

теперь в кинетическую, не остановится, а начнет опять подниматься, нити будут вновь накручиваться на ось. Однако маятник поднимается теперь на меньшую высоту, так как часть его энергии израсходовалась на преодоление сопротивления воздуха и трения нитей об ось. Совершив ряд колебаний с убывающей амплитудой, маятник останавливается в положении равновесия.

Потеря энергии происходит и при колебаниях под действием упругих сил, так как вполне упругих тел не существует, а деформации не вполне упругих тел сопровождаются частичным переходом механической энергии в энергию хаотического теплового движения частиц этих тел. В случае электрических колебаний часть электрической энергии в форме теплоты также переходит в энергию теплового движения частиц проводника и окружающего воздуха.

2. Во многих случаях, когда отсутствует сухое трение (см. § 5.3), в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях движения силы, вызывающие затухание механических колебаний, пропорциональны величине скорости Будем называть эти силы, независимо от их происхождения, **силами трения,** или **сопротивления:**

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -r\mathbf{v},$$

где r — коэффициент сопротивления, а $\mathbf{v}$ — скорость движения. Знак минус указывает, что силы трения всегда направлены в сторону, противоположную направлению движения.

Напишем второй закон Ньютона для затухающих прямолинейных колебаний тела вдоль оси OX:

$$ma_x = -kx - rv_x, \tag{8 26}$$

где m — масса колеблющегося тела, v_x и a_x — проекции его скорости и ускорения на ось OX, а $-kx$ и $-rv_x$ — проекции на ось OX возвращающей силы и силы трения.

Заменив $v_x = \frac{dx}{dt}$ и $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ и перенеся все члены в левую часть уравнения, получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{8 27}$$

Массу m, коэффициент сопротивления r и коэффициент упругости k иногда называют **параметрами колеблющейся системы.**

Если $r/2m \leqslant \sqrt{k/m}$, то в результате решения дифференциального уравнения (8.27) получается следующая зависимость смещения от времени (вывод этой формулы нами опущен):

$$x = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{8.28}$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Выражение

$$A = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \tag{8.29}$$

называют **амплитудой затухающих колебаний.**

Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент сопротивления и чем меньше масса m колеблющегося тела, т. е. чем меньше инертность системы.

Величину

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (r/2m)^2} \tag{8.30}$$

называют **собственной циклической частотой** колебаний диссипативной системы ($\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — циклическая частота свободных незатухающих колебаний рассматриваемой системы в отсутствие сил трения).

3. Затухающие колебания представляют собой **непериодические** колебания, так как в них никогда не повторяются, например, максимальные значения смещения, скорости и ускорения. Поэтому называть величину ω циклической **частотой** затухающих колебаний можно лишь условно в том смысле, что она показывает, сколько раз за 2π с колеблющаяся система проходит через положение равновесия. По тем же причинам величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - (r/2m)^2}}, \tag{8.30'}$$

обычно называемую **периодом затухающих колебаний,** правильнее называют **условным периодом затухающих колебаний.**

Найдем отношение значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени t и $t + T$, где T — условный период колебаний:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\frac{r}{2m}t}}{A_0 e^{-\frac{r}{2m}(t+T)}} = e^{\frac{r}{2m}T}, \tag{8.31}$$

или

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\beta T},$$

где

$$\beta = \frac{r}{2m} \tag{8.32}$$

называют **коэффициентом затухания.**

Натуральный логарифм отношения амплитуд смещений, следующих друг за другом через промежуток времени T, называют **логарифмическим декрементом затухания** δ:

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \beta T. \tag{8.33}$$

Поясним физический смысл величин β и δ. Обозначим через τ

промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Тогда

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e,$$

откуда $\beta\tau = 1$, или

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

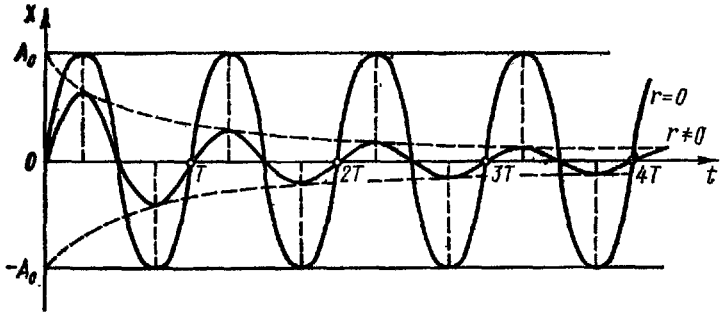

Рис. 8.16.

Следовательно, коэффициент затухания β есть физическая величина, обратная промежутку времени τ, в течение которого амплитуда убывает в e раз. Величину τ называют **временем релаксации.** Пусть, например, $\beta = 10^2\ с^{-1}$ — это означает, что амплитуда колебаний убывает в e раз за 10^{-2} с. Пусть N — число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в e раз. Тогда

$$\tau = NT,$$

$$\delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания δ есть физическая величина, обратная числу колебаний N, по истечении которых амплитуда убывает в e раз. Пусть, например, $\delta = 0{,}01$. Это значит, что амплитуда колебаний убывает в e раз по истечении 100 колебаний.

4. Если затухание колебаний не очень велико, то оно почти совсем не сказывается на величине условного периода (рис. 8.16). При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным критическому, т. е.

$$r = r_к = 2m\omega_0 \text{ или } \beta = \omega_0,$$

то, как видно из уравнения (8.30), циклическая частота затухающих колебаний обращается в нуль. Следовательно, колебания прекра-

щаются: система, выведенная какими-либо внешними силами из положения равновесия, после прекращения действия этих сил возвращается в положение равновесия апериодически (рис. 8.17). Отличие колебательного движения от апериодического состоит в следующем. При колебательном движении система, возвращаясь в положение равновесия, имеет некоторый запас кинетической энергии. В случае апериодического движения вся механическая энергия колеблющейся системы к моменту ее возвращения в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление трения. При очень большом трении апериодическое движение будет происходить весьма медленно.

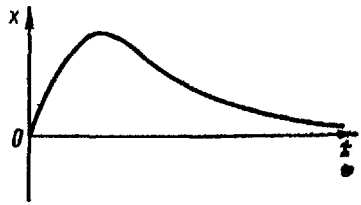

Рис. 8.17.

§ 8.6. Вынужденные колебания

1. Рассмотрим колебания, которые совершает система, если на нее, кроме упругой силы $-kx$ и сил сопротивления $-rv$ действует еще добавочная периодическая сила **F**, которую мы будем

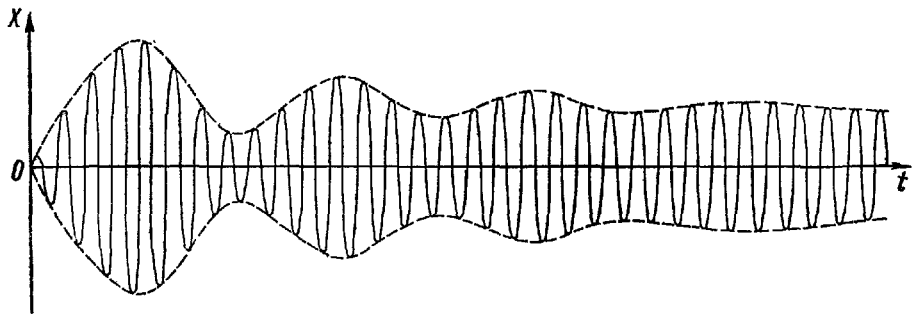

Рис. 8.18.

называть **вынуждающей**, или **возмущающей, силой.** Такие колебания совершает, например, груз, подвешенный на пружине и подталкиваемый вверх через равные промежутки времени. Если период вынуждающей силы не равен периоду свободных колебаний системы, то вначале происходит несколько биений, а затем устанавливаются вынужденные колебания с постоянной амплитудой (рис. 8.18). Биения, происходящие вначале, являются результатом наложения вынужденных колебаний и свободных затухающих колебаний.

2. Из второго закона Ньютона следует, что для вынужденных прямолинейных колебаний тела массы m, совершающихся вдоль оси OX,

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x,$$

где F_x — проекция на ось OX периодически действующей вынуждающей силы **F**. Заменяя проекции скорости и ускорения производными от смещения по времени и перенося члены с переменной x влево, получаем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_x. \tag{8.34}$$

Рассмотрим простейший случай, когда вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону:

$$F_x = F_0 \cos \omega t. \tag{8.35}$$

Предположим, что возникающие под действием силы **F** установившиеся вынужденные колебания системы также являются гармоническими:

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0), \tag{8.36}$$

причем их циклическая частота равна циклической частоте ω вынуждающей силы.

Задача заключается в нахождении амплитуды A и начальной фазы φ_0. Если нам удастся выразить их через массу m системы, коэффициенты k и r, а также амплитуду F_0 и циклическую частоту ω вынуждающей силы так, чтобы выражение (8.36) обращало в тождество уравнение (8.34), то тем самым мы докажем справедливость сделанного выше предположения

Из (8.36) имеем:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = A\omega \cos (\omega t + \varphi_0), \\ a_x = \frac{dv}{dt} &= -A\omega^2 \sin (\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \\ x &= A \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

Подставив эти выражения в уравнение (8.34), получим

$$mA\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + rA\omega \cos (\omega t + \varphi_0) +$$

$$+ kA \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = F_0 \cos \omega t.$$

Разделим все члены равенства на mA:

$$\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{r}{m}\omega \cos (\omega t + \varphi_0) +$$

$$+ \frac{k}{m} \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA} \cos \omega t. \tag{8.38}$$

Выше было показано, что $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, где ω_0 — циклическая частота

свободных незатухающих колебаний системы, $\frac{r}{m} = 2\beta$, где β — коэффициент затухания. Следовательно, равенство (8.38) можно записать и так:

$$A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \\ + A_3 \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = A_4 \cos \omega t, \qquad (8.38')$$

где

$$A_1 = \omega^2; \quad A_2 = 2\beta\omega; \quad A_3 = \omega_0^2 \quad \text{и} \quad A_4 = \frac{F_0}{mA}. \qquad (8.39)$$

Правую часть выражения (8.38′) можно рассматривать как уравнение некоторого гармонического колебания, получившегося от сложения трех гармонических колебаний, определяемых членами левой части этого равенства. Для сложения этих колебаний воспользуемся методом векторных диаграмм. Проведем опорную линию OX (рис. 8.19) и отложим под углами, соответствующими начальным фазам всех четырех колебаний, векторы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{A}_4$ их амплитуд таким образом, чтобы $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$. Из рис. 8.19 видно, что

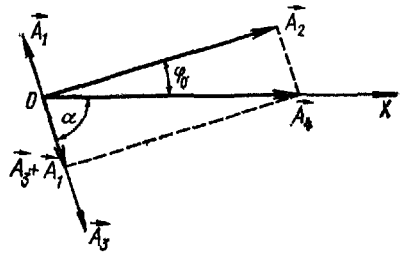

Рис. 8.19.

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2,$$

откуда, на основании соотношений (8.39), следует, что

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (8.40)$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0, обратно пропорциональна массе m системы и уменьшается с увеличением коэффициента затухания β. При постоянных F_0, m и β амплитуда зависит только от соотношения циклических частот вынуждающей силы (ω) и свободных незатухающих колебаний системы (ω_0). Рис. 8.19 позволяет определить сдвиг фаз φ_0 между скоростью установившихся вынужденных колебаний и вынуждающей силой, а также сдвиг фаз $\alpha = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$ между смещением и вынуждающей силой:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}. \qquad (8.41)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (8.42)$$

3. Исследуем выражение (8.40) и построим кривую зависимости амплитуды вынужденных колебаний от циклической частоты вынуждающей силы (рис. 8.20).

а) При циклической частоте вынуждающей силы $\omega = 0$

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

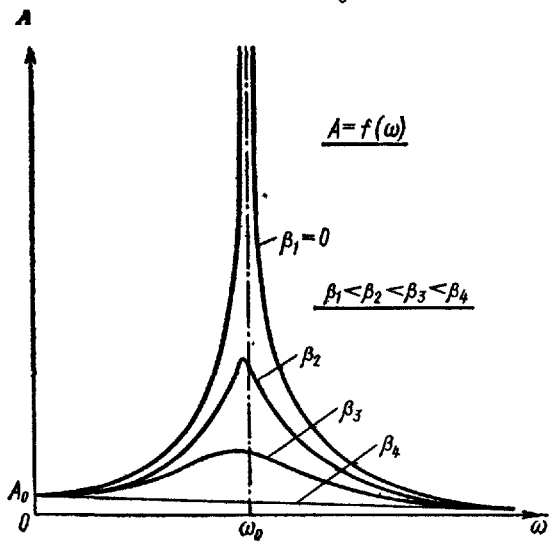

Рис. 8.20.

В этом случае колебания не совершаются и смещение при вынужденных колебаниях равно статической деформации под действием постоянной силы F_0:

$$x = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

Поэтому отклонение A_0 иногда называют **статической амплитудой.**

б) Если затухания нет ($\beta_1 = \frac{r}{2m} = 0$), то амплитуда колебаний A растет с увеличением циклической частоты ω вынуждающей силы F и при $\omega = \omega_0$ становится бесконечно большой.

При дальнейшем росте циклической частоты ω амплитуда A вынужденных колебаний уменьшается, причем $\lim\limits_{\omega\to\infty} A = 0$.

в) Если затухание существует ($\beta \neq 0$), то амплитуда достигает максимального значения, когда знаменатель правой части уравнения

(8.40) достигает минимума. Приравнивая нулю первую производную по ω от подкоренного выражения, получим условие его минимума:

$$-4\left(\omega_0^2-\omega_{\text{рез}}^2\right)\omega_{\text{рез}}+8\beta^2\omega_{\text{рез}}=0,$$

где $\omega_{\text{рез}}$ обозначает то значение циклической частоты ω вынуждающей силы, при котором $A=A_{\text{макс}}$.

Преобразуя это выражение, получим

$$\omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}=\omega_0\sqrt{1-2\beta^2/\omega_0^2}. \qquad (8.43)$$

Циклическую частоту $\omega_{\text{рез}}$ называют **резонансной**, а явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к значению $\omega_{\text{рез}}$ называют **явлением резонанса**. Из формулы (8.43) следует, что для консервативной системы ($\beta=0$) $\omega_{\text{рез}}=\omega_0$, а для диссипативной системы $\omega_{\text{рез}}$ несколько меньше собственной циклической частоты $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$. С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее (рис. 8.20) и, наконец, исчезает при

$$\beta\geqslant\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

Явление резонанса широко используется в радиотехнике (например, для настройки радиоприемников на прием той или иной радиостанции), в акустике (для анализа звуков, их усиления и т. д.). Ряд оптических явлений, например аномальная дисперсия, связаны с резонансом.

В различных сооружениях и машинах, подвергающихся периодически изменяющимся нагрузкам, резонанс весьма опасен. Он может вызвать их разрушение вследствие значительного возрастания амплитуды колебаний. Так, например, шатуны двигателя внутреннего сгорания действуют на коленчатый вал с периодически изменяющимися силами. Период их изменения связан с угловой скоростью вращения вала. Эти силы вызывают колебания коленчатого вала и при скорости вращения, соответствующей резонансу, могут привести к поломке вала. Вращающиеся части машин, диски и валы турбин, винты самолетов не могут быть абсолютно точно уравновешены, т. е. их центры масс всегда слегка смещены по отношению к осям вращения. Следовательно, они также испытывают переменную нагрузку и совершают вынужденные колебания. При проектировании современных машин и других сооружений, подвергающихся переменным нагрузкам, производят специальные расчеты и принимают меры для исключения возможности возникновения резонанса.

Вопросы для повторения

1. Какие колебания называют гармоническими? Дайте определения их основных характеристик (амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты).

2. Какие колебания называют свободными? В каком случае свободные колебания системы будут незатухающими?

3. Как связаны между собой амплитуды и фазы смещения, скорости и ускорения в прямолинейных гармонических колебаниях?

4. От чего зависит полная энергия тела, совершающего прямолинейные гармонические колебания?

5. Выведите формулы для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.

6. Начертите векторную диаграмму сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с равными периодами.

7. Как изменяется во времени амплитуда затухающих колебаний? Что называют логарифмическим декрементом затухания? Являются ли затухающие колебания периодическими?

8. Какие колебания называют вынужденными? Найдите выражения амплитуды и начальной фазы прямолинейных вынужденных колебаний, возбуждаемых силой, которая изменяется по гармоническому закону.

9. В чем состоит явление резонанса? Каково его значение в технике?

Примеры решения задач

Задача 8.1. Точка C (рис. 8.21) равномерно вращается по окружности против часовой стрелки, делая 5 об/с. Радиус окружности 0,2 м. Найти смещение, скорость и ускорение проекции точки на вертикальный диаметр в тот момент, когда точка прошла 1/3 часть окружности. В момент, выбранный за начальный, точка имела максимальное положительное смещение

Дано

$A = r = 0{,}2$ м,
$n = 5$ с$^{-1}$,
$l = BC = \dfrac{2\pi r}{3}$,
$x_0 = A$.

$x - ?\ v_x - ?\ a_x - ?$

Решение

Если точка равномерно вращается по окружности, то ее проекция на любую прямую, лежащую в плоскости окружности, совершает гармоническое колебательное движение. Смещение x, а также проекции скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки можно определить по формулам (8.5″) и (8.7):

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$v_x = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$a_x = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

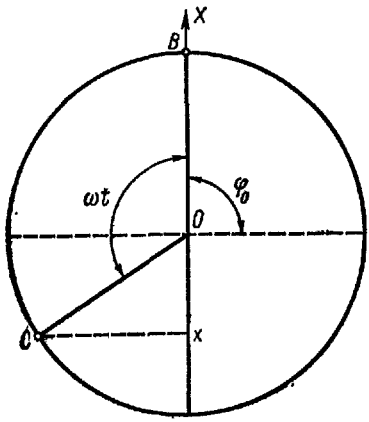

Рис. 8.21.

В начальный момент времени проекция точки C совпадает с точкой B, т. е. при $t = 0$ $x = A$ и $\sin\varphi_0 = 1$. Следовательно, начальная фаза $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Частота ν колебаний проекции точки C равна n, а циклическая частота ω равна

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi n.$$

Для прохождения точкой одной трети окружности требуется время t, равное одной трети периода T обращения точки или периода колебаний ее проекции:

$$t = \frac{T}{3} = \frac{1}{3\nu} = \frac{1}{3n}.$$

Подставляя найденные значения для φ_0, ω и t в написанные выше формулы для смещения, скорости и ускорения, получаем:

$$x = A \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = A \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right),$$

$$v_x = A 2\pi n \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right),$$

$$a_x = -A (2\pi n)^2 \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right).$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
1) проверка размерности результатов:

$$[x] = [A] = L,$$

$$[v_x] = [A]\,[n] = LT^{-1},$$

$$[a_x] = [A]\,[n]^2 = LT^{-2};$$

2) вычисления:

$$x = 0{,}2 \cdot \sin 210^\circ \text{ м} = -0{,}2 \cdot 0{,}5 \text{ м} = -0{,}1 \text{ м};$$

$$v_x = 0{,}2 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot \cos 210^\circ \text{ м/с} = -0{,}2 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 0{,}866 \text{ м/с} = -5{,}44 \text{ м/с}$$

$$a_x = -0{,}2 \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 5)^2 \cdot \sin 210^\circ \text{ м/с}^2 = 0{,}2 \cdot 31{,}4^2 \cdot 0{,}5 \text{ м/с}^2 = 98{,}6 \text{ м/с}^2$$

Задача 8.2. Из опыта установлено, что логарифмический декремент затухания камертона, колеблющегося с частотой 100 Гц, равен 0,002. Через какой промежуток времени амплитуда колебаний возбужденного камертона уменьшится в 100 раз? Как изменится при этом энергия колебаний?

Дано

$\nu = 100$ Гц,
$\delta = 0{,}002$,

$A_0/A = 100.$

$t - ?$ $W/W_0 - ?$

Решение

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\delta t/T} = A_0 e^{-\delta \nu t},$$

где β — коэффициент затухания, $T = \frac{1}{\nu}$ — условный период затухающих колебаний.

Таким образом,

$$t = \frac{1}{\delta \nu} \ln \frac{A_0}{A}.$$

Энергия колебаний W пропорциональна квадрату произведения частоты колебаний на их амплитуду (см. например, уравнение 8.22). Частота колебаний камертона постоянна, следовательно, отношение энергий колебаний равно квадрату отношения амплитуд:

$$\frac{W}{W_0} = \left(\frac{A}{A_0}\right)^2.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):
1) проверка размерности результатов

$$[t] = [\nu]^{-1} = T;$$

2) вычисления

$$t = \frac{1}{0{,}002 \cdot 100} \ln 100 \text{ с} = 23 \text{ с};$$

$$\frac{W}{W_0} = \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 10^{-4}.$$

Часть II

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Глава IX

ИДЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

§ 9.1. Введение

1. **Молекулярной физикой** называют раздел физики, занимающийся изучением зависимости физических свойств и агрегатных состояний тел от их внутреннего строения, сил взаимодействия между частицами, образующими тела, и характера их движения. Таким образом, молекулярная физика неразрывно связана с теорией строения вещества. Современная наука прочно стоит на позициях атомизма. Доказано, что все тела в природе состоят из мельчайших частиц (атомов и молекул), находящихся в непрерывном хаотическом тепловом движении. Теория строения вещества, базирующаяся на этом положении, называется молекулярно-кинетической. Ее основоположником является М. В. Ломоносов, который сформулировал основные положения этой теории и применил ее к объяснению различных явлений. Так, например, во времена Ломоносова считалось, что нагревание тел связано с передачей им особого невесомого вещества — теплорода. Ломоносов был противником этой точки зрения. Он утверждал, что «теплота тел состоит во внутреннем их движении», т. е. в движении частиц этих тел. Высказывания М. В. Ломоносова о связи тепловых явлений с молекулярным движением были полностью признаны наукой лишь спустя 100 лет после работ великого естествоиспытателя.

К середине XIX столетия благодаря работам многих выдающихся ученых (*Д. Джоуля*, *Р. Клаузиуса*, *позднее Д. К. Максвелла*, Л. Больцмана и др.) молекулярно-кинетическая теория прочно утвердилась в науке. Это оказало огромное влияние на дальнейшее развитие физики и химии.

Непосредственным опытным подтверждением справедливости молекулярно-кинетической теории служат: процесс диффузии, броуновское движение и многие другие явления.

Молекулярно-кинетическая теория позволяет единым образом подойти к изучению разнообразных физических явлений, объясняющихся тем или иным характером движения молекул. Например, она позволяет объяснить явление теплопроводности, физическую причину расширения твердых тел при их нагревании, вычислить давление газа на стенки сосуда и т. д.

2. В газах, жидкостях и твердых телах характер движения молекул различен. Это объясняется тем, что между молекулами действуют силы притяжения и отталкивания. Мы остановимся на этом вопросе

в гл. XIII, а сейчас заметим только, что чем меньше средние расстояния между молекулами, тем в большей степени сказываются силы их взаимодействия.

В разреженных газах молекулы удалены друг от друга настолько, что силы взаимодействия между ними практически отсутствуют. Молекулы газов движутся от столкновения до столкновения со стенками сосуда или между собой равномерно и прямолинейно. Это движение хаотично, т. е., в среднем, в каждом направлении в любой момент времени движется одинаковое число молекул. Характер теплового движения молекул в газе можно увидеть на модели А. Эйхенвальда. В плоском прозрачном сосуде помещено несколько десятков одинаковых шариков, изготовленных из слоновой кости. Если стенки сосуда заставить совершать колебания, то шарики будут хаотически двигаться, подобно молекулам газа. Эта же модель иллюстрирует броуновское движение. Если поместить в сосуд, помимо мелких шариков, один шарик значительно большего размера, то беспорядочные удары со стороны малых шаров заставят его совершать медленное хаотическое движение, подобное броуновскому.

В твердых кристаллических телах силы взаимодействия между частицами очень велики и поэтому молекулы не могут удалиться друг от друга на очень большие расстояния. В результате совместного влияния сил притяжения и отталкивания частицы твердых тел (молекулы, атомы или ионы) совершают колебания около некоторых средних положений, называемых узлами кристаллической решетки.

Молекулярное движение в жидкостях наиболее сложно. В нем наблюдаются черты, присущие тепловому движению частиц как в газах, так и твердых телах. Каждая молекула в течение некоторого промежутка времени колеблется около определенного положения равновесия, которое само время от времени смещается на расстояние, соизмеримое с размерами молекул. В результате молекулы внутри жидкости колеблются и медленно перемещаются. Некоторое время они находятся около определенных мест, как бы в оседлом состоянии

3. В классической физике предполагают, что молекулы движутся в соответствии с законами ньютоновской механики. Однако число молекул в любом теле невероятно велико: при обычных давлениях и температурах в каждом кубическом метре газа содержится порядка 10^{25} молекул, а в жидких и твердых телах — порядка 10^{28} молекул Поэтому практически невозможно даже написать систему дифференциальных уравнений движения такого множества молекул, так как для этого не хватило бы всей бумаги, имеющейся на земле. Тем более невозможно решить эту систему и найти вид траектории, а также закономерность движения по ней для каждой отдельной молекулы. Именно потому и говорят, что местоположение и скорость каждой молекулы изменяются во времени случайным образом.

Для изучения физических свойств макроскопических систем, состоящих из очень большого числа частиц, используют два взаимно дополняющих друг друга метода — статистический и термодинамический. **Статистический метод** основан на законах теории вероятностей и мате-

матической статистики. Дело в том, что в совокупном движении огромного числа частиц, координаты и скорости которых в любой момент времени случайны, проявляются определенные (статистические) закономерности. Например, в газе молекулы определенным образом распределены по скоростям и по энергиям их теплового движения, причем средние значения этих величин однозначно связаны с температурой газа. Свойства макроскопической системы, в конечном счете, обусловлены свойствами частиц системы, особенностями их движения и средними значениями скоростей, энергий и других динамических характеристик этих частиц. Раздел теоретической физики, в котором изучают физические свойства макроскопических систем с помощью статистического метода, называют **статистической физикой.**

4. **Термодинамический метод** состоит в изучении физических свойств макроскопических систем путем анализа условий и количественных соотношений для процессов превращения энергии в рассматриваемых системах. Соответствующий раздел теоретической физики называют **термодинамикой.** Термодинамика базируется на двух экспериментально установленных законах — первом и втором законах (началах) термодинамики, а также на принципе Нернста или третьем законе (начале) термодинамики, применение которого необходимо для решения сравнительно ограниченного числа задач. С помощью законов термодинамики можно получить многие сведения о физических свойствах тел в различных условиях, не пользуясь при этом какими-либо конкретными представлениями о внутреннем строении исследуемых тел и характере движения образующих их частиц.

Рассматриваемую макроскопическую систему в термодинамике называют **термодинамической системой.** В общем случае тела, образующие систему, могут обмениваться энергией как между собой, так и с внешними телами (внешней средой).

5. Физические величины, служащие для характеристики состояния термодинамической системы, называют **термодинамическими параметрами,** или **параметрами состояния,** системы. В качестве параметров состояния в термодинамике используют объем, давление, температуру, концентрацию и другие величины.

Давлением называют физическую величину p, численно равную силе, действующей на единицу площади поверхности тела по направлению нормали к этой поверхности:

$$p = \frac{dF_n}{dS},$$

dF_n — численное значение нормальной силы, действующей на малый участок поверхности тела площадью dS.

6. Значительно более сложным и менее наглядным является параметр состояния, называемый **температурой.** Прежде всего нужно подчеркнуть, что понятие температуры, строго говоря, имеет смысл только для равновесных состояний системы. Под **равновесным состоянием** (состоянием **термодинамического равновесия**) понимают такое состояние системы, которое не изменяется с течением времени, причем

это постоянство не связано с протеканием какого-либо процесса во внешней среде. Иначе говоря, равновесным называется состояние, в которое при неизменных внешних условиях в конце концов приходит система и дальше остается в этом состоянии сколь угодно долго. Температура всех частей системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, одинакова и тем больше, чем больше энергия системы. При соприкосновении двух тел передача энергии путем теплообмена происходит от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой.

С молекулярно-кинетической точки зрения температура равновесной системы характеризует интенсивность теплового движения атомов, молекул и других частиц, образующих систему. Например, для равновесной системы частиц, описываемых законами классической статистической физики средняя кинетическая энергия теплового движения частиц прямо пропорциональна абсолютной температуре системы (см. § 11.5) В этом смысле можно говорить, что температура характеризует степень нагретости тела.

Для измерения температуры можно использовать хорошо известный факт, что при нагревании или охлаждении тела изменяются почти все его физические свойства: длина и объем, плотность, упругие свойства, электропроводность и т. д. Изменение любого из этих свойств может служить основой для измерения температуры, если только известна, хотя бы для одного, так называемого термометрического тела, функциональная зависимость данного свойства от температуры.

Девятая генеральная конференция по мерам и весам в 1948 г. приняла для практического употребления **Международную стоградусную температурную шкалу.** В этой шкале температура измеряется в °С (градус стоградусной шкалы или градус Цельсия) и обозначается через t, причем принимается, что при нормальном давлении в $1{,}01325 \cdot 10^5$ Па температуры плавления льда и кипения воды равны соответственно 0° С и 100° С.

В 1954 г. Десятая генеральная конференция по мерам и весам установила абсолютную термодинамическую температурную шкалу, в которой температура измеряется в кельвинах (К) и обозначается через T. Связь между **абсолютной температурой** T и температурой t по стоградусной шкале имеет вид

$$T = 273{,}15 + t. \qquad (9.1)$$

Температуру $T = 0$ (по стоградусной шкале — 273,15° С) называют **абсолютным нулем температуры.**

7. Параметры состояния системы принято подразделять на внешние и внутренние. **Внешними параметрами системы** называют величины, зависящие от положения внешних тел и других их характеристик (например, электрических зарядов этих тел). **Внутренними параметрами системы** называют величины, зависящие не только от положения внешних тел, но также от координат и скоростей частиц, образующих рассматриваемую систему. Например, для газа объем V сосуда, в котором находится газ, — внешний параметр, так как он зависит от

положения внешних тел — стенок сосуда. Давление газа и его энергия — внутренние параметры, так как они зависят от скоростей движения и концентрации молекул газа. Если газ находится во внешнем силовом поле, например электрическом, то напряженность этого поля является внешним параметром для газа, так как она зависит от положения и величин зарядов внешних тел, создающих поле.

В отсутствие внешних полей у газа имеется единственный внешний параметр — объем V. Такого рода системы мы будем называть **простыми системами**. Примерами таких систем, помимо химически однородных газов и их смесей постоянного состава, являются также химически чистые жидкости и растворы постоянного химического состава, если только они не находятся в мелкодисперсном состоянии[1].

8. В термодинамике доказывается, что не все параметры системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, независимы: *внутренние параметры равновесной системы зависят только от ее внешних параметров и температуры.*

Например, равновесное состояние простой системы полностью определяется значениями всего лишь двух параметров — температуры T и объема V (химический состав и масса M всей системы предполагаются заданными). Соответственно, давление в такой системе

$$p = f(T,\ V).$$

Это соотношение называют **термическим уравнением состояния**, или, короче, **уравнением состояния**, простой системы. В термодинамике уравнение состояния исследуемой системы предполагается известным из опыта. Теоретический вывод уравнения состояния может быть осуществлен только методами статистической физики. В этом, в частности, наглядно проявляется тесная взаимосвязь между термодинамическим и статистическим методами исследования в современной физике.

9. При изменении внешних параметров системы будет изменяться и состояние системы — система будет совершать **термодинамический процесс**. Термодинамический процесс называют **равновесным**, если в этом процессе система проходит через непрерывную последовательность бесконечно близких состояний ее термодинамического равновесия. Очевидно, что реальный процесс изменения состояния системы тем ближе к равновесному, чем медленнее он осуществляется. Поэтому равновесные процессы часто называют также **квазистатическими**.

§ 9.2. Законы идеальных газов

1. Простейшим объектом исследований в термодинамике и статистической физике являются идеальные газы. **Идеальным газом** называют газ, молекулы которого имеют пренебрежимо малый соб-

[1] В мелкодисперсной жидкой системе существенную роль играет поверхностное натяжение. Поэтому состояние такой системы характеризуется не только ее объемом, но также площадью поверхности, являющейся также внешним параметром системы.

ственный объем и не взаимодействуют друг с другом на расстоянии. В реальных газах существуют силы межмолекулярного притяжения и отталкивания. Силы взаимного отталкивания молекул проявляются при столкновениях молекул газа друг с другом и со стенками сосуда. В § 13.1 будет показано, что при столкновениях молекулы газа ведут себя подобно небольшим абсолютно упругим шарикам, диаметр d которых зависит от химической природы газа и называется эффективным диаметром молекул. Порядок величины d для разных газов один и тот же: $d \sim 10^{-10}$ м. Между молекулами-шариками действуют силы взаимного притяжения. Эти силы быстро убывают с увеличением расстояния r между молекулами и практически равны нулю при $r > 10^{-9}$ м. Таким образом, реальные газы тем ближе по своим свойствам к идеальным, чем больше средние расстояния между молекулами, т. е. чем меньше концентрация молекул и, соответственно, меньше плотность газа.

Многие газы (азот, водород, гелий, кислород, воздух и др.) можно считать идеальными уже при плотностях, соответствующих обычным атмосферным давлениям и температурам. В самом деле, при этих условиях концентрация молекул газа $n_0 \sim 10^{25}$ 1/м^3, а среднее расстояние между молекулами $\langle r \rangle \sim \sqrt{1/n_0} \sim 10^{-8}$ м, т. е. настолько велико, что силами взаимного притяжения молекул можно пренебречь. Суммарный собственный объем всех молекул, содержащихся в 1 м^3 газа, $n_0 \frac{\pi d^3}{6} \sim 10^{-5}$ м$^3 \ll 1$ м^3. Следовательно, собственным объемом молекул газа также можно пренебречь. В то же время суммарная площадь поверхности всех молекул газа, содержащихся в сосуде объемом 1 м^3, $n_0 \pi d^2 \sim (10^6 \div 10^8)$ м^2, т. е. во много раз больше площади поверхности стенок сосуда. Поэтому молекулы газа, несмотря на малую величину их эффективного диаметра d, значительно чаще сталкиваются друг с другом, чем со стенками сосуда. Иначе говоря, возможность пренебрежения собственным объемом молекул газа отнюдь не означает возможности пренебрежения их взаимными столкновениями.

2. На основе экспериментов с достаточно разреженными газами был установлен ряд законов, справедливых для идеальных газов. Эти законы подробно рассматривались в курсе физики средней школы, так что мы лишь напомним их.

Закон Бойля—Мариотта: *произведение численных значений давления p и объема V идеального газа постоянно, если температура T и масса газа M не изменяются*, т. е. при $T = \text{const}$ и $M = \text{const}$

$$pV = \text{const}. \tag{9.2}$$

Закон Бойля—Мариотта характеризует связь между давлением и объемом идеального газа в изотермическом процессе изменения его состояния.

Закон Гей-Люссака: *при постоянном давлении объем V данной массы M идеального газа прямо пропорционален его абсолютной температуре T*, т. е. при $p = \text{const}$ и $M = \text{const}$

$$V = \alpha V_0 T = V_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{или} \quad \frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{const}, \tag{9.3}$$

где V_0 — объем газа при температуре $T_0 = 273{,}15$ К и $\alpha = 1/T_0$ — коэффициент объемного расширения газа.

Закон Гей-Люссака характеризует связь между объемом и температурой идеального газа в изобарическом процессе изменения его состояния.

Закон Шарля: *при постоянных объеме V и массе M идеального газа давление газа p прямо пропорционально его абсолютной температуре T*, т. е. при $V = \text{const}$ и $M = \text{const}$

$$p = \alpha p_0 T = p_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{или} \quad \frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{const}, \tag{9.4}$$

где p_0 — давление газа при температуре $T_0 = 273{,}15$ К.

Учитывая соотношение (9.1) между абсолютной температурой T и температурой t по стоградусной шкале, законы Гей-Люссака (9.3) и Шарля (9.4) можно переписать в форме

$$\left.\begin{aligned} V &= V_0(1 + \alpha t), \\ p &= p_0(1 + \alpha t), \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

где V_0 и p_0 — значения объема и давления газа при $t = 0°$ С.

3. С помощью законов Бойля—Мариотта и Гей-Люссака (или Шарля) легко найти связь между давлением, объемом и температурой для произвольного равновесного состояния идеального газа. Пусть при температуре T_1 и давлении p_1 рассматриваемый идеальный газ, имеющий общую массу M, занимает объем V_1, а при произвольной температуре T и произвольном давлении p — занимает объем V. Осуществим переход газа из начального состояния (p_1, V_1, T_1) в состояние (p, V, T) в два этапа. Сначала переведем газ в промежуточное состояние (p_1, V', T) путем нагревания (или охлаждения) от температуры T_1 до T при постоянном давлении равном p_1. По закону Гей-Люссака

$$\frac{V'}{T} = \frac{V_1}{T_1}, \quad \text{т. е.} \quad V' = \frac{V_1}{T_1} T.$$

Затем осуществим переход газа из этого состояния (p_1, V', T) в состояние (p, V, T) путем сжатия (или расширения) от объема V' до V при постоянной температуре, равной T. По закону Бойля — Мариотта

$$pV = p_1 V' = \frac{p_1 V_1}{T_1} T.$$

Следовательно,

$$\frac{pV}{T} = C = \text{const}. \tag{9.6}$$

Это соотношение, впервые полученное Б. Клапейроном, называют **уравнением Клапейрона**. Оно показывает, что *для данной массы иде-*

ального газа отношение произведения численных значений давления и объема к абсолютной температуре есть величина постоянная. Постоянную C называют **газовой постоянной**. Ее численное значение зависит от массы и химического состава газа, а также от выбора единиц измерения p, V и T.

Если масса газа равна M, то объем, занимаемый газом,

$$V = M \cdot v,$$

где v — удельный объем газа, связанный с плотностью ρ этого газа соотношением $v = 1/\rho$.

Тогда по уравнению (9.6)

$$pMv = CT$$

или

$$pv = \frac{C}{M} \cdot T = BT, \tag{9.7}$$

где $B = \frac{C}{M}$ представляет собой газовую постоянную, отнесенную к единице массы. Ее называют **удельной газовой постоянной.** Значение B от массы газа M не зависит, так как ни p, ни v, ни T непосредственно от M не зависят.

4. Единицей количества вещества в Международной системе единиц (СИ) служит **моль**. Из определения этой единицы, приведенного в § 4 Приложения, видно, что моли различных газов содержат одинаковое число молекул, называемое **числом Авогадро** N_A. Из опытов найдено, что $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Величину μ, равную отношению массы M газа к количеству N молей, содержащихся в нем: $\mu = M/N$, называют **молярной массой** газа. В СИ молярную массу измеряют в кг/моль. Она прямо пропорциональна относительной массе молекул газа:

$$\mu = 10^{-3} \frac{m}{m_0},$$

где m — масса молекулы рассматриваемого газа, а m_0 — атомная единица массы по углеродной шкале, т. е. одна двенадцатая часть массы атома наиболее распространенного на Земле изотопа углерода ^{12}C.

Молярным объемом газа называют величину $V_\mu = V/N$, где V — объем, занимаемый N молями газа. Так как масса моля численно равна μ, то $V_\mu = \mu v$, где v — удельный объем. Поэтому из уравнения (9.7) следует, что для идеального газа

$$\frac{pV_\mu}{T} = \mu B = R \quad \text{или} \quad pV_\mu = RT, \tag{9.8}$$

где R представляет собой газовую постоянную, отнесенную к молю газа.

В 1811 г. А. Авогадро был установлен закон, по которому *моли различных газов при одинаковых давлениях и температурах занимают одинаковые объемы.* Так, при нормальных условиях ($T = 273{,}15$ К и $p = 1{,}0132 \cdot 10^5$ Па $= 1$ атм $= 760$ мм рт. ст.) моль любого газа занимает объем $22{,}415 \cdot 10^{-3}$ м^3. Из закона Авогадро и уравнения (9.8) следует, что мольная газовая постоянная R одинакова для всех газов. Поэтому ее называют **универсальной газовой постоянной.** Приведем некоторые значения R в разных системах единиц. Из уравнения (9.8) при нормальных условиях имеем:

$$R = \frac{22{,}415 \cdot 1{,}0132 \cdot 10^2}{273{,}15} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = 8{,}31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} =$$

$$= 0{,}848 \text{ кгс} \cdot \text{м/(моль} \cdot \text{К)} = 1{,}99 \text{ кал/(моль} \cdot \text{К)} =$$

$$= 0{,}0821 \text{ м}^3 \cdot \text{атм/(кмоль} \cdot \text{К)}.$$

При решении задач в системе СГС применяют значение $R = 8{,}31 \times \times 10^7$ эрг/(моль·К). Иногда используют значение $R = 0{,}0821$ л·атм/(моль·К).

Если рассматривают не один моль газа, а M килограммов газа, т. е. $\frac{M}{\mu}$ молей, то полный объем газа $V = \frac{M}{\mu} V_\mu$ и уравнение (9.8) можно записать в следующей форме:

$$pV_\mu \frac{M}{\mu} = \frac{M}{\mu} RT$$

или

$$pV = \frac{M}{\mu} RT. \tag{9.9}$$

Уравнение (9.9) называют **уравнением Менделеева — Клапейрона.** Оно представляет собой наиболее общую форму записи **уравнения состояния идеального газа.** Из него легко получить выражение для плотности газа ρ:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT} = \frac{p}{BT}. \tag{9.10}$$

Часто удобно пользоваться еще одной формой уравнения (9.8). Введем так называемую **постоянную Больцмана** k, равную отношению универсальной газовой постоянной R к числу Авогадро N_A:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}} = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}. \tag{9.11}$$

В системе СГС $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К.
Из уравнения (9.8) имеем

$$p = \frac{kN_A}{V_\mu} \cdot T = k \cdot n_0 \cdot T, \qquad (9.12)$$

где $n_0 = \frac{N_A}{V_\mu}$ — число молекул в единице объема газа.

Вопросы для повторения

1 В чем сущность и различие термодинамического и статистического методов исследования физических явлений?
2. Какой смысл вкладывается в понятие «термодинамическое состояние тела»? Какие параметры состояния Вы знаете?
3. Какие газы называют идеальными? Сформулируйте основные законы идеальных газов

Примеры решения задач

Задача 9.1. В баллон при помощи компрессора нагнетают воздух. Температура внутри баллона 320 К. До какой плотности можно довести воздух в баллоне, если предохранительный клапан, прикрывающий отверстие в $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ м^2, удерживается силой 60 Н? Атмосферное давление $1{,}01 \cdot 10^5$ Па. Рассматривать сжатый в баллоне воздух как идеальный газ с молярной массой 0,029 кг/моль.

Дано

$T = 320$ К,
$S = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ м^2,
$F = 60$ Н,
$\mu = 0{,}029$ кг/моль,
$p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па

ρ — ?

Решение

Воспользуемся уравнением (9.10):

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

где R — универсальная газовая постоянная, а p — максимальное давление воздуха в баллоне. Это давление представляет собой сумму атмосферного давления p_0 и давления, производимого силой F на клапан

$$p = p_0 + \frac{F}{S}.$$

Следовательно, искомая плотность воздуха

$$\rho = \frac{\left(p_0 + \frac{F}{S}\right)\mu}{RT}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$\rho = \frac{\left(1{,}01 \cdot 10^5 + \frac{60 \cdot 10^5}{1{,}2}\right) 29}{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 320} \text{ кг/м}^3 = 55{,}7 \text{ кг/м}^3$$

Задача 9.2 Определить удельный объем 0,032 кг азота и 0,008 кг кислорода при давлении $1{,}01 \cdot 10^5$ Па и температуре 273 К, считая азот и кислород идеальными газами.

Дано

$M_1 = 0{,}032$ кг,
$M_2 = 0{,}008$ кг,
$\mu_1 = 0{,}028$ кг/моль,
$\mu_2 = 0{,}032$ кг/моль,
$p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па,
$T = 273$ К

$v_{см}$ — ?

Решение

По закону Дальтона давление p смеси газов равно сумме парциальных давлений всех газов, входящих в состав смеси. В рассматриваемом случае имеем:

$$p = p_1 + p_2, \qquad (а)$$

где p_1 и p_2 — парциальные давления азота и кислорода, т. е. те давления, которые они производили бы на стенки сосуда, занимая порознь весь объем смеси и находясь при той же температуре, что и смесь.

Давления p_1 и p_2 легко найти из уравнения Менделеева — Клапейрона (9 9).

$$p_1 V = \frac{M_1}{\mu_1} RT$$

и

$$p_2 V = \frac{M_2}{\mu_2} RT,$$

где V — объем сосуда, содержащего смесь.

Подставив эти выражения в уравнение (а), получим

$$pV = \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2}\right) RT$$

Удельный объем смеси

$$v_{см} = \frac{V}{M_1 + M_2} = \frac{\left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2}\right) RT}{(M_1 + M_2)\ p}. \qquad (б)$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$v_{см} = \frac{\left(\frac{0{,}032}{28} + \frac{0{,}008}{32}\right) \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 273}{(0{,}032 + 0{,}008) \cdot 1{,}01 \cdot 10^5} \text{ м}^3/\text{кг} = 0{,}78 \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Глава X

ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 10.1. Внутренняя энергия системы

1. Всякая термодинамическая система в любом состоянии обладает некоторой энергией W, называемой **полной энергией системы.** Полная энергия включает в себя кинетическую энергию механического движения системы как целого или ее макроскопических частей, потенциальную энергию, зависящую от положения системы во внешнем силовом поле (гравитационном, электрическом или магнитном), а также **внутреннюю энергию** U, зависящую только от внутреннего состояния системы.

В термодинамике обычно рассматривают макроскопически неподвижные системы, не подверженные действию внешних полей. Для таких систем значения полной и внутренней энергий совпадают. Поэтому понятие внутренней энергии является одним из основных в термодинамике. В состав внутренней энергии входит энергия всевозможных видов движения и взаимодействия друг с другом всех частиц (молекул, атомов, ионов и т. п.), образующих рассматриваемую систему. Например, во внутреннюю энергию газообразного тела входят:

а) кинетическая энергия хаотического (теплового) поступательного и вращательного движения молекул;

б) кинетическая и потенциальная энергия колебаний атомов в молекулах;

в) потенциальная энергия, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия;

г) энергия электронных оболочек атомов и ионов;

д) энергия движения и взаимодействия частиц (нуклонов) в ядрах атомов.

2. Внутренняя энергия является однозначной функцией термодинамического состояния системы. Ее значение в каком-либо произвольно выбранном состоянии не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Иначе говоря, изменение внутренней энергии при переходе системы из состояния *1* в состояние *2* не зависит от вида процесса перехода. В частности, если в результате какого-либо процесса система возвращается в исходное состояние, то полное изменение ее внутренней энергии равно нулю.

Внутренняя энергия системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, зависит только от температуры и внешних параметров системы. Например, внутренняя энергия U простой системы постоянной массы M зависит от абсолютной температуры T и объема V системы:

$$U = \varphi(V,\ T) = \varphi(M v,\ T), \tag{10.1}$$

где $v = V/M$ — **удельный объем системы.** Соотношение (10.1) называют **калорическим уравнением состояния** простой системы.

3. Внутренняя энергия, подобно потенциальной энергии в механике, может быть определена только с точностью до постоянного слагаемого U_0, зависящего от выбора «начала отсчета» внутренней энергии, т. е. от выбора состояния, в котором внутреннюю энергию системы принимают равной нулю. Однако это несущественно, так как в термодинамических расчетах приходится определять не абсолютные значения U внутренней энергии системы, а не зависящие от U_0 изменения этой энергии ΔU в различных термодинамических процессах, совершаемых системой. По той же причине под внутренней энергией обычно понимают только те ее составляющие, которые изменяются в рассматриваемых термодинамических процессах. Например, в дальнейшем мы не будем касаться процессов, сопровождающихся изменениями энергии электронных оболочек атомов и ионов, а также изменениями внутриядерной энергии. Поэтому под внутренней энергией кристаллического диэлектрика мы будем понимать только кинетическую и потенциальную энергию, связанную с тепловыми колебаниями атомов, молекул или ионов, из которых «построен» этот диэлектрик. Очевидно, что при расчете внутренней энергии металлов нужно учитывать не только энергию тепловых колебаний ионов, но также и энергию теплового движения электронов проводимости. Под внутренней энергией газа мы будем понимать энергию теплового движения (поступательного, вращательного и колебательного) молекул и потенциальную энергию их взаимодействия. Наконец, в случае идеального газа нет сил межмолекулярного взаимодействия, и внутренняя энергия равна сумме энергий беспорядочного (теплового) движения всех молекул.

4. Если термодинамическая система находится во внешнем силовом поле, то разбиение ее полной энергии W на сумму членов, соответствующих различным формам энергии, строго говоря, неосуществимо. Однако в некоторых простейших случаях можно считать, что

$$W = W_{\text{к}}^{\text{мех}} + W_{\text{п}}^{\text{внеш}} + U, \qquad (10,2)$$

где $W_{\text{к}}^{\text{мех}}$ — кинетическая энергия механического движения системы как целого или ее макроскопических частей, $W_{\text{п}}^{\text{внеш}}$ — потенциальная энергия, зависящая от положения системы во внешнем силовом поле, U — внутренняя энергия системы.

§ 10.2. Теплота и работа

1. Возможны два различных способа изменения энергии термодинамической системы при ее взаимодействии с внешними телами: путем совершения работы и путем теплообмена. В дальнейшем будем говорить, что в первом случае обмен энергией между системой и внешними телами осуществляется в форме работы, а во втором — в форме теплоты. Соответственно количество энергии, переданной системе внешними телами в форме работы, будем называть **работой**, совершенной над системой, а количество энергии, передан-

ной системе внешними телами в форме теплоты, будем называть **количеством теплоты,** или просто **теплотой,** сообщенной системе.

Первый способ передачи энергии известен из механики. Он осуществляется при силовом взаимодействии системы с внешними телами. Поэтому можно говорить, что работу над системой производят внешние силы. Очевидно, что для совершения работы над макроскопически неподвижной системой необходимо, чтобы перемещались взаимодействующие с ней внешние тела, т. е. чтобы изменялись внешние параметры состояния системы. Если, кроме того, на систему не действуют внешние силовые поля, то обмен энергией между системой и внешней средой может осуществляться путем работы только в процессе изменения объема и формы системы. При этом работу над простой системой (например, газообразной) производят силы давления на нее со стороны внешней среды. Легко видеть, что работа A', совершаемая внешними силами над системой, должна быть численно равна и противоположна по знаку работе A, совершаемой при этом самой системой над внешней средой или, как обычно говорят, «против внешних сил»: $A' = -A$.

2. Теплообмен между телами или частями одного и того же тела обусловлен различием значений их температуры. Например, в батарее водяного отопления передача энергии от горячей воды, протекающей по батарее, к менее нагретым стенкам батареи осуществляется путем конвективного теплообмена. В свою очередь, передача энергии в форме теплоты через стенку батареи от более нагретой внутренней поверхности стенки к менее нагретой наружной поверхности происходит путем теплопроводности. Однако теплообмен может осуществляться не только между соприкасающимися друг с другом телами, т. е. путем теплопроводности и конвективного теплообмена, но также и между удаленными телами без посредства какой-либо промежуточной среды. Этот вид теплообмена называют теплообменом излучением, так как он происходит за счет испускания и поглощения телами электромагнитного излучения. Именно таким способом Земля непрерывно получает огромную энергию от Солнца.

3. Итак, в отличие от энергии системы, являющейся однозначной функцией состояния этой системы, понятия теплоты и работы имеют смысл только в связи с процессом изменения состояния системы. Они являются энергетическими характеристиками этого процесса. В дальнейшем мы убедимся в том, что для перевода системы из одного и того же исходного состояния *1* в одно и то же конечное состояние *2* нужно сообщить системе разные количества теплоты и совершить над системой разную работу в зависимости от вида процесса *1—2*, т. е. в зависимости от того, через какие промежуточные состояния проходит система. Между тем изменение энергии системы не зависит от вида процесса и полностью определяется конечным и начальным состояниями. Таким образом, теплоту и работу нельзя рассматривать как различные виды энергии системы, а следовательно, нельзя говорить ни о «запасе работы», ни о «запасе теплоты» в системе.

4. Два способа обмена энергией между макроскопическими системами — путем совершения работы и путем теплообмена — качественно различны и неравноценны. В самом деле, совершение работы над системой может непосредственно привести к изменению любого вида энергии системы. Например, при абсолютно упругом ударе двух тел изменение кинетической энергии любого из них в точности равно работе сил, действующих на это тело со стороны другого. Если соударяющиеся тела не вполне упруги, то часть работы сил идет на увеличение внутренней энергии этих тел. Наконец, в случае быстрого сжатия газа в цилиндре с подвижным поршнем работа, совершаемая над газом, целиком идет на увеличение внутренней энергии газа.

Энергия, сообщаемая системе в форме теплоты, непосредственно идет на увеличение энергии беспорядочного движения частиц системы (атомов, молекул и т. п.), т. е. на увеличение внутренней энергии системы. Это связано с самим механизмом процессов теплообмена: путем теплопроводности, конвекции и излучения. Во всех этих процессах передача энергии осуществляется за счет обмена энергией непосредственно между хаотически движущимися частицами тел. Рассмотрим, например, теплообмен между двумя соприкасающимися телами. Частицы тела с более высокой температурой обладают в среднем большей кинетической энергией теплового движения, чем частицы тела, имеющего меньшую температуру. Поэтому частицы первого тела, сталкиваясь с частицами второго тела, передают им часть своей кинетической энергии. В результате интенсивность теплового движения частиц первого тела и его внутренняя энергия уменьшаются, а интенсивность теплового движения частиц второго тела и его внутренняя энергия увеличиваются. Соответственно температура первого тела постепенно понижается, а второго — повышается. Когда температуры тел выравниваются, средние значения кинетической энергии теплового движения частиц в обоих телах также становятся одинаковыми. При этом теплообмен между телами прекращается, так как при столкновениях частиц энергия с равной вероятностью передается как от первого тела второму, так и в обратном направлении.

5. В реальных условиях оба способа передачи энергии системе (в форме работы и в форме теплоты) сопутствуют друг другу. Например, при нагревании тела расширяются и совершают работу против сил внешнего давления. В Международной системе единиц (СИ) теплота так же, как и работа, измеряется в джоулях.

Однако в теплотехнике до сих пор принято измерять теплоту и внутреннюю энергию в калориях (кал) или в килокалориях (ккал), причем 1 ккал $=$ $= 10^3$ кал. **Калорией** (международной калорией) называют количество теплоты, которое эквивалентно 4,1868 Дж. Величину $J = 4{,}1868$ Дж/кал называют **механическим эквивалентом теплоты**, а величину $\frac{1}{J} = 0{,}239 \frac{\text{кал}}{\text{Дж}}$ — **тепловым эквивалентом работы.**

6. Термодинамическую систему называют **изолированной в механическом отношении,** если она не может обмениваться с внешней

средой энергией в форме работы. Примером такой системы является газ, заключенный в абсолютно жесткий сосуд постоянного объема.

Термодинамическую систему называют **изолированной в тепловом отношении (адиабатически изолированной)**, если отсутствует теплообмен между ней и внешней средой. Для осуществления адиабатической изоляции системы ее нужно окружить теплонепроницаемой оболочкой (например, поместить в сосуд Дьюара). Систему можно также считать адиабатически изолированной, если изменение ее состояния в рассматриваемом процессе происходит столь быстро, что за время протекания всего процесса теплообмен практически не успевает совершаться.

Наконец, термодинамическую систему называют **замкнутой**, или **изолированной**, если отсутствует всякий обмен энергией между ней и внешней средой. Для таких систем справедлив **закон сохранения энергии**: *полная энергия замкнутой системы остается неизменной при любых процессах, происходящих в этой системе.*

7. В заключение следует сказать, что помимо работы и теплообмена существует еще один способ изменения энергии системы — путем м а с с о о б м е н а с внешней средой, т. е. путем изменения количества вещества, содержащегося в системе. Систему называют **закрытой**, если она изолирована таким образом, что между ней и внешней средой не может происходить обмен веществом. В противном случае систему называют **открытой**. Таким образом, термодинамическую систему можно считать замкнутой, если она не только изолирована в механическом и тепловом отношениях, но также является еще и закрытой. В дальнейшем мы будем рассматривать только закрытые системы, химический состав и масса которых сохраняются неизменными во всех термодинамических процессах.

§ 10.3. Первый закон термодинамики

1. Из закона сохранения энергии следует, что при переходе термодинамической системы из какого-либо начального состояния *1* в другое состояние *2* изменение внутренней энергии системы[1] $\Delta U_{1-2} = U_2 - U_1$ должно быть равно сумме работы A'_{1-2}, совершаемой над системой внешними силами, и количества теплоты Q_{1-2}, сообщаемого системе:

$$\Delta U_{1-2} = A'_{1-2} + Q_{1-2}. \qquad (10.2')$$

Работа A_{1-2}, совершаемая системой против внешних сил в том же процессе перехода из состояния *1* в состояние *2*, численно равна и противоположна по знаку работе внешних сил: $A_{1-2} = -A'_{1-2}$. Поэтому

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + A_{1-2}. \qquad (10.3)$$

Это уравнение является математической записью **первого закона термодинамики**, который можно сформулировать следующим образом:

---

[1] Напомним, что мы рассматриваем только закрытые, макроскопически неподвижные системы, не находящиеся во внешнем гравитационном, электрическом или магнитном поле.

теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы и на совершение системой работы против внешних сил.

2. Выражение (10.3) удобнее записывать для малого изменения состояния системы, вызванного сообщением ей малого количества теплоты δQ и совершением системой элементарной работы δA:

$$\delta Q = dU + \delta A. \tag{10.4}$$

Различие в записи малого приращения внутренней энергии dU и элементарного количества теплоты δQ, а также элементарной работы δA (δ вместо d) имеет глубокий физический смысл. В § 10.1 мы отмечали, что внутренняя энергия системы является одиозначной функцией ее состояния. Следовательно, при совершении системой **любого** процесса, в результате которого она вновь возвращается в исходное состояние, полное изменение ее внутренней энергии равно нулю. Математически это записывается в виде тождества:

$$\oint dU \equiv 0,$$

которое является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выражение dU представляло собой так называемый полный дифференциал. В следующем параграфе мы покажем, что работа и теплота таким свойством не обладают. Поэтому δQ и δA не являются полными дифференциалами.

3. Нужно иметь в виду, что величины δQ и δA, подобно dU, могут быть как положительными, так и отрицательными. В частности, δQ или δA могут равняться нулю. Например для адиабатически изолированной системы $\delta Q = 0$. Если при теплообмене с внешней средой система получает от нее энергию, то $\delta Q > 0$, если же система отдает энергию внешней среде, то $\delta Q < 0$. В первом случае говорят, что теплота подводится к системе, а во втором — отводится от системы. В конечном процессе перехода системы из состояния *1* в состояние *2* теплота на одних участках процесса может подводиться к системе, а на других — отводиться от нее. Поэтому общее количество теплоты Q_{1-2}, сообщаемой системе в процессе *1—2*, равно алгебраической сумме теплот δQ, сообщаемых системе на всех малых участках процесса *1—2*:

$$Q_{1-2} = \int_1^2 \delta Q.$$

Если при малом изменении состояния системы она отдает внешней среде энергию в форме работы, то $\delta A > 0$. Если же система, наоборот, получает энергию от внешней среды в форме работы, то $\delta A < 0$. В этом случае положительную работу над системой производят внешние силы. Работа A_{1-2}, совершаемая системой в конечном процессе *1—2* изменения ее состояния, равна алгебраической сумме работ δA,

совершаемых системой на всех малых участках процесса *1—2*:

$$A_{1-2} = \int_1^2 \delta A.$$

4. Выражение для работы, совершаемой простой системой при изменении ее объема, проще всего получить на примере расширения (или сжатия) газа. Пусть газ заключен в цилиндр с подвижным, невесомым поршнем площадью S (рис. 10.1). Обозначим через $p_{внеш}$ давление, производимое на поршень и газ внешней средой. Тогда сила, с которой внешняя среда действует на поршень, $F_{внеш} = p_{внеш} \cdot S$. При перемещении поршня вверх на малое расстояние dx газ совершает над внешней средой («против внешнего давления») элементарную работу

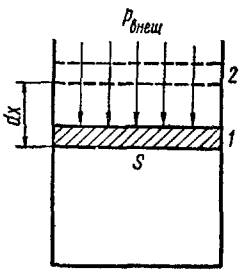

Рис. 10.1.

$$\delta A = F_{внеш} \cdot dx = p_{внеш} \cdot dV, \qquad (10.5)$$

где $dV = S \cdot dx$ — изменение объема газа. Если процесс изменения объема газа — квазистатический, то в каждый момент времени газ находится в состоянии термодинамического равновесия, а его давление $p = p_{внеш}$. Поэтому элементарная работа газа в квазистатическом (равновесном) процессе

$$\delta A = p \cdot dV. \qquad (10.5')$$

Давление газа p всегда положительно. Поэтому при расширении ($dV > 0$) газ совершает положительную работу ($\delta A > 0$). При сжатии газа $dV < 0$ и $\delta A < 0$, т. е. в этом случае положительную работу над газом должны совершать силы внешнего давления. Формула (10.5) справедлива не только для газа или жидкости, но также и для твердого тела при его расширении или сжатии под влиянием внешнего давления, равномерно распределенного по всей поверхности тела.

§ 10.4. Графическое изображение термодинамических процессов и работы

1. Для изучения и сравнения различных термодинамических процессов их удобно изображать графически. Зная уравнение состояния данного термодинамического тела и решив его относительно T, можно любой паре значений p и V сопоставить определенное значение третьего параметра состояния — температуры T. Поэтому для графического описания процесса достаточно указать, как изменяются при этом два параметра, например, давление и объем тела.

В двумерной системе координат, осями которой служат давление и объем, зависимость p от V в процессе изображается некоторой кривой (рис. 10.2). Точки $C_1(p_1, V_1)$ и $C_2(p_2, V_2)$ характеризуют начальное и конечное состояния тела, а кривая изображает рассматриваемый термодинамический процесс.

Помимо наиболее распространенной диаграммы (p — V), употребляются также диаграммы (p — T) и (V — T). Важно отметить, что графически можно изображать только равновесные процессы.

2. Все реальные процессы протекают с конечной скоростью и потому неравновесны. В качестве примера рассмотрим сжатие газа в цилиндре с подвижным поршнем (рис. 10.1). Пока поршень неподвижен, газ находится в равновесии с окружающей средой. Давление, температура и плотность газа во всех частях объема цилиндра одинаковы. Картина изменяется, как только поршень начинает перемещаться под действием внешних сил. Из курса средней школы известно, что изменения давления в газе распространяются со скоростью звука (довольно большой, но все же конечной). Поэтому при движении поршня вниз под ним образуется область повышенного давления. Равенство давлений во всех частях объема газа нарушается и притом тем сильнее, чем быстрее движется поршень. Такое состояние газа является неравновесным, так как не может сколько-нибудь долго сохраняться после остановки поршня. Следовательно, описываемый процесс сжатия газа является неравновесным.

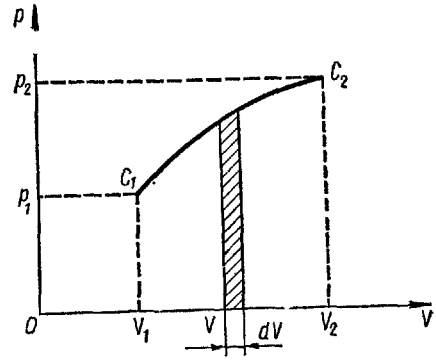

Рис. 10.2.

В случае неравновесных процессов не имеет смысла говорить о давлении и температуре всего тела, так как они будут различны в разных его частях. Поэтому неравновесные процессы нельзя изображать графически.

Однако в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь. Так, например, в рассмотренном выше примере сжатия газа это можно сделать, если скорость движения поршня во много раз меньше скорости звука в газе, а размеры цилиндра невелики.

3. Диаграмма (p — V) позволяет дать графическую интерпретацию элементарной работы $\delta A = pdV$, совершаемой системой в равновесном процессе. Из рис. 10.2 видно, что δA измеряется площадью заштрихованного прямоугольника, которая с точностью до малых второго порядка малости равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной линией процесса C_1C_2. Работа, совершаемая системой за весь процесс C_1C_2,

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} pdV$$

измеряется площадью, ограниченной на рис. 10.2 осью абсцисс, линией C_1C_2 и двумя пунктирными вертикальными прямыми $V = V_1$ и $V = V_2$.

Таким образом, понятно, что работа A_{1-2} зависит не только от начального и конечного состояний системы (C_1 и C_2), но и от того, как осуществляется процесс перехода и, соответственно, какова кривая C_1C_2, изображающая этот процесс в диаграмме (p — V).

Работа системы в процессах, изображенных на рис. 10.3 кривыми $C_1L_2C_2$, $C_1L_1C_2$ и $C_1L_3C_2$ измеряется разными по величине площадями, так что

$$A_{L_2} > A_{L_1} > A_{L_3}$$

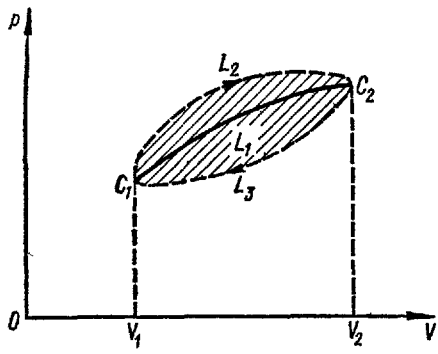

Рис. 10.3.

Если процесс совершался по замкнутой кривой $C_1L_2C_2L_3C_1$ так, что после его завершения система возвратилась в первоначальное состояние, то полная работа системы в этом процессе не равна нулю. В результате сложения положительной работы, совершаемой системой в процессе расширения $C_1L_2C_2$ и отрицательной работы, совершаемой системой в процессе сжатия $C_2L_3C_1$, получается результирующая положительная работа, измеряемая заштрихованной на рис. 10.3 площадью.

4. Из уравнения (10.3) видно, что Q_{1-2} так же, как и работа A_{1-2}, является функцией не только начального и конечного состояний системы, но и вида процесса. Для перевода системы из одного состояния в другое ей нужно сообщить разные количества теплоты в зависимости от вида термодинамического процесса. Это подтверждает сказанное в § 10.2.

§ 10.5. Теплоемкость вещества. Изопроцессы идеального газа

1. Для характеристики тепловых свойств тел в термодинамике широко пользуются понятием теплоемкости. **Теплоемкостью тела** называют отношение количества сообщаемой ему теплоты δQ к соответствующему изменению dT температуры тела. Эксперименты и теоретические расчеты показывают, что теплоемкость тела зависит от его химического состава, массы и термодинамического состояния (например, от температуры), а также, что особенно важно подчеркнуть, — от вида процесса изменения состояния тела при сообщении ему теплоты δQ. В этом мы убедимся дальше на примере идеальных газов.

2. Для однородных тел удобно пользоваться удельной и молярной теплоемкостями. **Удельной теплоемкостью** называют физическую величину c, численно равную количеству теплоты, которое нужно сообщить единице массы вещества для изменения его температуры на 1 К в рассматриваемом термодинамическом процессе. Теплоемкость о д н о р о д н о г о тела равна произведению массы M тела на удельную теплоемкость его вещества:

$$Mc = \frac{\delta Q}{dT} \quad \text{или} \quad c = \frac{1}{M}\frac{\delta Q}{dT}. \tag{10.6}$$

Таким образом, связь между δQ и dT для однородного тела имеет вид

$$\delta Q = McdT. \tag{10.7}$$

Очевидно, что удельная теплоемкость c не должна зависеть от массы M вещества, содержащегося в теле.

Молярной (или **мольной**) **теплоемкостью** называют физическую величину C, численно равную количеству теплоты, которое нужно сообщить одному молю вещества для изменения его температуры на 1 К в рассматриваемом термодинамическом процессе. Очевидно, что

$$C = \mu c = \frac{\mu}{M}\frac{\delta Q}{dT}, \tag{10,6'}$$

где μ — молярная масса вещества, а c — его удельная теплоемкость в том же процессе. Поэтому выражение (10.7) для δQ можно также записать в форме

$$\delta Q = \frac{M}{\mu} CaT. \tag{10.7'}$$

3. Среди многочисленных практических применений термодинамики (расчеты тепловых двигателей, холодильных машин и т. п.), пожалуй, наиболее часто приходится иметь дело с **изопроцессами** в газах. Так называют процессы в газах, при которых один из трех основных параметров состояния (p, V или T) не изменяется, а масса газа $M = \text{const}$. На основании соотношений (10.5′) и (10.7′) уравнение (10.4) первого закона термодинамики для равновесных процессов изменения состояния газа можно записать в виде

$$\frac{M}{\mu} CdT = dU + pdV. \tag{10.8}$$

4. Начнем с рассмотрения процесса, протекающего при неизменном объеме газа ($V = \text{const}$) и называемого **изохорическим (изохорным) процессом**. В диаграмме $p - V$ этот процесс изображается прямой, параллельной оси ординат. На рис. 10.4 показаны процессы изохорического нагревания (*1—2*) и охлаждения (*1—3*).

Изохорический процесс практически осуществляется при нагревании или охлаждении газа в толстостенном сосуде постоянного объема.

В этом процессе $dV = 0$, и газ не совершает работы: $\delta A = pdV = 0$. Поэтому из первого закона термодинамики (10.8) следует, что в изохорическом процессе вся теплота, сообщаемая газу, идет на изменение его внутренней энергии: $\delta U = \delta Q$. Если C_V — молярная теплоемкость газа в изохорическом процессе, или, как обычно говорят, «при постоянном объеме», то

$$dU = \frac{M}{\mu} C_V \, dT. \tag{10.9}$$

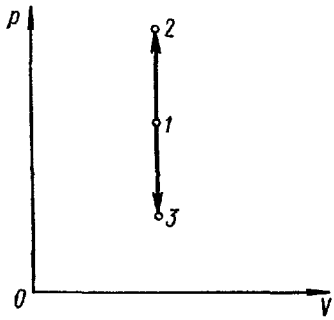

Рис. 10.4.

Опыты показывают, что величина C_V зависит от химического состава газа и его температуры. Однако в не очень широком интервале изменения температуры можно считать, что $C_V \approx \text{const}$ (более подробно этот вопрос мы рассмотрим в § 11.6). Поэтому приращение внутренней энергии газа при изменении его температуры от T_1 до T_2 в изохорическом процессе:

$$\Delta U_{1-2} = U_2 - U_1 = \frac{M}{\mu} C_V (T_2 - T_1). \tag{10.9'}$$

Соответственно, теплота, сообщаемая газу в этом процессе,

$$Q_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_V (T_2 - T_1). \tag{10.9''}$$

Если $T_2 > T_1$, то теплота подводится к газу ($Q_{1-2} > 0$), если $T_2 < T_1$, то теплота отводится от газа ($Q_{1-2} < 0$).

5. Во всех других процессах, кроме изохорического, объем газа изменяется. Если газ не идеальный, то в состав его внутренней энергии входит не только энергия теплового движения молекул, но также потенциальная энергия их взаимодействия, которая зависит от среднего расстояния между молекулами и, следовательно, должна изменяться при сжатии или расширении газа. Поэтому для реальных газов формулы (10.9) и (10.9′) выражают изменение внутренней энергии только в изохорическом процессе, т. е. характеризуют зависимость энергии теплового движения молекул газа от его температуры.

Иначе обстоит дело для идеального газа, так как в нем нет сил межмолекулярного взаимодействия. Внутренняя энергия идеального газа представляет собой только энергию теплового движения молекул и непосредственно не зависит от размера объема, занимаемого данной массой рассматриваемого газа. Она может изменяться при сжатии или расширении газа только вследствие того, что при этом происходит изменение температуры. Таким образом, соотношения (10.9) и (10.9′) должны быть справедливы для любого процесса изменения состояния идеального газа, а внутренняя энергия

идеального газа должна зависеть только от его массы, химического состава и температуры.

Справедливость этого важного положения, которым мы будем широко пользоваться в дальнейшем, была подтверждена опытами Ж. Гей-Люссака и Д. Джоуля. Схема опытов Д. Джоуля приведена на рис. 10.5. В сосуде A находится разреженный газ, близкий по своим свойствам к идеальному. Температура газа равна T_1. Из сосуда B газ выкачан. Оба сосуда и соединяющая их трубка теплоизолированы от внешней среды ($\delta Q = 0$). Если открыть кран C, то газ расширится и займет объем всей установки. Опыты показали, что температура газа при этом не изменяется, оставаясь равной T_1. Не изменяется также и внутренняя энергия газа. В самом деле, газ не совершает работы против внешних сил: $\delta A = 0$. Поскольку, кроме того, и $\delta Q = 0$, то из выражения (10.4) следует, что $dU = 0$ и $U = \text{const}$. Таким образом, внутренняя энергия идеального газа не зависит от его объема. В гл. XIII мы увидим, что для реального газа внутренняя энергия зависит как от температуры, так и от его объема.

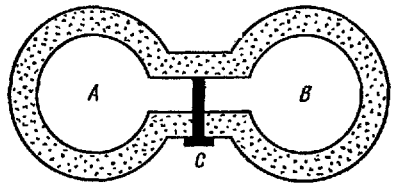

Рис. 10.5.

Таким образом, для любого равновесного процесса изменения состояния идеального газа уравнение (10.8) первого закона термодинамики можно записать в форме

$$\frac{M}{\mu} C dT = \frac{M}{\mu} C_V dT + p dV, \qquad (10.8')$$

где C — молярная теплоемкость идеального газа в рассматриваемом процессе.

6. **Изобарическим (изобарным) процессом** называют термодинамический процесс, протекающий при постоянном давлении в системе ($p = \text{const}$). Такой процесс осуществляется, например, при нагревании или охлаждении газа, находящегося в цилиндре с подвижным поршнем, на который действует постоянное внешнее давление. На рис. 10.6 показаны процессы изобарического расширения газа при его нагревании (процесс *1—2*) и изобарического сжатия газа при его охлаждении (процесс *1—3*).

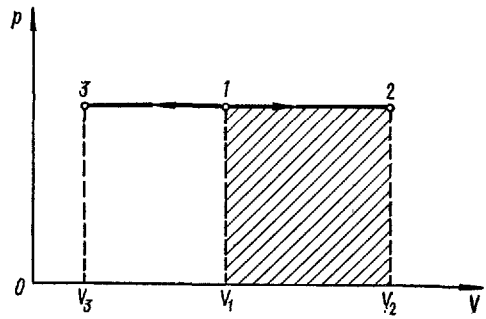

Рис. 10.6.

Элементарное количество теплоты, сообщаемое газу в изобарическом процессе,

$$\delta Q = \frac{M}{\mu} C_p \, dT, \tag{10.10}$$

где C_p — молярная теплоемкость газа в изобарическом процессе, или, как обычно говорят, «при постоянном давлении».

Из уравнения Менделеева—Клапейрона (9.9) следует, что для идеального газа при $p = \text{const}$

$$dV = \frac{M}{\mu} \frac{R}{p} dT.$$

Поэтому элементарная работа, совершаемая идеальным газом в изобарическом процессе,

$$\delta A = pdV = \frac{M}{\mu} RdT \tag{10.11}$$

и

$$R = \frac{\delta A}{\frac{M}{\mu} dT}. \tag{10.11'}$$

Таким образом, универсальная газовая постоянная R численно равна работе, совершаемой одним молем идеального газа при его изобарическом нагревании на один градус.

Для нахождения связи между молярными теплоемкостями C_p и C_V идеального газа подставим выражения (10.10) и (10.11) в уравнение (10.8'):

$$\frac{M}{\mu} C_p \, dT = \frac{M}{\mu} C_V \, dT + \frac{M}{\mu} RdT.$$

Таким образом,

$$C_p = C_V + R. \tag{10.12}$$

Это соотношение называют **уравнением Р. Майера.** Оно показывает, что молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении больше его молярной теплоемкости при постоянном объеме на величину, равную универсальной газовой постоянной. Этот результат легко понять, так как в изобарическом процессе, в отличие от изохорического, теплота, сообщаемая газу, расходуется не только на изменение внутренней энергии газа, но также еще и на совершение им работы.

Работа, совершаемая газом в изобарическом процессе *1—2*,

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p_1 (V_2 - V_1). \tag{10.13}$$

Работа A_{1-2} измеряется площадью, заштрихованной на рис. 10.6. Для идеального газа выражение (10.13) можно также представить в виде

$$A_{1-2} = \frac{M}{\mu} R (T_2 - T_1). \qquad (10.13')$$

Если в интервале температур от T_1 до T_2 молярную теплоемкость C_p можно считать постоянной, то теплота, сообщаемая газу в изобарическом процессе *1—2*,

$$Q_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_p (T_2 - T_1). \qquad (10.13'')$$

4. **Изотермическим процессом** называют термодинамический процесс, протекающий при постоянной температуре (T=const). Процесс расширения или сжатия газа можно считать изотермическим, если он осуществляется сравнительно медленно, а теплоемкость внешней среды столь велика, что теплообмен между газом и внешней средой не вызывает изменения ее температуры. Примерами изотермических процессов являются также процессы кипения, конденсации, плавления и кристаллизации химически чистых веществ, происходящие при постоянном внешнем давлении.

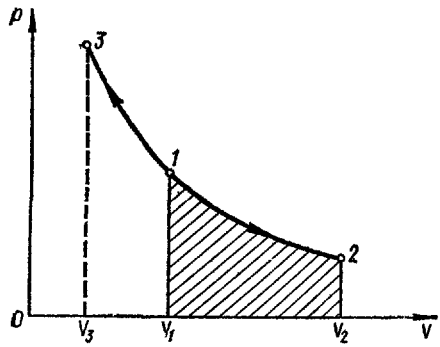

Рис. 10.7.

Для идеального газа в процессе T = const выполняется закон Бойля—Мариотта: pV = const. Поэтому в диаграмме (p — V) линия, изображающая изотермический процесс и называемая **изотермой**, имеет вид равнобочной гиперболы (рис. 10.7). В изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа не изменяется:

$$dU = \frac{M}{\mu} C_V dT = 0.$$

Следовательно, вся теплота, сообщаемая газу, расходуется на совершение газом работы против внешних сил:

$$Q_{1-2} = A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{M}{\mu} RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (10.14)$$

При расширении газа $V_2 > V_1$ и совершаемая им работа $A_{1-2} > 0$. Эта работа измеряется площадью, заштрихованной на рис. 10.7. В процессе изотермического расширения к газу нужно подводить теплоту ($Q_{1-2} > 0$). При сжатии газа (процесс *1—3* на рис. 10.7) работа

A_{1-3}, совершаемая газом, отрицательна, т. е. сжатие осуществляется за счет положительной работы внешних сил $A'_{1-3} = -A_{1-3} > 0$. В процессе изотермического сжатия теплоту нужно отводить от газа ($Q_{1-3} < 0$).

Теплоемкость газа в изотермическом процессе C_T бесконечно велика, так как $\delta Q \neq 0$, а $dT = 0$.

8. Помимо рассмотренных процессов в газах, большой практический интерес представляет **адиабатический (адиабатный) процесс.** Его широко применяют в циклах двигателей внутреннего сгорания, холодильных установках и т. д. Процесс, совершаемый системой, называют адиабатическим, если в нем отсутствует обмен энергией в форме теплоты (теплообмен) между системой и внешней средой. Адиабатический процесс подчиняется условию $\delta Q \equiv 0$. Следует подчеркнуть, что отсутствие теплообмена нельзя формулировать в виде условия $Q = 0$. В самом деле, из равенства $Q = 0$ вовсе не следует, что на отдельных участках рассматриваемого процесса нет теплообмена между системой и окружающей средой. Оно означает лишь, что в целом з а в е с ь процесс алгебраическая сумма количеств теплоты, подведенной к системе и отведенной от нее, равна нулю.

Практически адиабатический процесс осуществляется при достаточно быстром расширении или сжатии газа. Условие адиабатичности будет выполнено, если процесс протекает так быстро, что теплообмен между газом и внешней средой не успевает произойти.

Из первого закона термодинамики (10.4) следует, что в адиабатическом процессе

$$\delta A = -dU,$$

т. е. работа совершается системой за счет убыли ее внутренней энергии. Для и д е а л ь н о г о газа

$$\delta A = -\frac{M}{\mu} C_V dT. \qquad (10.15)$$

При адиабатическом расширении газ охлаждается: $\delta A = pdV > 0$, а $dT < 0$. При адиабатическом сжатии газ нагревается: $\delta A < 0$, а $dT > 0$. Теплоемкость газа в адиабатическом процессе $C_{ад} = 0$, так как $\delta Q = 0$, а $dT \neq 0$.

Найдем связь между параметрами состояния идеального газа (например, p и V) в адиабатическом процессе. Для этого перепишем уравнение (10.15) в форме

$$pdV = -\frac{M}{\mu} C_V dT,$$

а величину $\frac{M}{\mu} dT$ найдем из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$\frac{M}{\mu} RdT = d(pV) = pdV + Vdp.$$

Таким образом,

$$pdV = -\frac{C_V}{R}(pdV + Vdp),$$

или, учитывая, что для идеального газа $C_V + R = C_p$,

$$C_p pdV + C_V Vdp = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на $C_V pV$:

$$\varkappa \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0,$$

где

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_V} \tag{10.16}$$

— безразмерная величина, называемая **показателем адиабаты.** Пренебрегая зависимостью C_V от температуры, можно считать, что для данного газа $\varkappa = \text{const}$. Так как

$$\varkappa \frac{dV}{V} = \varkappa d \ln V = d \ln V^{\varkappa} \text{ и } \frac{dp}{p} = d \ln p,$$

то написанное выше уравнение можно представить в таком виде

$$d\ln V^{\varkappa} + d\ln p = 0 \text{ или } d \ln(pV^{\varkappa}) = 0.$$

Следовательно, в равновесном адиабатическом процессе изменения состояния идеального газа

$$pV^{\varkappa} = \text{const}. \tag{10.17}$$

Это уравнение называют **уравнением Пуассона.** Соотношения между давлением и температурой, а также между объемом и температурой идеального газа в адиабатическом процессе имеют вид

$$p \cdot T^{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}} = \text{const} \text{ и } V \cdot T^{\frac{1}{\varkappa-1}} = \text{const}. \tag{10.18}$$

Эти соотношения легко получить из (10.17), пользуясь уравнением Менделеева—Клапейрона.

Линию, изображающую адиабатический процесс в диаграмме состояния, называют **адиабатой.** На рис. 10.8 сплошной линией показан вид адиабаты в $(p — V)$ диаграмме. Для сравнения на том же рисунке пунктирной линией изображена изотерма, соответствующая температуре газа в начальном состоянии *1*. Так как для любого идеального газа показатель адиабаты $\varkappa > 1$, то в $(p — V)$ диаграмме адиабата всегда идет круче, чем изотерма. Объясняется это тем, что при адиабатическом сжатии увеличение давления обусловлено не только уменьшением объема газа, как при изотермическом сжатии, но также еще и увеличением температуры. При адиабатическом расширении темпе-

ратура газа уменьшается, поэтому давление газа падает быстрее, чем при изотермическом расширении.

Работу, совершаемую газом в адиабатическом процессе *1—2* и измеряемую заштрихованной на рис. 10.8 площадью, найдем, интегрируя выражение (10.15) для δA:

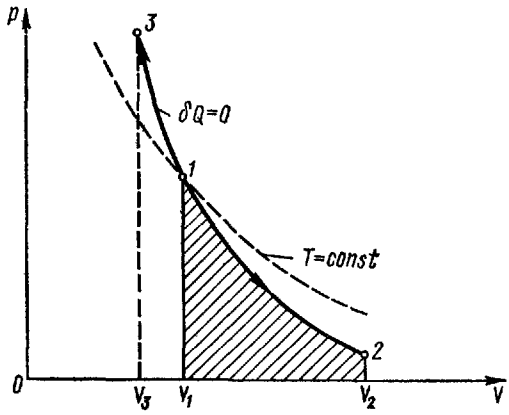

Рис. 10.8.

$$A_{1-2} = \frac{M}{\mu} C_V (T_1 - T_2). \tag{10.19}$$

Из уравнения Майера (10.12) и выражения (10.16) для показателя адиабаты $\varkappa$ следует, что

$$C_V = \frac{R}{\varkappa - 1}. \tag{10.20}$$

Поэтому

$$A_{1-2} = \frac{M}{\mu} \cdot \frac{R}{\varkappa - 1} (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1} \left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right]. \tag{10.19'}$$

В соответствии с соотношениями (10.18)

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Следовательно, выражение (10.19′) для работы A_{1-2} можно также представить в виде

$$A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1}\right], \tag{10.21}$$

или

$$A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]. \tag{10.22}$$

9. Обобщением рассмотренных нами четырех процессов изменения состояния идеального газа является политропический процесс. **Политропическим (политропным) процессом** называют термодинамический процесс в идеальном газе, описываемый уравнением

$$pV^n = \text{const}, \tag{10.23}$$

где n — безразмерная постоянная величина, называемая **показателем политропы.** Различным значениям постоянной n соответствуют всевозможные разновидности политропического процесса. Например,

$n = 0$ соответствует изобарическому процессу ($p = \text{const}$), $n = 1$ — изотермическому процессу ($pV = \text{const}$), $n = \varkappa$ — адиабатическому процессу ($pV^{\varkappa} = \text{const}$), наконец, $n = \pm\infty$ — изохорическому процессу ($V = \text{const}$).

Найдем выражение для молярной теплоемкости C идеального газа в политропическом процессе. Из уравнения (10.8′) первого закона термодинамики

$$C = C_V + \frac{\mu p}{M} \cdot \frac{dV}{dT}. \tag{10.24}$$

Связь между объемом газа и его температурой в политропическом процессе легко найти из (10.23) и уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$V^{n-1} \cdot T = \text{const}.$$

Поэтому

$$(n-1)\, V^{n-2} \cdot T dV + V^{n-1}\, dT = 0$$

и

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{V}{(n-1)\, T}.$$

Подставим это выражение для dV/dT в уравнение (10.24):

$$C = C_V - \frac{pV}{(n-1)\frac{M}{\mu}\, T} = C_V - \frac{R}{n-1}.$$

Наконец, воспользовавшись соотношением (10.20), окончательно получим

$$C = \frac{n-\varkappa}{(\varkappa-1)(n-1)} R. \tag{10.25}$$

В частности, при $n = 0$ (изобарический процесс)

$$C = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1} = \varkappa C_V = C_p;$$

при $n = 1$ (изотермический процесс) $|C| = \infty$,
при $n = \varkappa$ (адиабатический процесс) $C = 0$ и

при $n = \pm\infty$ (изохорический процесс) $C = \frac{R}{\varkappa - 1} = C_V$.

Работа, совершаемая идеальным газом в политропическом процессе *1—2*,

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^n\, dV}{V^n} = \frac{p_1 V_1^n}{n-1}\left[V_1^{1-n} - V_2^{1-n}\right] =$$

$$= \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \tag{10.26}$$

Вопросы для повторения

1. В чем сходство и в чем различие между понятиями «теплота» и «работа»?
2. Чем отличается внутренняя энергия реального газа от внутренней энергии идеального газа?
3. Сформулируйте первое начало термодинамики и примените его к различным изопроцессам в газах.
4. Почему неравновесные процессы нельзя изображать в диаграммах состояния?
5. Какой процесс называют адиабатическим? Выведите уравнение Пуассона.

Примеры решения задач

Задача 10.1. В цилиндре с подвижным поршнем заключен азот ($\mu = 0{,}028$ кг/моль). Азоту дают возможность расширяться вначале адиабатически от объема $V_1 = 1$ л до объема $V_2 = 3$ л, затем изобарически от объема V_2 до объема $V_3 = 5$ л, потом изотермически от объема V_3 до объема $V_4 = 7$ л. Начальная температура газа $T_1 = 290$ К, начальное давление $p_1 = 6{,}58 \cdot 10^5$ Па. Определить совершенную газом в каждом из этих процессов работу, изменение его внутренней энергии и количество подведенной к газу теплоты. Найти конечное давление газа p_4 и температуру T_4. Удельная теплоемкость азота $c_V = 740$ Дж/(кг · К), показатель адиабаты $\varkappa = 1{,}4$.

Дано

$V_1 = 10^{-3}$ м³,
$V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м³,
$V_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ м³,
$V_4 = 7 \cdot 10^{-3}$ м³,
$p_1 = 6{,}58 \cdot 10^5$ Па,
$T_1 = 290$ К,
$c_V = 740$ Дж/(кг · К),
$\varkappa = 1{,}4$.

$A - ?$ $\Delta U - ?$ $Q - ?$
$p_4 - ?$ $T_4 - ?$

Решение

1. Процесс адиабатического расширения.
Работу A_{1-2}, совершаемую газом, найдем по формуле (10.21):

$$A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\varkappa}\right] \qquad (а)$$

Эта работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа в рассматриваемом процессе:

$$\Delta U_{1-2} = -A_{1-2} = -\frac{p_1 V_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\varkappa}\right]. \qquad (б)$$

Теплота в адиабатическом процессе не подводится и не отводится, т. е.

$$Q_{1-2} = 0. \qquad (в)$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$A_{1-2} = \frac{6\ 5^{8}\ \ 10^5 \cdot 10^{-3}}{0{,}4} \cdot \left[1 - 3^{-0{,}4}\right] \text{ Дж} = 584 \text{ Дж},$$

$$\Delta U_{1-2} = -A_{1-2} = -584 \text{ Дж}.$$

2. Процесс изобарического расширения ($p_2 = p_3$). Давление p_2 и температуру T_2 можно выразить через начальные параметры p_1, T_1 и объемы V_1 и V_2,

если воспользоваться формулами (10.17) и (10. 18) для адиабатического процесса:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa},$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1},$$

$$p_2 = 6{,}58 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}4} \text{ Па} = 1{,}42 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$T_2 = 290 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0{,}4} \text{ К} = 187 \text{ К}.$$

Работа A_{2-3}, совершаемая газом в рассматриваемом процессе, равна (см. 10.13)

$$A_{2-3} = p_2 (V_3 - V_2) = 1{,}42 \cdot 10^5 \cdot (5 - 3) \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 284 \text{ Дж}$$

Изменение внутренней энергии газа ΔU_{2-3} в соответствии с уравнением (10.9′) равно

$$\Delta U_{2-3} = Mc_V (T_3 - T_2),$$

где T_2 — температура газа в конце адиабатического расширения, T_3 — температура газа в конце изобарического расширения, а M — масса газа в цилиндре.

Массу M найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона (9.9), записанного для начального состояния газа:

$$p_1 V_1 = \frac{M}{\mu} RT_1,$$

откуда

$$M = \frac{p_1 V_1 \mu}{RT_1};$$

$$\Delta U_{2-3} = \frac{p_1 V_1 \mu c_V}{RT_1} (T_3 - T_2).$$

В изобарическом процессе $\frac{T}{V} = \text{const}$, поэтому

$$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = 187 \cdot \frac{5}{3} \text{ К} = 312 \text{ К},$$

$$\Delta U_{2-3} = \frac{6{,}58 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 740}{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 290} \cdot 125 \text{ Дж} = 707 \text{ Дж}.$$

Количество теплоты Q_{2-3}, подведенной к газу в изобарическом процессе, можно найти по формулам (10.13″) и (10.16):

$$Q_{2-3} = Mc_p (T_3 - T_2) = \varkappa Mc_V (T_3 - T_2) = \varkappa \cdot \Delta U_2,$$

$$Q_{2-3} = 1{,}4 \cdot 707 \text{ Дж} = 991 \text{ Дж}.$$

3. Процесс изотермического расширения. Изменение внутренней энергии ΔU_{3-4} равно нулю:

$$\Delta U_{3-4} = 0.$$

Работа A_{3-4}, совершаемая газом в этом процессе, равна:

$$A_{3-4} = p_3 V_3 \ln \frac{V_4}{V_3} = p_2 V_3 \ln \frac{V_4}{V_2},$$

$$A_{3-4} = 1{,}42 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot \ln \frac{7}{5} \text{ Дж} = 238 \text{ Дж}.$$

Теплота Q_{3-4}, подведенная к газу в этом процессе, может быть найдена по первому закону термодинамики:

$$Q_{3-4} = \Delta U_{3-4} + A_{3-4} = A_{3-4} = 238 \text{ Дж}.$$

Температура $T_4 = T_3 = 312$ К.

Конечное давление p_4 по закону Бойля — Мариотта равно

$$p_4 = p_3 \frac{V_3}{V_4} = p_2 \frac{V_3}{V_4} = 1{,}42 \cdot 10^5 \cdot \frac{5}{7} \text{ Па} = 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Глава XI

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ

§ 11.1. Основное уравнение кинетической теории газов

1. В этой главе мы продолжим изучение свойств идеальных газов и закономерностей происходящих в них процессов. Однако теперь мы будем пользоваться не термодинамическим, а статистическим методом исследования. Для этого прежде всего нужно выбрать определенную модель идеального газа, которая бы удовлетворительно описывала молекулярное строение газа и особенности теплового движения молекул идеального газа.

В § 9.2 мы уже говорили, что идеальный газ можно рассматривать как совокупность хаотически движущихся абсолютно упругих молекул-шариков, имеющих пренебрежимо малый собственный объем и не взаимодействующих друг с другом на расстоянии. Молекулы непрерывно сталкиваются друг с другом и со стенками сосуда, производя на них давление. Таким образом, давление газа на стенки сосуда является одним из непосредственных макроскопических проявлений теплового движения молекул газа.

2. Одна из основных задач кинетической теории газов заключается в расчете давления идеального газа на основе молекулярно-кинетических представлений. Молекулы газа сталкиваются друг с другом в процессе их теплового движения значительно чаще, чем со стенками сосуда, в котором находится газ (см. § 9.2). Однако, как показал Д. К. Максвелл, в случае идеального газа взаимные столкновения молекул не влияют на величину давления газа на стенки сосуда. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать при расчете давления газа, что молекулы вообще не испытывают никаких взаимных столкновений и изменяют скорость своего движения только при соударениях со стенками сосуда. Это допущение позволяет сильно упростить решение задачи и в то же время не отражается на окончательном результате.

Предположим, что газ заключен в сосуд кубической формы с ребром, равным l (рис. 11.1). Направим оси прямоугольной системы координат X, Y, Z вдоль ребер куба. Обозначим через $\mathbf{u}_i$ вектор скорости произвольной молекулы газа, имеющей массу m_i. Вектор $\mathbf{u}_i$ можно разложить на три составляющие вдоль координатных осей (рис. 11.2):

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{ix} + \mathbf{u}_{iy} + \mathbf{u}_{iz}.$$

При абсолютно упругом ударе молекулы о грань куба $ABCD$ составляющие $\mathbf{u}_{iy}$ и $\mathbf{u}_{iz}$ ее скорости не изменяются, а составляющая $\mathbf{u}_{ix}$ меняет свое направление на противоположное и становится равной $-\mathbf{u}_{ix}$. Полное изменение импульса молекулы при ударе равно

$$\Delta(m_i \mathbf{u}_i) = -2m_i \mathbf{u}_{ix}.$$

По второму закону Ньютона $\Delta(m_i \mathbf{u}_i)$ равно импульсу силы $-\mathbf{f}_i$, действующей на молекулу со стороны стенки за время удара δt_i:

$$-\mathbf{f}_i \cdot \delta t_i = -2m_i \mathbf{u}_{ix}.$$

Таким образом, сила, действующая со стороны молекулы на стенку,

$$\mathbf{f}_i = 2\frac{m_i \mathbf{u}_{ix}}{\delta t_i}, \quad \text{или} \quad f_i = 2\frac{m_i |\mathbf{u}_{ix}|}{\delta t_i}.$$

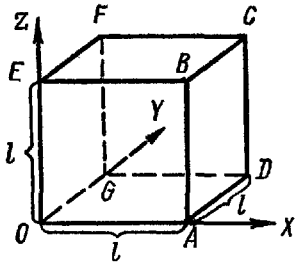

Рис 11.1.

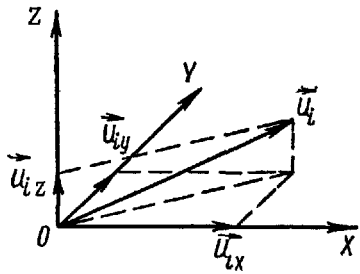

Рис. 11.2

Вектор $\mathbf{u}_{ix}$, а следовательно, и сила $\mathbf{f}_i$, перпендикулярны к стенке $ABCD$.

Продолжительность удара δt_i неизвестна. Поэтому заменим кратковременно действующую ударную силу $\mathbf{f}_i$ «эквивалентной» ей средней силой $\langle \mathbf{f}_i \rangle$ таким образом, чтобы импульс силы $\langle \mathbf{f}_i \rangle$ за время Δt_i между двумя последовательными ударами молекулы m_i о стенку $ABCD$ равнялся импульсу ударной силы $\mathbf{f}_i$:

$$\langle f_i \rangle \Delta t_i = f_i \cdot \delta t_i = 2m_i |\mathbf{u}_{ix}|.$$

Составляющая $\mathbf{u}_{ix}$ скорости молекулы изменяет свое направление только при столкновениях со стенками $ABCD$ и $OEFG$. Поэтому молекула, отразившаяся от стенки $ABCD$, может вновь к ней вернуться только после предварительного отражения от стенки $OEFG$. Следовательно, время Δt_i, равно

$$\Delta t_i = \frac{2l}{|\mathbf{u}_{ix}|}$$

и

$$\langle f_i \rangle = \frac{2m_i |\mathbf{u}_{ix}|}{\Delta t_i} = \frac{m_i \mathbf{u}_{ix}^2}{l}.$$

Средняя сила $\langle F_x \rangle$, действующая на грань куба $ABCD$ со стороны всех n молекул газа, заключенных в сосуде, равна сумме сил $\langle f_i \rangle$:

$$\langle F_x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i u_{ix}^2}{l}.$$

Давление p_x, производимое газом на стенку $ABCD$, равно отношению силы $\langle F_x \rangle$ к площади поверхности стенки:

$$p_x = \frac{\langle F_x \rangle}{l^2} = \frac{1}{l^3} \sum_{i=1}^{n} m_i u_{ix}^2. \tag{11.1}$$

Путем аналогичных рассуждений можно получить следующие выражения для давления газа на стенки $CDGF$ (p_y) и $BCFE$ (p_z):

$$\left.\begin{aligned} p_y &= \frac{1}{l^3} \sum_{i=1}^{n} m_i u_{iy}^2, \\ p_z &= \frac{1}{l^3} \sum_{i=1}^{n} m_i u_{iz}^2. \end{aligned}\right\} \tag{11.1'}$$

Движение молекул газа в сосуде совершенно хаотично, т. е. ни одно из направлений их движения не обладает каким-либо преимуществом перед остальными. Следовательно, давление газа p на все стенки сосуда должно быть одинаковым:

$$p = p_x = p_y = p_z.$$

Из уравнения (11.1) и (11.1') получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i u_{ix}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i u_{iy}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i u_{iz}^2.$$

С другой стороны,

$$m_i (u_{ix}^2 + u_{iy}^2 + u_{iz}^2) = m_i u_i^2$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} m_i u_{ix}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i u_{iy}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i u_{iz}^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i u_i^2.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} m_i u_{ix}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} m_i u_i^2$$

и давление газа на стенки сосуда равно

$$p = \frac{1}{3l^3} \sum_{i=1}^{n} m_i u_i^2 = \frac{2}{3} \frac{W_к}{V},$$

где $V = l^3$ — объем сосуда, а $W_к = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i u_i^2}{2}$ — суммарная кинетичес-

кая энергия поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде. Таким образом, имеем:

$$pV = \frac{2}{3} W_{\text{к}}. \tag{11.2}$$

Выражение (11.2) называют **основным уравнением кинетической теории газов.** Из него следует, что *произведение численных значений давления идеального газа и его объема равно двум третям величины кинетической энергии поступательного движения всех его молекул.*

3. Для однородного газа массы всех молекул одинаковы ($m_i = m$), а скорости u_i различны. Поэтому

$$W_{\text{к}} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{n} u_i^2,$$

и становится целесообразным ввести понятие о средней квадратичной скорости.

Средней квадратичной скоростью $v_{\text{кв}}$ поступательного движения молекул газа называют корень квадратный из среднего арифметического квадратов скоростей поступательного движения всех его молекул:

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i^2} \tag{11.3}$$

Если ввести эту скорость в выражение для $W_{\text{к}}$, то получим

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2} nmv_{\text{кв}}^2$$

Уравнение (11.2) можно записать так:

$$pV = \frac{1}{3} nmv_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{3} Mv_{\text{кв}}^2, \tag{11.4}$$

где $M = nm$ — масса газа.

Из (11.2) и (11.4) следует, что

$$p = \frac{2}{3} W_{\text{к}_0} \tag{11.2'}$$

и

$$p = \frac{1}{3} n_0 mv_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{3} \rho v_{\text{кв}}^2, \tag{11 4'}$$

где $W_{\text{к}_0} = \frac{W_{\text{к}}}{V}$, $n_0 = \frac{n}{V}$ — число молекул газа в единице объема и $\rho = n_0 m$ — плотность газа.

4. Для одного моля газа $M = \mu$ и уравнение (11.4) приобретает следующий вид:

$$pV_{\mu} = \frac{1}{3} \mu v_{\text{кв}}^2.$$

С другой стороны, по уравнению Менделеева—Клапейрона

$$pV_{\mu} = RT.$$

Таким образом,

$$RT = \frac{1}{3}\mu v_{\text{кв}}^2$$

и

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{3BT}. \qquad (11\,5)$$

Поскольку $\mu = mN_A$, где m — масса одной молекулы, а N_A — число Авогадро, то из уравнения (11.5) следует, что

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (11.6)$$

где k — постоянная Больцмана.

5. Найдем выражение для средней кинетической энергии поступательного движения молекулы идеального газа:

$$\langle w_{\text{к}} \rangle = \frac{W_{\text{к}}}{n} = \frac{mv_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2}kT \qquad (11.7)$$

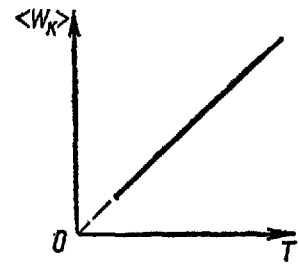

Рис. 11.3.

Следовательно, средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа зависит только от его абсолютной температуры, $\langle w_{\text{к}} \rangle$ прямо пропорциональна T. На рис. 11.3 графически изображена зависимость $\langle w_{\text{к}} \rangle$ от T. При $T = 0$ $\langle w_{\text{к}} \rangle = 0$, т. е. прекращается поступательное движение молекул газа, а следовательно, равно нулю и его давление. Таким образом, *абсолютная температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.* Однако в области температур, близких к абсолютному нулю, этот результат оказывается неверным. Этот вопрос мы подробнее обсудим в § 11.5.

§ 11.2. Закон распределения молекул по скоростям

1. При выводе основного уравнения кинетической теории газов мы считали, что молекулы имеют различные скорости. Опыт подтверждает это предположение. Средняя квадратичная скорость, использованная нами выше, является одной из характеристик движения в с е й с о в о к у п н о с т и молекул. Она, разумеется, не имеет смысла применительно к одной какой-либо молекуле или к небольшому числу молекул.

2. Д. К. Максвелл теоретически решил задачу о распределении молекул идеального газа по скоростям поступательного движения. Он установил закон, позволяющий определить, какое число молекул

dn из общего количества n_0 молекул идеального газа в единице объема обладает при данной температуре скоростями, лежащими в интервале от u до $u + du$. При этом Д. К. Максвелл предполагал, что газ химически однороден и находится в состоянии термодинамического равновесия.

Закон распределения молекул по скоростям имеет следующий вид:

$$dn = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \cdot 4\pi u^2 \, du, \qquad (11.8)$$

где m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Из формулы (11.8) можно определить так называемую **наиболее вероятную скорость молекул** $u_в$, соответствующую максимуму выражения dn/du:

$$\left[\frac{d}{du}\left(e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \cdot u^2\right)\right]_{u=u_в} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_в = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = v_{кв}\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad (11.9)$$

где $v_{кв}$ — средняя квадратичная скорость. Таким образом, наиболее вероятная скорость молекул зависит только от температуры газа и его молярной массы.

Закон максвелловского **распределения молекул по скоростям** может быть записан также в виде

$$dn = \frac{4n_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{u_в^2}} \left(\frac{u}{u_в}\right)^2 \frac{du}{u_в}. \qquad (11.8')$$

На рис. 11.4 приведена кривая закона распределения молекул по

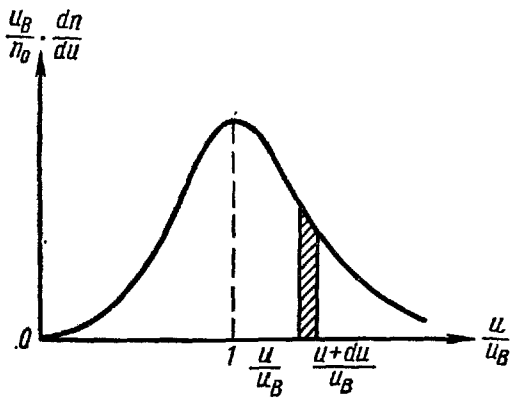

Рис. 11.4.

скоростям. Доля молекул газа $\frac{dn}{n_0}$, скорости которых лежат в интервале от u до $u + du$, численно равна площади dS заштрихованной криволинейной трапеции:

$$dS = \left(\frac{u_в}{n_0} \cdot \frac{dn}{du}\right) \cdot \frac{du}{u_в} = \frac{dn}{n_0}.$$

Вся площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, численно равна доле молекул, скорости которых имеют всевозможные значения от 0 до ∞. Так как этому условию удовлетворяют все n_0

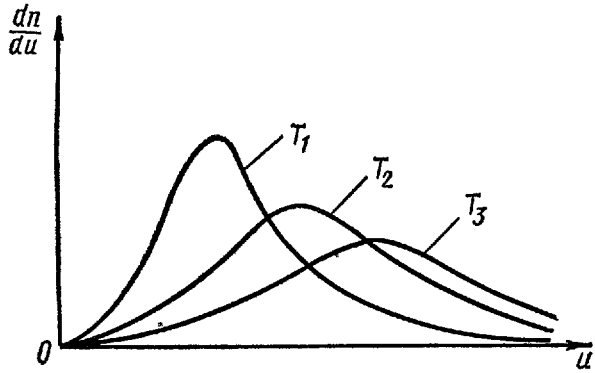

Рис. 11.5.

молекул, то рассматриваемая площадь должна быть принята равной единице.

3. Если по оси абсцисс отложить скорости u, а по оси ординат $\frac{dn}{du}$, то для разных температур $T_1 < T_2 < T_3$ кривые распределения молекул по скоростям будут иметь вид, изображенный на рис. 11.5. С увеличением температуры газа максимум кривой смещается в сторону больших скоростей, а его абсолютная величина уменьшается. Следовательно, при нагревании газа доля молекул, обладающих малыми скоростями, уменьшается, а доля молекул с большими скоростями увеличивается.

4. Закон распределения молекул по скоростям позволяет подсчитать величину **средней арифметической скорости** $\langle u \rangle$ поступательного движения молекул идеального газа. Расчет приводит к следующей формуле:

$$\langle u \rangle = v_{кв} \sqrt{\frac{8}{3\pi}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \qquad (11.10)$$

Таким образом, существуют три скорости, характеризующие состояние газа:
наиболее вероятная

$$u_в = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \approx 1{,}41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = 1{,}41 \sqrt{pv},$$

средняя арифметическая

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 1{,}60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = 1{,}60 \sqrt{pv}, \qquad (11.11)$$

средняя квадратичная

$$v_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 1{,}73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = 1{,}73 \sqrt{pv},$$

где p и v — давление и удельный объем идеального газа.

5. Закон Д. К. Максвелла представляет собой статистический закон, полученный с помощью методов теории вероятностей, а потому тем более точный, чем большее число молекул n_0 рассматривается. Важно подчеркнуть, что закон (11.8) справедлив только для хаотического теплового движения молекул идеального газа. Он может быть обобщен на те случаи, когда газ как целое находится в состоянии упорядоченного макроскопического движения.

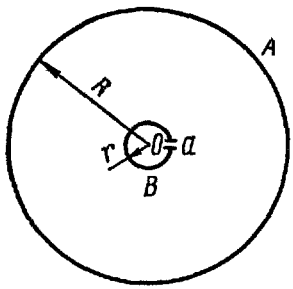

Рис. 11.6.

6. Закон распределения молекул по скоростям проверялся на опыте различными методами. Штерном в 1920 г. проводились опыты, позволившие непосредственно измерить скорости газовых молекул и найти распределение молекул по скоростям. Схема опыта изображена на рис. 11.6. Платиновая проволока O покрывалась тонким слоем серебра, которое испарялось при пропускании электрического тока. Цилиндр B с малым радиусом имел узкую вертикальную щель a. Во внешнем стеклянном цилиндре A, имевшем радиус R, создавался высокий вакуум. Атомы серебра, проходя через щель a узким пучком, давали на цилиндре A четкое изображение щели. Для лучшего осаждения серебра цилиндр A охлаждался. Затем оба цилиндра приводились в быстрое синхронное вращение вокруг оси O. За время движения частиц серебра от щели a до поверхности цилиндра A последний успевал повернуться на некоторый угол φ, и изображение щели должно было сместиться по отношению к его первоначальному положению. Если скорость молекулы серебра u, а угловая скорость вращения цилиндра A равна ω, то угловое смещение внешнего цилиндра за время прохождения молекулой расстояния от щели до поверхности цилиндра равно

$$\varphi = \frac{R - r}{u} \omega$$

и

$$u = (R - r)\frac{\omega}{\varphi}.$$

По этой формуле, измерив на опыте угловое смещение φ, можно определить скорость молекулы u. Опыты показали, что вместо резкого смещенного изображения щели, получалась широкая полоса. Отсюда можно было заключить, что скорости u у разных молекул различны: при вращении цилиндра изображение щели получается размытым. По распределению плотности слоя осажденного серебра можно судить о распределении молекул по скоростям. Результаты этих опытов подтвердили справедливость закона Д. К. Максвелла.

Недостаток метода Штерна и аналогичных ему методов состоит в том, что при этом измеряют скорости молекул не в газе, а в молекулярном пучке, возникшем при прохождении молекул через диафрагму. В таком пучке быстрых молекул заведомо больше, чем в газе, из которого пучок возник, потому что быстрые молекулы чаще проходят через диафрагму, чем медленные. Кроме того, в пучке молекулы движутся в определенном направлении в то время, как закон Д. К. Максвелла справедлив лишь для совершенно беспорядочного движения [1].

§ 11.3. Барометрическая формула. Опыт Перрена

1. При выводе основного уравнения кинетической теории газов в § 11.1 мы предполагали, что на молекулы газа не действуют никакие внешние силы Поэтому можно было считать, что молекулы равномерно распределены по объему сосуда. Фактически молекулы любого газа всегда находятся в поле тяготения Земли. Если бы не было теплового движения молекул атмосферного воздуха, то все они упали бы на Землю. Если бы не было тяготения, то атмосферный воздух рассеялся бы по всей Вселенной. Тяготение и тепловое движение приводят газ в состояние, при котором его концентрация и давление убывают с высотой.

Найдем закон изменения давления газа с высотой. Гидростатическое давление определяют по формуле Паскаля

$$p = \rho g h,$$

где p — давление жидкости на глубине h от ее поверхности, ρ — плотность жидкости, которую вследствие малой сжимаемости жидкостей можно считать постоянной для данной жидкости, g — ускорение силы тяжести.

Газы легко сжимаемы, а плотность газа зависит от давления. Следовательно, формулой Паскаля можно пользоваться только для вычисления давления очень тонких горизонтальных слоев газа, в которых плотность ρ можно считать одинаковой. Если на высоте h от условного горизонтального уровня давление газа равно p, то с увеличением

[1] Как указано выше, закон Д. К Максвелла может быть обобщен на случай, когда вся масса газа как целое движется в некотором направлении. Однако в пучке молекул этого не происходит.

высоты на dh давление газа понизится на dp, причем

$$dp = -\rho g \cdot dh. \tag{11.12}$$

Заменив в этом уравнении плотность ρ по формуле (9.10)

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

получим

$$dp = -\frac{p\mu}{RT} g \cdot dh,$$

или

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\mu}{RT} \cdot dh.$$

Полагая $T = \text{const}$ и интегрируя по высоте от 0 до h, получим:

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{g\mu}{RT} h,$$

или

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{g\mu}{RT}h} \tag{11.13}$$

и

$$h = \frac{RT}{g\mu} \ln \frac{p_0}{p}, \tag{11.13'}$$

где p и p_0 — давления газа на высотах h и $h = 0$.

Формула (11.13') позволяет определять высоту h с помощью барометра. Поэтому ее называют **барометрической формулой.** Такое же название носит часто и формула (11.13). Барометр, специально проградуированный для непосредственного отсчета высоты над уровнем моря, называют альтиметром. Его широко применяют в авиации, при восхождениях на горы и т. п.

2. Из уравнения (11.13) можно получить соотношение между концентрациями газа на различной высоте. Давление газа связано с концентрацией его молекул формулой (9.12):

$$p = n_0 kT,$$

где n_0 — число молекул газа в единице объема, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура При $T = \text{const}$ имеем

$$\frac{p}{p_0} = \frac{n_0}{n_{00}},$$

где n_{00} — концентрация молекул газа при давлении p_0 (на высоте $h = 0$). Поэтому уравнение (11.13) можно записать в форме

$$n_0 = n_{00} e^{-\frac{g\mu}{RT}h}, \tag{11.14}$$

или, заменив $\frac{R}{\mu} = \frac{k}{m}$ (m — масса молекулы газа),

$$n_0 = n_{00} e^{-\frac{gm}{kT}h}. \qquad (11.14')$$

Формулу (11.14′) можно преобразовать, если учесть, что $mgh = w_п$ — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения Земли (при условии, что на уровне $h = 0$ $w_п = 0$). Поэтому

$$n_0 = n_{00} e^{-\frac{w_п}{kT}}$$

или

$$\overline{n} = \frac{n_0}{n_{00}} = e^{-\frac{w_п}{kT}}, \qquad (11.14'')$$

где $\overline{n}$ — относительная концентрация молекул. Л. Больцман показал, что, в отличие от формулы (11.14) или (11.14′), закон распределения (11.14″) является универсальным. Он справедлив для частиц, находящихся в произвольном потенциальном поле внешних сил. Этот закон называют **законом Больцмана.**

Из формулы (11.14″) следует, что $n_0 \to n_{00}$ при $T \to \infty$, т. е. повышение температуры влечет за собой выравнивание концентрации газа по всему предоставленному ему объему. При $T \to 0$ $n_0 \to 0$, т. е. все молекулы под действием силы тяжести будут опускаться на дно сосуда. Наша атмосфера существует лишь вследствие теплового движения частиц воздуха.

3. Заменив в формуле (11.14) $\mu = mN_A$, где N_A — число Авогадро, m — масса одной молекулы, получим

$$n_0 = n_{00} e^{-\frac{gN_A m}{RT}h}.$$

Это выражение закона Больцмана для распределения частиц в зависимости от их потенциальной энергии в поле тяготения Земли можно использовать для экспериментального определения важнейшей константы молекулярной физики — числа Авогадро. Из этой формулы следует, что

$$N_A = \frac{RT}{mgh} \ln \frac{n_{00}}{n_0}. \qquad (11.15)$$

Однако молекулы газов невидимы в микроскоп. Поэтому нельзя произвести непосредственное измерение их концентрации n_0 на различных высотах.

В 1906 г. французский физик Ж. Перрен исследовал распределение по высоте сосуда мельчайших частиц эмульсии смолы гуммигута в воде. Зерна эмульсии имели форму шариков диаметром порядка десятых долей микрона, так что были отчетливо видны в микроскоп. В то же время эти частицы были достаточно малы, чтобы совершать интенсив-

ное броуновское движение [1]. Схема опытов Перрена приведена на рис. 11.7. Эмульсия помещалась в сосуд высотой в несколько десятых долей миллиметра. После того как устанавливалось тепловое равновесие на одну из горизонтальных плоскостей, проходящих в эмульсии, наводился микроскоп с малой глубиной поля зрения. Беспорядочное броуновское движение зерен эмульсии затрудняло их наблюдение и подсчет. Поэтому Перрен производил мгновенные фотоснимки наблюдаемой в микроскоп картины и по ним определял концентрацию зерен. Такие измерения производились последовательно для ряда сечений, отстоящих друг от друга на различных расстояниях. Опыты показали, что при возрастании расстояния h от дна сосуда в арифметической прогрессии концентрация зерен n_0 убывает в геометрической прогрессии, т. е.

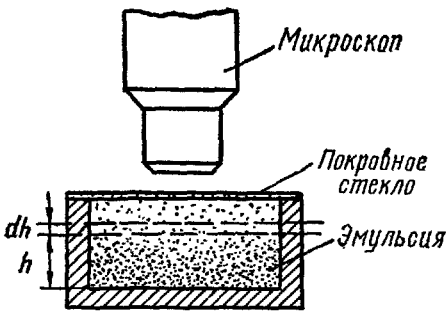

Рис. 11.7.

$$n_0 = n_{00} \cdot e^{-ah},$$

причем коэффициент a обратно пропорционален температуре T. Эта формула совершенно аналогична барометрической формуле (11.14), поэтому броуновские частицы, испытывая многочисленные удары со стороны молекул жидкости, в которой они движутся, ведут себя подобно молекулам весьма тяжелого идеального газа. Перрен предположил, что масса m такой тяжелой молекулы должна равняться кажущейся массе броуновской частицы, т. е. разности между массами частицы и вытесненной ею жидкости. Для сферической частицы радиуса a имеем:

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho - \rho_1),$$

где ρ — плотность гуммигута, ρ_1 — плотность жидкости. Подставляя это значение m в формулу (11.15), Перрен получил следующее выражение для числа Авогадро:

$$N_A = \frac{3RT}{4\pi a^3 (\rho - \rho_1) g h} \ln \frac{n_{00}}{n_0}. \qquad (11.15')$$

В опытах Перрен изменял: температуру и вязкость среды, а также размер зерен эмульсии. Во всех случаях значения числа Авогадро получались близкими к $6{,}8 \cdot 10^{23}$ 1/моль. С помощью других, более точных методов было найдено значение $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ 1/моль.

[1] Объяснение этого явления дано в § 12.5.

§ 11.4. Длина свободного пробега молекул

1. До сих пор мы предполагали, что молекулы газа подобны материальным точкам, т. е. имеют исчезающе малые размеры. Это дало нам возможность не учитывать соударения между хаотически движущимися молекулами. В действительности молекулы имеют конечные размеры и непрерывно соударяются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы движутся прямолинейно и равномерно, проходя при этом некоторые расстояния λ, называемые длинами свободных пробегов. Эти расстояния могут быть самыми разными. Поэтому вводится понятие о **средней длине свободного пробега** $\langle\lambda\rangle$. Чтобы найти $\langle\lambda\rangle$, будем считать, что молекулы газа представляют собой шарики определенного диаметра d (порядка 10^{-8} см), зависящего от химической природы газа. В дальнейшем мы увидим, что такая модель хорошо передает характер того взаимодействия, которое происходит при сильном сближении молекул реальных газов (см. § 13.1).

2. Подсчитаем среднее число соударений, которые испытывает молекула при своем движении в однородном газе за единицу времени. Для упрощения расчетов будем предполагать, что все остальные молекулы, кроме рассматриваемой, неподвижны, а эта одна движется со скоростью, равной средней арифметической скорости $\langle u\rangle$.

При своем движении молекула будет сталкиваться со всеми молекулами газа, центры которых отстоят от траектории движения ее центра на расстояниях, меньших или равных диаметру молекул d. За единицу времени рассматриваемая молекула столкнется со всеми частицами, центры которых лежат внутри цилиндра с высотой $\langle u\rangle$ и радиусом основания d (рис. 11.8). Если n_0 — число молекул в единице объема газа, то среднее число $\langle Z\rangle$ соударений молекулы в единицу времени будет равно:

$$\langle Z\rangle = \pi d^2 n_0 \langle u\rangle \qquad (11.16)$$

3. Предположение о том, что все молекулы, кроме одной, неподвижны, является, конечно, неверным. В действительности все молекулы движутся, и возможность соударения двух частиц зависит от их *относительной* скорости. Поэтому в формулу (11.16) вместо средней арифметической скорости $\langle u\rangle$ должна входить средняя относительная скорость молекул $\langle u_{\text{отн}}\rangle$. Если скорости молекул распределены по закону Д. К. Максвелла, то, как можно показать, средняя относительная скорость двух молекул однородного газа в $\sqrt{2}$ раз превышает $\langle u\rangle$:

$$\langle u_{\text{отн}}\rangle = \sqrt{2}\cdot\langle u\rangle. \qquad (11.17)$$

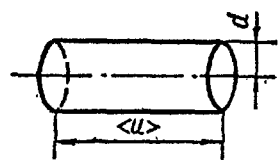

Рис. 11.8.

Таким образом, среднее число соударений должно быть увеличено в $\sqrt{2}$ раз:

$$\langle Z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n_0 \langle u\rangle. \qquad (11.18)$$

Средний путь, проходимый молекулой за единицу времени, численно равен $\langle u \rangle$. Поэтому средняя длина свободного пробега выразится следующим образом:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\langle Z \rangle}.$$

Подставив выражение $\langle Z \rangle$ из (11.18), получим

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}. \qquad (11.19)$$

Из формулы (11.19) следует, что при постоянной температуре, когда число молекул в единице объема пропорционально давлению газа, средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению. Следовательно, для данного газа при $T = \text{const}$ и различных давлений p_1 и p_2 имеем

$$\langle \lambda \rangle_1 \cdot p_1 = \langle \lambda \rangle_2 \cdot p_2 = \text{const}.$$

В табл. 4 приведены значения средней длины свободного пробега молекул воздуха при 0 °С и различных давлениях.

Таблица 4

p, мм. рт. ст.	760	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$\langle \lambda \rangle$, см	$6{,}5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0,5	50	5000

4. Среднюю длину свободного пробега молекулы можно определить экспериментально. Рассмотрим схему опыта, осуществленного М. Борном и Е. Борманом в 1920 г. Серебряный шарик S (рис. 11.9) был помещен в стеклянный баллон, в котором создавался высокий вакуум (см. § 11.9). С помощью электрической печи шарик нагревался до высокой температуры и испускал во все стороны атомы серебра. Часть из них проходила через диафрагму DD_1, образуя расходящийся пучок. На расстоянии l_1 от диафрагмы была помещена приемная стеклянная пластинка P, на которой происходила конденсация атомов серебра. Если бы не было соударений между атомами серебра и молекулами воздуха (при полном вакууме в баллоне), все атомы пучка достигали бы пластинки P и оседали на ней[1]. В действительности часть молекул

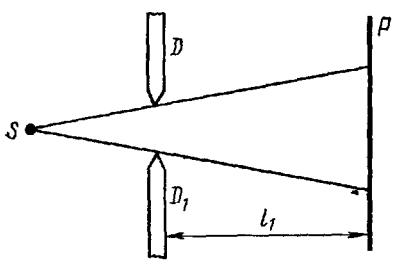

Рис. 11.9.

[1] Мы пренебрегаем соударениями между атомами серебра в пучке.

воздуха оставалась в баллоне. Поэтому происходило рассеяние атомов серебра на молекулах воздуха. Пусть из общего числа N атомов, дошедших до слоя воздуха толщиной dx, некоторое число dN атомов испытывает в этом слое соударения с молекулами воздуха и выбывает из состава атомов пучка. Тогда относительная убыль атомов в пучке $-\frac{dN}{N}$ связана со средней длиной $\langle\lambda\rangle$ свободного пробега атомов серебра в воздухе соотношением

$$-\frac{dN}{N}=\frac{dx}{\langle\lambda\rangle}.$$

Проинтегрировав левую и правую части этого уравнения, получим

$$N=N_0\cdot e^{-\frac{x}{\langle\lambda\rangle}}, \qquad (11.20)$$

где N_0 — число атомов в пучке при $x=0$, т. е. на выходе из диафрагмы. Величина N/N_0 равна вероятности того, что частицы пучка проходят без соударений расстояние x. Поэтому выражение (11.20) называют **законом распределения свободных пробегов.**

Таким образом, число атомов серебра, осевших на пластинке P,

$$N_1=N_0\cdot e^{-l_1/\langle\lambda\rangle}. \qquad (11.20')$$

При втором опыте, проведенном при том же давлении воздуха в баллоне и той же температуре нагрева шарика S, на приемной пластинке P, расположенной на расстоянии l_2 от диафрагмы, оседало число атомов серебра

$$N_2=N_0e^{-l_2/\langle\lambda\rangle}. \qquad (11.20'')$$

Разделив (11.20′) на (11.20″) и прологарифмировав полученное выражение, найдем

$$\langle\lambda\rangle=\frac{l_2-l_1}{\ln\frac{N_1}{N_2}}.$$

Практически в опыте измеряли толщины D_1 и D_2 слоев серебра, отложившегося на пластинках P_1 и P_2 за один и тот же промежуток времени, так как $\frac{N_1}{N_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

5. При выводе формулы (11.19) мы считали, что соударяющиеся молекулы подобны твердым шарикам диаметра d. В действительности

каждая молекула представляет систему ядер и электронов. Ясно, что такие молекулы соударяются не как твердые шары. Вместе с тем, представление о том, что при соударениях каждая молекула имеет некоторый «эффективный» диаметр d и «эффективное» поперечное сечение πd^2, оказывается правильным. Эффективное поперечное сечение молекул зависит от характера сил. взаимодействия между ними При увеличении скоростей движения молекул, т. е. при повышении температуры газа, эффективное поперечное сечение молекул уменьшается. Мы еще вернемся к этому вопросу дальше в § 13.1.

В заключение заметим, что величину $\langle\lambda\rangle$ можно определить экспериментально на основе изучения явлений переноса в газах (см. § 11.8).

§ 11.5. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы

1. Прежде чем перейти к дальнейшему изучению свойств газов, остановимся на некоторых общих вопросах, связанных с применением статистического метода в молекулярной физике. Особое место здесь занимает закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Числом степеней свободы тела называют наименьшее число координат (число независимых координат), которые необходимо задать для того, чтобы полностью определить положение тела в пространстве. Так, например, материальная точка, свободно движущаяся в пространстве, обладает тремя степенями свободы (координаты x; y; z). Абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы: для определения его положения в пространстве нужно задать три координаты центра масс тела, две координаты, определяющие положение в пространстве определенной оси, проходящей через центр масс и какую-либо другую фиксированную точку тела, и, наконец, нужно еще задать угол поворота тела вокруг этой оси по отношению к некоторому начальному положению. Следовательно, абсолютно твердое тело обладает тремя степенями свободы поступательного движения и тремя степенями свободы вращательного движения.

Если тело не абсолютно твердое и его части могут смещаться друг относительно друга, то необходимо вводить еще дополнительные степени свободы колебательного движения.

2. Молекулы одноатомного газа можно рассматривать как материальные точки на том основании, что масса такой частицы (атома) сосредоточена в ядре, размеры которого очень малы. Молекула одноатомного газа имеет три степени свободы поступательного движения. Ее средняя кинетическая энергия $\langle w_к\rangle$ равна кинетической энергии молекулы, движущейся со скоростью, равной средней квадратичной скорости $v_{кв}$:

$$\langle w_к\rangle = \frac{mv_{кв}^2}{2}. \qquad (11.21)$$

Заменив $v_{кв}$ по формуле (11.3), получим

$$\langle w_к \rangle = \frac{m}{2n} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 .$$

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы, например, на движение вдоль оси Ox, равна

$$\langle w_{к_0} \rangle = \frac{m}{2n} \sum_{i=1}^{n} u_{ix}^2,$$

так как движение вдоль этой оси осуществляется только за счет составляющей u_{ix}, вектора $\mathbf{u}_i$ скорости i-й молекулы газа. В § 11.1 было показано, что в силу хаотичности теплового движения молекул идеального газа

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ix}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} u_i^2 .$$

Поэтому

$$\langle w_{к_0} \rangle = \frac{1}{3} \langle w_к \rangle. \qquad (11.22)$$

Таким образом, в среднем на каждую степень свободы поступательного движения одноатомной молекулы приходится одинаковая кинетическая энергия $\langle w_{к_0} \rangle$, равная одной трети $\langle w_к \rangle$. Учитывая, что по формуле (11.7)

$$\langle w_к \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

получим

$$\langle w_{к_0} \rangle = \frac{1}{2} kT. \qquad (11.23)$$

3. Молекулы, состоящие из двух, трех и большего числа атомов, не могут быть уподоблены материальным точкам. Молекула двухатомного газа в первом приближении представляет собой два жестко связанных атома, находящихся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 11.10). Такая молекула, напоминающая гимнастическую гантель с невесомой ручкой, помимо трех степеней свободы поступательного движения, имеет еще две степени свободы вращательного движения вокруг осей $O_1 - O_1$ и $O_2 - O_2$. Вращение вокруг третьей оси $O - O$ рассматривать не нужно, так как момент инерции атомов относительно этой оси

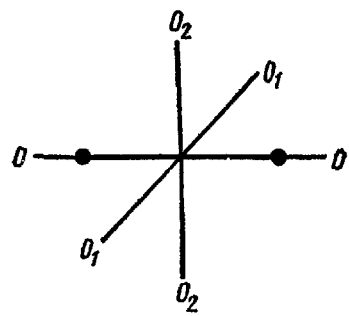

Рис. 11.10

ничтожно мал, а следовательно, ничтожно мала и кинетическая энергия молекулы, связанная с этим вращением. Молекулы, состоящие из трех и более атомов (рис. 11.11), имеют, подобно абсолютно твердому телу, три степени свободы поступательного движения и три степени свободы вращательного движения.

Возникает вопрос о том, какой вклад в среднюю кинетическую энергию молекулы вносят дополнительные степени свободы вращательного движения? Ответ на этот вопрос дает один из важнейших законов статистической физики — **закон равномерного распределения энергии по степеням свободы**[1]:

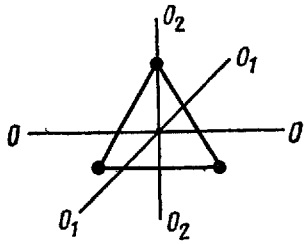

Рис. 11.11.

на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $kT/2$.

Иными словами, в среднем, кинетическая энергия, приходящаяся на л ю б у ю степень свободы сложной молекулы, равна энергии, которая приходится на одну степень свободы молекулы одноатомного газа, находящегося при той же температуре, что и вещество со сложными молекулами.

Если молекула имеет i степеней свободы, то ее средняя кинетическая энергия

$$\langle w_к \rangle = \frac{i}{2} kT. \qquad (11.24)$$

4. Модель молекулы в виде системы жестко связанных между собой атомов — материальных точек, является, конечно, весьма приближенной. Во многих случаях необходимо принимать во внимание возможность относительных смещений атомов в молекуле, т. е. вводить в рассмотрение колебательные степени свободы молекулы. Например, нежесткая двухатомная молекула (см. рис. 11.10) имеет одну колебательную степень свободы, а нежесткая трехатомная молекула (см. рис. 11.11) — три колебательные степени свободы. При колебательном движении молекула имеет как кинетическую, так и потенциальную энергию. Если колебания гармонические, то, как показано в § 8.2, потенциальная и кинетическая энергии должны быть в среднем равны друг другу.

Таким образом, в соответствии с законом равномерного распределения энергии среднее значение полной энергии, приходящейся на одну колебательную степень свободы молекулы, должно быть равно

$$\langle w_0 \rangle = \langle w_{п_0} \rangle + \langle w_{к_0} \rangle = 2 \langle w_{к_0} \rangle = kT. \qquad (11.25)$$

Оно вдвое больше среднего значения энергии, приходящейся на одну степень свободы поступательного или вращательного движения молекулы. Соотношение (11.25) должно также выполняться при гар-

[1] Вывод этого закона выходит за рамки нашего курса.

монических колебаниях частиц (атомов, молекул или ионов) в твердых телах. Этот случай будет подробно рассмотрен в XV гл.

5. Внутренняя энергия идеального газа представляет собой кинетическую энергию его молекул. Для одного моля

$$U = \langle w_к \rangle N_A = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{iRT}{2}, \qquad (11.26)$$

где N_A — число Авогадро.

Из формулы (11.26) видно, что внутренняя энергия идеального газа зависит от числа степеней свободы молекул и абсолютной температуры газа. При этом существенно, что U зависит от T линейно.

В случае реального газа внутренняя энергия включает в себя еще потенциальную энергию молекул, обусловленную существованием сил межмолекулярного взаимодействия. Потенциальная энергия зависит от взаимного расстояния между молекулами, т. е. от удельного объема газа. Эту энергию можно найти, если известен характер взаимодействия между молекулами (§ 13.1). Важно отметить, что в случае реального газа закон равномерного распределения энергии по степеням свободы не позволяет найти его внутреннюю энергию.

6. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы приводит к выводу о том, что все степени свободы молекулы равноправны и вносят одинаковый вклад в ее среднюю энергию. Вывод о полной равноправности всех степеней свободы связан с некоторыми общими положениями классической физики, которые в действительности имеют ограниченную область применимости.

Закон распределения Д. К. Максвелла, закон равномерного распределения энергии по степеням свободы и другие важнейшие результаты молекулярно-кинетической теории получаются из некоторых общих положений, которые, не претендуя на полноту и строгость изложения, можно сформулировать следующим образом:

а) в системе выполняются законы сохранения числа частиц, энергии, импульса (количества движения) и момента импульса (для систем заряженных частиц выполняется также закон сохранения заряда);

б) все физические процессы в системе протекают в пространстве и времени непрерывно. Например, в результате внешнего воздействия любая из молекул может получить любую скорость, а ее энергия (всех видов) может изменяться непрерывно. Возможность непрерывного изменения энергии, момента импульса и других физических величин, характеризующих состояние системы, вытекает из самой природы пространственно-временного описания явлений в классической механике и классической статистической физике;

в) вывод основных статистических закономерностей основывается, кроме того, на возможности отличать друг от друга молекулы одного и того же вещества. Другими словами, в классической статистической физике все молекулы считаются «мечеными»;

г) каждая молекула может иметь произвольные значения координат и скорости совершенно независимо от значений координат и скоростей других молекул. Это означает, что любая молекула может

иметь координаты, заключенные в пределах от x до $x + dx$, от y до $y + dy$ и от z до $z + dz$, т. е. «находиться» в объеме $dx \cdot dy \cdot dz$ и иметь компоненты скорости, заключенные в пределах от u_x до $u_x + du_x$, от u_y до $u_y + du_y$, от u_z до $u_z + du_z$ — «находиться» в объеме $du_x \cdot du_y \cdot du_z$, независимо от присутствия в этих объемах произвольного числа других молекул, причем минимальная величина этих объемов ничем не ограничена.

7. Значение первых двух из перечисленных положений выходит за рамки классической статистической физики. Они являются основой всей классической физики. Два последних положения носят более узкий характер и специфичны для классической статистической физики.

Данные опытов показали, что за исключением законов сохранения все другие основные положения в ряде случаев должны быть пересмотрены. Это сделано в так называемой квантовой статистике. В каком направлении пересмотрено в квантовой теории положение о непрерывном изменении энергии, будет подробно изложено в следующем параграфе, посвященном теории теплоемкости газов.

8. **Квантовая статистика** исходит из невозможности отличить друг от друга две тождественные микрочастицы (молекулы, электроны и т. п.). Поэтому в квантовой статистике при решении задачи о распределении частиц по координатам и скоростям не различают, какие именно частицы «находятся» в данном элементе объема. Речь идет только о числе частиц, находящихся в данном состоянии, т. е. имеющих определенные координаты и скорости.

В квантовой статистике учитывают особые свойства микрочастиц, отличающие их от макроскопических тел. Эти свойства приводят к тому, что элементарный объем $dx \cdot dy \cdot dz \cdot du_x \cdot du_y \cdot du_z$ не может быть меньше, чем $\left(\frac{h}{m}\right)^3$, где h — универсальная постоянная Планка, равная $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с, а m — масса частицы. В «клеточках» объема такой величины «размещаются» исследуемые частицы. В одних случаях в каждой клетке может «поместиться» любое число частиц (квантовая статистика Бозе — Эйнштейна). В других случаях, когда частицы подчиняются принципу запрета В. Паули, в одной клетке могут «поместиться» только две частицы с противоположно направленными спинами (квантовая статистика Ферми — Дирака) [1].

9. Подробное изложение особенностей квантовых статистик выходит за рамки нашего курса. Можно показать, что между квантовыми и классической статистиками имеется связь. В тех случаях, когда особые квантовые свойства систем частиц оказываются малосущественными, выводы квантовых статистик не отличаются от выводов классической статистики Максвелла — Больцмана. Это бывает при высоких температурах и малых плотностях рассматриваемых систем частиц.

---

[1] Первое представление о спине электрона и принципе запрета В. Паули дается в курсе общей химии. Более подробное изложение этих вопросов см в III томе курса

Квантовая теория показывает, что закон равномерного распределения энергии по степеням свободы в действительности является частным случаем более общего закона, устанавливающего, что средняя энергия частицы на одну степень свободы является сложной нелинейной функцией температуры. Кроме того, квантовая теория устанавливает неравноправность различных степеней свободы в разных условиях. При достаточно высоких температурах этот квантовый закон переходит в классический закон равномерного распределения энергии по степеням свободы.

10. При низких температурах даже разреженные газы не подчиняются закону распределения Максвелла, а следуют, в зависимости от строения атомных ядер, либо распределению Бозе (для многих разреженных газов), либо распределению Ферми (для некоторых разреженных газов и для так называемого электронного газа в металлах). Такие состояния газов называют вырожденными. В этих состояниях нарушается прямая пропорциональность между средней кинетической энергией, приходящейся на одну степень свободы поступательного движения молекулы, и абсолютной температурой. Средняя энергия является сложной функцией температуры. Это означает, что при низких температурах молекулярно-кинетическая трактовка абсолютной температуры, как меры средней кинетической энергии поступательного движения молекул, является неверной. К сожалению, затруднительно дать какое-либо новое «наглядное» представление об абсолютной температуре, справедливое во всей области ее возможных изменений.

§ 11.6. Теория теплоемкостей газов

1. Одним из главных успехов статистического метода в изучении тепловых свойств веществ явилась возможность теоретического вычисления теплоемкости газов, а также и твердых тел (см. § 15.4). Вместе с тем, в проблеме теплоемкостей в полной мере обнаружились недостатки и затруднения классического статистического метода, потребовавшие пересмотра некоторых основных его положений (§ 11.5).

2. Молярные теплоемкости C_V и C_p для идеального газа легко найти из уравнения (11.26), если учесть, что

$$C_V = \frac{dU}{dT} \text{ и } C_p = C_V + R.$$

Таким образом, для идеального газа имеем:

$$\left.\begin{aligned} C_V &= \frac{iR}{2}, \\ C_p &= \frac{(i+2)R}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.27)$$

Как известно (см. § 9.2),

$R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) $= 2$ кал/(моль · К).

Поэтому

$C_V = 4{,}16\, i$ Дж/(моль · К) $= i$ кал/(моль · К),

$C_p = 4{,}16\ (i + 2)$ Дж/(моль · К) $= (i + 2)$ кал/(моль · К). (11.28)

Показатель адиабаты $\varkappa$ для идеального газа

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \tag{11.29}$$

В частности, для одноатомного газа

$$\varkappa = \frac{5}{3} = 1{,}67,$$

для двухатомного газа

$$\varkappa = \frac{7}{5} = 1{,}40,$$

для многоатомного газа

$$\varkappa = \frac{8}{6} = 1{,}33.$$

Полученные нами результаты хорошо согласуются с измеренными при нормальных условиях значениями теплоемкостей ряда газов, что видно из табл. 5.

Таблица 5

Газ	Температура °С	C_V кал/(моль К)	C_p, кал/(моль К)	$\varkappa$	i
Гелий	15	3,00	5,00	1,67	3
Неон	15	2,99	5,00	1,67	3
Водород	0	4,85	6,83	1,41	5
Азот	0	4,97	6,95	1,40	5
Кислород	0	5,01	6,99	1,395	5
Окись углерода	0	4,97	6,96	1,40	5
Двуокись углерода	0	6,58	8,56	1,305	6
Пары воды	0	6,02	8,00	1,33	6
Метан	0	6,31	8,30	1,315	6
Пары бензола (C_6H_6)	0	15,61	17,60	1,13	6
Пары этилового спирта (C_2H_5OH)	0	14,75	16,74	1,135	6

Однако из этой же таблицы сразу видно, что для сложных молекул типа C_6H_6 и C_2H_5OH расхождение между теорией и опытом очень велико

3 Изложенная классическая теория теплоемкостей газов приводит к серьезному расхождению с данными опытов. В самом деле, она приводит к выводу о зависимости теплоемкости только от числа сте-

пеней свободы молекул, т. е. о независимости теплоемкостей от температуры. Между тем данные экспериментов показывают, что для всех веществ, в том числе и для газов, теплоемкость растет с ростом температуры. При достаточно низких температурах теплоемкость быстро убывает с понижением температуры и стремится к нулю при $T \to 0$.

Далее, эта теория плохо согласуется с экспериментальными значениями теплоемкостей многоатомных газов при средних и высоких температурах (дает заниженные значения теплоемкости). Введение колебательных степеней свободы в рамках классического закона о равномерном распределении энергии по степеням свободы не устраняет расхождения между теорией и экспериментом.

Причина этих трудностей заключается в том, что закон о равномерном распределении энергии между всеми степенями свободы молекул не является, строго говоря, верным и лишь приближенно справедлив для простейших газов, находящихся при не слишком низких температурах.

4. Правильное качественное и количественное объяснение результатов опытов по измерению теплоемкости, проведенных в широком интервале температур, было получено на основе **квантовой теории теплоемкостей**, развитой А. Эйнштейном в 1905 г. По классическим воззрениям, энергия, приходящаяся на одну степень свободы, может изменяться в результате внешнего воздействия (например, нагревания) непрерывно, т. е. на любую величину. По квантовой теории таким свойством обладает только энергия поступательного движения молекул, а энергия других видов движения — вращения и колебаний — может изменяться лишь дискретно, т. е скачками («ступеньками») на конечную величину ε, называемую **квантом энергии.** Таким образом, энергия вращательного и колебательного движения молекул может принимать лишь некоторые дискретные значения, соответствующие так называемым вращательным и колебательным **уровням энергии.** Разность энергий для каждой пары соседних колебательных уровней двухатомной молекулы одинакова и равна $\varepsilon_{\text{колеб}} = h\nu$, где $h = 6{,}62 \times \times 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, а ν можно наглядно истолковать как частоту колебаний атомов в молекуле. Вращательные кванты энергии $\varepsilon_{\text{вращ}}$ также можно представить в виде $\varepsilon_{\text{вращ}} = h\nu_{\text{вращ}}$. Однако расстояния $\varepsilon_{\text{вращ}}$ между соседними уровнями энергии вращения молекулы для каждой пары уровней различны, а частота $\nu_{\text{вращ}}$ не имеет наглядного (классического) истолкования и представляет собой частоту перехода между вращательными энергетическими уровнями молекулы. Оказывается, что для одного и того же газа $\varepsilon_{\text{колеб}} \gg \varepsilon_{\text{вращ}}$. Поэтому молекулы значительно легче перевести с более низких на более высокие уровни энергии вращения, нежели перевести их на более высокие уровни энергии колебательного движения.

5. Изменение энергии молекул газа может происходить либо вследствие их столкновений с колеблющимися молекулами стенок сосуда, либо в результате соударений молекул друг с другом. При каждом таком столкновении энергия молекулы не может измениться на ве-

личину, большую энергии той молекулы, с которой она столкнулась. Эта энергия, как было показано выше, в среднем имеет величину порядка kT.

Для двухатомных и некоторых более сложных газов (пары воды, метан и др.) уровни энергии вращения настолько близко расположены друг от друга, что высота «ступеньки» $\varepsilon_{\text{вращ}}$ при обычных температурах намного меньше средней кинетической энергии их молекул ($\varepsilon_{\text{вращ}} \ll kT$). Поэтому можно пренебречь прерывным характером изменения энергии вращательного движения таких молекул и пользоваться классическими методами, считая, что на одну вращательную степень свободы молекулы приходится средняя энергия, равная $kT/2$.

При понижении температуры средняя энергия молекулы становится соизмеримой с $\varepsilon_{\text{вращ}}$ и дальнейшее использование классических методов делается невозможным. По мере понижения температуры газа уменьшается энергия его молекул. Следовательно, уменьшается и вероятность таких соударений молекул, при которых одна из них получает энергию $\varepsilon_{\text{вращ}}$, т. е. переводится на более высокий энергетический уровень вращения. При достаточно низких температурах газа вращение его молекул практически не может быть возбуждено. В этих условиях вращательные степени свободы молекул не вносят никакого вклада в теплоемкость газа. Поэтому теплоемкость всех газов при низких температурах становится такой же, как и для о д н о а т о м н ы х газов, молекулы которых не имеют вращательных степеней свободы.

6. Частота колебаний молекул ν для двухатомных и многоатомных газов весьма велика, а это значит, что энергетические «ступеньки» $h\nu$ также очень велики по сравнению со средней энергией молекул при комнатных и более низких температурах. Поэтому никаких изменений энергии колебательного движения молекул при этих температурах наблюдаться не будет. Следовательно, в расчетах теплоемкостей таких газов, находящихся при обычных и более низких температурах, колебательные степени свободы молекул можно не принимать во внимание. Однако при высоких температурах уже приходится учитывать вклад в теплоемкость колебаний атомов в молекулах. Для некоторых сложных молекул (например, для паров этилового спирта и бензола) это следует делать уже при комнатных и даже более низких температурах.

7. При весьма высоких температурах необходимо учитывать увеличение теплоемкости, обусловленное следующими двумя причинами. Во-первых, появляется возможность того, что электроны внутри атомов, составляющих молекулу газа, будут переходить с более низких энергетических уровней на более высокие [1].

Кванты энергии, поглощающиеся при этих переходах электронов в атомах, в сотни раз превосходят «вибрационные (колебательные)

---

[1] Вывод о том, что электроны в атомах могут иметь лишь вполне определенные значения энергии, составляющне последовательность энергетнческих уровней атома, является одним из фундаментальных в современиой атомной физике. Он будет подробно разбираться в III томе.

кванты» $h\nu$ и соответствуют значениям kT при температурах T порядка десятков тысяч градусов.

Во-вторых, при высоких температурах значительную роль начинает играть процесс диссоциации молекул газа, а также их ионизации, что приводит к увеличению теплоемкости газа.

В заключение отметим, что квантовая теория теплоемкостей газов хорошо согласуется с результатами опытов, проведенных с различными газами и в различных интервалах температур.

§ 11. 7. Явления переноса в газах

1. Беспорядочность теплового движения молекул газа, непрерывные соударения между ними приводят к постоянному перемешиванию частиц и изменению их скоростей и энергий. Если в газе существует пространственная неоднородность плотности, температуры или скорости упорядоченного перемещения отдельных слоев газа, то движение молекул выравнивает эти неоднородности. При этом в газе появляются особые процессы, объединенные общим названием **явлений переноса.** К этим явлениям относятся теплопроводность, внутреннее трение и диффузия.

2. **Теплопроводность** имеет место тогда, когда в газе существует разность температур, вызванная какими-либо внешними причинами. Молекулы газа в разных местах его объема имеют разные средние кинетические энергии. Поэтому при хаотическом тепловом движении молекул происходит *направленный перенос энергии*. Молекулы, попавшие из нагретых частей газа в более холодные, отдают избыток своей энергии окружающим частицам. Наоборот, медленно движущиеся молекулы, попадая из холодных частей в более горячие, увеличивают свою энергию за счет соударений с молекулами, обладающими большими скоростями.

Явление **внутреннего трения (вязкости)** связано с возникновением сил трения между слоями газа или жидкости, перемещающимися параллельно друг другу с различными по величине скоростями. Со стороны слоя, движущегося быстрее, на более медленно движущийся слой действует ускоряющая сила. Наоборот, медленно перемещающийся слой тормозит более быстро движущиеся слои газа. Силы трения, которые при этом возникают, направлены по касательной к поверхности соприкосновения слоев. С точки зрения кинетической теории газов, причиной внутреннего трения является наложение упорядоченного движения слоев газа с различными скоростями $\mathbf{v}$ и хаотического теплового движения молекул, интенсивность которого зависит от температуры. Благодаря тепловому движению молекулы переходят из слоя B (рис. 11.12), движущегося со скоростью $\mathbf{v}_2$, в слой A движущийся со скоростью $\mathbf{v}_1$. При этом молекулы из слоя B «переносят» в слой A импульсы $m\mathbf{v}_2$ своего упорядоченного движения. Если $\mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_2$, то такие молекулы при столкновениях с частицами слоя A ускоряют свое упорядоченное движение, а молекулы слоя A — замедляют. На-

оборот, при переходе молекул из быстрее движущегося слоя A в слой B они переносят бóльшие импульсы mv_1 и соударения между молекулами приводят к ускорению упорядоченного движения молекул слоя B.

Третье явление переноса — **диффузия**, т. е. явление самопроизвольного взаимного проникновения и перемешивания частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел. В химически чистых газах диффузия возникает вследствие неодинаковой плотности в различных частях объема газа. В случае смеси газов причиной диффузии является различие в концентрациях отдельных газов в разных частях объема смеси. Если это явление не осложнено изменением температуры по объему газа, то оно заключается в переносе массы газа из мест с большей концентрацией данного газа в места с меньшей концентрацией.

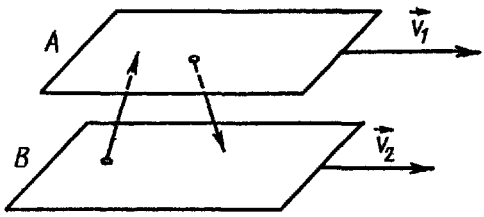

Рис. 11.12.

3. Общим для всех процессов переноса является то, что они возникают в газах в результате нарушения полной хаотичности движения молекул. Эти нарушения вызваны направленным воздействием на газ: в случае диффузии должна быть создана неоднородность плотности, в случае теплопроводности — неоднородность температуры, в случае внутреннего трения — упорядоченность движения молекул газа со скоростями, неодинаковыми в разных его слоях.

Возникновение явлений переноса, связанное с нарушением полной хаотичности в движении молекул, сопровождается нарушением максвелловского распределения молекул по скоростям. Именно отклонениями от закона Д. К. Максвелла объясняется **направленный перенос** массы, импульса или энергии в газах. Это очень затрудняет строгий молекулярно-кинетический анализ явлений переноса. В каждом конкретном случае внешнего воздействия на газ вначале необходимо найти отклонения от максвелловского распределения и лишь затем можно перейти к изучению закономерностей явления переноса, вызываемого этим воздействием.

В нашу задачу не входит изложение строгих методов расчета явлений переноса в газах. Впервые такой расчет провел Д. К. Максвелл, основываясь на детальном рассмотрении динамики молекулярных столкновений. Мы рассмотрим только основные закономерности явлений переноса и их приближенное качественное обоснование. Изучение явлений переноса представляет особый интерес в связи с тем, что эти явления позволяют опытным путем определить такие важнейшие характеристики молекул, как среднюю длину свободного пробега и эффективный диаметр.

§ 11.8. Закономерности и коэффициенты явлений переноса

1. Перенос вещества при диффузии в химически однородном газе описывается **законом А. Фика:**

$$m_{\text{сек}} = -D\frac{d\rho}{dx}. \qquad (11.30)$$

Здесь $m_{\text{сек}}$ — физическая величина, называемая **удельным потоком массы.** Она численно равна массе вещества, которое диффундирует за единицу времени через плоскую поверхность единичной площади, проведенную в газе перпендикулярно к направлению переноса вещества, ρ — плотность газа, а D — **коэффициент диффузии.** Формула (11.30) соответствует простейшему случаю — одномерной диффузии, при которой плотность ρ зависит только от одной координаты x: $\rho = \rho(x)$, так что вещество переносится также только вдоль оси OX. Поэтому производная $d\rho/dx$ численно равна градиенту плотности (см. § 6.2), а коэффициент диффузии численно равен удельному потоку массы при единичном градиенте плотности. В Международной системе единиц (СИ) коэффициент диффузии измеряется в м²/с. Знак минус в формуле (11.30) показывает, что перенос массы при диффузии осуществляется в направлении убывания плотности, т. е. вдоль положительного направления оси OX при $\frac{d\rho}{dx} < 0$ и в обратном направлении при $\frac{d\rho}{dx} > 0$.

Плотность $\rho = m \cdot n_0$, где m — масса одной молекулы, а n_0 — концентрация молекул, равная их числу в единице объема. Поэтому закон Фика (11.30) можно также записать в форме

$$j = -D\frac{dn_0}{dx},$$

где $j = m_{\text{сек}}/m$ — плотность потока молекул при диффузии, т. е. число молекул, диффундирующих за единицу времени через плоскую поверхность единичной площади, проведенную перпендикулярно к направлению переноса вещества.

2. Для явления внутреннего трения справедлив **закон И. Ньютона:**

$$\tau = -\eta\frac{dv}{dn}, \qquad (11.31)$$

где τ — **напряжение трения,** т. е. физическая величина, численно равная силе внутреннего трения, действующей на единицу площади поверхности слоя, dv/dn — изменение скорости движения слоев на единицу длины в направлении внутренней нормали к поверхности слоя. Знак минус в формуле (11.31) показывает, что сила внутреннего трения, действующая на рассматриваемую поверхность слоя, прямо противоположна по направлению производной по n от вектора $\mathbf{v}$ скорости движения газа. Величину η называют **коэффициентом внутреннего**

трения, или **динамическим коэффициентом вязкости**. Коэффициент внутреннего трения численно равен напряжению трения при единичном градиенте скорости, т. е. при $\frac{dv}{dn} = 1$. В Международной системе единиц (СИ) η измеряется в Па·с.

Помимо динамического коэффициента вязкости часто пользуются также **кинематическим коэффициентом** вязкости $\nu = \eta/\rho$, где ρ — плотность. В Международной системе единиц (СИ) ν измеряется в $м^2/с$.

3. Простейший случай теплопроводности — одномерная теплопроводность возникает в газе, температура которого зависит только от одной координаты x: $T = T(x)$. При этом перенос энергии в форме теплоты осуществляется только вдоль оси OX и описывается **законом Ж. Фурье:**

$$q_{сек} = -K \frac{dT}{dx}, \tag{11.32}$$

где $q_{сек}$ — **удельный тепловой поток**, т. е. физическая величина численно равная энергии, передаваемой в форме теплоты за единицу времени через плоскую поверхность единичной площади, которая расположена перпендикулярно к направлению переноса энергии. Величину K называют **коэффициентом теплопроводности**. Знак минус в формуле (11.32) показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры. Коэффициент теплопроводности численно равен удельному тепловому потоку при единичном градиенте температуры, т. е. при $\frac{dT}{dx} = 1$. В Международной системе единиц (СИ) коэффициент теплопроводности измеряется в Дж/(м·с·К).

Законы Фика, Ньютона и Фурье для одномерных процессов диффузии, внутреннего трения и теплопроводности часто записывают в таком виде

$$dM = -D \frac{d\rho}{dx} dSdt, \tag{11.30'}$$

$$dF = -\eta \frac{dv}{dn} dS, \tag{11.31'}$$

$$dQ = -K \frac{dT}{dx} dSdt. \tag{11.32'}$$

В этих формулах dM — масса, переносимая при диффузии за время dt через малую площадку dS, расположенную перпендикулярно к оси OX, вдоль которой осуществляется перенос; dQ — количество теплоты, проходящей при теплопроводности за время dt через площадку dS, расположенную перпендикулярно к оси OX, наконец, dF — сила внутреннего трения, действующая на элемент поверхности слоя площадью

dS. Легко видеть, что формулы (11.30′) — (11.32′) совпадают с соответствующими формулами (11.30) — (11.32), так как

$$m_{\text{сек}} = \frac{dM}{dSdt}, \quad \tau = \frac{dF}{dS} \text{ и } q_{\text{сек}} = \frac{dQ}{dSdt}$$

4. Выражения (11.30) — (11.32) являются макроскопическими и не вскрывают молекулярно-кинетического смысла коэффициентов переноса D, η и K. Задача кинетической теории состоит в установлении связи между этими коэффициентами и микрохарактеристиками теплового движения молекул (средней длиной свободного пробега, средней скоростью молекул, их энергией и т. п.). Мы рассмотрим подробнее эту связь на примере явления диффузии, а для двух других явлений приведем лишь результаты. При этом мы ограничимся качественной стороной дела, поскольку, как уже указывалось, строгое рассмотрение явлений переноса связано со значительными трудностями.

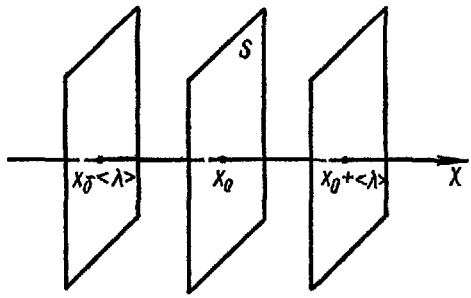

Рис. 11.13.

5. Предположим, что плотность химически однородного газа зависит от координат и различна в разных частях объема газа. Перемешивание молекул в результате их теплового движения приводит к переносу массы газа в направлении убывания плотности, т. е. к выравниванию плотности газа по всему объему. Для того чтобы существовал непрерывный, не зависящий от времени (стационарный) перенос массы газа, необходимо внешнее воздействие. Оно должно поддерживать неизменным распределение плотности по объему газа и нейтрализовать выравнивание плотности вследствие процесса диффузии.

Мы ограничимся простейшим случаем, когда плотность ρ зависит только от одной координаты x [$\rho = \rho(x)$], иначе говоря, плотность газа одинакова во всех точках плоскости, перпендикулярной оси OX. Ввиду хаотичности теплового движения молекул можно считать, что из общего числа n_0 молекул, заключенных в единице объема газа, одна треть движется вдоль оси OX, одна треть — вдоль оси OY и одна треть — вдоль оси OZ. Движение молекул вдоль каждой оси в обоих направлениях равновероятно. Поэтому в положительном направлении оси OX движется одна шестая часть общего числа молекул. В дальнейшем будем предполагать, что все молекулы обладают одной и той же скоростью теплового движения, равной их средней скорости $\langle u \rangle$. Если бы плотность газа ρ была постоянна по всему объему, то через единицу площади плоской поверхности S, перпендикулярной к оси OX в точке $x = x_0$ (рис. 11.13), за единицу времени проходило бы слева направо и справа налево одинаковое число молекул $n_{\text{сек}} =$

$=\frac{1}{6}n_0\langle u\rangle$ (n_0 — число молекул в единице объема). Однако в рассматриваемом нами случае $\rho=\rho(x)$. Поскольку $n_0=\frac{\rho}{m}$, где m — масса молекулы, то и n_0 зависит от x: $n_0=n_0(x)$. Поэтому за единицу времени через поверхность S переносится слева направо и справа налево разное число молекул, т. е. в газе имеет место направленный перенос частиц, а следовательно, и их массы. При отыскании числа n молекул, проходящих за единицу времени через площадку S вдоль положительного направления оси OX, нужно принять иные значения n_0, нежели для молекул, движущихся в противоположном направлении. На пути свободного пробега не изменяются ни величина, ни направление скоростей молекул. Поэтому, в среднем, можно считать, что поверхности S беспрепятственно достигает одна шестая часть всех молекул, отстоящих от нее по обе стороны на расстоянии средней длины свободного пробега $\langle\lambda\rangle$. Иными словами, при подсчете числа n_1 молекул, проходящих за единицу времени через S слева направо, нужно брать значение $n_0(x)$ в точке $x=x_0-\langle\lambda\rangle$, а при подсчете числа n_2 молекул, проходящих за единицу времени через площадку S в обратном направлении, — в точке $x=x_0+\langle\lambda\rangle$. Разность

$$\Delta n=n_1-n_2=\frac{1}{6}\langle u\rangle[n_0(x_0-\langle\lambda\rangle)-n_0(x_0+\langle\lambda\rangle)]$$

характеризует плотность потока молекул газа через поверхность при диффузии. Умножая это равенство на массу молекулы, получим выражение для массы $m_{\text{сек}}$ вещества, прошедшего за единицу времени через единичную площадку S в направлении оси OX:

$$m_{\text{сек}}=\frac{1}{6}m\langle u\rangle[n_0(x_0-\langle\lambda\rangle)-n_0(x_0+\langle\lambda\rangle)]. \qquad (11.33)$$

Из математического анализа известно, что

$$n_0(x_0-\langle\lambda\rangle)=n_0(x_0)-\langle\lambda\rangle\frac{dn_0}{dx},$$

$$n_0(x_0+\langle\lambda\rangle)=n_0(x_0)+\langle\lambda\rangle\frac{dn_0}{dx}.$$

Подставляя эти выражения в (11.33), и вводя постоянную массу под знак производной, получаем

$$m_{\text{сек}}=-\frac{1}{3}\langle u\rangle\langle\lambda\rangle\frac{d(mn_0)}{dx}.$$

Поскольку $\rho=mn_0$, имеем

$$m_{\text{сек}}=-\frac{1}{3}\langle u\rangle\langle\lambda\rangle\frac{d\rho}{dx}. \qquad (11.34)$$

Уравнение (11.34) совпадает с (11.30). Следовательно, для коэффициента диффузии D имеем следующее выражение:

$$D = \frac{1}{3}\langle u\rangle\langle\lambda\rangle. \qquad (11.35)$$

Аналогичным образом можно было бы рассмотреть явления теплопроводности и вязкости и получить следующие выражения для коэффициентов теплопроводности и внутреннего трения:

$$K = \frac{1}{3}\langle u\rangle\langle\lambda\rangle c_V\rho, \qquad (11.36)$$

$$\eta = \frac{1}{3}\langle u\rangle\langle\lambda\rangle\rho, \qquad (11.37)$$

где c_V — удельная теплоемкость газа в изохорическом процессе.

6. Из формул для коэффициентов переноса вытекают некоторые важные выводы. Оказывается, что коэффициенты внутреннего трения и теплопроводности не зависят от давления газа. Этот факт, впервые обнаруженный Д. К. Максвеллом, вначале кажется парадоксальным, хотя он и согласуется с данными опытов в случае не слишком разреженных газов. Его объяснение заключается в том, что с ростом давления в переносе импульса и внутренней энергии принимает участие большее число молекул, но каждая из них проходит без столкновения меньшие расстояния, так что в целом перенос импульса и энергии не изменяется. Так, уменьшение давления воздуха в 500 раз вызывает изменение динамического коэффициента вязкости только на 4%. Формально дело сводится к тому, что в формулах (11.36) и (11.37) для коэффициентов теплопроводности и внутреннего трения плотность (а следовательно, и давление) выпадает, поскольку $\langle\lambda\rangle$ обратно пропорциональна плотности ρ. Между коэффициентами переноса существуют простые зависимости, вытекающие из формул (11.35) — (11.37):

$$\eta = \rho D \quad \text{и} \quad \frac{K}{\eta \cdot c_V} = 1. \qquad (11.38)$$

Эти формулы показывают, что по найденным из опыта значениям коэффициента внутреннего трения, теплопроводности или диффузии можно определить остальные коэффициенты переноса.

7. На рис. 11.14 показана одна из схем опытов по измерению коэффициентов внутреннего трения газов Металлический цилиндр A подвешен на тонкой проволоке внутри концентричного ему полого вращающегося цилиндра B. Благодаря действию сил внутреннего трения в газе, заполняющем зазор между цилиндрами, цилиндр A поворачивается. При этом он закру-

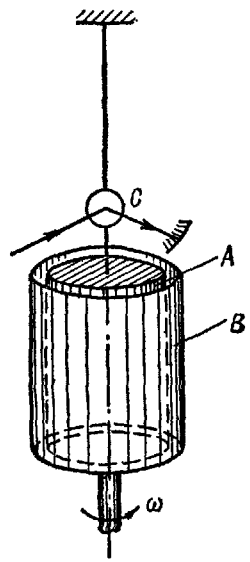

Рис. 11.14.

чивает проволоку на некоторый угол α, пропорциональный действующему на него крутящему моменту. Угол α определяется с помощью зеркального отсчета C. Теоретический расчет позволяет связать крутящий момент с радиусами цилиндров, их высотой, угловой скоростью вращения цилиндра B и коэффициентом внутреннего трения газа.

Существует несколько методов измерения коэффициентов теплопроводности и диффузии. Мы не останавливаемся на описании этих методов.

8. В таблице 6 приведены полученные из опытов значения коэффициентов K, η и величины $\frac{K}{\eta c_V}$ для ряда газов при $t = 0°$ С.

Из этой таблицы хорошо виден приближенный характер рассмотренной нами теории явлений переноса. Учет взаимодействия между соударяющимися молекулами и их распределения по скоростям в условиях наличия градиентов плотности, температуры или скорости не изменяет физического смысла результатов, но приводит к другим значениям числовых множителей. Этим достигается лучшее согласие теории с данными опытов.

Таблица 6

Вещество	$K_{\text{набл}}$ кал/(см с·°С)	$\eta_{\text{набл}}$, г/(см·с)	$\frac{K}{\eta c_V}$
Водород	0,000396	0,0000867	1,89
Гелий	0,000336	0,000189	2,38
Азот	0,0000566	0,000166	1,91
Кислород	0,0000570	0,000189	1,93
Воздух	0,0000566	0,000172	1,91
Аргон	0,0000389	0,000210	2,49
Углекислый газ	0,0000337	0,000142	1,52

9. На основании экспериментального исследования явлений переноса в химически однородных газах можно оценить величины «эффективных» диаметров d молекул. Из уравнения (11.19) имеем

$$d = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi n_0 \langle\lambda\rangle}}.$$

Учитывая, что число молекул в единице объема газа n_0 равно отношению плотности ρ к массе m одной молекулы:

$$n_0 = \frac{\rho}{m} = \frac{\rho N_A}{\mu},$$

получаем

$$d = \sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{2}\,\pi N_A \rho \langle\lambda\rangle}}. \qquad (11.39)$$

С другой стороны, из уравнений (11.36) и (11.37) следует, что

$$\rho\langle\lambda\rangle = \frac{3K}{\langle u\rangle c_V}$$

и

$$\rho\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{\langle u\rangle}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (11.39), получим

$$d = \sqrt{\frac{\langle u\rangle \mu c_V}{3\sqrt{2}\,\pi N_A K}} = \sqrt{\frac{\langle u\rangle C_V}{3\sqrt{2}\,\pi N_A K}} \qquad (11.40)$$

и

$$d = \sqrt{\frac{\langle u\rangle \mu}{3\sqrt{2}\,\pi N_A \eta}}. \qquad (11.41)$$

Выше было показано, что

$$\langle u\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\mu\pi}} \quad \text{и} \quad C_V = \frac{iR}{2}.$$

Таким образом, окончательно получим следующие формулы для «эффективного» диаметра молекул газа:

$$d = \sqrt{\frac{i\sqrt{R^3}}{3N_A\sqrt{\mu\pi^3}} \cdot \frac{\sqrt{T}}{K}} \qquad (11.42)$$

и

$$d = \sqrt{\frac{2\sqrt{R\mu}}{3N_A\sqrt{\pi^3}} \cdot \frac{\sqrt{T}}{\eta}}. \qquad (11.43)$$

Измеряя на опыте значения коэффициентов теплопроводности или внутреннего трения газа при различных температурах, можно по формулам (11.42) или (11.43) найти «эффективный» диаметр d его молекул. Формулы (11.42) и (11.43) приводят к несколько различным результатам. Это объясняется приближенным характером соотношений (11.36) и (11.37). Однако порядок величины «эффективного» диаметра d в обоих случаях оказывается одинаковым (см. табл. 7).

Таблица 7

Газ	t, °C	η, 10^{-6} г/(см·с)	K, 10^{-5} кал/(см·с·°C)	d, 10^{-8} см	
				по формуле (11.42)	по формуле (11.43)
Водород	0	86,7	39,6	1,64	2,21
Кислород	0	189	5,70	2,13	2,98
Азот	0	166	5,66	2,23	3,08
Гелий	0	189	33,6	1,16	1,79
Углекислый газ	0	142	3,37	2,79	3,80

10. В заключение приведем сводную таблицу явлений переноса.

Таблица 8

Явление	Переносимая физическая величина	Уравнение переноса	Формула для коэффициента переноса
Диффузия	Масса	$dM = -D\frac{d\rho}{dx}dSdt$	$D = \frac{1}{3}\langle u\rangle\langle\lambda\rangle$
Внутреннее трение	Импульс	$dF = -\eta\frac{dv}{dn}dS$	$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle u\rangle\langle\lambda\rangle$
Теплопроводность	Энергия	$dQ = -K\frac{dT}{dx}dSdt$	$K = \frac{1}{3}\rho c_V\langle u\rangle\langle\lambda\rangle$

§ 11.9. Понятие о свойствах разреженных газов

1. Газы, плотность которых настолько мала, что средняя длина свободного пробега молекул соизмерима с линейными размерами сосуда, называют **разреженными**. В сильно разреженных газах соударения между молекулами происходят очень редко. Они пролетают от одной стенки сосуда к другой практически без столкновений друг с другом так, что средняя длина свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ целиком определяется формой и размерами сосуда, т. е. не зависит ни от плотности газа, ни от размеров его молекул.

2. К разреженным газам неприменима изложения в предыдущем параграфе теория явлений переноса, так как она основана на предположении о том, что $\langle\lambda\rangle$ во много раз меньше линейных размеров сосуда. Уменьшение плотности разреженного газа, не вызывая изменения $\langle\lambda\rangle$, приводит к соответствующей убыли числа молекул, участвующих в процессе переноса импульса или внутренней энергии. Поэтому коэффициенты внутреннего трения и теплопроводности такого газа прямо пропорциональны его плотности Полезно отметить, что в достаточно сильно разреженных газах внутреннее трение по существу отсутствует, уступая место внешнему трению движущегося газа о стенки сосуда. Это связано с тем, что изменение импульса молекул происходит только в результате их взаимодействия со стенками. Ве-

личина силы трения, действующей на единицу площади стенки, в первом приближении пропорциональна скорости движения газа и его плотности (сравните с уравнением 11.31).

Отсутствие соударений между молекулами разреженного газа приводит также к изменению закономерностей процесса теплопроводности. Свободно перемещаясь от одной стенки сосуда к другой, молекулы газа осуществляют непосредственный обмен энергией между стенками, имеющими температуры T_1 и T_2. Количество энергии, отданной (или

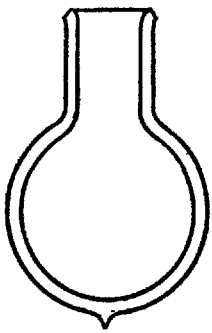

Рис. 11.15.

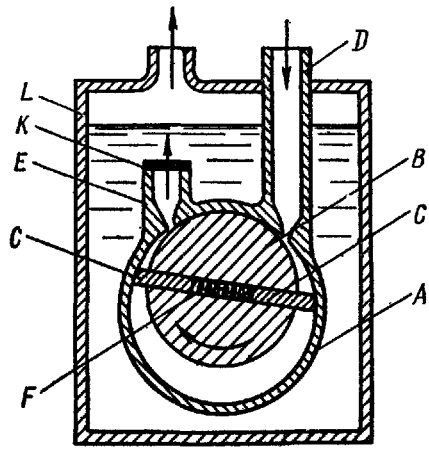

Рис. 11.16.

полученной) в форме теплоты единицей площади поверхности стенки за единицу времени, пропорционально разности температур и плотности газа (сравните с уравнением 11.32).

Эти особенности процесса переноса в разреженных газах используются на практике для создания надежной тепловой изоляции. Так, например, для уменьшения теплообмена между телом и окружающей средой тело помещают в сосуд Дьюара. Сосуд Дьюара (рис. 11.15) имеет двойные стенки Между стенками находится сильно разреженный воздух, теплопроводность которого весьма мала.

3. Для получения различных степеней разрежения применяют специальные устройства — насосы, создающие предварительное разрежение (форвакуум) до 10^{-3} мм рт. ст. и различные вакуумные насосы, позволяющие получить весьма малые давления до 10^{-7} — 10^{-9} мм рт. ст.

Принцип действия форвакуумного насоса может быть пояснен на примере ротационного насоса (рис. 11.16). Внутри цилиндрической полости корпуса насоса A находится эксцентрично расположенный ротор B. В прорезь ротора вставлены две подвижные пластины C, которые под действием находящейся между ними пружины F, плотно прижимаются к внутренней поверхности корпуса насоса A. При вращении

ротора по часовой стрелке воздух засасывается из сосуда, соединенного с патрубком D, и выбрасывается через патрубок E и клапан K. Для обеспечения герметичности боковые поверхности пластин C пришлифованы к поверхности прорези в роторе, а концы пластин — к внутренней поверхности корпуса A. Дополнительное уплотнение и смазка трущихся частей осуществляется маслом, залитым во внешний кожух насоса L.

Для получения высокого вакуума до 10^{-7} мм рт. ст. применяют диффузионные ртутные или масляные насосы. Эти насосы основаны

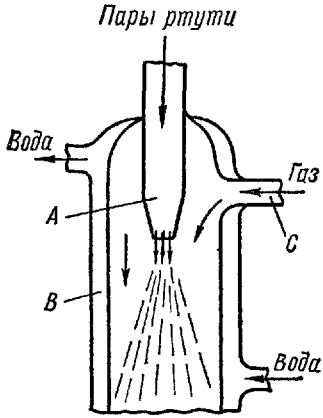

Рис. 11.17.

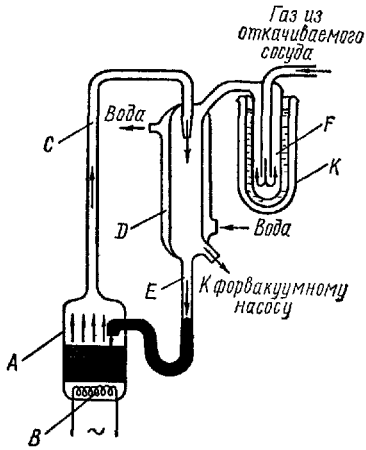

Рис. 11.18.

на следующем принципе. Струя паров ртути или масла, вытекая из сопла A (рис 11.17), попадает в сосуд B, стенки которого охлаждаются проточной водой. При этом пары конденсируются и образующиеся капли ртути или масла стекают вниз, увлекая за собой молекулы газа, находящиеся ниже сопла A. Давление газа вблизи сопла понижается и через трубку C подсасывается новая порция молекул газа из откачиваемого сосуда. Удаление газа из сосуда B производится форвакуумным насосом.

На рис. 11.18 изображена принципиальная схема диффузионного ртутного насоса Ленгмюра. Ртуть, находящаяся в сосуде A, нагревается электрической печью B до температуры 300—350 ° С. Образующиеся при этом пары поступают по трубке C в конденсатор D, стенки которого охлаждаются водой. Трубка E служит для возвращения сконденсированной ртути в сосуд A На пути газа из откачиваемого сосуда в конденсатор D установлена ртутная ловушка. Она представляет собой сосуд F, помещенный в сосуд Дьюара K с жидким азотом или воздухом. Это приспособление позволяет почти полностью исключить возможность попадания паров ртути в откачиваемый сосуд, так как в сильно охлажденном сосуде F ртуть переводится в твердое состояние.

4. Для измерения давлений применяют приборы, называемые манометрами. Обычные ртутные, водяные и другие манометры, устройство которых известно из курса физики средней школы, не позволяют измерять давления, меньшие десятых долей мм рт. ст. Для измерения малых давлений применяются специальные манометры — Мак-Леода, Пирани — Галле и др.

Принципиальная схема манометра Мак-Леода приведена на рис. 11.19. Манометр состоит из двух сосудов A и Q, двух капилляров K_1 и K_2, имеющих одинаковый диаметр d канала, и из соединительных трубок C и F. Капилляр K_1 сверху запаян. Трубка C служит для соединения манометра с сосудом, в котором нужно измерить давление p. Перед началом опыта открывают кран B и опускают сосуд A таким образом, чтобы уровень ртути в левом колене манометра был ниже разветвления трубок E. При этом давление в сосуде Q и капиллярах K_1 и K_2 одинаково и равно измеряемому давлению p. Если затем сосуд A постепенно поднимать вверх, то ртуть будет перетекать в левое колено манометра, разобщая между собой сосуд Q и капилляр K_2. Дальнейшее повышение уровня ртути в сосуде Q вызывает сжатие находящегося в нем газа и вытеснение его в капилляр K_1. Сосуд A поднимают до тех пор, пока уровень ртути в капилляре K_2 не сравняется с верхним закрытым концом капилляра K_1. Разность уровней h ртути в капиллярах K_1 и K_2 показывает, насколько давление p_1 газа в капилляре K_1 больше измеряемого давления p:

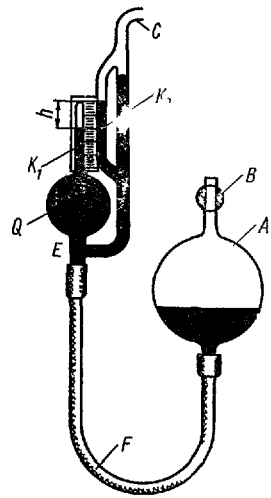

Рис. 11.19.

$$h\rho g = p_1 - p, \tag{11.44}$$

где ρ — плотность ртути.

Обозначим объем сосуда Q и капилляра K_1 через V. Сжатие газа в капилляре K_1 производится достаточно медленно, так что его можно считать изотермическим. Поэтому можно воспользоваться законом Бойля—Мариотта:

$$pV = p_1 \frac{\pi d^2}{4} h. \tag{11.45}$$

Исключив из уравнений (11.44) и (11.45) давление p_1, получим следующее выражение для измеряемого давления p:

$$p = \frac{\pi d^2 \rho g}{4\left(V - \frac{\pi d^2}{4} h\right)} h^2. \tag{11.46}$$

Объем сосуда Q во много раз больше объема капилляра K_1, поэтому в формуле (11.46) можно пренебречь величиной $\frac{\pi d^2}{4} h$ по сравнению с V:

$$p = \frac{\pi d^2 \rho g}{4V} h^2 = \alpha h^2, \qquad (11.47)$$

где $\alpha = \frac{\pi d^2 \rho g}{4V}$ — постоянная манометра.

Формула (11.47) служит для нахождения измеряемого давления p. Манометр Мак-Леода позволяет измерять давления до 10^{-5} мм рт. ст.

В качестве второго примера вакуумных манометров рассмотрим тепловой манометр Пирани—Галле. Этот манометр представляет собой стеклянный баллон, в котором на специальном каркасе из диэлектрика укреплена тонкая платиновая проволока. Концы проволоки выведены наружу к клеммам манометра. Баллон имеет отросток, с помощью которого его внутренняя полость сообщается с сосудом, давление в котором нужно измерить. При пропускании электрического тока через платиновую проволоку она нагревается, причем выделяющаяся теплота передается в окружающую среду путем теплопроводности и излучения. Выше было указано, что коэффициент теплопроводности разреженных газов зависит линейно от давления. Поэтому при пропускании через платиновую проволоку тока постоянной силы она нагревается тем сильнее, чем меньше давление в баллоне манометра. Увеличение температуры проволоки в свою очередь вызывает возрастание ее сопротивления. Таким образом, по изменению сопротивления проволоки можно судить о величине измеряемого давления. Для поддержания постоянства температуры стенок баллона манометра его помещают в термостат. Манометр Пирани—Галле до употребления должен быть проградуирован, например, по манометру Мак-Леода. Ввиду того, что теплопроводности разных газов различны, градуировка для каждого газа производится отдельно.

Вопросы для повторения

1. Выведите основное уравнение кинетической теории газов.
2. Каково молекулярно-кинетическое толкование абсолютной температуры? В чем его ограниченность?
3. Начертите кривую максвелловского распределения скоростей. Какая скорость характеризует среднюю кинетическую энергию молекул газа? Какая скорость входит в выражение для средней длины свободного пробега молекул?
4. В чем состоит закон равномерного распределения энергии по степеням свободы? Всегда ли он справедлив?
5. Изложите основные положения классической и квантовой теорий теплоемкостей газов.
6. В чем сущность явлений переноса? Каковы условия их возникновения и каковы их закономерности?

Примеры решения задач

Задача 11.1. Средняя длина свободного пробега молекул азота при температуре 280 К и нормальном атмосферном давлении $7{,}2 \cdot 10^{-8}$ м Определить среднее число столкновений в секунду при давлении 0,133 Па и той же температуре.

Дано

$p_1 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па,
$\langle \lambda_1 \rangle = 7{,}2 \cdot 10^{-8}$ м,
$p_2 = 0{,}133$ Па,
$T_1 = T_2 = 280$ К,
$\mu = 0{,}028$ кг/моль

$\langle Z_2 \rangle - ?$

Решение

Среднее число $\langle Z \rangle$ соударений, испытываемых молекулой за единицу времени, как показано в § 11.4, равно

$$\langle Z \rangle = \frac{\langle u \rangle}{\langle \lambda \rangle},$$

где $\langle u \rangle$ — средняя арифметическая скорость теплового движения молекул.

По формуле (11.10)

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

При постоянной температуре газа средняя длина свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ обратно пропорциональна давлению газа:

$$\langle \lambda_2 \rangle = \langle \lambda_1 \rangle \frac{p_1}{p_2}.$$

Следовательно,

$$\langle Z_2 \rangle = \frac{\langle u_2 \rangle}{\langle \lambda_2 \rangle} = \frac{p_2}{\langle \lambda_1 \rangle p_1} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$\langle Z_2 \rangle = \frac{0{,}133}{7{,}2 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}01 \cdot 10^5} \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 280}{3{,}14 \cdot 28}} \text{ с}^{-1} = 8{,}4 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 11.2. Вычислить кинетическую энергию вращательного движения всех молекул, содержащихся в 1 кг кислорода при 47° С.

Дано

$M = 1$ кг,
$t = 47°$ С; $T = 320$ К,
$\mu = 0{,}032$ кг/моль

$W_к^{вр} - ?$

Решение

По закону о равномерном распределении энергии между всеми степенями свободы молекулы на одну степень свободы ее поступательного или вращательного движения в среднем приходится кинетическая энергия

$$\langle w_0 \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана.

Молекула кислорода содержит два атома и поэтому обладает двумя степенями свободы вращательного движения. Следовательно, средняя кинетическая энергия вращательного движения одной молекулы кислорода

$$\langle w_к^{вр} \rangle = kT.$$

Искомая энергия $W_к^{вр}$ больше $\langle w_к^{вр} \rangle$ во столько раз, сколько молекул содержится в M килограммах кислорода:

$$W_к^{вр} = kT \frac{M}{\mu} N_A,$$

где N_A — число молекул в одном моле газа (число Авогадро).

По формуле (9.11) $kN_A = R$, поэтому окончательно получим:

$$W_к^{вр} = \frac{RMT}{\mu}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$W_к^{вр} = \frac{8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 320}{32} \text{ Дж} = 8{,}31 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Задача 11.3. Вычислить удельные теплоемкости воздуха c_V и c_p, считая в его составе 20% кислорода и 80% азота

Дано

$M_1 = 0{,}2\ M$,
$M_2 = 0{,}8\ M$,
$\mu_1 = 0{,}032$ кг/моль,
$\mu_2 = 0{,}028$ кг/моль

c_V — ? c_p — ?

Решение

Молярные теплоемкости идеального газа вычисляют по формулам (11.27):

$$C_V = \frac{iR}{2}, \qquad C_p = \frac{(i+2)R}{2},$$

где i — число степеней свободы молекул (для кислорода и азота $i = 5$). Поэтому удельные теплоемкости кислорода

$$c_{V_1} = \frac{5R}{2\mu_1} \text{ и } c_{p_1} = \frac{7R}{2\mu_1}.$$

Соответственно, удельные теплоемкости азота

$$c_{V_2} = \frac{5R}{2\mu_2} \text{ и } c_{p_2} = \frac{7R}{2\mu_2}.$$

Для нагревания M килограммов воздуха на 1 К при постоянном объеме требуется количество теплоты, равное

$$c_V M = \frac{5R}{2\mu_1} M_1 + \frac{5R}{2\mu_2} M_2,$$

откуда

$$c_V = 0{,}5R \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{4}{\mu_2} \right). \qquad (а)$$

Для нагревания M килограммов воздуха на 1 К при постоянном давлении требуется количество теплоты, равное

$$c_p M = \frac{7R}{2\mu_1} M_1 + \frac{7R}{2\mu_2} M_2,$$

откуда

$$c_p = 0{,}7R\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{4}{\mu_2}\right) \qquad (б)$$

Подставляя в выражения (а) и (б) числовые данные, получим в Международной системе единиц (СИ):

$$c_V = 0{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1}{32} + \frac{4}{28}\right) \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 724 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)},$$

$$c_p = 0{,}7 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1}{32} + \frac{4}{28}\right) \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1010 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Глава XII

ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

§ 12.1. Круговые процессы. Цикл Карно

1. Прежде чем переходить к изложению второго закона термодинамики, необходимо рассмотреть круговые процессы. **Круговым процессом, или циклом,** называют такой процесс, в результате которого термодинамическое тело возвращается в исходное состояние. В диаграммах состояния $p - V$, $p - T$ и др. равновесные круговые процессы изображают в виде замкнутых кривых. Это связано с тем, что в любой диаграмме двум тождественным состояниям (в рассматриваемом случае — началу и концу кругового процесса) соответствует одна и та же точка.

Круговые процессы лежат в основе всех тепловых машин: двигателей внутреннего сгорания, паровых и газовых турбин, паровых и холодильных машин и т. д. Поэтому изучение свойств различных круговых процессов — одна из важнейших задач физики. Мы ограничимся установлением лишь некоторых общих закономерностей таких процессов.

2. Рассмотрим произвольный равновесный круговой процесс $C_1aC_2bC_1$ (рис. 12.1), совершаемый идеальным газом. Его можно разбить на два процесса — расширение газа из состояния C_1 в состояние C_2 (процесс C_1aC_2) и сжатие газа из состояния C_2 в состояние C_1 (процесс C_2bC_1). При расширении газ совершает положительную работу A_1, которая, как показано в § 10.4, измеряется площадью фигуры $V_1C_1aC_2V_2$ на рис. 12.1. Наоборот, для сжатия газа внешние силы совершают положительную работу $A_2' = -A_2$, измеряемую площадью фигуры $V_1C_1bC_2V_2$. Из рис. 12.1 видно, что $A_1 > A_2'$. Поэтому в целом за цикл газ совершает положительную работу $A = A_1 + A_2 = A_1 - A'_2$. Она измеряется заштрихованной на рис. 12.1 площадью, ограниченной кривой процесса $C_1aC_2bC_1$. Такой цикл называют **прямым.** Если бы круговой процесс протекал в обратном направлении (против часовой стрелки), то суммарная работа, совершаемая газом за цикл, оказалась бы отрицательной. Численно она также измерялась бы площадью $C_1aC_2bC_1$. Такой цикл называют **обратным.**

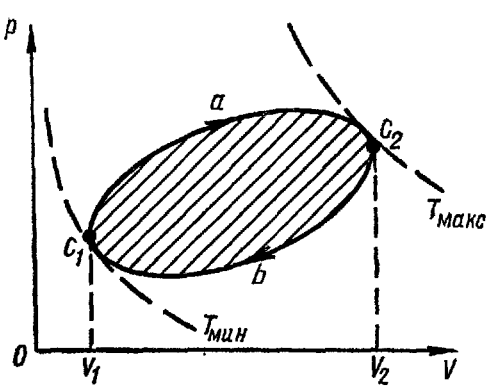

Рис. 12.1.

3. В § 10.1 было показано, что внутренняя энергия тела зависит только от его состояния. Поэтому

полное изменение внутренней энергии газа в результате кругового процесса равно нулю. Следовательно, по первому закону термодинамики имеем:

$$Q = \Delta U + A = A, \qquad (12.1)$$

где Q — общее количество теплоты, сообщенной газу в круговом процессе, A — работа газа в этом процессе.

В прямом цикле $A > 0$ и $Q > 0$, т. е. в прямом цикле газ совершает работу за счет сообщенной ему теплоты. Наоборот, в обратном цикле над газом совершается работа $A' = -A$ ($A < 0$) и от него отводится эквивалентное ей количество теплоты. В тепловом двигателе рабочее тело [1] совершает прямой цикл, а в холодильной машине — обратный цикл.

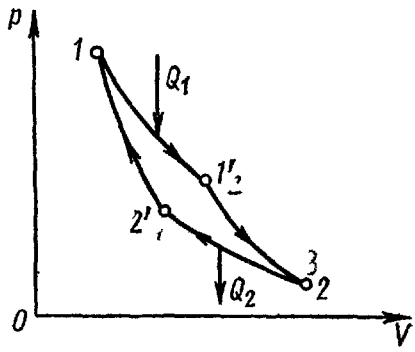

Рис. 12.2.

4. В качестве примера кругового процесса рассмотрим цикл С. Карно. Этот цикл сыграл огромную роль в развитии термодинамики и теплотехники, так как позволил подойти к анализу коэффициентов полезного действия тепловых машин **Циклом Карно** называют круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. На рис. 12.2 изображен прямой цикл Карно, состоящий из следующих четырех последовательных процессов:

1—1' — изотермическое расширение при температуре $T_1 (T_1 = T_1)$,

1'—2 — адиабатическое расширение,

2—2' — изотермическое сжатие при температуре $T_2 (T_{2'} = T_2)$,

2'—1 — адиабатическое сжатие.

Практическое осуществление цикла Карно можно представить себе следующим образом. Некоторое количество газа заключено в цилиндре с подвижным поршнем. В процессе изотермического расширения *1—1'* газ находится в тепловом контакте и равновесии с телом, имеющим температуру T_1. Таким телом может служить, например, большой резервуар с водой. Это тело называют нагревателем. В процессе *1—1'* оно передает газу теплоту $Q_1 (Q_1 > 0)$. Ясно, что теплоемкость нагревателя должна быть, строго говоря, бесконечно большой. В противном случае отдача газу теплоты Q_1 вызвала бы понижение температуры нагревателя, а следовательно, и нарушение изотермичности процесса расширения газа. В процессе *1'—2* газ полностью теплоизолируют и его расширение продолжает происходить адиабатически. Это означает, что на участке *1'—2* газ разобщают с нагревателем и заключают в

[1] В термодинамике принято называть рабочим телом газ или какое-либо иное термодинамическое тело, которое совершает круговой процесс и обменивается энергией с другими телами.

адиабатическую оболочку. Например, цилиндр с газом покрывают толстым слоем войлока. Далее, на участке $2—2'$ газ вновь приводят в тепловой контакт с другим телом, имеющим температуру T_2 ($T_2 < T_1$). Это тело называют холодильником. В процессе $2—2'$ газ изотермически сжимается и передает холодильнику теплоту $-Q_2$ [1]. Теплоемкость холодильника также должна быть бесконечно большой. В состоянии $2'$ газ вновь полностью теплоизолируют и адиабатически сжимают до первоначального состояния 1.

Найдем работу A, совершаемую идеальным газом в прямом равновесном цикле Карно. На основании уравнения (12.1)

$$A_1 = Q = Q_1 + Q_2 \tag{12.2}$$

или

$$A = Q_1 - |Q_2|. \tag{12.2'}$$

Из выражения (10.14) для теплоты, сообщаемой идеальному газу в изотермическом процессе, и закона Бойля—Мариотта следует, что

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_{1'}}{V_1} = \frac{M}{\mu} RT_1 \ln \frac{p_1}{p_{1'}}, \\ Q_2 &= \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_{2'}}{V_2} = \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{p_2}{p_{2'}}. \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

Таким образом,

$$A = \frac{M}{\mu} R \left[T_1 \ln \frac{p_1}{p_{1'}} + T_2 \ln \frac{p_2}{p_{2'}} \right]. \tag{12.3'}$$

Покажем, что

$$\frac{p_1}{p_{1'}} = \frac{p_{2'}}{p_2}.$$

Для этого преобразуем отношение $\frac{p_1}{p_{1'}}$ следующим образом:

$$\frac{p_1}{p_{1'}} = \frac{p_1}{p_{2'}} \cdot \frac{p_{2'}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_{1'}}.$$

Заменим отношения давлений в адиабатических процессах сжатия $\left(\frac{p_1}{p_{2'}}\right)$ и расширения $\left(\frac{p_2}{p_{1'}}\right)$ через отношение температур по уравнению (10.18):

$$\frac{p_1}{p_{2'}} = \left(\frac{T_1}{T_{2'}}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{p_{1'}} = \left(\frac{T_2}{T_{1'}}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}},$$

[1] Через Q_2 обозначаем количество теплоты, получаемой газом от холодильника ($Q_2 < 0$)

тогда

$$\frac{p_1}{p_{1'}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \cdot \frac{p_{2'}}{p_2} \cdot \left(\frac{T_2}{T_{1'}}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = \frac{p_{2'}}{p_2}.$$

Поэтому формулу (12.3′) можно привести к такому виду:

$$A = \frac{M}{\mu} R(T_1 - T_2) \ln \frac{p_1}{p_{1'}}. \qquad (12.4)$$

5. Из формулы (12.2) видно, что $A < Q_1$, т. е. при совершении рабочим телом цикла Карно полезная работа меньше энергии, полученной от нагревателя. Часть этой энергии бесполезно передается холодильнику в форме теплоты. Этот результат справедлив для любого кругового процесса: работа A, совершаемая за цикл, всегда меньше величины $Q_{\text{подв}}$ суммы всех количеств теплоты, переданных в рассматриваемом цикле рабочему телу нагревателями. Величину

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{подв}}} \qquad (12.5)$$

называют **термическим коэффициентом полезного действия** теплового двигателя. Термический к. п. д. характеризует степень термодинамического совершенства и экономичности теплового двигателя. Он зависит от того, какой прямой цикл совершает рабочее тело. В качестве примера найдем термический к. п. д. $\eta_{\text{к}}$ теплового двигателя, в котором идеальный газ совершает равновесный прямой цикл Карно. Для этого подставим в (12.5) выражения (12.3) и (12.4) для $Q_{\text{подв}} = Q_1$ и $A = Q_1 + Q_2$:

$$\eta_{\text{к}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (12.6)$$

или

$$\eta_{\text{к}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (12.6')$$

Итак, искомый термический к. п. д. зависит только от отношения температур холодильника (T_2) и нагревателя (T_1).

6. **В обратном цикле Карно**, изображенном на рис. 12.3, теплота Q_1 отводится от газа в процессе $1'$—1 изотермического сжатия при температуре T_1, а теплота Q_2 подводится к газу в процессе $2'$—2 изотермического расширения при температуре $T_2 < T_1$. Следовательно, $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$ и работа, совершаемая газом за один цикл, отрицательна: $A = (Q_1 + Q_2) < 0$. Этот результат справедлив для любого обратного цикла. Из сказанного видно, что

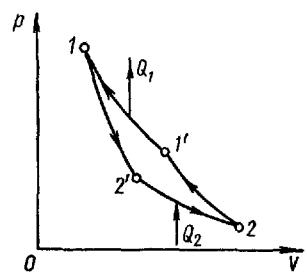

Рис. 12.3.

при совершении рабочим телом обратного цикла можно переносить энергию в форме теплоты от холодного тела к горячему за счет совершения внешними силами соответствующей работы. Этот метод широко применяется в холодильной технике.

Холодильная машина будет тем более экономичной, чем меньше работа $A' = -A$, затрачиваемая извне на отвод от холодного тела теплоты Q_2. Из уравнений (12.2) и (12.5) имеем

$$Q_2 = A - Q_1 = A - \frac{A}{\eta} = -\frac{1-\eta}{\eta} A,$$

или

$$Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta} A', \qquad (12.7)$$

где η — термический к. п. д. точно такого же прямого цикла.

§ 12.2. Обратимые и необратимые процессы

1. Термодинамический процесс называют **обратимым,** если он допускает возвращение системы в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде остались какие-либо изменения. Иными словами, процесс обратим, если при совершении его системой сначала в прямом, а затем в обратном направлении в исходные состояния возвращаются как сама система, так и все внешние тела, с которыми система взаимодействовала.

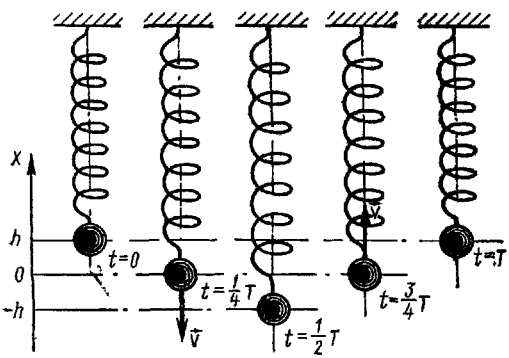

Рис. 12.4.

Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, называют **необратимым.** Необратимый процесс нельзя провести в обратном направлении так, чтобы совершающая его система прошла через те же самые промежуточные состояния.

2. Примером обратимого процесса могут служить незатухающие колебания, совершаемые в вакууме телом, подвешенным на абсолютно упругой пружине. На рис. 12.4 изображены положения колеблющегося тела в различные моменты времени. Система тело и пружина—консервативная. Поэтому ее механические колебания не вызывают изменения энергии хаотического (теплового) движения частиц системы. Изменение состояния этой системы связано только с изменением ее конфигурации и скорости движения, которые, как видно из рис. 12.4,

полностью повторяются по истечении промежутка времени, равного периоду колебаний T.

В термодинамике доказано, что *необходимым и достаточным условием обратимости термодинамического процесса является его равновесность.*

Обратимый круговой процесс называют о б р а т и м ы м ц и к л о м. Например, в предыдущем параграфе были рассмотрены энергетические соотношения для обратимого цикла Карно, совершаемого идеальным газом.

3. Примером необратимого процесса может служить торможение тела вследствие трения. Если на движущееся в какой-либо среде тело не действуют другие силы, кроме сил трения, то скорость тела постепенно уменьшается и оно, в конце концов, останавливается. При этом энергия механического движения тела, как целого, расходуется на увеличение энергии теплового движения частиц тела и окружающей среды. Следовательно, за счет кинетической энергии тела $W_к$ возрастает внутренняя энергия тела и среды, нагревающихся при трении ($\Delta U = W_к$). Этот п р я м о й п р о ц е с с протекает совершенно **самопроизвольно:** для его осуществления не требуется протекания еще каких-либо процессов в окружающих телах. Иначе обстоит дело с обратным процессом. Для возвращения системы в исходное состояние необходимо, чтобы остановившееся тело вновь пришло в движение за счет соответствующего охлаждения его самого и окружающей среды. Опыты показывают, что хаотическое движение частиц тела не может самопроизвольно вызвать появление упорядоченного движения этих частиц как целого. Для осуществления такого процесса необходим дополнительный, так называемый **компенсирующий процесс.** Он должен заключаться в охлаждении тела и среды до первоначальной температуры, т. е. в отдаче ими холодильнику теплоты $Q = W_к$ и в совершении над телом работы $A' = W_к$. Поэтому, хотя в результате прямого и обратного процессов система тело—среда и возвращается в исходное состояние, состояния внешних тел и з м е н я ю т с я. Следовательно, *все процессы, сопровождающиеся трением, являются необратимыми.*

Процесс теплообмена между двумя телами, имеющими различную температуру, приводит к выравниванию средних энергий хаотического (теплового) движения частиц обоих тел. Энергия частиц более нагретого тела уменьшается, а энергия частиц более холодного тела увеличивается — температуры тел выравниваются. Этот процесс идет самопроизвольно, как только обеспечен тепловой контакт между телами. Иначе обстоит дело с обратным процессом — процессом нагревания одного тела за счет охлаждения другого, имевшего вначале такую же температуру, что и первое. Известно, что самопроизвольно такой процесс не происходит. Для его осуществления нужно использовать холодильную машину, работа которой неизбежно сопряжена с изменением состояния других, внешних, тел. Следовательно, *процесс теплообмена при конечной разности температур тоже является необратимым.*

Аналогично можно показать необратимость процессов растворения и диффузии.

4. Из рассмотренных примеров необратимых процессов видно, что все они в одном направлении протекают самопроизвольно, а для совершения каждого из этих процессов в обратном направлении необходимо, чтобы параллельно происходил какой-то другой, компенсирующий процесс. Все реальные процессы протекают не бесконечно медленно, а с конечной скоростью. Следовательно, они сопровождаются трением и теплообменом при конечной по величине разности между температурой рабочего тела и температурами нагревателей и холодильников. Поэтому, строго говоря, все реальные процессы необратимы. Однако во многих случаях эти процессы близки к равновесным и их можно приближенно рассматривать как обратимые процессы.

§ 12.3. Второй закон термодинамики

1 В предыдущем параграфе для доказательства необратимости процессов движения с трением и теплообмена при конечной разности между температурами тел мы вынуждены были ссылаться на результаты опытов. Это не случайно. Дело в том, что для описания термодинамических процессов одного первого начала термодинамики недостаточно. Выражая всеобщий закон сохранения и превращения энергии, первое начало не позволяет определить н а п р а в л е н и е протекания процессов. В самом деле, процесс самопроизвольной передачи энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему ни в какой мере не противоречит первому закону термодинамики, если только уменьшение внутренней энергии первого тела равно энергии, полученной вторым. Однако при опускании раскаленного куска железа в холодную воду никогда не наблюдается явление дальнейшего нагревания железа за счет соответствующего охлаждения воды.

Далее, первое начало не исключает возможности такого процесса, е д и н с т в е н н ы м результатом которого было бы превращение теплоты, полученной от некоторого тела, в эквивалентную ей работу. Так, например, основываясь на первом начале, можно было бы попытаться построить периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты (например, за счет внутренней энергии океанов). Такой двигатель называют **вечным двигателем второго рода**.

Обобщение огромного экспериментального материала привело к выводу о невозможности построения вечного двигателя второго рода. Этот вывод получил название **второго закона (начала) термодинамики.** Существует ряд различных по форме, но совершенно одинаковых по существу формулировок второго начала. Мы ограничимся следующими двумя:

а) *невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу;*

б) *невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему.*

Можно показать, что из отрицания справедливости первого утверждения следует отрицание справедливости второго, и наоборот. Тем самым доказывается полная эквивалентность обеих формулировок закона.

2. Второй закон термодинамики указывает на неравноценность двух форм передачи энергии — работы и теплоты. Этот закон показывает, что процесс перехода упорядоченного движения тела как целого в неупорядоченное движение его частиц необратим. Упорядоченное движение может переходить в неупорядоченное без каких-либо дополнительных (компенсирующих) процессов, как это происходит, например, при внутреннем трении. Переход же неупорядоченного движения частиц в упорядоченное движение тел, или, как часто, но не совсем точно, говорят «переход теплоты в работу» возможен лишь при условии, что он сопровождается каким-либо компенсирующим процессом. Так, например, при изотермическом расширении идеальный газ совершает работу, которая полностью эквивалентна теплоте, сообщаемой газу. Таким образом, теплота, полученная от нагревателя, целиком превращается в эквивалентную работу. Однако газ при этом расширяется, его удельный объем возрастает. Поэтому газ не возвращается в исходное состояние и «превращение теплоты в работу» не является единственным результатом рассматриваемого процесса.

Тепловая машина, работающая по прямому циклу Карно, производит работу за счет подводимой от нагревателя теплоты. Но при этом часть полученной теплоты передается холодильнику. Следовательно, работа за цикл не эквивалентна всей подведенной теплоте.

В холодильной машине, работающей по обратному циклу Карно, теплота передается от холодного тела к горячему. Однако для осуществления этого процесса необходим компенсирующий процесс совершения работы внешними силами.

3. На основании второго закона термодинамики можно показать, что коэффициент полезного действия **обратимого** цикла Карно не зависит от состава рабочего тела и всегда выражается формулой (12.6). Это положение, называемое **теоремой Карно**, служит основанием для установления так называемой **термодинамической шкалы температуры.** Из формулы (12.6) имеем

$$\frac{T_2}{T_1} = -\frac{Q_2}{Q_1}. \tag{12.8}$$

Если учесть, что $Q_2 < 0$, то

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{|Q_2|}{Q_1}. \tag{12.8'}$$

Таким образом, для сравнения температур двух тел T_1 и T_2 нужно осуществить обратимый цикл Карно, в котором эти тела используют в качестве нагревателя и холодильника. Отношение температур тел равно отношению численных значений отданных или полученных ими

в этом цикле количеств теплоты. По теореме Карно химический состав рабочего тела, осуществляющего цикл, не влияет на результаты сравнения температур. Поэтому установленная таким образом термодинамическая шкала температуры не связана со свойствами какого-либо определенного термометрического тела. В этом ее большое достоинство. Однако вследствие необратимости реальных термодинамических процессов указанный выше способ сравнения температур практически неосуществим и имеет лишь принципиальное значение.

4. Можно доказать, что термический коэффициент полезного действия $\eta_{\text{обр}}$ любого обратимого цикла (например, цикла $C_1aC_2bC_1$, изображенного на рис. 12.1) не превосходит коэффициента полезного действия $\eta_{\text{к}}$ обратимого цикла Карно, осуществляемого между нагревателем и холодильником с температурами T_1 и T_2. При этом под T_1 и T_2 нужно понимать максимальную и минимальную температуры рабочего тела в рассматриваемом цикле:

$$\eta_{\text{обр}} \leqslant \eta_{\text{к}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}}. \qquad (12.9)$$

5. Необратимые процессы вследствие их неравновесности нельзя изображать в p — V или какой-либо другой диаграмме состояния (см. § 10.4). Это сильно осложняет исследование необратимых процессов и циклов. Однако обычно на практике нужно знать интегральные характеристики необратимого процесса, который переводит рабочее тело из состояния C_1 в состояние C_2. Важно знать, какая работа $A_{\text{необр}}$ совершена телом и какое количество теплоты $Q_{\text{необр}}$ оно получило. Поэтому необратимый процесс может быть заменен «эквивалентным» ему обратимым процессом C_1C_2. Этот процесс переводит тело из состояния C_1 в состояние C_2 таким образом, чтобы совершаемая при этом телом работа A и получаемая им теплота Q равнялись, соответственно, $A_{\text{необр}}$ и $Q_{\text{необр}}$:

$$A = A_{\text{необр}} \quad \text{и} \quad Q = Q_{\text{необр}}.$$

Удобство такой замены состоит в том, что «эквивалентный» обратимый процесс может быть изображен в p — V и др. диаграммах состояния. Таким образом удается условно изобразить любой необратимый процесс. При этом нужно иметь в виду, что в действительном необратимом процессе рабочее тело проходит вовсе не через те состояния, которым соответствуют промежуточные точки кривой, «изображающей» этот процесс в диаграмме.

6. Рассмотрим **необратимый цикл Карно**, осуществляемый рабочим телом, которое обменивается энергией в форме теплоты с двумя телами, имеющими температуры T_1 и T_2. Их часто называют «источниками теплоты». Предположим для простоты, что необратимость цикла обусловлена только тем, что теплообмен между рабочим телом и «источниками теплоты» происходит при конечных разностях температур. Обозначим эти разности температур в изотермических процессах сжатия и расширения рабочего тела, соответственно, через $\Delta T_2 > 0$ и $\Delta T_1 > 0$

На рис. 12.5 изображены два цикла Карно, осуществляемые рабочим телом между «источниками теплоты» с температурами T_1 и T_2: обратимый цикл ($1'—2'—3'—4'$) и необратимый ($1—2—3—4$). Их термические к. п. д.

$$\eta_{\text{к обр}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

$$\eta_{\text{к необр}} = \frac{(T_1 - \Delta T_1) - (T_2 + \Delta T_2)}{T_1 - \Delta T_1} = 1 - \frac{T_2 + \Delta T_2}{T_1 - \Delta T_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Таким образом, термический коэффициент полезного действия необратимого цикла Карно меньше термического к. п. д. соответствующего обратимого цикла Карно:

$$\eta_{\text{к необр}} < \eta_{\text{к обр}} \qquad (12.10)$$

Этот вывод справедлив независимо от причин необратимости цикла Карно.

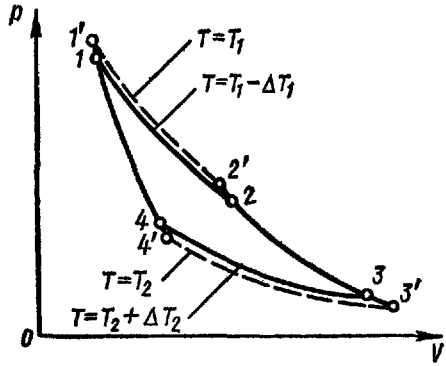

Рис. 12.5.

7. Можно доказать, что термический к. п. д. $\eta_{\text{необр}}$ любого необратимого цикла, всегда меньше коэффициента полезного действия обратимого цикла Карно, протекающего между двумя «источниками теплоты» с температурами T_1 и T_2, равными экстремальным значениям температур «источников теплоты», участвующих в осуществлении рассматриваемого необратимого цикла:

$$\eta_{\text{необр}} < \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}}. \qquad (12.11)$$

§ 12.4. Энтропия и свободная энергия

1. В § 10.1 мы видели, что внутренняя энергия системы U является однозначной функцией ее состояния. Второй закон термодинамики позволяет рассмотреть другие, важные для практики, однозначные функции состояния: энтропию и свободную энергию.

Отношение теплоты Q, полученной телом в изотермическом процессе, к температуре T «источника теплоты» называют **приведенным количеством теплоты** Q^*:

$$Q^* = \frac{Q}{T}. \qquad (12.12)$$

При нагревании тела ($Q > 0$) приведенная теплота Q^* положительна, при охлаждении — отрицательна.

В тех случаях, когда теплоту Q тело получает в произвольном процессе, необходимо разбить этот процесс на бесконечно малые участки. Приведенное количество теплоты, сообщенной телу на каждом бесконечно малом участке процесса, равно $\frac{\delta Q}{T}$, где T — температура соответствующего «источника теплоты»[1]. Суммируя эти величины для всех участков произвольного процесса C_1C_2, получим следующее выражение приведенного количества теплоты Q^*_{1-2}:

$$Q^*_{1-2} = \int_{C_1}^{C_2} \frac{\delta Q}{T}. \qquad (12.13)$$

2. Подсчитаем приведенное количество теплоты Q^*, сообщаемой телу в обратимом прямом цикле Карно (см. рис. 12.2). Разбивая цикл на четыре последовательных процесса и применяя к каждому из них формулу (12.13), получаем

$$Q^*_{\text{к}} = \int_1^{1'} \frac{\delta Q}{T} + \int_{1'}^{2} \frac{\delta Q}{T} + \int_2^{2'} \frac{\delta Q}{T} + \int_{2'}^{1} \frac{\delta Q}{T}. \qquad (12.14)$$

В адиабатических процессах (1′—2) и (2′—1) $\delta Q = 0$. Поэтому второй и четвертый интегралы в правой части (12.14) равны нулю. В изотермических процессах (*1—1′*) и (*2—2′*) температура постоянна и равна, соответственно, T_1 и T_2. Поэтому

$$Q^*_{\text{к}} = \frac{1}{T_1}\int_1^{1'} \delta Q + \frac{1}{T_2}\int_2^{2'} \delta Q = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}, \qquad (12.15)$$

где Q_1 — количество теплоты, полученной телом от нагревателя, а Q_2 — количество теплоты, полученной рабочим телом от холодильника.

Из уравнения (12.8) следует, что правая часть (12.15) равна нулю:

$$Q^*_{\text{к}} = 0. \qquad (12.16)$$

Таким образом, приведенное количество теплоты, сообщаемой телу в обратимом прямом цикле Карно, равно нулю.

Можно показать, что этот результат справедлив для любого обратимого цикла — *приведенное количество теплоты, сообщаемой телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю*:

$$\oint_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} \equiv 0. \qquad (12.17)$$

---

[1] В случае обратимого процесса T совпадает с температурой самого тела, совершающего этот процесс

Из тождества (12.17) следует, что стоящее под интегралом выражение $\frac{\delta Q}{T}$, в отличие от δQ, является полным дифференциалом некоторой функции S (см. § 10.3):

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обр}} \tag{12.18}$$

Введенную нами функцию состояния S называют **энтропией** тела. Из (12.18) видно, что dS и δQ имеют один и тот же знак. Таким образом, по характеру изменения энтропии можно судить о направлении процесса теплообмена (при нагревании тела его энтропия возрастает, при охлаждении — убывает).

3. В качестве примера рассмотрим энтропию идеального газа. По первому закону термодинамики для идеального газа имеем (см. уравнение (10.8′)):

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{M}{\mu} C_V\, dT + p dV,$$

так что

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обр}} = \frac{M}{\mu} C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV. \tag{12.19}$$

Отсюда, заменяя p по уравнению Менделеева—Клапейрона, находим

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обр}} = \frac{M}{\mu} C_V \frac{dT}{T} + \frac{M}{\mu} R \frac{dV}{V} \tag{12.20}$$

Легко видеть, что изменение энтропии идеального газа при переходе его из состояния *1* в состояние *2*, действительно, не зависит от вида процесса перехода *1—2*:

$$\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu}\left[\int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dT}{T} + R \int_{V}^{V_2} \frac{dV}{V}\right] =$$

$$= \frac{M}{\mu}\left[C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}\right]. \tag{12.21}$$

4. **Энтропия системы** равна сумме энтропий всех тел, входящих в систему. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из нагревателя, холодильника, рабочего тела и «потребителя совершаемой работы», т. е. тела, которое обменивается с рабочим телом энергией только в форме работы. Таким «потребителем работы» может служить, например, упругая пружина или груз, поднимаемый над поверхностью Земли. Как и раньше, обозначим температуры нагревателя и холодильника через T_1 и T_2.

Найдем выражение для изменения энтропии ΔS системы при совершении рабочим телом цикла Карно:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{р}} + \Delta S_{\text{н}} + \Delta S_{\text{х}} + \Delta S_{\text{п}} \tag{12.22}$$

где $\Delta S_р$ — изменение энтропии рабочего тела, $\Delta S_н$ и $\Delta S_х$ — изменение энтропии нагревателя и холодильника, $\Delta S_п$ — изменение энтропии «потребителя работы».

Рабочее тело в результате совершения цикла Карно возвращается в исходное состояние, так что

$$\Delta S_р = 0. \tag{12.23}$$

Изменение энтропии «потребителя работы» также равно нулю, так как он получает энергию только в форме работы:

$$\Delta S_р = 0. \tag{12.24}$$

Изменения энтропий нагревателя и холодильника в изотермических процессах

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_н = Q^*_и = -\frac{Q_1}{T_1}, \\ \Delta S_х = Q^*_х = -\frac{Q_2}{T_2}. \end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

где Q_1 и Q_2 — количества теплоты, полученной рабочим телом за один цикл, соответственно, от нагревателя и от холодильника ($Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$).

Из выражений (12.22) — (12.25) следует, что

$$\Delta S = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right). \tag{12.26}$$

В случае совершения рабочим телом обратимого цикла Карно правая часть уравнения (12.26) равна нулю (см. 12.8). Поэтому

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_{обр} = 0, \\ S_{обр} = \text{const}, \end{aligned}\right\} \tag{12.27}$$

т. е. *энтропия замкнутой системы, совершающей обратимый цикл Карно, не изменяется.*

Если рабочее тело совершает н е о б р а т и м ы й цикл Карно, то из соотношений (12.6) и (12.10) имеем

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

или

$$\frac{Q_2}{Q_1} < \left(-\frac{T_2}{T_1}\right) \quad \text{и} \quad \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{T_2}{T_1} < 0.$$

Умножим обе части этого неравенства на положительную дробь Q_1/T_2:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0.$$

Подставив этот результат в (12.26), окончательно получим

$$\Delta S_{\text{необр}} > 0. \tag{12.28}$$

Таким образом, *энтропия замкнутой системы, совершающей необратимый цикл Карно, возрастает.*

В термодинамике доказано, что полученные нами выводы можно обобщить на произвольный процесс, происходящий в замкнутой системе: *энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не может убывать*:

$$\Delta S \geqslant 0. \tag{12.29}$$

Знак равенства соответствует обратимым процессам, а знак неравенства — необратимым.

Такое же неравенство справедливо для любого элементарного изменения состояния замкнутой системы:

$$dS \geqslant 0. \tag{12.29'}$$

Дело в том, что при передаче теплоты δQ от одного тела системы к другому в о б р а т и м о м п р о ц е с с е температуры обоих тел равны друг другу. Поэтому убыль энтропии тела *1*, отдающего теплоту δQ, в точности равна увеличению энтропии тела *2*, получающего эту теплоту:

$$-dS_1 = dS_2 \quad \text{и} \quad dS_1 + dS_2 = 0.$$

Если же процесс теплообмена н е о б р а т и м (например, происходит при конечной разности температур, так что $T_1 > T_2$), то убыль энтропии первого тела меньше, чем увеличение энтропии второго тела:

$$-dS_1 < dS_2 \quad \text{и} \quad dS_1 + dS_2 > 0.$$

Соотношение (12.29'), полученное нами в результате применения второго закона термодинамики к замкнутым системам, очень важно, так как само по себе может служить математическим выражением этого закона.

5. Из уравнения (12.18) следует, что количество теплоты, сообщенной рабочему телу при бесконечно малом о б р а т и м о м изменении его состояния,

$$\delta Q = T dS, \tag{12.30}$$

где T — температура рабочего тела.

В случае н е о б р а т и м о г о процесса равенства (12.18) и (12.30) превращаются в неравенства:

$$dS > \frac{\delta Q}{T} \tag{12.18'}$$

и

$$\delta Q < T\, dS, \tag{12.30'}$$

где T — температура того «источника теплоты», который сообщает рабочему телу энергию δQ в рассматриваемом процессе бесконечно малого изменения состояния этого тела.

Докажем это для частного случая процесса изотермического нагревания тела. Пусть необратимость процесса обусловлена только теплообменом при конечной разности между температурами нагревателя (T) и тела ($T - \Delta T$). В этом процессе элементарное приращение энтропии тела выражается следующим образом:

$$dS = \frac{\delta Q}{T - \Delta T} > \frac{\delta Q}{T},$$

поскольку $\Delta T > 0$.

Результат совпадает с (12.18′). Для произвольного процесса из выражений (12.30) и (12.30′) имеем

$$\delta Q \leqslant TdS \tag{12.31}$$

Знак равенства относится к обратимым процессам, знак неравенства — к необратимым. Заменяя элементарную теплоту δQ по первому закону термодинамики:

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

можем записать неравенство (12.31) в следующей форме:

$$TdS \geqslant dU + \delta A. \tag{12.32}$$

Неравенство (12.32), объединяющее оба закона термодинамики, является ее важнейшим соотношением.

6. Из (12.32) следует, что в обратимом процессе

$$\delta A = -(dU - TdS),$$

или

$$\delta A = -d(U - TS) - SdT. \tag{12.33}$$

Обозначим

$$F = U - TS. \tag{12.34}$$

Тогда для элементарной работы, совершаемой телом, имеем следующее равенство:

$$\delta A = -(dF + SdT). \tag{12.35}$$

Из (12.34) видно, что F представляет собой разность двух функций состояния тела, а потому также является новой функцией его состояния. Эту величину называют **свободной энергией.**

Если рабочее тело совершает о б р а т и м ы й и з о т е р м и ч е с к и й п р о ц е с с, то $dT = 0$ и из (12.35) имеем

$$\delta A_{\text{изот}} = -dF.$$

Интегрируя это равенство в пределах обратимого изотермического перехода тела из состояния *1* в состояние *2*, получим

$$A_{\text{изот}} = F_1 - F_2. \tag{12.36}$$

Следовательно, свободная энергия тела служит мерой той работы, ко-

торую могло бы совершить это тело в обратимом изотермическом процессе. Из (12.34) следует, что

$$U = F + TS, \tag{12.37}$$

т. е. внутренняя энергия тела равна сумме его свободной энергии и так называемой **связанной энергии** TS. Свое название произведение TS получило потому, что оно представляет собой ту часть внутренней энергии тела, которая не может быть передана в форме работы в изотермическом процессе. Это как бы «обесцененная» часть внутренней энергии, которая при прочих равных условиях тем больше, чем больше энтропия тела. Поэтому можно сказать, что энтропия тела служит мерой «обесцененности» его энергии.

§ 12.5. Статистическое истолкование второго закона термодинамики

1. До сих пор, рассматривая второй закон термодинамики и следствия из него, мы не интересовались внутренним строением тел. Мы все время пользовались термодинамическим методом исследования (§ 9.1). В этом параграфе нужно рассмотреть вопрос о связи второго закона термодинамики с молекулярно-кинетической теорией строения вещества. Выяснение этой связи позволит глубже уяснить физическую сущность второго закона термодинамики.

2. С молекулярно-кинетической точки зрения каждому состоянию тела (например, газа) соответствует определенное распределение его молекул по объему и определенное распределение молекул по скоростям. Предположим, например, что в сосуде находятся только три «меченые» молекулы газа a, b и c, а весь объем сосуда разбит на три равные части I, II и III. Отвлечемся, ради простоты, от влияния на состояние газа распределения молекул по скоростям, т. е. предположим, что различные состояния газа отличаются только распределением молекул a, b и c по трем ячейкам объема. Всего возможно 27 различных распределений, приведенных в табл. 9.

3. Молекулы газа движутся совершенно хаотично. Следовательно, если бы мы длительное время τ наблюдали за возможными распределениями молекул a, b и c, то обнаружили бы, что, в среднем, все 27 распределений встречаются одинаково часто. Они, как говорят, равновозможны. В математике для характеристики степени возможности появления в заданных конкретных условиях некоторого определенного события вводят понятие **вероятности** w этого события. В частности, если при данных условиях могут поочередно осуществляться N различных событий, которые все равновозможны, то вероятность какого-либо одного определенного события

$$w = \frac{1}{N}. \tag{12.38}$$

Таким образом, вероятность каждого из равновозможных распределений, приведенных в табл. 9, равна 1/27. Однако вероятность каждого отдельного распределения, вычисляемая по формуле (12.38),

отлична от вероятности термодинамического состояния системы, соответствующего этому распределению. Это легче всего показать на примере, приведенном в таблице 9. Дело в том, что в однородном газе все молекулы одинаковы. Поэтому все состояния, соответствующие одним и тем же числам молекул в каждой ячейке, будут тождественными независимо от того, какие именно молекулы газа находятся в каждой ячейке. Так, например, распределения 4, 6 и 8 соответствуют одному и тому же состоянию, характеризующемуся наличием двух молекул в первой ячейке объема, одной — во второй ячейке и ни одной — в третьей. Вероятность такого состояния, очевидно, втрое больше вероятности каждого из распределений 4, 6 или 8, т. е. равна 3/27. Вероятность состояния, соответствующего равномерному распределению молекул по объему, когда в каждой ячейке находится по одной какой-либо молекуле, равна 6/27. В таблице 9 это будут распределения 22—27.

Таблица 9

№ распределения	Ячейки		
	I	II	III
1	*abc*	—	—
2	—	*abc*	—
3	—	—	*abc*
4	*ab*	*c*	—
5	*ab*	—	*c*
6	*ac*	*b*	—
7	*ac*	—	*b*
8	*bc*	*a*	—
9	*bc*	—	*a*
10	*c*	*ab*	—
11	—	*ab*	*c*
12	*b*	*ac*	—
13	—	*ac*	*b*
14	*a*	*bc*	—
15	—	*bc*	*a*
16	*c*	—	*ab*
17	—	*c*	*ab*
18	*b*	—	*ac*
19	—	*b*	*ac*
20	*a*	—	*bc*
21	—	*a*	*bc*
22	*a*	*b*	*c*
23	*a*	*c*	*b*
24	*b*	*a*	*c*
25	*b*	*c*	*a*
26	*c*	*a*	*b*
27	*c*	*b*	*a*

Следовательно, **вероятность** W какого-либо **состояния** тела больше вероятности w отдельного распределения в P раз:

$$W = wP, \tag{12.39}$$

где P — так называемая **термодинамическая вероятность состояния.** Термодинамическая вероятность какого-либо состояния тела или системы равна числу всевозможных микрораспределений частиц по координатам и скоростям, соответствующих данному термодинамическому состоянию (макросостоянию). В отличие от w и W, которые не могут быть больше единицы, P всегда больше или, в крайнем случае, равно единице.

4. Л. Больцман показал, что между энтропией S системы и термодинамической вероятностью P ее состояния существует следующая связь, называемая **формулой Больцмана.**

$$S = k\ln P + \text{const}, \tag{12.40}$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Выше было указано, что второй закон термодинамики эквивалентен утверждению о невозможности убывания энтропии замкнутой системы. Формула Больцмана позволяет дать следующее **статистическое истолкование** этого закона:

термодинамическая вероятность состояния замкнутой системы при всех происходящих в ней процессах не может убывать.

Следовательно, при всяком процессе, протекающем в замкнутой системе, изменение термодинамической вероятности ее состояния ΔP положительно или равно нулю:

$$\Delta P = P_2 - P_1 \geqslant 0. \tag{12.41}$$

В случае обратимого процесса $\Delta P = 0$, т. е. термодинамическая вероятность P не изменяется, а в случае необратимого процесса $\Delta P > 0$ и P возрастает. Поэтому необратимый процесс можно определить как процесс, обратный которому переводит систему из более вероятного состояния в менее вероятное. Ясно, что самопроизвольное протекание такого процесса маловероятно, хотя в принципе и возможно. Для его практического осуществления требуется одновременное протекание какого-либо другого (компенсирующего) процесса во внешних телах. По второму закону термодинамики компенсирующий процесс должен быть таким, чтобы термодинамическая вероятность состояния системы всех тел, участвующих в осуществлении обратного и компенсирующего процессов, в о з р а с т а л а. Примером необратимого процесса служит преобразование при трении упорядоченного поступательного движения молекул тел в их хаотическое тепловое движение. Равномерное распределение частиц газа или жидкости по объему более вероятно, чем неравномерное. Это обусловливает необратимость процесса диффузии.

Итак, *второй закон термодинамики является статистическим законом.* Он выражает необходимые закономерности хаотического дви-

жения б о л ь ш о г о числа частиц, входящих в состав замкнутой системы.

3. Совершенно ничем не оправдано распространение второго начала термодинамики, установленного для замкнутых земных систем на всю безграничную Вселенную. Такая экстраполяция привела некоторых физиков и философов-идеалистов к выводу о неизбежности выравнивания температур всех тел Вселенной и прекращения всяких иных форм движения, кроме хаотического теплового движения. Это состояние Р. Клаузиус назвал «тепловой смертью» Вселенной.

Философская несостоятельность вывода о неизбежности «тепловой смерти» Вселенной была вскрыта Ф. Энгельсом. В «Диалектике природы» Ф. Энгельс указывает: «Неуничтожаемость движения надо понимать не только в количественном, но и в качественном смысле» [1]. Согласно же выводу Клаузиуса «... энергия теряется, если не количественно, то качественно» [2], что с неизбежностью приводит к признанию «толчка извне», т. е. сотворения мира. Энгельс предостерегает от поверхностного опровержения гипотезы Клаузиуса путем ссылки на неисчерпаемость общей энергии Вселенной, так как оно не доказывает главного — вечности круговорота различных форм движения во Вселенной.

Теория Клаузиуса была подвергнута критике Л. Больцманом, а затем М. Смолуховским и другими физиками-материалистами, которые показали, что в связи с бесконечностью Вселенной в отдельных частях ее неизбежны флуктуации (см. § 12.6), нарушающие тепловое равновесие, причем величина и продолжительность таких флуктуаций может быть весьма велика. Можно доказать математическую порочность обобщения законов статистической физики, в том числе и второго закона термодинамики, на всю бесконечную Вселенную. Для такой системы все состояния равновероятны, а поэтому нет наиболее вероятного (равновесного) состояния, соответствующего «тепловой смерти».

§ 12.6. Флуктуации

1. Второй закон термодинамики неприменим к системам или их частям, состоящим из сравнительно небольшого числа частиц. Например, в достаточно сильно разреженных газах возможны значительные случайные отклонения от равномерного распределения молекул по объему. Вследствие этого плотность газа в том или ином месте может отличаться от средней плотности, соответствующей равновесному состоянию при заданных температуре и давлении. Равным образом могут происходить случайные отклонения температуры, давления и других физических величин от их средних значений. Все эти явления называют **флуктуациями** соответствующих величин (флуктуации плотности, температуры, давления и т. д.).

2. Остановимся кратко на вопросе о количественной оценке флуктуаций произвольной физической величины. Если M — истинное

[1] К. М а р к с, Ф. Э н г е л ь с. Сочинения, т. 20, стр. 360.
[2] Т а м ж е, стр. 600.

значение этой величины, $\langle M\rangle$ — ее среднее значение, то разность $\Delta M = M - \langle M\rangle$, а также ее среднее значение $\langle \Delta M\rangle = \langle M - \langle M\rangle\rangle$, не могут служить количественной мерой флуктуаций величины M. Дело в том, что величина ΔM непостоянна во времени, а

$$\langle \Delta M\rangle = 0, \tag{12 42}$$

так как отклонение величины M от $\langle M\rangle$ происходит одинаково часто как в сторону бо́льших ($M > \langle M\rangle$), так и в сторону меньших ($M < \langle M\rangle$) значений.

Количественной мерой флуктуаций может служить средняя величина квадрата разности ΔM, называемая **квадратичной флуктуацией:**

$$\langle (\Delta M)^2\rangle = \langle (M - \langle M\rangle)^2\rangle. \tag{12.43}$$

Квадратичная флуктуация не может быть отрицательной: $\langle (\Delta M)^2\rangle \geqslant 0$.

Пользуясь правилами алгебраических действий со средними величинами, можно доказать, что

$$\langle (\Delta M)^2\rangle = \langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2, \tag{12.43'}$$

где $\langle M^2\rangle$ — среднее значение квадрата величины M, а $\langle M\rangle^2$ — квадрат ее среднего значения.

Величину $\sqrt{\langle (\Delta M)^2\rangle}$ называют **абсолютной флуктуацией.** Она, как и квадратичная флуктуация, характеризует отклонения M от $\langle M\rangle$: если $\sqrt{\langle (\Delta M)^2\rangle}$ близок к нулю, то значительные отклонения M от $\langle M\rangle$ маловероятны, т. е. происходят крайне редко.

Для оценки относительной величины размаха колебаний M около значения $\langle M\rangle$ применяют **относительную флуктуацию** δ_M, равную отношению абсолютной флуктуации к $\langle M\rangle$:

$$\delta_M = \frac{\sqrt{\langle (\Delta M)^2\rangle}}{\langle M\rangle}. \tag{12.44}$$

3. Очевидно, что в химически однородном идеальном газе, находящемся в сосуде с неизменным объемом, относительные флуктуации для концентрации молекул, а также для плотности газа, его давления и температуры будут тем меньше, чем больше количество N молекул газа содержится в сосуде. Можно показать, что относительные флуктуации этих параметров состояния идеального газа обратно пропорциональны $\sqrt{N}$:

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta\rho)^2\rangle}}{\langle \rho\rangle} \sim \frac{\sqrt{\langle (\Delta p)^2\rangle}}{\langle p\rangle} \sim \frac{\sqrt{\langle (\Delta T)^2\rangle}}{\langle T\rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{12.45}$$

Например, если в сосуде содержится 1 кмоль газа ($N = 6{,}02 \cdot 10^{26}$), то относительные флуктуации плотности, давления и температуры име-

ют величины порядка $4 \cdot 10^{-14}$. Следовательно, вероятность сколь-либо заметных отклонений плотности, давления и температуры газа от их средних (равновесных) значений ничтожно мала. Иная картина наблюдается в случае сильно разреженного газа, т. е. когда N невелико.

В статистической физике доказана следующая важнейшая теорема теории флуктуаций: *если имеется система, состоящая из N независимых частей, то относительная флуктуация любой аддитивной*[1] *функции состояния системы обратно пропорциональна корню квадратному из N*:

$$\delta_{\text{м}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}. \qquad (12\,45')$$

4. Флуктуации физических величин имеют большое значение для оценки предела чувствительности измерительных приборов Поясним это на конкретных примерах.

а) Предположим, что мы измеряем массу тела путем взвешивания на пружинных весах Флуктуации давления окружающего воздуха, тепловое движение частиц в пружине весов могут оказать влияние на показания весов В результате флуктуаций появится некоторое дополнительное растяжение пружины $\sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}$, равное абсолютной флуктуации ее длины Растяжение пружины телом с массой m вызывает удлинение пружины на величину x, определяемую из условия $mg = \kappa x$:

$$x = \frac{mg}{\kappa},$$

где κ — коэффициент упругости пружины.

Очевидно, что возможность измерения массы ограничена условием:

$$x \geqslant \sqrt{\langle(\Delta x)^2\rangle}.$$

Приближенную оценку флуктуационного растяжения пружины можно произвести следующим образом При изменении длины пружины на Δx ее потенциальная энергия $W_{\text{п}}$ изменяется, согласно формуле (3 10), на величину

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{\kappa}{2}(x + \Delta x)^2 - \frac{\kappa}{2}x^2 = \kappa x \cdot \Delta x + \frac{\kappa}{2}(\Delta x)^2.$$

Среднее значение $\Delta W_{\text{п}}$

$$\langle \Delta W_{\text{п}} \rangle = \kappa x \langle \Delta x \rangle + \frac{\kappa}{2}\langle(\Delta x)^2\rangle = \frac{\kappa}{2}\langle(\Delta x)^2\rangle,$$

[1] Функцию состояния системы называют аддитивной, если значение этой функции для системы равно сумме ее значений для всех независимых частей этой системы

так как при флуктуационных колебаниях $\langle \Delta x \rangle = 0$. С другой стороны, средняя потенциальная энергия, приходящаяся на одну степень свободы, по закону равномерного распределения энергии (§ 11 5), равна $\frac{kT}{2}$ Положив

$$\langle \Delta W_{\text{п}} \rangle = \frac{kT}{2},$$

получим

$$\sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle} \approx \sqrt{\frac{kT}{\kappa}}.$$

Следовательно, предельно малая масса m, которая может быть измерена на пружинных весах ($x = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$ равна

$$m = \frac{\kappa}{g} x = \frac{\kappa}{g} \sqrt{\frac{kT}{\kappa}} = \frac{\sqrt{\kappa kT}}{g}.$$

б) В качестве второго примера рассмотрим измерение температуры с помощью газового термометра, наполненного идеальным газом В результате флуктуаций температуры показания термометра не будут оставаться постоянными Величину относительной флуктуации температуры можно оценить по формуле (12 45), откуда

$$\sqrt{\langle (\Delta T)^2 \rangle} \sim \frac{T}{\sqrt{N}}.$$

Ясно, что измеряемые термометром изменения температуры Δt не должны быть меньше, чем абсолютная флуктуация показания прибора, равная $\sqrt{\langle (\Delta T)^2 \rangle}$:

$$\Delta t \geqslant \sqrt{\langle (\Delta T)^2 \rangle} \sim \frac{T}{\sqrt{N}}.$$

Например, если в газовом термометре содержится 10^{-6} моля газа, т. е $N = 6{,}02 \cdot 10^{17}$, то минимальное изменение температуры, которое может быть отмечено с помощью прибора, по порядку величины равно

$$\Delta t \approx 10^{-9} T$$

Все измеряемые на практике изменения температуры несоизмеримо велики по сравнению с пределом чувствительности газового термометра

в) В современной радиотехнике большую роль играют так называемые электрические флуктуации в радиоаппаратуре Например, в результате флуктуаций числа электронов, вылетающих из раскаленного катода, происходят флуктуации тока, проходящего в электронной лампе. Это явление, называемое **дробовым эффектом,** вместе с другими флуктуационными явлениями ограничивает пределы чувствительности приемной радиоаппаратуры.

§ 12.7. Броуновское движение

1. **Броуновским движением** называют наблюдающееся под микроскопом непрерывное хаотическое движение мелких частиц, взвешенных в жидкости или газе. Хаотическое движение небольших частиц обусловлено флуктуациями давления, производимого на частицы молекулами жидкости или газа. Броуновские частицы испытывают сравнительно небольшое число столкновений с молекулами за единицу времени и действующие на них силы не уравновешиваются.

Первые наблюдения за движением частиц, взвешенных в жидкости, были сделаны в 1827 г. английским ботаником Р. Броуном. Потребовалось более трех четвертей века, чтобы физики смогли понять причины этого явления и его важность для молекулярно-кинетической теории и термодинамики. Вначале пытались объяснить движение броуновской частицы простыми физическими причинами — встряхиванием, неоднородностью температуры, световыми, химическими или какими-либо другими воздействиями. Постепенно выяснились важнейшие особенности броуновского движения:

1) оно продолжается неограниченно долго без каких-либо видимых изменений;

2) интенсивность движения броуновских частиц зависит от их размеров, но не от природы частиц; она возрастает с ростом температуры и уменьшением вязкости жидкости.

Длительное экспериментальное изучение привело к выводу, что броуновские частицы подобны поплавкам на «молекулярном море» — их беспорядочное движение лишь выявляет беспорядочное движение самих молекул жидкости. Таким образом, броуновское движение является прямым доказательством существования молекул и их хаотического движения. При своем движении броуновские частицы могут перемещаться вверх, т. е. как бы «всплывать» в жидкости. Это происходит в тех случаях, когда молекулы жидкости, находящиеся ниже частицы, передают ей больший импульс, чем молекулы, расположенные над ней. Подъем вверх броуновской частицы означает увеличение ее потенциальной энергии за счет кинетической энергии соседних молекул, т. е. за счет местного охлаждения жидкости. Этот процесс противоречит второму закону термодинамики, так как увеличение механической энергии броуновской частицы происходит за счет охлаждения **одного источника теплоты** — жидкости. Следовательно, броуновское движение доказывает ограниченность второго закона термодинамики, его статистический характер.

2. Закономерности броуновского движения были подробно изучены А. Эйнштейном и М. Смолуховским в 1906 г. В основе работы Эйнштейна лежало предположение о том, что броуновские частицы подобны большим молекулам постороннего вещества, разбросанным среди молекул чистой жидкости или газа. Такие частицы должны подчиняться законам разбавленных растворов, которые совпадают с законами идеальных газов. Размеры броуновских частиц таковы, что с помощью микроскопа можно наблюдать за движением этих частиц. Оказывает-

ся, что среднее смещение $\langle x \rangle$ частицы вдоль произвольного направления равно нулю. Это свидетельствует о полной хаотичности движения броуновских частиц. В то же время средняя величина квадрата смещения $\langle x^2 \rangle$ пропорциональна времени t наблюдения над частицей:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt, \tag{12.46}$$

здесь D — коэффициент диффузии броуновских частиц, который для шарообразной частицы равен:

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta a N_A}, \tag{12.47}$$

где N_A — число Авогадро, η — коэффициент вязкости жидкости, a — радиус частицы.

Из формул Эйнштейна видно, что смещение броуновских частиц определяется их размерами, а не природой частиц. Закономерности броуновского движения дают независимый метод экспериментального определения числа Авогадро. Такого рода опыты были проведены Ж. Перреном.

Вопросы для повторения

1. В чем различие между обратимыми и необратимыми процессами? Почему все реальные процессы необратимы?
2. Начертите обратимый цикл Карно и выведите выражение для его термического коэффициента полезного действия
3. В чем состоит второй закон термодинамики? Чем он дополняет первое начало термодинамики?
4. Каково статистическое истолкование второго закона термодинамики и каковы пределы его применимости?
5. Что такое энтропия и свободная энергия?
6. Что называют квадратичной, абсолютной и относительной флуктуациями?
7. Каковы причины и основные особенности броуновского движения?

Примеры решения задач

Задача 12.1. Какую работу совершают внешние силы в идеальной холодильной машине, работающей по обратному циклу Карно, для того, чтобы унестн из холодильнои камеры 10^5 Дж теплоты, если температура в камере 263 К, а температура охлаждающей воды 285 К?

Дано

$Q_2 = 10^5$ Дж,
$T_2 = 263$ К,
$T_1 = 285$ К

$A' - ?$

Решение

Затраченную работу A' можно вычислить по формуле (12.7):

$$Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta} \cdot A', \tag{а}$$

где η — коэффициент полезного действия прямого цикла Карно, равный

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Следовательно,

$$A' = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Производим вычисления в Международной системе единиц (СИ):

$$A' = \frac{10^5 \cdot 22}{263}\ \text{Дж} = 8{,}35 \cdot 10^5\ \text{Дж}.$$

Задача 12.2. Кусок льда массой 0,1 кг, имевший первоначальную температуру 240 К, превращен в пар при температуре 373 К. Определить изменение энтропии, считая, что теплоемкости льда и воды не зависят от температуры. Давление атмосферное.

Удельные теплоемкости льда и воды равны, соответственно, $1{,}8 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) и $4{,}18 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота кипения воды $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг

Дано

$M = 0{,}1$ кг,
$T_1 = 240$ К,
$T_2 = 373$ К,
$c_л = 1{,}8 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К),
$c_в = 4{,}18 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К),
$r_п = 3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг,
$r_к = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг

ΔS — ?

Решение

В общем случае изменение энтропии ΔS выражается формулой

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\delta Q}{T}.$$

Изменение энтропии при нагревании льда

$$\Delta S_1 = Mc_л \int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T},$$

где $T_0 = 273$ К — температура плавления льда и $c_л$ — удельная теплоемкость льда.

После интегрирования получим

$$\Delta S_1 = \frac{Mc_л}{\lg e} [\lg T_0 - \lg T_1].$$

Плавление льда происходит при постоянной температуре T_0. Изменение энтропии при плавлении льда выразится так:

$$\Delta S_2 = \frac{Mr_п}{T_0},$$

где $r_п$ — удельная теплота плавления льда

Изменение энтропии при нагревании воды до $T_2 = 373$ К по аналогии с ΔS_1 будет

$$\Delta S_3 = \frac{Mc_в}{\lg e} [\lg T_2 - \lg T_0],$$

где $c_в$ — удельная теплоемкость воды.

Изменение энтропии в процессе кипения при постоянной температуре T_2

$$\Delta S_4 = \frac{Mr_к}{T_2},$$

где $r_к$ — удельная теплота кипения воды.

Общее изменение эитропии при превращеиии льда в пар

$$\Delta S = \frac{Mc_{\text{л}}}{\lg e}(\lg T_0 - \lg T_1) + \frac{Mr_{\text{п}}}{T_0} + \frac{Mc_{\text{в}}}{\lg e}(\lg T_2 - \lg T_0) + \frac{Mr_{\text{к}}}{T_2}.$$

Производим вычисления в Международной системе едииниц (СИ):

$$\Delta S = \left[\frac{0{,}1 \cdot 1{,}8 \cdot 10^3}{0{,}434}(\lg 273 - \lg 240) + \frac{0{,}1 \cdot 3{,}35 \cdot 10^5}{273} + \right.$$

$$\left. + \frac{0{,}1 \cdot 4{,}18 \cdot 10^3}{0{,}434}(\lg 373 - \lg 273) + \frac{0{,}1 \cdot 2{,}26 \cdot 10^6}{373}\right] \text{Дж/К} = 883 \text{ Дж/К}.$$

Глава XIII

РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ И ПАРЫ

§ 13.1. Силы межмолекулярного взаимодействия в газах

1 В § 9.2 отмечалось, что разреженные реальные газы с достаточной степенью точности подчиняются законам идеальных газов Во всех остальных случаях свойства реальных и идеальных газов различны. Так, например, из уравнения Менделеева—Клапейрона следует, что отношение $\frac{pV_\mu}{RT}$, называемое **коэффициентом сжимаемости,** для идеальных газов всегда равно единице. Однако опыты показывают, что коэффициенты сжимаемости для всех газов зависят от давления и температуры. При достаточно высоких давлениях все реальные газы, независимо от их температуры, менее сжимаемы, чем идеальные $\left(\frac{pV_\mu}{RT} > 1\right)$.

Экспериментальные исследования удельной теплоемкости, вязкости и других свойств газов показали, что эти свойства тоже более или менее значительно отличаются от соответствующих свойств идеальных газов Более того, приближенная теория, основанная на законах идеальных газов, часто не в состоянии объяснить даже качественный характер зависимости свойств газов от их параметров состояния.

2 Причина этих трудностей кроется в том, что поведение молекул реальных газов отлично от того, какое приписывается частицам идеальных газов. Во всех телах (твердых, жидких и газообразных) молекулы в з а и м о д е й с т в у ю т друг с другом. Тот факт, что свойства разреженных газов близки к свойствам идеальных газов, свидетельствует о том, что силы взаимодействия между молекулами в сильной степени зависят от расстояния между ними Эти силы имеют электромагнитную, а также особую квантовую природу. Опыты показывают, что при расстояниях более 10^{-7} см межмолекулярным взаимодействием можно пренебречь

3. Своеобразные свойства поверхностного слоя жидкостей, которые будут изложены в XIV главе, а также способность твердых тел сопротивляться растяжению приводят к выводу о том, что между молекулами вещества в любом агрегатном состоянии действуют силы взаимного п р и т я ж е н и я. Относительно малая сжимаемость сильно уплотненных газов, а также способность жидких и твердых тел сопротивляться сжатию указывают на то, что между молекулами действуют также и силы взаимного о т т а л к и в а н и я. Существенно, что эти силы действуют о д н о в р е м е н н о. В противном случае тела не были бы устойчивы. образующие их частицы разлетались бы в разные стороны или «слипались» бы. Из тех же соображений следует, что зависимость сил взаимного притяжения и отталкивания от расстояния r между молекулами должна быть различной. На очень близких

расстояниях преобладают силы отталкивания $\mathbf{F}_1$, на более далеких — силы взаимного притяжения $\mathbf{F}_2$, причем

$$\mathbf{F}_1 = F_{1r}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_2 = F_{2r}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{13.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный в точку нахождения рассматриваемой молекулы из той точки, в которой находится другая молекула, действующая на первую с силами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Проекции F_{1r} и F_{2r} сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ на направление вектора $\mathbf{r}$ зависят от расстояния r между взаимодействующими молекулами. Примерный характер этих зависимостей показан на рис. 13.1. Результирующая сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = F_r\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{13.1'}$$

причем

$$F_r = F_{1r} + F_{2r}. \tag{13.1''}$$

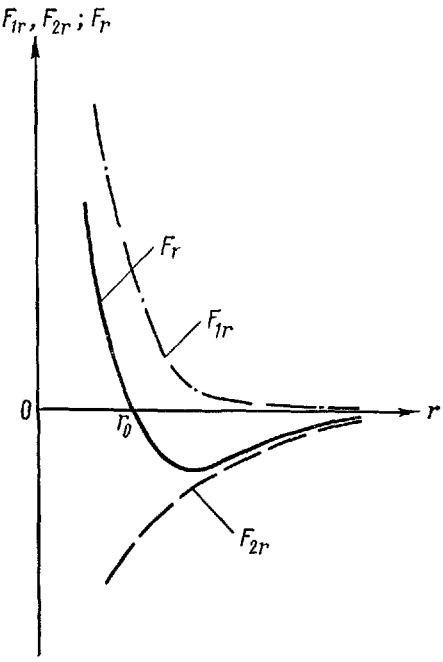

Рис. 13.1.

Характер зависимости F_r от r также показан на рис. 13.1.

При $r = r_0$ силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ взаимно уравновешиваются и результирующая сила $\mathbf{F} = 0$. Если $r > r_0$, то преобладают силы взаимного притяжения, если $r < r_0$ — преобладают силы отталкивания. Таким образом, r_0 — это то равновесное расстояние между молекулами, на котором они находились бы при отсутствии теплового движения, нарушающего это равновесие.

4. Рассмотрим взаимную **потенциальную энергию** $w_п$ двух молекул. Ее можно найти следующим образом. Подсчитаем элементарную работу dA, совершаемую результирующей силой $\mathbf{F}$ межмолекулярного взаимодействия[1] при увеличении расстояния между молекулами на dr:

$$dA = (\mathbf{F},\ d\mathbf{r}) = F_r dr. \tag{13.2}$$

---

[1] Сила $\mathbf{F}$ зависит от расстояния r между молекулами и направлена вдоль соединяющей их прямой. Поэтому работа этой силы вдоль замкнутой траектории равна нулю $\oint (\mathbf{F},\ d\mathbf{r}) \equiv \oint F_r(r) \cdot dr = 0$. Следовательно, сила $\mathbf{F}$ является консервативной, а ее элементарная работа — полным дифференциалом (см. § 3.2).

С другой стороны, эта работа совершается за счет уменьшения взаимной потенциальной энергии молекул:

$$dA = -dw_{\text{п}}. \tag{13.2'}$$

Из уравнений (13.2) и (13.2') следует

$$dw_{\text{п}} = -F_r dr. \tag{13.3}$$

Интегрируя выражение (13.3) по r от r до ∞, получим

$$\int_{w_{\text{п}}}^{w_{\text{п}\infty}} dw_{\text{п}} = -\int_{r}^{\infty} F_r dr$$

или

$$w_{\text{п}} - w_{\text{п}\infty} = \int_{r}^{\infty} F_r dr.$$

На бесконечно большом расстоянии друг от друга молекулы не взаимодействуют. Поэтому взаимную потенциальную энергию $w_{\text{п}\infty}$ двух бесконечно удаленных друг от друга молекул можно считать равной нулю. Окончательно получим

$$w_{\text{п}} = \int_{r}^{\infty} F_r dr. \tag{13.4}$$

Интеграл, стоящий справа, можно найти графически, если задана зависимость F_r от r (см. рис. 13.1). Он пропорционален площади, ограниченной кривой $F_r = F_r(r)$, осью r и вертикалью ($r = \text{const}$), соответствующей тому значению r, для которого нужно найти $w_{\text{п}}$. Из рис. 13.1 видно, что при $r > r_0$ взаимная потенциальная энергия отрицательна, так как $F_r < 0$. При $r = r_0$, как видно из уравнения (13.3), $\left(\frac{dw_{\text{п}}}{dr}\right)_{r=r_0} = -F_r(r_0) = 0$, т. е. $w_{\text{п}}$ достигает минимума.

Мы получили важный результат: в состоянии устойчивого равновесия система, состоящая из двух взаимодействующих молекул, обладает м и н и м а л ь н о й потенциальной энергией. Дальнейшее уменьшение r приводит к увеличению $w_{\text{п}}$ и превращению ее из отрицательной в положительную. Характер зависимости взаимной потенциальной энергии двух молекул от расстояния между ними показан на рис. 13.2.

Минимальная величина $w_{\text{п}_{\text{мин}}}$ потенциальной энергии (рис. 13.2) имеет значение для возможности существования определенного агрегатного состояния вещества. Если $|w_{\text{п}_{\text{мин}}}| \ll kT$, где kT—удвоенная средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы хаотического теплового движения молекулы (§ 11.5), то вещество находится в газообразном состоянии. Условие $|w_{\text{п}_{\text{мин}}}| \gg kT$ соответствует твердому состоянию, а $|w_{\text{п}_{\text{мин}}}| \approx kT$ — жидкому состоянию.

5. Сравнительно слабые силы притяжения, которые действуют между молекулами реального газа на расстояниях порядка 10^{-7} см, называют **ван-дер-ваальсовыми силами** по имени ученого Ван-дер-Ваальса, который впервые получил приближенное уравнение состояния реального газа (см. § 13.2). Различают три типа ван-дер-ваальсовых сил притяжения.

а) **Ориентационные силы,** которые связаны с наличием у молекул, имеющих несимметричное строение (полярные молекулы), так на-

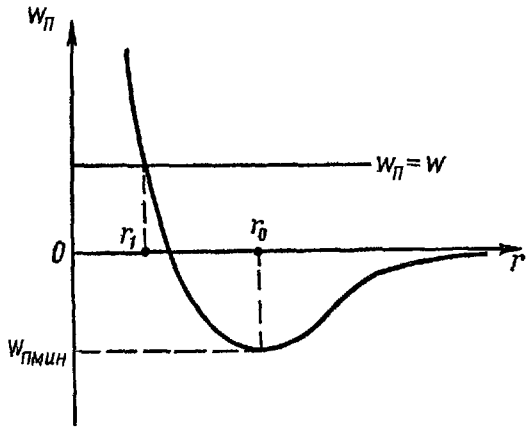

Рис 13.2.

зываемых дипольных электрических моментов p_e. В результате взаимодействия дипольных моментов двух молекул возникает сила притяжения $\mathbf{F}_{ор}$.

$$F_{ор} \sim \frac{p_e^4}{kT} \cdot \frac{1}{r^7},$$

где r — расстояние между молекулами. Ориентационные силы играют основную роль в притяжении полярных молекул.

б) Нейтральная (электрически незаряженная) полярная молекула реального газа находится в электрическом поле, которое создает другая полярная молекула. Действие этого поля приводит к смещению в первой молекуле центров тяжести положительных и отрицательных зарядов. Благодаря этому изменяются дипольные электрические моменты молекул и между ними возникают **индукционные силы** притяжения $\mathbf{F}_{инд}$:

$$F_{инд} \sim \alpha p_e^2 \cdot \frac{1}{r^7},$$

где α — так называемая поляризуемость молекулы. Остальные обозначения имеют такой же смысл, как и в случае ориентационных сил.

в) Наконец, колебания электронов в данной молекуле (или атоме) могут приводить к возбуждению колебаний электронов в другой молекуле (атоме). Колебания электронов соседних молекул происходят в одинаковой фазе и приводят к притяжению двух молекул (атомов). Такого рода резонансные силы притяжения называют **дисперсионными.** Они играют основную роль при взаимодействии неполярных молекул. Сила дисперсионного притяжения:

$$F_{\text{дисп}} \sim \alpha^2 I \cdot \frac{1}{r^7},$$

где I — первый потенциал ионизации атома (или молекулы), α — ее поляризуемость

Следует отметить, что ван-дер-ваальсовые силы убывают прямо пропорционально седьмой степени расстояния между молекулами ($F \sim \frac{1}{r^7}$). Потенциальная энергия ван-дер-ваальсового притяжения составляет $(0{,}4 \div 4) \cdot 10^3$ Дж/моль. Сила притяжения $\mathbf{F}_2$ между двумя молекулами, представленная на рис. 13.1, является результирующей всех типов сил притяжения, перечисленных выше.

На расстояниях $r \leqslant 10^{-8}$ см между молекулами возникает особое квантовое взаимодействие, которое приводит либо к появлению значительных сил отталкивания молекул, либо к сильному притяжению соседних атомов или групп атомов и установлению между ними новых химических (ионных, ковалентных) связей, т. е. к возникновению химической реакции и образованию новых молекул. Силы отталкивания убывают с увеличением r значительно быстрее, чем ван-дер-ваальсовы силы притяжения: $F_1 \sim \frac{1}{r^n}$, где $n \geqslant 9$.

Теория химической связи атомов в молекуле основана на квантовой механике. Потенциальная энергия химического взаимодействия имеет величину порядка $(0{,}4 \div 4) \cdot 10^4$ Дж/моль.

6. Для системы, состоящей из двух молекул, силы взаимодействия являются внутренними. Поэтому они не могут изменить полную энергию w системы Напомним, что w складывается из кинетической энергии молекул $w_к$ и их взаимной потенциальной энергии $w_п$. Таким образом,

$$dw = dw_к + dw_п = 0. \tag{13.5}$$

Из уравнений (13.3) и (13.5) имеем

$$dw_к = -dw_п = F_r dr. \tag{13.6}$$

При сближении молекул ($dr < 0$) до расстояния r_0 их взаимная потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая соответственно увеличивается. Это происходит за счет положительной работы, совершаемой результирующей силой взаимного п р и т я ж е н и я между молекулами ($F_r < 0$ при $r > r_0$).

Дальнейшее уменьшение расстояния между молекулами сопряжено с совершением ими работы против результирующей силы **F** взаимно-

го отталкивания ($F_r > 0$ при $r < r_0$). Следовательно, этот процесс связан с уменьшением кинетической энергии молекул. К моменту максимального сближения молекул ($r = r_1$) вся их кинетическая энергия оказывается полностью израсходованной на совершение работы против сил отталкивания:

$$w_{к_1} = 0,$$

а их взаимная потенциальная энергия $w_п$ совпадает с полной энергией w:

$$w_{п_1} = w = w_п + w_к. \tag{13.7}$$

Из уравнения (13.7) следует, что r_1 равно значению абсциссы точки пересечения кривой $w_п(r)$ с горизонтальной прямой $w_п = w$ (см. рис. 13.2).

При прочих равных условиях расстояние r_1 тем меньше, чем больше кинетическая энергия молекул, т. е. чем выше температура газа. Однако при малых r потенциальная энергия $w_п$ очень быстро растет с уменьшением r. Поэтому даже значительное изменение температуры газа вызывает сравнительно небольшое изменение величины r_1. В первом приближении можно считать, что r_1 зависит только от химической природы газа. Это результат того, что силы взаимного отталкивания между молекулами очень быстро увеличиваются при уменьшении расстояния между ними (рис. 13.1). Расстояние r_1 представляет собой не что иное, как введенный в § 11.4 эффективный диаметр молекул d.

§ 13.2. Уравнение Ван-дер-Ваальса

1. Из сказанного в предыдущем параграфе ясно, что в первом приближении молекулы реального газа можно уподобить абсолютно твердым шарикам с диаметром d, между которыми действуют только силы взаимного притяжения. Учитывая конечные размеры молекул, мы тем самым приближенно принимаем во внимание действие сил взаимного отталкивания между ними

Такая модель газа, принятая голландским физиком Я. Ван-дер-Ваальсом, позволила ему получить уравнение состояния реального газа, более совершенное, чем уравнение Менделеева—Клапейрона.

2. Каждая молекула реального газа имеет объем $\tilde{v} = \frac{1}{6}\pi d^3$. Поэтому молекулы газа движутся в сосуде менее свободно, чем «точечные» молекулы идеального газа. Ван-дер-Ваальс учел собственный объем молекул газа путем замены в уравнении Менделеева-Клапейрона

$$pV_μ = RT$$

полного объема $V_μ$ сосуда, занимаемого молем газа, на так называемый «свободный» объем

$$V_μ^* = V_μ - b, \tag{13.8}$$

где b — поправка Ван-дер-Ваальса, зависящая от собственного объема молекул $\widetilde{v}$.

Докажем, что поправка b в четыре раза больше собственного объема всех N_A молекул одного моля газа (N_A — число Авогадро):

$$b = 4N_A\widetilde{v}. \tag{13.9}$$

Для доказательства рассмотрим сферу радиуса d, центр которой совпадает с центром произвольной молекулы Внутри этой сферы не могут находиться центры других молекул. Объем этой сферы — «запрещенный» объем $v_з$ для центров всех молекул, соударяющихся с данной. Он в восемь раз больше собственного объема молекулы:

$$v_з = \frac{4}{3}\pi d^3 = 8\widetilde{v}.$$

Вероятность одновременного соударения трех и большего числа молекул при обычных плотностях газа очень мала. Поэтому можно ограничиться случаями соударения только двух молекул. Объем $v_з$ дважды учитывает каждую молекулу: один раз как ударяющую, другой раз как ударяемую. Поэтому в пересчете на одну молекулу «запрещенный» объем равен $0{,}5\,v_з = 4\widetilde{v}$. Поправка Ван-дер-Ваальса b представляет собой «запрещенный» объем, приходящийся на все N_A молекул моля газа, т. е.

$$b = 4\widetilde{v}N_A,$$

что и требовалось доказать.

Если объем измеряют в м^3, то коэффициент b имеет размерность м^3/моль. Из выражения (13.9) следует, что b зависит от эффективного диаметра молекул, т. е. от химической природы газа.

3. Несколько сложнее учесть влияние сил взаимного притяжения между молекулами. Эти силы очень быстро убывают с увеличением расстояния между молекулами. Поэтому можно считать, что каждая молекула взаимодействует лишь с теми частицами, которые находятся от нее на расстояниях $r \leqslant R_м$, где $R_м$ — так называемый **радиус молекулярного действия**, имеющий величину порядка 10^{-7} см. Сферу радиуса $R_м$, построенную вокруг молекулы, называют **сферой ее молекулярного действия.**

Если молекула находится внутри объема газа, то силы притяжения ее остальными частицами газа взаимно уравновешиваются и никак не влияют на характер движения этой молекулы.

Иначе обстоит дело с молекулами, находящимися вблизи стенки сосуда MN (рис 13.3). У них сферы молекулярного действия только

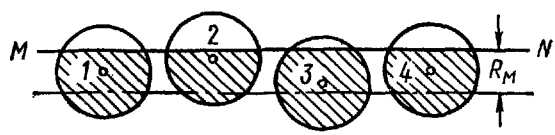

Рис. 13. 3.

частично находятся внутри газа (области, заштрихованные на рис. 13.3). Найдем равнодействующую сил притяжения, приложенных к произвольной молекуле K, находящейся в слое газа, пограничном со стенкой. Для этого разобьем сферу молекулярного действия молекулы K на четыре области $а$, $б$, $г$ и $д$ (рис. 13.4). Плоскости AB и CD проведены параллельно поверхности стенки MN, причем плоскость CD симметрична поверхности стенки относительно диаметральной плоскости AB. Области $б$, $г$ и $д$ в отличие от области $а$, заполнены молекулами газа.

Силы, действующие на молекулу K со стороны молекул, находящихся в шаровых слоях $б$ и $г$, взаимно уравновешиваются. Притяжение же молекулы K частицами, находящимися в шаровом сегменте, ничем не компенсируется, так как в сегменте $а$ молекул газа нет[1]. Из соображений симметрии ясно, что результирующая сила $\mathbf{F}_k$ должна быть направлена перпендикулярно к стенке внутрь газа (см. рис. 13.4). Для данного газа и фиксированного положения молекулы K относительно стенки сила $\mathbf{F}_k$ будет тем больше, чем больше молекул заключено в сегменте $д$. Иными словами, эта сила пропорциональна числу молекул в единице объема газа:

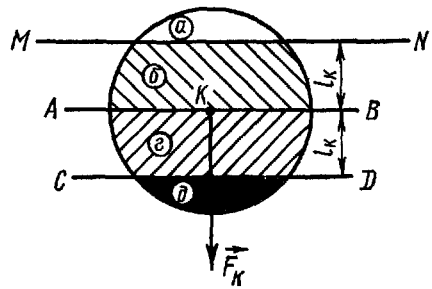

Рис. 13.4.

$$F_k = a_k n_0, \tag{13.10}$$

где коэффициент a_k зависит от химической природы газа и расстояния l_k от центра молекулы K до стенки сосуда (см. рис. 13 4).

Если $l_k \geqslant R_м$, то области $а$ и $д$ исчезают и $F_k = 0$. Таким образом, молекулы, отстоящие от стенок сосуда на расстояниях $R_м$ и больших, уже можно считать «внутренними».

4. Действие сил $\mathbf{F}_k$ приводит к тому, что в пограничном со стенкой слое газа молекулы движутся по направлению к стенке замедленно. Они ведут себя подобно шарам, которые прикреплены к пружинам и растягивают их в процессе движения за счет убыли своей кинетической энергии. Поэтому удары молекул о стенки сосуда несколько смягчены. Давление p, производимое на стенки реальным газом, меньше, чем в случае идеального газа $p_{ид}$, имеющего ту же температуру T и то же число молекул n_0 в единице объема:

$$p = p_{ид} - p^* \tag{13.11}$$

или

$$p_{ид} = p + p^*, \tag{13.11'}$$

[1] Влияиием частиц стенок сосуда пренебрегаем.

где p^* — поправка, обусловленная действием сил взаимного притяжения между молекулами; это давление называют **внутренним давлением.**

Выше мы уже говорили, что в и у т р и газа силы взаимного притяжения между молекулами не влияют на их движение. Следовательно, внутри газа давление равно $p_{\text{ид}}$, а у стенок оно меньше и равно p. Добавочное давление p^* производит на газ слой его молекул, граничащих со стенками. Оно вызвано силами $\mathbf{F}_k$ и равно

$$p^* = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{n} F_k, \tag{13.12}$$

где сумма сил $\mathbf{F}_k$ распространена на все n молекул пограничного слоя газа, а S — площадь стенок сосуда.

Заменив F_k по формуле (13.10), получим

$$p^* = \frac{n_0}{S} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

или

$$p^* = \frac{n_0 n}{S} \alpha_{\text{ср}}, \tag{13.13}$$

где $\alpha_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ — среднее значение коэффициента a_k для в с е х молекул пограничного слоя, зависящее только от химической природы газа.

Число молекул n, заключенных в пограничном слое, равно произведению объема этого слоя $SR_{\text{м}}$ на n_0:

$$n = n_0 S R_{\text{м}}.$$

Подставив это выражение в (13.13), получим

$$p^* = \alpha_{\text{ср}} R_{\text{м}} n_0^2 = a' n_0^2, \tag{13.14}$$

где

$$a' = \alpha_{\text{ср}} R_{\text{м}}.$$

Число молекул в единице объема n_0 равно отношению плотности ρ к массе одной молекулы m:

$$n_0 = \frac{\rho}{m}.$$

причем $\rho = \frac{\mu}{V_\mu}$, где μ — молярная масса, а V_μ — объем сосуда, занимаемого молем газа. Поэтому можем написать

$$n_0 = \frac{\mu}{m} \cdot \frac{1}{V_\mu}. \tag{13.15}$$

Из уравнений (13.14) и (13.15) имеем

$$p^* = \frac{a' \mu^2}{m^2} \frac{1}{V_\mu^2} = \frac{a'}{V_\mu^2}, \qquad (13.16)$$

где коэффициент Ван-дер-Ваальса $a = \frac{a'\mu^2}{m_0^2}$ зависит только от химической природы газа.

Подставив это выражение для p^* в уравнение (13.11'), получим следующее выражение для давления внутри газа:

$$p_{\text{ид}} = p + \frac{a}{V_\mu^2}, \qquad (13.17)$$

где p — давление газа на стенки сосуда.

Если давление измеряют в Па, а объем V_μ — в м^3/моль, то коэффициент a имеет размерность Па · м^6/моль^2.

5. Подставим в уравнение Менделеева — Клапейрона $V_\mu - b$ вместо V_μ и $p_{\text{ид}}$ вместо p, тогда получим

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT. \qquad (13.18)$$

Это уравнение состояния реальных газов впервые было выведено в 1873 г. Я. Ван-дер-Ваальсом и носит его имя.

Уравнение в форме (13.18) справедливо для одного моля газа. Для произвольной массы газа M объем

$$V = \frac{M}{\mu} V_\mu.$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы M газа получим, умножив (13.18) на число молей $\frac{M}{\mu}$ и заменив $\frac{M}{\mu}V_\mu$ через V:

$$\left(p + \frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{M}{\mu}b\right) = \frac{M}{\mu}RT. \qquad (13.19)$$

Это уравнение согласуется с результатами опытов по измерению параметров состояния газов лучше, чем уравнение Менделеева—Клапейрона. Однако для сильно сжатых газов уравнение Ван-дер-Ваальса оказывается тоже недостаточно точным.

В случае разреженных газов $V_\mu \gg b$, а $p^* \ll p$, поэтому уравнение Ван-дер-Ваальса (13.19) по существу не отличается от уравнения состояния идеальных газов:

$$pV = \frac{M}{\mu}RT.$$

§ 13.3. Изотермы реальных газов. Понятие о фазовых переходах

1. В 1866 г. английский физик Т. Эндрюс экспериментально исследовал зависимость молярного объема углекислого газа от давления при изотермическом сжатии. Результаты этих опытов представлены на рис 13.5 ($T_1 < T < T_2 < T_к < T_3 < T_4$).

При температурах T, меньших $T_к = 340$ К, на каждой изотерме имеется горизонтальный участок BC, вдоль которого постоянна не только температура, но и давление $p = p_B$, а молярный объем может принимать любые значения от V_B до V_C. Разность $V_C - V_B$ объемов в конечных точках горизонтальных участков изотерм возрастает с понижением температуры T. Из рис. 13.5 видно, что эта разность объемов стремится к нулю при приближении к температуре $T_к$, которую называют **критической температурой**

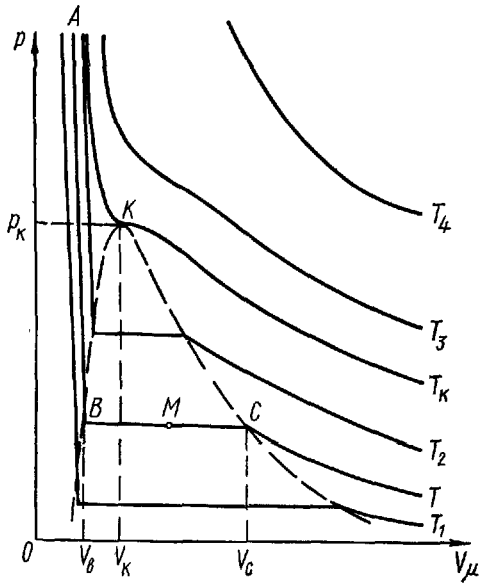

Рис. 13.5.

На изотерме, соответствующей температуре $T = T_к$ (ее называют критической изотермой), точки B и C сливаются в одну точку K, называемую **критической точкой** Соответствующие ей значения давления $p_к$ и молярного объема $V_к$ называют критическими. Критическая точка совпадает с точкой перегиба изотермы $T = T_к$, причем касательная к изотерме в этой точке параллельна оси $V_м$.

2. Любую докритическую изотерму ($T < T_к$) можно разбить на три характерных участка: TC, CB и BA. Вдоль первого и третьего участков давление монотонно возрастает при уменьшении молярного объема. На участке CB сжатие углекислоты не сопровождается изменением ее давления.

Это своеобразие докритических изотерм связано с тем, что они охватывают различные агрегатные состояния CO_2. Опыты показали, что на участке TC углекислота находится в газообразном состоянии, а на участке BA — в жидком. Малая сжимаемость жидкостей приводит к тому, что участок изотермы BA представляет собой почти вертикальную прямую.

На участке CB углекислота одновременно находится в двух агрегатных состояниях — жидком и газообразном. Точка C со-

ответствует началу **конденсации** CO_2 при изотермическом сжатии, а точка B — концу конденсации. Наоборот, при изотермическом расширении жидкой углекислоты точка B соответствует началу кипения, а точка C — его концу. Следовательно, точка B соответствует состоянию **кипящей жидкости**, а точка C — состоянию так называемого **сухого насыщенного пара**. В произвольном состоянии M области BC (см. рис. 13.5) CO_2 представляет собой смесь кипящей жидкости и сухого насыщенного пара. Такую смесь называют **влажным паром.**

Для анализа состояния неоднородных систем, подобных влажному пару, в термодинамике вводится понятие о фазе. Под **фазой** понимают совокупность всех частей системы, обладающих одинаковым химическим составом и находящихся в одинаковом состоянии. Таким образом, влажный пар представляет собой двухфазную систему, одна фаза которой — кипящая жидкость, а другая — сухой насыщенный пар.

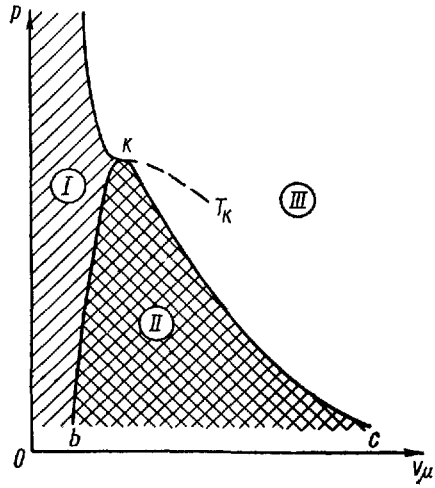

Рис 13.6

3. Если нанести на диаграмму p — V_μ точки B и C при различных температурах T, то получим две пограничные кривые bK и cK, смыкающиеся в критической точке K (рис. 13.6), Пограничная кривая кипения bK отделяет однофазную область I жидкого состояния вещества от двухфазной области II его влажного пара. Она является кривой начала **фазового перехода** из жидкого состояния в газообразное и конца обратного фазового перехода из газообразного состояния в жидкое. Пограничная кривая конденсации cK отделяет двухфазную область II от однофазной области III газообразного состояния вещества.

При давлениях, больших критического, отсутствует область двухфазного состояния. Вещество находится либо в жидком, либо в газообразном состоянии. Границей между ними служит критическая изотерма. Следовательно, газ, температура которого выше критической, нельзя перевести в жидкое состояние путем и з о т е р м и ч е с к о г о сжатия. В свое время потерпели неудачу первые попытки сжижения некоторых газов, критические температуры которых очень низки: гелия ($t_к = -268\,^\circ$ C), водорода ($t_к = -240\,^\circ$ C), неона ($t_к = -228{,}7\,^\circ$ C) и др. Это произошло из-за того, что не были известны их критические температуры и их пытались сжижить, изотермически сжимая при $t > t_к$.

4. Критическая точка замечательна тем, что при приближении к ней стирается различие между жидким и газообразным состояниями

вещества. В критическом состоянии обращаются в нуль разность молярных объемов кипящей жидкости и сухого насыщенного пара, удельная теплота парообразования и коэффициент поверхностного натяжения жидкости (§ 14.2)

Исчезновение различия между жидким и газообразным состояниями вещества в критической точке можно продемонстрировать на следующем опыте. В запаянную стеклянную ампулу помещен жидкий эфир ($t_к = 194\,^\circ$ C). Между жидкой и газообразной фазами эфира в ампуле имеется резкая граница раздела (вогнутый мениск). Нагревание ампулы приводит к возрастанию температуры и давления паров эфира, к уменьшению сил поверхностного натяжения и исчезновению кривизны мениска. При достижении критического состояния исчезает граница между жидкостью и паром. Если нагреть эфир в ампуле до температуры более высокой, чем критическая, а затем охлаждать, то в момент прохождения через критическое состояние возникает внезапное помутнение всего содержимого ампулы (вследствие интенсивного рассеяния света на значительных флуктуациях плотности, характерных для критического состояния). После этого вновь появляется резкая граница раздела между двумя фазами — жидким эфиром и его паром.

Впервые вывод о необходимости существования для каждого вещества такой температуры, при которой исчезает различие между жидкой и газообразной фазами, находящимися в равновесии, был сделан Д. И Менделеевым. Он исследовал зависимость коэффициента поверхностного натяжения жидкостей от температуры и пришел к выводу, что при некоторой температуре коэффициент поверхностного натяжения становится равным нулю Менделеев назвал эту температуру «температурой абсолютного кипения». В дальнейшем критические температуры различных веществ были подробно исследованы профессором Киевского университета М П. Авенариусом и его учениками.

5. Оказалось, что уравнение Ван-дер-Ваальса качественно правильно описывает некоторые особенности процесса сжижения газов. В самом деле, это уравнение можно записать в такой форме:

$$pV_\mu^3 - (pb + RT)V_\mu^2 + aV_\mu - ab = 0. \qquad (13.20)$$

Мы получили уравнение третьей степени относительно молярного объема V_μ Коэффициенты уравнения зависят от давления, температуры и химической природы газа. В зависимости от численных значений p и T для данного газа это уравнение может иметь либо один, либо три действительных корня Изотермы газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса (13.20), имеют вид, представленный на рис. 13.7, где $T_1 < T_2 < T < T_3 < T_к < T_5 < T_6$.

При температурах $T < T_к$ имеется область состояний, где каждому значению давления соответствуют три точки изотермы, т. е три различных изотермических состояния. По мере повышения температуры эти три точки сближаются и при $T = T_к$ сливаются в одну точку K, которая является точкой перегиба изотермы $T = T_к$ Касательная

к изотерме в точке K параллельна оси абсцисс. При температурах $T \gg T_к$ изотермы Ван-дер-Ваальса близки к равнобочным гиперболам — изотермам идеального газа.

6 Сравнение изотерм Ван-дер-Ваальса (см. рис. 13.7) с экспериментальными изотермами реальных веществ (например, с рис. 13.5) показывает, что изотермы Ван-дер-Ваальса охватывают не только область газообразного состояния вещества, но также области двухфазного и жидкого состояний. Жидкому состоянию соответствуют круто уходящие вверх левые участки изотерм. Однако в этой области имеется лишь качественное согласие с результатами экспериментов.

Волнообразные участки *BDEFG* изотерм Ван-дер-Ваальса (см рис. 13.7), относящиеся к двухфазному состоянию вещества, сильно отличаются от соответствующих горизонтальных участков экспериментальных изотерм (пунктирные прямые *BC*). На основании второго закона термодинамики можно показать, что прямые рассекают участки изотерм *BDEFC* так, что заштрихованные на рис. 13.7 площади *BDEB* и *EFCE* равны друг другу (правило Д. К. Максвелла).

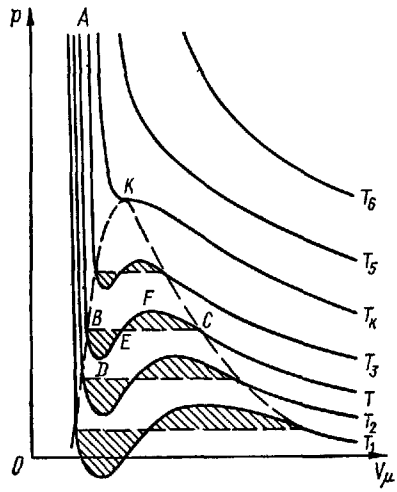

Рис. 13.7.

7. Опыты показывают, что некоторые состояния, соответствующие участкам *BDEFC* изотерм Ван-дер-Ваальса, практически осуществимы. Например, можно задержать кипение жидкости, тщательно удалив из нее механические примеси и производя нагревание в сосуде с гладкими стенками При этом получают **перегретую жидкость,** различным состояниям которой соответствуют точки кривой *BD* Аналогично, при медленном изотермическом сжатии газа, не содержащего пылинок, ионов и других центров конденсации, можно получить пересыщенный пар, соответствующий участку изотермы *CF*. При введении в пересыщенный пар пылинок или ионов происходит быстрая конденсация пара Это явление используют в камере Вильсона, для наблюдения траекторий движения заряженных частиц. Участок изотермы *DEF* практически неосуществим.

Изотерма $T = T_к$ является критической, а точка K перегиба этой изотермы — **критической точкой.** Значения критических параметров состояния $p_к$, $T_к$ и молярного объема $V_{\mu к}$ для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, можно выразить через универсальную газовую постоянную R и коэффициенты a и b:

$$p_к = \frac{1}{27}\,\frac{a}{b^2},\quad V_{\mu к} = 3b;\quad T_к = \frac{8}{27}\cdot\frac{a}{bR}. \qquad (13.21)$$

§ 13.4. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля — Томсона

1. Внутренняя энергия U реального газа равна сумме кинетической энергии $W_к$ хаотического движения молекул и их взаимной потенциальной энергии $W_п$:

$$U = W_к + W_п. \tag{13.22}$$

Соответственно, элементарное приращение внутренней энергии реального газа при малом изменении его состояния

$$dU = dW_к + dW_п.$$

В § 13.2 мы отмечали, что силы взаимного притяжения влияют на движение сравнительно небольшого числа молекул, находящихся в пограничном со стенками слое газа. Поэтому с достаточной степенью точности можно считать, что кинетическая энергия $W_к$ теплового движения молекул реального газа так же, как и молекул идеального газа, зависит только от абсолютной температуры и молярной теплоемкости газа в изохорическом процессе C_V :

$$dW_к = \frac{M}{\mu} C_V \, dT \tag{13.23}$$

или, полагая $W_к = 0$ при $T = 0$,

$$W_к = \frac{M}{\mu} \int_0^T C_V \, dT.$$

Пренебрегая зависимостью C_V от температуры, получаем [1]:

$$W_к = \frac{M}{\mu} C_V T. \tag{13.23'}$$

Таким образом, внутренняя энергия реального газа

$$U = \frac{M}{\mu} C_V T + W_п. \tag{13.24}$$

Взаимная потенциальная энергия $W_п$ обусловлена силами межмолекулярного взаимодействия, зависящими от расстояния между молекулами. Каждая молекула газа взаимодействует с большим числом других молекул. Поэтому для данного газа энергия $W_п$ должна зависеть от среднего расстояния между молекулами, которое, в свою очередь, однозначно определяется молярным объемом V_μ. Следова-

[1] В общем случае вместо (13.23′) нужно было бы писать:

$W_к = \frac{M}{\mu} \langle C_V \rangle T$, где $\langle C_V \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T C_V \, dT$ — средняя молярная теплоемкость газа в интервале температуры от нуля до T.

тельно, в изохорическом процессе $W_п = \text{const}$ и, как видно из (13.24), изменение внутренней энергии реального газа dU выражается так же, как для идеального газа:

$$dU = \frac{M}{\mu} C_V dT \qquad (V_\mu = \text{const}).$$

2. В середине XIX в. английские физики Д. Джоуль и В. Томсон экспериментально обнаружили, что при адиабатическом расширении газа без совершения им полезной работы температура газа и з м е н я е т с я. Процесс такого необратимого расширения называют **адиабатическим дросселированием**, а явление изменения температуры газа в этом процессе называют **эффектом Джоуля—Томсона.**

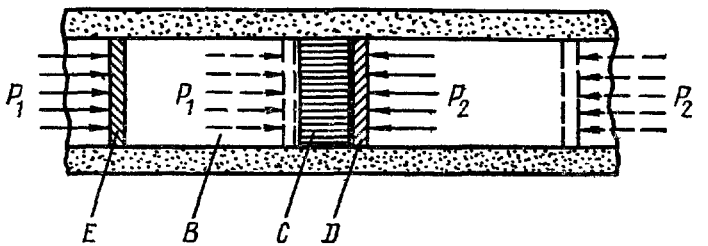

Рис. 13.8.

Принципиальная схема опытов Д. Джоуля и В. Томсона приведена на рис. 13.8 В хорошо теплоизолированную трубу B вставлена пористая пробка C (дроссель). С помощью подвижных поршней E и D давления исследуемого газа слева и справа от пробки поддерживаются постоянными и соответственно равными p_1 и p_2 ($p_1 > p_2$). Под действием перепада давления $\Delta p = p_1 - p_2$ газ продавливается через пробку и при этом расширяется от давления p_1 до давления p_2. Совершаемая газом работа расширения практически целиком расходуется на преодоление трения газа в пробке, а выделяющаяся при трении теплота $Q_{тр} = A_{тр}$ идет на нагревание газа.

3. По первому закону термодинамики изменение внутренней энергии газа при прохождении через дроссель равно:

$$\Delta U = Q + A'$$

Сообщаемая газу теплота Q, в силу отсутствия теплообмена между газом и внешними телами, равна $Q_{тр}$. Работа A', совершаемая над газом внешними силами, равна алгебраической сумме работ, совершаемых подвижными поршнями E (работа A_1') и D (работа A_2'), и работы сил трения $A'_{тр}$:

$$A' = A_1' + A_2' + A'_{тр}$$

Учитывая, что работа, совершаемая газом против сил трения,

$$A_{тр} = -A'_{тр} = Q_{тр}.$$

получаем

$$\Delta U = A_1' + A_2'. \tag{13.25}$$

Работа изобарического вытеснения поршнем E всего газа массой M и объемом V_1 равна

$$A_1' = \int_0^{V_1} p_1 dV = p_1 V_1. \tag{13.26}$$

Аналогично получим, что

$$A_2' = -p_2 V_2. \tag{13.27}$$

В этих формулах V_1 и V_2 — объемы, занимаемые данной массой газа перед дросселем, т. е. при давлении p_1, и после дросселя, т. е. при давлении p_2. Знак минус в формуле (13.27) показывает, что поршень D противодействует перетеканию газа через дроссель.

Из уравнений (13.24) — (13.27) получим

$$\frac{M}{\mu} C_V \Delta T + \Delta W_{\text{п}} = -\Delta (pV),$$

где

$$\Delta (pV) = p_2 V_2 - p_1 V_1.$$

Таким образом, изменение температуры реального газа при адиабатическом дросселировании равно

$$\Delta T = -\frac{\mu}{M} \cdot \frac{\Delta W_{\text{п}} + \Delta (pV)}{C_V}. \tag{13.28}$$

Формула (13.28) выражает так называемый **интегральный эффект Джоуля—Томсона**, наблюдаемый при конечном перепаде давления в дросселе.

4. Опыты показали, что для каждого газа в зависимости от его состояния перед дросселем (p_1, T_1) и перепада давления в дросселе $p_1 - p_2$ изменение температуры $\Delta T = T_2 - T_1$ может быть больше нуля (**отрицательный эффект Джоуля—Томсона**), меньше нуля (**положительный эффект Джоуля—Томсона**) и равно нулю (**нулевой эффект Джоуля—Томсона**).

Заметим, что в случае идеального газа $W_{\text{п}} = 0$ и из (13.28) имеем

$$\Delta T = -\frac{\mu}{M} \cdot \frac{\Delta (pV)}{C_V} = -\frac{\Delta (RT)}{C_V} = -\frac{R}{C_V} \cdot \Delta T,$$

откуда

$$\left(1 + \frac{R}{C_V}\right) \Delta T = 0.$$

Скобка отлична от нуля, поэтому $\Delta T = 0$. Следовательно, у идеальных газов эффект Джоуля—Томсона отсутствует.

5. Изменение температуры газа при бесконечно малом адиабатическом дросселировании, т. е. при изменении давления газа в дросселе на малую величину $dp < 0$, называют **дифференциальным эффектом Джоуля — Томсона** Можно показать, что для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, изменение температуры

$$dT = \frac{1}{C_p} \cdot \frac{\dfrac{2a(V_\mu - b)^2}{RTV_\mu^2} - b}{1 - \dfrac{2a(V_\mu - b)^2}{RTV_\mu^3}}\, dp, \qquad (13.29)$$

где C_p — молярная теплоемкость газа в изобарическом процессе. В частности, для идеального газа $a = b = 0$ и $\frac{dT}{dp} = 0$, т. е. эффект Джоуля — Томсона отсутствует.

Знак дифференциального эффекта Джоуля — Томсона, т. е. знак производной $\frac{dT}{dp}$, зависит для данного газа от значений давления p и температуры T газа перед дросселем. Температуру T, при которой дифференциальный эффект Джоуля — Томсона равен нулю ($\frac{dT}{dp} = 0$), называют **температурой инверсии**. Из формулы (13.29) следует, что для газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, температуру инверсии $T_{ин}$ можно определить из уравнения

$$\sqrt{\frac{bRT_{ин}}{2a}} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{b^2}{3a}p}. \qquad (13.30)$$

Из (13.30) видно, что инверсия возможна лишь в пределах изменения давления от нуля до $p_{макс} = \frac{1}{3}\frac{a}{b^2} = 9p_к$ ($p_к$—критическое давление) При $p = p_{макс}$ $T_{ин} = \frac{8}{9} \cdot \frac{a}{bR} = 3T_к$ ($T_к$ — критическая температура) Максимальное и минимальное значения температуры инверсии достигаются при $p = 0$:

$$(T_{ин})_{макс} = \frac{2a}{bR} = \frac{27}{4}T_к \quad \text{и} \quad (T_{ин})_{мин} = \frac{2a}{9bR} = \frac{3}{4}T_к.$$

§ 13.5. Сжижение газов и получение низких температур

1. В § 13.3 было показано, что сжижение газа путем изотермического уменьшения его объема возможно только в том случае, когда его температура ниже критической. Поэтому задача сжижения газов неразрывно связана с разработкой методов их сильного охлаждения, т. е. получения низких температур. Рассмотрим некоторые из этих методов.

2. Известно, что для поддержания кипения жидкости к ней нужно непрерывно подводить теплоту. Поэтому кипящие жидкости способны охлаждать окружающие тела, находящиеся с ними в тепловом контакте. Это явление было использовано Р. Пикте для получения низких температур. Сначала какой-либо газ, критическая температура которого выше комнатной (например, аммиак, $T_к = 405{,}5$ К), переводят в жидкое состояние путем изотермического сжатия. Затем понижают давление и жидкость кипит. Теплоту, необходимую для поддержания кипения, сообщает другой газ, критическая температура которого выше температуры кипения аммиака, но ниже его критической температуры При этом второй газ охлаждается ниже его критической температуры Поэтому при изотермическом сжатии он может быть переведен в жидкое состояние Аналогично поступают дальше, постепенно сжижая один газ за другим. Однако из-за отсутствия газов с нужными критическими температурами этот метод не позволяет получить температуру ниже 63 К.

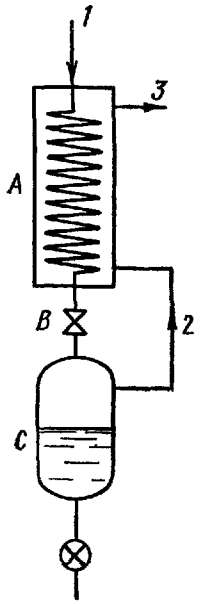

Рис. 13.9.

3. Метод Дьюара — Линде основан на использовании положительного эффекта Джоуля — Томсона. Схема установки приведена на рис. 13.9. Газ, сжатый до высокого давления и охлажденный до комнатной температуры, поступает по трубопроводу *1* в теплообменник *A* [1]. В вентиле *B* газ адиабатически дросселируют до давления, близкого к атмосферному. При этом он охлаждается. Если понижение температуры недостаточно для сжижения газа, то его по трубопроводу *2* возвращают в теплообменник *A*, где он охлаждает новые порции сжатого газа и выбрасывается через трубопровод *3*. Таким образом, постепенно понижается температура газа за вентилем *B*, пока, наконец, не начинается сжижение газа Сконденсированный газ собирается в сосуде *C*.

4. Третий метод основан на охлаждении газов при совершении ими полезной работы расширения в адиабатическом процессе. Холодильные машины, основанные на этом принципе, называют **детандерами** По своей конструкции детандеры делятся на поршневые и турбинные. В первых газ расширяется в цилиндре с подвижным поршнем, а во вторых — в турбине. Турбодетандеры, в создании которых большую роль сыграл академик П. Л. Капица, являются наиболее производительными, экономичными и компактными типами холодильных установок.

5. Благодаря интенсивному испарению гелия при низких давлениях удалось получить температуру порядка 0,7 К. В настоящее вре-

[1] Теплообменником называется устройство, служащее для нагревания или охлаждения протекающего через него газа или жидкости

мя существуют методы получения еще более низких температур Однако изложение этих методов выходит за рамки нашего курса

6. При низких температурах резко изменяются свойства некоторых веществ. Например, резина становится хрупкой как стекло. а свинец становится упругим. Охлажденные в жидком кислороде парафин, яичная скорлупа, некоторые красители и другие вещества после облучения их ультрафиолетовыми лучами начинают светиться При температурах порядка нескольких градусов абсолютной шкалы удельные сопротивления некоторых металлов и сплавов становятся исчезающе малыми. Это явление, получившее название сверхпроводимости, будет рассмотрено во втором томе курса.

§ 13.6. Сверхтекучесть гелия

1. В 1938 г. академиком П. Л. Капицей было открыто явление сверхтекучести гелия при сверхнизких температурах. В § 13 3 указывалось, что гелий принадлежит к числу газов с очень низкой критической температурой. При атмосферном давлении гелий сжижается при температуре 4,22 К и остается жидким вплоть до абсолютного нуля [1]. При температуре 2,19 К в жидком гелии происходит фазовый переход — жидкий гелий I, существующий при $T > 2{,}19$ К, переходит без выделения теплоты в жидкий гелий II, существующий при $T < 2{,}19$ К. Фазовый переход такого типа носит название фазового перехода II рода (см. § 15.5) Гелий II коренным образом отличается от гелия I по своей теплопроводности и вязкости Гелий I ведет себя приблизительно так же, как другие сжиженные газы при низких температурах (водород, неон, воздух) Теплопроводность и вязкость этих жидкостей невелики. Например, коэффициент вязкости гелия I вблизи температуры 4,22 К составляет 10^{-6} Па · с. Напомним для сравнения, что коэффициент вязкости водорода при $t = 20$ °С равен 10^{-5} Па · с

Наиболее замечательным свойством гелия II оказалось отсутствие вязкости у этой жидкости. Гелий II протекает через капилляры практически без трения. Это свойство гелия II было названо **сверхтекучестью гелия** Измерения коэффициента вязкости гелия II наиболее чувствительными методами показали, что коэффициент вязкости у гелия II во всяком случае меньше 10^{-12} Па · с.

2. Согласно так называемой двухжидкостной модели гелий II представляет собой смесь двух жидкостей — **сверхтекучей** и **нормальной**. Сверхтекучая компонента не участвует в переносе энергии и движется без трения. Нормальная компонента гелия II испытывает трение и осуществляет перенос энергии в жидкости Существование в гелии II двух компонент может быть обнаружено на следующем опыте (рис. 13.10). В гелий II, находящийся в сосуде Дьюара, помещена

[1] Гелий в твердом состоянии можно получить при температурах, меньших 4,22 К, если давление превышает 22 атмосферы

колбочка, в широкой части которой находится нагреватель в виде проволочной спирали. При нагревании спирали из горлышка колбы вытекает струя гелия, которая может быть обнаружена по вращению легкой вертушки, поставленной на пути струи. Однако количество жидкости в колбе не уменьшается и, следовательно, гелий не только вытекает из нее, но и одновременно втекает в колбу из сосуда Дьюара. В одних и тех же местах жидкости существуют два потока, направленные в противоположные стороны. Вытекающий поток гелия II переносит теплоту и оказывает давление на вертушку. Эта часть жидкости и является нормальным гелием II. Втекающий поток гелия II

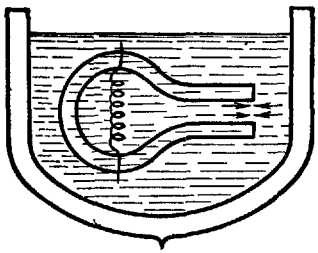

Рис. 13.10.

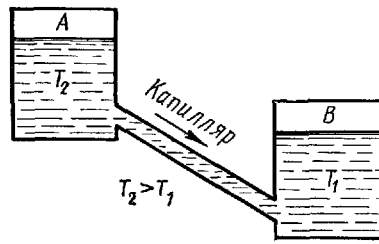

Рис. 13.11.

не несет теплоты и не оказывает давления. Эта часть жидкости является сверхтекучей. Возле спирали сверхтекучая часть гелия II превращается в нормальную и обе части гелия движутся одна сквозь другую без трения. Огромная теплопроводность гелия II связана с наличием двух встречных потоков жидкости: в направлении убывания температуры течет нормальная часть гелия II и одновременно в противоположном направлении течет сверхтекучая часть. При течении гелия II по тонким трубкам протекает, главным образом, сверхтекучая часть жидкости, а нормальный гелий II остается на месте. Поэтому, если из сосуда A (рис. 13.11) гелий по капилляру перетекает в сосуд B, то в A жидкость нагревается, а в B охлаждается. Причина этого заключается в том, что вся энергия, оставшаяся в нормальной части жидкости, распределяется на меньшую массу, это приводит к повышению температуры. В сосуд B переходит сверхтекучая часть жидкости, не переносящая энергию, поэтому температура в сосуде B понижается.

Идея о существовании в гелии II сверхтекучей и нормальной жидкостей позволила развить гидродинамическую теорию гелия II, в которой нашли свое макроскопическое объяснение свойства гелия II. На важнейший вопрос о природе этих свойств гидродинамическая теория ответить не могла [1].

[1] Серьезным успехом макроскопической гидродинамики гелия II явилось объяснение существования второго звука в гелии II. В то время как в обычных жидкостях могут распространяться обычные звуковые волны, в гелии II, помимо обычных звуков, распространяющихся со скоростью 250 м/с, могут существовать волны другого типа — так называемый второй звук, скорость распространения которого приблизительно в 10 раз меньше.

3. Рассмотрим некоторые основы современных квантовых представлений о сверхтекучести гелия II. Прежде всего следует сказать, что только квантовая теория объяснила, почему именно гелий является единственной незамерзающей жидкостью при очень низких температурах и нормальном давлении. Квантовая теория показывает, что, в отличие от классических представлений, при любой как угодно низкой температуре вещества (в том числе и при $T = 0$) существуют «нулевые» колебания атомов и молекул. Им соответствует некоторая «нулевая энергия», которую невозможно отнять у вещества. Ответ на вопрос о том, остается ли вещество вблизи абсолютного нуля жидким или твердым, зависит от того, что играет определяющую роль — межмолекулярное притяжение, вызывающее образование кристаллической решетки, или «нулевые колебания», препятствующие этому образованию.

В гелии силы взаимодействия между атомами весьма слабы, а «нулевые колебания», в силу легкости гелиевых атомов, весьма интенсивны. Поэтому при обычных давлениях кристаллическая решетка в гелии не образуется и он не замерзает. При абсолютном нуле тепловое движение частиц отсутствует [1], а при очень низких температурах оно весьма малоинтенсивно. Поэтому при таких температурах можно рассматривать тепловое движение в гелии как совокупность некоторых элементарных «тепловых возбуждений». В квантовой теории доказано, что энергия тепловых возбуждений может изменяться лишь порциями — квантами (см. § 11.6).

Нагревание жидкого гелия от $T = 0$ до некоторой малой температуры должно привести к появлению в нем «элементарных возбуждений». С появлением этих возбуждений связан запас внутренней энергии в жидкости и существование в ней трения.

Нормальная часть жидкого гелия II представляет собой ту часть жидкости, в которой возникают элементарные тепловые возбуждения. Однако из детального рассмотрения элементарных возбуждений в гелии, основанного на законах сохранения энергии и импульса, следует, что возможны состояния гелия II, в которых «элементарные возбуждения» не возникают. Этим состояниям соответствует сверхтекучая часть гелия. Выяснилось, что частицы сверхтекучей части гелия II весьма сильно взаимодействуют друг с другом и образуют связанный коллектив, называемый иногда конденсатом. Благодаря сильному взаимодействию частиц в сверхтекучей части гелия II не возникают тепловые «возбуждения», и эта часть гелия не обладает запасом внутренней энергии. При абсолютном нуле температуры, когда «элементарных возбуждений» нет, весь гелий II является сверхтекучим и нормальная часть его отсутствует. С ростом температуры растет число «возбуждений» и увеличивается доля нормальной части гелия II. Однако вплоть до температуры 2,19 К в гелии II сохраняется сверхтекучая часть со всеми ее особыми свойствами. При температуре 2,19 К гелий II превращается в гелий I, обладающий обычными свойствами.

[1] Не следует смешивать тепловое движение атомов с «нулевыми колебаниями» этих атомов, имеющими специфическую квантовую природу.

Вопросы для повторения

1. Чем отличаются реальные газы от идеальных? Начертите кривую, выражающую характер зависимости сил взаимодействия и взаимной потенциальной энергии двух молекул от расстояния между ними
2. Выведите уравнение Ван-дер-Ваальса и сопоставьте его с уравнением Менделеева — Клапейрона
3. Начертите и объясните изотермы реального газа. Как уравнение Ван-дер-Ваальса описывает процесс фазового перехода вещества из жидкого состояния в газообразное?
4. В чем сущность и каковы причины эффекта Джоуля — Томсона?
5. Охарактеризуйте критическую температуру.
6. Какие методы сжижения газов Вам известны?
7. В чем заключается явление сверхтекучести гелия?

Примеры решения задач

Задача 13.1. 0,7 кг азота заключено в баллоне емкостью 0,0224 м³. Определить давление газа на стенки баллона, внутреннее давление газа и собственный объем молекул. Температура газа 273 К. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота: $a = 0{,}13$ м⁵·кг/(моль²·с²); $b = 4 \cdot 10^{-5}$ м³/моль.

Дано

$M = 0{,}7$ кг,
$T = 273$ К,
$V = 2{,}24 \cdot 10^{-2}$ м³,
$a = 0{,}13 \dfrac{\text{м}^5 \cdot \text{кг}}{\text{моль}^2 \cdot \text{с}^2}$,
$b = 4 \cdot 10^{-5}$ м³/моль,
$R = 8{,}31$ Дж/(моль·К),
$\mu = 0{,}028$ кг/моль

$p - ?$ $p^* - ?$ $V' - ?$

Решение

1) Сжатый газ подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса (формула 13.19):

$$\left(p + \frac{M^2}{\mu^2} \cdot \frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{M}{\mu} b\right) = \frac{M}{\mu} RT.$$

Из этого уравнения выразим давление, производимое газом на стенки сосуда:

$$p = \frac{M}{\mu}\left[\frac{RT}{V - \dfrac{M}{\mu} b} - \frac{M}{\mu} \cdot \frac{a}{V^2}\right].$$

2) Внутреннее давление газа p^* по формуле (13 16) равно

$$p^* = \frac{a}{V_\mu^2},$$

где $V_\mu = \dfrac{\mu}{M} V$ — объем одного моля газа.

Следовательно,

$$p^* = \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}.$$

3) Собственный объем молекул, заключенных в одном моле газа, по уравнению (13 9) равен $b/4$. Поэтому искомый объем

$$V' = \frac{Mb}{4\mu}.$$

Вычисления результатов производим в Международной системе единиц (С

$$p = \frac{M}{\mu}\left[\frac{RT}{V - \frac{M}{\mu}b} - \frac{Ma}{\mu V^2}\right] = \frac{0{,}7}{28}\cdot\left[\frac{8{,}31\cdot 10^3\cdot 273}{2{,}24\cdot 10^{-2} - \frac{0{,}7}{28}\cdot 0{,}04} - \right.$$

$$\left. - \frac{0{,}7\cdot 1{,}3\cdot 10^5}{28\cdot(2{,}24\cdot 10^{-2})^2}\right] \text{ Па} = 2{,}49\cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$p^* = \frac{M^2}{\mu^2}\,\frac{a}{V^2} = \frac{0{,}7^2\cdot 1{,}3\cdot 10^5}{28^2\cdot(2{,}24\cdot 10^{-2})^2} \text{ Па} = 1{,}62\cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$V' = \frac{Mb}{4\mu} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}04}{4\cdot 28} \text{ м}^3 = 2{,}5\cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Глава XIV
ЖИДКОСТИ

§ 14.1. Строение и некоторые свойства жидкостей

1 В предыдущей главе было показано, что при достаточно сильном сжатии любой газ может быть сжижен, если только он охлажден до температуры, меньшей критической. В результате дальнейшего охлаждения все жидкости затвердевают и тела переходят из жидкого состояния в твердое.

По своим свойствам жидкости сходны как с газами, так и с твердыми телами. Так, например, подобно газам, жидкости принимают форму того сосуда, в котором они находятся. С другой стороны, подобно твердым телам, жидкости малосжимаемы, т. е. имеют определенный собственный объем. Они обладают сравнительно большой плотностью и так же, как твердые тела, способны сопротивляться не только сжатию, но и растяжению.

Двойственный характер свойств жидкостей связан с особенностями движения их молекул. В газах молекулы движутся совершенно хаотично, в их расположении отсутствует какой бы то ни было порядок. Наоборот, в кристаллических твердых телах частицы колеблются около определенных положений равновесия, называемых узлами кристаллической решетки.

Молекулы жидкости, подобно частицам твердого тела, совершают колебания около некоторых положений равновесия. В отличие от твердых тел, эти положения равновесия каждой молекулы непостоянны. По истечении некоторого времени τ они смещаются на расстояния порядка 10^{-8} см.

2. Долгое время в физике и физической химии господствовало мнение, что жидкости по своим свойствам сходны с реальными газами. Такое направление объяснялось, во-первых, успехами ван-дер-ваальсовской теории, позволившей объяснить некоторые свойства жидкостей, исходя из непрерывности перехода между газообразным и жидким состояниями вещества. Согласно этой теории жидкость рассматривали как реальный газ, сжатый до малого удельного объема внутренним давлением, обусловленным межмолекулярными силами сцепления.

Опыты показали, что уравнение Ван-дер-Ваальса, строго говоря, не годится для вычисления параметров состояния жидкостей. Однако качественно это уравнение неплохо описывает некоторые особенности жидкостей. Например, способность жидкостей сопротивляться деформации растяжения проявляется в том, что часть изотерм Ван-дер-Ваальса заходит в область отрицательных давлений (см. рис. 13.7, изотерма $T = T_1$).

Жидкости могут без разрыва выдерживать очень большие растягивающие усилия, если эти усилия сводятся к всестороннему отрицательному давлению, исключающему возможность течения жидкости.

Это свойство можно обнаружить в следующем опыте. Ртуть, нагретую до достаточно высокой температуры, заливают в стеклянную пробирку, которую затем сверху запаивают так, чтобы ртуть полностью заполняла весь объем пробирки. Если затем пробирку охлаждать, то благодаря различию значений коэффициентов объемного расширения ртути и стекла ($\alpha_{рт} > \alpha_{ст}$) (см. § 15.2) ртуть подвергается всестороннему растяжению. Относительное объемное растяжение ртути может достигать 1,4%, что соответствует отрицательному давлению порядка 10^7 Па, причем эта величина ограничена не прочностью ртути на разрыв, а силами ее сцепления с поверхностью стекла.

Приближение жидкостей по их свойствам к реальным газам в области высоких температур и больших удельных объемов проявляется, например, в том, что при повышении температуры уменьшаются коэффициент поверхностного натяжения жидкости и удельная теплота парообразования, а также сближаются значения плотностей кипящей жидкости и сухого насыщенного пара (см. § 13.3).

Вторая причина предположения о сходстве жидкостей по их свойствам с газами, а не с твердыми телами, была связана с переоценкой различий в структуре у жидкостей и твердых тел. Наконец, третья причина состояла в различии механических свойств жидкостей и твердых тел, обнаруживающихся при действии на них скалывающих сил: текучесть — у жидкостей (см. § 14.3), упругость сдвига — у твердых тел (см. § 5.2).

3. Более глубокий анализ некоторых свойств жидких и твердых тел приводит к выводу, что различия между ними не так велики. Опыт показывает, что кристаллические тела обладают текучестью, хотя и очень малой. Текучесть твердых тел проявляется в пластической деформации, возникающей под действием скалывающих усилий. В свою очередь жидкости обладают некоторой упругостью на сдвиг, которая обычно маскируется большой текучестью. Так, в процессе затвердевания стекла текучесть последнего не исчезает внезапно, а постепенно уменьшается. При этом все большую роль начинают играть упругие свойства, характерные для твердого тела. Следовательно, текучесть и упругость нельзя считать свойствами, взаимно исключающими друг друга. В различных состояниях вещества они лишь в большей или меньшей степени маскируют друг друга.

4. Рентгеноструктурный анализ [1] жидкостей показал, что при температурах, близких к температуре кристаллизации, расположение частиц в жидкостях не является совершенно беспорядочным (таким как в газах), а оказывается сходным с тем правильным расположением, которое присуще закристаллизовавшимся жидкостям.

Результаты рентгенографического исследования строения жидкости свидетельствуют о том, что не все расстояния между молекулами равновероятны. Взаимное расположение соседних молекул подчиняется закономерности, в некоторой мере сходной с расположением соседних

---

[1] Элементарное знакомство с рентгеноструктурным анализом мы предполагаем известным из средней школы

атомов в кристаллах. Однако по мере увеличения расстояния r между молекулами ослабевает зависимость между расположением условно выбранной вначале «центральной» молекулы и ее более далеких соседей. При $r > (3 \div 4)d$ (d — эффективный диаметр молекул) такая зависимость, в отличие от кристаллов, практически отсутствует. В связи с этим говорят, что в жидкостях существует **ближний порядок**. Таким образом, ближний порядок — это своеобразный порядок в относительном расположении молекул жидкости, или их взаимной ориентации (если молекулы состоят из нескольких атомов), размывающийся по мере удаления от рассматриваемой («центральной») молекулы. Порядок в расположении частиц в кристаллах называют дальним, так как этот порядок сохраняется по всему объему кристалла.

Рентгенограммы жидкостей сходны с рентгенограммами микрокристаллических тел, т. е. тел, состоящих из очень мелких кристалликов (с линейными размерами порядка 10^{-7} см), различным образом ориентированных относительно друг друга (см. § 15.1). Это дает основание считать, что мгновенное расположение частиц в жидкости напоминает расположение атомов в твердом теле, состоящем из большого числа беспорядочно ориентированных кристалликов субмикроскопических размеров (их называют сиботаксическими областями). В пределах этой области распределение частиц, или их ориентация, сохраняет достаточную правильность, изменяясь от одной сиботаксической области к соседним. В отличие от твердых тел эта структура в жидкости с течением времени быстро меняется из-за интенсивного теплового движения, которое ослабевает с понижением температуры. Таким образом, не существует резкого различия в строении между твердым и жидким состояниями вещества при температурах, близких к температуре кристаллизации.

5. Многие физические свойства жидкостей мало отличаются от физических свойств твердых тел. Так, например, при плавлении твердых тел относительное увеличение объема очень незначительно (порядка 10%). Следовательно, средние расстояния между частицами вещества в процессе плавления почти не изменяются, в то время как при испарении они изменяются в десятки раз.

Сравнение теплоты плавления и испарения, приведенное в таблице 10, показывает, что теплота испарения в несколько десятков раз больше теплоты плавления.

Таблица 10

Вещество	Теплота плавления, Дж/моль	Теплота испарения, Дж/моль
Натрий	$2{,}6 \cdot 10^3$	$9{,}8 \cdot 10^4$
Ртуть	$2{,}3 \cdot 10^3$	$6{,}0 \cdot 10^4$
Свинец	$4{,}9 \cdot 10^3$	$1{,}9 \cdot 10^5$

Это свидетельствует о крайне незначительном изменении взаимного расположения частиц вещества при его переходе из кристаллического состояния в жидкое.

Теплоемкость тел почти не изменяется при их плавлении (см. табл. 11).

Следовательно, характер теплового движения частиц вещества в процессе плавления практически мало изменяется. Движение одноатомных молекул жидкости при температурах, близких к температуре плавления, сводится к малым колебаниям около некоторых положений равновесия, которые время от времени скачкообразно смещаются, так как атомы перескакивают в новые положения. В случае двухатомных и более сложных молекул, помимо этого, движение молекул сводится к вращательным колебаниям около некоторых определенных («равновесных») ориентаций, которые также могут с течением времени скачкообразно изменяться.

Таблица 11

Вещество	C_p, Дж / (моль · К)	
	в твердом состоянии	в жидком состоянии
Натрий	32	33
Ртуть	28	28
Цинк	30	33
Водород	47	55
Бензол	112	126

В силу указанных выше особенностей свойств жидкостей построение теории жидкого состояния вещества представляет значительно большие трудности, чем создание теории кристаллических твердых тел и газов. Эти трудности обусловлены тем, что, с одной стороны, атомы и молекулы жидкости сильно взаимодействуют друг с другом (аналогично частицам твердых тел), а с другой стороны, расположение атомов и молекул жидкости не является упорядоченным и фиксированным (в этом смысле они напоминают сильно сжатые газы). Поэтому теория жидкого состояния в настоящее время еще очень далека от завершения.

§ 14.2. Дырочная теория жидкого состояния

1. Согласно молекулярно-кинетической теории, развитой Я. И. Френкелем и другими исследователями, основным фактором, определяющим структуру и физические свойства жидкости, является удельный объем. При плавлении кристаллического вещества удельный объем увеличивается примерно на 10%. Такое увеличение удельного объема соответствует тому, которое приобрело бы твердое тело под действием отрицательного давления, равного теоретическому пределу прочности этого тела. Следовательно, жидкость можно рассматривать как тело, целостность которого нарушена в различных местах. При плавлении частицы вещества приобретают большую подвижность, чем обусловливается текучесть жидкости и нарушение дальнего порядка во взаимном расположении частиц. При этом в теле возникает множество микроскопических разрывов, микрополостей — дырок. Из-за теплового движения дырки самопроизвольно исчезают в одних

местах, одновременно появляясь в других, т. е. происходит хаотическое перемещение дырок, связанное с тепловым движением частиц. Частицы распределяются в жидкости в виде компактных пачек, в которых сохраняется ближний порядок.

2. Указанная картина строения жидкости хорошо согласуется с опытными данными по сжимаемости жидкостей: при малых давлениях жидкости в 10—15 раз более сжимаемы, чем твердые тела. Это объясняется более рыхлой (пористой) структурой жидкостей. При больших внешних давлениях порядка тысяч атмосфер сжимаемость жидкостей близка к сжимаемости твердых тел. Для таких состояний дырочная теория строения жидкостей неприменима. Не применима она также к жидкостям, находящимся при высоких температурах, близких к критической. При этих температурах жидкость настолько «разрыхлена», что по своей структуре и свойствам близка к газу, для которого понятие дырок не имеет смысла.

3. При температурах, близких к температуре плавления, тепловое движение в жидкостях в основном сводится к колебаниям молекул около некоторых средних положений равновесия, которые в отличие от положений равновесия в твердых телах имеют временный характер. Молекула колеблется около одного и того же положения равновесия в течение некоторого времени τ. Затем положение ее равновесия смещается скачком на расстояние, равное (по порядку величины) среднему расстоянию $\langle\delta\rangle$ между соседними молекулами:

$$\langle\delta\rangle \approx \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A\rho}},$$

где n_0 — число молекул в единице объема, N_A — число Авогадро, ρ — плотность жидкости и μ — ее молярная масса. Например, для воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, $\mu = 0{,}018$ кг/моль и $\langle\delta\rangle \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м.

Среднее время $\langle\tau\rangle$ «оседлого» существования молекул (среднее время между двумя последовательными «скачками») называют **временем релаксации.** Оно зависит от температуры. С повышением температуры $\langle\tau\rangle$ чрезвычайно быстро уменьшается, что обусловливает большую подвижность молекул жидкости при высоких температурах и малую вязкость. При низких температурах $\langle\tau\rangle$ может достигать значительной величины.

4. Для того чтобы молекула жидкости перескочила из одного временного положения равновесия в другое, она должна нарушить связи с соседними молекулами. После перехода в новое положение равновесия молекула связывается с новыми соседями. Первый процесс требует затраты энергии W, которая выделяется при установлении новых связей. Следовательно, при уходе со «старого» места (положение *1*) потенциальная энергия молекулы должна возрасти на величину W, после чего молекула может попасть в новое положение *2*. О таком переходе говорят, как о переходе через потенциальный барьер высотой W, а величину W называют **энергией активации.**

Переход через потенциальный барьер происходит при случайном повышении энергии теплового движения отдельных молекул за счет

передачи им этой энергии другими молекулами. Расчеты показывают, что время релаксации следующим образом зависит от энергии активации W и абсолютной температуры T:

$$\langle\tau\rangle = \tau_0 e^{\frac{W}{kT}}, \qquad (14.1)$$

где k — постоянная Больцмана, а τ_0 — средний период колебаний молекулы около положения равновесия.

5. Формула (14.1) позволяет объяснить двойственный характер свойств жидкостей по отношению к внешним силовым воздействиям. Если продолжительность действия внешней силы $t \gg \langle\tau\rangle$, то частицы жидкости смещаются преимущественно в направлении этой силы и жидкость обнаруживает свойство текучести. Наоборот, если $t \ll \langle\tau\rangle$, то за время действия силы частицы жидкости не успевают изменить свои положения равновесия, и жидкость ведет себя как упругая среда, оказывающая сопротивление изменению не только ее объема, но и формы.

За время $\langle\tau\rangle$ молекула продвигается в среднем на расстояние $\langle\delta\rangle$. Отсюда средняя скорость перемещения молекул

$$\langle v\rangle = \frac{\langle\delta\rangle}{\langle\tau\rangle}, \quad \text{или} \quad \langle v\rangle = \frac{\langle\delta\rangle}{\tau_0} e^{-\frac{W}{kT}}. \qquad (14.2)$$

Средняя скорость движения молекул в жидкости невелика. Например, для воды при комнатной температуре она приблизительно в 20 раз меньше, чем средняя скорость молекул водяного пара при той же температуре.

§ 14.3. Явления диффузии и внутреннего трения в жидкостях

1. В жидкостях так же, как и в газах, в случае нарушения пространственной однородности концентрации, температуры или скорости упорядоченного движения возникают явления переноса — диффузия, теплопроводность и внутреннее трение. Эти процессы тесно связаны с тепловым движением молекул жидкости и подчиняются тем же дифференциальным законам Фика, Фурье и Ньютона, что и соответствующие процессы в газах (§ 11.8). Специфические особенности теплового движения в жидкостях сказываются лишь на величинах коэффициентов переноса и их зависимости от параметров состояния.

2. Коэффициент диффузии D в химически однородной жидкости можно вычислить по формуле, подобной формуле (11.35) для газов:

$$D = \frac{1}{6}\langle v\rangle\langle\delta\rangle,$$

или, учитывая формулу (14.2)

$$D = \frac{1}{6}\frac{\langle\delta\rangle^2}{\tau_0} e^{-\frac{W}{kT}}. \qquad (14.3)$$

При температурах, намного меньших критической, коэффициенты диффузии в жидкостях ничтожно малы по сравнению с коэффициентами диффузии в соответствующих парах или газах при обычных давлениях. Так, для воды при комнатной температуре коэффициент диффузии $D \approx 1{,}5 \cdot 10^{-9}$ м²/с, а для паров воды в воздухе при атмосферном давлении и при той же температуре $D \approx 2 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

3. Формула (14.3) показывает, что коэффициент диффузии резко возрастает с увеличением температуры, что главным образом вызывается резким сокращением времени релаксации $\langle \tau \rangle$. Кроме того, с повышением температуры несколько увеличивается среднее расстояние между положениями равновесия $\langle \delta \rangle$. По мере приближения температуры к критической средняя скорость $\langle v \rangle$ приближается к средней скорости движения молекул в сильно сжатом газе и коэффициент диффузии становится близким к величине коэффициента диффузии в газе.

4. В области высоких температур, близких к критической, тепловое движение в жидкости имеет такой же характер, что и в газах. Следовательно, в этом случае возникновение внутреннего трения в жидкости можно объяснить так же, как и в газах (см. § 11.7).

В жидкостях, находящихся при температурах, близких к температуре плавления, импульсы молекул не остаются постоянными, а быстро колеблются в связи с колебаниями молекул около временных положений равновесия. Поэтому рассматривать вязкость жидкости как результат переноса молекулами импульса их упорядоченного движения не представляется возможным. Оказывается, что коэффициент внутреннего трения у газов с ростом температуры слегка возрастает, а у жидкостей уменьшается, причем особенно сильно у вязких жидкостей (см., например, глицерин в табл. 12).

В 1913 г. профессор А. И. Бачинский показал, что динамический коэффициент вязкости (коэффициент внутреннего трения) многих жидкостей зависит только от плотности ρ и может быть определен по формуле

$$\eta = \frac{c_2}{\frac{1}{\rho} - c_1} = \frac{c_2}{v - c_1},$$

где v — удельный объем жидкости, а c_1 и c_2 — постоянные коэффициенты, зависящие от химической природы жидкости.

Таблица 12

Жидкость	Температура, °С	Вязкость, Па·с
Вода	20	0,00101
Ртуть	20	0,00156
Этиловый спирт	20	0,00119
Глицерин	10	2,10
	20	0,85
	30	0,35

Величину $\frac{1}{\eta}$, обратную коэффициенту внутреннего трения, называют **текучестью жидкости.**

Зависимость коэффициента внутреннего трения жидкости от температуры и давления носит сложный характер, причем

$$\eta \sim \frac{1}{u_0},$$

где $u_0 = \frac{u}{F}$ — так называемая подвижность молекулы, u — скорость, приобретаемая молекулой под действием внешней силы F. Подвижность молекулы, как показал А. Эйнштейн, пропорциональна коэффициенту диффузии.

$$u_0 \sim \frac{D}{kT}.$$

Следовательно,

$$\eta \sim \frac{T}{D}, \quad \text{или} \quad \eta \sim Te^{\frac{W}{kT}}.$$

Полученная зависимость показывает, что с ростом температуры, особенно в области низких температур, вязкость жидкостей быстро уменьшается в то время, как для газов η растет пропорционально $\sqrt{T}$.

При больших давлениях вязкость жидкостей быстро возрастает с увеличением давления. Это объясняется увеличением энергии активации и соответствующим возрастанием времени релаксации.

5. Рассмотрим некоторые методы измерения вязкости жидкостей. Д. Стокс показал, что сила сопротивления **F**, действующая на небольшой шар радиуса r, который равномерно движется в вязкой жидкости с малой скоростью u, численно равна

$$F = 6\pi\eta r u, \tag{14.4}$$

где η — коэффициент внутреннего трения жидкости.

Пусть шар вертикально падает в вязкой жидкости. К шару приложены три силы — его сила тяжести **P**, архимедова сила $\mathbf{F}_a$ и сила сопротивления **F**. В случае равномерного движения векторная сумма сил равна нулю:

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F} = 0.$$

Учитывая, что силы $\mathbf{F}_a$ и **F** направлены вверх, а сила **P** — вниз, получаем

$$P = F_a + F.$$

Обозначим через ρ_0 плотность шара, а через ρ плотность жидкости, тогда

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g, \quad F_a = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g.$$

Следовательно,

$$6\pi\eta ru = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_0 - \rho),$$

откуда

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_0 - \rho)}{9u}. \qquad (14.5)$$

По этой формуле можно определить коэффициент внутреннего трения жидкости, если измерить на опыте скорость равномерного падения в ней небольших твердых шариков.

Другой метод измерения коэффициента внутреннего трения жидкостей, основанный на законе Пуазейля для течения вязкой жидкости через цилиндрический капилляр, мы рассмотрим в § 16.3.

§ 14.4. Поверхностное натяжение жидкостей

1. В жидкостях средние расстояния между молекулами значительно меньше, чем в газах. Поэтому силы взаимодействия между молекулами играют в жидкостях существенную роль. В поверхностном слое жидкости обнаруживается некомпенсированность межмолекулярных сил: частицы жидкости, находящиеся в этом слое, испытывают направленную внутрь силу притяжения остальной частью жидкости. Поэтому согласно модели Ван-дер-Ваальса поверхностный слой жидкости оказывает на нее большое внутреннее давление, достигающее десятков тысяч атмосфер.

Заметим, что внутреннее давление нельзя измерить на опыте. Это связано с тем, что оно, как указано выше, всегда направлено внутрь жидкости, нормально к ее поверхности. Поэтому оно не действует на стенки сосуда и тела, погруженные в жидкость.

Можно считать, что при обычных условиях жидкости практически несжимаемы. Малая сжимаемость жидкостей объясняется тем, что небольшое уменьшение расстояния r между молекулами на малых взаимных расстояниях между ними приводит к появлению больших сил межмолекулярного отталкивания. Понятно, что при очень больших внешних давлениях жидкости должны обнаруживать значительную сжимаемость. Опыты Бриджмена и других показали, что это действительно так.

2. Рассмотрим вопрос об энергии поверхностного слоя жидкости. Частицы этого слоя имеют кинетическую энергию теплового движения и потенциальную энергию, обусловленную силами межмолекулярного взаимодействия. Средняя кинетическая энергия частиц зависит от температуры. В случае равновесного состояния температура постоянна по всему объему жидкости. Поэтому в среднем кинетические энергии молекул поверхностного слоя и молекул, находящихся внутри объема жидкости, одинаковы. Иначе обстоит дело с потенциальной энергией. При переходе молекул из внутренних частей жидкости на

ее поверхность они должны совершить работу против направленных внутрь жидкости сил притяжения со стороны других частиц жидкости. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии молекул, переходящих в поверхностный слой. Следовательно, частицы поверхностного слоя имеют бóльшую потенциальную энергию, чем частицы внутри жидкости.

В § 13.1 мы говорили о том, что в состоянии устойчивого равновесия система должна иметь минимальное значение потенциальной энергии[1]. Поэтому всякое жидкое тело, на которое не действуют внешние силы, должно принять такую форму, при которой площадь его поверхности будет минимальной. Так как жидкость, кроме того, несжимаема, то состоянию устойчивого равновесия жидкого тела соответствует минимум отношения площади его поверхности к объему. Из математики известно, что этому условию удовлетворяют тела сферической формы. Наблюдения мельчайших капель, взвешенных в воздухе и других средах, показывают, что они действительно имеют форму шариков. К такому же выводу приводит опыт Ж. Плато, известный из курса средней школы.

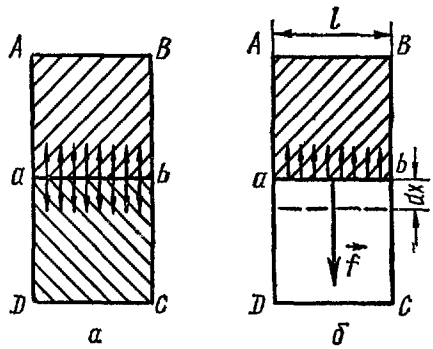

Рис. 14.1.

3. Стремление жидкости сократить размеры свободной поверхности свидетельствует о том, что поверхностный слой подобен растянутой упругой пленке: в нем так же, как в упругой пленке, действуют силы натяжения. Для иллюстрации этого положения рассмотрим следующий опыт (рис. 14.1). Горизонтальный прямоугольный проволочный каркас $ABCD$ и разделяющую его на две части перекладину ab полностью затягивают пленкой мыльной воды (рис. 14.1, *а*). В этом случае силы, действующие на перекладину со стороны верхней и нижней пленок, взаимно уравновешены и перекладина неподвижна. Если нижнюю пленку разорвать (рис. 14.1, *б*), то под действием одной верхней пленки перекладина начнет перемещаться вверх. Для компенсации действия пленки к перекладине нужно приложить силу $\mathbf{f}$. Опыты показали, что сила $\mathbf{f}$ пропорциональна длине перекладины

$$f = 2\alpha l. \qquad (14.6)$$

Коэффициент пропорциональности α называют **коэффициентом поверхностного натяжения жидкости**. Мыльная пленка имеет два ограничивающих ее поверхностных слоя, каждый из которых действует на перекладину с силой αl. Поэтому в правой части формулы (14.6) стоит множитель 2.

[1] Строго говоря, при постоянстве объема и температуры нужно говорить о минимуме не потенциальной, а свободной энергии.

Из (14.6) следует, что коэффициент поверхностного натяжения численно равен силе, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность жидкости. Эта сила вызвана взаимным притяжением между молекулами поверхностного слоя. Она направлена по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярно к контуру. В Международной системе единиц (СИ) коэффициент поверхностного натяжения измеряют в Н/м; в системе СГС — в дин/см.

4. Коэффициент поверхностного натяжения α зависит от химического состава жидкости и ее температуры. С возрастанием температуры α уменьшается и обращается в нуль при критической температуре. Исследование этой зависимости позволило Д. И. Менделееву сделать важный вывод относительно существования критической температуры (см. § 13.3).

В таблице 13 приведены значения α для некоторых жидкостей, граничащих с указанными в таблице средами.

Таблица 13

Жидкость	Среда	Температура, °С	α, 10^{-3} Н/м
Вода	Воздух	20	72,7
»	»	100	58,8
»	Этиловый эфир	20	12,2
Ртуть	Воздух	20	465
Этиловый спирт	Пары спирта	20	22,7
Глицерин	Воздух	20	63,4

5. Следует заметить, что между поверхностным слоем жидкости и упругой пленкой имеется существенное различие. Натяжение обычной упругой пленки прямо пропорционально ее деформации и равно нулю при некоторой к о н е ч н о й площади поверхности пленки. Поверхностное натяжение в жидкостях не зависит от размеров свободной поверхности, т. е. стремится сократить ее до нуля. Это своеобразие свойств жидких пленок объясняется тем, что при изотермическом растяжении или сжатии таких пленок изменяется ч и с л о молекул, содержащихся в них, а среднее расстояние между молекулами н е м е н я е т с я. Поэтому не изменяются и силы межмолекулярного взаимодействия, определяющие величину поверхностного натяжения.

6. Найдем выражение для свободной энергии поверхностного слоя жидкости. В § 12.4 было показано, что изменение свободной энергии системы ΔF равно работе $A'_{\text{изот}}$, совершаемой над системой внешними силами в обратимом изотермическом процессе,

$$\Delta F = F_2 - F_1 = A'_{\text{изот}}. \qquad (14.7)$$

Для вычисления работы $A'_{\text{изот}}$ воспользуемся схемой, изображенной на рис. 14.1, *б*. При перемещении границы пленки ab на расстояние dx внешняя сила f совершает работу

$$\delta A' = f \cdot dx = 2\alpha l \cdot dx.$$

Произведение $2l \cdot dx$ представляет собой увеличение площади свободной поверхности жидкой пленки dS. Поэтому

$$dA' = \alpha \cdot dS. \qquad (14\ 8)$$

Полная работа A', совершаемая внешними силами при изменении площади поверхности пленки от S_1 до S_2, будет равна

$$A' = \int_{S_1}^{S_2} \alpha \cdot dS. \qquad (14\ 9)$$

В случае изотермического изменения площади $\alpha = \text{const}$ и

$$A'_{\text{изот}} = \alpha(S_2 - S_1). \qquad (14\ 10)$$

Подставив это выражение в (14.7), получим

$$F_2 - F_1 = \alpha(S_2 - S_1). \qquad (14.11)$$

Изменение свободной энергии поверхностного слоя жидкости равно произведению ее коэффициента поверхностного натяжения на изменение площади поверхности.

Из (14.11) следует, что

$$F = \alpha S. \qquad (14.12)$$

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения численно равен свободной энергии поверхностного слоя, площадь которого равна единице. Поэтому его можно измерять в системе СИ — в Дж/м^2, а в системе СГС — в эрг/см^2.

§ 14.5. Поверхностно-активные вещества. Адсорбция

1. Растворение в жидкости различных добавок вызывает изменение поверхностного натяжения. Это особенно заметно в тех случаях, когда силы взаимодействия между молекулами растворенного вещества и растворителя сильно отличаются от сил взаимодействия между молекулами растворителя. Если последние больше первых, то молекулы растворенного вещества, слабо взаимодействующие с молекулами растворителя, «выталкиваются» последними в поверхностный слой. Концентрация молекул растворенного вещества в поверхностном слое будет больше концентрации их в объеме жидкости.

Вещества, собирающиеся в поверхностном слое при растворении их в жидкости, называют **поверхностно-активными веществами,** а явление повышенной концентрации молекул этих веществ в поверхностном слое растворителя называют **адсорбцией.** Адсорбция молекул газа или жидкости может происходить также и на поверхности твердого тела, контактирующего с газом или жидкостью (например, на по-

верхности активированного угля). Поверхностно-активными веществами по отношению к воде являются многие органические вещества: жирные кислоты, их соли, спирты, эфиры и др. Поверхностно-активные вещества вызывают уменьшение поверхностного натяжения.

Если силы взаимодействия между молекулами растворенного вещества и растворителя больше сил взаимодействия между молекулами растворителя (например, в случае раствора сахара в воде), то наблюдается обратное явление — концентрация молекул растворенного вещества в поверхностном слое оказывается меньшей, чем в остальном объеме раствора. Такое явление называют **отрицательной адсорбцией.**

2. Поверхностно-активные вещества практически полностью концентрируются в поверхностном слое растворителя. Такая картина наблюдается, например, при введении в воду жирных кислот. Молекулы этих кислот представляют собой длинную цепочку, концы которой поразному взаимодействуют с молекулами воды. Конец, содержащий группу COOH, сильно взаимодействует с молекулами воды (гидрофильный конец молекулы жирной кислоты). Конец, содержащий группу CH_3, слабо взаимодействует с молекулами воды (гидрофобный конец молекулы). Поэтому молекулы жирных кислот, выталкиваясь в поверхностный слой воды, располагаются в нем вертикально так, что концы с группой COOH оказываются погруженными в воду, а концы с группой CH_3 торчат наружу.

Если концентрация жирной кислоты в воде столь мала, что площадь свободной поверхности, приходящаяся на одну молекулу жирной кислоты, значительно меньше поперечного сечения этой молекулы, приблизительно равного $(2 \div 2{,}4) \cdot 10^{-19}$ м^2, то поверхностное натяжение практически равно поверхностному натяжению чистой воды. По мере увеличения содержания жирной кислоты в воде концентрация молекул кислоты в поверхностном слое возрастает до тех пор, пока они не образуют сплошной мономолекулярный слой. При этом поверхностное натяжение уменьшается. Дальнейшее увеличение количества жирной кислоты приводит к возникновению двух и большего числа мономолекулярных слоев, а коэффициент поверхностного натяжения приближается к его значению для жирной кислоты.

3. Адсорбция в поверхностном слое сопровождается увеличением его вязкости. Это объясняется тем, что погруженные в растворитель активные концы молекул адсорбированного вещества притягивают к себе молекулы растворителя, концентрируя молекулы жидкости около себя. Увеличение вязкости поверхностной пленки приводит к повышению ее прочности. Так, например, вязкость тонких пленок мыльной воды значительно больше вязкости чистой воды, благодаря чему эти пленки обладают сравнительно большой устойчивостью. Мыльные пузыри могут скользить один вдоль другого, не сливаясь. Этим объясняется также устойчивость пены.

4. Поверхностно-активные вещества нашли широкое применение в технике резания металлов, бурения горных пород, флотационных

процессов и т. д. Адсорбируясь на поверхности металла или горной породы, молекулы поверхностно-активных веществ проникают внутрь микротрещин. Адсорбированный слой способствует дальнейшему развитию трещин в глубь тела. Поэтому разрушение твердого тела в присутствии поверхностно-активных веществ происходит при меньших внешних усилиях.

§ 14.6. Смачивание и капиллярные явления

1. Опыты показывают, что свободная поверхность жидкости около стенок сосуда, вообще говоря, искривлена и имеет вид, изображенный на рис. 14.2. Искривленную свободную поверхность жидкости называют **мениском** Для характеристики мениска вводят **краевой угол** ϑ между смоченной поверхностью стенки и мениском в точках их пересечения. Если $\vartheta < 90°$ (рис. 14.2, *а*), то говорят, что жидкость **смачивает** стенку, если $\vartheta > 90°$ (рис. 14.2, *б*), то говорят, что жидкость **не смачивает** стенку.

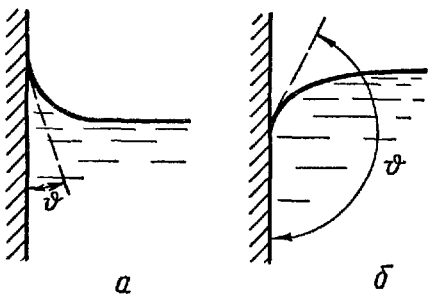

Рис. 14.2.

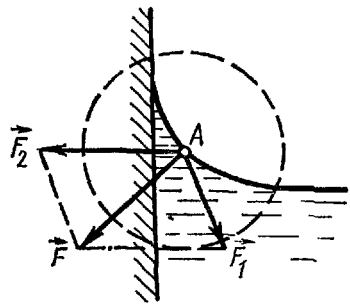

Рис. 14.3

Искривление поверхности жидкости и появление мениска вызвано тем, что молекулы жидкости, находящиеся вблизи стенки сосуда или другого твердого тела, взаимодействуют не только друг с другом, но и с частицами твердого тела. Рассмотрим произвольную молекулу A поверхностного слоя жидкости, находящуюся вблизи плоской стенки сосуда (рис. 14.3). Ее сфера молекулярного действия показана на рисунке пунктиром. Обозначим через $\mathbf{F}_1$ результирующую силу притяжения молекулы A всеми остальными молекулами жидкости, а через $\mathbf{F}_2$— силу притяжения ее частицами стенки. Из соображений симметрии ясно, что сила $\mathbf{F}_2$ направлена перпендикулярно к стенке. Направление силы $\mathbf{F}_1$ зависит от формы мениска и положения молекулы A относительно стенки. В простейшем случае плоского мениска эта сила направлена под углом 45° к стенке, если молекула A находится около самой стенки (рис. 14.4).

Сила тяжести молекулы пренебрежимо мала по сравнению с силами $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Поэтому можно считать, что результирующая сила $\mathbf{F}$, действующая на молекулу A, равна сумме сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Молекула находится в равновесии только в том случае, если сила $\mathbf{F}$ направлена перпендикулярно к поверхности жидкости. В противном случае молекула перемещалась бы вдоль этой поверхности. Направление силы $\mathbf{F}$ зависит от направления силы $\mathbf{F}_1$ и соотношения между величинами сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$.

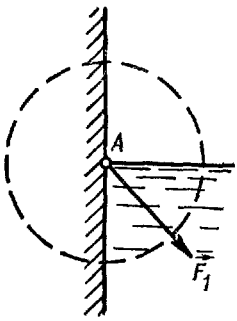

Рис.. 14.4

Возможны следующие три случая (рис. 14.5):

а) сила $\mathbf{F}$ параллельна поверхности стенки, поверхность жидкости плоская и $\vartheta = 90°$ (рис. 14.5, *а*);

б) сила $\mathbf{F}$ направлена в сторону стенки, т. е. силы притяжения молекулы A частицами стенки преобладают над силами притяжения ее молекулами жидкости. При этом жидкость имеет вогнутый мениск и $\vartheta < 90°$, т. е. жидкость **смачивает** стенку (рис. 14.5, *б*);

в) сила $\mathbf{F}$ направлена в сторону жидкости, т. е. силы притяжения молекулы A молекулами жидкости преобладают над силами притяжения ее частицами стенки. В этом случае мениск выпуклый и $\vartheta > 90°$, так что жидкость **не смачивает** стенку (рис. 14.5, *в*)

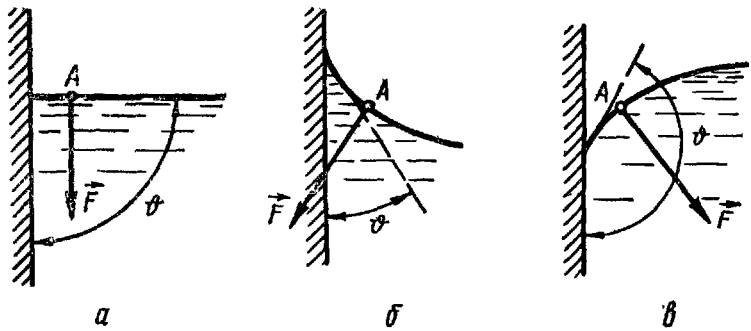

Рис. 14.5.

2. Вследствие действия сил поверхностного натяжения искривленный поверхностный слой производит на жидкость давление Δp, дополнительное по отношению к внешнему давлению p. В этом отношении существует аналогия с действием растянутой упругой оболочки (например, резиновой камеры) на заключенный внутри нее газ.

Найдем выражение для давления Δp в простейшем случае, когда мениск имеет форму цилиндрической поверхности с постоянным радиусом кривизны R. Рассмотрим бесконечно малый элемент поверхностного слоя $ABCD$, вырезанный вдоль образующей цилиндра

(рис. 14.6, *а*). На этом же рисунке показаны силы, действующие на элемент $ABCD$ со стороны остальной части поверхностного слоя, причем

$$dF_2 = dF_4 = \alpha \cdot dl$$

и

$$dF_1 = dF_3 = \alpha R \cdot d\varphi.$$

Легко видеть, что равнодействующая сил $d\mathbf{F}_1$ и $d\mathbf{F}_3$ равна нулю, так как эти силы численно равны и направлены в противоположные стороны. Сила $d\mathbf{F}_2$ направлена перпендикулярно к плоскости AOB,

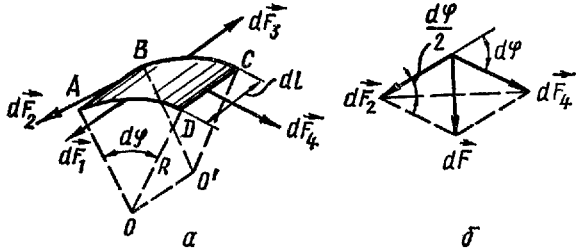

Рис. 14.6.

а сила $d\mathbf{F}_4$— перпендикулярно к плоскости COD. Следовательно, угол между этими силами равен $(\pi - d\varphi)$ и их равнодействующая $d\mathbf{F}$ отлична от нуля. Из рис. 14.6, *б* видно, что

$$dF = 2dF_2 \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} = 2\alpha \cdot dl \sin\frac{d\varphi}{2}.$$

Так как при малых углах

$$\sin\frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2},$$

то

$$dF = \alpha \cdot dl \cdot d\varphi = \frac{\alpha}{R} \cdot dl \cdot R \cdot d\varphi = \frac{\alpha}{R} \cdot dS, \qquad (14.13)$$

где $dS = dl \cdot R \cdot d\varphi$ — площадь поверхности $ABCD$.

Сила $d\mathbf{F}$ перпендикулярна к поверхности элемента $ABCD$ и направлена к оси ее кривизны OO'. Эта сила и вызывает появление дополнительного давления Δp:

$$\Delta p = \frac{dF}{dS} = \frac{\alpha}{R}. \qquad (14.14)$$

П. Лаплас доказал, что дополнительное давление, производимое на жидкость поверхностным слоем произвольной формы,

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (14.15)$$

где R_1 и R_2— радиусы кривизны двух любых взаимно перпенди-

кулярных нормальных сечений[1] M_1N_1 и M_2N_2 поверхности в рассматриваемой точке A (рис. 14.7).

В формуле (14.15) радиус кривизны R_1 или R_2 считается положительным, если центр кривизны соответствующего сечения лежит внутри жидкости В противном случае радиус кривизны сечения считается отрицательным. Следовательно, дополнительное давление $\Delta p > 0$, если мениск выпуклый, и $\Delta p < 0$, если он вогнутый.

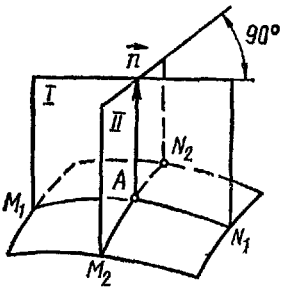

Рис. 14.7.

Формула (14.14) является частным случаем (14.15), так как для нормального сечения цилиндрической поверхности, перпендикулярного оси, $R_1 = R$, а для нормального сечения, проходящего через ось, $R_2 = \infty$.

В случае плоской поверхности $R_1 = R_2 = \infty$ и дополнительное давление отсутствует. Для сферической поверхности $R_1 = R_2 = R$ и

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}. \qquad (14.16)$$

Таково избыточное давление внутри пузырька газа радиуса R, находящегося внутри жидкости около ее поверхности. Избыточное давление внутри мыльного пузыря такого же радиуса вдвое больше, так как оно вызвано действием обоих поверхностных слоев тонкой сферической мыльной пленки:

$$\Delta p = \frac{4\alpha}{R}. \qquad (14\ 17)$$

3. Уровень жидкости в узких сосудах (капиллярах) отличен от уровня жидкости в сообщающемся с ними широком сосуде. Уровень жидкости в капилляре ниже, чем в сосуде (рис. 14.8 *а*), если жид-

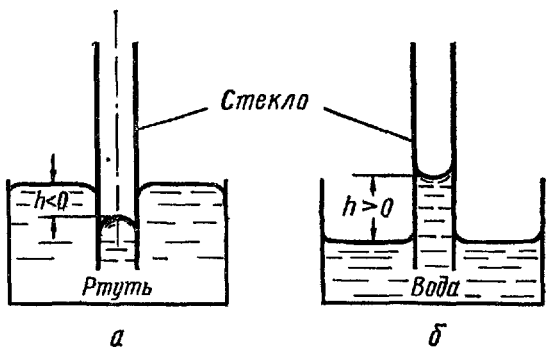

Рис. 14.8.

[1] Нормальным сечением поверхности в точке A называют кривую, получающуюся в результате пересечения поверхности с плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в этой точке

кость не смачивает стенки капилляра. Он выше, чем в сосуде, если жидкость смачивает стенки капилляра (рис. 14.8, *б*). Эти явления вызваны большой кривизной мениска жидкости в капилляре, а следовательно, большой величиной добавочного давления.

В широком сосуде поверхность жидкости практически плоская и добавочное давление равно нулю. Поэтому различие в уровнях жидкости в капилляре и сосуде зависит только от давления $\Delta p_к$. Алгебраическая сумма давления $\Delta p_к$ и гидростатического давления избыточного столба h жидкости в капилляре должна быть равна нулю:

$$\Delta p_к + \rho g h = 0,$$

где ρ — плотность жидкости.

Таким образом, высота поднятия жидкости в капиллярах

$$h = -\frac{\Delta p_к}{\rho g}. \qquad (14.18)$$

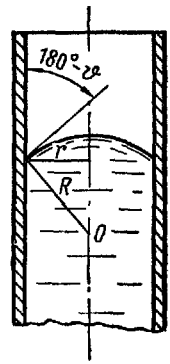

Рис. 14.9.

Если капилляр представляет собой круглую цилиндрическую трубку с радиусом канала r, то мениск имеет сферическую форму.

Как видно из рис. 14.9, радиус мениска

$$R = \frac{r}{\cos(180° - \vartheta)} = -\frac{r}{\cos\vartheta}. \qquad (14.19)$$

Добавочное давление $\Delta p_к$ и высота h поднятия жидкости в круглом капилляре соответственно равны:

$$\Delta p_к = \frac{2\alpha}{R} = -\frac{2\alpha\cos\vartheta}{r}$$

и

$$h = \frac{2\alpha\cos\vartheta}{r\rho g}. \qquad (14.20)$$

В том случае, когда капилляр имеет форму узкой щели с постоянной толщиной δ, мениск имеет цилиндрическую форму, причем его радиус

$$R = -\frac{\delta}{2\cos\vartheta}. \qquad (14.21)$$

Следовательно,

$$\Delta p_к = \frac{\alpha}{R} = -\frac{2\alpha\cos\vartheta}{\delta},$$

$$h = \frac{2\alpha\cos\vartheta}{\delta\rho g}. \qquad (14.22)$$

4. Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Так, например, влагообмен в почве осуществляется за счет поднятия воды по тончайшим капиллярам. Поэтому перепахивание почвы, разрушающее эти капилляры, способствует сохранению в ней влаги. Примерами капиллярных процессов являются процессы поднятия жидкостей по фитилям, впитывание влаги гигроскопическими телами и др.

На явлении смачивания жидкостью одних твердых веществ и несмачивания других основан флотационный метод обогащения руды. Принцип флотации состоит в следующем. Мелко измельченная порода, содержащая частицы руды и бесполезных примесей («пустой» породы), перемешивают с жидкостью, которая смачивает только частицы «пустой» породы. Через эту смесь продувают воздух. Пузырьки воздуха «прилипают», к несмачиваемым жидкостью частицам руды и уносят их на поверхность. Частицы «пустой» породы, к которым пузырьки воздуха не прилипают, постепенно осаждаются на дно.

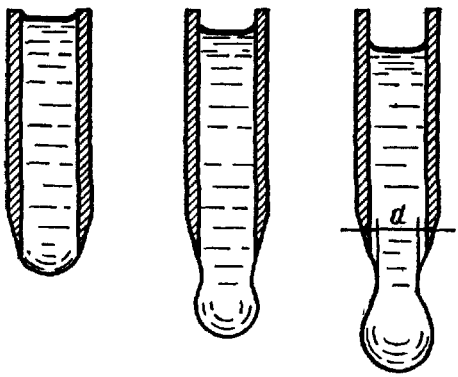

Рис. 14.10.

Защита металлических поверхностей от коррозии с помощью масляных пленок основана на несмачивании водой жирных поверхностей. Непромокаемую одежду изготовляют из тканей, которые не смачиваются водой. Наоборот, при крашении важно, чтобы поверхность тела хорошо смачивалась красителем.

5. Существует ряд экспериментальных методов определения коэффициентов поверхностного натяжения жидкостей. Один из них основан на том, что при медленном вытекании жидкости из круглой трубки сила тяжести капли P в момент отрыва равна силе поверхностного натяжения, действующей по окружности «шейки» капли:

$$P = \alpha \pi d, \tag{14.23}$$

где d — диаметр «шейки» капли (рис. 14.10).

В опыте измеряют число n капель, образующихся при вытекании из трубки определенного объема V жидкости. Умножая обе части формулы (14.23) на n, получим

$$nP = n\alpha\pi d,$$

причем

$$nP = V\rho g,$$

где ρ — плотность жидкости.

Из последних двух формул следует

$$\alpha = \frac{V\rho g}{\pi d n}. \qquad (14\ 24)$$

Диаметр d «шейки» капли находят либо путем фотографирования процесса отрыва капель, либо путем наблюдения этого процесса в теневой проекции.

Другие методы определения α основаны на измерении силы, необходимой для отрыва кольца или пластины от поверхности смачивающей их жидкости, на измерении высоты поднятия жидкости в капиллярах, давления внутри газового пузырька и т. д.

§ 14.7. Давление насыщенных паров над искривленной поверхностью жидкости

1. **Насыщеным паром** называют пар, находящийся в термодинамическом равновесии с жидкостью или твердым телом, имеющими тот же химический состав. Между жидкостью и ее насыщенным паром существует динамическое («подвижное») равновесие: число молекул, вырывающихся за единицу времени из жидкости и переходящих в паровую фазу, равно числу молекул пара, возвращающихся в жидкость за то же время.

Таким образом, непрерывно совершаются два взаимно компенсирующих друг друга процесса — испарение жидкости и конденсация пара.

Силы взаимного притяжения между молекулами жидкости противодействуют переходу молекул из жидкости в пар. Поэтому «испариться» могут лишь наиболее быстро движущиеся молекулы, кинетическая энергия которых достаточна для совершения работы против сил притяжения этих молекул другими частицами жидкости. Эту работу можно назвать работой выхода молекул из жидкости. С повышением температуры увеличиваются скорости молекул и соответственно возрастает интенсивность испарения. При этом должен усилиться и компенсирующий процесс конденсации пара, идущий тем интенсивнее, чем больше концентрация молекул в паре, т. е. чем больше его давление. Следовательно, с повышением температуры жидкости давление ее насыщенного пара возрастает.

2 Работа выхода для молекулы, находящейся на поверхности жидкости,

$$A = \int_0^\infty F \cdot dx,$$

где F — численное значение силы притяжения рассматриваемой молекулы остальными частицами жидкости, а x — расстояние, измеряемое от поверхности жидкости по нормали к ней

Поскольку при $x \geqslant R_м$ ($R_м$ — радиус молекулярного действия) $F = 0$, выражение для A можно упростить:

$$A = \int_0^{R_м} F \cdot dx, \tag{14.25}$$

где F — сила притяжения молекулы только теми частицами жидкости, которые находятся в сфере ее молекулярного действия. При одном и том же расстоянии x от молекулы до поверхности жидкости, сила F зависит от формы этой поверхности. На рис. 14.11 показаны случаи

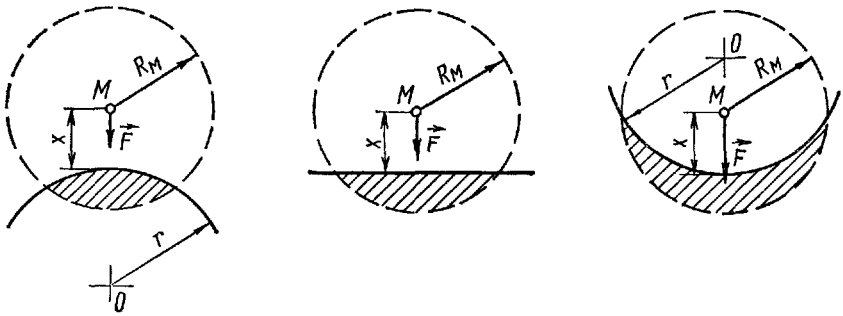

Рис 14.11.

плоской поверхности, а также выпуклого и вогнутого менисков, имеющих радиус кривизны r. Точка O — центр кривизны мениска. Во всех трех случаях пунктиром показана сфера молекулярного действия молекулы M, переходящей из жидкости в паровую фазу, т. е. совершающей работу выхода A. Заштрихованная часть этой сферы заключена внутри жидкости. Общее число n находящихся в ней молекул жидкости пропорционально ее объему. Из рис. 14.11 видно, что при одном и том же расстоянии x число молекул n, а следовательно, и сила F в случае вогнутого мениска больше, а в случае выпуклого — меньше, чем при плоской поверхности.

По формуле (14.25) работа выхода также должна зависеть от формы поверхности жидкости:

$$A_{вогн} > A_{пл} > A_{вып}.$$

Следовательно, интенсивность испарения с вогнутой поверхности жидкости меньше, а с выпуклой больше, чем с плоской. Поэтому и давление насыщенного пара зависит от формы мениска:

$$p_{вогн} < p_{пл} < p_{вып}. \tag{14.26}$$

Это различие тем больше, чем меньше радиус кривизны свободной поверхности жидкости. Зависимостью давления насыщенного пара от

кривизны поверхности жидкости обусловлен рост крупных капель дождя за счет испарения более мелких; отсыревание пористых тел, смачиваемых водой, и другие явления.

§ 14.8. Кипение жидкостей

1. В § 13.3 мы кратко говорили о кипении жидкости, не вдаваясь в выяснение сущности этого явления **Кипением** называют процесс интенсивного испарения жидкости не только с ее свободной поверхности, но и по всему объему жидкости внутрь образующихся при этом пузырьков пара. Пузырьки пара в кипящей жидкости быстро увеличиваются в размерах и, всплывая на поверхность, лопаются. Вследствие этого возникает характерное бурление кипящей жидкости.

Давление p внутри газового пузыря, находящегося в жидкости, представляет собой сумму внешнего давления p_0, гидростатического давления вышележащих слоев жидкости $p_ж$ и добавочного давления Δp, вызываемого поверхностным натяжением:

$$p = p_0 + p_ж + \Delta p, \tag{14.27}$$

причем

$$p_ж = \rho g h \quad \text{и} \quad \Delta p = \frac{2\alpha}{r},$$

где r — радиус пузырька пара, h — расстояние от его центра до поверхности жидкости, а ρ и α — плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Рост пузырьков пара, т. е. кипение жидкости, возможно только в том случае, когда температура жидкости такова, что давление $p_п$ насыщенного пара внутри пузырька не меньше давления p, вычисляемого по формуле (14.27):

$$p_п \geqslant p_0 + \rho g h + \frac{2\alpha}{r}. \tag{14.28}$$

Если условие (14.28) не выполнено, происходит «захлопывание» пузырька и конденсация находящегося в нем пара.

Из (14.28) видно, что при малых размерах r пузырьков пара давление $p_п$ должно быть велико Поэтому, для того чтобы началось кипение, жидкость нужно нагреть до высокой температуры. Кипение возникает при значительно более низкой температуре, если в жидкости имеются пылинки, пузырьки растворенных газов, бугорки шероховатости на стенках сосуда и другие **центры парообразования.** Дело, в том, что возникающие на этих центрах пузырьки пара уже с самого начала имеют такой радиус кривизны, что влияние третьего члена в правой части неравенства (14.28) невелико. Поэтому кипение может начинаться при меньших значениях температуры.

Обычно, когда начинается кипение жидкости, в ней имеются такие центры парообразования, что $\Delta p = 2\ \alpha/r$ мало, высота сосуда

также невелика, так что $\rho gh \ll p_0$. Поэтому вместо (14.28) можно написать следующее приближенное условие для начала кипения: $p_п = p_0$.

Температуру жидкости, при которой давление ее насыщенного пара равно внешнему давлению, называют **температурой кипения.**

2. Если кипение жидкости происходит при постоянном давлении p_0, то ее температура также остается неизменной. Теплота, подводимая к кипящей жидкости, целиком расходуется на отрыв молекул от жидкости и переход их в паровую фазу. Теплоту $r_к$, необходимую для испарения единицы массы жидкости, нагретой до температуры кипения, называют **удельной теплотой парообразования.** Удельная теплота парообразования уменьшается с увеличением температуры кипения и обращается в нуль при критической температуре.

В табл. 14 приведены значения $r_к$ для воды в зависимости от температуры кипения.

Таблица 14

t, °C		100	150	200	250	300	350	374
$r_к$	кал/г	539,0	505,0	463,5	409,7	335,4	213,3	27,4
	Дж/кг	$2{,}26 \cdot 10^6$	$2{,}11 \cdot 10^6$	$1{,}94 \cdot 10^6$	$1{,}71 \cdot 10^6$	$1{,}40 \cdot 10^6$	$8{,}92 \cdot 10^5$	$1{,}15 \cdot 10^5$

3. Кипение жидкости и конденсация пара служат примерами **фазовых переходов первого рода.** Характерная особенность всех фазовых переходов первого рода состоит в том, что в этих процессах одновременно постоянны давление и температура, но зато изменяется соотношение между массами двух фаз. Второй особенностью этих процессов является то, что для их осуществления необходимо подводить к системе или отводить от нее некоторое количество теплоты, называемое **теплотой фазового перехода.**

В термодинамике доказано, что теплота r фазового перехода единицы массы вещества

$$r = (v_2 - v_1)\, T \frac{dp}{dT}, \qquad (14.29)$$

где v_1 и v_2 — удельные объемы вещества в исходной и конечной фазах соответственно, а T и p — температура и давление фазового перехода. Соотношение (14.29) называют **уравнением Клапейрона — Клаузиуса.** Оно справедливо для любого фазового перехода первого рода. Им широко пользуются в теплотехнике для нахождения удельных теплот парообразования, плавления и испарения по известным из опыта зависимостям температуры фазового перехода от давления.

4. Запишем уравнение (14.29) для случая кипения жидкости:

$$r_к = (v_п - v_ж)\, T \frac{dp}{dT}.$$

откуда

$$\frac{dT}{dp} = \frac{(v_п - v_ж)\,T}{r_к}, \qquad (14.30)$$

где $v_ж$ и $v_п$ — удельные объемы жидкости и пара при температуре кипения T.

Поскольку $v_п > v_ж$ и $r > 0$, то из (14.30) следует, что $\frac{dT}{dp} > 0$, т. е. температура кипения возрастает при увеличении давления. Так, например, при давлениях $p > 1{,}25 \cdot 10^7$ Па воду можно нагреть до такой температуры, что в ней будет плавиться свинец ($t_{пл} = 327°$ С), а кипения воды все еще не будет. Если давление в таком сосуде с сильно нагретой жидкостью уменьшить, то происходит бурное кипение жидкости. При этом выделяется столь большое количество пара, что его давление почти мгновенно возрастает до огромных величин и может вызвать разрушение сосуда. Это обстоятельство нужно учитывать при эксплуатации котельных установок.

Интересен следующий опыт, демонстрирующий кипение воды при пониженном давлении. В эксикаторе, на дно которого налито немного серной кислоты, поглощающей водяные пары, устанавливают на проволочной подставке часовое стекло с небольшим количеством воды. При откачивании из эксикатора воздуха вода на часовом стекле закипает при комнатной температуре. Затем на ее поверхности образуется ледяная корка, так как вода отдает теплоту, необходимую для кипения. Кипение продолжается до тех пор, пока вся вода на часовом стекле не замерзнет.

Вопросы для повторения

1. В чем особенность теплового движения частиц жидкости?
2. В чем состоит дырочная теория строения жидкости?
3. Каковы причины особых свойств поверхностного слоя жидкостей?
4. Выведите формулу Лапласа.
5. Объясните капиллярные явления в жидкостях.

Примеры решения задач

Задача 14.1. Капля ртути массой $2{,}72 \cdot 10^{-3}$ кг введена между параллельными стеклянными пластинками. Какую силу следует приложить для того, чтобы расплющить каплю до толщины в 0,1 мм? Коэффициент поверхностного натяжения ртути 0,5 Н/м. Считать, что ртуть абсолютно не смачивает стекло.

Дано

$M = 2{,}72 \cdot 10^{-3}$ кг,
$\delta = 10^{-4}$ м,
$\alpha = 0{,}5$ Н/м;
из таблиц:
$\rho = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3

F — ?

Решение

Сдавленная капля ртути имеет вид очень тонкого диска с выпуклой боковой поверхностью. Дополнительное давление Δp, возникающее вследствие кривизны поверхности, уравновешивает внешнее давление, производимое силой F:

$$\Delta p = \frac{F}{S}. \qquad (a)$$

Здесь S — площадь соприкосновения капли ртути с пластинкой:

$$S = \frac{V}{\delta} = \frac{M}{\rho\delta},$$

где V — объем капли ртути, M — ее масса и ρ — плотность. С другой стороны, $S = \pi R^2$, где R — радиус диска Поэтому

$$R = \sqrt{\frac{M}{\pi\rho\delta}}.$$

Давление Δp найдем по формуле (14.15):

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

где $r = \delta/2$

Подставив значения R и S в формулу (а), получим

$$F = \frac{M\alpha}{\rho\delta}\left[\sqrt{\frac{\pi\rho\delta}{M}} + \frac{2}{\delta}\right]$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$F = \frac{2{,}72\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}5}{1{,}36\cdot 10^{4}\cdot 10^{-4}}\left[\sqrt{\frac{3{,}14\quad 1{,}36\cdot 10^{4}\cdot 10^{-4}}{2{,}72\cdot 10^{-3}}} + \frac{2}{10^{-4}}\right]\text{ Н} = 20\text{ Н}$$

Задача 14.2. На дне цилиндрического сосуда, наполненного до высоты 39 см глицерином плотностью 1,26 г/см^3, удерживают деревянный шарик радиусом 2,5 мм. Сколько времени будет всплывать на поверхность отпущенный шарик, если считать, что на протяжении всего пути он движется равномерно? Плотность дерева принять равной 0,4 г/см^3, а коэффициент вязкости глицерина 0,3 Па · с.

Дано

$h = 0{,}39$ м,
$d = 5\ \ 10^{-3}$ м,
$\rho_1 = 1{,}26\cdot 10^3$ кг/м^3,
$\rho_2 = 400$ кг/м^3,
$\eta = 0{,}3$ Па с

$\tau - ?$

Решение

На шарик, движущийся в жидкости, действуют следующие силы сила тяжести P, направленная вниз и численно равная

$$P = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g,$$

сила сопротивления F_1, направленная вниз (в сторону, противоположную движению шарика) и численно равная по формуле (14 4)

$$F_1 = 6\pi\eta r u,$$

и выталкивающая сила F_2, направленная вверх и численно равная весу жидкости в объеме тела

$$F_2 = \frac{4}{3}r^3\rho_1 g.$$

При равномерном движении шарика

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

Проектируя все векторы на направление вектора — P, получаем

$$-\frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g - 6\pi\eta r u + \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g = 0.$$

Заменив в этом уравнении скорость u равномерного движения шари формуле $u = h/\tau$ и радиус $r = d/2$, получим

$$\tau = \frac{18\eta h}{d^2 g(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$\tau = \frac{18 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}39}{25 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}81\,(1{,}26 - 0{,}4) \cdot 10^3}\ \text{с} = 10\ \text{с}.$$

Глава XV
ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

§ 15.1. Строение твердых тел

1. Простейшими свойствами твердых тел, резко отличающими их от газов, являются постоянство формы и объема. От переохлажденных жидкостей — так называемых **аморфных тел** (стекло, вар и т. п.) — твердые тела отличаются кристаллической структурой. Внешне правильная геометрическая форма многих твердых тел была обнаружена давно, и такие тела были названы **кристаллами**. Кристаллы ограничены плоскими, упорядоченно расположенными относительно друг друга гранями, сходящимися в ребрах и вершинах. Например, кристаллы поваренной соли NaCl имеют кубическую форму (рис. 15.1). Кристаллы кварца представляют собой шестигранные призмы, заканчивающиеся шестигранными пирамидами (рис. 15.2).

Идея о том, что правильная геометрическая форма кристаллов — результат упорядоченного расположения частиц, составляющих кристалл, была высказана в конце XVIII в. Однако изучение кристаллического состояния вещества было поставлено на прочную экспериментальную основу лишь после открытия рентгеновских лучей. В 1912 г. М. Лауэ обнаружил рассеяние рентгеновских лучей на кристаллической решетке твердого тела, представляющей собой пространственную дифракционную решетку с очень малым периодом. Использование рентгеновских лучей явилось прекрасным методом зондирования внутренних областей твердых тел. При помощи рентгенограмм удалось убедиться в правильном (упорядоченном) расположении частиц, составляющих кристаллы, и даже измерить средние расстояния между ними.

2. Твердые тела, имеющие единую кристаллическую решетку по всему объему, называют **монокристаллами**. Это — крупные одиночные кристаллы, размеры которых в отдельных случаях бывают довольно большими. Так, известный металловед Д. К. Чернов, разрезая слитки железа, нашел внутри одного из них монокристалл длиной около 40 см, а кристаллы горного хрусталя достигают размера человеческого роста.

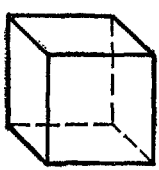

Рис. 15.1.

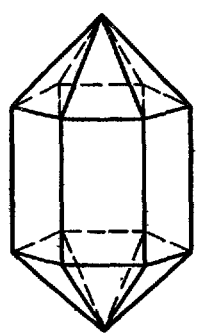

Рис. 15.2.

Большинство твердых тел имеет мелкокристаллическую структуру, т. е. состоит из большого числа сросшихся мелких кристалликов, расположенных относительно друг друга, вообще говоря, совершенно хаотично. Такие твердые тела называют **поликристаллическими.** К ним принадлежат, в частности, металлы, которые всегда можно отличить от других твердых тел по присущему им «металлическому блеску» и ковкости.

При переходе металлов в твердое или жидкое состояние, например, при конденсации металлического пара, внешние (валентные) электроны атомов утрачивают связь со «своими» атомами и легко переходят от одного атома к другому. Поэтому их называют свободными, или коллективизированными. В узлах кристаллической решетки металлов находятся положительные ионы, получившиеся из атомов после отделения от них электронов, а внутри решетки «плавают» свободные электроны, образующие в металле своеобразный электронный газ. Для одновалентных металлов на один атом приходится один свободный электрон. Такое строение металлов объясняет их хорошую теплопроводность и электропроводность.

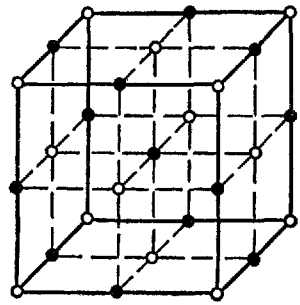

Рис. 15.3.

В § 13.1 мы говорили о том, что между двумя молекулами или атомами действуют силы притяжения и отталкивания. В кристаллической решетке каждый атом твердого тела испытывает воздействие со стороны всех соседних частиц. Равновесное расположение всех атомов твердого тела в узлах решетки соответствует минимуму свободной энергии кристалла и, следовательно, его наиболее устойчивому состоянию.

3. По характеру сил взаимодействия и тому, какие частицы расположены в узлах решетки, различают еще несколько типов твердых тел, помимо металлов. Все соли, подобные хлористому натрию, углекислому кальцию и другим, образуют группу **ионных кристаллов.** В узлах ионной решетки расположены правильно чередующиеся положительные и отрицательные ионы. Силы взаимодействия между частицами в такой решетке в основном электростатические. Решетки этого типа называют **гетерополярными.** На рис. 15.3 изображена кристаллическая решетка каменной соли (NaCl). Она служит примером простейшей кубической структуры. В ее узлах расположены чередующиеся положительные ионы Na^+ (на рис. 15.3 зачернены) и отрицательные ионы Cl^-. Ионные кристаллы легко раскалываются.

В узлах кристаллической решетки **валентных кристаллов** расположены нейтральные атомы. В такой **атомной,** или **гомеополярной,** решетке силы взаимодействия между атомами носят сложный характер. Их объяснение стало возможным только на основе квантовой механики. Некоторые валентные кристаллы, как, например, алмаз и и карборунд, отличаются своей твердостью и плохой раскалывае-

мостью. Этот тип твердых тел образуется из легких элементов средних групп периодической системы элементов Д. И. Менделеева.

Кроме перечисленных типов кристаллических твердых тел, существуют еще **молекулярные кристаллы**. К ним относится большинство твердых органических соединений, сухой лед, йод, парафин. Молекулярные решетки имеют также кристаллы многоатомных химических соединений (окислы фосфора, серный ангидрид). В узлах кристаллической решетки таких твердых тел расположены нейтральные молекулы.

Особое место среди твердых тел занимают **полупроводники**, к которым относятся окись и закись меди, окись цинка, селен, германий и др. По таким свойствам, как твердость, раскалываемость и структура решетки, полупроводники напоминают валентные кристаллы. Особые свойства полупроводников, которые будут подробно рассмотрены во втором томе курса, обеспечили им широкое применение в науке и технике.

Приведенная выше классификация кристаллических твердых тел до известной степени условна. Существует большое число твердых тел, свойства которых не позволяют отнести их к какому-либо из рассмотренных типов. Эти твердые тела занимают некоторые промежуточные положения между рассмотренными группами.

4. Одна из наиболее характерных особенностей монокристаллов состоит в их **анизотропии**, т. е. в различии их физических свойств (упругих, тепловых, электрических, оптических) по различным направлениям. Специально обработанные поликристаллические тела (например, прокатанный металл) также обиаруживают некоторую анизотропию.

5. Между формой кристаллов твердых тел и их химическим составом существует связь, лежащая в основе кристаллохимического анализа. Так, например, установлено, что структура ионных кристаллов определяется их химическим составом и соотношением ионных радиусов. Важную роль в развитии учения о симметрии кристаллов и разработке основ кристаллохимического анализа сыграли работы Е. С. Федорова. Им разработаны некоторые методы экспериментального изучения кристаллов, в частности созданы специальные гониометры для исследования структуры кристаллов.

В дальнейшем мы не будем интересоваться особенностями различных типов твердых тел и рассмотрим лишь их некоторые общие свойства.

§ 15.2. Тепловое расширение твердых тел

1. Опыт показывает, что с повышением температуры происходит расширение твердых тел, называемое тепловым расширением. Для характеристики этого явления вводят коэффициенты линейного и объемного расширения. Пусть l_0— длина тела при температуре 0°С. Удлинение этого тела Δl при нагревании его до температуры t° С пропорционально первоначальной длине l_0 и температуре:

$$\Delta l = \alpha_l l_0 t, \qquad (15.1)$$

где α_l — **коэффициент линейного расширения**, характеризующий относительное удлинение $\Delta l/l_0$, происходящее при нагревании тела на 1 К. Длина тела при температуре t

$$l = l_0 + \Delta l = l_0(1 + \alpha_l t) \qquad (15.2)$$

Коэффициенты линейного расширения изотропных твердых тел в первом приближении зависят только от их материала и для большинства твердых тел имеют порядок $10^{-5} \div 10^{-6}$ $К^{-1}$. В действительности они несколько зависят от температуры.

В результате линейного расширения увеличивается объем тела. Оказывается, что в первом приближении объем V твердого тела возрастает пропорционально первой степени температуры:

$$V = V_0(1 + \alpha_v t), \qquad (15.3)$$

где V_0— объем тела при температуре 0° С, а α_v — **коэффициент объемного расширения**, характеризующий относительное увеличение объема, происходящее при нагревании тела на 1 К.

Легко показать, что между коэффициентами α_v и α_l изотропного тела существует следующая приближенная связь:

$$\alpha_v = 3\alpha_l. \qquad (15.4)$$

2. Тепловое расширение твердых тел связано с характером зависимости сил притяжения и отталкивания между двумя соседними частицами от расстояния r между ними (см. § 13.1). Пусть r_0— равновесное расстояние между соседними частицами. В произвольный момент времени действительное расстояние между ними

$$r = r_0 + x,$$

где x — взаимное смещение частиц из положения равновесия, обусловленное тепловыми колебаниями. Из рис. 13.2 видно, что в результате различной зависимости сил притяжения и отталкивания между частицами от расстояния r между ними кривая зависимости взаимной потенциальной энергии $W_п$ от r не является параболической вблизи точки $r = r_0$. Это значит, что силы, действующие в решетке, нельзя считать квазиупругими. Они зависят от смещения x частиц из положения равновесия не по закону $F_x = -\kappa x$ (где κ — коэффициент упругости), а содержат члены с x во второй и более высоких степенях. Чем больше амплитуда тепловых колебаний в кристаллической решетке, тем сильнее влияние этих нелинейных членов. Однако следует иметь в виду, что увеличение амплитуды колебаний при повышении температуры само по себе еще не означало бы расширения кристалла, если бы эти колебания были строго гармоническими. В самом деле, возрастание амплитуды гармонических колебаний двух соседних частиц твердого тела не привело бы к увеличению среднего расстояния между ними. Все дело в том, что колебания частиц твердого тела не являются гармоническими. В пер-

вом приближении можно считать, что на частицу действует возвращающая сила

$$F_x = -\kappa x + bx^2. \tag{15.5}$$

Первый член в формуле (15.5) представляет собой квазиупругую силу, которой соответствует потенциальная энергия $\frac{\kappa x^2}{2}$ гармонических колебаний. Отклонения от гармонического характера колебаний вызывает второй член (bx^2), за счет которого с повышением температуры происходит возрастание среднего расстояния между частицами твердого тела. Коэффициент b поэтому иногда называют **коэффициентом ангармоничности.** В случае равновесного состояния твердого тела все его частицы совершают колебания около узлов кристаллической решетки, положение которых с течением времени не изменяется. Поэтому для каждой частицы средняя величина действующей на нее силы равна нулю:

$$\langle F_x \rangle = 0.$$

Если бы колебания частиц были строго гармоническими ($F_x = -\kappa x$), то и среднее смещение частиц $\langle x \rangle = -\frac{1}{\kappa} \langle F_x \rangle$ также равнялось бы нулю, т. е. в среднем частицы находились бы на п о с т о я н н о м р а с с т о я н и и r_0 друг от друга: $\langle r \rangle = r_0$.

Иначе обстоит дело в случае негармонических колебаний. Согласно (15.5), условие $\langle F_x \rangle = 0$ может быть представлено в следующем виде:

$$-\kappa \langle x \rangle + b \langle x^2 \rangle = 0,$$

или

$$\langle x \rangle = \frac{b}{\kappa} \langle x^2 \rangle. \tag{15.6}$$

Строгое вычисление среднего значения квадрата смещения частиц при тепловых колебаниях $\langle x^2 \rangle$ затруднительно. Однако эта задача сильно упрощается, если ограничиться случаем тепловых колебаний с м а л ы м и амплитудами. В самом деле, потенциальная энергия частицы, совершающей колебания под действием силы F:

$$w_п = -\int_0^x F_x dx = \int_x^0 (-\kappa x + bx^2)\, dx = \frac{\kappa x^2}{2} - \frac{bx^3}{3}.$$

В случае м а л ы х колебаний первый член правой части равенства значительно больше второго, так что с достаточной степенью точности можно считать, что

$$w_п = \frac{\kappa x^2}{2},$$

т. е. в первом приближении потенциальная энергия частицы обусловлена лишь квазиупругой силой — κx. В соответствии с законом равномерного распределения энергии по степеням свободы (см. § 11.5), среднее значение потенциальной энергии частиц твердого тела, совершающих тепловые колебания с одной степенью свободы, равно

$$\langle w_{\text{п}} \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура тела.

Таким образом,

$$\frac{\kappa \langle x^2 \rangle}{2} = \frac{1}{2} kT$$

или

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k}{\kappa} T. \tag{15.7}$$

Подставив выражение (15.7) в (15.6), получим

$$\langle x \rangle = \frac{bk}{\kappa^2} T. \tag{15.8}$$

Формула (15.8) показывает, что вследствие негармоничности тепловых колебаний частиц твердого тела среднее расстояние между соседними частицами отличается от равновесного (r_0) на величину $\langle x \rangle$, пропорциональную абсолютной температуре тела. Это увеличение с р е д н е г о расстояния между частицами твердого тела при его нагревании и является причиной линейного и объемного расширения тела.

Коэффициент линейного расширения α_l равен относительному изменению среднего расстояния между двумя частицами твердого тела при его нагревании на один градус:

$$\alpha_l = \frac{1}{r_0} \frac{d\langle x \rangle}{dT} = \frac{bk}{r_0 \kappa^2}. \tag{15.9}$$

Формула (15.9) дает значения коэффициентов α_l, которые по порядку величины совпадают с их значениями, полученными опытным путем. У анизотропных твердых тел величина коэффициента линейного расширения зависит от направления. Это приводит к изменению формы таких тел при нагревании.

3. Коэффициенты линейного расширения твердых тел, как уже упоминалось, очень невелики по величине. Несмотря на это, тепловое расширение твердых тел может вызвать очень большие напряжения, так как даже незначительные деформации этих тел требуют больших усилий. Поэтому в технике приходится учитывать и предотвращать последствия теплового расширения твердых тел. Так, например, рельсы укладывают с небольшими зазорами; концы мостовых ферм

укладывают на специальные катки; металлы для впайки в стекло подбирают так, чтобы коэффициенты линейного расширения металла и стекла были одинаковыми, и т. д. С другой стороны, в технике используют те усилия, которые связаны с тепловым расширением или сжатием твердых тел. Приведем несколько примеров. При горячей клепке ножка заклепки, остывая, укорачивается, и заклепка сжимает шов. При устройстве термографов (приборов, записывающих температуру) пользуются биметаллическими пластинками, которые состоят из двух наложенных друг на друга и спаянных между собой пластинок, изготовленных из металлов с различными коэффициентами линейного расширения. При нагревании биметаллическая пластинка изгибается в сторону металла с меньшим коэффициентом линейного расширения.

§ 15.3. Теплопроводность твердых тел

1. Хорошая теплопроводность — один из отличительных признаков металлов. У других типов твердых тел (например, у кристаллических диэлектриков) коэффициенты теплопроводности значительно меньше, чем у металлов. Опыты показали, что теплопроводность металлов тем больше, чем больше их электропроводность, поэтому естественно сделать вывод о том, что процесс теплопроводности в металлах в основном осуществляется за счет переноса энергии свободными электронами. Это явление описывается тем же уравнением Фурье, которое было установлено для теплопроводности газов (см. табл. 8). Коэффициент теплопроводности металлов K можно подсчитывать по формуле:

$$K = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \lambda \rangle \langle u \rangle,$$

где $\langle \lambda \rangle$ — средняя длина свободного пробега электронов, а $\langle u \rangle$ — средняя скорость их теплового движения. Считая, что свободные электроны в металле ведут себя подобно одноатомному газу, получаем:

$$c_V \rho = \frac{3}{2} k n_0,$$

где k — постоянная Больцмана, а n_0 — число свободных электронов в единице объема металла.

Помимо электронной теплопроводности, в металлах имеется также теплопроводность, осуществляемая кристаллической решеткой (решеточная теплопроводность). Однако она не играет существенной роли в общей теплопроводности металлов.

Теплопроводность большинства чистых металлов медленно уменьшается с повышением их температуры. Для сплавов обычно имеет место обратное явление.

2. Механизм теплопроводности кристаллических решеток твердых тел, не содержащих свободных электронов, качественно отличен от механизма теплопроводности металлов. Теплопроводность таких твер-

дых тел тесно связана с характером теплового движения частиц, образующих их кристаллические решетки. Дело в том, что эти частицы связаны друг с другом силами взаимодействия, зависящими от расстояния между ними. Поэтому тепловые колебания одних частиц передаются другим. Например, упругие колебания частицы A в одномерной решетке, которую можно схематично представить в виде частиц, связанных между собой пружинами (рис. 15.4), будут передаваться соседним частицам B, C, D и т. д. Таким образом, в кристалле должны распространяться **упругие волны,** переносящие энергию тепловых колебаний от одних узлов к другим. Из курса физики средней школы известно, что таков же механизм распространения в твердом теле упорядоченных колебаний частиц, соответствующих звуко-

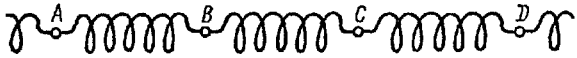

Рис. 15.4.

вым волнам. Скорость этих волн (скорость звука) в твердых телах имеет величину порядка нескольких километров в секунду. Казалось бы, с такой же скоростью должны распространяться в твердом теле и возмущения температуры, т. е. решеточная теплопроводность кристаллов должна быть очень большой. Между тем, как показывают опыты, коэффициенты теплопроводности кристаллических диэлектриков сравнительно малы и зависят от температуры, уменьшаясь при ее возрастании. Лишь при очень низких температурах коэффициент теплопроводности достигает значительной величины. Решеточная теплопроводность твердых тел невелика из-за того, что тепловые колебания частиц этих тел не являются строго гармоническими. Упругие волны, порождаемые высокочастотными тепловыми колебаниями частиц твердого тела, в отличие от значительно более низкочастотных акустических волн, встречая на своем пути ангармонически колеблющиеся частицы, рассеиваются и ослабляются ими.

Рассеяние упругих волн возрастает с ростом амплитуды негармонических колебаний частиц решетки, т. е. растет с повышением температуры. При этом теплопроводность тела уменьшается. Можно учесть рассеяние упругих волн, если ввести понятие о средней длине свободного пробега этих волн в кристалле. Тогда все происходит так, как будто волна обрывается после определенного пробега и вместо нее возникает новая, с другим направлением распространения. При этом перенос энергии от нагретой части кристалла к холодной сильно затрудняется. Похожее явление имеет место в случае теплопроводности газов. Пусть длина свободного пробега молекулы во много раз меньше линейных размеров сосуда, противоположные стенки которого поддерживают при различных температурах. Тогда молекулы, испытывая частые соударения друг с другом, медленно диффундируют от

нагретой стенки к холодной, двигаясь по сложному зигзагообразному пути.

Количественная теория теплопроводности кристаллических решеток выходит за рамки нашего курса. Заметим только, что согласно этой теории коэффициент теплопроводности кристаллического диэлектрика при не слишком низких температурах обратно пропорционален первой степени абсолютной температуры.

§ 15.4. Теплоемкость твердых тел

1. Различие между теплоемкостью при постоянном давлении и теплоемкостью при постоянном объеме сказывается для твердых тел только при достаточно высокой температуре. Поэтому можно говорить просто о теплоемкости твердого тела, связывая ее с изменением внутренней энергии единицы массы (или одного моля) твердого тела при нагревании на один градус. Для неметаллических решеток внутренняя энергия представляет собой суммарную энергию частиц, образующих решетку.

2. Тепловые колебания частиц (атомов, молекул или ионов) в узлах решетки можно считать гармоническими, если ограничиться колебаниями с небольшими амплитудами. При этом колеблющаяся частица обладает как кинетической, так и потенциальной энергиями, которые, в среднем, равны друг другу.

Рассмотрим теплоемкость твердых тел, имеющих атомную решетку. Каждый атом может колебаться в узле в трех взаимно перпендикулярных направлениях, т. е. имеет три колебательные степени свободы. Следовательно, используя закон равномерного распределения энергии по степеням свободы (§ 11.5), можно записать энергию моля твердого тела следующим образом:

$$U = 3N_A \langle w \rangle, \tag{15.10}$$

где $\langle w \rangle$ — средняя энергия, приходящаяся на одну колебательную степень свободы атома, N_A — число атомов в моле (число Авогадро).

На каждую колебательную степень свободы приходится в среднем кинетическая энергия $kT/2$ и, кроме того, равная ей средняя потенциальная энергия $kT/2$. Таким образом, средняя энергия

$$\langle w \rangle = kT. \tag{15.11}$$

Поэтому внутренняя энергия моля твердого тела

$$U = 3N_A\, kT = 3RT. \tag{15.12}$$

Дифференцируя энергию U по абсолютной температуре, получаем

следующее выражение для молярной теплоемкости твердого тела с атомной решеткой:

$$C_a = \frac{dU}{dT} = 3R = 25 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} = \\ = 5{,}97 \text{ кал/(моль} \cdot \text{К)}. \qquad (15.13)$$

Этот результат находится в согласии с экспериментально установленным в 1819 г. законом (правилом) П. Дюлонга и А. Пти: *молярная теплоемкость всех химически простых кристаллических твердых тел приблизительно равна* 6 кал/(моль·К).

Закон Дюлонга и Пти сравнительно хорошо подтверждается на опыте при не слишком низких температурах. Из таблицы 15 видно, что для многих веществ это правило соблюдается уже при температуре 0° С (о металлах см. п. 6).

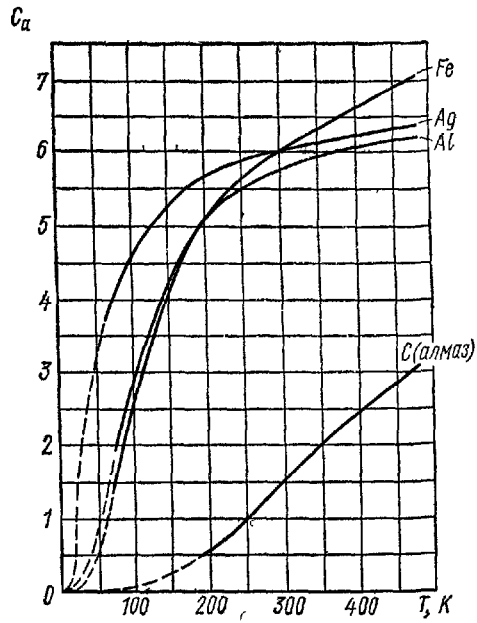

Рис. 15.5.

3. Многочисленные опыты по определению теплоемкостей большого числа кристаллических твердых тел в широком диапазоне температур показали, что результаты, выражаемые формулами (15.12) и (15.13), являются весьма приближенными, а в некоторых случаях просто неверными. Из формул (15.12) и (15.13) следует, что молярная теплоемкость не зависит ни от температуры, ни от конкретных свойств кристаллов. Опыты же показали, что в действительности такая зависимость существует, причем особенно резко она проявляется при низких температурах (рис. 15.5, где C_a дано в кал/(моль·К)). При достаточно низких температурах теплоемкость всех твердых тел быстро уменьшается с понижением температуры, следуя закону Дебая:

$$C_a = \text{const} \cdot T^3. \qquad (15.14)$$

Таким образом, при абсолютной температуре, стремящейся к нулю, теплоемкость твердых тел также стремится к нулю. Теплоемкость некоторых тел, например алмаза и бора, весьма заметно зависит от температуры даже при сравнительно высоких температурах.

4. Причина расхождения классической теории теплоемкостей твердых тел с опытами состоит в ограниченной применимости закона рав-

номерного распределения энергии по степеням свободы (см. § 11.5). Ведь именно этот закон приводит к формулам (15.12) и (15.11) и, следовательно, к независимости теплоемкости от температуры. Трудности классической теории теплоемкости твердых тел были преодолены в современной квантовой теории.

Таблица 15

Вещество	Температура, °С	C_a, кал/(моль К)
Алюминий	0	5,66
Ванадий	0	5,86
Вольфрам	0	5,89
Бор	0	2,49
	500	5,07
Железо	0	5,85
Золото	0	6,05
Калий	0	6,83
Кобальт	0	5,37
	100	5,95
Кремний	0	4,53
	100	5,30
Литий	0	5,48
	100	6,24
Магний	0	5,82
Медь	0	5,76
	100	6,02
Молибден	0	5,67
	100	5,95
Мышьяк кристаллический	0	5,82
Натрий	0	6,52
Никель	0	6,21
Олово	0	6,37
Платина	0	6,19
Свинец	0	6,33
Селен кристаллический	0	6,63
Сера ромбическая	0	5,35
Серебро	0	5,99
Сурьма	0	5,99
Теллур кристаллический	0	6,12
Алмаз	0	1,25
	1000	5,05
Фосфор желтый	0	5,89
Цинк	0	6,95

Первоначальная квантовая теория теплоемкости твердых тел была развита А. Эйнштейном в 1905 г. В основе ее лежало предположение о том, что каждый атом, колеблющийся в узле кристаллической решетки, имеет три степени свободы, причем в кристалле, построенном из частиц одного сорта, все атомы колеблются независимо друг от друга с одинаковой частотой. Кроме того, А. Эйнштейн предположил, что энергия атома, гармонически колеблющегося в узле решетки с частотой ν, может принимать не любые, а только вполне определенные значения, кратные величине **кванта энергии** $h\nu$, где

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка (см. § 11.6). Энергия w, приходящаяся на одну степень свободы атома, принимает значения:

$$w = nh\nu \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{15.15}$$

Впоследствии выяснилось, что необходимо принимать во внимание так называемую нулевую энергию $h\nu/2$, которая сохраняется даже при абсолютном нуле температуры. Эта энергия не связана с тепловым движением атомов и не влияет на теплоемкость кристаллов.

Частота атомных колебаний в твердых телах имеет величины порядка 10^{13} $с^{-1}$. Это соответствует кванту энергии $h\nu$ порядка 10^{-20} Дж, величина которого близка к средней энергии на одну колебательную степень свободы частицы, вычисленной по классической теории ($\langle w \rangle = kT$) при температуре T порядка 300 К.

Внутренняя энергия моля твердого тела, состоящего из атомов, независимо колеблющихся с частотой ν, может быть вычислена по формуле (15.10). В этой формуле под $\langle w \rangle$ следует понимать с р е д н ю ю энергию, приходящуюся на одну колебательную степень свободы атомов, имеющих одно из указанных в формуле (15.15) значений энергии.

Задача определения среднего значения энергии частицы, гармонически колеблющейся около некоторого центра, была решена в 1900 г. М. Планком была получена следующая формула для $\langle w \rangle$:

$$\langle w \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{15.16}$$

На рис. 15.6 представлен график зависимости $\langle w \rangle$ от ν, из которого видно, что с ростом частоты ν средняя энергия $\langle w \rangle$ достаточно быстро убывает. При высокой температуре, когда $kT \gg h\nu$, показательная функция $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ близка к единице, и можно воспользоваться следующей приближенной формулой, справедливой при $x \ll 1$:

$$e^x = 1 + x.$$

Тогда формула (15.16) приводит к классическому результату (15.11)

$$\langle w \rangle = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = kT.$$

Таким образом, при высоких температурах средняя энергия, приходящаяся на одну колебательную степень свободы атома, не зависит от частоты ν его колебаний. В этих условиях для теплоемкости твердого тела справедлив закон Дюлонга и Пти (15.13).

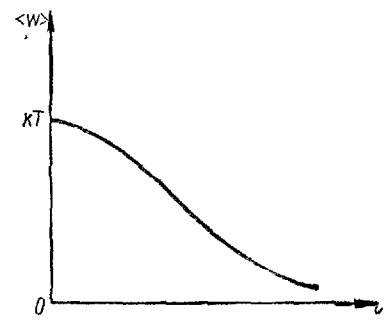

Рис. 15.6.

При низких температурах положение существенным образом изменяется. Если $kT \ll h\nu$ или $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$, то и $e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$. Поэтому в знаменателе формулы (15.16) можно пренебречь единицей. Тогда средняя энергия $\langle w \rangle$ оказывается равной

$$\langle w \rangle = h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \qquad (15.16')$$

т. е. очень быстро убывает с уменьшением температуры.

Когда kT значительно меньше, чем высота $h\nu$ одной «ступеньки» энергетической лестницы (15.15), почти все частицы твердого тела находятся на самой низкой «ступеньке» с нулевой энергией[1]; и только очень незначительное число атомов имеет энергию в один квант $h\nu$. Число же атомов, находящихся на более высоких энергетических уровнях («ступеньках») пренебрежимо мало. Быстрое спадание к нулю средней энергии и теплоемкости с понижением температуры до абсолютного нуля объясняется тем, что при очень низких температурах высота энергетических «ступенек» слишком велика и нагревание твердого тела на один градус не может перевести атомы с самого низкого энергетического уровня на следующий уровень. Таким образом, квантовые представления позволяют объяснить, почему теплоемкость конденсированных систем стремится к нулю при $T \to 0$. В термодинамике этот результат является следствием **третьего закона термодинамики** (или **тепловой теоремы Нернста**), согласно которому *энтропия термодинамически равновесной системы стремится к нулю при* $T \to 0$.

Температуру T_C, при которой теплоемкость твердого тела начинает быстро уменьшаться, определяют из условия

$$kT_C = h\nu_{\text{макс}}, \qquad (15.17)$$

где $\nu_{\text{макс}}$ — наибольшая частота колебаний атомов в решетке твердого тела. Температуру T_C называют **характеристической температурой** Дебая. При $T \gg T_C$ справедлив закон Дюлонга и Пти. При $T \ll T_C$ наблюдаются отклонения от этого правила. С уменьшением наибольшей частоты $\nu_{\text{макс}}$ колебаний атомов в решетке понижается характеристическая температура. Например, при переходе от легких металлов к тяжелым наблюдается снижение температуры T_C В табл. 16 приведены характеристические температуры некоторых металлов.

Таблица 16

Вещество	T_C, К
Алюминий . . .	398
Медь	315
Серебро	215
Свинец	88

Рассмотрим несколько подробнее зависимость от температуры теплоемкости твердых тел, состоящих из одинаковых атомов. Воспользовавшись предположениями А. Эйнштейна о характере колебаний атомов в таком твердом теле, запишем внутреннюю энергию моля твердого тела

[1] При условии, что частицы не подчиняются принципу Паули (см. § 11.5).

по формулам (15.10) и (15.16)

$$U = 3N_A \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = 3\frac{R}{k}\frac{h\nu}{(e^{h\nu/kT} - 1)}. \qquad (15\ 18)$$

При этом была использована формула (9.11), выражающая связь числа Авогадро N_A с постоянной Больцмана k и универсальной газовой постоянной R. Введем новую переменную $\Theta = h\nu/k$. Тогда соотношение (15.18) принимает вид

$$U = 3R\frac{\Theta}{e^{\Theta/T} - 1}, \qquad (15.18')$$

а молярная теплоемкость твердого тела

$$C_a = \frac{dU}{dT} = 3R\,\Theta\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{e^{\Theta/T} - 1}\right) = 3R\varphi\left(\frac{\Theta}{T}\right), \qquad (15.19)$$

где

$$\varphi\left(\frac{\Theta}{T}\right) = \frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T} - 1)^2}\cdot\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2. \qquad (15.19')$$

Поведение функции $\varphi\left(\frac{\Theta}{T}\right)$ различно в областях $T \gg \Theta$ и $T \ll \Theta$. При $T \gg \Theta$ функция $\varphi\left(\frac{\Theta}{T}\right)$ стремится к 1, и теплоемкость C_a стремится к значению $3R$, что соответствует закону Дюлонга и Пти.

При температурах $T \ll \Theta$ теплоемкость стремится к нулю.

5. Квантовая теория теплоемкостей твердых тел, основанная на предположении о независимых колебаниях всех атомов с одинаковой частотой, правильно объяснила факт убывания теплоемкости с понижением температуры. Однако она не позволила получить степенной закон изменения теплоемкости при очень низких температурах. Усовершенствование теории Эйнштейна было сделано Дебаем и состояло в учете того, что фактически атомы твердого тела очень сильно связаны между собой. Поэтому нельзя считать, что N_A атомов кристалла колеблются с одинаковой частотой. Нужно рассматривать систему $3N_A$ связанных колебаний, соответствующих $3N_A$ степеням свободы, причем частоты всех колебаний, вообще говоря, различны. Тогда внутренняя энергия моля твердого тела выразится следующим образом:

$$U = \sum_{i=1}^{3N_A} \frac{h\nu_i}{e^{h\nu_i/kT} - 1}, \qquad (15.20)$$

где ν_i — частоты, соответствующие отдельным колебаниям. При вычислении этой суммы было принято во внимание, что наибольший вклад в энергию должны давать малые частоты, т. е. колебания, со-

ответствующие распространению в кристалле длинных звуковых волн. Это видно и из рис. 15.6, на котором показана зависимость средней энергии $\langle \omega \rangle$, приходящейся на одну степень свободы атома, от частоты его колебаний. Длинные звуковые волны малочувствительны к деталям структуры решетки кристалла. Развитие этой идеи позволило Дебаю заменить колебания отдельных атомов решетки упругими колебаниями всего кристалла и вычислить сумму, входящую в выражение (15.20). Энергия твердого тела при низких температурах оказалась пропорциональной четвертой степени абсолютной температуры ($U \sim T^4$), а теплоемкость, в соответствии с опытными данными, — пропорциональной T^3. При высоких температурах теория Дебая привела к результатам, совпадающим с классическими (закон Дюлонга и Пти).

6. В заключение этого параграфа отметим одну принципиальную трудность, возникшую в теории теплоемкостей металлов и связанную с применением к свободным электронам классического закона о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Применяя этот закон к электронному газу в металле, мы придем к выводу, что по формуле (11.28) на долю электронов должна приходиться молярная теплоемкость, равная 3 кал/(моль·К). Таким образом, общая теплоемкость металла, включающая теплоемкость кристаллической решетки и электронов, должна при обычных температурах равняться 9 кал/(моль·К). Опыты опровергают это: теплоемкость металлов близка к 6 кал/(моль·К) (табл. 15). Следовательно, электроны практически не изменяют своей энергии при нагревании металла.

Эта трудность была разрешена только после создания квантовой статистики Ферми—Дирака. Было показано, что при обычных и низких температурах электронный газ находится в особом «вырожденном» состоянии, из которого нагревание на один градус вывести его не может. Электроны металла, подобно атомам в кристаллической решетке, могут находиться в определенных энергетических состояниях (на определенных «ступеньках» энергетической лестницы). Однако в соответствии с принципом Паули распределение электронов металла по состояниям таково, что они **равномерно** заполняют все энергетические «ступеньки», начиная от самых низких. Поэтому при нагревании металла на один градус только ничтожная часть электронов, находящихся на верхних занятых «ступеньках», может быть подвергнута тепловому возбуждению, т. е. переведена на соседние с в о б о д н ы е уровни с более высокой энергией. Эти электроны вносят незначительный вклад в общую теплоемкость металла.

§ 15.5. Фазовые превращения твердых тел

1. В главах XIII и XIV было показано, что между жидким и газообразным состояниями вещества возможны взаимные переходы, представляющие собой фазовые переходы I рода. Подобно этому твердое тело также может переходить в жидкую или паровую фазу. Если нагревать твердое тело, то, по первому закону термодинамики, подводимая к телу теплота будет расходоваться на изменение внутрен-

ней энергии тела и на совершение работы против внешних сил. Обычно объем твердого тела изменяется незначительно и основная часть теплоты идет на увеличение запаса его внутренней энергии. Внутренняя энергия твердого тела складывается из кинетической энергии хаотических тепловых колебаний частиц, образующих кристаллическую решетку, и потенциальной энергии взаимодействия этих частиц. Нагревание тела приводит к возрастанию средних междуузельных расстояний в решетке (линейное и объемное расширение) и увеличению энергии кристалла. При этом возрастает амплитуда ангармонических тепловых колебаний частиц в кристаллической решетке и ослабевают связи между ними. Сильное нагревание твердого тела может привести к разрушению его кристаллической решетки и к переходу вещества из твердой фазы в жидкую или паровую.

Если при разрушении кристаллической решетки нарушается дальний порядок, но сохраняются связи, обеспечивающие ближний порядок (см. § 14.1), то происходит переход из твердой фазы в жидкую. Если при нагревании кристалла полностью нарушаются связи между частицами в кристаллической решетке, т. е. ликвидируется и ближний порядок, то происходит непосредственный переход вещества из твердой фазы в паровую.

2. Переход вещества из твердого состояния в газообразное называют **возгонкой** (сублимацией). Переход вещества из твердого состояния в жидкое называют **плавлением**. Этот процесс осуществляют путем предварительного нагревания твердого тела до определенной температуры, называемой **температурой плавления**. Если по оси абсцисс отложить количество теплоты Q, сообщенное при определенном давлении нагреваемому твердому телу, а по оси ординат — температуру тела, то зависимость $T(Q)$ имеет вид, изображенный на рис. 15.7. В том случае, если нагревание происходит равномерно (за одинаковые промежутки времени к телу подводят равные количества теплоты), такой же вид имеет зависимость температуры тела от времени. Участок AB представляет собой нагревание твердого тела до температуры плавления $T_{\text{п}}$. Для кристаллических тел в точке B при достижении температуры плавления прекращается дальнейшее повышение температуры[1].

Изотермический участок BC на рис. 15.7 характеризует переход тела из твердого состояния в жидкое и соответствует одновременному сосуществованию двух фаз: твердой и жидкой. Пример такой двухфазной системы мы рассматривали раньше при изучении равновесия жидкости и насыщенного пара (см. § 13.3 и 14.8).

Участку BC соответствует некоторое количество теплоты, которое необходимо подвести к твердому телу при постоянной температуре $T_{\text{п}}$ для осуществления плавления. Это количество теплоты, рассчитанное

---

[1] Для аморфных тел (§ 15.1) характерно отсутствие определенной температуры плавления (при данном давлении). У таких тел существует определенный температурный интервал размягчения.

на единицу массы тела, называют **удельной теплотой плавления** $r_п$. Обозначим через $u_ж$ и $u_{тв}$ внутренние энергии единицы массы вещества в точках C и B (рис. 15.7), соответствующих жидкой и твердой фазам, и через $v_ж$ и $v_{тв}$ — удельные объемы жидкости и твердого тела. Тогда по первому закону термодинамики удельная теплота плавления может быть выражена следующим образом:

$$r_п = u_ж - u_{тв} + p(v_ж - v_{тв}), \qquad (15.21)$$

где p — постоянное давление, при котором совершается фазовый переход твердого тела в жидкость.

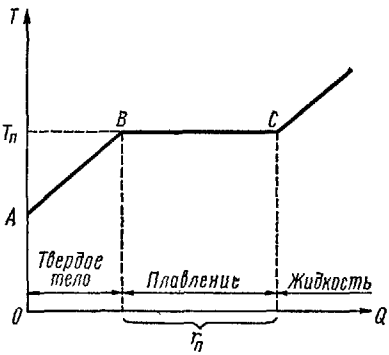

Рис. 15.7.

3. Температура плавления $T_п$ зависит от давления, при котором происходит превращение твердого тела в жидкость. Изменение давления на dp сопровождается изменением температуры превращения на $dT_п$. Зависимость температуры плавления от давления описывается уравнением Клапейрона—Клаузиуса (14.29), которое справедливо для любого фазового перехода I рода:

$$\frac{dT_п}{dp} = \frac{T_п(v_ж - v_{тв})}{r_п}. \qquad (15.22)$$

Плавление вещества, как правило, приводит к уменьшению его плотности и увеличению удельного объема. Поэтому обычно $(v_ж - v_{тв}) > 0$, и поскольку $r_п > 0$, то $\frac{dT_п}{dp} > 0$, т. е. при увеличении давления температура плавления повышается. Повышение давления затрудняет процесс перехода твердого тела в жидкость. Такие вещества при высоких давлениях могут находиться в твердой фазе и при температурах, бóльших критической ($T > T_{кр}$). Для некоторых веществ (вода, галлий, висмут) плотность жидкой фазы больше, чем твердой. Лед, например, при температуре 0° С менее плотен, чем вода. Для этих веществ $(v_ж - v_{тв}) < 0$ и, соответственно, $\frac{dT_п}{dp} < 0$, т. е. при увеличении давления температура плавления понижается.

4. При графическом изображении состояний в диаграмме $T - p$ зависимость между температурой фазового перехода I рода и давлением выражается определенной кривой $p = f(T)$. Каждая точка этой кривой изображает состояние равновесия двух сосуществующих фаз. Например, можно говорить о кривых парообразования, плавления и сублимации. Что касается кривой парообразования, то следует иметь в виду, что температура кипения всегда повышается при увеличении давления. В самом деле, из уравнения (14.29), в котором $v_п - v_ж$

всегда больше нуля, следует, что производная $\frac{dp}{dT}$ всегда положительна. Поэтому касательные к кривой зависимости давления насыщенного пара от температуры образуют острые углы с осью T. На рис. 15.8 изображена кривая равновесия двухфазной системы жидкость — пар, «разделяющая» области жидкого и газообразного состояний вещества. Она заканчивается в критической точке K.

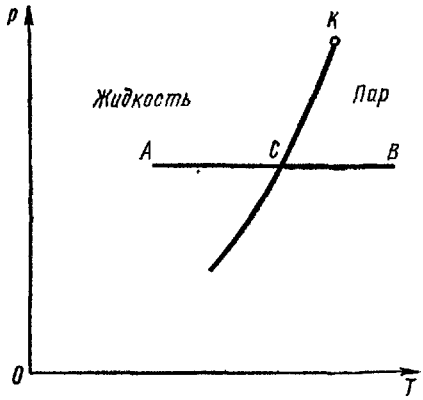

Рис. 15.8.

Аналогично можно построить кривую плавления, т. е. кривую равновесия двухфазной системы твердое тело — жидкость, разделяющую друг от друга области существования твердой и жидкой фаз. Однако касательные к кривой плавления могут составлять с положительным направлением оси T острые и тупые углы, в зависимости от знака производной $\frac{dp}{dT}$ (рис. 15.9).

Для определения состояний вещества по обе стороны от кривых фазовых переходов I рода можно пользоваться следующими соображениями. Назовем высшей фазой ту фазу, переход в которую требует

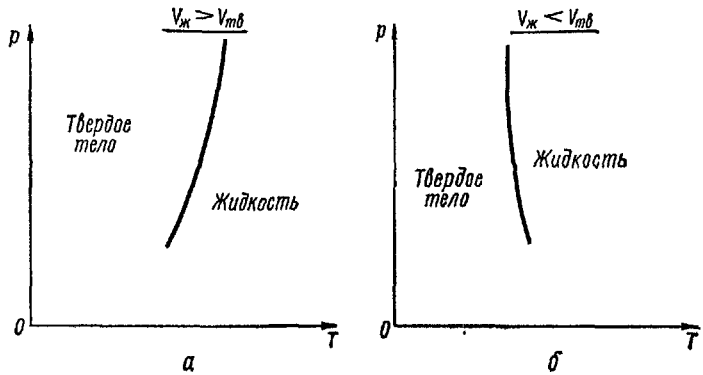

Рис. 15.9.

поглощения теплоты. Тогда газообразное агрегатное состояние является высшим по отношению к жидкому, а жидкое высшим по отношению к твердому. При определенном давлении более высокая фаза должна соответствовать более высокой температуре. Поэтому прямая AB (см. рис. 15.8), параллельная оси T и имеющая такое же положи-

тельное направление, как эта ось, при пересечении с кривой фазового перехода должна переходить из области более низкой фазы в область более высокой фазы. Отсюда следует, что в состоянии насыщения C (см. рис. 15.8), температура газообразной фазы будет самой низкой из всех возможных ее значений при данном давлении, а давление насыщенного пара всегда является максимальным давлением газообразной фазы при данной температуре.

5. Процесс плавления представляет собой переход вещества из более упорядоченного (кристаллического) состояния в менее упорядоченное — жидкое. С точки зрения второго закона термодинамики, этот процесс должен быть связан с возрастанием энтропии системы.

6. Опыты показывают, что при охлаждении большинства жидкостей до некоторой температуры, зависящей от состава жидкости и от давления, начинается процесс перехода вещества из жидкого в твердое кристаллическое состояние. Этот процесс называют **кристаллизацией.** Он связан с выделением теплоты, равной теплоте плавления, и для химически чистых жидкостей протекает при постоянной температуре. Качественно процесс кристаллизации состоит в том, что при охлаждении жидкости изменяется характер теплового движения ее частиц. Возрастает время их «оседлого» существования (время релаксации). Под влиянием сил взаимного притяжения между частицами их движение в конце концов превращается в хаотические тепловые колебания около некоторых неизменных средних положений — узлов кристаллической решетки. Для начала процесса кристаллизации необходимо, чтобы в жидкости имелись центры кристаллизации. Такими центрами могут служить различные посторонние примеси, пылинки, пузырьки газа, а также местные сгущения жидкости. В этих местах в первую очередь возникает правильное взаимное расположение частиц и начинается образование твердой фазы.

Если жидкость тщательно очищена от примесей твердых частиц и газов, то при достаточно медленном и равномерном отводе от нее теплоты ее можно охлаждать до более низкой температуры, чем температура кристаллизации. Такую жидкость называют **переохлажденной.** Состояние переохлажденной жидкости неустойчиво, как и состояние пересыщенного пара. Требуются особые условия, чтобы переохлажденная жидкость не переходила в твердое кристаллическое состояние. Обычно бывает достаточно незначительных причин, например, встряхивания переохлажденной жидкости, чтобы началась ее кристаллизация. Образование кристаллической твердой фазы из жидкости зависит не только от наличия центров кристаллизации и интенсивности отвода теплоты кристаллизации, но и от скорости, с которой частицы жидкости поступают к поверхности образующегося кристалла. Поэтому повышение вязкости жидкости способствует переводу ее в переохлажденное состояние и уменьшает скорость кристаллизации.

7. Температура кристаллизации жидкой фазы вещества так же, как и равная ей температура плавления твердой фазы, зависит от наличия примесей. Примеси понижают температуру кристаллизации вещества, если только они не образуют с ним «смешанных» кристал-

лов, называемых **твердыми растворами.** Так, например, морская вода, содержащая в себе растворенные соли, кристаллизуется при более низкой температуре, чем дистиллированная вода. На этом свойстве основано приготовление различных растворов (водоспиртовых и др.), замерзающих при низких температурах, а также различных охлаждающих смесей (льда с поваренной солью, хлористым кальцием и др.), плавящихся при температурах, намного меньших 0° С.

На рис. 15.10 показан характер зависимости температуры кристаллизации раствора, образованного двумя различными веществами *A* и *B*, от концентрации в нем вещества *B*. Вещества *A* и *B* химически не взаимодействуют друг с другом и кристаллизуются из раствора порознь, т. е. не образуют твердых растворов. Точки *A* и *B* определяют температуры кристаллизации (плавления) чистых веществ *A* и *B*. Из рисунка видно, что добавление примеси одного из веществ к другому вызывает понижение температуры кристаллизации раствора (или температуры плавления образующегося при этом сплава). При некоторой концентрации $C_{эв}$ вещества *B* в сплаве, соответствующей точке *Э*, достигается минимальное значение температуры плавления (кристаллизации). Сплав такого состава называют **эвтектикой**, а температуру $T_{эв}$ плавления эвтектики называют **эвтектической точкой.** Например, для сплава свинца (вещество *A*) и сурьмы (вещество *B*) эвтектика содержит 87% свинца и 13% сурьмы ($C_{эв} = 13\%$). Температуры плавления свинца и сурьмы соответственно равны 600 К и 903 К, а эвтектическая точка равна 519 К.

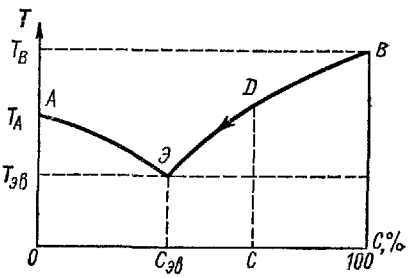

Рис. 15.10.

Плавление и кристаллизация эвтектики протекают при постоянной температуре $T_{эв}$. Иначе протекают эти процессы у сплавов другого состава. В качестве примера рассмотрим процесс кристаллизации раствора, концентрация которого $C > C_{эв}$ (см. рис. 15.10).

При достижении температуры, определяемой точкой *D*, начинается кристаллизация. Однако из раствора выделяются не оба вещества *A* и *B*, а лишь то, избыток которого в растворе определяет отличие *C* от $C_{эв}$. Таким образом, в рассматриваемом примере из раствора выкристаллизовывается вещество *B*. Поэтому концентрация *B* в растворе уменьшается и соответственно понижается температура кристаллизации (вдоль кривой *DЭ*). Этот процесс продолжается до тех пор, пока концентрация раствора не становится равной $C_{эв}$ и не начинается изотермическая кристаллизация эвтектики. Характер уменьшения температуры при равномерном охлаждении рассматриваемого сплава представлен на рис. 15.11, где по оси абсцисс отложено время τ, а по оси ординат — температура системы. Участок *1—2* соответствует охлаждению раствора до температуры начала кристалли-

зации T_D, участок *2—3* — выделению из раствора кристаллов вещества *B*, участок *3—4* — кристаллизации эвтектики и *4—5* — охлаждению твердого сплава. При плавлении сплава процесс идет в обратном направлении.

Эвтектика представляет собой с м е с ь мелких кристалликов обоих веществ *A* и *B*, одновременно образующихся из раствора. В сплаве с $C > C_{эв}$ эвтектика заполняет промежутки между кристаллами вещества *B*.

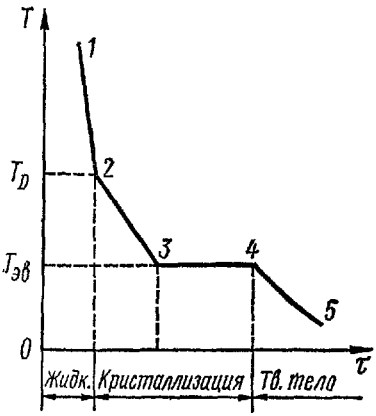

Рис. 15.11.

8. Испарение твердых тел, происходящее при любой температуре, сопровождается поглощением теплоты испарения. Т е п л о т а и с п а р е н и я затрачивается на непосредственный «отрыв» частиц с поверхности кристалла. Существует ряд твердых веществ, которые достаточно легко испаряются при обычных условиях (например, нафталин, камфора, лед). Сушка белья на морозе возможна благодаря быстрому испарению льда. К трудно испаряющимся твердым веществам относятся металлы.

Теплота испарения твердых тел зависит от температуры. Она возрастает при понижении температуры твердого тела и уменьшается при его нагревании. На основании закона сохранения энергии легко установить связь между теплотами испарения твердых тел и жидкостей при температуре плавления: разность этих теплот равна теплоте плавления. Так, например, при нормальных условиях ($T = 273$ К, $p = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па), удельная теплота плавления льда равна $3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг (80 ккал/кг), удельная теплота парообразования воды — $24{,}9 \cdot 10^5$ Дж/кг (596 ккал/кг), а удельная теплота испарения льда — около $28{,}1 \cdot 10^5$ Дж/кг (670 ккал/кг).

9. До сих пор мы рассматривали равновесие твердого тела с жидкостью и жидкости с паром. Очевидно, что для процесса сублимации тоже можно построить кривую равновесия твердого тела и пара. Эту кривую можно назвать кривой сублимации. Если для одного и того же вещества построить в диаграмме T — p кривые равновесия жидкость — пар и твердое тело — жидкость, то они пересекутся в некоторой точке *M*, характеризуемой вполне определенными значениями температуры и давления.

На рис. 15.12 видно, что в точке *M* вещество одновременно находится в твердой, жидкой и паровой фазах, которые равновесно сосуществуют друг с другом. Поэтому ясно, что через точку *M* должна проходить также и третья кривая фазового равновесия — кривая сублимация *AM*. Эту точку называют **тройной точкой.** Состояние, соответствующее тройной точке, — единственное, в котором вещество находится в трех равновесно сосуществующих фазах — твердой, жид-

кой и газообразной. При давлениях, меньших чем давление тройной точки, вещество не может существовать в жидкой фазе ни при каких температурах.

Таблица 17

Вещество	t_M, °C	p_M, Па
Вода	0,01	632
Углекислота	—56,7	$5{,}17 \cdot 10^5$
Тяжелая вода	3,82	697

В таблице 17 приведены параметры состояния некоторых веществ в тройной точке. Из таблицы видно, что при давлениях, близких к атмосферному, углекислота может существовать только в твердом («сухой лед») и газообразном состояниях. У большинства твердых тел давление насыщенных паров так мало, что испарение не играет существенной роли.

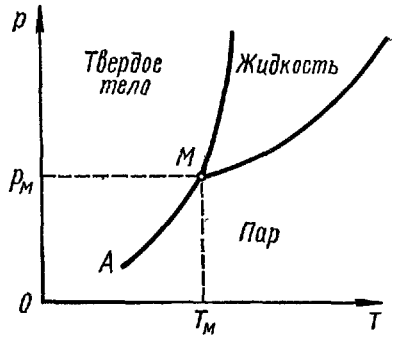

Рис. 15.12.

10. Наряду с фазовыми превращениями I рода, рассмотренными выше, существуют **фазовые превращения II рода**. Эти фазовые превращения не связаны с поглощением или выделением теплоты фазового перехода. При этих превращениях скачкообразно изменяются теплоемкости, сжимаемость, коэффициенты теплового расширения и некоторые другие характеристики вещества. Примером такого фазового перехода служит превращение железа в точке Кюри ($T = 1043$ К), где оно теряет свои особые ферромагнитные свойства. Примерами фазовых переходов II рода являются также превращение гелия I в гелий II и переход некоторых металлов и сплавов при очень низких температурах в сверхпроводящее состояние.

Вопросы для повторения

1. Каковы особенности структуры твердых тел?
2. Чем объяснить тепловое расширение твердых тел?
3. В чем различие механизмов процесса теплопроводности у металлов и других твердых тел?
4. Сформулируйте закон Дюлонга и Пти. Как получить этот закон на основе классической теории теплоемкости? Какие трудности возникают в этой теории при ее применении к металлам?
5. В чем состоит основная идея квантовой теории теплоемкости твердых тел?
6. Расскажите о фазовых превращениях вещества и начертите соответствующие кривые фазовых равновесий в диаграмме $T - p$.

Глава XVI
МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

§ 16.1. Течение жидкостей и газов

1. Раздел физики, в котором рассматривают законы равновесия и движения жидких и газообразных тел, а также их взаимодействия с твердыми телами, называют **гидроаэромеханикой.**

Характерное свойство жидких и газообразных тел — их **текучесть,** т. е. малая сопротивляемость деформации сдвига: если скорость сдвига стремится к нулю, то силы сопротивления жидкости или газа этой деформации также стремятся к нулю. Иными словами, жидкие и газообразные тела не обладают упругостью формы — они легко принимают форму того сосуда, в котором находятся. Вследствие этого *внешнее давление, производимое на жидкость или газ, передается ими во все стороны равномерно* **(закон Паскаля).**

2. Движение жидкостей или газов называют **течением,** а совокупность частиц движущейся жидкости или газа называют **потоком.** В гидроаэромеханике отвлекаются от молекулярного строения жидкостей и газов, рассматривая их как **сплошную среду,** непрерывно распределенную в занятой ею части пространства. При этом различие между жидкостью и газом состоит лишь в том, что плотность ρ первой можно считать не зависящей от давления, в то время как зависимостью плотности газа от давления, т. е. сжимаемостью газа, при больших скоростях течения пренебрегать нельзя. В дальнейшем, ради краткости, мы будем называть газ и жидкость единым термином — жидкость, которую в зависимости от условий задачи будем считать несжимаемой ($\rho = \text{const}$) или сжимаемой ($\rho \neq \text{const}$). Как показывают расчеты, пренебрежение сжимаемостью газов при скоростях течения до 100 м/с приводит к ошибке, не превышающей 5%.

3. Основной метод описания движения жидкости в гидроаэродинамике — **метод Эйлера,** состоящий в задании зависимости значений вектора $\mathbf{v}$ скорости течения жидкости в различных точках пространства от координат этих точек (x, y, z) и времени t:

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{r}, t)$$

или

$$\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t), \\ v_y &= f_2(x, y, z, t), \\ v_z &= f_3(x, y, z, t), \end{aligned}$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат в рассматриваемую точку, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы — орты осей координат, а v_x, v_y и v_z — проекции вектора $\mathbf{v}$ на оси координат.

4. Течение жидкости называют **установившимся,** или **стационарным,** если скорость жидкости в каждой точке пространства, занятого жидкостью, не изменяется с течением времени, т. е. $\mathbf{v}$ не за-

висит от t: $\mathbf{v} = f(\mathbf{r})$. В случае **неустановившегося** течения $\mathbf{v}$ зависит также и от времени t.

Течение называют **ламинарным**, или **слоистым**, в том случае, если поток представляет собой совокупность слоев, перемещающихся друг относительно друга б е з п е р е м е ш и в а н и я. Течение называют **турбулентным**, если имеет место перемешивание различных слоев жидкости или газа вследствие образующихся завихрений.

5. В целях наглядности движение жидкости можно изображать с помощью **линий тока**, которые проводят так, что касательные к ним совпадают по направлению с векторами скоростей жидкости в соответствующих точках пространства. В случае стационарного течения линии тока не изменяются с течением времени и совпадают с траекториями отдельных частиц жидкости. Наглядную картину линий тока можно получить на опыте при помощи алюминиевого порошка, добавляемого к текущей жидкости. На фотопленке при фотографировании с небольшой выдержкой каждая крупинка порошка дает черточку, длина которой пропорциональна величине скорости. Примерная картина изображена на рис. 16.1. Она показывает, что наибольшая скорость наблюдается в местах наименьших поперечных сечений потока. Густота линий тока в этих местах наибольшая. Следовательно, линии тока указывают не только направления скоростей, но и позволяют судить о величине скорости частиц в данном месте. Изображая поток, условились проводить линии тока так, чтобы их густота (число линий, пронизывающих единицу площади поверхности, проведенной в потоке перпендикулярно к линиям тока) была бы численно равна скорости частиц потока в данном сечении.

Рис. 16.1.

6. Поверхность, которая образована линиями тока, проведенными через все точки малого замкнутого контура, называют **трубкой тока.** Часть жидкости, ограниченную трубкой тока, называют **струей.** В случае у с т а н о в и в ш е г о с я движения жидкости трубки тока не изменяются с течением времени и представляют для частиц жидкости как бы непроницаемую стенку, так как скорости частиц около этой поверхности направлены по касательной к ней. Поэтому при установившемся течении жидкости частицы движутся так, что каждая из них все время остается в пределах определенной струи.

7. В реальных жидкостях течение усложняется тем, что между отдельными слоями потока происходит внутреннее трение. Однако в ряде случаев влияние внутреннего трения невелико и им можно пренебречь. Жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение, называют **идеальной жидкостью.** Опыт показывает, что при течении жидкостей в коротких и достаточно широких трубах и каналах, а также при обтекании жидкостями твердых тел, имеющих удобообтекаемую форму (например, крыла самолета), влияние внутреннего трения проявляется лишь в сравнительно тонком **пограничном слое** жид-

кости, который непосредственно прилегает к поверхности труб, каналов и обтекаемых тел. Вне пограничного слоя течение реальной жидкости ничем не отличается от течения идеальной жидкости. Поэтому, изучая движение идеальной жидкости, можно установить ряд закономерностей, которые с известным приближением применимы к течению реальных жидкостей. Это приближение тем более точно, чем меньше вязкость жидкости. Вязкость многих жидкостей (например, воды, спирта и др.) в обычных условиях сравнительно невелика, вязкость же газов вообще незначительна.

8. Рассматривая вопросы механики твердого тела, мы пользовались понятием абсолютно твердого (абсолютно недеформируемого) тела, расстояния между частицами которого всегда остаются неизменными. Между абсолютно твердым телом и идеальной несжимаемой жидкостью имеется сходство в отношении объемной деформации и коренное различие в отношении деформации сдвига. Если модуль сдвига абсолютно твердого тела равен бесконечности, то модуль сдвига идеальной жидкости равен нулю.

§ 16.2. Уравнение неразрывности и уравнение Бернулли

1. Рассмотрим участок элементарной струйки жидкости, ограниченной двумя произвольно выбранными нормальными сечениями *1* и *2*, площади которых равны dS_1 и dS_2 (рис. 16.2). Скорости жидкости в этих сечениях обозначим через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Если течение жидкости установившееся, то масса жидкости, заключенной в участке струи между сечениями *1* и *2*, не зависит от времени. Следовательно, масса $dm_1 = \rho_1 v_1 \cdot dS_1$ жидкости, поступающей в рассматриваемый участок за единицу времени сквозь сечение *1*, равна массе $dm_2 = \rho_2 v_2 \cdot dS_2$ жидкости, вытекающей из этого участка за то же время сквозь сечение *2*:

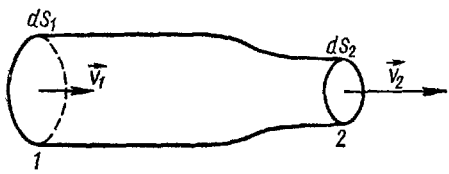

Рис. 16.2.

$$\rho_1 v_1 \cdot dS_1 = \rho_2 v_2 \cdot dS_2. \qquad (16.1)$$

Поскольку сечения *1* и *2* выбраны совершенно произвольно, то

$$\rho v \cdot dS = dm_{\text{сек}}, \qquad (16.2)$$

где ρ и v — значения плотности и скорости жидкости в произвольном поперечном сечении струи площадью dS, а $dm_{\text{сек}}$ — **секундный массовый расход жидкости**, постоянный вдоль струи.

Полученное нами соотношение называют **уравнением неразрывности.** В случае несжимаемой жидкости плотность ρ одина-

кова во всех сечениях струи и уравнение неразрывности имеет вид:

$$v \cdot dS = dV_{\text{сек}}, \tag{16.3}$$

где $dV_{\text{сек}}$ — секундный объемный расход жидкости, п о с т о я н н ы й в д о л ь с т р у и.

2. Для струи с конечной площадью S произвольного поперечного сечения секундные массовый и объемный расходы жидкости равны:

$$m_{\text{сек}} = \int_0^S \rho v \cdot dS \quad \text{и} \quad V_{\text{сек}} = \int_0^S v \cdot dS.$$

Если ρ и v постоянны по всему поперечному сечению S, то

$$m_{\text{сек}} = \rho v S \text{ и } V_{\text{сек}} = v S.$$

3. Выделим мысленно часть идеальной несжимаемой жидкости, которая в некоторый момент времени t заполняет участок элементарной струи, ограниченный нормальными сечениями *1* и *2* (рис. 16.3). В случае установившегося течения (направление течения показано на рис. 16.3 стрелкой) рассматриваемый объем жидкости к моменту времени $t + dt$ переместится вдоль струи и будет заключен между сечениями 1′ и 2′. По закону сохранения энергии изменение dW полной энергии жидкости равно сумме теплоты δQ, сообщенной жидкости за время dt, и работы $\delta A'$, совершенной внешними силами:

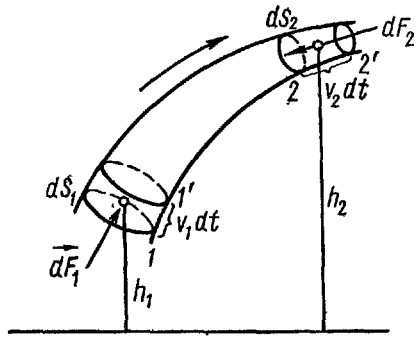

Рис. 16.3.

$$dW = \delta Q + \delta A'.$$

Так как силы трения в идеальной жидкости отсутствуют, то на рассматриваемую часть жидкости действуют только внешние силы давления, приложенные со стороны остальной жидкости. Влияние силы тяжести мы учтем, введя в выражение для полной энергии член $W_{\text{п}}$, характеризующий потенциальную энергию жидкости в поле тяготения Земли:

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} + U,$$

где $W_{\text{к}}$ — кинетическая энергия жидкости, U — ее внутренняя энергия. В дальнейшем мы будем предполагать, что теплообмен отсутствует ($\delta Q = 0$) и $U = \text{const}$. Поэтому

$$d(W_{\text{к}} + W_{\text{п}}) = \delta A'. \tag{16.4}$$

Работа сил давления, приложенных к боковой поверхности струи, равна нулю, так как эти силы направлены перпендикулярно к направ-

лению течения жидкости. Поэтому работа $\delta A'$ равна разности работ сил давления $d\mathbf{F}_1$ и $d\mathbf{F}_2$, действующих на поперечные сечения *1* и *2*, площади которых равны соответственно dS_1 и dS_2:

$$\delta A' = p_1 \cdot dS_1 \cdot v_1 \cdot dt - p_2 \cdot dS_2 \cdot v_2 \cdot dt = (p_1 - p_2) v_1 \cdot dS_1 \cdot dt, \qquad (16.5)$$

где p_1 и p_2 — давления в сечениях *1* и *2*, v_1 и v_2 — скорости течения жидкости в этих сечениях, причем, как следует из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, $v_1 \cdot dS_1 = v_2 \cdot dS_2$. Поток жидкости установившийся, поэтому можно утверждать, что в объеме, заключенном между сечениями *1'* и *2*, не произошло никаких изменений. Энергия этого участка жидкости осталась также прежней. Все свелось к тому, что часть жидкости массой dm, которая первоначально была заключена между сечениями *1* и *1'*, оказалась как бы перенесенной в новое положение между сечениями *2* и *2'*. Поэтому изменение кинетической и потенциальной энергий всей жидкости, первоначально заключенной между сечениями *1* и *2*, равны:

$$\left.\begin{aligned} dW_{\text{к}} &= \frac{dm}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right), \\ dW_{\text{п}} &= dm \cdot g(h_2 - h_1), \end{aligned}\right\} \qquad (16.6)$$

где $dm = \rho v_1 \cdot dS_1 \cdot dt = \rho v_2 \cdot dS_2 \cdot dt$, а h_1 и h_2 — вертикальные расстояния от некоторого условного горизонтального уровня до центров тяжести элементов объема жидкости, заключенных в струе между сечениями *1* и *1'* и *2* и *2'*.

Ввиду малости этих элементов можно считать, что h_1 и h_2 — высоты центров тяжести сечений *1* и *2* над условным уровнем. Подставив в уравнение (16.4) значения $\delta A'$, $dW_{\text{к}}$, $dW_{\text{п}}$ из формул (16.5) и (16.6), получаем

$$\frac{dm}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + dm \cdot g\,(h_2 - h_1) = (p_1 - p_2)\, v_1 \cdot dS_1\, dt,$$

или после сокращения на $v_1 \cdot dS_1 dt = \frac{dm}{\rho}$ и простых преобразований,

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho g h_2. \qquad (16.7)$$

Сечения *1* и *2* были выбраны совершенно произвольно. Следовательно, уравнение (16.7) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g h = \text{const}. \qquad (16.8)$$

Это уравнение называют **уравнением Бернулли**, так как впервые оно было получено Д. Бернулли. Оно, как видно из его вывода, является выражением закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной несжимаемой жидкости.

4. В случае горизонтальной струи (например, при течении жидкости в горизонтальной трубе) величина h постоянна, и уравнение Бернулли принимает более простой вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}. \qquad (16.8')$$

Величину p называют **статическим давлением**, $\frac{\rho v^2}{2}$ — **скоростным, или динамическим, напором**, а $p_0 = p + \frac{\rho v^2}{2}$ — **полным давлением**. Статическое давление равно давлению жидкости на поверхность обтекаемого ею тела, например на стенки трубы. Для измерения статического давления в потоке жидкости может быть применена трубка, изображенная на рис. 16.4. Колено AB трубки располагают параллельно потоку, а колено BC — вертикально и сообщают с атмосферой. Передний конец A трубки закрыт, а в боковой поверхности колена AB сделано небольшое отверстие O. Статическое давление p в точке O равно: $p = p_a + \rho g H$, где ρ — плотность жидкости, H — высота поднятия жидкости в колене BC, p_a — атмосферное давление.

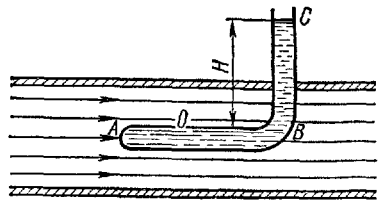

Рис. 16.4.

Для измерения полного давления в потоке жидкости ее необходимо предварительно затормозить. Это осуществляют посредством трубки с открытым передним концом, изображенной на рис. 16.5. Скоростной напор измеряют трубкой Пито, представляющей комбинацию трубок полного и статического давлений. Схематически она изображена на рис. 16.6.

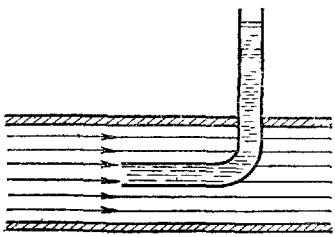

Рис. 16.5.

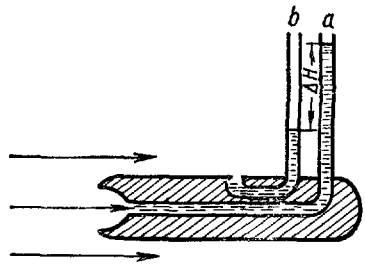

Рис. 16.6.

Динамический напор равен

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g \Delta H,$$

где ΔH — разность уровней жидкости в трубках a и b соответственно полного и статического давлений.

5. Поток жидкости называют **потенциальным**, если циркуляция Г вектора скорости **v** вдоль любого замкнутого контура L, проведенного в потоке, равна нулю:

$$\Gamma = \oint_L (\mathbf{v}, d\mathbf{r}) \equiv 0,$$

где **r** — радиус-вектор произвольной точки замкнутого контура.

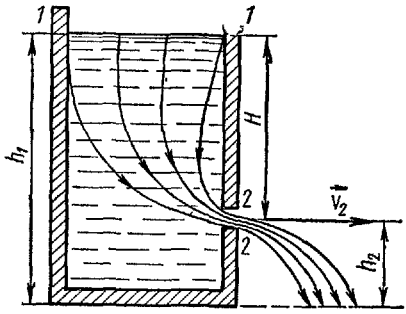

Рис. 16.7.

Уравнение Бернулли (16.8) было выведено нами для одной струи жидкости. Можно доказать, что в случае установившегося потенциального течения константа в правой части уравнения (16.8) одинакова для всех струй, т. е. что уравнение Бернулли справедливо для всего потока в целом.

6. Пользуясь уравнением Бернулли, легко найти выражение для скорости истечения жидкости сквозь отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд, заполненный идеальной жидкостью. В боковой стенке его на некоторой глубине H ниже уровня жидкости проделано малое отверстие (рис. 16.7).

Рассмотрим два сечения: *1—1* — на уровне свободной поверхности жидкости в сосуде и *2—2* — на выходе из отверстия. Напишем для них уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Давление p_1 жидкости в сечении *1—1* открытого сосуда равно атмосферному. Очевидно, что давление p_2 тоже равно атмосферному. Пренебрегая изменением атмосферного давления в пределах высоты сосуда, можно принять, что $p_1 = p_2$. В таком случае уравнение Бернулли будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2. \qquad (16.9)$$

Из уравнения неразрывности следует, что

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2},$$

где S_1 и S_2 — площади поперечных сечений сосуда и отверстия.

Если $S_1 \gg S_2$, то членом $\frac{v_1^2}{2}$ в левой части уравнения (16.9) можно пренебречь. Поэтому

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gH,$$

или

$$v_2 = \sqrt{2gH}\,. \qquad (16.10)$$

Полученное выражение носит название **формулы Торичелли.** Из нее видно, что частицы жидкости, выходя из отверстия, имеют такую же скорость, какую они приобрели бы, свободно падая с высоты H до уровня отверстия.

§ 16.3. Течение вязких жидкостей в трубах

1. Влияние внутреннего трения (вязкости), как указывалось выше, играет существенную роль в пограничном слое. При течении жидкости в трубах толщина этого слоя тем больше, чем больше вязкость жидкости, и возрастает по мере удаления от входа в трубу.

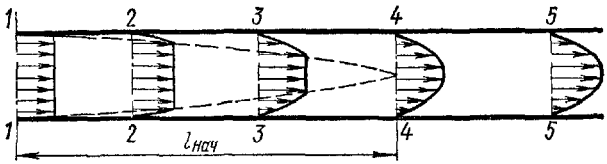

Рис. 16.8.

В пределах пограничного слоя скорость жидкости изменяется от нулевой скорости на стенке трубы до максимального значения на внешней границе пограничного слоя. Таким образом,влияние вязкости приводит к тому, что скорость жидкости неодинакова в различных точках одного и того же поперечного сечения трубы. Распределение скорости жидкости в различных сечениях круглой цилиндрической трубы показано на рис. 16.8. Во входном сечении (*1—1*) толщина пограничного слоя равна нулю и скорость одинакова во всех точках этого сечения. По мере удаления от сечения *1—1* (сечения *2—2*, *3—3*) толщина пограничного слоя возрастает и область потока с постоянной по сечению скоростью уменьшается. Граница пограничного слоя показана на рис. 16.8 пунктиром. В сечении *4—4* толщина пограничного слоя становится равной радиусу трубы, так что скорость оказывается различной во всех точках сечения, находящихся на неодинаковых расстояниях от оси трубы. Расстояние $l_{нач}$ между сечениями *1—1* и *4—4* называют **длиной участка гидродинамической стабилизации,** так как за сечением *4—4* дальнейшее изменение распределения скоростей жидкости прекращается — поток стабилизируется.

2. Для иллюстрации особенностей течения вязкой жидкости рассмотрим следующий опыт (рис. 16.9). В бюретку A налит чистый глицерин, а поверх него — подкрашенный глицерин. Вначале кран B закрыт и между чистым и подкрашенным глицерином имеется горизонтальная граница раздела. Если затем кран B открыть, то глицерин начнет вытекать из нижнего конца бюретки и граница раздела будет искривляться вниз, приобретая вид, изображенный на рис. 16.9. Это свидетельствует о том, что наибольшей скоростью обладают частицы глицерина, движущиеся по оси бюретки.

Рис. 16.9.

3. При небольших значениях скорости вязкой жидкости в трубе течение имеет ламинарный (слоистый) характер. В этом можно убедиться на опыте, вводя в поток жидкости на входе в стеклянную трубку тонкую струю подкрашенной жидкости. При ламинарном течении подкрашенная струя не перемешивается с остальной жидкостью. Постепенно увеличивая скорость v движения жидкости в трубе, можно убедиться в том, что начиная с некоторого значения $v_{кр}$ характер течения качественно изменяется. Подкрашенная струя быстро размывается за счет интенсивного перемешивания с остальной жидкостью, т. е. течение переходит из ламинарного в турбулентное. Этот переход, как показывает опыт, сопровождается изменением закона распределения скорости жидкости по сечению трубы. Вследствие интенсивного перемешивания скорость жидкости мало меняется почти по всему сечению, за исключением сравнительно небольшой области вблизи стенок трубы, где градиент скорости оказывается значительно большим, чем при ламинарном течении. Поэтому переход ламинарного течения в турбулентное приводит к значительному увеличению сил трения между жидкостью и стенками трубы.

4. Исследования показывают, что важнейшей характеристикой течения жидкостей служит безразмерная величина Re, которую называют **числом Рейнольдса**. Для течения жидкости в круглой трубе

$$\mathrm{Re} = \frac{\langle v \rangle d \rho}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu}, \qquad (16.11)$$

где d — диаметр трубы, $\langle v \rangle$ — средняя по сечению трубы скорость жидкости $\left(\langle v \rangle = \frac{4V_{сек}}{\pi d^2}\right.$, $V_{сек}$ — секундный объемный расход жидкости), ρ и η — плотность и динамический коэффициент вязкости жидкости, $\nu = \eta/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Переход ламинарного течения в турбулентное происходит при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$. Величина $\mathrm{Re}_{кр}$ зависит от ряда факторов: шероховатости стенок трубы, способа осуществления ввода жидкости в трубу и т. д. Для гладких круглых труб $\mathrm{Re}_{кр} \approx 2300$.

5. Рассмотрим закономерности стабилизированного ламинарного течения несжимаемой жидкости в круглой цилиндрической трубе

радиуса R. Из условия симметрии очевидно, что скорость v жидкости зависит только от расстояния r между рассматриваемой точкой потока и осью трубы: $v = v(r)$.

Выделим мысленно слой жидкости, ограниченный цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$ и двумя поперечными сечениями $1—1'$ и $2—2'$ расстояние между которыми равно l (рис 16 10). Проведем ось X вдоль оси трубы в направлении течения жидкости. Силы внутреннего трения действуют как на внешнюю, так и на внутреннюю поверхности рассматриваемого слоя жидкости. По закону Ньютона для внутреннего трения

$$F_{\text{внутр}} = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l$$

где $2\pi r l$ — площадь внутренней поверхности слоя Поскольку $\frac{dv}{dr} < 0$ (скорость v уменьшается при увеличении r, т. е. по мере приближения к стенкам трубы) $F_{\text{внутр}} > 0$, т. е. сила $\mathbf{F}_{\text{внутр}}$ направлена вдоль положительного направления оси X и ускоряет движение цилиндрического слоя жидкости Аналогично,

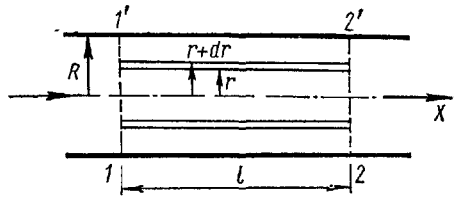

Рис. 16.10.

$$F_{\text{внешн}} = \eta \left\{ \frac{dv}{dr} 2\pi r l + \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dr} 2\pi r l \right) \right] dr \right\},$$

причем вектор $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ направлен вдоль отрицательного направления оси X, т. е сила $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$ тормозит движение цилиндрического слоя жидкости Результирующая сила $d\mathbf{F}_{\text{тр}}$ равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_{\text{внутр}}$ и $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$, которые направлены во взаимно противоположные стороны Она совпадает по направлению с силой $\mathbf{F}_{\text{внешн}}$, а ее проекция на ось X

$$dF_{\text{тр}_x} = 2\pi\eta l \cdot dr \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi\eta l \cdot d\left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

Кроме того, на рассматриваемый слой жидкости действует результирующая сила давления $d\mathbf{F}_{\text{д}}$, направленная вдоль оси X и численно равная разности сил давления на торцевые поверхности этого слоя, имеющие площадь $2\pi r \cdot dr$. Если давление в сечении $1—1'$ равно p, то в сечении $2—2'$ оно равно

$$p + \frac{dp}{dx} l.$$

Проекция силы $d\mathbf{F}_{\text{д}}$ на ось X

$$dF_{\text{д}_x} = 2\pi r \cdot dr \left[p - \left(p + \frac{dp}{dx} l \right) \right] = -2\pi r \frac{dp}{dx} dr.$$

В случае установившегося течения жидкости силы $d\mathbf{F}_{\text{тр}}$ и $d\mathbf{F}_{\text{д}}$ взаимно уравновешиваются, т. е

$$dF_{\text{тр}_x} = -dF_{\text{д}_x}.$$

Таким образом,

$$2\pi\eta l \cdot d\left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi l r \frac{dp}{dx} dr$$

или

$$d\left(r\,\frac{dv}{dr}\right)=\frac{1}{\eta}\,\frac{dp}{dx}\,r\cdot dr.$$

Интегрируя, получаем

$$r\,\frac{dv}{dr}=\frac{r^2}{2\eta}\cdot\frac{dp}{dx}+C_1.$$

При $r=0$ скорость $v=v_{\text{макс}}$, поэтому

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r=0}=0,\quad C_1=0\quad\text{и}\quad\frac{dv}{dr}=\frac{r}{2\eta}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

Интегрируем повторно

$$v=\frac{r^2}{4\eta}\cdot\frac{dp}{dx}+C_2.$$

При $r=R$ скорость $v=0$ (прилегающий к стенке слой «прилипает» к ней). Поэтому постоянная интегрирования

$$C_2=-\frac{R^2}{4\eta}\cdot\frac{dp}{dx}$$

Следовательно, зависимость v от r имеет вид

$$v=-\frac{1}{4\eta}(R^2-r^2)\frac{dp}{dx}\qquad(16.12)$$

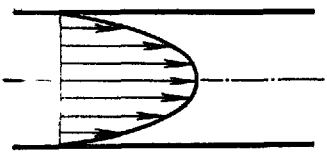

Рис. 16.11.

Таким образом, распределение скоростей по сечению трубы происходит по параболическому закону (рис. 16.11).

Найдем значение средней скорости течения жидкости:

$$\langle v\rangle=\frac{V_{\text{сек}}}{\pi R^2}$$

Так как

$$V_{\text{сек}}=\int_0^R v\cdot 2\pi r\cdot dr,$$

то

$$\langle v\rangle=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v\,2\pi r\cdot dr=\frac{2}{R^2}\int_0^R vr\cdot dr=-\frac{2}{4\eta R^2}\cdot\frac{dp}{dx}\left[R^2\int_0^R r\cdot dr-\right.$$

$$\left.-\int_0^R r^3\cdot dr\right]=-\frac{1}{2\eta R^2}\cdot\frac{dp}{dx}\left[\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right]=-\frac{R^2}{8\eta}\,\frac{dp}{dx}.$$

Итак,

$$\langle v \rangle = -\frac{R^2}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx}. \qquad (16.13)$$

Знак минус указывает на то, что статическое давление p убывает в направлении течения жидкости.

Объемный расход жидкости

$$V_{\text{сек}} = \pi R^2 \langle v \rangle = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx}. \qquad (16.14)$$

Из уравнения неразрывности следует, что $V_{\text{сек}}$ не зависит от x, поэтому

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\eta V_{\text{сек}}}{\pi R^4} = \text{const}.$$

Следовательно,

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l}$$

где Δp — падение статического давления на участке трубы длиной l. Подставляя это выражение для $\frac{dp}{dx}$ в уравнение (16.14), получаем **формулу Пуазейля:**

$$V_{\text{сек}} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \qquad (16.15)$$

6. Соотношение (16.15) используют для экспериментального определения коэффициента внутреннего трения жидкостей. Применяемый для этого прибор — **капиллярный вискозиметр** — изображен на рис. 16.12. Через трубку, соединенную с сосудом B, в вискозиметр заливают исследуемую жидкость с таким расчетом, чтобы уровень ее в обоих коленах был ниже отметки b. Через резиновую трубку C отсасывают воздух так, чтобы уровень жидкости в левом колене поднялся выше метки a. Если затем трубку C сообщить с атмосферой, то жидкость под влиянием силы тяжести начнет перетекать по капилляру K в сосуд B. Определяют время t, за которое через капилляр протечет вся жидкость, заполняющая объем V_{ab} сосуда A между метками a и b. Во избежание необходимости определения остальных величин, входящих в формулу (16.15), прибегают к относительному методу, т. е. повторяют опыт дважды: один раз с эталонной жидкостью, коэффициент вязкости η_0 которой известен, например, с водой, а другой раз с испытуемой жидкостью. Воспользуемся формулой(16 15)

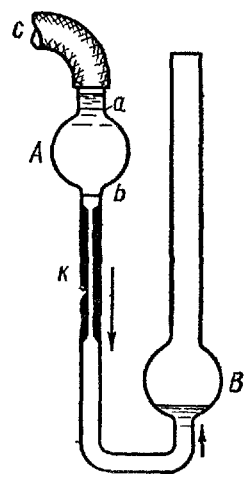

Рис 16 12.

для выражения результатов обоих измерений:

$$\frac{V_{ab}}{t_0} = \frac{\Delta p_0 \pi R^4}{8\eta_0 l} \quad \text{и} \quad \frac{V_{ab}}{t} = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l},$$

откуда

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\Delta p}{\Delta p_0} \cdot \frac{t}{t_0}.$$

Жидкость течет по капилляру под действием ее силы тяжести, поэтому падение давления на капилляре пропорционально плотности жидкости:

$$\frac{\Delta p}{\Delta p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{и} \quad \eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0},$$

где ρ и ρ_0 — плотности испытуемой и эталонной жидкостей.

§ 16.4. Движение тел в жидкостях и газах

1. Вопрос о силовом взаимодействии между телом и набегающим на него потоком жидкости или газа, а также о силах, действующих на тела, движущиеся в жидкости или газе, имеет большое практическое значение в самых разнообразных задачах гидроаэродинамики. В соответствии с механическим принципом относительности задача о силовом взаимодействии между неподвижной жидкостью и телом, которое движется в ней равномерно и прямолинейно со скоростью $\mathbf{u}$, эквивалентна задаче о взаимодействии между неподвижным телом и набегающим на него стационарным потоком жидкости, скорость $\mathbf{v}_0$ которого вдали перед телом равна — $\mathbf{u}$.

2. Результирующая сила $\mathbf{R}$, действующая на тело со стороны потока жидкости, равна векторной сумме равнодействующих сил давления ($\mathbf{F}_д$) и сил трения ($\mathbf{F}_{тр}$), приложенных к поверхности тела:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_д + \mathbf{F}_{тр}.$$

Силу $\mathbf{R}$ можно разложить на две составляющие: **силу лобового сопротивления** $\mathbf{R}_x$, совпадающую по направлению со скоростью $\mathbf{v}_0$ невозмущенного потока, и **подъемную силу** $\mathbf{R}_y$, направленную перпендикулярно $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y. \qquad (16.16)$$

Силы $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_x$ и $\mathbf{R}_y$ зависят от скорости потока, формы тела, его размеров и расположения относительно направления вектора $\mathbf{v}_0$, а также от свойств жидкости. Если жидкость и д е а л ь н а я, то, как показывают расчеты, сила лобового сопротивления тела $\mathbf{R}_x = 0$, т. е. в идеальной жидкости тело должно двигаться без всякого сопротивления. Этот результат получил название **парадокса Даламбера—Эйлера**, так как он противоречит тому, что наблюдают в реальных опытах.

В качестве иллюстрации на рис. 16.13 показан вид линий тока идеальной жидкости, безотрывно обтекающей длинный круговой цилиндр, ось O которого расположена перпендикулярно к плоскости чертежа и к вектору $\mathbf{v}_0$ скорости невозмущенного потока вдали от тела. Скорость жидкости отлична от нуля во всех точках поверхности цилиндра, за исключением так называемых **критических точек** a и b, в которых $v = 0$. На участках ac и ad скорость жидкости возрастает, а статическое давление убывает в соответствии с уравнением Бернулли. В точках c и d скорость максимальна, а давление минимально. На участках cb и db скорость убывает, а давление возрастает. Линии тока симметричны относительно плоскостей aOb и cOd. Поэтому результирующая всех элементарных сил давления жидкости на цилиндр $\mathbf{F}_д = 0$. Так как жидкость идеальная, то нет и сил трения, т. е. $\mathbf{F}_{тр} = 0$. Следовательно, результирующая сила, действующая на цилиндр, сила его лобового сопротивления и подъемная сила равны нулю.

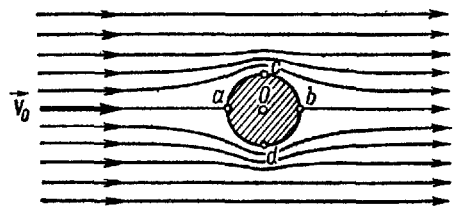

Рис. 16.13.

3. В действительности сила лобового сопротивления тела, обтекаемого реальной жидкостью, всегда отлична от нуля. Это связано с влиянием вязкости, вызывающей появление двух одинаково направленных вдоль $\mathbf{v}_0$ составляющих силы лобового сопротивления — силы **сопротивления трения** $\mathbf{R}_{x\,тр}$ и силы **сопротивления давления** $\mathbf{R}_{x\,д}$:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_{x\,тр} + \mathbf{R}_{x\,д}.$$

Сила $\mathbf{R}_{x\,тр}$ представляет собой результирующую сил трения, действующих на все малые элементы поверхности тела. Сила $\mathbf{R}_{x\,д}$ обусловлена тем, что из-за торможения жидкости, происходящего в пограничном слое, давление жидкости на лобовую часть поверхности тела не компенсируется ее давлением на кормовую часть тела.

Дж. Стокс теоретически показал, что для силы лобового сопротивления небольшого шара, медленно движущегося в вязкой жидкости, справедлив следующий закон, называемый **законом Стокса**:

$$R_x = 6\pi\eta r u, \qquad (16.17)$$

где η — динамический коэффициент вязкости жидкости, u — скорость шара, а r — его радиус. Соотношение (16.16) справедливо при условии, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{ud}{\nu} \ll 1$, где $d = 2r$ — диаметр шара, $\nu = \eta/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости жидкости, а ρ — ее плотность.

4. Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления зависит от формы тела и его расположения в потоке. У хорошо обтекаемого тела (например, крыла самолета, корпуса дирижаб-

ля, торпеды и т. п.) определяющую роль в лобовом сопротивлении играет сопротивление трения. Наоборот, лобовое сопротивление плохо обтекаемого тела в основном обусловлено сопротивлением давления. Это связано с тем, что при обтекании потоком вязкой жидкости тел с большой кривизной поверхности (например, тел шарообразной формы, поперечно обтекаемых круговых цилиндров и т. п.) в хвостовой части тела возникает отрыв пограничного слоя от поверхности тела[1], приводящий к интенсивному вихреобразованию (рис. 16.14). В области поверхности тела, охваченной вихревым движением жидкости, давление оказывается пониженным по сравнению с соответствующим участком лобовой поверхности. Поэтому возникает значительная результирующая сила сопротивления давления. Эта сила оказывается пропорциональной скоростному напору набегающего на тело потока жидкости:

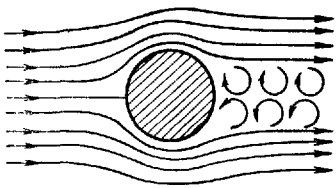

Рис. 16.14.

$$R_x = c_x \frac{\rho v_0^2}{2} S \qquad (16.18)$$

где c_x — безразмерный коэффициент, называемый **коэффициентом лобового сопротивления** тела, ρ — плотность жидкости, а S — площадь, характеризующая размеры тела. Для симметричных тел (например, фюзеляжа самолета) в качестве S берут площадь миделевого сечения, т. е. наибольшую площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к направлению скорости $\mathbf{v}_0$. Для крыла самолета под S понимают площадь крыла в плане.

Из анализа экспериментальных данных следует, что коэффициент лобового сопротивления c_x зависит от формы тела, его расположения в потоке и от числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = v_0 l/\nu$, где l — характерный размер тела (например, для шара и поперечно обтекаемого цилиндра — их диаметр). Так, для шара в пределах справедливости закона Стокса (16.17) $c_x = 24/\mathrm{Re}$. Коэффициент лобового сопротивления тела, находящегося в высокоскоростном потоке газа (сжимаемой жидкости), зависит также **от числа Маха** $\mathrm{M} = v_0/v_{зв}$, где $v_{зв}$ — скорость распространения звука в газе. Расчеты и эксперименты показывают, что влиянием сжимаемости газа на величину c_x можно пренебречь, если $\mathrm{M} < \mathrm{M}_{кр}$, где $\mathrm{M}_{кр}$ — некоторое характерное для данного тела число, меньшее единицы.

5. Подъемная сила возникает вследствие асимметрии в обтекании тела жидкостью. На рис. 16.15 показан характер обтекания цилиндрического тела — крыла самолета, образующие которого перпендикулярны к плоскости чертежа и вектору $\mathbf{v}_0$ скорости невозмущенного

Рис. 16.15.

[1] Формула Стокса (16.16) не учитывает этого явления, так как оно возникает при значениях Re, больших тех, для которых справедлива формула (16.16).

потока. Скорость жидкости около верхней части поверхности тела больше, чем около нижней. Соответственно давление жидкости на нижнюю поверхность больше, чем на верхнюю. Поэтому результирующая сил давления на все малые элементы поверхности тела отлична от нуля.

Для подъемной силы справедлива формула, аналогичная формуле (16.18) для силы лобового сопротивления:

$$R_y = c_y \frac{\rho v_0^2}{2} S, \tag{16.19}$$

где c_y — безразмерный коэффициент, называемый **коэффициентом подъемной силы**, а S — характерная площадь. Как показывают эксперименты, коэффициент c_y зависит главным образом от формы тела и от его ориентации в потоке. Например, для крыла самолета коэффициент подъемной силы зависит от профиля крыла, т. е. формы его поперечного сечения, показанного на рис. 16.15, и от угла атаки — угла между вектором $\mathbf{v}_0$ и направлением прямой, проведенной из задней заостренной кромки профиля крыла в наиболее удаленную от нее переднюю кромку. Кроме того, c_y зависит от числа Рейнольдса, а для тела, находящегося в газовом потоке большой скорости,— еще и от числа Маха.

6. Основы теории подъемной силы были разработаны проф. Н. Е. Жуковским. В 1904 г. он рассмотрел задачу об обтекании плоскопараллельным безграничным потоком идеальной несжимаемой жидкости бесконечно длинного цилиндра, образующие которого перпендикулярны к скорости $\mathbf{v}_0$ невозмущенного потока, как изображено, например, на рис. 16.15. Жуковский теоретически показал, что на участок тела, имеющий длину z вдоль образующей, действует подъемная сила

$$R_y = \rho v_0 z \Gamma, \tag{16.20}$$

где $\Gamma = \oint_L (\mathbf{v}, d\mathbf{r})$ — циркуляция скорости жидкости вдоль контура L поперечного сечения тела или вдоль любого другого замкнутого контура, охватывающего тело[1].

Формула Жуковского (16.20) устанавливает прямо пропорциональную связь между подъемной силой и циркуляцией скорости. Из сопоставления формул (16.19) и (16.20) следует, что

$$\Gamma = \frac{c_y v_0 S}{2z}$$

Таким образом, для данного тела циркуляция скорости зависит от величины скорости v_0 и от ориентации тела в потоке. В частности, при $v_0 = 0$ $\Gamma = 0$. Изменение значения циркуляции скорости при из-

[1] Выбор замкнутого контура L, охватывающего тело, не влияет на величину Γ циркуляции скорости, так как течение потенциально и циркуляция скорости вдоль любого замкнутого контура, не охватывающего тело, равна нулю.

менении v_0 или ориентации тела в потоке (при $v_0 \neq 0$) невозможно объяснить в рамках гидродинамики идеальной жидкости. Это явление обусловлено вязкостью жидкости. При изменении режима обтекания тела вязкой жидкостью с поверхности тела срываются вихри. Соответственно изменяется величина циркуляции скорости по замкнутому контуру, охватывающему тело вместе с прилегающим к телу пограничным слоем. Однако рассмотрение этого вопроса выходит за рамки нашего курса.

7. Из соображений симметрии очевидно, что при поперечном обтекании кругового цилиндра плоскопараллельным потоком жидкости циркуляция скорости и подъемная сила должны быть равны нулю независимо от того, является ли рассматриваемая жидкость идеальной или вязкой. Однако картина обтекания цилиндра реальной (вязкой) жидкостью качественно изменяется как только цилиндр приводят во вращение вокруг его оси. Вследствие внутреннего трения цилиндр увлекает за собой жидкость. Если он вращается, например, по часовой стрелке (рис. 16.16), то результирующая скорость жидкости вблизи верхней части поверхности цилиндра оказывается большей, а вблизи нижней поверхности — меньшей, чем та, которая была бы в случае отсутствия вращения. Обтекание вращающегося цилиндра несимметрично. Циркуляция скорости $\Gamma \neq 0$, и на цилиндр действует подъемная сила $\mathbf{Y}$, направленная снизу вверх перпендикулярно к вектору $\mathbf{v}_0$ скорости невозмущенного потока жидкости. Это явление называют **эффектом Магиуса.** Эффектом Магнуса обусловлена малая точность стрельбы гладкоствольной артиллерии. Под действием случайных причин шаровое ядро в процессе выстрела может приобрести вращение вокруг оси, не совпадающей с вектором скорости его поступательного движения. Благодаря этому на него будет действовать поперечная («подъемная») сила, вызывающая отклонение ядра от расчетной траектории.

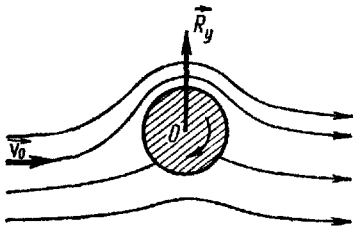

Рис. 16.16.

§ 16.5. Движение сжимаемой жидкости

1. В гидроаэродинамике газы можно рассматривать как несжимаемые жидкости лишь при сравнительно небольших скоростях движения, не превосходящих 100 м/с. Во всех остальных случаях необходимо учитывать зависимость плотности газа ρ от статического давления p, которое в свою очередь зависит от скорости.

В большинстве случаев газ можно считать идеальным, так что зависимость ρ от p выражается формулой (9.10)

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

где μ — молярная масса газа, T — его абсолютная температура, R — универсальная газовая постоянная.

2. Уравнение Бернулли для сжимаемой идеальной жидкости (газа) имеет вид

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(h_2 - h_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0, \qquad (16.21)$$

где v_1 и v_2 — скорости газа в двух произвольных сечениях (*1* и *2*) элементарной струи, h_1 и h_2 — расстояния от этих сечений до условного уровня, а интеграл $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$ зависит от вида процесса изменения состояния газа между сечениями *1* и *2*. Уравнение (16.21) является обобщением уравнения (16.7), которое получается из (16.21) при $\rho = \text{const}$:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}.$$

3. В большинстве случаев членом $g(h_2 - h_1)$ можно пренебречь, так как ввиду малой плотности газа изменение его потенциальной энергии при не слишком больших перепадах высот $h_2 - h_1$ очень невелико. Поэтому часто уравнение Бернулли для газа записывают в следующей приближенной форме:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0. \qquad (16.22)$$

4. При больших скоростях течения газа теплообмен между ним и окружающей средой практически не успевает происходить. Следовательно, при вычислении интеграла $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$ можно считать, что процесс изменения состояния газа между сечениями *1* и *2* является а д и а б а т и ч е с к и м (см. § 10.5). Взаимосвязь между давлением и плотностью газа в этом случае выражается уравнением

$$\frac{p}{\rho^\varkappa} = \frac{p_1}{\rho_1^\varkappa} = \text{const}, \qquad (16.23)$$

где $\varkappa = C_p/C_V$ — показатель адиабаты.

Таким образом,

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/\varkappa}$$

и

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_1^{1/\varkappa}}{\rho_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p^{1/\varkappa}} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p_1^{1/\varkappa}}{\rho_1} \left[p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \right],$$

или

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right]. \qquad (16.24)$$

Из уравнения (9.10) следует, что

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{RT_1}{\mu}$$

поэтому формулу (16.24) можно представить также в виде

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{RT_1}{\mu} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right] \qquad (16.24')$$

Наконец, учитывая, что в адиабатическом процессе связь между температурой и давлением газа выражается уравнением (10.18)

$$T = T_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

найдем, что

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{R}{\mu} (T_2 - T_1), \qquad (16.24'')$$

где T_1 и T_2— абсолютные температуры газа в сечениях *1* и *2*. Подставив значения интегралов из (16.24), (16.24′) и (16.24″) в уравнение (16.22), получим три различных формы записи уравнения Бернулли для адиабатического течения идеального газа:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right] = 0; \qquad (16.25)$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{RT_1}{\upsilon} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1 \right] = 0; \qquad (16.25')$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{R}{\mu} (T_2 - T_1) = 0. \qquad (16.25'')$$

5. **Температурой торможения** T_0 газового потока называют ту температуру, которую имел бы этот газ при адиабатическом торможении до нулевой скорости. Величину T_0 легко определить из уравнения (16.25″), полагая в нем $v_2 = 0$ и $T_2 = T_0$:

$$T_0 = T_1 + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \frac{\mu}{R} v_1^2. \qquad (16.26)$$

Так как сечение *1* выбрано совершенно произвольно, то индекс *1* в последнем уравнении можно отбросить:

$$T_0 = T + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \frac{\mu}{R} v^2. \qquad (16.26')$$

Давление p_0 адиабатически заторможенного потока газа называют **давлением торможения.** Его можно найти из уравнений (10.18) и (16.26'):

$$p_0 = p\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = p\left[1 + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \cdot \frac{\mu}{RT} v^2\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \qquad (16.27)$$

6. Из уравнения (16.25') следует, что скорость v_2 тем больше, чем меньше давление p_2. Она достигает максимальной величины $v_{\text{макс}}$ при истечении газа в вакуум ($p_2 = 0$):

$$v_{\text{макс}} = \sqrt{v_1^2 + \frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{R}{\mu} T_1} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{R}{\mu} T_0} \qquad (16.28)$$

Поскольку $v_{\text{макс}}$ имеет конечную величину, а плотность газа при $p = 0$ также равна нулю, то, как видно из уравнения неразрывности (16.2), площадь поперечного сечения струи в том месте, где $v = v_{\text{макс}}$, должна быть бесконечно большой. В этом состоит принципиальное отличие течения газа от течения несжимаемой жидкости.

В случае установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения S скорость v постоянна по сечению, и уравнение неразрывности имеет вид

$$vS = V_{\text{сек}} = \text{const}.$$

Таким образом, в сужающихся трубах поток несжимаемой жидкости всегда ускоряется, а в расширяющихся — всегда замедляется.

В случае установившегося течения идеального газа по трубе уравнение неразрывности имеет вид

$$\rho vS = m_{\text{сек}} = \text{const}.$$

Плотность ρ уменьшается по мере увеличения скорости v. Поэтому оказывается, что максимальная скорость, которую может приобрести поток газа в сужающейся трубе, равна так называемой **критической скорости** $v_{\text{кр}}$:

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{RT_0}{\mu}}, \qquad (16\ 29)$$

где T_0— температура торможения.

Для получения в трубе потока газа, скорость которого больше $v_{\text{кр}}$, необходимо, чтобы труба сужалась лишь до того сечения, в котором скорость достигает значения $v_{\text{кр}}$, а затем труба должна быть расширяющейся. Такую трубу называют **соплом Лаваля.**

Вопросы для повторения

1. Какой основной метод описания движения жидкости применяют в гидроаэромеханике?
2. Какое течение жидкости называют установившимся, неустановившимся, ламинарным, турбулентным?
3. Что называют линией тока, трубкой тока, струей?
4. Что такое пограничный слой? Каковы причины его возникновения?
5. Как записать уравнение неразрывности для установившихся течений несжимаемой и сжимаемой жидкости?
6. Как можно измерить статическое давление в потоке жидкости, скоростной напор и полное давление?
7. Выведите уравнение Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости. Какой закон оно выражает? Какой вид имеет это уравнение для идеальной сжимаемой жидкости?
8. Чем определяется переход ламинарного течения жидкости в круглой цилиндрической трубе в турбулентное?
9. Поясните принцип измерения вязкости жидкостей с помощью капиллярного вискозиметра.
10. Объясните причины возникновения силы лобового сопротивления тела, движущегося в жидкости. В каком случае эта сила равна нулю?
11. Что называют подъемной силой? Чем она обусловлена?

Примеры решения задач

Задача 16.1. Вертикальный цилиндрический бак диаметром 1 м и высотой 2 м наполнили до краев жидкостью, а затем в дне бака открыли отверстие площадью 2 см². В течение какого времени вся жидкость вытечет из бака? Влиянием трения и различием площадей отверстия и сечения струи жидкости на выходе из него пренебречь.

Дано

$H = 2$ м,
$d_1 = 1$ м,
$S_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ м²

$t_0 - ?$

Решение

За время dt из отверстия вытекает объем жидкости

$$dV = v_2 S_2 dt,$$

где v_2 — скорость жидкости на выходе из отверстия. Благодаря этому уровень жидкости в баке изменяется на величину

$$dh = -\frac{4dV}{\pi d_1^2} = -\frac{4v_2 S_2}{\pi d_1^2} dt,$$

где h — высота от дна бака до уровня жидкости в нем в произвольный момент времени.

Так как площадь S_1 поперечного сечения бака во много раз больше площади S_2 отверстия в его днище:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi d_1^2}{4S_2} = \frac{3{,}14}{4 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \approx 7800,$$

то для нахождения скорости v_2 можно воспользоваться формулой Торичелли (16.10)

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Подставим это значение v_2 в уравнение для dh:

$$dh = -\frac{4S_2\sqrt{2gh}}{\pi \cdot d_1^2}\,dt$$

или

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{4S_2 \cdot \sqrt{2g}}{\pi d_1^2}\,dt.$$

В результате интегрирования найдем зависимость h от t:

$$\sqrt{h} = -\frac{2S_2\sqrt{2g}}{\pi d_1^2}\,t + C.$$

В начальный момент времени ($t = 0$) $h = H$, следовательно, $C = \sqrt{H}$

$$\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{2S_2\sqrt{2g}}{\pi d_1^2}t.$$

В момент полного опорожнения бака $h = 0$ и $t = t_0$. Таким образом полное время

$$t_0 = \frac{\pi d_1^2}{2S_2}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

Вычисления производим в Международной системе единиц (СИ):

$$t_0 = \frac{3{,}14}{2\ 2\ 10^{-4}} \cdot \sqrt{\frac{2}{2\ 9{,}81}}\ \text{с} = 2500\ \text{с}.$$

Приложение. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

§ 1. Измерение физических величин

1. Физическую величину A (длину, массу, силу, энергию и др.) измеряют, сравнивая ее с другой физической величиной того же рода a_1, принятой за **единицу измерения**. Отношение A к a_1 представляет собой **численное значение** A_1, физической величины:

$$A_1 = \frac{A}{a_1}. \qquad (П.1)$$

Для измерения одной и той же величины можно применять различные единицы. Например, силу измеряют в ньютонах, динах, килограммах и пр. Численное значение физической величины (A_1, A_2 и т. д.) зависит от выбора единицы ее измерения (a_1, a_2 и т. д.). Из выражения (П. 1) следует, что

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad (П.2)$$

т. е. численное значение данной физической величины о б р а т н о п р о п о р ц и о н а л ь н о величине принятой единицы измерения.

2. Единицы измерения различных физических величин можно выбирать совершенно произвольно. Однако это приводит к трудностям при сравнении результатов измерений, а также к усложнению записи формул физических законов, так как формулы физических законов связывают между собой не физические величины, а их численные значения. Значительно удобнее производить измерения с помощью единиц, принадлежащих к одной и той же системе единиц.

Каждую **систему единиц** строят на основе произвольно выбранных единиц измерения для нескольких различных и не зависящих друг от друга физических величин. Эти единицы называют **основными**. Единицы измерения для всех остальных физических величин — так называемые **производные единицы** — определяют через основные с помощью формул, связывающих численные значения этих физических величин с теми, единицы измерения которых приняты за основные.

3. В нашей стране установлено применение Международной системы единиц[1], обозначаемой СИ (в латинском написании SI), основны-

[1] ГОСТ 9867—61, а также проект ГОСТ «Единицы физических величин», опубликованный в 1970 г.

ми единицами которой служат: метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль и кандела. Временно допускаются к применению единицы других систем и внесистемные, которые приведены ниже для механических и термодинамических величин.

§ 2. Основные единицы механических систем единиц

1. В механике, кроме системы единиц СИ, допускается применение систем: СГС (CGS), или физической, и МКГСС (МкGS), или технической. В системах СИ и СГС основными служат единицы длины, массы и времени, в системе МКГСС — длины, силы и времени.

2. В системе СИ за единицу длины принят **метр** (м), определявшийся до 1960 г. как расстояние между двумя штрихами, нанесенными на эталоне метра. Для того чтобы метр можно было восстановить в случае его утраты, XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла новое определение метра: метр есть длина, равная 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86.

Метр служит также единицей длины в системе МКГСС. В системе единиц СГС единицей длины служит **сантиметр** (см), равный одной сотой доле метра.

3. За единицу массы в системе единиц СИ принят **килограмм** (кг), равный массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевой гири, хранящейся в Международном бюро мер и весов). В системе СГС за единицу массы принят **грамм** (г), равный тысячной доле килограмма.

4. В системе МКГСС второй основной единицей служит **килограмм-сила** (кгс). За килограмм-силу (кгс) принята сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение $a = g_n = 9{,}80665$ м/с^2 [1].

5. За единицу времени во всех системах единиц принята **секунда** (с), определявшаяся до 1956 г. как 1/86400 средних солнечных суток. В связи с тем, что вращение Земли вокруг своей оси подвергается нерегулярным колебаниям, XIII Генеральная конференция по мерам и весам приняла в 1967 г. новое определение **секунды** как интервала времени, в течение которого совершается 9 192 631 770 колебаний, соответствующих резонансной частоте энергетического перехода между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия-133 при отсутствии возмущений внешними полями.

Основные единицы систем СИ, СГС и МКГСС, а также их условные обозначения приведены в табл. П.1.

---

[1] В дальнейшем будем принимать $g_n = 9{,}81$ м/с^2.

Таблица П1

Система единиц		Основные единицы		
наименование	обозначение	длины (L)	массы (M)	времени (T)
Международная	СИ	м	кг	с
Физическая	СГС	см	г	с
		длины (L)	силы (F)	времени (T)
Техническая	МКГСС	м	кгс	с

§ 3. Производные единицы измерения

Каждая производная единица системы устанавливается при помощи физической формулы, выражающей связь численного значения измеряемой величины с численными значениями других, уже известных величин, причем коэффициент пропорциональности принимается равным единице. Приведем несколько примеров.

1. **Скорость** (v). В случае равномерного прямолинейного движения $v = s/t$. Поэтому за единицу скорости принимают скорость такого прямолинейного равномерного движения, при котором за единицу времени тело проходит путь, равный единице длины.

2. **Ускорение** (a). В случае прямолинейного равнопеременного движения $a = (v_2 - v_1)/t$. Поэтому за единицу ускорения принимают ускорение такого равнопеременного прямолинейного движения, при котором изменение скорости за единицу времени равно единице скорости.

3. **Сила** (F). По второму закону Ньютона $F = ma$. Поэтому за единицу силы принимают силу, сообщающую телу единичной массы ускорение, равное единице ускорения.

4. Единица массы (m) в системе МКГСС является производной и определяется из уравнения $m = F/a$.

За **техническую единицу массы** (т. е. м.) принимают массу тела, которое под действием постоянной силы, равной 1 кгс, приобретает ускорение, равное 1 м/с^2.

§ 4. Единицы измерения термодинамических величин

Для измерения термодинамических величин в системе единиц СИ установлены следующие пять основных единиц: **метр** (м), **килограмм** (кг), **секунда** (с), **кельвин** (К), **моль** (моль).

Кельвин является единицей СИ для термодинамической температуры (см. § 12.3). XIII Генеральная конференция по мерам и весам (1967 г.) дала следующее определение этой единицы: **кельвин** — 1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды (см. § 15.5).

Единица количества вещества—моль—введена в качестве седьмой основной единицы СИ по решению XIV Генеральной конференции по мерам и весам в 1971 г. **Моль** — количество вещества системы, в котором содержится столько же структурных элементов (молекул, атомов, ионов электронов, других частиц или специфицированных групп частиц), сколько атомов содержится в 0,012 кг нуклида ^{12} C (изотопа углерода с атомной массой 12).

Производные единицы измерения и соотношения между единицами в разных системах приведены в табл. П.3.

§ 5. Формулы размерностей

1. Основными единицами механических величин в системах СИ и СГС служат единицы длины, массы и времени. Обозначим их соответственно через L, M и T (см. табл. П.1). Тогда всякую производную единицу в вышеупомянутых системах можно выразить символически через L, M и T.

2. Соотношение, определяющее связь между данной производной единицей и основными единицами системы, называют **формулой размерности**. В формуле размерности указаны алгебраические действия, необходимые для выражения производной единицы через основные. Например, численное значение площади получают при перемножении числовых значений двух отрезков длины, поэтому формула размерности площади имеет вид:

$$[S] = LL = L^2.$$

Квадратные скобки означают, что имеется в виду «размерность» той величины, обозначение которой заключено в этих скобках.

Скорость в случае равномерного прямолинейного движения выражается частным от деления числа единиц длины, в которых измерен путь, на число протекших единиц времени, поэтому размерность скорости

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

Размерность ускорения найдем из выражения для ускорения в случае равнопеременного прямолинейного движения $a = (v_2 - v_1)/t$, откуда $[a] = [v]/[t] = LT^{-2}$.

Размерность силы можно определить, пользуясь одним из выражений для второго закона Ньютона: $F = ma$, откуда

$$[F] = [m]\,[a] = LMT^{-2}.$$

Размерность момента силы получаем из определения момента силы:

$$[M] = [F]\,[r] = L^2MT^{-2}$$

и т. д.

Основные единицы системы МКГСС обозначаются: L — единица длины, F — единица силы, T — единица времени. Соответственно этому в системе единиц МКГСС размерность момента силы

$$[M] = FL,.$$

размерность работы

$$[A] = FL$$

и т. д.

Предлагаем читателю самостоятельно вывести формулы размерности для всех механических величин в системах единиц СИ, СГС и в системе МКГСС. В первых двух системах формулы размерности физических величин о д и н а к о в ы, так как эти системы построены на основных единицах для одних и тех же физических величин.

3. Формулы размерности имеют большое практическое значение. Во-первых, они служат для проверки правильности физических уравнений — размерности правой и левой частей уравнения должны быть одинаковыми. Во-вторых, формулы размерности позволяют легко находить соотношения между производными единицами измерения в различных системах единиц. В -третьих, анализ размерностей позволяет в некоторых случаях вывести закон, которому подчиняется изучаемое явление.

Формулы размерностей для механических единиц приведены в табл. П.2, для величин, рассматриваемых в молекулярной физике, — в табл. П.3.

Таблица П.2

Единицы, формулы размерности и соотношения между единицами механических величин в различных системах единиц

Величина	Обозначение	Размерность в системе		Единицы измерения			Соотношения между единицами в разных системах
		СИ, СГС	МКГСС	СИ	СГС	МКГСС	
Длина	l	L		м	см		1 м = 100 см
Масса	m	M	$L^{-1}FT^2$	кг	г	т.е.м	1 кг = 10^3 г = 0,102 т. е. м (т. е. м. — техническая единица массы)
Время		T	T	с	с	с	
Площадь	S	L^2	L^2	м^2	см^2	м^2	1 м^2 = 10^4 см^2
Объем	V	L^3	L^3	м^3	см^3	м^3	1 м^3 = 10^6 см^3
Плотность	ρ	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	кг/м^3	г/см^3	т.е.м./м^3	1 кг/м^3 = 10^{-3} г/см^3 = 0,102 т.е.м./м^3
Угол	φ	1	1	рад (раднан)	рад	рад	
Скорость	v	LT^{-1}	LT^{-1}	м/с	см/с	м/с	1 м/с = 100 см/с
Ускорение	a	LT^{-2}	LT^{-2}	м/с^2	см/с^2	м/с^2	1 м/с^2 = 100 см/с^2
Угловая скорость	ω	T^{-1}	T^{-1}	рад/с	рад/с	рад/с	
Угловое ускорение	ε	T^{-2}	T^{-2}	рад/с^2	рад/с^2	рад/с^2	
Период	T	T	T	с	с	с	
Частота	ν	T^{-1}	T^{-1}	Гц (герц)	Гц	Гц	

Продолжение табл. П.2

Величина	Обозначение	Размерность в системе		Единицы измерения			Соотношения между единицами в разных системах
		СИ, СГС	МКГСС	СИ	СГС	МКГСС	
Сила	F	LMT^{-2}	F	Н (ньютон)	дин (дина)	кгс	1 Н = 10^5 дин = 0,102 кгс
Удельный вес .	γ	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}F$	Н/м^3	дин/см^3	кгс/м^3	1 Н/м^3 = 0,1 дин/см^3 = 0,102 кгс/м^3
Импульс	K; mv	LMT^{-1}	FT	$\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{с}}$	$\frac{\text{т е.м.}\cdot\text{м}}{\text{с}}$	1 кг·м/с = 10^5 г·см/с = = 0,102 т.е.м.·м/с
Работа и энергия	A; W	L^2MT^{-2}	LF	Дж (джоуль)	эрг	кгс·м	1 Дж = 10^7 эрг = 0,102 кгс·м (кгс·м — килограммометр)
Мощность	N	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	Вт (ватт)	эрг/с	кгс·м/с	1 Вт = 10^7 эрг/с = 0,102 кгс·м/с
Момент силы . .	M	L^2MT^{-2}	LF	Н·м	дин·см	кгс·м	1 Н·м = 10^7 дин·см = 0,102 кгс·м
Момент инерции	J	L^2M	LFT^2	кг·м^2	г·см^2	т.е.м·м^2	1 кг·м^2 = 10^7 г·см^2 = 0,102 т.е.м.·м^2
Момент импульса	L	L^2MT^{-1}	LFT	кг·м^2/с	г·см^2/с	т.е.м.·м^2/с	1 кг·м^2/с = 10^7 г·см^2/с = = 0,102 т.е.м.·м^2/с
Давление	p	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	Па	дин/см^2	кгс/м^2	1 Па = 10 дин/см^2 = 0,102 кгс/м^2; внесистемная: 1 бар = 10^5 Па

Таблица П.3

Единицы, формулы размерности и соотношения между единицами величин молекулярной физики

Величина	Обозначение	Формула размерности в системах СИ, СГС	Единицы			Соотношения между единицами
			СИ	СГС	внесистемные	
Температура	T	Θ	К (кельвин)	К (кельвин)	°С (градус Цельсия)	1°С = 1 К
Количество вещества	M/μ	моль	моль	моль	—	
Давление	p	$L^{-1}MT^{-2}$	Па (паскаль)	дин/см^2	атм бар мм рт. ст	1 атм = 1,013 бар = = 760 мм рт. ст. = = 1,013·10^5 Па; 1 дин/см^2 = 0,1 Па
Удельный объем	v	L^3M^{-1}	м^3/кг	см^3/г	-	1 м^3/кг = 10^3 см^3/г
Молярная масса	μ	М·моль$^{-1}$	кг/моль	г/моль	—	
Количество теплоты	Q	L^2MT^{-2}	Дж	эрг	1 кал 1 ккал	1 кал = 4,1868 Дж 1 ккал = 10^3 кал
Коэффициент линейного расширения	α_l	T^{-1}	1/К	1/·К	—	
Коэффициент объемного расширения	α_v	T^{-1}	1/К	1/·К	—	
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	c s	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	Дж/(кг·К)	эрг/(г·К)	кал/(г·°С) ккал/(кг·°С)	1 ккал/(кг·°С) = = 4186,8 Дж/(кг·К)
Молярная теплоемкость	C	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$ моль$^{-1}$	Дж/(моль × × К)	эрг/(моль × × К)	кал/(моль·°С) ккал/(кмоль·°С)	1 ккал/(кмоль·°С) = = 4,1868 Дж/(моль·К)

Продолжение табл. П.3

Величина	Обозначение	Формула размерности в системах СИ, СГС	Единицы			Соотношения между единицами
			СИ	СГС	внесистемные	
Удельная теплота фазового перехода	r	L^2T^{-2}	Дж/кг	эрг/г	кал/г; ккал/кг	1 ккал/кг = 4186,8 Дж/кг
Коэффициент диффузии	D	L^2T^{-1}	м^2/с	см^2/с	—	1 м^2/с = 10^4 см^2/с
Коэффициент внутреннего трения	η	$L^{-1}MT^{-1}$	Па·с	дин·с/см^2	—	1 Па·с = 10 дин·с/см^2
Коэффициент теплопроводиости	K	$LMT^{-3}\Theta^{-1}$	Вт/(м·К)	эрг/(см·с·К)	кал/(см·с·°С)	1 кал/(см·с·°С) = =418,68·10^5 эрг/(см·с·К) = = 418,68 Вт/(м·К)
Коэффициент поверхностного натяжения	α	MT^{-2}	Н/м	дин/см	—	1 Н/м = 10^3 дин/см
Универсальная газовая постоянная	R	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$ моль$^{-1}$	Дж/(К× × моль)	эрг/(К·моль)	кал/(°С·моль) л·атм/(°С·моль)	1 л·атм/(°С·моль) = = 24,2 кал/(°С·моль) = = 1,01·10^9 эрг/(К·моль) = = 101 Дж/(К·моль)
Поправки в уравнении Ван-дер-Ваальса	a	L^5MT^{-2} моль$^{-2}$	Дж·м^3 × × моль$^{-2}$	эрг·см^3 × ×моль$^{-2}$	атм·л^2/моль^2	1 атм·л^2/моль^2 = = 0,101 Дж·м^3/моль^2
	b	L^3·моль$^{-1}$	м^3/моль	см^3/моль	л/моль	1 л/моль = 10^3 см^3/моль = = 10^{-3} м^3/моль

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адиабата идеального газа 201
Адсорбция 309
— отрицательная 310
Аморфные тела 324
Амплитуда колебаний 149
Анизотропия 326

Бар 374
Биения 160
— частота 160
Биметаллическая пластинка 330
Броуновское движение 270

Вакуумный насос диффузионный 242
— — ротационный 241
Ватт 374
Вероятность распределения молекул 263
— термодинамическая 265
— термодинамического состояния 264
Вес тела 109
Вечный двигатель второго рода 254
Вещества поверхностно-активные 309
Вискозиметр капиллярный 357
Возгонка 339
Временное сопротивление 93
Время 11
— релаксации в жидкостях 302
Вязкость 95

Газ идеальный 179
— — уравнение состояния 183
— разреженный 240
— реальный 274
— — взаимодействие молекул 274
— — взаимная потенциальная энергия молекул 275
— — внутреннее давление 282
— — внутренняя энергия 288
— — «запрещенный» объем 280
— — модель Ван-дер-Ваальса 279
— — силы Ван-дер-Ваальса дисперсионные 278
— — — — индукционные 277
— — — — ориентационные 277
— — уравнение состояния Ван-дер-Ваальса 283

Гармонические колебания (см. Колебания гармонические)
Гармонический анализ 161
Герц 373
Гидроаэромеханика 346
Гироскоп 83
— уравновешенный 84
Гравитационная постоянная 101
— — измерение 102
Гравитационное поле (см. Поле тяготения)

Давление 177
— внутреннее в реальных газах 282
— критическое 284, 287
— насыщеиного пара 317
— полное 351
— статическое 351
— торможения 365
Движение абсолютно твердого тела вращательное 24
— — — — поступательное 23
— абсолютное 132
— апериодическое 167
— броуновское 270
— — теория Эйнштейна 270
— в поле центральных сил 114
— — — — — сферически симметричном 116
— замедленное 20
— колебательное 146
— — гармоническое (см. Колебания гармонические)
— — периодическое 146
— криволинейное 13
— механическое 11
— — относительный характер 13
— неравномерное 17
— относительное 132
— плоское 13
— по инерции 32
— под действием переменной силы 43
— под действием постоянной силы 43
— прямолинейное 13
— равномерное 17
— равнопеременное 20
— тела переменной массы 48

Движение точки по окружности 23
— — прямолинейное равномерное 22
— — — равнопеременное 22
— ускоренное 20
— центра инерции 47
Детандеры 292
Деформация всестороннего сжатия 92
— кручения 92
— остаточная 93
— относительная 90
— пластическая 90
— продольного растяжения (сжатия) 91
— сдвига 91
— упругая 90
Джоуль 374
Диаграмма растяжения 93
— состояния $p—V$ 192
— — $T—p$ 341, 345
Диаметр молекул газа 238
Дина 374
Динамика 11
Динамометр пружинный 34
Диссипация энергии 68
Диффузия 232, 303
Диффузия, закон Фика 233
— в газах, молекулярно-кинетическая теория 235
— — жидкостях 303
Длина пути 14
— свободного пробега молекул газа 219
Дросселирование адиабатическое 289
Дьюара сосуд 241

Единиц измерения система Международная (СИ) 368
Единица измерения 368
Единицы измерения основные 368
— — — в системах СИ, СГС, МКГСС 368—371

Жидкости, ближний порядок 300
— внутреннее трение 304
— диффузия 303
— дырочная теория 301
— капиллярные явления 314
— поверхностное натяжение 307
— сиботаксические области 300
— текучесть 305
Жидкость идеальная 347
— несжимаемая 346
— перегретая 287
— переохлаждения 342
— сжимаемая 346
Жуковского скамья 84

Закон (см. также принцип, теорема, уравнение, формула)
Закон Авогадро 183
Закон Амонтона — Кулона для статического трения 96
— — — — трения скольжения 97
— Бойля—Мариотта 180
— Больцмана для распределения частиц в потенциальном силовом поле 217
— всемирного тяготения Ньютона 101
— Гей-Люссака 180
— Гука 90
— Дебая 333
— Дерягина двучленный для трения скольжения 98
— Дюлонга и Пти 333
— инерции 32
— Кеплера второй 116
— — первый 118
— — третий 118
— Кулона для трения качения 99
— Максвелла для распределения молекул по скоростям 212
— независимости движений 15
— Ньютона для внутреннего трения 233
— — второй 41
— — первый 32
— — третий 44
— основной для вращения тела вокруг неподвижной оси 76
— — — — — — — точки 76
— Паскаля 346
— равномерного распределения энергии по степеням свободы 224
— распределения свободных пробегов молекул 221
— сложения скоростей 18
— сохранения и превращения энергии 65
— — импульса 50
— — момента импульса 82
— — — — относительно оси 83
— — проекции импульса 51
— — энергии в механике 67
— Стокса 359
— термодинамики второй 254
— — — статистическое истолкование 265
— — первый 190
— — третий 336
— Фика 233
— Фурье 234
— Шарля 180

Изотермы идеального газа 199
— реального газа 284
— — — Ван-дер-Ваальса 286
Импульс 41, 45
— силы 43
— закон сохранения 50

Испарение жидкости 317

Калория 189, 375
Капиллярные явления 314
Квант энергии 229
Килограмм 369
— силы 369
Кинематика 11
Кипение жидкости 319
Колебания 146
— ангармонические частиц твердого тела 328
— вынужденные 167
— — амплитуда 169
— — — статическая 170
— — вынуждающая (возмущающая) сила 167
— — начальная фаза 170
— — резонанс 171
— гармонические 146
— — амплитуда 149
— — возвращающая сила 152
— — вращающийся вектор амплитуды 157
— — начальная фаза 149
— — основное уравнение 152
— — период 149
— — скорость 150
— — сложение одинаково направленных 157
— — — взаимно перпендикулярных 161
— — ускорение 150
— — фаза 149
— — циклическая частота 149
— — частота 150
— — энергия 156
— гармонический анализ 161
— затухающие 163
— — амплитуда 164
— — время релаксации 166
— — коэффициент затухания 165
— — логарифмический декремент затухания 165
— — параметры колеблющейся системы 164
— — период (условный) 165
— — собственная циклическая частота 165
— когерентные 158
— линейно поляризованные 162
— маятника математического 154
— — пружинного 146, 153
— — физического 153
— модулированные 161
— — по амплитуде 161
— — — фазе или частоте 161
— свободные 147
— — незатухающие 147
— циркулярно поляризованные 163
Колебания эллиптически поляризованные 163
Количество движения 41
Конденсация пара 285
Координат преобразование Галилея 52
Коэффициент ангармоничности 328
— внутреннего трения 233, 237, 304
— вязкости динамический 234
— — кинематический 234
— диффузии 233, 237, 303
— квазиупругой силы 152
— линейного расширения 327, 329
— лобового сопротивления 360
— объемного расширения 181, 327
— поверхностного натяжения жидкостей 307
— подъемной силы 361
— полезного действия термический 251
— Пуассона 91
— сжимаемости 274
— теплопроводности 234, 237
— трения качения 99
— — скольжения 97
— — — истинный 98
— — статического 96
— упругости 90
Коэффициенты Ван-дер-Ваальса 280, 283
Кристаллизация 342
Кристаллы 324
— валентные 325
— ионные 325
— молекулярные 326
Критическое состояние (см Точка критическая)

Лиссажу фигуры 163
Линии тока 347

Манометр Мак-Леода 243
— Пирани—Галле 244
Масса 38
— зависимость от скорости 42
— молярная 182
— относительная молекул 182
— приведенная 124
Материальная точка 12
Маятник Максвелла 163
— математический 154
— пружинный 146, 153
— физический 153
— — приведенная длина 155
— Фуко 141
Мениск 311
Метод Эйлера в гидроаэродинамике 346
Метр 369
Модуль сдвига 92

Модуль упругости 90, 92
— Юнга 91
Моль 371
Момент внешних сил относительно оси 76
— главный (результирующий) системы сил относительно точки 75
— импульса (количества движения) материальной точки 74
— — — — тела относительно оси 76
— — — — — — точки 75
— инерции тела относительно оси 77
— — для тел простейшей формы 79
— — физический смысл 79
— — теорема о переносе осей инерции 78
— силы относительно точки 74
Монокристаллы 324
Мощность 60
— средняя 60

Наклеп 93
Напор скоростной (динамический) 351
Напряжение 90
— касательное 90
— нормальное 90
— трения 233
Нормальные условия 183
Ньютон 374

Обербека прибор 80
Объем критический 284, 287
— молярный 182
— удельный 182, 186
Опыты Борна и Бормана 220
— Гей-Люссака и Джоуля 197
— Джоуля и Томсона 289
— Кэвендиша 102
— Перрена 217
— Рихарца 103
— Штерна 214
— Фуко 141
— Эндрюса 284
Ось вращения 24
— — мгновенная 24, 81

Пар влажный 285
— насыщенный 317
— пересыщенный 287
— сухой насыщенный 285
Парадокс Даламбера—Эйлера 358
Параметры системы внешние 178
— — внутренние 178
— состояния 177
— термодинамические 177
Перемещения вектор 15
Переход фазовый 285
— — второго рода 345
— — первого рода 320
Период вращения тела 26
— колебаний (см Колебания)
Плавление 339
Плотность идеального газа 183
Пограничный слой 347
Показатель адиабаты 201
— политропы 202
Поле тяготения 106
— — градиент потенциала 113
— — и теория относительности 114
— — напряженность 107
— — однородное 107
— — потенциал 112
— — принцип суперпозиции 108
— — связь потенциала и напряженности 113
— — центральное 107
— — — сферически симметричное 107
— — энергия 112
Поликристаллы 325
Постоянная Больцмана 183
— газовая 182
— — удельная 182
— — универсальная 183
— Планка 229
— тяготения (гравитационная постоянная) 101
Поток жидкости (газа) 346
— — — потенциальный 352
Предел пропорциональности 93
— прочности 93
— текучести 93
Принцип независимости действия сил 40
— освобождаемости 36
— относительности механический Галилея 53
— суперпозиции полей тяготения 108
— эквивалентности 144
Прицельное расстояние 124
Пространство 11
Процесс термодинамический 179
— — адиабатический (адиабатный) 200
— — графическое изображение 193, 256
— — изобарический (изобарный) 197
— — изотермический 199
— — изохорический (изохорный) 195
— — квазистатический 179
— — компенсирующий 253, 265
— — круговой (цикл) 248
— — необратимый 252
— — обратимый 252
— — политропический (политропный) 202
— — равновесный 179
— — самопроизвольный 253

Процесс термодинамический «эквивалентный» необратимому 256

Работа 57, 192
Рабочее тело 249
Равновесие системы тел 69
— — — неустойчивое 69
— — — устойчивое 69
Радиус молекулярного действия 280
Размерности физических величин 371
Ракета-носитель 121
— составная (многоступенчатая) 123
Ракетный двигатель атомный 123
— — ионный 123
Рассеивающий центр 127
Рассеяние частиц 127
— — дифференциальное эффективное сечение 127
— — формула Резерфорда 128
— энергии 68
Реакции связей 36
Резонанс 171

Сверхтекучесть гелия 293
Свободное падение 105
Связи 36
Сдвиг абсолютный 91
— относительный 91
Секунда 369
Сжижение газов 291
— — детандеры 292
— — метод Дьюара—Линде 292
— — метод Пикте 292
Сила 34
— возвращающая 152
— вынуждающая (возмущающая) 167
— движущая 58
— измерение 34
— инерции Кориолисова (поворотная) 136
— — переносная 136
— — центробежная 138
— *линия действия* 34
— лобового сопротивления 358
— подъемная 358
— равнодействующая (результирующая) 35
— реактивная 49
— сопротивления 58
— — давления 359
— — трения 359
— тяжести 104
— упругая 63, 153
— центростремительная 40
Силы активные 36
— Ван-дер-Ваальса дисперсионные 278
— — индукционные 277
— — ориентационные 277
Силы Ван-дер-Ваальса взаимодействия молекул реального газа 27
— внешние 45
— внутренние 45
— диссипативные 89
— квазиупругие 152
— консервативные (потенциальные) 59
— неконсервативные 59
— трения 95
— центральные 114
Система отсчета 12
— — гелиоцентрическая 33
— — инерциальная 32
— — лабораторная 33
— — центра инерции 124
— сил, главный вектор 46
— — — момент 75
— тел диссипативная 68
— — *замкнутая (изолированная)* 49
— — консервативная 66
— термодинамическая 177
— — адиабатически изолированная 190
— — закрытая 190
— — замкнутая 190
— — изолированная в механическом отношении 189
— — открытая 190
— — простая 179
Скорость 16
— абсолютная 132
— космическая вторая 121
— — первая 120
— критическая 365
— максимальная истечения газа в вакуум 365
— мгновенная 16
— молекул газа наиболее вероятная 212
— — — средняя арифметическая 213
— — — — квадратичная 210
— относительная 133
— переносная 133
— радиальная 115
— секториальная (секторная) 116
— средняя (скалярная) 17
— — (векторная) 15
— трансверсальная 115
— угловая 25
— — связь с линейной 25
— характеристическая 122
Смачивание 311
Сопло Лаваля 365
Состояние невесомости 109
— термодинамической системы 177
— — — вырожденное 227
— — — двухфазное 285
— — — равновесное 177

Среда сплошная 346
Статика 11
Статистика квантовая 226
— — Бозе—Эйнштейна 226
— — Ферми—Дирака 226
Статистическая физика (основные положения) 225
Статистический метод 176
Струя 347
Сублимация 339
Сфера молекулярного действия 280

Текучесть жидкостей 305
Тело абсолютно твердое 12
— переменной массы 48
— свободное 36
Температура 177
— абсолютная термодинамическая 178, 211, 227
— абсолютный нуль 178
— инверсии 291
— кипения 320
— кристаллизации (плавления) 339, 342
— критическая 284, 287
— стоградусная (Цельсия) 178
— термодинамическая шкала 255
— торможения 364
— характеристическая Дебая 336
Теорема Карно 255
— о переносе осей инерции 78
— основная теории флуктуаций 268
— тепловая Нернста 336
«Тепловая смерть» Вселенной 266
Тепловое расширение твердых тел 326
Теплоемкость, зависимость от вида процесса 194
— идеальных газов, квантовая теория 229
— — — классическая теория 227
— — — уравнение Майера 198
— молярная (мольная) 195
— твердых тел 332
— — — квантовая теория 334
— — — закон Дюлонга и Пти 333
— тела 194
— удельная 195
Теплопроводность 231
— закон Фурье 234
— твердых тел 330
Теплота 188
— парообразования (испарения) 320, 344
— плавления 340
— приведенное количество 257
— фазового перехода 320
Термодинамика 177
Термодинамический метод 177
Техническая единица массы (т. е. м.) 370
Течение жидкости ламинарное 347
— — — переход в турбулентное 354
— — неустановившееся 347
— — турбулентное 347
— — установившееся (стационарное) 346
Точка критическая 284, 287
— тройная 344
— эвтектическая 343
Точки критические в гидроаэромеханике 359
Траектория точки 13
Трение верчения 98
— внешнее 96
— внутреннее (вязкость) 95, 231, 233, 304
— — закон Ньютона 233, 234
— гидродинамическое 96
— граничное 96
— качения 98
— — закон Кулона 99
— — коэффициент 99
— кинематическое 96
— скольжения 97
— — закон Амонтона—Кулона 97
— — — Дерягина двучленный 98
— — коэффициент 97
— — — истинный 98
— статическое 96
— — закон Амонтона—Кулона 96
— — коэффициент 96
— — угол трения 97
— — явление застоя 97
— сухое 96
Трубка тока 347
— Пито 351

Угол краевой 311
— кручения 92
— сдвига 91
— трения 97
Удар 51
— абсолютно неупругий 51
— — — рассеяние энергии 68
— — упругий 67
— прямой 51
— центральный 51
Удара линия 51
Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости 350
— — — сжимаемой жидкости 363
— Ван-дер-Ваальса 283
— Клапейрона 181
— Клапейрона—Клаузиуса 320
— Майера 198
— Менделеева—Клапейрона 183
— Мещерского 48

Уравнение неразрывности 348
— основное динамики материальной точки 40
— — кинетической теории газов 210
— Пуассона 201
— состояния термическое 179
— — калорическое 186
— Циолковского 122
Ускорение 18
— абсолютное 133
— кориолисово (поворотное) 134
— мгновенное 18
— нормальное (центростремительное) 20, 21
— относительное 134
— переносное 134
— свободного падения (силы тяжести) 105
— — — нормальное 105
— тангенциальное (касательное) 20
— угловое 26
— — связь с тангенциальным 27
Участок гидродинамической стабилизации 353

Фаза колебаний 149
— термодинамическая 285
Фазовый переход (см. Переход фазовый)
Флотация 316
Флуктуации 266
— и чувствительность измерительных приборов 268, 269
Флуктуация абсолютная 267
— квадратичная 267
— относительная 267
Формула барометрическая 216
— Бачинского 304
— Больцмана для энтропии 265
— Жуковского 361
— Лапласа 313
— Паскаля 215
— Планка 335
— Пуазейля 357
— размерности физической величины 371
— Резерфорда 128
— Торичелли 353
— Эйнштейна для броуновского движения 271

Химическая связь 278

Центр вращения 24
— инерции (масс) 44
— — закон движения 47
— качаний физического маятника 155
— подвеса гироскопа 82
— сил 107
Центр тяжести 104
Центры кристаллизации 342
— конденсации 287
— парообразования 319
Цикл 248
— Карно 249
— — термический к п д 251
— — необратимый, термический к. п. д. 257
— — обратный 251
— необратимый, термический к. п. д. 257
— обратимый, термический к. п д, 256
— обратный 248
— прямой 248
— — термический к. п. д 251
Циркуляция вектора вдоль замкнутого контура 111

Частота биений 160
— вращения 26
— колебаний 150
Число Авогадро 182
— Маха 360
— Рейнольдса 354, 360
— соударений молекул 219
— степеней свободы 222
— — — молекул идеального газа 223

Эвтектика 243
Эквивалент механический теплоты 189
— тепловой работы 189
Энергия 56
— активации 302
— внутренняя 186
— — идеального газа 187, 225
— — реального газа 288
— — твердого тела 332, 337
— диссипация (рассеяние) 68
— закон сохранения и превращения 65
— — — в механике 66
— кинетическая 60, 61
— — в поступательном движении 61
— — во вращательном движении 81
— — молекул идеального газа 224
— — — реального газа 288
— — частиц твердого тела 332 и сл.
— полная механическая 65
— потенциальная 62—64
— — материальной точки в поле тяготения 112
— — молекул реального газа 288
— тела, поднятого над землей 63
— — упруго деформированного 64, 94

Энергия тела упруго деформированного объемная плотность 94
— свободная 262
— — поверхностного слоя жидкости 309
— связанная 263
— формы передачи 187, 190
Энтропия 259
— идеального газа 259
— системы 259
— статистическое истолкование 265
Эрг 374
Эффект Джоуля—Томсона 289
— — — дифференциальный 291
— — — интегральный 290
— — — нулевой 290
— — — отрицательный 290
— — — положительный 290
— дробовой 269
— Магнуса 362

Явление застоя 97

Андрей Антонович Детлаф,
Борис Михайлович Яворский,
Лидия Бронславовна Милковска»

КУРС ФИЗИКИ

Механика. Основы молекулярной физнки и термодинамикн

Редактор Г. Е. Перковская
Художник А. В. Алексеев
Художественный редактор Н. В. Майкова
Технические редакторы Н. Н. Баранова, Р. С. Родичева
Корректор Г. А. Чечеткина

Сдано в набор 8/XII 1972 г. Подп. к печати 17/V 1973 г. Формат 60×90¹/₁₆. Объем 24 печ. л. Уч.-изд. л. 22,90. Изд. № ФМ—519. Тираж 100 000 экз. Зак. 818. Цена 79 коп.

План выпуска литературы для вузов и техникумов издательства «Высшая школа» на 1973 г. Позицня № 56.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Ярославский полиграфкомбннат «Союзполиграфпрома» прн Государственном комитете Совета Миннстров СССР по делам издательств, полиграфии и книжиой торговли. Ярославль, ул. Свободы, 97.