

А. А. ДЕТЛАФ, Б. М. ЯВОРСКИЙ,
Л. Б. МИЛКОВСКАЯ

КУРС ФИЗИКИ

(в трех томах)

Том II

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Издание четвертое,
переработанное

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1977

537

Д 38

УДК 537/538(075)

Рецензент — зав. кафедрой общей физики МИФИ
проф. И. В. Савельев.

Д 38 Детлаф А. А. и др.
Курс физики (в трех томах). Т. II. Электричество и магнетизм. Учеб. пособие для вузов. Изд. 4-е, перераб. М., «Высш. школа», 1977.

375 с. с ил.

Перед загл. авт.: А. А. Детлаф, Б. М. Яворский, Л. Б. Милковская.

Настоящая книга является переработанным изданием второго тома трехтомного учебного пособия по общей физике, которое широко используется как основное во многих вузах страны.

При подготовке четвертого издания авторы существенно переработали предыдущее издание с учетом опыта использования этого пособия в различных вузах. Было уточнено и расширено изложение многих вопросов электричества и магнетизма, которые вошли в данный том.

Д $\frac{20401-387}{001(01)-77}$ 39—77

537

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к четвертому изданию	7
Из предисловия ко второму изданию	7

Ч А С Т Ь III

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Г л а в а I. Электрические заряды. Закон Кулона	8
§ 1.1. Введение	8
§ 1.2. Закон Кулона	9
§ 1.3. Системы единиц электрических величин	12
Вопросы для повторения	14
Примеры решения задач	14
Г л а в а II. Напряженность электрического поля	15
§ 2.1. Электрическое поле. Напряженность поля	15
§ 2.2. Принцип суперпозиции электрических полей	16
§ 2.3. Графическое изображение электростатических полей	23
§ 2.4. Электрическое смещение. Теорема Остроградского—Гаусса	25
Вопросы для повторения	29
Примеры решения задач	29
Г л а в а III. Потенциал электростатического поля	31
§ 3.1. Работа, совершаемая при перемещении электрического заряда в электростатическом поле	31
§ 3.2. Потенциал электростатического поля	32
§ 3.3. Связь между потенциалом и напряженностью. Эквипотенциальные поверхности	36
§ 3.4. Вычисление напряженности и потенциала некоторых простейших электростатических полей	39
Вопросы для повторения	44
Примеры решения задач	44
Г л а в а IV. Проводники в электростатическом поле	46
§ 4.1. Распределение электрических зарядов на проводнике	46
§ 4.2. Электростатическая индукция	51
§ 4.3. Электростатические измерения	52
Вопросы для повторения	54
Примеры решения задач	54
Г л а в а V. Электрическая емкость	56
§ 5.1. Емкость уединенного проводника	56
§ 5.2. Взаимная емкость. Конденсаторы	58
§ 5.3. Соединения конденсаторов	63
§ 5.4. Типы электрометров	64
Вопросы для повторения	66
Примеры решения задач	66
Г л а в а VI. Диэлектрики в электрическом поле	68
§ 6.1. Дипольные моменты молекул диэлектрика	68
§ 6.2. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации	71

§ 6.3. Теорема Остроградского—Гаусса для поля в веществе, Связь векторов электрического смещения, напряженности и поляризации	76
§ 6.4. Сегнетоэлектрики	80
§ 6.5. Пьезоэлектрический эффект	82
Вопросы для повторения	85
Примеры решения задач	86
Глава VII. Энергия электрического поля	88
§ 7.1. Энергия заряженного проводника и энергия электрического поля	88
§ 7.2. Энергия поляризованного диэлектрика	91
Вопросы для повторения	93
Примеры решения задач	93

Ч А С Т Ь IV

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Глава VIII. Электронная теория электропроводности металлов	95
§ 8.1. Понятие об электрическом токе	95
§ 8.2. Сила и плотность тока	96
§ 8.3. Опытные доказательства электронной проводимости металлов	98
§ 8.4. Основы классической электронной теории электропроводности металлов	101
§ 8.5. Вывод законов Ома и Джоуля—Ленца в классической электронной теории	102
§ 8.6. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов	105
§ 8.7. Недостатки классической электронной теории проводимости металлов	106
Вопросы для повторения	108
Примеры решения задач	108
Глава IX. Законы постоянного тока	109
§ 9.1. Сторонние силы	109
§ 9.2. Закон Ома	110
§ 9.3. Закон Джоуля—Ленца	114
§ 9.4. Правила Кирхгофа	116
Вопросы для повторения	117
Примеры решения задач	117
Глава X. Контактная разность потенциалов. Термоэлектрические и эмиссионные явления	120
§ 10.1. Работа выхода электрона из металла. Контактная разность потенциалов	120
§ 10.2. Термоэлектрические явления и их применения	124
§ 10.3. Термоэлектронная эмиссия	126
§ 10.4. Понятие о других эмиссионных явлениях	130
Вопросы для повторения	131
Примеры решения задач	132
Глава XI. Электрический ток в жидкостях	133
§ 11.1. Законы электролиза Фарадея. Электролитическая диссоциация	133
§ 11.2. Атомность электричества	136
§ 11.3. Электролитическая проводимость жидкостей	137
Вопросы для повторения	140
Примеры решения задач	140
Глава XII. Электрический ток в газах	141
§ 12.1. Электропроводность газов	141
§ 12.2. Несамостоятельный газовый разряд	144
§ 12.3. Самостоятельный газовый разряд	146
§ 12.4. Тлеющий разряд	149

§ 12.5. Самостоятельный разряд при нормальном и больших давлениях	150
Вопросы для повторения	153
Примеры решения задач	154
Г л а в а XIII. Современные представления об электрических свойствах твердых тел	155
§ 13.1. Понятие о современной электронной теории проводимости металлов	155
§ 13.2. Понятие о зонной теории твердых тел	161
§ 13.3. Металлы и диэлектрики в зонной теории	164
§ 13.4. Собственная проводимость полупроводников	166
§ 13.5. Примесная проводимость полупроводников	169
§ 13.6. Выпрямляющее действие контакта металла с полупроводником	171
§ 13.7. Понятие о полупроводниковых диодах	174
§ 13.8. Термоэлектрические явления в полупроводниках	176
Вопросы для повторения	177

Ч А С Т Ь V

ЭЛЕКТРОМАГНИТИЗМ

Г л а в а XIV. Основные магнитные явления. Закон Ампера	179
§ 14.1. Магнитное поле	179
§ 14.2. Закон Ампера	185
Вопросы для повторения	188
Г л а в а XV. Магнитное поле постоянного электрического тока	189
§ 15.1. Закон Био—Савара—Лапласа	189
§ 15.2. Магнитное поле прямолинейного проводника с током	192
§ 15.3. Системы единиц электромагнитных величин	195
§ 15.4. Магнитное поле кругового тока	197
§ 15.5. Магнитное поле соленоида	200
§ 15.6. Магнитное поле движущегося электрического заряда	203
Вопросы для повторения	205
Примеры решения задач	205
Г л а в а XVI. Закон полного тока. Расчет магнитных цепей	208
§ 16.1. Закон полного тока	208
§ 16.2. Магнитный поток	213
§ 16.3. Законы магнитных цепей	215
Вопросы для повторения	222
Примеры решения задач	222
Г л а в а XVII. Действие магнитного поля на проводники с током	223
§ 17.1. Плоский замкнутый контур тока в магнитном поле	223
§ 17.2. Понятие о магнитоэлектрических и электродинамических измерительных приборах	227
§ 17.3. Взаимодействие соленоидов	231
§ 17.4. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле	232
Вопросы для повторения	235
Примеры решения задач	236
Г л а в а XVIII. Движение заряженных частиц в магнитном поле	238
§ 18.1. Сила Лоренца	238
§ 18.2. Явление Холла	241
§ 18.3. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле	243
§ 18.4. Экспериментальное определение удельного заряда частиц. Масс-спектрография	245
§ 18.5. Ускорители заряженных частиц	251
Вопросы для повторения	260
Примеры решения задач	260
Г л а в а XIX. Электромагнитная индукция	262
§ 19.1. Основной закон электромагнитной индукции	262
§ 19.2. Электрический ток в витке, движущемся в однородном магнитном поле	270

§ 19.3. Вихревые токи (токи Фуко)	274
§ 19.4. Явление самоиндукции	276
§ 19.5. Взаимная индукция. Трансформатор	283
§ 19.6. Энергия магнитного поля электрического тока	286
Вопросы для повторения	289
Примеры решения задач	290
Глава XX. Магнитные свойства вещества	291
§ 20.1. Магнитные моменты электронов и атомов	291
§ 20.2. Атом в магнитном поле	293
§ 20.3. Диамагнетики в однородном магнитном поле	296
§ 20.4. Парамагнитные вещества в однородном магнитном поле	297
§ 20.5. Магнитное поле в веществе	303
§ 20.6. Ферромагнетизм	307
§ 20.7. Понятие о природе ферромагнетизма	312
§ 20.8. Явление сверхпроводимости	315
Вопросы для повторения	320
Примеры решения задач	321
Глава XXI. Основы теории Максвелла	322
§ 21.1. Общая характеристика теории Максвелла	322
§ 21.2. Первое уравнение Максвелла. Бегатрон	323
§ 21.3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла	326
§ 21.4. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля	331
Вопросы для повторения	335
Примеры решения задач	335
Глава XXII. Электромагнитные колебания	337
§ 22.1. Колебательный контур	337
§ 22.2. Вынужденные электромагнитные колебания	342
§ 22.3. Электронные и полупроводниковые выпрямители и усилители	350
§ 22.4. Автоколебания	362
Вопросы для повторения	367
Примеры решения задач	368
Предметный указатель	370

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке к четвертому изданию книга подверглась значительной переработке по сравнению с предыдущим изданием, вышедшим в 1966 г. Изменения, уточнения и дополнения, основанные на опыте использования книги в различных вузах, были внесены практически во все главы книги. Переработка второго тома осуществлена А. А. Детлафом.

Авторы признательны проф. Савельеву И. В. за рецензирование рукописи и целый ряд ценных советов и замечаний, которые были учтены при окончательной доработке книги.

Авторы будут признательны за все замечания и советы, необходимые для дальнейшей работы над книгой, и просят направлять их на кафедру физики МЭИ по адресу: 115250, Москва, Е-250, Красноказарменная ул., д. 14.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второй том «Курса физики» предназначен для студентов высших технических учебных заведений и охватывает разделы «Электричество» и «Магнетизм» программы по физике для вузов. В книге используется Международная система единиц (СИ) и применяется соответствующая ей рационализованная форма записи уравнений. Везде, где это оказывалось возможным и доступным для студентов, авторы старались излагать современные представления о рассматриваемых явлениях. В конце каждой главы помещены вопросы для повторения и примеры решения задач.

Главы I—V, XII и XV написаны А. А. Детлафом и Л. Б. Милковской, главы VI, VIII, X, XX и XXI — Л. Б. Милковской и Б. М. Яворским, главы XI, XIV, XVI—XIX и XXII — А. А. Детлафом, главы VII, IX и XIII — Б. М. Яворским, примеры решения задач составлены А. А. Детлафом и Л. Б. Милковской.

Часть III

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Глава I

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ. ЗАКОН КУЛОНА

§ 1.1. Введение

1. **Электростатика** — раздел электричества, изучающий взаимодействие и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно выбранной для их исследования инерциальной системы отсчета. В природе существуют два рода электрических зарядов — положительные и отрицательные. Положительный заряд возникает, например, на стекле, натертом кожей, а отрицательный — на янтаре, натертом шерстью. Одноименно заряженные тела отталкиваются друг от друга, а разноименно заряженные — притягиваются¹. Таким образом, зная знак заряда одного из тел, легко определить знак заряда другого тела.

Знак заряда, появляющегося на теле при электризации трением, зависит не только от химического состава этого тела, но и от того, с каким другим телом оно при трении соприкасается. Кроме того, знаки зарядов, возникающих на трущихся телах, существенным образом зависят от состояния их поверхностей.

2. На основании ряда опытов, которые подробно рассмотрим дальше, было выяснено, что электрический заряд любого тела состоит из целого числа элементарных зарядов, равных $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Наименьшая по массе частица, имеющая отрицательный элементарный заряд, — электрон. Масса электрона равна $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг. Наименьшая устойчивая частица, имеющая положительный элементарный заряд, — протон². Масса протона равна $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Протоны и электроны входят в состав всех атомов и молекул.

3. Все тела делятся на проводники и диэлектрики. **Проводником** называют тело, в котором электрические заряды могут свободно перемещаться по всему его объему. **Диэлектрик** таким свойством не обладает — сообщаемые ему заряды остаются в тех же местах, в которые они были первоначально помещены. Проводниками являются все

¹ На этом явлении основано действие электроскопа — прибора, служащего для обнаружения электрических зарядов. Его устройство известно из курса физики средней школы

² Наименьшей по массе античастицей, имеющей положительный элементарный заряд, является **позитрон** — античастица электрона, равная ему по массе.

металлы, растворы кислот, солей и щелочей, расплавленные соли, раскаленные газы и др., а диэлектриками — янтарь, стекло, каучук, масла, сера, слюда, эбонит, газы при обычных условиях и др.

Вообще говоря, разделение тел на проводники и диэлектрики условно, так как способность тел хуже или лучше проводить электричество зависит от тех условий, в которых они находятся. Так, например, при высокой температуре стекло становится проводником. Кроме того, существует большая группа веществ, называемых **полупроводниками**, которые занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Современные воззрения на механизм проводимости твердых тел рассмотрены в гл. XIII.

4. При электризации тел трением всегда одновременно электризуются оба тела, причем одно из них получает положительный заряд, а другое — отрицательный. Положительный заряд первого тела всегда в точности равен отрицательному заряду второго тела, если до электризации оба тела не были заряжены. Этот результат служит экспериментальным подтверждением одного из фундаментальных законов природы — **закона сохранения электрического заряда**: *алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе.*

В любом нейтральном веществе имеются заряды обоих знаков и притом в равных количествах. В результате соприкосновения двух тел при трении часть зарядов переходит из одного тела в другое. Равенство суммы положительных и суммы отрицательных зарядов в каждом из этих тел нарушается, и они заряжаются разноименно. При электризации тела через влияние в нем нарушается равномерное распределение зарядов. Заряды перераспределяются таким образом, что в одной части тела возникает избыток положительных зарядов, а в другой — отрицательных. Если эти две части тела разъединить, то они оказываются заряженными разноименно.

В рассматриваемой системе могут образовываться новые заряженные частицы, например, вследствие явления электролитической диссоциации электролитов (см. § 11.1), ионизации газов (см. § 12.1) и т. д. Однако если система электрически изолирована, то суммарный заряд всех частиц, вновь появившихся в такой системе, всегда равен нулю.

§ 1.2. Закон Кулона

1. Основной закон взаимодействия электрических зарядов был найден Ш. Кулоном (1785) экспериментальным путем с помощью крутильных весов, устройство которых описано в § 6.1 первого тома (опыт Кэвендиша). Кулон установил, что сила взаимодействия F между двумя небольшими заряженными шариками обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и зависит от величины их зарядов q_1 и q_2 .

Никаких способов измерения величины электрических зарядов в то время еще не было. Однако это не помешало Кулону найти вид зависимости силы F от q_1 и q_2 . Он использовал следующий факт: если за-

заряженный проводящий шарик привести в соприкосновение с точно таким же незаряженным шариком, то заряд первого равномерно распределится между обоими шариками. Иными словами, заряд каждого из них будет вдвое меньше исходного. Точно так же можно уменьшить заряд шарика в четыре, восемь раз и т. д. Таким образом, не зная абсолютных значений зарядов q_1 и q_2 , их можно уменьшать в известное число раз.

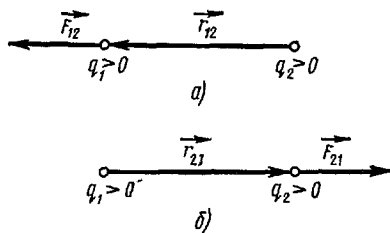


Рис. 1.1

Опыты, поставленные Кулоном, показали, что при постоянных r и q_1 сила взаимодействия F между заряженными шариками изменяется пропорционально величине заряда q_2 второго шарика, а при постоянных r и q_2 — пропорционально величине заряда q_1 первого шарика. Этим было доказано, что сила F пропорциональна произведению $q_1 q_2$.

Обобщив все эти результаты, Кулон нашел, что

$$F = \kappa_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

где κ_1 — коэффициент пропорциональности ($\kappa_1 > 0$).

2. Кулон экспериментально установил, что силы, действующие на заряды, являются **центральными**, т. е. они направлены вдоль прямой, соединяющей заряды. Для одноименных зарядов ($q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ или $q_1 < 0$ и $q_2 < 0$) произведение $q_1 q_2 > 0$. Поэтому в формуле (1.1) сила $F > 0$ соответствует случаю взаимного отталкивания одноименных зарядов, а сила $F < 0$ — случаю взаимного притяжения разноименных зарядов.

Закон Кулона (1.1) можно записать в векторной форме¹. Сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 , равна

$$\mathbf{F}_{12} = \kappa_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r}, \quad (1.2)$$

где \mathbf{r}_{12} — радиус-вектор, соединяющий заряды q_2 и q_1 (рис. 1.1, а), $r = |\mathbf{r}_{12}|$.

Соответственно сила \mathbf{F}_{21} , действующая на заряд q_2 , равна

$$\mathbf{F}_{21} = \kappa_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, соединяющий заряды q_1 и q_2 (рис. 1.1, б).

3. Закон Кулона в форме (1.1) или (1.2) и (1.3) справедлив только для взаимодействия точечных электрических зарядов, т. е. таких заряженных тел, линейными размерами которых можно пренебречь

¹ В тексте векторные величины обозначаются жирными буквами, а на рисунках — светлыми буквами со стрелками наверху.

по сравнению с расстоянием между ними. Кроме того, он выражает силу взаимодействия между неподвижными зарядами, т.е. это закон электростатический¹. Закон Кулона можно сформулировать следующим образом:

сила электростатического взаимодействия между двумя точечными электрическими зарядами пропорциональна произведению величин зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль соединяющей их прямой так, что одноименные заряды притягиваются, а разноименные отталкиваются.

Всякое заряженное тело можно рассматривать как совокупность точечных зарядов аналогично тому, как в механике всякое тело можно считать совокупностью материальных точек. Поэтому электростатическая сила, с которой одно заряженное тело действует на другое, равна векторной сумме сил, приложенных ко всем точечным зарядам второго тела со стороны каждого точечного заряда первого тела.

Расчеты показывают, что закон Кулона в форме (1.1) справедлив также и для взаимодействия заряженных тел шарообразной формы, если заряды q_1 и q_2 распределены равномерно по всему объему или по всей поверхности этих тел. При этом радиусы тел могут быть соизмеримы с расстоянием r между их центрами.

4. Кулон изучал взаимодействие между зарядами, находящимися в воздухе. Дальнейшие экспериментальные исследования показали, что при прочих равных условиях сила электростатического взаимодействия между двумя точечными зарядами зависит от свойств среды, в которой эти заряды находятся. Следовательно, коэффициент пропорциональности k_1 в законе Кулона (1.1) также зависит от свойств среды. Кроме того, коэффициент k_1 , как и всякий коэффициент пропорциональности в формуле, выражающей тот или иной физический закон, должен зависеть от выбора единиц величин, входящих в формулу (1.1). Поэтому k_1 удобно представить в виде отношения двух коэффициентов²:

$$k_1 = \kappa/\epsilon, \quad (1.4)$$

где κ — коэффициент, зависящий только от выбора системы единиц, ϵ — безразмерная величина, характеризующая электрические свойства среды и называемая **относительной диэлектрической проницаемостью среды**. Она не зависит от выбора системы единиц и считается равной единице для вакуума. Учитывая (1.4), закон Кулона (1.1) можно переписать в такой форме:

$$F = \kappa \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (1.5)$$

¹ В § 18.1 показано, что сила взаимодействия между двумя движущимися точечными зарядами отлична от кулоновской силы их электростатического взаимодействия.

² Здесь и в дальнейшем предполагается, что среда безгранична, однородна и изотропна, т.е. ее свойства одинаковы по всему объему и не зависят от направления.

Если заряды q_1 и q_2 находятся в вакууме ($\epsilon = 1$) на том же расстоянии r друг от друга, то сила их взаимодействия численно равна

$$F_0 = \kappa \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.5')$$

Из (1.5) и (1.5') следует

$$\epsilon = F_0/F. \quad (1.6)$$

5. Необходимо специально подчеркнуть, что соотношения (1.4), (1.5) и (1.6) отнюдь не универсальны в отличие от формулы (1.5'), выражающей закон Кулона для вакуума. Они верны, если точечные заряды q_1 и q_2 находятся в однородном, безграничном и изотропном газе, образном или жидком диэлектрике. В этом случае уменьшение силы F по сравнению с F_0 в ϵ раз обусловлено **явлением электрострикции**, т. е. деформации диэлектрика под влиянием заряженных тел. При деформации жидкие и газообразные диэлектрики, прилегая вплотную к заряженным телам, производят на них дополнительное механическое воздействие. В твердых диэлектриках заряженные тела (заряды q_1 и q_2) всегда располагаются внутри каких-то полостей и расчет сил F_{12} и F_{21} , действующих на заряды q_1 и q_2 , сильно осложняется. Оказывается, что при прочих равных условиях эти силы зависят от формы тех полостей, в которых находятся рассматриваемые заряды.

§ 1.3. Системы единиц электрических величин

1 Для электрических величин приняты две системы единиц: Международная система единиц (СИ) и абсолютная электростатическая система единиц СГСЭ.

В СИ использованы семь основных единиц и две дополнительные (см. табл. 1.1).

Таблица 1.1

Единица	Физическая величина	Обозначение единицы
<i>Основные</i>		
метр	длина	м
килограмм	масса	кг
секунда	время	с
моль	количество вещества	моль
кельвин	температура	К
ампер	сила электрического тока	А
кандела	сила света	кд
<i>Дополнительные</i>		
радиан	плоский угол	рад
стерадиан	телесный угол	ср

2. Определения первых пяти основных единиц СИ были приведены в первом томе курса. Единица силы света — кандела — используется только в фотометрии. Поэтому здесь мы на ней не останавливаемся. Единица силы тока — ампер — устанавливается на основе закона магнитного взаимодействия проводников с током. Ее определение будет дано в § 15.3.

За единицу электрического заряда в СИ, называемую **кулоном** (Кл), принимают количество электричества, проходящее через поперечное сечение проводника при токе в 1 А за время 1 с: $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$. В СИ коэффициент k в формуле (1.5) закона Кулона принимают равным

$$k = 1/4\pi\epsilon_0 \quad (1.7)$$

Величину ϵ_0 называют **электрической постоянной**. Учитывая (1.7), закон Кулона записывают в виде

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.8)$$

Такая форма записи закона Кулона и всех вытекающих из него законов электростатики общепринята в электро- и радиотехнике и называется **рационализованной**. В дальнейшем все изложение электростатики мы будем проводить, пользуясь только рационализованной формой уравнений. Произведение $\epsilon\epsilon_0$ часто называют **абсолютной диэлектрической проницаемостью** среды.

3 В основу системы единиц СГСЭ положены единицы системы СГС для механических величин: сантиметр (см), грамм массы (г) и секунда (с). Коэффициент k считается безразмерным и равным единице. Закон Кулона записывается в этой системе единиц в следующей (н е р а ц и о н а л и з о в а н н о й) форме:

$$F = q_1 q_2 / r^2. \quad (1.8')$$

Если взаимодействующие заряды равны друг другу ($q_1 = q_2 = q$) и находятся в вакууме ($\epsilon = 1$), то

$$F = q^2 / r^2.$$

Эта формула используется для определения единицы электрического заряда: если $F = 1$ дин и $r = 1$ см, то q равняется единице заряда. Следовательно, за единицу заряда в системе СГСЭ (СГСЭ_q) принимается такой точечный заряд, который действует в вакууме на равный ему точечный заряд, отстоящий от него на расстоянии в один сантиметр, с силой в одну дину. На основании опытов установлено, что

$$1 \text{ СГСЭ}_q = 1/(3 \cdot 10^9) \text{ Кл}.$$

4. Для определения числового значения электрической постоянной ϵ_0 в СИ вычислим силу взаимодействия двух одинаковых точечных зарядов $q_1 = q_2 = 1$ Кл, находящихся в вакууме на расстоянии $r = 1$ м друг от друга. По формуле (1.8') эта сила, выраженная в ньютонах, равна

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100^2} \text{ дин} = 9 \cdot 10^{14} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н.}$$

Следовательно, по формуле (1.8) имеем

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 = \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2 \text{ и } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2).$$

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте закон сохранения зарядов.
2. Напишите закон Кулона в нерационализованной и рационализованной формах.

3. Как влияет диэлектрическая среда на взаимодействие помещенных в нее двух точечных зарядов?

4. Что такое электрическая постоянная и чему она равна в СИ?

Примеры решения задач

Задача 1.1. Два маленьких шарика массой по 0,005 г каждый висят на шелковых нитях длиной 6 см, закрепленных в одной точке. Когда шарикам сообщили одинаковые по величине и знаку заряды q , нити разошлись на угол 60° . Определить величину заряда.

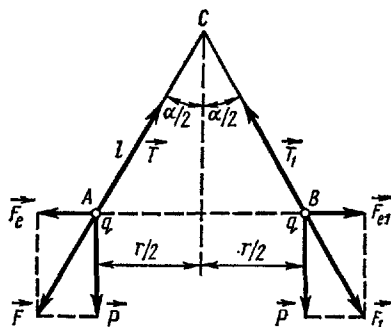


Рис. 1.2

Дано:

$$m = 5 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

$$l = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\epsilon = 1 \text{ (воздух)}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$q = ?$$

Решение. Шарик А находится в равновесии, если равнодействующая F его силы тяжести $P = mg$ и электрической силы F_e , действующей на него со стороны заряда шарика В, уравновешивается силой реакции T нити (рис. 1.2). Следовательно, сила F должна быть направлена вдоль нити, а для этого необходимо, как видно из рис. 1.2, чтобы

$$\text{tg}(\alpha/2) = F_e/mg. \quad (a)$$

Заряды шариков можно считать точечными. По закону Кулона (1.8) для взаимодействия точечных зарядов имеем

$$F_e = q^2/4\pi\epsilon_0 r^2, \quad (6)$$

где $r = 2l \sin(\alpha/2)$. Решая совместно (a) и (6), получим:

$$\text{tg}(\alpha/2) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon \cdot 4l^2 \sin^2(\alpha/2) mg},$$

$$q = 4l \sin(\alpha/2) \sqrt{\pi\epsilon_0 \epsilon mg \text{tg}(\alpha/2)}.$$

Производим вычисления в СИ:

$$\begin{aligned} q &= 4l \sin(\alpha/2) \sqrt{\pi\epsilon_0 \epsilon mg \text{tg}(\alpha/2)} = \\ &= 4 \cdot 6 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \sqrt{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8 \cdot 0,577} \text{ Кл} = \\ &= 3,4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} = 3,4 \text{ нКл}. \end{aligned}$$

Глава II

НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ 2.1. Электрическое поле. Напряженность поля

1. Кулоновское взаимодействие между неподвижными электрически заряженными частицами или телами осуществляется посредством создаваемого ими **электростатического поля**. Оно представляет собой стационарное, т. е. не изменяющееся с течением времени, **электрическое поле неподвижных электрических зарядов**. Это поле является частным случаем **электромагнитного поля**, посредством которого осуществляется взаимодействие между электрически заряженными частицами, движущимися в общем случае произвольным образом относительно системы отсчета.

Характерное свойство электрического поля, отличающее его от других физических полей, состоит в том, что оно действует как на движущиеся, так и на неподвижные заряды (заряженные частицы и тела). Поэтому существование электрического поля можно обнаружить по его действию на неподвижные заряды.

В развитии физики большую роль сыграла борьба двух концепций — дальнего действия и ближнего действия. В теории дальнего действия предполагалось, что все электрические явления сводятся к мгновенному взаимодействию зарядов независимо от расстояния между ними. С точки зрения теории ближнего действия все электрические явления сводятся к изменениям полей зарядов, причем предполагается, что эти изменения распространяются в пространстве с конечной скоростью. При изучении электростатических полей обе концепции приводят к одинаковым результатам: построенные на них теории одинаково хорошо согласуются с опытными данными. Однако изучение явлений, обусловленных движением зарядов, показало несостоятельность теории дальнего действия, которая теперь представляет лишь исторический интерес.

2. Количественной характеристикой силового действия электрического поля на заряженные частицы и тела служит векторная величина E , называемая **напряженностью электрического поля**. Она равна отношению силы F_0 , действующей со стороны поля на точечный «пробный» электрический заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля, к величине q_0 этого заряда:

$$E = F_0/q_0. \quad (2.1)$$

Понятие «пробный заряд» означает, что заряд q_0 не только сам не участвует в создании электрического поля, напряженность которого с его помощью определяется, но и столь мал, что своим присутствием не вызывает перераспределения в пространстве (например, в проводнике) зарядов, создающих исследуемое поле, т.е. тем самым не искажает этого поля.

Сила F , действующая со стороны электрического поля на произ-

вольный по величине («непробный») точечный заряд q , помещенный в это поле, выражается формулой, аналогичной (2.1):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (2.1')$$

Однако здесь в отличие от (2.1) \mathbf{E} — напряженность в точке нахождения заряда q для поля, и с к а ж е н н о г о этим зарядом, т.е. в общем случае отличного от поля, которое было до внесения в него заряда q .

3 За единицу напряженности принимается напряженность в такой точке электрического поля, в которой на пробный заряд, равный единице заряда, действует сила, равная единице силы. Единица напряженности электрического поля в Международной системе единиц (СИ)

$$1 \text{ СИ}_E = 1 \text{ Н/Кл},$$

а в системе СГСЭ

$$1 \text{ СГСЭ}_E = 1 \text{ дин/СГСЭ}_q.$$

Так как $1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$, $1 \text{ СГСЭ}_q = 1/(3 \cdot 10^9) \text{ Кл}$, то $1 \text{ СГСЭ}_E = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/Кл}$.

4 Найдем выражение для напряженности поля точечного электрического заряда q . Полагая в законе Кулона (1.8) $q_1 = q$, $q_2 = q_0$ и учитывая, что сила \mathbf{F}_0 , действующая на пробный заряд q_0 , равна

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0q}{\epsilon r^3} \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий заряды q и q_0 , по формуле (2.1) получим

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^3} \mathbf{r}. \quad (2.2)$$

Из формулы (2.2) следует, что векторы напряженности электростатического поля точечного заряда q во всех точках поля направлены радиально от заряда, если он положителен ($q > 0$), и к заряду, если он отрицателен ($q < 0$).

Проекция E_r вектора напряженности \mathbf{E} этого поля на направление радиуса-вектора пропорциональна величине заряда q и обратно пропорциональна произведению относительной диэлектрической проницаемости ϵ среды на квадрат расстояния r от рассматриваемой точки поля до заряда:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \quad (2.2')$$

§ 2.2. Принцип суперпозиции электрических полей

1. Основная задача электростатики заключается в следующем: по заданному распределению в пространстве и величине источников поля — электрических зарядов — найти абсолютное значение и направление вектора напряженности \mathbf{E} в каждой точке поля.

Пусть поле создано системой неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n . Экспериментально было показано, что результирующая сила F , действующая на пробный заряд q_0 в любой точке рассматриваемого поля, равна векторной сумме сил F_i , приложенных к нему со стороны каждого из зарядов q_i :

$$F = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (2.3)$$

Из (2.1) следует, что $F = q_0 E$ и $F_i = q_0 E_i$, где E — напряженность результирующего поля, а E_i — поля, создаваемого одним зарядом q_i . Подставляя эти выражения в (2.3) и сокращая на q_0 , получим

$$E = \sum_{i=1}^n E_i. \quad (2.4)$$

Напряженность электрического поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из этих зарядов в отдельности. Иными словами, результирующее поле можно найти простым наложением (суперпозицией) полей отдельных зарядов.

Полученный результат часто называют принципом независимости действия электрических полей или **принципом суперпозиции полей**.

2. Обозначим через r_i радиус-вектор, проведенный из точечного заряда q_i в исследуемую точку поля. Тогда по формуле (2.2)

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} r_i,$$

а по формуле (2.4)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^3} r_i. \quad (2.5)$$

Всякое заряженное тело можно разбить на столь малые части, что каждая из них будет представлять собой точечный заряд. Поэтому формула (2.5) пригодна для расчета любых электростатических полей в однородной изотропной среде, заполняющей все поле.

3. Рассмотрим наиболее типичные случаи распределения этих зарядов в пространстве. Неподвижные электрические заряды располагаются в пространстве либо **дискретно** — в отдельных точках, либо **непрерывно** — вдоль какой-либо линии, на поверхности какого-либо тела или, наконец, в некотором объеме.

Если заряды непрерывно распределены вдоль некоторой линии, поверхности или объема, то вводят понятия соответственно линейной, поверхностной и объемной плотностей зарядов. **Линейная плотность электрических зарядов**

$$\tau = dq/dl, \quad (2.6)$$

где dq — заряд малого участка линии длиной dl . **Поверхностная плотность зарядов**

$$\sigma = dq/dS, \quad (2.7)$$

где dq — заряд малого участка поверхности площадью dS . **Объемная плотность зарядов**

$$\rho = dq/dV, \quad (2.8)$$

где dq — заряд малого элемента объема dV .

В случае непрерывного распределения зарядов вместо суммы в правой части формулы (2.5) берется интеграл.

4. В качестве первого примера полей, создаваемых системой зарядов, рассмотрим поле электрического диполя.

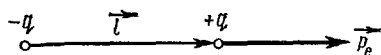


Рис. 2.1

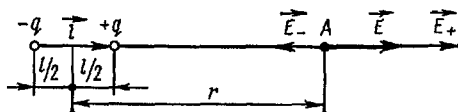


Рис. 2.2

Электрическим диполем называют систему двух равных по величине и противоположных по знаку электрических зарядов $+q$ и $-q$ ($q > 0$), расстояние l между которыми мало по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек поля. Оказывается, что молекулы диэлектриков по своим электрическим свойствам подобны диполям (см. гл. VI). Поэтому изучение поля диполя представляет большой практический интерес.

Введем некоторые определения. **Плечом диполя** называется вектор l , направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между ними (рис. 2.1). Произведение положительного заряда диполя q на плечо l называется **электрическим моментом диполя** p_e :

$$p_e = ql. \quad (2.9)$$

Вектор p_e совпадает по направлению с плечом диполя l .

5. В соответствии с принципом суперпозиции полей напряженность в произвольной точке поля диполя $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$, где \mathbf{E}_+ и \mathbf{E}_- — напряженности полей зарядов $+q$ и $-q$.

Если точка A расположена на оси диполя (рис. 2.2), то векторы \mathbf{E}_+ и \mathbf{E}_- направлены также вдоль этой оси, но в противоположные стороны. По формуле (2.2),

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r_1^3} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r_2^3} \mathbf{r}_2,$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — радиусы-векторы, проведенные в точку A из концов диполя $+q$ и $-q$, причем $r_1 = r - l/2$ и $r_2 = r + l/2$; \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 совпадают по направлению с вектором l , поэтому

$$r_1 = \frac{1}{l} (r - l/2) \text{ и } r_2 = \frac{1}{l} (r + l/2).$$

Следовательно,

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon(r - l/2)^2} \frac{1}{l}; \quad E_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon(r + l/2)^2} \frac{1}{l},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\epsilon l} \left[\frac{1}{(r - l/2)^2} - \frac{1}{(r + l/2)^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2rq l}{\epsilon (r^2 - l^2/4)^2}.$$

Учитывая, что $ql = p_e$, получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e r}{\epsilon (r^2 - l^2/4)^2}.$$

Если $r \gg l$, то членом $l^2/4$ по сравнению с r^2 можно пренебречь. Тогда

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{\epsilon r^3}; \quad (2.10)$$

численное значение напряженности

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_e}{\epsilon r^3}. \quad (2.10')$$

6. Найдем напряженность поля диполя в точке B , расположенной на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины O (рис. 2.3). Точка B равноудалена от зарядов $+q$ и $-q$. Поэтому

$$|E_+| = |E_-| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon (r^2 + l^2/4)}.$$

Треугольники BMN и BCD — равнобедренные, причем углы при вершинах M и N $\triangle BMN$ и при вершинах B и C $\triangle BCD$ одинаковы и равны α . Так как стороны BM и BD , а также BN и DC попарно параллельны, то стороны MN и BC параллельны, т.е. вектор E противоположен по направлению электрическому моменту диполя p_e :

$$E = -E \frac{p_e}{p_e} = -\frac{E}{ql} p_e. \quad (2.11)$$

Из рис. 2.3 видно, что числовое значение напряженности поля в точке B равно

$$E = |E_+| \cos \alpha + |E_-| \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\epsilon (r^2 + l^2/4)} \cos \alpha.$$

Из $\triangle BMO$ имеем $\cos \alpha = l/2 \sqrt{r^2 + l^2/4}$. Поэтому

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{\epsilon (r^2 + l^2/4)^{3/2}}.$$

Пренебрегая величиной $l^2/4$ по сравнению с r^2 , получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{\epsilon r^3}. \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что вектор напряженности поля в точке B равен

$$\mathbf{E} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{\epsilon r^3}. \quad (2.12')$$

7. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть точка C лежит на расстоянии r от середины O диполя, причем радиус-вектор \mathbf{r} образует с осью диполя угол φ (рис. 2.4). Соединим пунктиром заряды $-q$

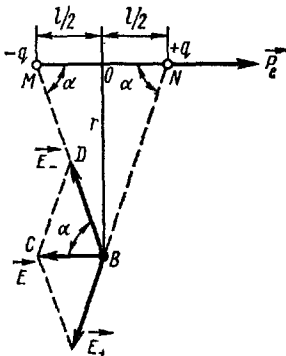


Рис. 2.3

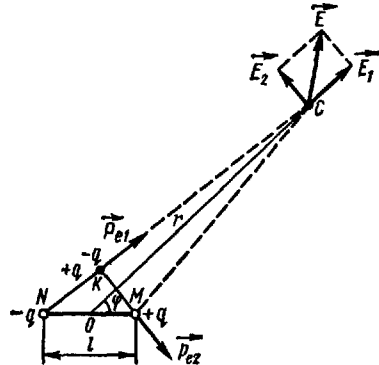


Рис. 2.4

и $+q$ с точкой C и опустим на прямую NC перпендикуляр из точки M . Поместим в основании K этого перпендикуляра два точечных заряда $+q$ и $-q$. Расположенные в одной и той же точке равные по величине и противоположные по знаку заряды $+q$ и $-q$ полностью нейтрализуют друг друга и не искажают поля диполя. Четыре заряда, находящиеся в точках M , N и K , можно рассматривать как два диполя (NK и MK). Ввиду малости расстояния l по сравнению с r угол $CNM \approx \varphi$. Поэтому электрические моменты первого и второго диполей соответственно равны:

$$p_{e1} = ql \cos \varphi = p_e \cos \varphi, \quad p_{e2} = ql \sin \varphi = p_e \sin \varphi. \quad (2.13)$$

Для первого диполя точка C лежит на его оси, а для второго — на перпендикуляре, восставленном в средней точке оси. По формулам (2.10) и (2.12') напряженности \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 полей, создаваемых в точке C каждым из диполей, равны

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_{e1}}{\epsilon r^3}, \quad \mathbf{E}_2 = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_{e2}}{\epsilon r^3}.$$

Векторы \mathbf{p}_{e1} и \mathbf{p}_{e2} и соответственно \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 взаимно перпендикулярны. Поэтому численное значение напряженности поля диполя MN в точке C

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon r^3} \sqrt{(2p_{e1})^2 + (p_{e2})^2}.$$

Подставив сюда значения p_{e1} и p_{e2} из (2.13), получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_e}{er^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}. \quad (2.14)$$

Формула (2.14) охватывает все возможные случаи расположения точки C . При $\varphi = 0$ она совпадает с (2.10'), а при $\varphi = \pi/2$ — с (2.12).

8. Из формулы (2.14) следует, что напряженность электрического поля диполя зависит от направления радиуса-вектора r относительно оси диполя и убывает пропорционально кубу расстояния r

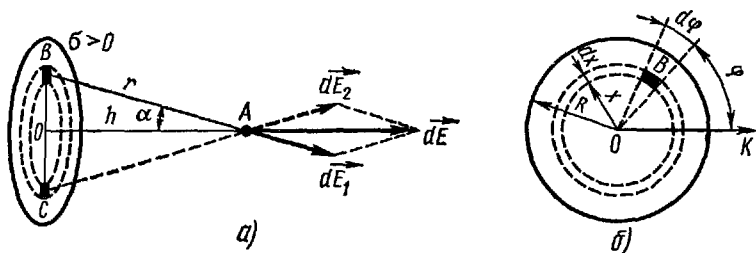


Рис. 2.5

от его центра, т.е. значительно быстрее, чем в случае поля одного точечного заряда. В связи с этим сила взаимодействия двух диполей оказывается обратно пропорциональной четвертой степени расстояния между ними. Еще быстрее убывает с расстоянием напряженность поля квадруполь — системы двух одинаковых и антипараллельных диполей, заряды которых расположены в вершинах небольшого квадрата. Для квадруполь $E \sim r^{-4}$, а сила взаимодействия двух квадруполей $F \sim r^{-6}$. Чем больше число пар разноименных зарядов и чем симметричнее они расположены в теле, тем быстрее убывает напряженность поля в зависимости от расстояния.

9. В качестве примера электростатического поля системы, образованной непрерывно распределенными зарядами, рассмотрим поле круглой пластинки радиуса R , заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ ($\sigma > 0$). Найдем напряженность поля в произвольной точке A прямой, перпендикулярной плоскости пластинки и проходящей через ее центр O (рис. 2.5, а).

Выделим на пластине бесконечно малый элемент поверхности B (рис. 2.5, б), ограниченный окружностями радиусов x и $x + dx$, центры которых лежат в точке O , и двумя радиусами, образующими с полярной осью OK углы φ и $\varphi + d\varphi$. Площадь dS элемента B и его заряд dq равны соответственно:

$$dS = x d\varphi dx, \quad dq = \sigma dS = \sigma x d\varphi dx.$$

Заряд элемента поверхности B можно считать точечным. Напряженность поля dE_1 , создаваемая им в точке A , направлена вдоль прямой BA и по формуле (2.2') численно равна

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\epsilon r^2} = \frac{\sigma x dx d\varphi}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2},$$

где r — расстояние от точки A до элемента B пластины. Из рис. 2.5, a видно, что $r^2 = h^2 + x^2$; здесь $h = OA$ — расстояние от точки A до центра пластины.

Элемент пластины C , симметричный элементу B относительно точки O , создает в точке A поле напряженностью dE_2 . Так как элементы B и C имеют одинаковые заряды dq и равноудалены от точки A , то $dE_2 = dE_1$, причем векторы dE_1 и dE_2 симметричны относительно прямой OA . Поэтому вектор dE напряженности результирующего поля ($dE = dE_1 + dE_2$) направлен вдоль OA и численно равен

$$dE = 2dE_1 \cos \alpha,$$

где $\cos \alpha = h/r$. Таким образом,

$$dE = \frac{2\sigma h x dx d\varphi}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^3} = \frac{\sigma h}{2\pi\epsilon_0 \epsilon} \frac{x dx d\varphi}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по всем элементам заряженной пластинки, т.е. по x от O до R и по φ от O до π , находим численное значение E напряженности поля пластинки в точке A :

$$E = \frac{\sigma h}{2\pi\epsilon_0 \epsilon} \int_0^R \frac{x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\varphi = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \epsilon} \int_0^R \frac{x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Введем замену переменных, обозначив $h^2 + x^2 = z^2$, тогда

$$E = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \epsilon} \int_h^{\sqrt{h^2+R^2}} \frac{z dz}{z^3} = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \epsilon} \int_h^{\sqrt{h^2+R^2}} d\left(\frac{1}{z}\right).$$

После интегрирования получаем

$$E = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0 \epsilon} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/h^2}} \right]. \quad (2.15)$$

Так как все векторы dE перпендикулярны плоскости пластины, то и результирующий вектор E имеет то же направление.

10. Рассмотрим два предельных случая этого поля. Если $R \rightarrow \infty$, то пластина превращается в бесконечную равномерно заряженную плоскость, напряженность поля которой

$$E = \sigma/2\epsilon_0 \epsilon. \quad (2.16)$$

Из (2.16) следует, что напряженность поля равномерно заряженной плоскости не зависит от положения точки A ($E = \text{const}$). Во всех точках поля векторы E направлены перпендикулярно плоскости (от нее, если $\sigma > 0$, и к ней, если $\sigma < 0$). Поэтому

$$E = \text{const}. \quad (2.17)$$

Электростатическое поле, удовлетворяющее условию (2.17), называется **однородным**.

Пусть теперь $h \gg R$. Это значит, что линейные размеры заряженной пластины во много раз меньше расстояния до исследуемой точки поля. Из формулы бинома Ньютона, имеющей вид

$$(a + b)^m = a^m + \frac{m}{1!} \cdot a^{m-1} \cdot b + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot a^{m-2} \cdot b^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot a^{m-3} \cdot b^3 + \dots,$$

следует, что

$$\left(1 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{h^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{h^2}\right)^2 - \dots$$

Так как третий и последующие члены этого ряда весьма малы по сравнению со вторым, то ими можно пренебречь, и тогда

$$\left(1 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{h^2}.$$

Подставив это выражение в (2.15), получим

$$E = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 \varepsilon h^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h^2}, \quad (2.18)$$

где $q = \sigma R^2$ — общий заряд пластины.

Формула (2.18) совпадает с (2.2') для напряженности поля точечного заряда, если вместо h подставить r . Таким образом, вдали от заряженной пластины ее поле подобно полю точечного заряда, равного σR^2 .

§ 2.3. Графическое изображение электростатических полей

1. Графическое изображение электростатического поля с помощью векторов напряженности \mathbf{E} в различных точках поля очень неудобно. Векторы напряженности при этом накладываются друг на друга, и получается весьма запутанная картина. Более нагляден предложенный М. Фарадеем метод изображения электростатических полей с помощью силовых линий (линий напряженности). Силовыми линиями называются кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности поля (рис. 2.6). Силовым линиям приписывается направление такое же, как вектора напряженности. Например, на рис. 2.6 силовая линия направлена слева направо. Считается, что силовые линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных. Линии напряженности не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор \mathbf{E} имеет лишь одно направление.

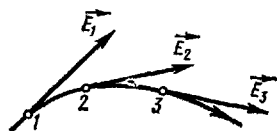


Рис. 2.6

2. На рис. 2.7—2.10 изображены известные из курса средней школы картины плоских сечений электростатических полей: положительного и отрицательного точечных зарядов, а также двух одинаковых и двух разноименных точечных зарядов. В первых двух случаях (рис. 2.7, 2.8) поля обладают центральной симметрией. В случае поля двух оди-

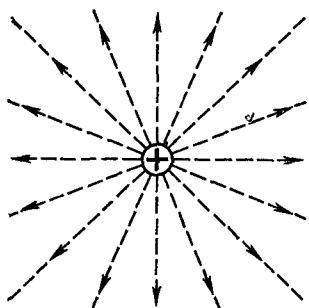


Рис. 2.7

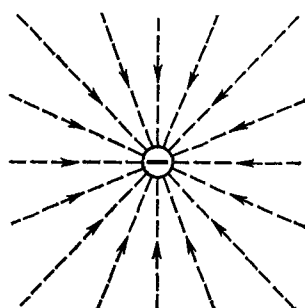


Рис. 2.8

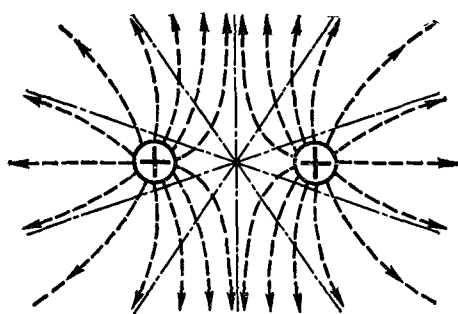


Рис. 2.9

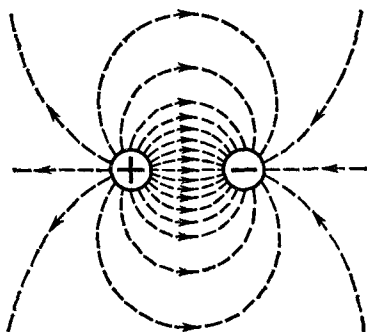


Рис. 2.10

наковых одноименных зарядов (рис. 2.9) силовые линии искривлены. Однако вдали от зарядов эти линии асимптотически приближаются к прямым, проведенным из точки, находящейся посередине между зарядами. Поэтому вдали от зарядов создаваемое ими поле подобно полю точечного заряда $2q$, находящегося посередине. Из приведенных рисунков видно, что силовые линии могут уходить в бесконечность.

3. Распределение силовых линий электростатического поля можно показать на опыте. Для этого силуэт заряженного тела, вырезанный из металлической фольги, наклеивают на дно стеклянного сосуда, в который наливают жидкий диэлектрик, например скипидар или касторовое масло, а затем в эту жидкость насыпают манную крупу. Крупинки образуют в электрическом поле цепочки, распределенные вдоль силовых линий¹.

¹ Причины перемещения и поворота крупинки в электростатическом поле объяснены в § 6.1.

4. Силовые линии не следует отождествлять с траекториями движения в электростатическом поле очень легких заряженных частиц. Траектория частицы обладает тем свойством, что в каждой ее точке по касательной к ней направлена с к о р о с т ь частицы. По касательной же к силовой линии направлены с и л а, действующая со стороны поля на частицу, а следовательно, и у с к о р е н и е частицы.

§ 2.4. Электрическое смещение. Теорема Остроградского—Гаусса

1. Напряженность электрического поля, как видно из рассмотренных в § 2.1 и 2.2 полей точечного заряда, диполя, равномерно заряженной круглой пластинки и плоскости, зависит от свойств среды: в однородной изотропной среде напряженность поля E всегда обратно пропорциональна ϵ . Поэтому для характеристики электрического поля наряду с напряженностью E удобно ввести еще одну векторную величину D , называемую **электрическим смещением** или **электрической индукцией**. Для поля в электрически изотропной среде связь D и E в СИ имеет вид¹

$$D = \epsilon \epsilon_0 E \quad (2.19)$$

В СИ электрическое смещение выражается в кулонах на квадратный метр (Кл/м²).

В системе СГСЭ

$$D = \epsilon E. \quad (2.20)$$

Из (2.19) и (2.2) следует, что для поля точечного заряда q

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.21)$$

а проекция D на направление радиуса-вектора \mathbf{r}

$$D_r = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}. \quad (2.21')$$

2. Из приведенных в § 2.2 примеров видно, что решение основной задачи электростатики методом наложения полей сопряжено со значительными математическими трудностями. Другой метод расчета электростатических полей основан на использовании теоремы Остроградского—Гаусса. Прежде чем перейти к формулировке и доказательству этой теоремы, введем понятие о потоке вектора электрического смещения сквозь поверхность.

3. Рассмотрим сначала однородное электрическое поле, во всех точках которого вектор D одинаков. Проведем в этом поле произвольную плоскость MN (рис. 2.11), нормаль \mathbf{n} к которой

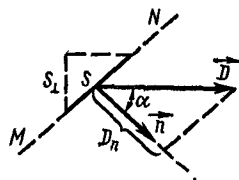


Рис. 2.11

¹ Общее определение вектора D , справедливое как для изотропных, так и для анизотропных сред, дано в § 6.3.

составляет с вектором \mathbf{D} угол α . Выделим на плоскости участок площадью S . Тогда поток вектора электрического смещения, или просто **поток смещения** Φ_e (**поток электрической индукции**), сквозь плоскую поверхность S по определению равен

$$\Phi_e = DS \cos \alpha = S \mathbf{Dn}, \quad (2.22)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к поверхности S .

Формулу (2.22) можно записать еще и в таком виде:

$$\Phi_e = D_n S = DS_{\perp}, \quad (2.22')$$

где $D_n = D \cos \alpha$ — проекция вектора \mathbf{D} на направление вектора \mathbf{n} , а $S_{\perp} = S \cos \alpha$ — площадь проекции поверхности S на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{D} . Из (2.22') следует, что в СИ поток смещения выражается в кулонах.

4. В общем случае поверхность S может иметь любую форму, а векторы \mathbf{D} в различных ее точках могут отличаться как по модулю, так и по направлению. Однако в пределах каждого достаточно малого элемента dS поверхности ее можно считать плоской, а поле — однородным. Поэтому элементарный поток смещения сквозь участок поверхности, имеющий площадь dS ,

$$d\Phi_e = D dS \cos(\widehat{\mathbf{D}}, \mathbf{n}) = D_n dS = D dS_{\perp}, \text{ или } d\Phi_e = \mathbf{D} d\mathbf{S}, \quad (2.23)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к площадке dS , а $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ — вектор площадки dS . Полный поток смещения Φ_e сквозь поверхность S найдем в результате суммирования (интегрирования) всех элементарных потоков:

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_S D_n dS = \int_S D dS_{\perp}. \quad (2.23')$$

При вычислении этого интеграла все векторы \mathbf{n} нормалей к площадкам dS нужно направлять в одну и ту же сторону по отношению к поверхности S . Так, например, в случае замкнутой поверхности S все векторы \mathbf{n} должны быть либо внутренними нормальями, либо внешними (в дальнейшем будем пользоваться только последними).

Формулы (2.23) и (2.23') являются наиболее общим определением притока потока смещения.

5. Пусть электрическое поле создается одним точечным зарядом q . Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность S , охватывающую этот заряд (рис. 2.12). Из (2.23) и (2.21') следует, что поток смещения сквозь элемент dS этой поверхности равен

$$d\Phi_e = D dS_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} dS_{\perp}, \quad (2.24)$$

где r — расстояние от элемента dS до заряда q . Вектор электрического смещения \mathbf{D} направлен радиально [см. формулу (2.21)]. Поэтому dS_{\perp} — площадь проекции элемента поверхности dS на плоскость, перпендику-

лярную радиусу-вектору r . С точностью до бесконечно малых высшего порядка малости можно считать, что dS_{\perp} равно площади dS' проекции элемента dS на сферу радиуса r , в центре которой находится заряд q (dS_{\perp} и dS' на рис. 2.12 не показаны). Поэтому

$$d\Phi_e = \frac{q}{4\pi} \frac{dS'}{r^2}. \quad (2.24')$$

Напомним, что телесным углом называется часть пространства, ограниченная конической поверхностью (рис. 2.13). Мерой телесного

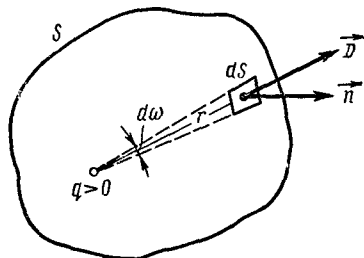


Рис. 2.12

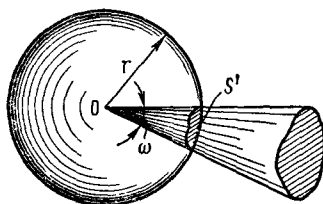


Рис. 2.13

угла ω является отношение площади S' , вырезаемой конической поверхностью на сфере произвольного радиуса r с центром в вершине конуса O , к квадрату радиуса r :

$$\omega = S'/r^2. \quad (2.25)$$

Если $S' = r^2$, то $\omega = 1$ ср. Так как полная площадь поверхности сферы равна $4\pi r^2$, то развернутый телесный угол, опирающийся на всю сферу и охватывающий собой все пространство, равен 4π ср. Таким образом, выражение dS'/r^2 , входящее в (2.24'), представляет собой телесный угол $d\omega$, под которым элемент dS замкнутой поверхности S виден из точечного заряда q :

$$d\Phi_e = qd\omega/4\pi. \quad (2.26)$$

Интегрируя это выражение по всей поверхности S , т. е. по ω от 0 до 4π , находим выражение для потока смещения электрического поля точечного заряда q сквозь произвольную замкнутую поверхность S , охватывающую этот заряд:

$$\Phi_e = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi} d\omega = q. \quad (2.27)$$

6. Если замкнутая поверхность S не охватывает заряда q (рис. 2.14), то касатель-

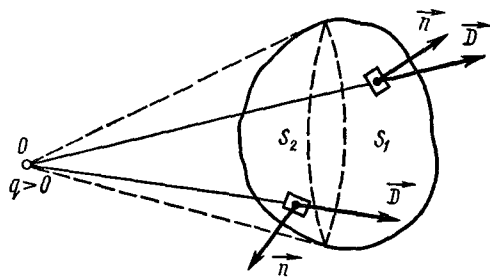


Рис. 2.14

ная к ней коническая поверхность с вершиной в точке O , где находится заряд q , разбивает поверхность S на две части: S_1 и S_2 . Поток смещения сквозь поверхность S равен алгебраической сумме потоков Φ_{e1} и Φ_{e2} соответственно сквозь поверхности S_1 и S_2 :

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2}.$$

Поверхности S_1 и S_2 видны из точки O под одним и тем же телесным углом ω . Поэтому Φ_{e1} и Φ_{e2} равны друг другу по абсолютному значению:

$$|\Phi_{e1}| = |\Phi_{e2}| = \omega |q| / 4\pi.$$

Однако если для всех элементов поверхности S_1 углы между векторами \mathbf{D} и внешними нормальными \mathbf{n} острые (при $q > 0$), то для всех элементов поверхности S_2 эти углы тупые¹. Следовательно,

$$\Phi_{e1} = \int_{S_1} D \cos(\widehat{\mathbf{D}, \mathbf{n}}) dS > 0, \quad \Phi_{e2} = \int_{S_2} D \cos(\widehat{\mathbf{D}, \mathbf{n}}) dS < 0,$$

$$\Phi_e = \Phi_{e1} + \Phi_{e2} = 0.$$

Таким образом, создаваемый точечным зарядом q поток смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность, не охватывающую этот заряд, равен нулю.

7. Формулу (2.27) легко обобщить для поля, создаваемого произвольной системой точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_m . В самом деле, по принципу суперпозиции электрическое смещение \mathbf{D} результирующего поля равно векторной сумме электрических смещений полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \dots + \mathbf{D}_m = \sum_{i=1}^m \mathbf{D}_i.$$

Поэтому проекция вектора \mathbf{D} на направление нормали к площадке dS равна алгебраической сумме проекций всех векторов \mathbf{D}_i на это направление:

$$D_n = \sum_{i=1}^m D_{in}.$$

Поток смещения результирующего поля сквозь произвольную замкнутую поверхность S , охватывающую заряды q_1, q_2, \dots, q_k и не охватывающую заряды $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_m$, равен

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = \oint_S \sum_{i=1}^m D_{in} dS = \sum_{i=1}^m \oint_S D_{in} dS = \sum_{i=1}^m \Phi_{ei}.$$

По формуле (2.27), $\Phi_{ei} = q_i$, если $i \leq k$, и $\Phi_e = 0$, если $i > k$.

¹ Для простоты предполагается, что поверхность S выпуклая.

Поэтому

$$\Phi_e = \oint_{\Sigma} D_n dS = \sum_{i=1}^k q_i. \quad (2.28)$$

Поток смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Полученный результат называется теоремой Остроградского—Гаусса. Всякое заряженное тело можно рассматривать как систему точечных зарядов. Поэтому теорема Остроградского—Гаусса справедлива для электрических полей, создаваемых любыми заряженными телами.

8. Для электрического поля в вакууме напряженность $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0$. Поэтому из (2.28) следует, что поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы зарядов, охватываемых этой поверхностью, к электрической постоянной:

$$\oint_{\Sigma} E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^k q_i. \quad (2.28')$$

Это еще одно выражение теоремы Остроградского—Гаусса применительно к электростатическому полю в вакууме.

Вопросы для повторения

1. Какие поля называются электростатическими?
2. Что такое напряженность электрического поля?
3. В чем состоит принцип суперпозиции электрических полей?
4. Чему равна напряженность поля точечного заряда, диполя, равномерно заряженной плоскости?
5. В чем состоит различие между силовыми линиями и траекториями зарядов в электрическом поле?
6. Сформулируйте и докажите теорему Остроградского—Гаусса.

Примеры решения задач

Задача 2.1. Весьма тонкое положительно заряженное кольцо радиуса 0,1 м лежит в плоскости ХZ. Найти напряженность электрического поля и электрическое смещение в точке, находящейся на оси кольца на расстоянии 0,15 м от его центра, если заряд кольца 5 нКл равномерно распределен по его окружности.

Дано:

$$\begin{aligned} R &= 0,1 \text{ м} \\ h &= 0,15 \text{ м} \\ q &= 5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \\ \epsilon &= 1 \end{aligned}$$

$E = ? \quad D = ?$

Решение. Разделим кольцо L на одинаковые малые участки dl . Заряд каждого участка, равный dq , можно считать точечным.

Совместим начало координат O с центром кольца (рис. 3.15). Тогда ось кольца совпадет с осью OY . Напряженность электрического поля $d\mathbf{E}$, создаваемого в точке A на оси кольца зарядом dq , по формуле (2.2') численно равна

$$dE = dq/4\pi\epsilon_0 r^2,$$

где $r^2 = R^2 + h^2$. Вектор $d\mathbf{E}$ составляет с осью OY угол α .

Заряженное кольцо создает в точке A поле, напряженность \mathbf{E} которого согласно принципу суперпозиции равна векторной сумме напряженностей $d\mathbf{E}$

полей, создаваемых всеми точечными зарядами dq , на которые разбивается заряд кольца, т. е.

$$\mathbf{E} = \oint_L d\mathbf{E},$$

где знак \oint_L означает, что интегрирование (суммирование) векторов $d\mathbf{E}$ производится по всем элементам заряженного кольца L . Вектор $d\mathbf{E}$ можно разложить

на две составляющие: $d\mathbf{E}_1$, направленную вдоль оси OY , и $d\mathbf{E}_2$, параллельную плоскости XZ : $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$. Следовательно,

$$\mathbf{E} = \oint_L d\mathbf{E}_1 + \oint_L d\mathbf{E}_2.$$

Для каждой пары зарядов dq и $dq' = dq$, расположенных симметрично относительно центра кольца, векторы $d\mathbf{E}_2$ и $d\mathbf{E}_2'$ в точке A равны по модулю и противоположны по направлению ($d\mathbf{E}_2 = -d\mathbf{E}_2'$). Поэтому векторная сумма $\oint_L d\mathbf{E}_2 = 0$. Составляющие $d\mathbf{E}_1$ для всех элементов кольца имеют одинаковые направления. Таким образом, $\mathbf{E} = \oint_L d\mathbf{E}_1 = \oint_L dE \cos \alpha$.

Подставив в эту формулу выражение для dE , получим

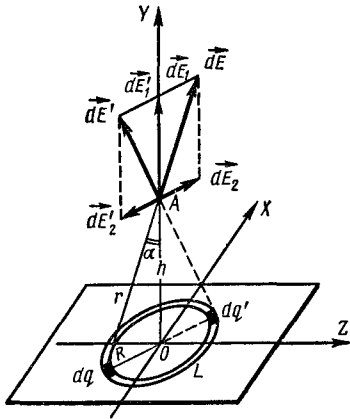


Рис. 2.15

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_0^q \frac{dq}{r^2} \cos \alpha.$$

Так как $r^2 = R^2 + h^2$ и $\cos \alpha = (h/r) = h/\sqrt{R^2 + h^2}$, то

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^q dq = \frac{h}{4\pi\epsilon_0\epsilon (R^2 + h^2)^{3/2}} q.$$

Электрическое смещение в точке A найдем по формуле (2.19):

$$D = \epsilon_0\epsilon E = \frac{h}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} q.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$E = \frac{h}{4\pi\epsilon_0\epsilon (R^2 + h^2)^{3/2}} q = \frac{0,15 \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (0,1^2 + 0,15^2)^{3/2}} \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 1150 \text{ Н/Кл},$$

$$D = \frac{h}{4\pi (R^2 + h^2)^{3/2}} q = \frac{0,15}{4 \cdot 3,14 \cdot (0,1^2 + 0,15^2)^{3/2}} \cdot 5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 1,02 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2 = 10,2 \text{ нКл/м}^2.$$

Глава III

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ 3.1. Работа, совершаемая при перемещении электрического заряда в электростатическом поле

1. Как было показано в § 6.2 первого тома, работа, совершаемая при перемещении какого-либо тела в гравитационном поле, не зависит от формы пути, по которому происходит перемещение, а зависит только от начального и конечного положений этого тела. Иначе говоря, силы всемирного тяготения — консервативные силы, работа которых связана с изменением потенциальной энергии перемещаемого тела.

Формальное сходство закона всемирного тяготения Ньютона ($F = \gamma m_1 m_2 / r^2$) и закона Кулона ($F = \kappa_1 q_1 q_2 / r^2$) дает основания предполагать, что электростатические силы также должны быть консервативными. Проверим справедливость этого предположения.

Сила \mathbf{F} , действующая на точечный электрический заряд q_0 , находящийся в электростатическом поле напряженностью \mathbf{E} , равна $q_0 \mathbf{E}$. Работа, совершаемая силой \mathbf{F} при перемещении заряда q_0 на отрезок $d\mathbf{l}$,

$$dA = F dl \cos(\widehat{\mathbf{F}, d\mathbf{l}}) = q_0 E \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) dl, \quad (3.1)$$

где $(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}})$ — угол между направлениями векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$.

В случае конечного перемещения заряда q_0 из точки a в точку b работа сил поля

$$A = q_0 \int_a^b E dl \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) = q_0 \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{E} d\mathbf{l}$ — скалярное произведение векторов \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$.

2. Рассмотрим частный случай, когда поле создано точечным зарядом $q > 0$ (рис. 3.1). Тогда

$$dl \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) = dr; \quad E = q / 4\pi\epsilon_0 r^2.$$

и работа, совершаемая при перемещении заряда q_0 из точки a в точку b ,

$$A = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (3.3)$$

где r_1 и r_2 — расстояния точек a и b от заряда q .

В формуле (3.3) работа электрических сил отталкивания одноименных зарядов q и q_0 будет положительной, если заряды удаляются один от другого, и отрицательной, если они сближаются. Работа электрических сил притяжения разноименных зарядов q

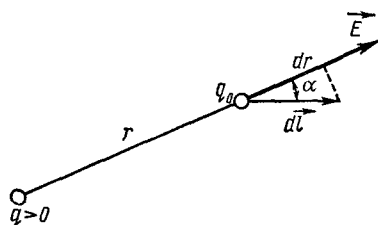


Рис. 3.1

и q_0 будет положительной при сближении зарядов и отрицательной при их удалении друг от друга.

Из (3.3) видно, что работа, совершаемая при перемещении заряда q_0 в поле точечного заряда q , не зависит от формы пути, по которому движется заряд q_0 . Она зависит только от начального и конечного положений заряда q_0 , диэлектрической проницаемости среды и величины зарядов q и q_0 .

3. Если заряд q_0 перемещается в поле, созданном системой точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , то на него действует сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$. Работа A равнодействующей силы равна алгебраической сумме работ составляющих сил (см. т. I, § 3.1). Поэтому

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right), \quad (3.3')$$

где r_{i1} и r_{i2} — расстояния от заряда q_i до точек a и b , т. е. до начального и конечного положений заряда q_0 .

Полная работа A , как и каждая из работ A_1, A_2, \dots, A_n , зависит от начального и конечного положений заряда q_0 , но не зависит от формы его пути. Следовательно, *электростатические силы являются консервативными*.

4. Работа, которую совершают силы электростатического поля, перемещая единичный положительный заряд по замкнутому пути L , численно равна

$$\oint_L \mathbf{E} dl \cos(\mathbf{E}, \widehat{dl}) = \oint_L \mathbf{E} dl$$

Этот интеграл называется **циркуляцией напряженности** вдоль замкнутого контура L .

В случае замкнутого пути начальная и конечная его точки совпадают. Поэтому, как следует из формулы (3.3'), работа, совершаемая при перемещении заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути, равна нулю. Иначе говоря, циркуляция напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура равна нулю, т. е.

$$\oint_L \mathbf{E} dl \cos(\mathbf{E}, \widehat{dl}) = 0. \quad (3.4)$$

Силовое поле, напряженность \mathbf{E} которого удовлетворяет условию (3.4), называется **потенциальным**. Таким образом, электростатическое поле является потенциальным.

§ 3.2. Потенциал электростатического поля

1. На свободный заряд q_0 , находящийся в электростатическом поле, действует сила $q_0 \mathbf{E}$, сообщающая ему ускорение.

Работа A , совершаемая силами электростатического поля при перенесении заряда q_0 , зависит только от величины этого заряда и его на-

чального и конечного положений в поле, поэтому она, очевидно, равна убыли потенциальной энергии¹ W этого заряда:

$$dA = -dW, \quad (3.5)$$

$$A = \int_a^b q_0 E dl \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) = -\Delta W = W_1 - W_2, \quad (3.6)$$

где W_1 и W_2 — значения потенциальной энергии заряда q_0 в точках a и b поля.

Полученный результат формально является следствием того, что на основании (3.4) подынтегральное выражение в (3.6) представляет собой полный дифференциал. Полезно заметить, что в том случае, если бы работа A зависела от формы пути переноса заряда q_0 из точки a в точку b , т. е. если бы не выполнялось условие (3.4), то равенство (3.6) не имело бы смысла. На этом вопросе мы подробно останавливались в § 10.3 и 10.4 первого тома курса в связи с рассмотрением работы, совершаемой термодинамической системой.

2. Пусть точечный заряд q_0 движется в электростатическом поле точечного заряда q . Изменение потенциальной энергии заряда q_0 при бесконечно малом его перемещении равно

$$dW = -dA = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr. \quad (3.7)$$

При конечном перемещении заряда q_0 из точки a в точку b , которые находятся на расстояниях r_1 и r_2 от заряда q , изменение потенциальной энергии заряда q_0

$$\Delta W = W_2 - W_1 = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} \quad (3.8)$$

3. В общем случае поле создается не одним точечным зарядом, а системой из n зарядов (q_1, q_2, \dots, q_n), произвольно расположенных в пространстве. При перемещении заряда q_0 в поле электростатические силы совершают работу, равную алгебраической сумме работ, произведенных силами, действующими на q_0 со стороны каждого из зарядов q_1, q_2, \dots, q_n . Из (3.6) и (3.3') следует, что изменение потенциальной энергии заряда q_0 при перемещении его из одной точки поля в другую

$$\Delta W = q_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{i2}} - \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_{i1}} \right), \quad (3.9)$$

где r_{i1} и r_{i2} — расстояния между зарядами q_i и q_0 до и после перемещения последнего.

4. Формулы (3.8) и (3.9) позволяют найти лишь изменение потенциальной энергии заряда q_0 , но не ее абсолютное значение. Для

¹ Часто величину W называют взаимной потенциальной энергией заряда q_0 и зарядов, создающих поле.

определения абсолютного значения потенциальной энергии, которой обладает электрический заряд в данной точке электростатического поля, необходимо условиться о том, в какой точке поля считать его потенциальную энергию равной нулю. Интегрируя уравнение (3.7), получаем для энергии заряда q_0 , помещенного в поле точечного заряда q на расстоянии r от последнего, выражение

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} + C \quad (3.10)$$

где C — произвольная постоянная.

Условимся, как это обычно делают, считать потенциальную энергию заряда q_0 равной нулю на бесконечно большом расстоянии от q . Подставив в уравнение (3.10) $r = \infty$ и $W = 0$, получим, что $C = 0$. Поэтому потенциальная энергия заряда q_0 , находящегося на расстоянии r от точечного заряда q ,

$$W = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (3.11)$$

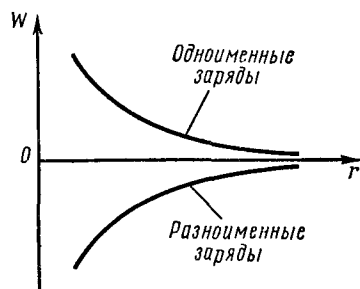


Рис. 3.2

Если заряды q_0 и q одноименные, то потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна и возрастает по мере сближения этих зарядов. Наоборот, в случае взаимного притяжения разноименных

зарядов потенциальная энергия $W < 0$ и возрастает до нуля при удалении одного из зарядов в бесконечность. Зависимость потенциальной энергии двух точечных зарядов от расстояния между ними показана на рис. 3.2.

Потенциальная энергия W заряда q_0 , находящегося в поле точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , равна сумме его потенциальных энергий W_i в полях, создаваемых каждым из зарядов в отдельности¹:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i}, \quad (3.12)$$

где r_i — расстояние между зарядами q_i и q_0 .

5. Из формул (3.11) и (3.12) видно, что отношение потенциальной энергии W заряда q_0 к его величине не зависит от q_0 и поэтому может служить энергетической характеристикой электростатического поля. Отношение W/q_0 обозначается через φ и называется **потенциалом электростатического поля**:

$$\varphi = \frac{W}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_i}, \quad (3.13)$$

¹ Это следует из того, что каждый из зарядов q_1, q_2, \dots, q_n действует на заряд q_0 так же, как если бы не было других зарядов.

где r_i — расстояние от точки поля, обладающей потенциалом φ , до заряда q_i .

Из определения потенциала следует, что он численно равен потенциальной энергии единичного пробного положительного точечного заряда, помещенного в рассматриваемую точку электростатического поля.

Потенциал поля, создаваемого одним точечным зарядом q , равен [см. формулу (3.11)]

$$\varphi = q/(4\pi\epsilon_0\epsilon r). \quad (3.13')$$

6. Работу, совершаемую электрическими силами при перемещении заряда q_0 из точки a в точку b электростатического поля, можно, пользуясь формулами (3.6) и (3.13), выразить через разность потенциалов φ_1 и φ_2 в точках a и b :

$$A = W_1 - W_2 = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.14)$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении точечного заряда, равна произведению этого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках пути.

7. Если точка b лежит в бесконечности, то потенциальная энергия заряда q_0 в этой точке равна нулю ($W_2 = 0$), а следовательно, и потенциал поля в точке b равен нулю ($\varphi_2 = 0$). Тогда по формуле (3.14) работа перемещения заряда q_0 из точки a в бесконечность $A_\infty = W_1 = = q_0\varphi_1$, откуда $\varphi_1 = A_\infty/q_0$. Так как a — произвольная точка поля, то, отбрасывая индекс у φ , получим

$$\varphi = A_\infty/q_0. \quad (3.15)$$

Поэтому потенциал данной точки электростатического поля можно определить как физическую величину, численно равную работе, совершаемой электростатическими силами при перемещении единичного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность.

Очевидно, что эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электростатического поля) при переносе единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

На практике часто бывает удобнее считать равным нулю потенциал Земли. Это допустимо, так как при любых расчетах важно знать разность потенциалов между какими-либо точками электростатического поля, а не абсолютные значения потенциалов в этих точках. Во всех случаях, когда говорят о потенциале в данной точке поля, подразумевают разность потенциалов между этой точкой и другой точкой, потенциал которой условились считать равным нулю.

8. Единицу разности потенциалов можно определить из выражения (3.14):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = A/q_0.$$

Разность потенциалов между двумя точками электростатического поля равна единице разности потенциалов, если при перемещении

между этими точками единичного заряда силы поля совершают работу, равную единице.

В СИ за единицу разности потенциалов принимают **вольт (В)**. Разность потенциалов между двумя точками поля равна одному вольту, если для перемещения между ними заряда в один кулон нужно совершить работу в один джоуль:

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл.}$$

В системе единиц СГСЭ за единицу разности потенциалов принимается разность потенциалов между такими двумя точками поля, для перемещения между которыми единицы СГСЭ заряда нужно совершить работу в 1 эрг:

$$1 \text{ СГСЭ}_\varphi = 1 \text{ эрг/СГСЭ}_q.$$

Так как $1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ эрг}$ и $1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ}_q$, то

$$1 \text{ В} = (1/300) \text{ СГСЭ}_\varphi.$$

В атомной физике и электронике очень часто употребляют единицу работы и энергии, называемую **электронвольт (эВ)**. Один электронвольт равен работе, совершаемой при перемещении заряда, равного заряду электрона, между двумя точками поля с разностью потенциалов один вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

9. Из сопоставления (3.13) и (3.13') видно, что при наложении электростатических полей потенциал в какой-либо точке результирующего поля равен алгебраической сумме потенциалов в этой точке каждого из слагаемых полей. В этом заключается существенное преимущество скалярной характеристики поля (потенциала) перед его векторной характеристикой — напряженностью, которая равна геометрической сумме напряженностей слагаемых полей. Напряженность поля является его силовой характеристикой, а потенциал — энергетической. Между ними существует тесная взаимосвязь, которая рассматривается в следующем параграфе.

§ 3.3. Связь между потенциалом и напряженностью. Эквипотенциальные поверхности

1. Из формул (3.1) и (3.5) следует, что элементарная работа, совершаемая при бесконечно малом перемещении заряда q_0 в электростатическом поле,

$$dA = q_0 E \cos(\widehat{\mathbf{E}, d\mathbf{l}}) dl = -dW.$$

Так как заряд $q_0 = \text{const}$, то из (3.13) имеем

$$dW = q_0 d\varphi,$$

откуда

$$E \cos(\mathbf{E}, \widehat{dl}) dl = -d\varphi, \text{ или } E dl = -d\varphi. \quad (3.16)$$

Но $dl \cos(\mathbf{E}, \widehat{dl})$ есть элемент dl_0 длины силовой линии (см. рис. 3.1). Поэтому

$$E = -d\varphi/dl_0, \quad (3.17)$$

где $d\varphi/dl_0$ — быстрота изменения потенциала вдоль силовой линии, численно равная изменению потенциала, приходящемуся на единицу ее длины.

На основании соотношения (3.17) за единицу напряженности электрического поля в СИ принимают вольт на метр: $1 \text{ В/м} = 1 \text{ Н/Кл}$.

2. Покажем, что изменение потенциала, приходящееся на единицу длины, максимально в направлении силовой линии. В самом деле, как видно из рис. 3.3,

$$E \cos(\mathbf{E}, \widehat{dl}) = E_l,$$

где E_l — проекция вектора \mathbf{E} напряженности электростатического поля на направление перемещения dl . Поэтому формулу (3.16) можно переписать в таком виде:

$$E_l = -d\varphi/dl. \quad (3.18)$$

Так как $\cos(\mathbf{E}, \widehat{dl}) \leq 1$, то $E_l \leq E$ и $|d\varphi/dl| \leq |d\varphi/dl_0|$. Следовательно, E_l и $|d\varphi/dl|$ достигают максимальных значений при $\cos(\mathbf{E}, \widehat{dl}) = 1$, т.е. если dl направлен по касательной к силовой линии.

Таким образом, вблизи данной точки электростатического поля потенциал изменяется наиболее быстро в направлении силовой линии. Знак минус в уравнениях (3.17) и (3.18) указывает на то, что вектор \mathbf{E} напряженности поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала. Из (3.17) следует, что напряженность поля численно равна быстроте изменения потенциала на единицу длины вдоль силовой линии.

В векторном анализе **градиентом скалярной величины** a , являющейся функцией координат, называется вектор $\text{grad } a$, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания этой величины и численно равный быстроте ее изменения на единицу длины в этом направлении. Из сказанного ясно, что напряженность и потенциал электростатического поля связаны следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (3.19)$$

Напряженность в какой-либо точке электростатического поля равна градиенту потенциала в этой точке, взятому с обратным знаком.

В общем случае потенциал φ — функция всех трех декартовых координат рассматриваемой точки поля, причем

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

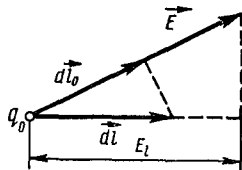


Рис. 3.3

Поэтому проекции вектора напряженности электростатического поля на оси координат связаны с потенциалом поля соотношениями:

$$E_x = -\partial\varphi/\partial x; \quad E_y = -\partial\varphi/\partial y; \quad E_z = -\partial\varphi/\partial z. \quad (3.19')$$

3. Если заряд перемещается в направлении $d\mathbf{l}$, перпендикулярном силовой линии, т. е. перпендикулярно вектору \mathbf{E} , то $\cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0$, $E_{\parallel} = 0$ и, согласно (3.18), $d\varphi/dl = 0$ или $\varphi = \text{const}$. Следовательно,

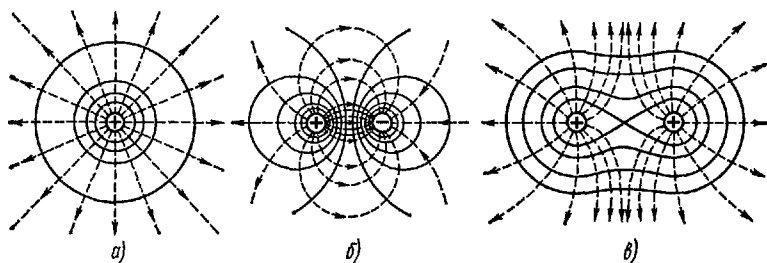


Рис. 3.4

во всех точках кривой, ортогональной к силовым линиям, потенциал одинаков.

Геометрическое место точек с одинаковым потенциалом называется **эквипотенциальной поверхностью**. Так как потенциал постоянен лишь вдоль кривых, ортогональных к силовым линиям поля, то и эквипотенциальные поверхности должны быть везде ортогональны к силовым линиям.

Очевидно, что работа, совершаемая при перемещении электрического заряда по одной и той же эквипотенциальной поверхности, равна нулю.

4. Электростатическое поле можно изобразить графически при помощи не только силовых линий, но и эквипотенциальных поверхностей. Вокруг каждой системы зарядов можно провести бесконечное множество эквипотенциальных поверхностей. Обычно их проводят таким образом, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы.

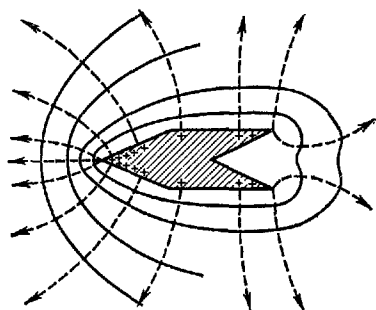


Рис. 3.5

Зная расположение силовых линий электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности и, наоборот, по известному расположению эквипотенциальных поверхностей можно в каждой точке поля определить абсолютное значение и направление напряженности поля.

На рис. 3.4 изображены плоские сечения простейших электростатических полей: положительного точечного заряда (а), диполя (б) и

двух одноименных точечных зарядов (e). Силовые линии проведены пунктиром, а сечения эквипотенциальных поверхностей — сплошными линиями. На рис. 3.5 показан вид силовых линий и эквипотенциальных поверхностей поля заряженного металлического цилиндра, имеющего конический выступ на одном конце и коническую впадину на другом.

§ 3.4. Вычисление напряженности и потенциала некоторых простейших электростатических полей

1. В § 2.2 были приведены примеры вычисления напряженности поля системы электрических зарядов способом суперпозиции полей. Теперь будет рассмотрен другой метод решения этой задачи, основанный на применении теоремы Остроградского—Гаусса. Установленная в § 3.3 связь между напряженностью поля и потенциалом [см. формулу (3.17)] позволяет по известной напряженности поля определить разность потенциалов между любыми двумя точками этого поля.

2. Электростатическое поле плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma > 0$ (рис. 3.6). Из условия симметрии следует, что силовые линии параллельны друг другу и перпендикулярны заряженной плоскости P . Для определения напряженности поля в какой-либо точке A проведем через эту точку и симметричную ей точку B две плоскости, параллельные P . Построим бесконечно узкий прямой цилиндр, основания dS которого проходят через точки A и B , а образующая параллельна силовым линиям поля (рис. 3.6). Согласно теореме Остроградского—Гаусса [см. уравнение (2.28)], поток смещения сквозь замкнутую поверхность цилиндра равен заряду σdS , охватываемому этой поверхностью. С другой стороны, поток смещения сквозь эту поверхность равен сумме потоков сквозь основания цилиндра, так как поток сквозь боковую поверхность равен нулю ($D_n = 0$). Векторы электрического смещения \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 в точках A и B численно равны друг другу и противоположны по направлению:

$$\mathbf{D}_1 = -\mathbf{D}_2, \quad D_1 = D_2 = D.$$

Векторы \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 совпадают с внешними нормальными к основаниям цилиндра. Поэтому поток смещения сквозь замкнутую поверхность цилиндра равен $2DdS = \sigma dS$, откуда электрическое смещение

$$D = \sigma/2 \quad (3.20)$$

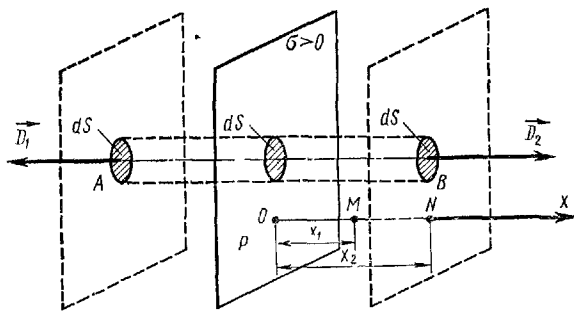


Рис. 3.6

Так как по формуле (2.19) $D = \epsilon_0 \epsilon E$, то напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \sigma / 2\epsilon_0 \epsilon. \quad (3.20')$$

Эта формула была получена ранее иным, более сложным путем (см. § 2.2).

Найдем разность потенциалов между двумя точками M и N этого поля, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости (рис. 3.6). Заменив в формуле (3.17) dl_0 элементом длины dx , имеем $d\varphi = -Edx$. Но $E = \sigma / 2\epsilon_0 \epsilon$, поэтому

$$d\varphi = -\sigma dx / 2\epsilon_0 \epsilon.$$

Проинтегрировав последнее выражение по x от $x = x_1$ до $x = x_2$ и обозначив потенциалы в точках M и N через φ_1 и φ_2 , получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sigma (x_1 - x_2) / 2\epsilon_0 \epsilon. \quad (3.21)$$

3. Электростатическое поле между двумя параллельными плоскостями, заряженными разно-

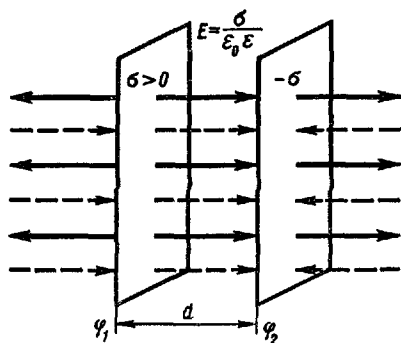


Рис 3.7

именно с численно равными поверхностными плотностями $\sigma > 0$ и $-\sigma$. На рис. 3.7 изображены симметричные участки разноименно заряженных плоскостей. Силовые линии поля положительно заряженной плоскости показаны сплошными прямыми, отрицательно заряженной — пунктиром. Из условия симметрии следует, что силовые линии параллельны друг другу и перпендикулярны плоскостям.

Как видно из рис 3.7, слева от положительно заряженной плоскости электрические поля взаимно уничтожаются, так как их векторы напряженности E_1 и E_2 численно равны и направлены в противоположные стороны. Между плоскостями оба вектора E_1 и E_2 имеют одинаковые направления, и поэтому здесь результирующая напряженность E численно равна сумме E_1 и E_2 :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (3.22)$$

Вектор электрического смещения D численно равен

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = \sigma. \quad (3.23)$$

Проинтегрировав уравнение $d\varphi = -Edx$ по x от $x = 0$ до $x = d$, где d — расстояние между плоскостями, найдем разность потенциалов плоскостей:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (3.24)$$

Если разноименно заряженные плоские пластины имеют конечную величину (плоский конденсатор), то у краев пластин поле неоднородно (рис. 3.8) и формулы (3.22) — (3.24) справедливы лишь для точек поля, достаточно удаленных от краев пластин.

4. Электростатическое поле бесконечно длинного прямого кругового цилиндра радиуса R , равномерно заряженного с линейной плотностью $\tau > 0$. Из условия симметрии следует, что силовые линии лежат в плоскостях, перпендикулярных образующей цилиндра, и направлены радиально от оси цилиндра (рис. 3.9), причем во всех точках, равноудаленных от оси цилиндра, численные значения как электрического смещения D , так и напряженности поля E одинаковы. Чтобы найти D и E в какой-либо точке A , лежащей на расстоянии $r > R$ от оси цилиндра, проведем через эту точку замкнутую цилиндрическую поверхность S , имеющую конечную длину l и коаксиальную с заряженной. Поток смещения сквозь основания этой поверхности, перпендикулярные оси цилиндра, очевидно, равен нулю, так как для оснований $D_n = 0$. В точках боковой поверхности $D_n = D = \text{const}$ и поток смещения равен $2\pi r l D$. Таким образом, полный поток смещения сквозь рассматриваемую замкнутую поверхность S

$$\Phi_e = 2\pi r l D. \quad (3.25)$$

По теореме Остроградского—Гаусса, $\Phi_e = q$, где $q = l\tau$ — заряд, охватываемый поверхностью S . Таким образом,

$$\Phi_e = \tau l. \quad (3.25')$$

Приравняв правые части выражении (3.25) и (3.25'), получаем

$$D = \tau / 2\pi r. \quad (3.26)$$

Напряженность поля

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 \epsilon r}. \quad (3.26')$$

Для точек, лежащих внутри цилиндра (на расстояниях от его оси $r < R$), можно провести аналогичные расчеты на основе теоремы Ос-

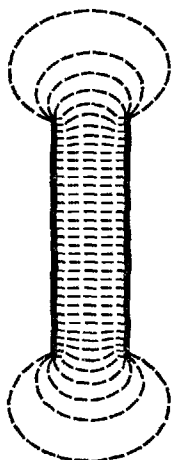


Рис. 3.8

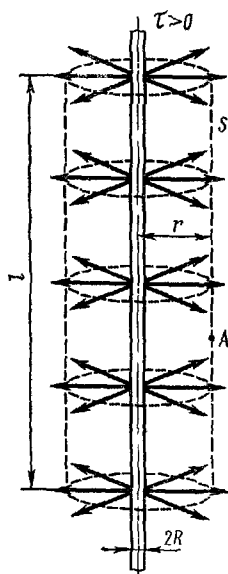


Рис. 3.9

троградского—Гаусса. Для этого нужно также построить замкнутую цилиндрическую поверхность S , коаксиальную заряженной, но радиуса $r < R$. Поток смещения Φ_e сквозь эту поверхность также выражается формулой (3.25). Однако теперь рассматриваемая поверхность S не охватывает зарядов, и по теореме Остроградского—Гаусса $\Phi_e = 2\pi r l D = 0$, так что $D = E = 0$ и $(d\varphi/dl) = 0$ независимо от направления вектора dl . Таким образом, внутри заряженного цилиндра поля нет, а весь его объем эквипотенциален

Разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях $r_1 > R$ и $r_2 > R$ от оси заряженного цилиндра,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.27)$$

5. Электростатическое поле сферической поверхности радиуса R , равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma > 0$. Из условия симметрии следует, что силовые линии поля заряженной сферы направлены радиально (рис. 3.10). По тем же причинам числовые значения электрического смещения \mathbf{D} должны быть одинаковыми во всех точках, лежащих на одном и том же расстоянии от центра O заряженной сферы. Проведем через исследуемую точку поля A , лежащую вне заряженной сферы ($r > R$), шаровую поверхность S с центром в точке O . Во всех точках этой поверхности $D_n = D_r = \text{const}$. Поэтому поток смещения сквозь замкнутую поверхность S

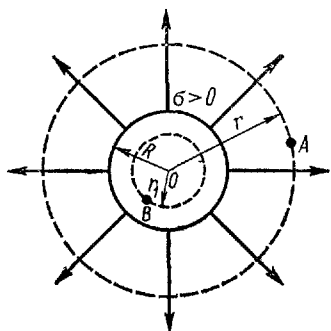


Рис. 3.10

$$\Phi_e = \oint_S D_n dS = D_r \oint_S dS = D_r S = D_r 4\pi r^2.$$

По теореме Остроградского—Гаусса этот поток также равен общему заряду сферы $q = 4\pi R^2\sigma$. Следовательно,

$$D_r = q/4\pi r^2, \quad (3.28)$$

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (3.29)$$

Эти формулы тождественны формулам (2.21') и (2.2') для поля точечного заряда q . Таким образом, электростатическое поле вне равномерно заряженной сферической поверхности эквивалентно полю точечного заряда, равного общему заряду сферы и расположенного в ее центре.

Рассмотрим теперь произвольную точку B , лежащую внутри сферы ($r_1 < R$). Проведенная через нее сфера с центром в точке O

не охватывает электрических зарядов. Поэтому $\Phi_e = 4\pi r_1^2 D_r = 0$ и $D = E = 0$.

На рис. 3.11 представлен график зависимости напряженности электростатического поля равномерно заряженной сферической поверхности от расстояния r точки поля до центра этой поверхности.

Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра заряженной сферической поверхности ($r_1 > R$



Рис. 3.11

и $r_2 > R$), находим из формулы

$$d\varphi = -E_r dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr:$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (3.30)$$

Положив $r_1 = R$ и $r_2 = \infty$, получим потенциал заряженной сферической поверхности

$$\varphi = q/(4\pi\epsilon_0\epsilon R). \quad (3.30')$$

Внутри заряженной сферы поля нет, и потому весь ее объем эквипотенциален.

6. Электростатическое поле шара радиуса R , равномерно заряженного с объемной плотностью $\rho > 0$ (рис. 3.12).

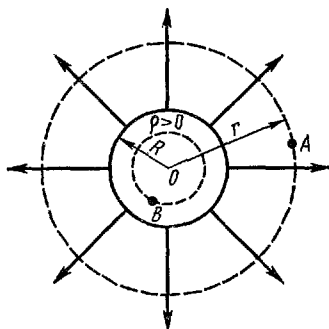


Рис. 3.12

В любой точке A , лежащей в не шара на расстоянии r от его центра ($r > R$), его поле аналогично полю точечного заряда $q = 4\pi R^3\rho/3$, расположенного в центре шара. Поэтому электрическое смещение

напряженность поля и разность потенциалов вычисляются соответственно по формулам (3.28), (3.29) и (3.30).

В точке B , лежащей внутри шара на расстоянии r от его центра ($r < R$), электрическое смещение определяется лишь зарядом q_1 , заключенным внутри сферы радиуса r : $4\pi r^2 D_r = q_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, откуда

$$D_r = \frac{1}{3} \rho r, \quad (3.31)$$

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0 \epsilon_1} = \frac{1}{3} \frac{\rho r}{\epsilon_0 \epsilon_1}, \quad (3.32)$$

где ϵ_1 — относительная диэлектрическая проницаемость материала заряженного шара.

Разность потенциалов между двумя точками поля внутри шара равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0 \epsilon_1} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\rho}{6\epsilon_0 \epsilon_1} (r_2^2 - r_1^2). \quad (3.33)$$

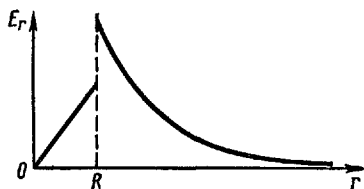


Рис. 3.13

На рис. 3.13 представлен график зависимости E_r от r для равномерно заряженного шара. При $r = R$ выражения (3.29) и (3.32) не совпадают, так как относительная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей заряженный шар, $\epsilon \neq \epsilon_1$ (рис. 3.13 соответствует случаю, когда $\epsilon < \epsilon_1$).

Вопросы для повторения

1. Каково условие потенциальности силового поля? Докажите, что электростатическое поле является потенциальным.
2. Дайте определение потенциала электростатического поля.
3. Как связана работа перемещения заряда в электростатическом поле с напряженностью и потенциалом поля?
4. Какова связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля?

Примеры решения задач

Задача 3.1. Внутренний цилиндрический проводник длинного прямолинейного коаксиального кабеля имеет радиус $R_1 = 2$ мм и заряжен с линейной плотностью $\tau_1 = 9,42 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ $_q$ /см. Внешний цилиндрический проводник имеет радиус $R_2 = 4$ мм и заряжен с линейной плотностью $\tau_2 = -\tau_1$. Изоляцией между цилиндрами служит резина ($\epsilon = 3$). Найти: значения напряженности электрического поля в точках A и B , лежащих на расстояниях $r_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ м и $r_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ м от оси кабеля, а также разность потенциалов между цилиндрами.

Дано:

$$\begin{aligned} R_1 &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ \tau_1 &= 3,14 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м} \\ \tau_2 &= -3,14 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м} \\ R_2 &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ r_1 &= 3 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ r_2 &= 6 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ \epsilon &= 3 \end{aligned}$$

Решение. Электрическое поле между цилиндрами создается лишь зарядом внутреннего цилиндра кабеля. По формуле (3 26'), напряженность этого поля в любой точке A , лежащей между цилиндрами, численно равна

$$E_A = \tau_1 / (2\pi\epsilon_0\epsilon r_1)$$

E_A — ? E_B — ? $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — ? и направлена радиально относительно оси кабеля.

Электрическое поле в любой точке вне кабеля создается зарядами как внутреннего, так и внешнего цилиндров. Поэтому напряженность поля в точке B численно равна

$$E_B = (\tau_1 + \tau_2) / (2\pi\epsilon_0\epsilon_1 r_2),$$

где $\epsilon_1 = 1$ — относительная диэлектрическая проницаемость воздуха.

Разность потенциалов между цилиндрами можно найти по формуле (3 27):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$E_A = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon r_1} = \frac{3,14 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{В}}{\text{м}} = 627 \text{ В/м};$$

$$E_B = (\tau_1 + \tau_2) / (2\pi\epsilon_0\epsilon_1 r_2) = 0,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{3,14 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3} \ln 2 \text{ В} = 1,3 \text{ В}.$$

Задача 3.2. Частица, несущая заряд $2 \text{ СГСЭ}q$, двигаясь в ускоряющем электрическом поле, приобретает кинетическую энергию 10 МэВ . Найти разность потенциалов между начальной и конечной точками пути частицы в поле, если ее начальная кинетическая энергия была равна нулю.

Дано:

$$\begin{aligned} q &= (2/3) \cdot 10^{-9} \text{ Кл} \\ W_{к2} &= 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ Дж} \\ W_{к1} &= 0 \\ (\varphi_1 - \varphi_2) &= ? \end{aligned}$$

Решение. Работа, совершаемая силами электрического поля при перемещении заряженной частицы, равна изменению ее кинетической энергии W_k : $A = W_{к2} - W_{к1}$. С другой стороны, по формуле (3.14), $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, где q — заряд частицы, $(\varphi_1 - \varphi_2)$ — искомая разность потенциалов. Поэтому

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (W_{к2} - W_{к1}) / q.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{W_{к2} - W_{к1}}{q} = \frac{1,6 \cdot 10^{-12} \cdot 3}{2 \cdot 10^{-9}} \text{ В} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ В} = 2,4 \text{ мВ}.$$

Глава IV

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 4.1. Распределение электрических зарядов на проводнике

1. В проводниках имеются электрически заряженные частицы — носители заряда, которые способны под действием внешнего электрического поля перемещаться по всему объему проводника. В этой главе мы ограничимся рассмотрением только твердых металлических проводников. Носителями заряда в них являются электроны, называемые **электронами проводимости** или свободными электронами. Они возникают при переходе металла из газообразного состояния в конденсированное (твердое или жидкое) за счет происходящего при этом обобществления валентных электронов, отделяющихся от «своих» атомов. Не останавливаясь на экспериментальном обосновании электронного характера электропроводимости металлов (см. § 8 З), рассмотрим особенности поведения электронов проводимости в электростатическом поле и связанные с этим электрические свойства проводников в условиях электростатики.

2. В первом приближении можно считать, что в отсутствие внешнего электрического поля электрические поля электронов проводимости и положительных ионов металла («атомных остатков») взаимно компенсируют друг друга. При внесении металлического проводника во внешнее электростатическое поле электроны проводимости перераспределяются в проводнике до тех пор, пока всюду внутри проводника поле электронов проводимости и положительных ионов не компенсирует внешнее поле. Итак, в любой точке проводника, находящегося в электростатическом поле, напряженность установившегося результирующего электрического поля равна нулю.

На поверхности проводника вектор напряженности \mathbf{E} должен быть направлен по нормали к этой поверхности, иначе под действием составляющей E_τ вектора \mathbf{E} , касательной к поверхности проводника, заряды перемещались бы по проводнику, что противоречило бы их статическому распределению. Отсюда следует, что в установившемся состоянии:

а) во всех точках внутри проводника $\mathbf{E} = 0$, а во всех точках на его поверхности $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n$ ($E_\tau = 0$);

б) весь объем проводника, находящегося в электростатическом поле, эквипотенциален. Действительно, в любой точке внутри проводника

$$(d\varphi/dl) = -E \cos(\mathbf{E}, \widehat{dl}) = 0 \text{ и } \varphi = \text{const.}$$

Поверхность проводника также эквипотенциальна, так как для любой линии на поверхности

$$(d\varphi/dl) = -E_\tau = 0;$$

в) в заряженном проводнике uncompensированные заряды располагаются только на поверхности проводника. Проведем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность S , ограничивающую некоторый внутренний объем проводника. Согласно теореме Остроградского—Гаусса, суммарный заряд q этого объема равен

$$q = \Phi_e = \oint D dS \cos(\widehat{\mathbf{D}}, \mathbf{n}) = 0, \quad (4.1)$$

так как во всех точках поверхности S , находящейся внутри проводника, поля нет.

3. Определим напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника. Для этого выделим на его поверхности произвольную малую площадку dS и построим на ней цилиндр высотой dl с образующей, перпендикулярной площадке dS , и основаниями dS' и dS'' , параллельными dS (рис. 4.1). Ввиду малости dS можно считать, что $dS' = dS'' = dS$. На поверхности проводника и вблизи нее векторы \mathbf{E} и $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}$ перпендикулярны этой поверхности. Поэтому поток вектора \mathbf{D} сквозь боковую поверхность построенного нами цилиндра равен нулю. Поток электрического смещения сквозь поверхность dS'' также равен нулю, так как она лежит в н у т р и проводника и во всех ее точках $\mathbf{D} = 0$. Следовательно, поток смещения $d\Phi_e$ сквозь всю замкнутую цилиндрическую поверхность равен потоку сквозь одно верхнее основание dS' :

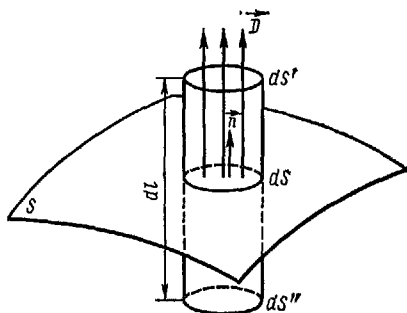


Рис. 4.1

$$d\Phi_e = D_n dS,$$

где D_n — проекция вектора электрического смещения на внешнюю нормаль \mathbf{n} к площадке dS .

С другой стороны, по теореме Остроградского—Гаусса (2.28) этот поток равен сумме зарядов dq , охватываемых поверхностью:

$$d\Phi_e = dq = \sigma dS,$$

где σ — поверхностная плотность зарядов на элементе dS поверхности проводника. Из равенства правых частей этих формул следует, что

$$D_n = \sigma, \quad E_n = \sigma/\epsilon\epsilon_0. \quad (4.2)$$

Итак, если электростатическое поле создается заряженным проводником, то напряженность этого поля вблизи поверхности проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности зарядов, находящихся на нем.

4. Из рис. 3.5 видно, что вблизи острий и выступов на проводнике эквипотенциальные поверхности наиболее сильно искривлены и сближены друг с другом. Очевидно, что в этих областях напряженность поля, равная $E = -\text{grad } \phi$, максимальна. Следовательно, поверхностная плотность электрических зарядов на остриях и выступах больше, чем в других частях тела, и, наоборот, в области конической впадины напряженность поля E и плотность зарядов σ минимальны.

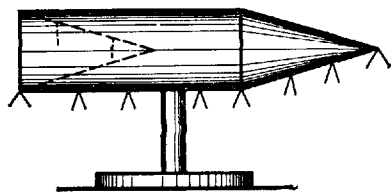


Рис. 4.2

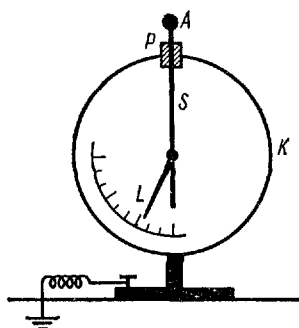


Рис. 4.3

Распределение зарядов на поверхности проводника можно оценить экспериментально. Для этого в разных точках поверхности исследуемого тела приклеиваются парные листочки из папиросной бумаги — электроскопы. В местах большей напряженности поля (т.е. большей плотности σ зарядов) листочки расходятся сильнее (рис. 4.2).

Для экспериментального определения поверхностной плотности зарядов можно использовать **электрометр**. Простейший электрометр изображен на рис. 4.3. Главной его частью является легкий металлический указатель L , прикрепленный к стерженьку S . Стерженек S изолирован от цилиндрического металлического корпуса K электрометра янтарной пробкой P и вне корпуса заканчивается металлическим шариком A . Корпус K соединен с Землей, чтобы K и окружающие его заземленные предметы, например стены комнаты, а также экспериментатор, имели одинаковый потенциал (потенциал Земли) и между ними не могли возникнуть электрические поля, действие которых на указатель L исказило бы результат опыта.

При сообщении шарик A и соединенному с ним стерженьку S некоторого заряда q указатель L отклоняется тем сильнее, чем больше возникающая разность потенциалов между L и заземленным корпусом K электрометра. Эта разность потенциалов, в свою очередь, зависит от заряда q . Поэтому электрометр можно использовать как для измерения потенциала, так и для измерения заряда. Перед измерениями электрометр необходимо програвдуировать.

Распределение зарядов по поверхности проводника удобно исследовать с помощью специального щупа в виде небольшого гибкого металлического листочка, укрепленного на изолирующей ручке. Листок изгибается по форме той части поверхности проводника, на которой хотят определить плотность зарядов σ , и прижимается к ней. При этом листок становится как бы частью поверхности проводника и заряжа-

ется с поверхностной плотностью σ . Общий заряд шупа будет равен $\sigma \Delta S$, где ΔS — площадь одной стороны листка. Затем шуп отделяется от проводника и его заряд переносится на чувствительный электрометр. Очевидно, что заряд, полученный электрометром, и отклонение указателя L будут тем больше, чем больше σ .

5. Исследования распределения зарядов на проводниках различной формы, находящихся в однородном диэлектрике вдали от других заряженных тел, показали:

а) распределение зарядов по внешней поверхности проводника зависит только от ее формы: где кривизна поверхности больше, там и поверхностная плотность σ зарядов больше;

б) на внутренних поверхностях замкнутых полых проводников избыточные заряды отсутствуют и $\sigma = 0$.

6. Большое значение напряженности поля вблизи острого выступа на заряженном проводнике приводит к явлению, известному под названием «электрического ветра». В достаточно сильном электрическом поле вблизи заряженного острия происходит ионизация воздуха (это так называемая ударная ионизация, о которой мы будем говорить подробнее в § 12.1). Ионы, заряженные одноименно с острием, движутся от него. Они увлекают за собой частицы воздуха и тем самым вызывают образование «электрического ветра», направленного от острия. Ионы, заряженные разноименно с острием, движутся к нему. Однако их влияние на «электрический ветер» несущественно, так как образование и разгон ионов происходят в непосредственной близости от острия.

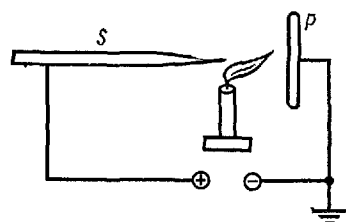


Рис. 4.4

На рис. 4.4 изображен опыт, демонстрирующий действие «электрического ветра» на пламя свечи. Помещенное перед острием S , соединенным с положительным полюсом электростатической машины, пламя сильно отклоняется от острия и даже может быть погашено.

Вследствие сильной ионизации воздуха около острия оно быстро теряет электрический заряд. Поэтому для сохранения заряда на проводниках стремятся к тому, чтобы поверхности проводников были возможно большего радиуса кривизны и не имели острых выступов.

7. Если заряженный металлический шарик привести в соприкосновение с поверхностью какого-нибудь проводника, то заряд шарика частично передается проводнику. Шарик разряжается до тех пор, пока его потенциал не станет равным потенциалу проводника. Иначе обстоит дело, если шарик привести в соприкосновение с внутренней поверхностью полого проводника. При этом также происходит выравнивание потенциалов шарика и проводника. Но так как внутри проводника не должно быть избыточных зарядов, то весь заряд шарика передается проводнику и распределяется по внешней поверхности последнего. Поэтому для измерения заряда какого-либо тела с помощью электрометра вместо шарика A (см. рис. 4.3) нужно взять

полый проводник с небольшим отверстием для помещения тела внутрь этого проводника. Обычно в качестве такого проводника применяют длинный полый металлический цилиндр, называемый цилиндром Фарадея, или полый шар.

Множественно повторяя передачу зарядов полному проводнику, можно значительно повысить его потенциал до значения, ограничиваемого явлением стекания зарядов с проводника.

Этот принцип был использован Ван-де-Граафом для построения электростатического генератора, схема которого приведена на рис. 4.5. Широкая бесконечная лента L из шелка или прорезиненной ткани движется на двух шкивах A и B , расположенных на высоте до 10 м друг над другом. Верхний шкив помещен внутри полового, изолированного от земли шара C . Лента заряжается либо за счет трения, либо, как показано на рис. 4.5, в результате стекания на нее электрических зарядов с острий D , соединенных с одним из полюсов электростатической машины \mathcal{E} . Через острия K этот заряд полностью передается шару C . Заряд и потенциал шара увеличиваются до тех пор, пока утечка зарядов с наружной поверхности шара из-за возникновения электрического разряда в окружающем шар воздухе не сравняется с притоком зарядов через острия K . Построив два таких генератора с шарами диаметром в несколько метров и заряжая

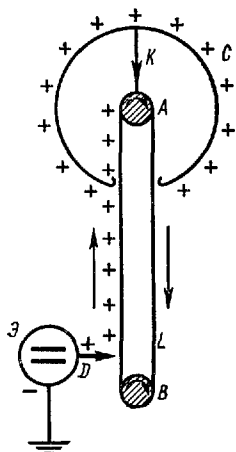


Рис. 4.5

один из шаров положительно, а другой отрицательно, удастся получить разности потенциалов между ними в несколько миллионов вольт.

8. Между одноименно заряженными участками проводника должны действовать силы взаимного отталкивания. Элемент поверхности dS заряженного проводника находится в электрическом поле напряженностью E_1 , которое создается зарядами, распределенными по всей остальной поверхности проводника. Поэтому сила dF , действующая на элемент dS , равна

$$dF = \sigma E_1 dS.$$

Обозначим через E_2 напряженность поля, создаваемого зарядами, находящимися на поверхности dS . Тогда напряженность E результирующего поля вблизи поверхности проводника равна сумме E_1 и E_2 : $E = E_1 + E_2$. Легко видеть, что вне проводника $E = E_1 + E_2$, а внутри $E' = E_1 - E_2$.

Так как внутри проводника напряженность поля равна нулю ($E' = 0$), то

$$E_1 = E_2 = E/2.$$

Заменив E_n по формуле (4.2), где $\epsilon = 1$, получим для проводника, помещенного в вакуум,

$$E_{1n} = \sigma/2\varepsilon_0.$$

Вектор $E_1 = E/2$ направлен в сторону внешней нормали к площадке dS , если $\sigma > 0$, и в противоположную сторону, если $\sigma < 0$. Поэтому сила dF , действующая на элемент dS поверхности заряженного тела, всегда направлена в сторону внешней нормали. Этот результат очевиден, так как он является следствием взаимного отталкивания одноименных зарядов. Сила dF численно равна

$$dF = (\sigma^2/2\varepsilon_0) dS. \quad (4.3)$$

Если проводник находится в газообразном или жидком диэлектрике, то вследствие явления электрострикции (см. § 1.2) диэлектрик оказывает на проводник добавочное давление и сила dF уменьшается в ε раз:

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} dS = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 F^2}{2} dS. \quad (4.3')$$

§ 4.2. Электростатическая индукция

1. Если незаряженный проводник поместить во внешнее электростатическое поле, то под влиянием электрических сил свободные электроны будут перемещаться в нем в направлении, противоположном вектору напряженности поля. В результате этого на двух противоположных концах проводника появятся разноименные заряды: отрицательный — на том конце, где оказались лишние электроны, положительный — на том, где электронов не хватает. Явление, состоящее в электризации незаряженного проводника во внешнем электростатическом поле путем разделения на этом проводнике уже имеющихся в нем в равных количествах положительных и отрицательных зарядов, называется **электризацией через влияние** или **электростатической индукцией**.

Индуктированные (наведенные) на проводнике заряды исчезают, когда проводник удаляют из электрического поля. Для того чтобы отделить положительные индуктированные заряды от отрицательных, необходимо разъединить разноименно заряженные части проводника до его удаления из электростатического поля.

2. На рис. 4.6, *a* изображены пунктиром силовые линии однородного электростатического поля параллельных пластин, заряженных разноименно. Эквипотенциальные поверхности показаны сплошными линиями. Поместим в это поле незаряженный изолированный металлический шар. Под влиянием поля на поверхности шара будет происходить перераспределение электронов проводимости до тех пор, пока эта поверхность не станет эквипотенциальной. В результате этого внешнее электростатическое поле искривится (рис. 4.6, *б*). Эквипотенциальные поверхности по обе стороны от шара сдвинутся, часть силовых линий будет обрываться на поверхности шара. Внутри шара поля не будет.

Следовательно, каким бы способом ни электризовался проводник, заряды распределяются на его поверхности и полость в замкнутом проводнике всегда экранирована от электростатических полей, создаваемых внешними зарядами.

Отсутствие поля внутри полости проводника позволяет создать из полого заземленного проводника электростатическую защиту.

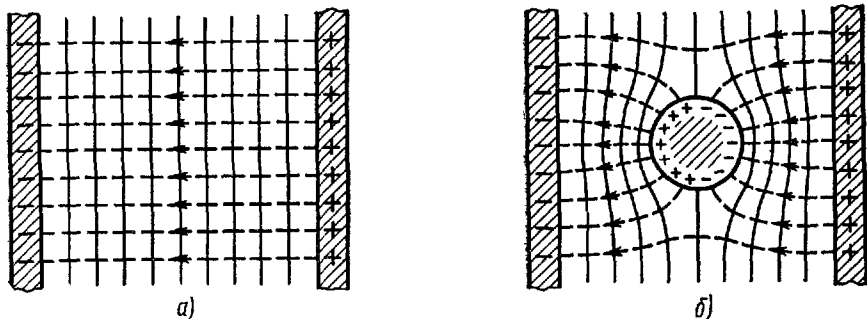


Рис. 4.6

При этом вместо проводника со сплошными стенками можно использовать проволочную сетку.

3. В § 4.1. было показано, что вблизи поверхности проводника, находящегося в электростатическом поле, вектор электрического смещения \mathbf{D} направлен по нормали к поверхности проводника, т.е.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_n, \text{ причем } D_n = \sigma.$$

В рассмотренном выше опыте (рис. 4.6) электрические заряды появились на проводнике вследствие смещения их под действием внешнего электрического поля. Таким образом, σ является поверхностной плотностью смещенных электрических зарядов, а вектор \mathbf{D} численно равен поверхностной плотности смещенных зарядов.

§ 4.3. Электростатические измерения

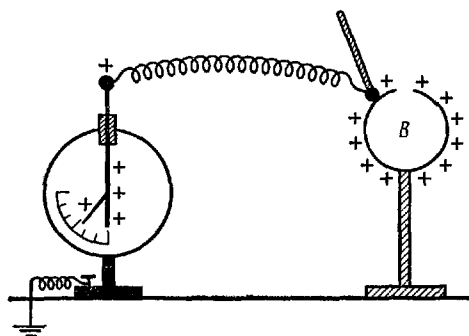


Рис. 4.7

1. Для измерения потенциала заряженного проводника B его соединяют длинной тонкой проволочкой с электрометром, металлический корпус которого заземлен (рис. 4.7). Проволочка заканчивается металлическим шариком, насаженным на изолирующую ручку. Проводник B , проволочка и электрометр представляют как бы один проводник с общим по-

тенсиалом. Поэтому электрометр измеряет потенциал проводника V относительно потенциала Земли.

При измерениях необходимо:

а) чтобы корпус электрометра был заземлен, тогда градуировка электрометра будет оставаться постоянной и на него не будут влиять окружающие его тела;

б) чтобы электрометр обладал возможно меньшей электроемкостью, иначе его присоединение будет сильно уменьшать заряд и потенциал исследуемого тела и измерения будут неточными.

Перемещая конец проволоочки, соединенной с электрометром, по поверхности проводника любой формы и вводя его внутрь проводника,

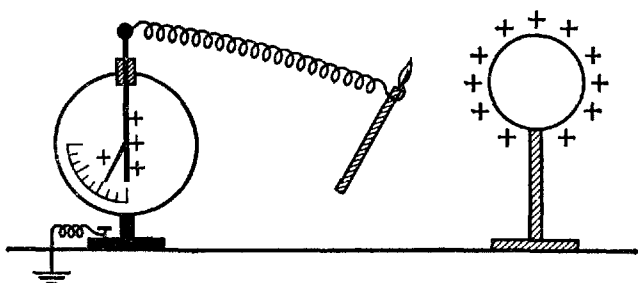


Рис. 4.8

можно убедиться в том, что потенциал во всех точках заряженного проводника одинаков.

2. Для исследования потенциала электростатического поля в газе можно воспользоваться пламенным зондом, представляющим собой небольшую стеклянную газовую горелку, в пламя которой введен заостренный конец тонкой проволоки. Другой конец проволоки присоединен к шартику электрометра (рис. 4.8). Острие проволоки помещают в исследуемую точку поля, создаваемого заряженным телом. В пламени горелки возникает большое число ионов. Индуцированный на острие проволоки отрицательный заряд (если заряд тела, создающего поле, положителен) нейтрализуется положительными ионами, которые оседают на острие до тех пор пока, его потенциал не станет равным потенциалу в исследуемой точке поля. При этом движение зарядов вдоль проволоки прекратится и потенциал шарика электрометра также будет равным потенциалу в той точке поля, где находится острие проволоки.

3. Разность потенциалов и напряженность электростатического поля можно измерить при помощи двух пламенных зондов, из которых один соединен с указателем чувствительного электрометра, а другой — с его корпусом. Оба зонда помещают в поле на небольшом расстоянии l один от другого. Напряженность поля находится делением разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ на расстояние l .

4. Для измерения электрического смещения можно воспользоваться двумя небольшими металлическими пластинами, укрепленными

ми на изолирующих стержнях. Эти пластины приводят в соприкосновение и вносят в исследуемое электростатическое поле (рис. 4.9, а), где их располагают перпендикулярно силовым линиям. Затем пластины немного раздвигают (рис. 4.9, б) и убирают из поля. На каждой из пластин окажутся наведенные заряды ($+q$ и $-q$). Определив поверх-

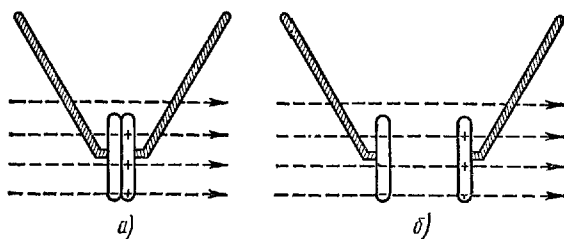


Рис. 4.9

ностную плотность заряда $\sigma = q/S$, где q — заряд пластины, измеренный при помощи электрометра, а S — площадь пластины, находят численное значение электрического смещения D , равное σ [см. формулу (4.2)].

Этот результат, строго говоря, верен только в случае однородного поля. В неоднородном поле поверхностная плотность неодинакова в разных точках пластин. Поэтому указанным выше способом можно определить только среднюю поверхностную плотность зарядов и среднее значение нормальной составляющей вектора электрического смещения.

Вопросы для повторения

1. Каковы напряженность и потенциал поля, а также распределение зарядов внутри и на поверхности заряженного проводника?
2. В чем состоит электростатическая защита?
3. Опишите методы измерения поверхностной плотности зарядов и потенциала заряженного проводника, а также потенциала, напряженности и электрического смещения поля вне заряженного проводника.

Примеры решения задач

Задача 4.1. Какова сила взаимодействия между точечным электрическим зарядом 50 нКл и бесконечной проводящей плоскостью P , отстоящей от заряда на расстоянии 20 см?

Дано:

$$q = 5 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$$

$$l = 0,2 \text{ м}$$

$$\epsilon = 1 \text{ (воздух)}$$

F — ?

Решение. Точечный заряд q взаимодействует с наведенным им на проводящей плоскости зарядом противоположного знака. На рис. 4.10 сплошными линиями показаны силовые линии поля в пространстве между зарядом q и плоскостью P . Они нормальны к проводящей плоскости P , являющейся эквипотенциальной поверхностью $\phi = 0$ (относительно бесконечности). Решение задачи упрощается, если воспользоваться методом зеркальных изображений. Этот метод основан на том, что замена любой эквипотенциальной поверхности элек-

тростатического поля бесконечно тонкой проводящей поверхностью, имеющей тот же потенциал, не вызывает никакого изменения поля. Легко видеть, что плоскость P представляет эквипотенциальную поверхность $\varphi = 0$ для поля, создаваемого двумя зарядами — положительным зарядом $+q$ и численно равным ему отрицательным зарядом $-q$, расположенным симметрично $+q$ относительно плоскости P , т. е. являющимся «зеркальным изображением» заряда $+q$ в плоскости P (рис. 4.10).

В этом случае напряженность результирующего поля зарядов $+q$ и $-q$ во всех точках плоскости P направлена перпендикулярно ей. Такое поле не вызывает перемещения свободных зарядов вдоль проводящей плоскости, т. е. появляющиеся на ней «наведенные заряды» противоположных знаков полностью компенсируют друг друга. Поэтому можно считать, что электрическое поле справа от плоскости определяется только зарядами $+q$ и $-q$. Иными словами, сила F притяжения заряда $-q$ к проводящей плоскости P равна силе, которая действует на этот заряд со стороны заряда $-q$, являющегося его «зеркальным изображением». Она численно равна

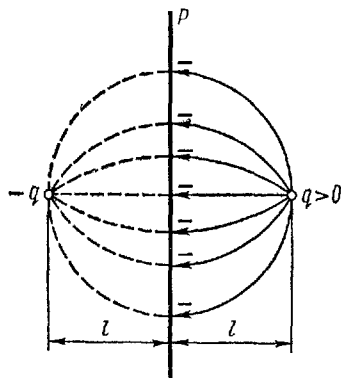


Рис. 4.10

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon (2l)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon l^2}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$F = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon l^2} = \frac{25 \cdot 10^{-16}}{16 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,04} \text{ Н} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 0,14 \text{ мН}.$$

Задача 4.2. Определить поверхностную плотность электрического заряда Земли и силу, действующую на 1 м^2 земной поверхности в том месте, где напряженность электростатического поля Земли численно равна 200 В/м .

Д а н о:

$$E = 200 \text{ В/м}$$

$$S = 1 \text{ м}^2$$

$$\epsilon = 1 \text{ (воздух)}$$

$$\sigma = ? \quad F = ?$$

Р е ш е н и е. Напряженность электростатического поля вблизи поверхности заряженного тела выражается формулой (4.2), где $\epsilon = 1$:
 $E = \sigma/\epsilon_0$, откуда

$$\sigma = \epsilon_0 E.$$

Сила F , действующая на участок S земной поверхности, по формуле (4.3) равна

$$F = \epsilon_0 E^2 S / 2.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$\sigma = \epsilon_0 E = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 200 \text{ Кл/м}^2 = 1,77 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2 = 1,77 \text{ нКл/м}^2;$$

$$F = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^4}{2} \text{ Н} = 1,77 \cdot 10^{-7} \text{ Н} = 0,177 \text{ мкН}.$$

Глава V

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

§ 5.1. Электроемкость уединенного проводника

1. Рассмотрим проводник, находящийся в однородной среде вдали от заряженных тел и других проводников. Такой проводник назовем уединенным. В § 4.1 было показано, что при сообщении уединенному проводнику некоторого заряда последний распределяется по его поверхности с различной поверхностной плотностью σ . Однако характер этого распределения зависит не от общего заряда q , а только от формы проводника. Каждая новая часть зарядов распределяется по поверхности проводника подобно предыдущей. Таким образом, σ изменяется пропорционально q , т.е.

$$\sigma = kq, \quad (5.1)$$

где k — некоторая функция координат рассматриваемой точки поверхности.

Разобьем поверхность S проводника на бесконечно малые элементы dS , несущие заряды σdS . Каждый такой заряд можно считать точечным. Потенциал $d\varphi$ поля заряда σdS в точке, отстоящей от него на расстоянии r , равен [см. формулу (3.13')]

$$d\varphi = \sigma dS / (4\pi\epsilon_0\epsilon r).$$

Интегрируя это выражение по всей замкнутой поверхности S заряженного проводника, находим потенциал в произвольной точке его электростатического поля:

$$\varphi = \oint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (5.2)$$

Заменяя σ по формуле (5.1) и вынося q за знак интеграла, получаем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \oint_S \frac{kdS}{r}. \quad (5.3)$$

Для точки, лежащей на поверхности проводника, r является функцией координат этой точки и элемента dS . В этом случае интеграл, стоящий в правой части уравнения (5.3), зависит только от размеров и формы поверхности S проводника. Выбор точки на поверхности S не играет роли, так как для всех точек проводника $\varphi = \text{const}$ и значения $\oint_S \frac{kdS}{r}$ одинаковы.

В формулах (5.2) и (5.3) принято, что потенциал незаряженного уединенного проводника ($q = 0$ и $\sigma = 0$) равен нулю, так как предполагается отсутствие всех внешних электростатических полей.

2. Из формулы (5.3) видно, что потенциал уединенного проводника прямо пропорционален его заряду. Отношение q к φ для данного проводника называется его **электрической емкостью** (электроемкостью или просто **емкостью**) C , т.е.

$$C = q/\varphi, \text{ или } C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \oint_S \frac{kdS}{r}. \quad (5.4)$$

Электроемкость уединенного проводника численно равна электрическому заряду, который нужно сообщить этому проводнику для того, чтобы потенциал его изменился на единицу.

Электроемкость уединенного проводника зависит от его формы и размеров [интеграл в (5.4)], причем геометрически подобные проводники обладают емкостями, пропорциональными их линейным размерам. Это связано с тем, что на геометрически подобных проводниках распределение зарядов тоже будет подобным, а расстояния от аналогичных зарядов до соответствующих точек поля пропорциональны линейным размерам проводников. Потенциал электростатического поля, создаваемого каждым точечным зарядом, обратно пропорционален расстоянию от этого заряда. Таким образом, потенциалы одинаково заряженных и геометрически подобных проводников должны быть обратно пропорциональны их линейным размерам, а электроемкости этих проводников — прямо пропорциональны им.

Электроемкость уединенного проводника зависит от диэлектрических свойств окружающей его среды. В случае однородной изотропной среды электроемкость проводника пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости среды [см вторую формулу (5.4)].

Ни от материала проводника, ни от его агрегатного состояния, ни от формы и размеров возможных полостей внутри проводника его электроемкость не зависит. Это связано с тем, что избыточные заряды распределены только на внешней поверхности проводника. Следует заметить, что C не зависит также ни от заряда проводника, ни от его потенциала. Это совершенно не противоречит первому соотношению (5.4), которое лишь показывает, что потенциал уединенного проводника пропорционален его заряду и обратно пропорционален емкости.

3. Потенциал уединенного проводящего шара радиуса R , несущего заряд q и находящегося в однородной среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , по формуле (3.30') равен

$$\varphi = q/(4\pi\epsilon_0\epsilon R).$$

Отсюда емкость шара

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (5.5)$$

При использовании системы единиц СГСЭ

$$C = \epsilon R. \quad (5.5')$$

4. За единицу электроемкости в СИ, называемую **фарадой** (Φ),

принимается электроемкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на один вольт при сообщении ему заряда в один кулон:

$$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В.}$$

Из (5.5) следует, что электроемкостью в 1 Ф обладает проводящий шар, находящийся в вакууме ($\epsilon = 1$) и имеющий радиус

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0\epsilon} = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ м} = 9 \cdot 10^9 \text{ м} = 9 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

Поэтому на практике часто употребляются также следующие единицы электроемкости:

$$1 \text{ микрофарада (мкФ)} = 10^{-6} \text{ Ф,}$$

$$1 \text{ пикофарада (пФ)} = 10^{-12} \text{ Ф.}$$

Если вычислять электроемкость Земли как емкость проводящего шара, радиус которого равен 6400 км, то она оказывается равной 711 мкФ.

Из формулы (5.5) видно, что ϵ_0 в СИ можно выражать не только в Кл²/(Н·м²) (см. § 1.3), но и в Ф/м.

Единица электроемкости в системе единиц СГСЭ равна

$$1 \text{ СГСЭ}_C = 1 \text{ СГСЭ}_q / 1 \text{ СГСЭ}_\varphi.$$

Из формулы (5.5') следует, что размерность электроемкости в системе единиц СГСЭ совпадает с размерностью длины, так как относительная диэлектрическая проницаемость ϵ — величина безразмерная. Поэтому единица электроемкости в системе СГСЭ называется **сантиметром**. В вакууме $\epsilon = 1$ и электроемкость шара равна его радиусу, выраженному в сантиметрах. Связь между единицами электроемкости в СИ и СГСЭ имеет вид

$$1 \text{ Ф} = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} \text{ см} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см; } 1 \text{ пФ} = 0,9 \text{ см.}$$

§ 5.2. Взаимная электроемкость. Конденсаторы

1. В предыдущем параграфе мы рассмотрели электроемкость уединенного проводника. Если проводник *A* не уединенный, т.е.

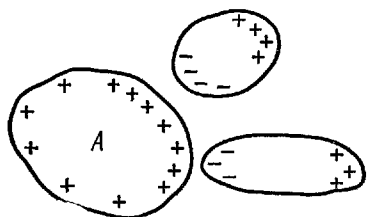


Рис. 5.1

вблизи него имеются другие проводники (рис. 5.1), то его электроемкость больше, чем у такого же, но уединенного проводника. Дело в том, что при сообщении проводнику *A* заряда *q* окружающие его проводники заряжаются через влияние, причем ближайшими к наводящему заряду *q* оказываются заряды противоположного знака. Эти заряды несколько ослабляют

поле, создаваемое зарядом q . Таким образом, они понижают потенциал проводника A и повышают его электроемкость.

2. Наибольший практический интерес представляет система, состоящая из двух близко расположенных друг от друга проводников, заряды которых численно равны, но противоположны по знаку. Обозначим разность потенциалов между проводниками через $\varphi_1 - \varphi_2$, а абсолютную величину их зарядов — через q . Если проводники находятся вдали от каких бы то ни было заряженных тел и иных проводников, то, как показывает опыт, разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ пропорциональна заряду q^1 , т.е.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q/C,$$

где C — взаимная электроемкость двух проводников:

$$C = q/(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (5.6)$$

Взаимная электроемкость двух проводников численно равна заряду, который нужно перенести с одного проводника на другой для изменения разности потенциалов между ними на единицу.

3. Взаимная электроемкость двух проводников зависит от их формы, размеров и взаимного расположения, а также от относительной диэлектрической проницаемости среды. Если среда однородна, то электроемкость C пропорциональна ϵ . Из сравнения (5.6) и первой формулы (5.4) ясно, что взаимная электроемкость имеет ту же размерность и выражается в тех же единицах, что и электроемкость уединенного проводника.

Если один из проводников (например, второй) удалять в бесконечность, то разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между ними будет возрастать, а их взаимная электроемкость C убывать, стремясь к значению электроемкости уединенного первого проводника. В этом убедимся несколько дальше на примере шарового конденсатора.

4. Особенно важным для практики является случай, когда два разноименно заряженных проводника имеют такую форму и так расположены друг относительно друга, что создаваемое ими электростатическое поле полностью или почти полностью сосредоточено в ограниченной части пространства. Такая система двух проводников называется **конденсатором**, а сами проводники — его обкладками.

Электроемкость конденсатора представляет собой взаимную емкость его обкладок и выражается формулой (5.6).

В зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на плоские, сферические (шаровые) и цилиндрические.

5. **Плоский конденсатор** состоит из двух параллельных металлических пластин площадью S каждая, расположенных на близком расстоянии d одна от другой и несущих заряды $q > 0$ и $-q$. Если линейные размеры пластин велики по сравнению с расстоянием

¹ К такому же выводу можно прийти на основании аналитического рассмотрения задачи, подобного приведенному в § 5.1 [см. формулы (5.2) и (5.3)]. В данном случае необходимо только учесть, что потенциал каждого из проводников определяется зарядами, распределенными на обоих проводниках.

d , то электростатическое поле между пластинами можно считать эквивалентным полю между двумя бесконечными плоскостями, заряженными разноименно с числом равными поверхностными плотностями заряда $+\sigma$ и $-\sigma$ (см. § 3.4).

Заменяем в выражении (5.6) $q = \sigma S$. Согласно формуле (3.24), $\varphi_1 - \varphi_2 = \sigma d / \epsilon_0 \epsilon$. Тогда

$$C = \epsilon \epsilon_0 S / d, \quad (5.7)$$

где ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами.

Формулу (5.7) можно проверить опытным путем. Пластина A заряженного воздушного конденсатора (рис. 5.2, a) соединена с электро-

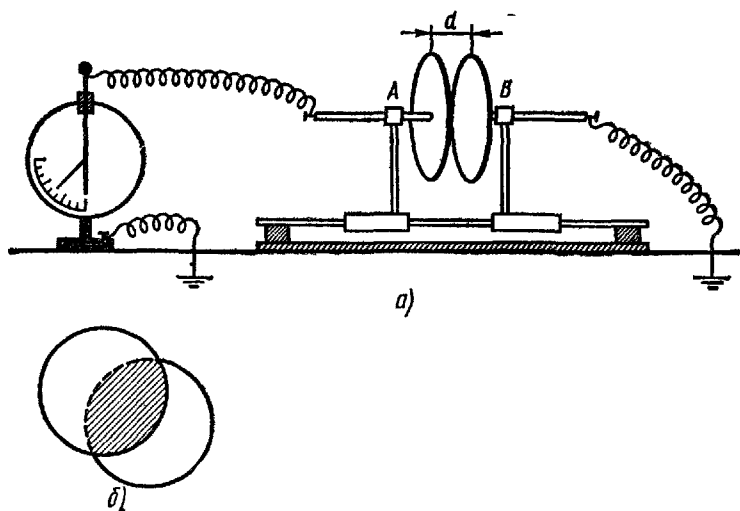


Рис. 5.2

метром, корпус которого заземлен; пластина конденсатора B также заземлена. При увеличении расстояния d между пластинами электрометр показывает увеличение разности потенциалов между ними. Следовательно, емкость C конденсатора уменьшается с возрастанием расстояния d .

Заменяем при неизменном расстоянии d слой воздуха между пластинами другим диэлектриком с большей относительной диэлектрической проницаемостью, например стеклянной пластиной. Тогда электрометр показывает уменьшение разности потенциалов между пластинами. Следовательно, емкость конденсатора увеличилась.

Наконец, если сдвинуть одну из пластин в сторону (рис. 5.2, b) и уменьшить таким образом действующую площадь пластин (заштрихована на рисунке), то разность потенциалов между пластинами возрастет, а емкость конденсатора уменьшится.

Формула (5.7) справедлива только при достаточно малом расстоя-

нии между пластинами конденсатора, когда нарушением однородности электростатического поля у его краев можно пренебречь.

Определим силу взаимного притяжения между разноименно заряженными пластинами плоского конденсатора. Отрицательно заряженная пластина, несущая заряд $-q = -\sigma S$ (где σ — поверхностная плотность заряда, S — площадь пластины), находится в однородном электростатическом поле с напряженностью E_1 , создаваемом положительно заряженной пластиной. Поэтому на отрицательно заряженную пластину действует сила

$$F_2 = -qE_1.$$

Если поле между пластинами считать однородным, то по формуле (2.16) $E_1 = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon$ и проекция силы F_2 на направление вектора E_1 равна

$$F_2 = -\sigma S \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Подставив значение σ из выражений (3.22) и (3.23) для напряженности и электрического смещения поля между пластинами плоского конденсатора, получим

$$F_2 = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} S = -\frac{DE}{2} S = -\frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} S. \quad (5.8)$$

Если между обкладками конденсатора находится твердый диэлектрик, то, как можно показать, сила F_2 при заданном значении σ не зависит от относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика:

$$F_2 = -\sigma^2 S / 2\varepsilon_0. \quad (5.8')$$

6. Сферический конденсатор состоит из двух concentрических металлических обкладок A и B сферической формы, радиусы которых соответственно равны r_1 и r_2 (рис. 5.3). Пусть $q > 0$ — заряд обкладки A , а $-q$ — обкладки B . В § 3.4 было показано, что равномерно заряженная сфера создает электростатическое поле только в области пространства, лежащей вне этой сферы. Вне конденсатора поля разноименно заряженных обкладок A и B взаимно уничтожаются, а поле в области между обкладками создается только зарядом обкладки A . Поэтому разность потенциалов между обкладками, согласно формуле (3.30),

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Подставив в (5.6) значение $\varphi_1 - \varphi_2$, получим

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (5.9)$$

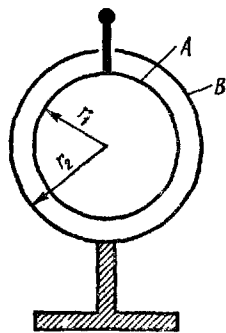


Рис. 5.3

При $r_2 \rightarrow \infty$ внутреннюю обкладку сферического конденсатора можно рассматривать как уединенный шар. В этом случае $(1/r_2) \rightarrow 0$ и формула (5.9) совпадает с (5.5): $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1$.

При любом конечном значении $r_2 > r_1$

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1 \frac{r_2}{r_2 - r_1} > 4\pi\epsilon_0\epsilon r_1,$$

т. е. емкость сферического конденсатора больше емкости уединенного шара радиуса r_1 .

Если $r_2 - r_1 = l \ll r_1$, то можно считать $r_2 \approx r_1$. Тогда

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1^2}{l} = \frac{\epsilon_0\epsilon 4\pi r_1^2}{l} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{l},$$

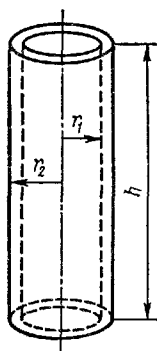


Рис. 5.4

т. е. емкость сферического конденсатора можно вычислять как емкость плоского конденсатора.

Электростатическое поле между обкладками сферического конденсатора обладает центральной симметрией. Поэтому его применяют при весьма точных лабораторных исследованиях.

7. Ц и л и н д р и ч е с к и й к о н д е н с а т о р состоит из двух полых коаксиальных металлических цилиндров с радиусами r_1 и r_2 , вставленных один в другой (рис. 5.4). Пусть заряды на обкладках равны $q > 0$ и $-q$, а высота цилиндров $h \gg r_1$ и r_2 . Тогда, пренебрегая искажениями поля вблизи краев конденсатора, можно вычислить разность потенциалов между обкладками по формуле (3.27) для поля, создаваемого бесконечно длинным прямым цилиндром радиуса r_1 , равномерно заряженным с постоянной линейной плотностью $\tau = q/h$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Подставив значение $\varphi_1 - \varphi_2$ в (5.6), получим выражение для емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon h}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (5.10)$$

Если зазор $l = r_2 - r_1$ между обкладками цилиндрического конденсатора мал по сравнению с r_1 , то $\ln(r_2/r_1) \approx (r_2 - r_1)/r_1$ и

$$C \approx \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon h r_1}{r_2 - r_1} = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{l},$$

где $S = 2\pi r_1 h$ — площадь обкладки, $l = r_2 - r_1$ — толщина слоя диэлектрика.

8. Из формул, полученных для емкости конденсаторов различной формы, следует, что емкость любого конденса-

тора пропорциональна относительной диэлектрической проницаемости вещества, заполняющего зазор между обкладками.

Конденсатор характеризуется не только электроемкостью, но и так называемым «пробивным напряжением» — разностью потенциалов между его обкладками, при которой может произойти пробой, т.е. электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе. Величина пробивного напряжения зависит от свойств диэлектрика, его толщины и формы обкладок.

§ 5.3. Соединения конденсаторов

1. Для получения больших электроемкостей конденсаторы соединяют параллельно (рис. 5.5). Пусть электроемкости отдельных конденсаторов равны C_1, C_2, \dots, C_n . Так как все они заря-

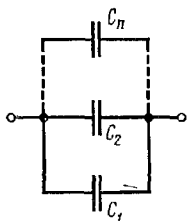


Рис. 5.5

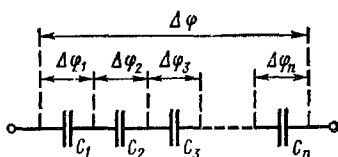


Рис. 5.6

жены до одной и той же разности потенциалов $\Delta\varphi$, то их заряды равны:

$$q_1 = C_1\Delta\varphi, \quad q_2 = C_2\Delta\varphi, \quad \dots, \quad q_n = C_n\Delta\varphi,$$

а заряд всей батареи конденсаторов

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \Delta\varphi.$$

С другой стороны, $q = C\Delta\varphi$, где C — электроемкость батареи. Поэтому

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (5.11)$$

При параллельном соединении конденсаторов их общая электроемкость равна сумме электроемкостей отдельных конденсаторов.

2. При последовательном соединении конденсаторов (рис. 5.6) полная разность потенциалов распределяется между отдельными конденсаторами, причем потенциал соединенных между собой пластин соседних конденсаторов одинаков, а весь заряд батареи равен заряду каждого конденсатора в отдельности. Введем следующие обозначения: C — электроемкость батареи, C_i — электроемкость i -го

конденсатора и $\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i$ — разность потенциалов на зажимах

батареи. Так как $\Delta\varphi_i = q/C_i$, то $\Delta\varphi = q/C = q \sum_{i=1}^n 1/C_i$, откуда

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (5.12)$$

При последовательном соединении конденсаторов величина, обратная их общей электроемкости, равна сумме величин, обратных электроемкостям отдельных конденсаторов. Таким образом, в этом случае электроемкость C батареи всегда меньше минимальной электроемкости конденсатора, входящего в батарею.

Преимущество последовательного соединения состоит в том, что на каждый конденсатор падает лишь часть разности потенциалов, поданной на всю батарею, чем уменьшается возможность пробоя конденсаторов. Уменьшение электроемкости батареи при последовательном соединении конденсаторов можно компенсировать параллельным включением отдельных групп последовательно соединенных конденсаторов (см., например, рис. 5.7).

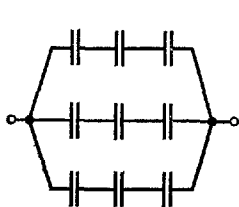


Рис. 5.7

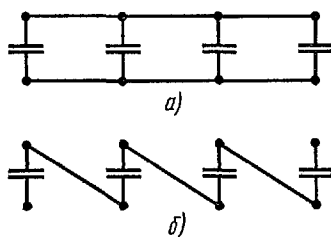


Рис. 5.8

3. Если n одинаковых конденсаторов с электроемкостью C каждый соединить сначала параллельно (рис. 5.8, а) и зарядить до разности потенциалов $\Delta\varphi$, а затем, не разряжая, соединить их последовательно (рис. 5.8, б), то на зажимах батареи появится разность потенциалов, равная $n\Delta\varphi$. На этом принципе основано устройство **импульсного генератора**, позволяющего получать разности потенциалов в миллионы вольт.

Импульсный генератор применяется, например, в электротехнике при изучении кратковременных перенапряжений, возникающих в различных установках под влиянием грозových разрядов и других причин.

§ 5.4. Типы электрометров

1. В § 4.1 был описан один из простейших электрометров. Чувствительность этих приборов невелика, разности потенциалов, которые ими можно измерить, лежат в пределах от 100 до 15 000 В.

Для повышения чувствительности электрометра необходимо резко увеличить силу, действующую на его подвижную часть при сообщении ей малого по величине заряда. Этого можно добиться, поместив подвижную часть электрометра во вспомогательное постоянное электрическое поле. Примером прибора такого типа может служить **струнный электрометр**, принципиальная схема которого изображена на рис. 5.9. Его подвижная часть представляет собой платиновую нить L диаметром порядка 1 мкм, натянутую вертикально и прикрепленную нижним концом к кварцевой дужке D . Нить помещена между двумя призмами (ножами) A и B , которые можно зарядить до некоторой разности потенциалов. Если нить заряжена положительно, то она отклоняется в сторону отрицательно заряженной призмы, и наоборот. Емкость этого электрометра очень мала; он позволяет измерять разность потенциалов с точностью до 1 мВ. Так как масса нити незначительна, то струнный электрометр обладает малой инерционностью. Он регистрирует и измеряет быстро изменяющиеся со временем заряды. Отсчеты производятся либо с помощью микроскопа с окулярной шкалой, либо путем фотографирования.

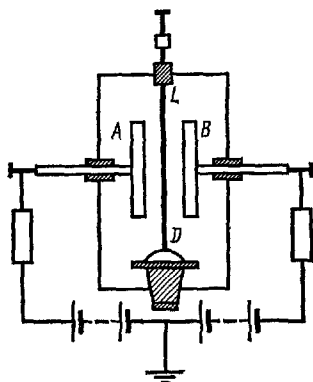


Рис. 5.9

2. Устройство так называемого **абсолютного электрометра** основано на явлении взаимного притяжения разноименно заряженных пластин конденсатора (см. § 5.2). Еще М. В. Ломоносов, заметив, что наэлектризованная чашка весов притягивается к железной плите, на которой были установлены весы, сделал вывод, что электрическую силу можно измерять весами. Эта идея Ломоносова была осуществлена В. Томсоном лишь во второй половине XIX в. Построенный им абсолютный электрометр позволяет измерять разность потенциалов в абсолютных единицах без предварительной градуировки.

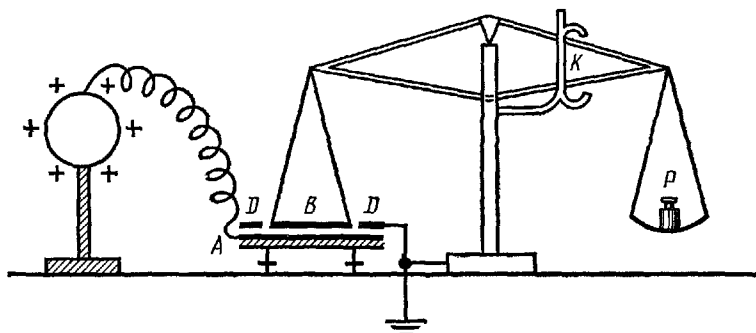


Рис. 5.10

Главную часть этого прибора (рис. 5.10) составляет конденсатор AB с охранным кольцом D . Нижняя пластина изолирована от подставки и может быть установлена на желаемом расстоянии от верхней пластины B . Пластины A соединяют с проводником, потенциал которого измеряется. Пластина B , сделанная из алюминия, подвешена к коромыслу весов и заземлена через подвес. Охранное кольцо D , отделенное от пластины небольшим зазором, обеспечивает однородность поля между пластинами A и B и также соединено с землей. Упоры K ограничивают движение коромысла при нарушении равновесия.

Сила F , с которой притягиваются друг к другу пластины A и B , уравнивается грузом P , положенным на правую чашку весов: $F = P$. Сила F , согласно уравнению (5.8), где $\epsilon = -1$ (воздух), равна

$$F = \epsilon_0 E^2 S / 2.$$

Поскольку $F = P$, а $E = \Delta\varphi / d$, где $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов между пластинами конденсатора, d — расстояние между ними, то

$$P = \epsilon_0 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 S / 2d^2, \quad (5.13)$$

откуда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = d \sqrt{2P / \epsilon_0 S}. \quad (5.14)$$

Отсюда, зная числовые значения d , S и P , можно определить абсолютное значение разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между пластинами конденсатора.

Абсолютный электрометр служит для измерения больших разностей потенциалов: от нескольких тысяч до сотен тысяч вольт. С помощью этого прибора градуируют другие электрометры.

Вопросы для повторения

1. Что называется электроемкостью уединенного проводника и от чего она зависит?
2. Что называется взаимной электроемкостью двух проводников и от чего она зависит?
3. В каких случаях следует применять те или иные способы соединения конденсаторов?
4. Объясните принцип действия струнного и абсолютного электрометров.

Примеры решения задач

Задача 5.1. В схеме, изображенной на рис. 5.11, а, электрические емкости $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 1$ мкФ. Вычислить общую емкость системы, включенной между клеммами A и B .

Дано:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ C_2 &= 1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ C_{AB} &= ? \end{aligned}$$

Решение. Участок цепи DE состоит из двух соединенных параллельно ветвей, в одной из которых включены последовательно три одинаковые емкости C_1 , а в другой — емкость C_2 . По формуле (5.11) емкость C_{DE} этого участка цепи равна сумме емкостей обеих ветвей: $C_{DE} = C' + C_2$, где C' — емкость первой ветви, которую находим по формуле (5.12):

$$\frac{1}{C'} = \frac{3}{C_1}, \text{ т. е. } C' = \frac{C_1}{3}, \text{ и}$$

$$C_{DE} = C_2 + C_1/3 = (3C_2 + C_1)/3. \quad (\text{а})$$

Заменяем участок цепи DE одной эквивалентной ему емкостью C_{DE} (рис. 5.11, б). Тогда искомая емкость C_{AB} будет равна сумме емкостей двух параллельных ветвей, одна из которых содержит емкости C_2 , C_{DE} и C_1 , соединенные последовательно, а другая — емкость C_2 . Обозначим общую емкость первой ветви через C'' , тогда по формуле (5.11) $C_{AB} = C'' \parallel C_2$, причем

$$\frac{1}{C''} = \frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_{DE}}.$$

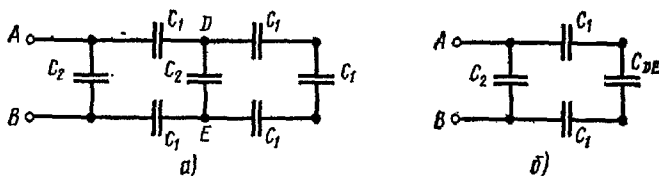


Рис. 5.11

Заменяв емкость C_{DE} ее выражением (а), получим

$$\frac{1}{C''} = \frac{2}{C_1} + \frac{3}{3C_2 + C_1} = \frac{6C_2 + 5C_1}{3C_2C_1 + C_1^2}, \quad C'' = \frac{3C_2C_1 + C_1^2}{6C_2 + 5C_1}.$$

$$C_{AB} = C_2 + \frac{3C_2C_1 + C_1^2}{6C_2 + 5C_1} = \frac{6C_2^2 + 8C_2C_1 + C_1^2}{6C_2 + 5C_1}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$C_{AB} = \frac{6C_2^2 + 8C_2C_1 + C_1^2}{6C_2 + 5C_1} = \frac{(6 + 8 \cdot 2 + 4) \cdot 10^{-12}}{(6 + 5 \cdot 2) \cdot 10^{-2}} \text{ Ф} = 1,62 \cdot 10^{-8} \text{ Ф}.$$

Задача 5.2. При измерении разности потенциалов в 20 кВ с помощью абсолютного электрометра сила взаимного притяжения обкладок конденсатора уравновешивается гирей в 18 г. Какова площадь подвижной пластины конденсатора, если расстояние между пластинами равно 0,5 см?

Дано:

$$P = 18 \cdot 981 \cdot 10^{-5} \text{ Н} = 0,177 \text{ Н}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ В}$$

$$d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\epsilon = 1 \text{ (воздух)}$$

$S = ?$

Решение. Из выражения (5.14) для разности потенциалов между пластинами конденсатора абсолютного электрометра следует, что площадь подвижной пластины равна

$$S = 2Pd^2/\epsilon_0(\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$S = \frac{2Pd^2}{\epsilon_0(\varphi_1 - \varphi_2)^2} = \frac{2 \cdot 0,177 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^8} \text{ м}^2 = 25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 25 \text{ см}^2.$$

Глава VI

ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 6.1. Дипольные моменты молекул диэлектрика

1. В этой главе будут рассмотрены электрические свойства непроводящих веществ — диэлектриков.

Согласно представлениям классической физики, диэлектрики отличаются от проводников тем, что при не слишком высоких температурах и в отсутствие очень сильных электрических полей в них нет носителей заряда. В гл. XIII показано, что трактовка свойств кристаллических диэлектриков в современной физике существенно отличается от указанной выше.

2. Каждая молекула (или атом) диэлектрика содержит положительно заряженные ядра и электроны, движущиеся вокруг ядер. Суммарный положительный заряд всех ядер в молекуле равен абсолютной величине заряда всех электронов, так что молекула в целом электрически нейтральна. Однако это не означает, что молекулы не имеют электрических свойств. Заменяв все положительные заряды ядер молекулы одним суммарным зарядом $+q$, находящимся в центре тяжести положительных зарядов, а все отрицательные заряды — одним суммарным отрицательным зарядом $-q$, расположенным в центре тяжести отрицательных зарядов, можно в первом приближении рассматривать молекулу диэлектрика как диполь, состоящий из зарядов $+q$ и $-q$. Как известно из § 2.2, такой диполь имеет электрический момент \mathbf{p}_e и создает электрическое поле. Таким образом, молекула вещества может создавать в окружающем пространстве электрическое поле.

3. В молекулах некоторых диэлектриков (H_2 , N_2 , CCl_4 , углеводороды и др.) электроны расположены симметрично вокруг ядер. В этих молекулах центры тяжести положительных и отрицательных зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и дипольный момент молекулы $\mathbf{p}_e = 0$. Поэтому молекулы таких диэлектриков называются **неполярными**.

Если неполярную молекулу диэлектрика поместить во внешнее электростатическое поле, то в ней индуцируется (наводится) дипольный момент \mathbf{p}_e . Рассмотрим, например, что произойдет с атомом водорода, помещенным в электростатическое поле. Для простоты будем считать, что электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиуса r (рис. 6.1, а). Если отсутствует внешнее поле, то на электрон действует одна лишь электрическая сила \mathbf{F}_e его притяжения к ядру, численно равная, согласно формуле (1.8), $F_e = e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Эта сила сообщает электрону центростремительное ускорение, численно равное $(v^2/r) = \omega^2 r$, поэтому

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\omega^2 r, \quad (6.1)$$

где m — масса электрона, ω — угловая скорость его движения по орбите. Из (6.1) легко определить радиус орбиты электрона.

Пусть на атом водорода действует внешнее электрическое поле, вектор \mathbf{E} напряженности которого перпендикулярен плоскости орбиты электрона. Под влиянием поля орбита электрона деформируется. В первом приближении можно считать, что эта деформация заключается в смещении плоскости орбиты электрона на малое расстояние

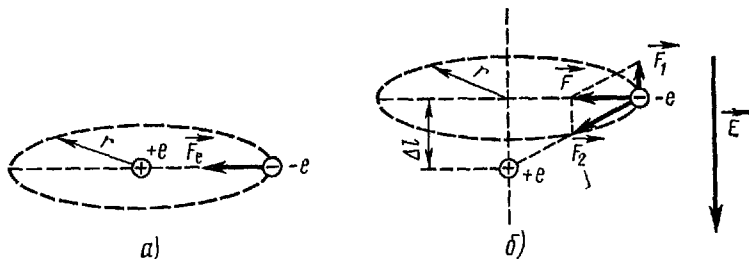


Рис. 6.1

$\Delta l (\Delta l \ll r)$ в направлении, противоположном направлению \mathbf{E} , причем радиус r орбиты и угловая скорость ω электрона не изменяются (рис. 6.1; б). Теперь роль центростремительной силы будет играть равнодействующая \mathbf{F} сил, приложенных к электрону со стороны внешнего электрического поля (\mathbf{F}_1) и со стороны ядра (\mathbf{F}_2): $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, где $F = m\omega^2 r$ и $F_1 = eE$. Из рис. 6.1, б следует, что

$$\frac{\Delta l}{r} = \frac{F_1}{F} = \frac{eE}{m\omega^2 r}, \text{ откуда } \Delta l = eE/m\omega^2.$$

Смещение орбиты электрона, а следовательно, и центра тяжести его заряда по отношению к ядру под влиянием внешнего электрического поля пропорционально напряженности этого поля. Смещение Δl аналогично упругой деформации, поэтому диполь, возникший в атоме водорода, называют упругим диполем. Электрический момент ρ_e упругого диполя численно равен

$$\rho_e = e\Delta l = e^2 E/m\omega^2,$$

или, если использовать формулу (6.1),

$$\rho_e = 4\pi\epsilon_0 r^3 E = \epsilon_0 \alpha E.$$

где $\alpha = 4\pi r^3$ — множитель, пропорциональный третьей степени радиуса орбиты, т.е. объему атома, и называемый **поляризуемостью атома**. Результат, полученный в этом примере, имеет общее значение. Индуцированный дипольный момент неполярной молекулы всегда пропорционален напряженности внешнего электрического поля, причем поляризуемость этой молекулы зависит только от ее объема. Вектор ρ_e совпадает по направлению с вектором \mathbf{E} напряженности внешнего электрического поля:

$$\rho_e = \epsilon_0 \alpha \mathbf{E}. \quad (6.2)$$

4. Большую группу диэлектриков составляют вещества, в молекулах которых электроны расположены несимметрично относительно ядер. В таких молекулах центры тяжести положительных и отрицательных зарядов не совпадают, и молекулы этих диэлектриков характеризуются наличием постоянного дипольного электрического момента \mathbf{p}_e , определяемого их структурой. Молекулы указанного типа называются **полярными**. Диэлектриками с полярными молекулами являются H_2O , NH_3 , HCl , CH_3Cl и другие вещества. Наличие постоянного дипольного момента \mathbf{p}_e молекул этой группы диэлектриков позволяет приблизительно считать, что такие молекулы ведут себя подобно жесткому диполю, расстояние l между зарядами $+q$ и $-q$ которого постоянно и не зависит от того, действует на него внешнее электрическое поле или нет. Поэтому формула (6.2) к полярным диэлектрикам неприменима. Однако это не означает, что внешнее электростатическое поле не оказывает существенного влияния на жесткий диполь, помещенный в это поле.

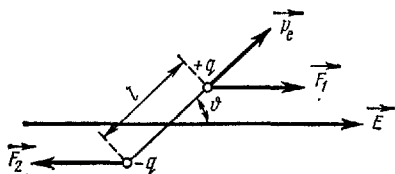


Рис. 6.2

но жесткому диполю, расстояние l между зарядами $+q$ и $-q$ которого постоянно и не зависит от того, действует на него внешнее электрическое поле или нет. Поэтому формула (6.2) к полярным диэлектрикам неприменима. Однако это не означает, что внешнее электростатическое поле не оказывает существенного влияния на жесткий диполь, помещенный в это поле.

5. Предположим, что в однородное электростатическое поле помещен жесткий диполь так, что вектор \mathbf{p}_e его дипольного момента направлен под углом ϑ к вектору напряженности \mathbf{E} внешнего поля (рис. 6.2). Как видно из рисунка, на диполь действует пара сил: $\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_2 = -q\mathbf{E}$. Момент \mathbf{M} этой пары сил численно равен

$$\mathbf{M} = qEl \sin \vartheta = \mathbf{p}_e E \sin \vartheta. \quad (6.3)$$

Вектор момента \mathbf{M} равен векторному произведению векторов:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_e \mathbf{E}]. \quad (6.3')$$

Вектор \mathbf{M} направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы \mathbf{p}_e и \mathbf{E} (плоскость чертежа), причем из конца \mathbf{M} вращение от \mathbf{p}_e к \mathbf{E} по кратчайшему пути видно происходящим против часовой стрелки. В примере, изображенном на рис. 6.2, вектор \mathbf{M} направлен от нас за чертеж. Момент \mathbf{M} пары сил стремится повернуть диполь и установить его так, чтобы направления векторов \mathbf{p}_e и \mathbf{E} совпадали. Если пренебречь инерцией диполя, то необходимо считать, что после установления оси диполя вдоль поля он остановится. При этом силы, действующие на оба заряда жесткого диполя, равны по абсолютному значению и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Они стремятся изменить расстояние l между зарядами $-q$ и $+q$. Если диполь жесткий, то действие этих сил должно быть компенсировано внутримолекулярными силами связи. Однако, как показывает опыт, действие внешнего поля всегда приводит к некоторой деформации молекулы и появлению индуцированного дипольного момента (см. § 6.2).

6. Предположим, что жесткий диполь находится в неоднородном электрическом поле, так что на длине l диполя происходит заметное

изменение напряженности E поля. В этом случае помимо вращающего момента на диполь будет действовать сила F , равная векторной сумме сил F_1 и F_2 , приложенных к обоим зарядам диполя:

$$F = F_1 + F_2 = q(E_1 - E_2), \quad (6.4)$$

где E_1 и E_2 — напряженности поля в тех точках, в которых находятся, соответственно, положительный и отрицательный заряды диполя. По теореме о среднем,

$$E_1 - E_2 = l(\partial E/\partial l),$$

где l — длина диполя, а производная $\partial E/\partial l$ характеризует быстроту изменения вектора на единицу длины вдоль оси диполя. Следовательно,

$$F = ql \frac{\partial E}{\partial l} = p_e \frac{\partial E}{\partial l}. \quad (6.5)$$

Под действием силы F свободный диполь стремится переместиться в область наибольшей напряженности поля. Этим объясняется притяжение к заряженному телу легких предметов (небольших кусочков бумаги, частиц пыли, дыма и т. д.): под влиянием поля на них появляются индуцированные электрические заряды и эти предметы ведут себя аналогично диполям.

В векторном анализе доказано, что выражение (6.5) можно представить в форме

$$F = p_{ex} \frac{\partial E}{\partial x} + p_{ey} \frac{\partial E}{\partial y} + p_{ez} \frac{\partial E}{\partial z}, \quad (6.5')$$

где p_{ex} , p_{ey} , p_{ez} — проекции вектора p_e на оси декартовой системы координат. В частности, для простейшего неоднородного поля, вектор E которого всюду направлен вдоль оси X и зависит только от координаты x ($E_x = E(x)$, $E_y = E_z = 0$ и $E = E_x i$),

$$F = p_{ex} \frac{dE_x}{dx} i.$$

Силу, действующую на жесткий диполь в неоднородном электрическом поле, можно также выразить в виде

$$F = \text{grad}(p_e E). \quad (6.5'')$$

§ 6.2. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации

1. При внесении диэлектрика в электрическое поле происходит так называемая поляризация диэлектрика. Для рассмотрения этого явления выясним, как ведет себя совокупность молекул-диполей, помещенных в электрическое поле.

Если диэлектрик с полярными молекулами находится во внешнем электрическом поле, то вследствие беспорядочного теплового движения молекул векторы их дипольных моментов

ориентированы хаотично. Поэтому векторная сумма дипольных моментов всех молекул, содержащихся в произвольном объеме ΔV диэлектрика, равна нулю¹. Дипольный момент каждой молекулы диэлектрика, состоящего из неполярных молекул, при отсутствии внешнего электрического поля равен нулю.

2. Иная картина наблюдается при внесении диэлектрика в электрическое поле. Под действием поля полярные молекулы диэлектрика (жесткие диполи) стремятся повернуться таким образом, чтобы векторы их дипольных моментов (\mathbf{p}_e) совпали по направлению с \mathbf{E} . Однако тепловое движение молекул хаотически «разбрасывает» диполи и препятствует установлению их векторов \mathbf{p}_e вдоль поля. В результате совместного действия обеих причин в диэлектрике возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул вдоль поля (рис. 6.3). Эта ориентация будет тем более полной, чем сильнее электрическое поле в диэлектрике и слабее тепловое движение молекул, т.е. чем ниже температура. Описанный процесс называется **ориентационной поляризацией** диэлектрика с полярными молекулами.

3. Неполярные молекулы приобретают в электрическом поле индуцированные дипольные моменты за счет деформации электронных орбит. Момент \mathbf{p}_e упругого диполя создается в каждой частице, причем в не очень сильных полях, и при не слишком большой плотности вещества формула (6.2) для момента \mathbf{p}_e изолированной молекулы остается справедливой для каждой молекулы, находящейся в некотором объеме ΔV диэлектрика². Очень существенно, что электрические дипольные моменты наводятся в таких молекулах всегда в направлении действующего электрического поля независимо от температуры диэлектрика и связанного с нею теплового движения (рис. 6.4). Тепловое движение, хаотически разбрасывая упругие диполи, не влияет на смещение центров тяжести положительных и отрицательных зарядов в молекулах под действием электрического поля. В этом случае происходит так называемая **электронная поляризация** диэлектрика. Практически в жидких и газообразных диэлектриках наблюдается одновременно и ориентационная, и электронная поляризация.

3. Неполярные молекулы приобретают в электрическом поле индуцированные дипольные моменты за счет деформации электронных орбит. Момент \mathbf{p}_e упругого диполя создается в каждой частице, причем в не очень сильных полях, и при не слишком большой плотности вещества формула (6.2) для момента \mathbf{p}_e изолированной молекулы остается справедливой для каждой молекулы, находящейся в некотором объеме ΔV диэлектрика². Очень существенно, что электрические дипольные моменты наводятся в таких молекулах всегда в направлении действующего электрического поля независимо от температуры диэлектрика и связанного с нею теплового движения (рис. 6.4). Тепловое движение, хаотически разбрасывая упругие диполи, не влияет на смещение центров тяжести положительных и отрицательных зарядов в молекулах под действием электрического поля. В этом случае происходит так называемая **электронная поляризация** диэлектрика. Практически в жидких и газообразных диэлектриках наблюдается одновременно и ориентационная, и электронная поляризация.

и электронная поляризация.

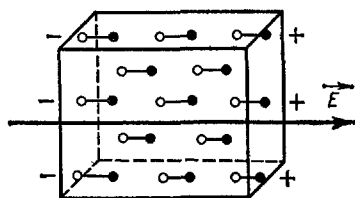


Рис. 6.4

¹ Объем ΔV должен быть во много раз больше объема одной молекулы.

² При этом под E в формуле (6.2) нужно понимать напряженность поля в диэлектрике, действующего на данную молекулу. Иными словами, нужно учитывать также поле, создаваемое всеми остальными молекулами диэлектрика.

4. В кристаллических диэлектриках, имеющих кубические ионные кристаллические решетки (например, NaCl, CsCl), под действием электрического поля все положительные ионы смещаются в направлении напряженности \mathbf{E} , а все отрицательные ионы — в противоположном направлении. При этом внутри кристалла в каждой единице объема содержится одинаковое число положительных и отрицательных ионов, а на каждой из двух противоположных граней ограниченного кристалла, перпендикулярных вектору напряженности электрического поля, находятся ионы какого-либо одного знака. Такой вид поляризации называется **ионной поляризацией**.

5. Количественной мерой поляризации диэлектрика служит вектор поляризации \mathbf{P}_e . Вектором поляризации или **поляризованностью** называют отношение дипольного электрического момента малого объема ΔV диэлектрика к этому объему:

$$\mathbf{P}_e = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{ei}$$

где \mathbf{p}_{ei} — дипольный момент i -й молекулы, n — общее число молекул в объеме ΔV . Этот объем должен быть столь малым, чтобы в его пределах электрическое поле можно было считать однородным¹. В то же время в нем должно содержаться еще столь большое число молекул диэлектрика ($n \gg 1$), чтобы к ним можно было применять статистические методы исследования.

В Международной системе единиц (СИ) вектор поляризации выражается в кулонах на квадратный метр (Кл/м²).

В случае однородного диэлектрика с неполярными молекулами, находящегося в электрическом поле,

$$\mathbf{P}_e = n_0 \mathbf{p}_e$$

где n_0 — концентрация молекул, т. е. их число в единице объема. Это следует из того, что векторы \mathbf{p}_e всех молекул имеют одинаковое направление — вдоль напряженности \mathbf{E} поля в диэлектрике. Используя формулу (6.2), получим

$$\mathbf{P}_e = n_0 \epsilon_0 \alpha \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (6.6)$$

Коэффициент

$$\chi = n_0 \alpha \quad (6.7)$$

называется **диэлектрической восприимчивостью** вещества.

6. П. Дебай показал, что в случае слабых электрических полей формула (6.6) справедлива также для диэлектриков с полярными молекулами. Диэлектрическая восприимчивость такого диэлектрика в слабых полях выражается формулой

$$\chi = n_0 p_p^2 / (3 \epsilon_0 k T), \quad (6.7')$$

¹ Речь идет об однородности макроскопического поля (см. § 21.1, 21.4).

где p_e — постоянный электрический дипольный момент молекулы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

При увеличении напряженности электрического поля или понижении температуры линейная зависимость $P_e(E)$ для диэлектриков с полярными молекулами нарушается (рис. 6.5). С увеличением E дости-

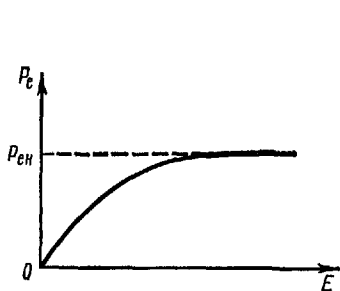


Рис. 6.5

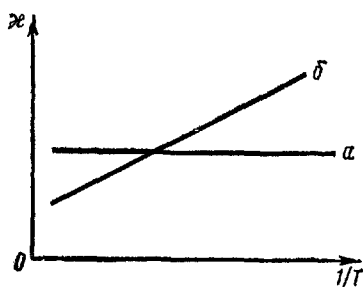


Рис. 6.6

гается такое состояние, когда дипольные моменты практически всех молекул направлены вдоль поля. Дальнейшее усиление поля уже не может вызывать увеличения P_e , так как наступает «насыщение» (горизонтальная часть кривой на рис. 6.5), характеризующееся постоянной величиной $P_e = P_{ен}$.

На рис. 6.6 представлена зависимость диэлектрической восприимчивости χ от $1/T$ в случае неполярных (а) и полярных (б) молекул. Как уже указывалось, в полярных молекулах наблюдается не только ориентационная, но и электронная поляризация. Поэтому прямая б, показывающая уменьшение диэлектрической восприимчивости при нагревании диэлектрика с полярными молекулами, не проходит через начало координат.

Фактически в этом случае χ состоит из двух частей:

$$\chi = \chi' + \chi'',$$

где χ' и χ'' выражаются соответственно формулами (6.7) и (6.7').

7. Вектор поляризации совпадает по направлению с вектором напряженности поля и связан с ним соотношением (6.6) только в электрически изотропной среде. Диэлектрическая восприимчивость анизотропной среды (например, кристаллической) — величина тензорная. Ее значение различно вдоль разных направлений. В такой среде связь между векторами P_e и E имеет вид более сложный, чем (6.6):

$$\left. \begin{aligned} P_{ex} &= \epsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z), \\ P_{ey} &= \epsilon_0 (\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z), \\ P_{ez} &= \epsilon_0 (\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z). \end{aligned} \right\} \quad (6.6')$$

Значения χ_{xx} , χ_{xy} , ..., χ_{zz} зависят не только от природы и состояния электрически анизотропной среды, но и от ориентации осей координат (X, Y, Z) по отношению к характерным для этой среды направ-

лениям (ее кристаллографическим осям). Из (6.6') видно, что в общем случае в анизотропной среде проекции векторов \mathbf{P}_e и \mathbf{E} на оси координат не пропорциональны друг другу, а потому и сами векторы \mathbf{P}_e и \mathbf{E} неколлинеарны. В дальнейшем мы будем рассматривать только электрически изотропные диэлектрики.

8. Если диэлектрик однороден и находится в однородном электрическом поле, то и поляризован он тоже однородно, т.е. во всех его точках значения вектора поляризации одинаковы. При этом любой элемент его объема ΔV , содержащий большое число молекул, остается нейтральным благодаря взаимной компенсации противоположных по знаку зарядов диполей, расположенных друг возле друга (см. рис. 6.3 и 6.4). Иначе обстоит дело в тонких слоях у поверхностей диэлектрика, ограничивающих его объем.

Вследствие поляризации диэлектрика (при любом ее типе) у той его поверхности, в которую входят силовые линии внешнего поля, получается избыток отрицательных зарядов — отрицательно заряженных концов молекул-диполей. У противоположной поверхности, из которой выходят силовые линии, возникает избыточный положительный заряд. Эти так называемые **поляризационные заряды** распределяются на поверхности диэлектрика с поверхностной плотностью σ_p .

Найдем связь между σ_p и \mathbf{P}_e на примере однородно поляризованной пластины из диэлектрика, находящейся в однородном электрическом поле. Выделим в диэлектрике цилиндрический элемент, малые основания которого площадью dS каждое находятся на поверхностях пластины, а образующие Z параллельны вектору поляризации \mathbf{P}_e (рис. 6.7). Пусть нормаль \mathbf{n} к правому основанию цилиндра составляет угол α с вектором \mathbf{P}_e . На каждом из оснований цилиндра находится связанный заряд, численно равный $\sigma_p dS$. Рассматривая этот цилиндр как большой диполь, можно вычислить его электрический дипольный момент $d\mathbf{p}_e$ по формуле

$$d\mathbf{p}_e = \sigma_p L dS.$$

По определению, числовое значение вектора поляризации

$$P_e = \sigma_p L dS / dV, \quad (6.8)$$

где dV — объем цилиндра, равный $dV = dS_{\perp} L$; здесь $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$ — площадь проекции основания косоуго цилиндра на плоскость, перпендикулярную направлению \mathbf{P}_e . Подставив выражение для dV в (6.8), получим

$$P_e \cos \alpha = \frac{\sigma_p L dS}{L dS} = \sigma_p.$$

Величина $P_e \cos \alpha$ равна проекции P_{en} вектора \mathbf{P}_e на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика. Таким образом,

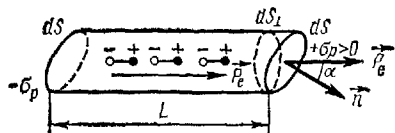


Рис. 6.7

$$\sigma_p = P_{en}. \quad (6.9)$$

9. Выражение (6.9) для поверхностной плотности поляризационных зарядов, полученное в предположении однородности поляризации диэлектрика, универсально. Оно в равной мере справедливо и для неоднородно поляризованного диэлектрика (например, для диэлектрика, находящегося в неоднородном поле). Однако при неоднородной поляризации диэлектрика кроме поверхностных поляризационных зарядов могут также возникать объемные поляризационные заряды, распределенные с объемной плотностью

$$\rho_p = -\operatorname{div} P_e, \quad (6.9')$$

где $\operatorname{div} P_e = \frac{\partial P_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial P_{ey}}{\partial y} + \frac{\partial P_{ez}}{\partial z}$ — дивергенция вектора поляризации.

§ 6.3. Теорема Остроградского—Гаусса для поля в веществе. Связь векторов электрического смещения, напряженности и поляризации

1. При изучении электрического поля в диэлектрике различают два типа электрических зарядов — свободные и связанные. **Связанными зарядами** называют заряды, входящие в состав атомов и молекул, а также заряды ионов в кристаллических диэлектриках с ионной решеткой. Все остальные заряды называют **свободными зарядами**. К ним относятся: а) заряды носителей тока, т.е. заряженных частиц, которые под действием электрического поля могут перемещаться на макроскопические расстояния (например, электроны проводимости в металлах, ионы в электролитах и газах и т. п.); б) избыточные заряды, сообщенные телу и нарушающие его электрическую нейтральность (например, избыточный заряд положительных ионов металла, возникший вследствие удаления из металла части электронов проводимости, заряд, нанесенный извне на поверхность диэлектрика, и т. д.).

В диэлектрике на электрическое поле свободных зарядов накладывается дополнительное электрическое поле связанных зарядов. Вектор напряженности E характеризует результирующее поле в диэлектрике. Поэтому он должен зависеть от электрических свойств диэлектрика (от его относительной диэлектрической проницаемости ϵ). Поле связанных зарядов возникает в результате поляризации диэлектрика при его помещении во внешнее электрическое поле, созданное какой-либо системой свободных зарядов. Таким образом, первичным источником электрического поля в веществе являются свободные заряды.

2. В связи с классификацией зарядов на свободные и связанные нужно уточнить формулировку теоремы Остроградского—Гаусса. Из вывода соотношения (2.28), приведенного в § 2.4, видно, что

$\sum_{i=1}^k q_i = q_{\text{своб}}$ — алгебраическая сумма свободных зарядов,

охватываемых замкнутой поверхностью S :

$$\oint_S D_n dS = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{своб}} \quad (6.10)$$

Итак, теорема Остроградского—Гаусса утверждает, что поток смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью.

При доказательстве теоремы, приведенном в § 2.4, мы предполагали, что среда, в которой создано электростатическое поле, изотропна и однородна. Покажем, что теорема Остроградского—Гаусса в форме (6.10) справедлива для поля в любой среде — изотропной и анизотропной, однородной и неоднородной. Попутно мы установим также связь между векторами электрического смещения, напряженности поля и поляризации, являющуюся обобщением формулы (2.19), справедливой только для изотропных сред.

3. Для электрического поля в вакууме $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ и из (6.10) следует, что поток вектора напряженности \mathbf{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен

$$\oint_S \epsilon_0 E_n dS = q_{\text{своб}} \quad (6.10')$$

Поле в среде отличается от поля в вакууме тем, что оно создается как свободными, так и связанными зарядами. Следовательно, в самом общем случае в правую часть уравнения (6.10') нужно добавить алгебраическую сумму связанных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S :

$$\oint_S \epsilon_0 E_n dS = q_{\text{своб}} + q_{\text{связ}} \quad (6.11)$$

Свободные заряды создают «внешнее» поляризующее поле, а связанные заряды — добавочное поле поляризованного диэлектрика. Пусть, например, слой однородного диэлектрика заключен между двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными с постоянными поверхностными плотностями свободных зарядов $\sigma > 0$ и $-\sigma$ (рис. 6.8). В результате поляризации диэлектрика на его поверхностях AA' и BB' возникают связанные заряды, поверхностные плотности которых соответственно равны $-\sigma_p$ и $\sigma_p > 0$. Из рис. 6.8 видно, что электрическое поле \mathbf{E}_p связанных зарядов направлено против внешнего поля \mathbf{E}_0 , созданного свободными зарядами. Напряженность результирующего поля $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p) < \mathbf{E}_0$.

4. Найдем сумму связанных зарядов $q_{\text{связ}}$, охватываемых замкнутой поверхностью S . Каждая молекула-диполь диэлектрика электрически нейтральна. Поэтому вклад в $q_{\text{связ}}$ дают только те диполи,

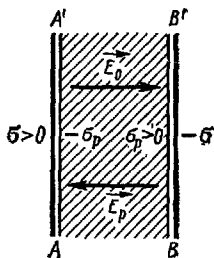


Рис. 6.8

которые разрезаются поверхностью S . Предположим ради простоты, что рассматриваемый диэлектрик состоит из неполярных молекул. На рис. 6.9, *a* изображен столь малый элемент ΔS поверхности S , что его можно считать плоским, а поле в его пределах — однородным. Тогда вблизи элемента ΔS все диполи расположены параллельно друг

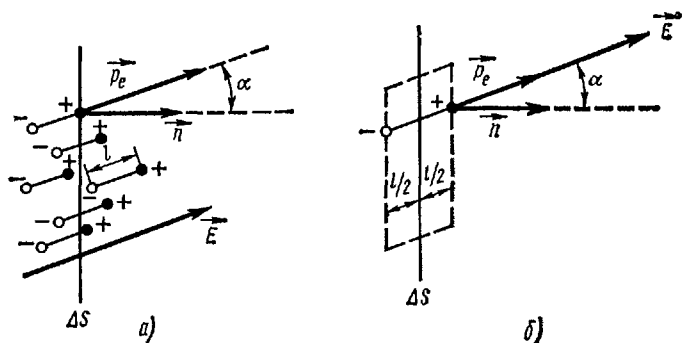


Рис. 6.9

другу, так как их наведенные электрические моменты \mathbf{p}_e направлены вдоль вектора \mathbf{E} . Площадка ΔS разрезает только те диполи (рис. 6.9, б), центры которых лежат слева и справа от площадки ΔS на расстояниях, не превосходящих $l |\cos \alpha|/2$, где l — длина диполя, а α — угол между внешней нормалью \mathbf{n} к площадке ΔS и моментом диполя \mathbf{p}_e . Этому условию удовлетворяют все диполи, центры которых лежат внутри объема $l \Delta S |\cos \alpha|$. Если n_0 — концентрация молекул в диэлектрике, то число диполей, разрезанных площадкой ΔS , равно $n_0 l \Delta S |\cos \alpha|$. Вклад каждого такого диполя в сумму связанных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S , равен $-q$ [где $q = (p_e/l) > 0$], если угол α острый (именно этот случай изображен на рис. 6.9), и равен q , если угол α тупой. В первом случае $|\cos \alpha| = \cos \alpha$ и $-q |\cos \alpha| = -q \cos \alpha$, а во втором $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ и $q |\cos \alpha| = -q \cos \alpha$. Поэтому в обоих случаях общий связанный заряд, соответствующий элементу поверхности ΔS ,

$$\Delta q_{\text{связ}} = -q n_0 l \cos \alpha \cdot \Delta S = -n_0 p_e \cos \alpha \cdot \Delta S. \quad (6.12)$$

Для диэлектрика с неполярными молекулами $n_0 p_e = P_e$ — модуль вектора поляризации и

$$\Delta q_{\text{связ}} = -P_e \cos \alpha \cdot \Delta S = -P_{en} \Delta S, \quad (6.13)$$

где P_{en} — проекция вектора поляризации на внешнюю нормаль к площадке ΔS . Из (6.13) следует, что связанный заряд, охватываемый замкнутой поверхностью S ,

$$q_{\text{связ}} = - \oint_S P_{en} dS. \quad (6.14)$$

5. Подставим значение (6.14) для $q_{\text{связ}}$ в формулу (6.11):

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n dS = q_{\text{своб}} - \oint_S P_{en} dS.$$

Перенесем оба интеграла по поверхности S в одну часть равенства и заменим их сумму интегралом от суммы подинтегральных функций:

$$\oint_S (\varepsilon_0 E_n + P_{en}) dS = q_{\text{своб}}. \quad (6.15)$$

Это уравнение совпадает с (6.10), если принять, что вектор электрического смещения

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad (6.16)$$

и соответственно

$$D_n = \varepsilon_0 E_n + P_{en}$$

Соотношение (6.16) между векторами \mathbf{D} , \mathbf{E} и \mathbf{P}_e является обобщением уравнения (2.19). В самом деле, для изотропной среды вектор поляризации пропорционален напряженности поля [см. (6.6)] и

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (6.17)$$

где

$$\varepsilon = 1 + \chi. \quad (6.18)$$

Таким образом, мы показали, что относительная диэлектрическая проницаемость изотропного диэлектрика равна его диэлектрической восприимчивости, увеличенной на единицу. Для вакуума $\varepsilon = 1$ и $\chi = 0$.

6. В 1922 г. впервые были получены так называемые **электреты** — изготовленные из диэлектриков тела, которые сохраняют в течение длительного времени состояние поляризации и создают электрическое поле в окружающем пространстве. Для получения электретов применяют ряд диэлектриков, обладающих низкой проводимостью при повышенных температурах (смеси из различных сортов воска и смол, некоторые полимеры, эбонит, серу, титанаты ряда металлов и др.). Основной способ перевода тела в электретное состояние заключается в нагреве тела до температуры, близкой к температуре плавления (в случае полимеров — температуры стеклования), а затем выдержке и постепенном охлаждении в сильном электрическом поле с напряженностью порядка 10 МВ/м. Такие электреты называют **термоэлектретами**.

Существуют и другие способы получения электретного состояния. Например, пластинка поликристаллической серы может быть переведена в так называемое фотоэлектретное состояние при одновременном действии на нее сильного внешнего электрического поля и света (фотополяризация).

§ 6.4. Сегнетоэлектрики

1. Относительная диэлектрическая проницаемость большинства кристаллических диэлектриков почти не изменяется с изменением температуры. Это означает, что диэлектрические свойства твердых тел связаны с перераспределением зарядов внутри молекул и не зависят от теплового движения последних. Другими словами, в

твердых диэлектриках имеет место индуцированная электронная поляризация. Ориентационная поляризация, как правило, не наблюдается даже в кристаллах, построенных из дипольных молекул¹. Дело в том, что молекулы в кристаллах весьма сильно взаимодействуют друг с другом и при обычных по величине напряженностях полярные молекулы не в состоянии поворачиваться вдоль поля. Поэтому относительная диэлектрическая проницаемость вещества в твердом состоянии обычно меньше, чем в жидком. Например, для воды при 18°C $\epsilon = 80,4$, а для льда при -18°C $\epsilon = 3,2$.

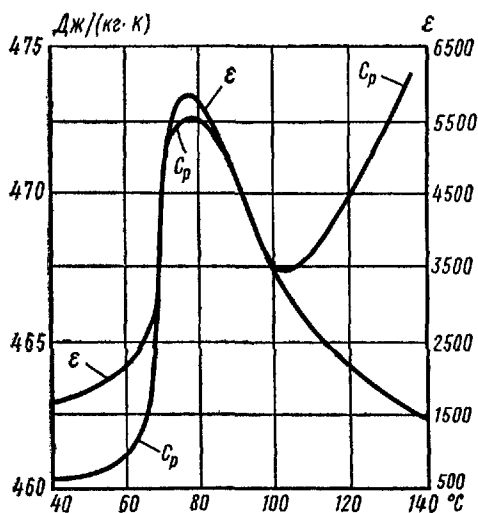


Рис. 6.10

2. Существует группа кристаллических диэлектриков, называемых **сегнетоэлектриками**, которые обладают рядом своеобразных электрических свойств. Своё название они получили по первому исследованному веществу этого типа — сегнетовой соли ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$). Свойства сегнетовой соли были изучены группой работников под руководством И. В. Курчатова. Представителем сегнетоэлектриков является также титанат бария (BaTiO_3), исследованный Б. М. Вулом и его сотрудниками.

3. Характерной особенностью сегнетоэлектриков является резкое возрастание относительной диэлектрической проницаемости в определенном интервале температур. На рис. 6.10 приведена температурная зависимость ϵ для титаната бария. При температурах порядка 120°C ϵ имеет значения, близкие к 2000. При понижении температуры до некоторого значения θ (для BaTiO_3 $\theta = 80^\circ\text{C}$) ϵ резко возрастает, достигая нескольких тысяч после чего вновь уменьшается с понижением температуры.

¹ Одним из немногих исключений являются кристаллы соляной кислоты. Как показал И. В. Курчатов, в кристаллах HCl происходит ориентационная поляризация.

4. Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ и диэлектрическая восприимчивость χ сегнетоэлектриков зависят от напряженности E поля в веществе, тогда как в остальных диэлектриках ϵ и χ являются их характеристиками, не зависящими от E . На рис. 6.11 приведена кривая $\epsilon = \epsilon(E)$. Аналогичный вид имеет и кривая $\chi = \chi(E)$. Поэтому в сегнетоэлектриках отсутствует прямая пропорцио-



Рис. 6.11

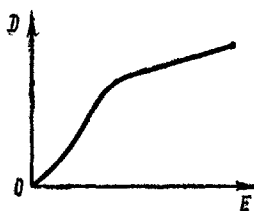


Рис. 6.12

нальность между вектором поляризации P_e и напряженностью электрического поля E . Для сегнетоэлектриков, так же как и для диэлектриков с полярными молекулами, характерно явление насыщения, состоящее в том, что начиная с некоторого достаточно большого значения напряженности поля E вектор поляризации не изменяется (см. рис. 6.5).

На основании рис. 6.11 можно сказать, что при не очень сильных полях зависимость электрического смещения D от напряженности поля E в сегнетоэлектрике нелинейная. Нелинейное возрастание D с ростом E сменяется линейным лишь при очень больших значениях E (рис. 6.12).

5. Большие значения относительной диэлектрической проницаемости, наблюдаемые у сегнетоэлектриков, обусловлены особенностями процесса поляризации в этих веществах. Оказалось, что монокристалл сегнетоэлектрика разбит на ряд самопроизвольно поляризованных областей — доменов. Эта самопроизвольная (спонтанная) поляризация является результатом ориентации дипольных моментов всех молекул внутри домена в некотором определенном направлении. Однако при отсутствии внешнего поля области спонтанной поляризации располагаются так, что электрические дипольные моменты различных доменов компенсируют друг друга и средняя поляризация достаточно большого монокристалла или поликристалла равна нулю. При внесении кристалла сегнетоэлектрика во внешнее электрическое поле происходит переориентация электрических моментов доменов и весь кристалл оказывается поляризованным.

6. Опыт показывает, что спонтанная ориентация дипольных моментов, ведущая к образованию доменов, происходит у сегнетоэлектриков в определенном температурном интервале между так называемыми точками Кюри — верхней и нижней¹. Для сегнетовой соли $\theta_{\text{верхн}} =$

¹ Свое название эти температуры получили по аналогии с точкой Кюри ферромагнитных веществ (см. § 20.6).

$= 297 \text{ К}$, $\theta_{\text{нижн}} = 255 \text{ К}$. При температуре, равной верхней точке Кюри, силы взаимодействия между диполями уже не в состоянии противодействовать тепловому движению, вследствие чего нарушается ориентация в областях спонтанной поляризации. Вблизи точки Кюри в сегнетоэлектриках наблюдается резкое возрастание теплоемкости вещества. На рис. 6.10 приведена зависимость c_p от температуры для титаната бария.

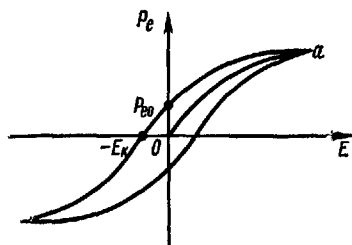


Рис. 6.13

Превращение сегнетоэлектрика в обычный полярный диэлектрик, происходящее в точке Кюри, является примером фазового перехода. Выше точки Кюри существует неупорядоченная фаза, причем в отсутствие внешнего поля диэлектрик не поляризован. Ниже точки Кюри имеется упорядоченная фаза, характеризующаяся наличием спонтанной поляризации в доменах.

Спонтанная поляризация доменов исчезает при нагреве сегнетоэлектрика до верхней точки Кюри либо скачком — фазовый переход 1-го рода (например, у титаната бария), либо плавно уменьшаясь по мере приближения к этой температуре — фазовый переход 2-го рода (например, у сегнетовой соли).

7. Для сегнетоэлектриков характерно явление диэлектрического гистерезиса («гистерезис» по-гречески значит «запаздывание»). Как видно из рис. 6.13, с увеличением напряженности E внешнего электрического поля числовое значение вектора поляризации сегнетоэлектрика растет и достигает насыщения (в точке a). Если затем постепенно напряженность внешнего поля довести до нуля, то вектор поляризации, уменьшаясь, достигает значения P_{e0} (остаточная поляризация). Лишь при наложении некоторого поля обратного направления ($-E_K$) поляризация исчезает полностью. Величина E_K называется **коэрцитивной силой**. При периодическом изменении поляризации диэлектрика затрачивается электрическая энергия, которая расходуется на нагревание сегнетоэлектрика. Площадь петли гистерезиса пропорциональна плотности этой энергии (т.е. электрической энергии, превращающейся во внутреннюю энергию в единице объема сегнетоэлектрика за один цикл). Легко убедиться в том, что размерность $P_e E$ или DE совпадает с размерностью плотности энергии.

8. Сегнетоэлектрики имеют большое практическое значение в современной электро- и радиотехнике. Их используют для изготовления конденсаторов большой емкости и малых размеров, для модуляции частоты электромагнитных колебаний и т. д.

§ 6.5. Пьезоэлектрический эффект

1. Пьезоэлектрический эффект, открытый в 1880 г. братьями Жаком и Полем Кюри, состоит в том, что на гранях некоторых кристаллов при их сжатии или растяжении появляются заряды,

подобные поляризационным. К таким кристаллам относятся кварц, турмалин, сегнетова соль, сахар, цинковая обманка, титанат бария и др.

2. Рассмотрим пьезоэлектрические свойства кристалла кварца (рис. 6.14). Главная ось кристалла Z называется **оптической**, а оси X_1 , X_2 и X_3 , перпендикулярные ей, — **электрическими** осями.

Для изучения пьезополяризационных зарядов кристалла проведем следующий опыт. Закрепив кристалл кварца так, как показано на рис. 6.15, будем сжимать его в направлении одной из электрических осей. При сжатии кристалла на его ребрах возникают заряды, знаки которых указаны на рис. 6.15. Для количественного исследования зарядов к граням кристалла прикрепляют узкие станиоловые полоски — электроды K_1 и K_2 , соединенные с чувствительным электрометром. Опыты показывают, что поверхностная плотность пьезополяризационных зарядов $\sigma_{pp} = q_{pp}/S$ пропорциональна упругому напряжению в кристалле.

При сжатии или растяжении кристалла заряды появляются всегда на концах какой-либо из электрических осей. Поэтому для пьезоэлектрических опытов из кристалла вырезают плоскопараллельные пластинки так, чтобы одна пара граней у каждой из них была перпендикулярна одной из электрических осей (рис. 6.16).

Пусть плоскопараллельная пластинка вырезана таким образом, что ее ребро d (толщина) направлено параллельно электрической оси X , ребро b (высота) — параллельно оптической оси Z , а ребро l (длина) — параллельно оси Y , перпендикулярной осям X и Z . Если подвергнуть эту пластинку деформациям сжатия и растяжения в направлениях осей X , Y и Z , то можно прийти к следующим выводам:

а) сжатие вдоль оси X вызывает появление разноименных зарядов на обеих гранях, нормальных к оси X (**продольный прямой пьезоэлектрический эффект**);

б) растяжение вдоль оси Y вызывает появление разноименных зарядов на обеих гранях, нормальных к оси X (**поперечный прямой пьезоэлектрический эффект**);

в) при растяжении пластинки вдоль оси X или сжатии ее вдоль оси Y знаки зарядов на указанных гранях изменяются на противоположные;

г) сжатие или растяжение вдоль оси Z не вызывает пьезоэлектрического эффекта.

Пьезоэлектрический эффект используется для измерения напряжений, возникающих в отдельных частях машин, зданий и других сооружений.

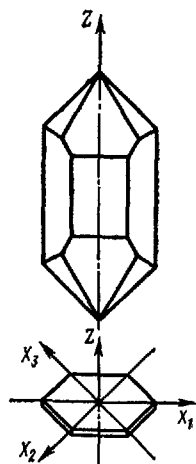


Рис. 6.14

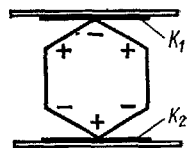


Рис. 6.15

3. Наблюдается явление, обратное пьезоэлектрическому эффекту. В этом случае также различают продольный и поперечный эффекты, которые состоят в следующем: при внесении кварцевой пластинки в электрическое поле, направленное вдоль оси X , пластинка деформируется не только в направлении оси X (**продольный обратный пьезоэлек-**

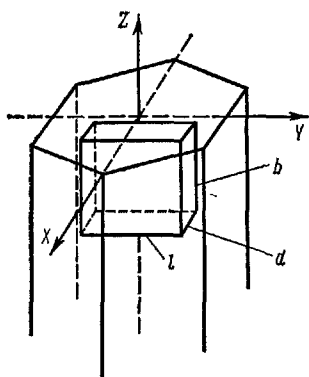


Рис. 6.16

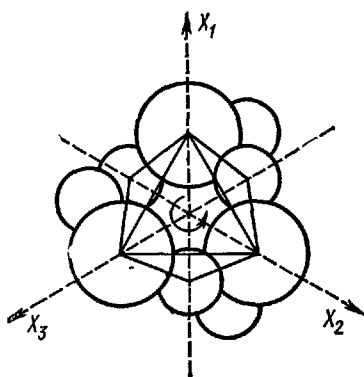


Рис. 6.17

трический эффект), но и в направлении оси Y (**поперечный обратный пьезоэлектрический эффект**), причем растяжение пластинки вдоль оси X сопровождается ее сжатием вдоль оси Y . Изменение направления электрического поля вызывает изменение характера деформации вдоль осей X и Y .

4. Чем же объясняются пьезоэлектрические свойства кварца? Рассмотрим этот вопрос с молекулярной точки зрения. Результаты рентгеноструктурного исследования кварца (SiO_2) позволяют в первом приближении представить размещение ионов кремния и кислорода в шестиугольных структурных ячейках так, как это показано на рис. 6.17, плоскость которого перпендикулярна оптической оси Z кристалла. Большие кружки обозначают ионы Si , маленькие — ионы O .

Каждый ион Si обладает положительным зарядом $+4e$, а каждый ион O — зарядом $-2e$, где e — элементарный электрический заряд. В ячейке (рис. 6.17) заряды всех ионов взаимно компенсируются, и в целом она электрически нейтральна. Если для упрощения рассматривать каждую пару ионов O как одну частицу с зарядом $-4e$, то ячейка, изображенная на рис. 6.17, принимает форму, показанную на рис. 6.18, а.

Предположим теперь, что такая структурная ячейка сжимается в направлении электрической оси X_1 (рис. 6.18, б). Тогда ион Si — 1 сдвигается внутрь ячейки и занимает место между ионами O —2 и O —6, а ион O —4 оказывается между ионами Si —3 и Si —5. Вследствие этого на поверхности A ячейки возникает отрицательный заряд, а на поверхности B — положительный, т.е. имеет место продольный прямой пьезоэлектрический эффект. Если же сжатие происходит в

направлении, перпендикулярном оси X_1 (рис. 6.18, в), то ионы Si—3 и O—2 смещаются влево, а ионы Si—5 и O—6 — вправо. На поверхностях C и D добавочные заряды не возникают. На поверхностях A и B появляются заряды, противоположные по знаку тем, которые наблюдались в первом случае, так как теперь ионы Si—1 и O—4 выдвигаются

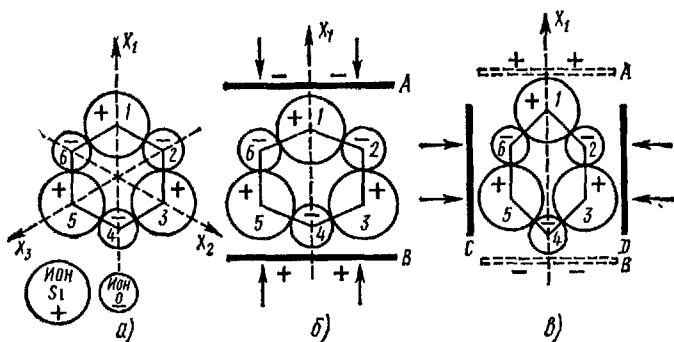


Рис. 6.18

из ячейки. Таким образом, возникает поперечный прямой пьезоэлектрический эффект. На модели структурной ячейки легко объяснить изменение знаков поверхностных зарядов на обратные в случае растяжения, а также тот факт, что сжатие или растяжение вдоль оси Z не может вызвать никакой асимметрии в расположении зарядов в ячейке.

Пользуясь моделью ячейки, можно рассмотреть и обратный пьезоэлектрический эффект. Если внешнее электрическое поле направлено параллельно оси X_1 , то ион Si—1 смещается к поверхности A , а ион O—4 — к поверхности B ; кристалл удлиняется в направлении оси X_1 и сжимается в направлении, перпендикулярном ей (рис. 6.18, в).

5. Если электрическое поле периодически меняется с частотой, равной частоте собственных механических колебаний пластинки пьезокварца, то пластинка приходит в резонансные колебания. Эти колебания передаются окружающей среде и распространяются в ней в виде волн.

При определенных размерах пластинки частота ее резонансных колебаний достигает 10^5 — 10^7 Гц. Такие колебания называются ультразвуковыми (ухо человека слышит звуковые колебания, частоты которых заключены в пределах от 16 до 20 000 Гц). Свойства и применения ультразвуковых волн рассмотрены в третьем томе курса.

Вопросы для повторения

1. Что происходит с неполярными молекулами диэлектриков во внешнем электрическом поле?
2. Как действует электрическое поле на жесткий диполь?
3. В чем состоит различие в поляризации диэлектриков с полярными и неполярными молекулами?
4. Каков физический смысл вектора поляризации?

5. Найдите связь между векторами электрического смещения, напряженности поля и поляризации.

6. Найдите связь между относительной диэлектрической проницаемостью среды и ее диэлектрической восприимчивостью.

7. Чем отличаются сегнетоэлектрики от прочих диэлектриков?

8. В чем состоят прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты?

Примеры решения задач

Задача 6.1. Обкладки плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1 кВ, изолированы друг от друга пластиной из диэлектрика. Какова относительная диэлектрическая проницаемость материала пластины, если при ее удалении разность потенциалов между обкладками конденсатора возрастает до 3 кВ?

Дано:

$$\Delta\varphi_1 = 1000 \text{ В}$$

$$\Delta\varphi_2 = 3000 \text{ В}$$

$$\varepsilon_2 = 1 \text{ (воздух)}$$

$$\varepsilon_1 = ?$$

Решение. По формуле (5.6), разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\Delta\varphi = q/C.$$

Пусть $\Delta\varphi_1$ и C_1 — соответственно разность потенциалов и емкость конденсатора с пластиной из диэлектрика, а $\Delta\varphi_2$ и C_2 — те же величины после удаления пластины. Заряд конденсатора в обоих случаях одинаков. Поэтому $\Delta\varphi_1 C_1 = \Delta\varphi_2 C_2$, или

$$C_1 : C_2 = \Delta\varphi_2 : \Delta\varphi_1.$$

Из формулы (5.7) для емкости плоского конденсатора следует

$$C_1 : C_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 (\Delta\varphi_2 / \Delta\varphi_1).$$

Произведем вычисления в СИ:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_1} = \frac{3000}{1000} = 3.$$

Задача 6.2. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1 кВ, зажата стеклянная пластина ($\varepsilon = 7$) толщиной 3 мм. Определить плотность связанных (поляризационных) зарядов на ее поверхности.

Дано:

$$\Delta\varphi = 1000 \text{ В}$$

$$\varepsilon = 7$$

$$d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\sigma_p = ?$$

Решение. По формуле (6.9) поверхностная плотность поляризационных зарядов равна проекции вектора поляризации на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика: $\sigma_p = P_{en}$. Из (6.16) следует

$$P_{en} = D_n - \varepsilon_0 E_n.$$

Векторы электрического смещения \mathbf{D} и напряженности \mathbf{E} поля плоского конденсатора нормальны к поверхностям стеклянной пластины, прилегающей к обкладкам. Поэтому $D_n = \pm D$ и $E_n = \pm E$, где знак плюс соответствует поверхности стеклянной пластины, прилегающей к отрицательно заряженной обкладке, а знак минус — поверхности пластины, прилегающей к положительно заряженной обкладке. Поляризационные заряды на первой поверхности пластины положительны (их поверхностная плотность $\sigma_p > 0$), а на второй — отрицатель-

ны и распределены с такой же по абсолютному значению поверхностной плотностью. Полагая в (6.16) $D_n = D$ и $E_n = E$, находим

$$\sigma_p = D - \epsilon_0 E.$$

Поскольку $D = \epsilon_0 \epsilon E$, а $E = \Delta\varphi/d$, где $\Delta\varphi$ и d — соответственно разность потенциалов и расстояние между обкладками конденсатора, получаем

$$\sigma_p = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \Delta\varphi/d.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$\sigma_p = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \frac{\Delta\varphi}{d} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot \frac{1000}{3 \cdot 10^{-3}} \text{ Кл/м}^2 = 1,77 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2.$$

Глава VII

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

§ 7.1. Энергия заряженного проводника и энергия электрического поля

1. Во всех выводах этого параграфа будем предполагать, что отдельные электрические заряды и заряженные тела находятся в однородной изотропной среде, не обладающей сегнетоэлектрическими свойствами.

Заряжая уединенный проводник, необходимо совершить работу против кулоновских сил отталкивания между одноименными электрическими зарядами. Эта работа идет на увеличение электрической энергии заряженного проводника, которая, таким образом, аналогична потенциальной энергии в механике.

Рассмотрим уединенный проводник, емкость, заряд и потенциал которого соответственно равны C , q , φ . При перенесении заряда dq из бесконечности на проводник совершается работа против сил электростатического поля

$$dA' = \varphi dq = C\varphi d\varphi.$$

Для того чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до потенциала φ , необходимо совершить работу

$$A' = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (7.1)$$

Следовательно, энергия заряженного уединенного проводника (ее часто называют собственной энергией заряженного проводника).

$$W_e = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\varphi q}{2}. \quad (7.2)$$

Путем аналогичных расчетов легко показать, что энергия заряженного конденсатора

$$W_e = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \Delta\varphi q. \quad (7.2')$$

где C и q — емкость и заряд конденсатора, $\Delta\varphi$ — разность потенциалов положительно и отрицательно заряженных обкладок.

2. В общем случае свободные заряды могут быть распределены непрерывно по объему диэлектрика или вакуума и по поверхностям заряженных проводников и наэлектризованного диэлектрика. Энергия такой системы зарядов, как показывают расчеты, равна

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{S_{\text{заряж}}} \varphi \sigma dS + \frac{1}{2} \int_{V_{\text{заряж}}} \varphi \rho dV. \quad (7.2'')$$

В этой формуле σ и ρ — поверхностная и объемная плотности свободных зарядов, φ — потенциал результирующего поля всех поверхностных и объемных зарядов в точках малого элемента заряженной поверхности dS или заряженного объема dV , а интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям $S_{\text{заряж}}$ и объемам $V_{\text{заряж}}$. Влияние диэлектрика на энергию W_e сказывается в том, что при неизменном распределении свободных зарядов значения φ в разных диэлектриках различны. Например, в однородном изотропном диэлектрике, заполняющем все поле, φ меньше, чем в вакууме, в ϵ раз.

Легко видеть, что из (7.2"), в частности, следуют формулы (7.2) и (7.2'). В самом деле, для уединенного заряженного проводника $\rho = 0$ и потенциал φ во всех точках поверхности проводника одинаков. Поэтому

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{S_{\text{заряж}}} \varphi \sigma dS = \frac{\varphi}{2} \int_{S_{\text{заряж}}} \sigma dS = \frac{q\varphi}{2}.$$

Для конденсатора $\rho = 0$ и

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{S_{\text{заряж}}} \varphi \sigma dS = \frac{1}{2} (\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2),$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы обкладок, q_1 и q_2 — их заряды ($q_2 = -q_1$). Если первая обкладка заряжена положительно, то $q_1 = q > 0$ — заряд конденсатора и в согласии с (7.2') его энергия

$$W_e = q(\varphi_1 - \varphi_2)/2.$$

3. В качестве примера вычислим энергию заряженного плоского конденсатора. Емкость такого конденсатора по формуле (5.7) равна $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$, а разность потенциалов между обкладками $\Delta\varphi = Ed$, где E — напряженность его однородного поля. Подставив в (7.2') эти выражения для C и $\Delta\varphi$, получим

$$W_e = \epsilon\epsilon_0 E^2 V/2, \quad (7.3)$$

где $V = Sd$ — объем поля конденсатора.

Формула (7.3) связывает энергию, затраченную на зарядку конденсатора, с основной характеристикой его электрического поля — напряженностью E . Формулы (7.2') и (7.3) позволяют дать две различные трактовки энергии W_e . Исходя из (7.2') можно утверждать, что W_e — это энергия системы зарядов на обкладках конденсатора, т.е. что носителями электрической энергии являются сами заряды. С другой стороны, основываясь на (7.3), можно утверждать, что W_e — энергия электрического поля конденсатора, т.е. что она распределена по всему объему поля, которое тем самым является ее носителем. Электростатическое поле неотделимо от его источников — неподвижных электрических зарядов. Поэтому, оставаясь в рамках электростатики, нельзя отдать предпочтение какому-либо из двух вышеприведенных утверждений относительно локализации энергии W_e .

Из курса физики средней школы известно, что электростатическое поле представляет собой простейший случай электромагнитного поля. Изучение переменных электромагнитных полей показало, что они могут существовать отдельно от породивших их систем электрических зарядов и токов, а их распространение в пространстве в виде электромагнитных волн связано с переносом энергии. Тем самым было доказано, что электромагнитное поле обладает энергией. Соответственно и электростатическое поле тоже обладает энергией, распределенной в нем с объемной плотностью w_e . Энергия W_e поля плоского конденсатора в силу однородности поля должна быть распределена равномерно по всему его объему V . Из (7.3) следует, что объемная плотность энергии электрического поля конденсатора

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{DE}{2}. \quad (7.4)$$

4. Исследования неоднородных электрических полей, создаваемых произвольными заряженными телами, показали, что для них формула (7.3) неприменима, тогда как выражение (7.4) остается справедливым и определяет объемную плотность энергии в каждой точке любого электрического поля в изотропной среде.

Поэтому энергия бесконечно малого объема dV поля равна

$$dW_e = w_e dV = \epsilon_0 \epsilon E^2 dV / 2. \quad (7.5)$$

Интегрируя это уравнение по всему объему поля, находим полную энергию W_e электростатического поля:

$$W_e = \int_{V_{\text{поля}}} \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV. \quad (7.6)$$

Если среда анизотропна, то объемная плотность энергии электрического поля в такой среде

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{DE}. \quad (7.4')$$

Это выражение является обобщением формулы (7.4) которая вытекает из (7.4'), так как в изотропной среде векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} совпадают по направлению.

5. Можно показать, что для электростатического поля, создаваемого произвольным заряженным телом, полная энергия поля, так же как и в случае плоского конденсатора, равна собственной энергии этого тела:

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2} = \int_{V_{\text{поля}}} \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV, \quad (7.7)$$

где q , φ и C — заряд, потенциал и емкость тела соответственно.

Докажем справедливость выражения (7.7) на примере неоднородного электростатического поля шара радиуса R с зарядом $q > 0$, равномерно распределенным по поверхности шара.

На расстоянии r от центра заряженного шара напряженность его электростатического поля по формуле (3.29) равна

$$E = E_r = q/(4\pi\epsilon_0\epsilon r^2).$$

Подсчитаем по формуле (7.5) энергию dW_e поля, приходящуюся на бесконечно тонкий шаровой слой, заключенный между сферами с радиусами r и $r + dr$ (рис. 7.1). Объем такого слоя $dV = 4\pi r^2 dr$. Подставим значения E и dV в формулу (7.5):

$$dW_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{dr}{r^2}.$$

Полная энергия поля заряженного шара равна

$$W_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon R}.$$

Если учесть, что емкость заряженного шара определяется формулой (5.5) $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$, то энергия его электростатического поля

$$W_e = q^2/2C,$$

т.е. равна его собственной энергии (7.2).

6. Соотношение (7.7) можно обобщить на электростатическое поле, создаваемое произвольной системой зарядов. Полная энергия такой системы (например, любой системы заряженных проводников), выражаемая формулой (7.2'), совпадает с полной энергией электростатического поля этой системы зарядов:

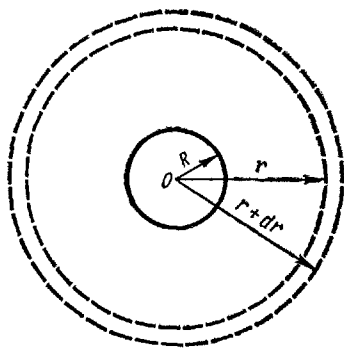


Рис. 7.1

$$\frac{1}{2} \int_{S_{\text{заряж}}} \varphi \sigma dS + \frac{1}{2} \int_{V_{\text{заряж}}} \varphi \rho dV = \int_{V_{\text{поля}}} w_e dV. \quad (7.7')$$

§ 7.2. Энергия поляризованного диэлектрика

1. Предположим, что однородный изотропный диэлектрик помещен во внешнее электрическое поле. При этом диэлектрик поляризуется. Процесс поляризации, как электронной, так и ориентационной, связан с работой по деформации электронных орбит в атомах и молекулах и по повороту осей молекул-диполей вдоль поля. Очевидно, что поляризованный диэлектрик должен обладать запасом электрической энергии.

В предыдущем параграфе было найдено выражение для объемной плотности энергии электрического поля в веществе с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Если поле напряженностью E

создано в вакууме ($\epsilon = 1$), то объемная плотность энергии этого поля в точке с напряженностью E по формуле (7.4) равна

$$\omega_e (\text{вак}) = \epsilon_0 E^2 / 2. \quad (7.8)$$

2. Докажем, что объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика в той точке, где напряженность поля равна E , выражается формулой

$$\omega_e (\text{диэл}) = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E^2 / 2. \quad (7.9)$$

Рассмотрим диэлектрик с неполярными молекулами (упругими диполями). По формуле (6.2) электрический момент упругого диполя, находящегося в поле \mathcal{E} напряженностью E , равен

$$p_e = \epsilon_0 \alpha E, \text{ или } p_e = ql = \epsilon_0 \alpha E, \quad (7.10)$$

где α — поляризуемость диполя, q и l — соответственно его заряд и длина (плечо). На заряд q со стороны поля действует сила qE , которая при увеличении длины диполя на dl совершает работу $dA = qEdl$. Из формулы (7.10) следует, что $dl = \epsilon_0 \alpha dE / q$, поэтому

$$dA = \epsilon_0 \alpha E dE.$$

Интегрируя это выражение по E от 0 до E , найдем работу A электрического поля при деформации одного упругого диполя:

$$A = \frac{\epsilon_0 \alpha E^2}{2} = \frac{p_e E}{2}. \quad (7.11)$$

Работа A равна той потенциальной энергии, которой обладает упругий диполь в электрическом поле с напряженностью E . Если в единице объема диэлектрика содержится n_0 диполей, то потенциальная энергия всех этих диполей, т.е. объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика, будет

$$\omega_e (\text{диэл}) = n_0 A = n_0 p_e E / 2. \quad (7.12)$$

Поскольку $n_0 p_e = P_e$ — модуль вектора поляризации, имеем

$$\omega_e (\text{диэл}) = P_e E / 2. \quad (7.12')$$

Учтя, что по формуле (6.6) $P_e = \epsilon_0 \chi E$ и $\chi = \epsilon - 1$ [см. формулу (6.18)], получим

$$\omega_e (\text{диэл}) = \frac{\epsilon_0 \chi E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) E^2}{2},$$

т.е. объемная плотность энергии поляризованного диэлектрика с неполярными молекулами (упругими диполями) выражается формулой (7.9).

Можно показать, что точно такой же результат получается и для диэлектрика с полярными молекулами (жесткими диполями).

Из формул (7.8), (7.9) и (7.4) следует, что

$$\omega_e (\text{вак}) + \omega_e (\text{диэл}) = \omega_e.$$

Вопросы для повторения

1. Найдите выражение для собственной энергии заряженного проводника.
2. Найдите выражение для объемной плотности энергии электростатического поля.
3. Докажите, что на поляризацию диэлектрика с неполярными молекулами затрачивается энергия.

Примеры решения задач

Задача 7.1. Батарею из двух последовательно соединенных конденсаторов, емкости которых равны $C_1 = 4$ мкФ и $C_2 = 6$ мкФ, зарядили до разности потенциалов $\Delta\varphi = 2$ кВ и отключили от источника напряжения. На сколько уменьшится энергия батареи, если одновременно заряженные обкладки конденсаторов соединить параллельно?

Дано:

$$\begin{aligned} C_1 &= 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ C_2 &= 6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ \Delta\varphi &= 2 \cdot 10^3 \text{ В} \\ W_I - W_{II} &= ? \end{aligned}$$

Решение. Обозначим через W_I энергию батареи при последовательном соединении конденсаторов, а через W_{II} — при их параллельном соединении. По формулам (7.2) имеем

$$W_I = \frac{C_1 \Delta\varphi^2}{2} \quad \text{и} \quad W_{II} = \frac{q_{II}^2}{2C_{II}},$$

где

$$C_1 = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) \quad \text{и} \quad C_{II} = C_1 + C_2$$

— емкости батареи при последовательном и параллельном соединениях конденсаторов C_1 и C_2 , q_{II} — заряд батареи при параллельном соединении конденсаторов.

В случае последовательного соединения конденсаторов их заряды q_1 одинаковы и равны $q_1 = C_1 \Delta\varphi$. При их параллельном соединении происходит перераспределение зарядов между ними и выравнивание разностей потенциалов между их обкладками. Однако в соответствии с законом сохранения зарядов суммарный заряд q_{II} одновременно заряженных обкладок не изменяется, т. е. $q_{II} = 2q_1 = 2C_1 \Delta\varphi$.

Таким образом

$$\begin{aligned} W_I - W_{II} &= \frac{C_1 \Delta\varphi^2}{2} - \frac{4C_1^2 \Delta\varphi^2}{2C_{II}} = \left[\frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} - \frac{2C_1^2 C_2^2}{(C_1 + C_2)^3} \right] \Delta\varphi^2 = \\ &= \frac{C_1 C_2 (C_2 - C_1)^2 \Delta\varphi^2}{2(C_1 + C_2)^3}. \end{aligned}$$

Произведем вычисления в СИ:

$$\begin{aligned} W_I - W_{II} &= \frac{C_1 C_2 (C_2 - C_1)^2 \Delta\varphi^2}{2(C_1 + C_2)^3} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-15}} \text{ Дж} = \\ &= 0,192 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Задача 7.2. Между обкладками плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 1 кВ, зажата стеклянная пластина ($\epsilon = 7$) толщиной 6 мм. Определить энергию поляризованной пластины, если ее площадь 40 см².

Д а н о:

$$S = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$d = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Delta\varphi = 1000 \text{ В}$$

$$\varepsilon = 7$$

$$W_e = ?$$

Р е ш е н и е. Объемная плотность энергии $w_{e(\text{диэл})}$ поляризованного диэлектрика по формуле (7.9) равна

$$w_{e(\text{диэл})} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E^2 / 2.$$

Электрическое поле плоского конденсатора однородно. Поэтому $w_{e(\text{диэл})} = \text{const}$ и энергия W_e поляризованной стеклянной пластины равна произведению ее объема Sd на $w_{e(\text{диэл})}$, т. е.

$$W_e = Sdw_{e(\text{диэл})} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) SdE^2 / 2.$$

Напряженность поля $E = \Delta\varphi/d$, где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов обкладок конденсатора, d — расстояние между ними.

Таким образом,

$$W_e = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) S \Delta\varphi^2 / 2d.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$W_e = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) S \Delta\varphi^2}{2d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} =$$

$$= 1,77 \cdot 10^{-5} \text{ Дж} = 17,7 \text{ мкДж}.$$

Часть IV

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Глава VIII

ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ

§ 8.1. Понятие об электрическом токе

1. В предыдущих главах были рассмотрены основные вопросы электростатики. Явления и процессы, связанные с движением электрических зарядов, составляют особую часть учения об электричестве — электродинамику.

Электростатические явления также сопровождаются движением элементарных электрических зарядов. Однако эти движения либо не влияют на электростатические поля, созданные макроскопическими зарядами, как, например, тепловые колебания ионов кристаллической решетки заряженного металлического проводника, либо очень кратковременны и служат лишь переходом от одного равновесного состояния к другому, например перераспределение электронов проводимости при электростатической индукции или при заземлении заряженного проводника. Поэтому в электростатике, которая изучает явления, связанные в равновесии зарядов, эти процессы не рассматривались.

2. Электродинамика — учение о явлениях, связанных с электрическим током. **Электрическим током** называют всякое упорядоченное движение электрических зарядов. Ток, возникающий в проводнике вследствие того, что в нем создается электрическое поле, называется **током проводимости**. При движении зарядов нарушается их равновесное распределение: поверхность проводника уже не является эквипотенциальной и электрические силовые линии не направлены перпендикулярно ей, так как для движения зарядов необходимо, чтобы на поверхности проводника тангенциальная составляющая напряженности электрического поля не равнялась нулю ($E_{\tau} \neq 0$). Но тогда и внутри проводника должно существовать электрическое поле, ибо, как известно из электростатики, внутри проводника нет поля лишь в случае равновесного распределения зарядов на поверхности этого проводника. Перемещение зарядов — электрический ток — продолжается до тех пор, пока все точки проводника не станут эквипотенциальными.

Таким образом, для появления и существования тока проводимости необходимы два условия.

Первое — наличие в данной среде **носителей заряда**, т.е. заряженных частиц, которые могли бы в ней перемещаться. Такими

частицами, как мы убедимся далее, в металлах являются электроны проводимости; в жидких проводниках (электролитах) — положительные и отрицательные ионы; в газах — положительные ионы и электроны, а также иногда и отрицательные ионы.

Второе — наличие в данной среде электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение электрических зарядов. Для того чтобы ток был длительным, энергия поля должна все время пополняться, иными словами, нужен источник электрической энергии — устройство, в котором осуществляется преобразование какого-либо вида энергии в энергию электрического поля. В зависимости от свойств этих источников в электротехнике различают источники напряжения и источники тока. Поэтому во избежание недоразумений мы будем пользоваться в дальнейшем только термином «источник электрической энергии».

3. Упорядоченное движение зарядов можно осуществить и другим способом — перемещением в пространстве заряженного тела (проводника или диэлектрика). Такой электрический ток называется конвекционным. Например, движение по орбите Земли, обладающей избыточным отрицательным зарядом, можно рассматривать как конвекционный ток.

За направление тока условно принимают направление движения положительных зарядов.

§ 8.2. Сила и плотность тока

1. Для характеристики электрического тока через какую либо поверхность (например, в случае тока проводимости — через поперечное сечение проводника) вводится понятие силы тока. Сила тока¹ называется физическая величина I , равная отношению заряда dq , переносимого через рассматриваемую поверхность S за малый промежуток времени dt , к величине этого промежутка:

$$I = dq/dt. \quad (8.1)$$

Если сила тока и его направление не изменяются с течением времени, то ток называется постоянным. Сила постоянного тока

$$I = q/t, \quad (8.2)$$

где q — заряд, переносимый через поверхность S за конечный промежуток времени t .

Для того чтобы ток проводимости был постоянным, заряды не должны накапливаться или убывать ни в одной части проводника. Поэтому цель постоянного тока должна быть замкнутой, а суммарный электрический заряд, который поступает за одну секунду сквозь поверхность S_1 в объем проводника, заключенный между двумя произвольно выбранными поперечными сечениями S_1 и S_2 (рис. 8.1),

¹ В электротехнике величина I называется просто током. В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим термином.

должен быть равным суммарному заряду, выходящему из этого объема за то же время сквозь поверхность S_2 . Таким образом, сила постоянного тока I во всех сечениях проводника одинакова.

2. Единица силы тока в СИ — ампер (А) — определяется на основании электромагнитного взаимодействия двух параллельных прямолинейных постоянных токов (см. § 15.3). Из формулы (8.2) следует, что один ампер равен силе постоянного электрического тока, при котором через любое поперечное сечение проводника переносится заряд, равный 1 Кл:

$$1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с.}$$

Соответственно единица силы тока в системе СГСЭ

$$1 \text{ СГСЭ}_I = 1 \text{ СГСЭ}_q/c.$$

Таким образом, $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГСЭ}_I$

3. Для характеристики направления электрического тока в различных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности вводится вектор плотности тока. Вектор плотности электрического тока \mathbf{j} совпадает по направлению с движением положительно заряженных частиц — носителей заряда и численно равен отношению силы тока dI сквозь малый элемент поверхности, нормальный к направлению движения заряженных частиц, к площади dS этого элемента:

$$\mathbf{j} = dI/dS_{\perp}. \quad (8.3)$$

В СИ плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр (А/м^2).

Найдем связь между плотностью тока \mathbf{j} и силой тока dI через малый элемент dS поверхности, нормаль к которому составляет с \mathbf{j} угол α . Площадь dS_{\perp} проекции площадки dS на плоскость, нормальную к \mathbf{j} , равна $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$. Поэтому в соответствии с (8.3)

$$dI = j \cos \alpha \cdot dS = j_n dS, \text{ или } dI = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = j_n dS, \quad (8.3')$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный площадке dS , $j_n = j \cos \alpha$ — проекция вектора \mathbf{j} на направление нормали \mathbf{n} , $dS = \mathbf{n} dS$ — вектор элементарной площадки.

4. Из формул (8.3') следует, что сила тока через произвольную поверхность S равна

$$I = \int_S j_n dS = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (8.4)$$

где интегрирование проводится по всей площади этой поверхности. В дальнейшем при нахождении силы тока проводимости мы будем рас-

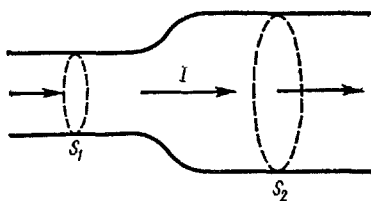


Рис. 8.1

считать поперечные сечения проводника, для которых $dS_1 = dS$ и $j_n = j$, так что

$$I = \int_S j dS. \quad (8.4')$$

Опыты показали, что плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению S однородного проводника. Поэтому для постоянного тока формулу (8.4') можно записать в виде

$$I = jS. \quad (8.5)$$

В цепи постоянного тока, состоящей из проводников с переменной площадью поперечного сечения (рис. 8.1), плотности тока в различных сечениях S_1 и S_2 обратно пропорциональны площадям этих сечений:

$$j_1 : j_2 = S_2 : S_1.$$

§ 8.3. Опытные доказательства электронной проводимости металлов

1. Рассматривая металлические проводники, мы считали, что их электропроводность обусловлена наличием в металлах электронов проводимости. Это предположение было экспериментально подтверждено лишь в начале XX

столетия. Для опыта брали три металлических цилиндра (медный, алюминиевый и медный) одинакового радиуса, соединенных последовательно (рис. 8.2). Через эту цепь в течение очень долгого времени (более года) пропускали ток. В общей сложности

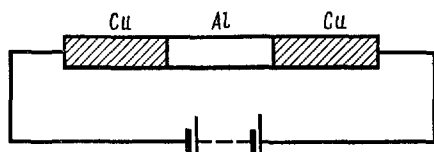


Рис. 8.2

через цилиндры прошел заряд $3,5 \cdot 10^6$ Кл. Однако никаких следов переноса вещества (меди или алюминия) не было обнаружено. Следовательно, электропроводность металлов обусловлена перемещением таких заряженных частиц («носителей заряда»), которые являются общими для всех металлов и не связаны с различием их физических и химических свойств.

2. Для изучения природы носителей заряда в металле рассмотрим следующий опыт. Пусть металлический стержень C длиной l движется поступательно со скоростью v_0 (рис. 8.3, а) В результате взаимодействия с кристаллической решеткой носители заряда в проводнике будут также двигаться со скоростью v_0 . Предположим, что стержень резко тормозится и в момент торможения замыкается неподвижным металлическим проводником B , включенным в цепь гальванометра G (рис. 8.3, б). Очевидно, что носители заряда, не связанные жестко с кристаллической решеткой, будут продолжать двигаться по инерции до тех пор, пока взаимодействие с ионами решетки не остановит их. Поэтому в замкнутой цепи пойдет кратковременный ток, который мож-

но обнаружить с помощью гальванометра G . По направлению этого тока определяют знак движущихся зарядов. Этот опыт позволяет также найти отношение заряда q к массе m носителя заряда. В самом деле, при торможении проводника кинетическая энергия носителей заряда расходуется на работу тока в замкнутой цепи. По закону Джоуля—

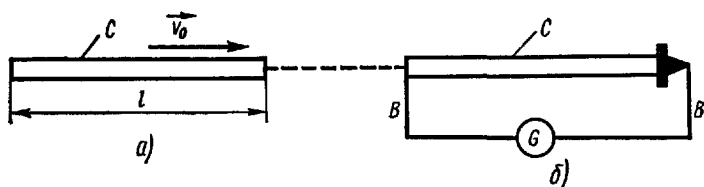


Рис. 8.3

Ленца (см. § 9.3), работа, совершаемая током I за время dt в цепи с сопротивлением R ,

$$dA = I^2 R dt. \quad (8.6)$$

Пусть v — скорость носителей заряда в произвольный момент времени t , а N — общее число этих частиц в стержне. Тогда работа

$$dA = -Nd \left(\frac{mv^2}{2} \right) = -Nmv dv = -n_0 S l m v dv. \quad (8.6')$$

где l и S — соответственно длина и площадь поперечного сечения стержня, n_0 — концентрация частиц-носителей заряда в стержне, а знак минус показывает, что работа совершается вследствие уменьшения кинетической энергии этих частиц. Сила тока, по формуле (8.5), $I = jS$. Плотность тока j равна произведению абсолютной величины заряда q одного носителя на число этих частиц $n_0 v$, проходящих через единицу площади поперечного сечения проводника за единицу времени: $j = qn_0 v$ и $I = qn_0 v S$.

Подставив это выражение в уравнение (8.6), получим

$$dA = qn_0 v S R I dt = qn_0 v S R dQ. \quad (8.6'')$$

где $dQ = I dt$ — заряд, переносимый током за время dt .

Приравняв правые части уравнений (8.6') и (8.6'') и сокращая общие множители, находим

$$qR dQ = -m l dv$$

Интегрируя это равенство по v от v_0 до 0, получим полный заряд Q , проходящий через гальванометр при торможении стержня:

$$Q = \frac{m}{q} \frac{l}{R} v_0. \quad (8.7)$$

откуда отношение заряда к массе (удельный заряд) носителей заряда в металлическом стержне равно

$$\frac{q}{m} = \frac{Iv_0}{QR} \quad (87')$$

3. В 1913 г. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси провели следующий опыт: взяли катушку L (рис. 8.4) с намотанным на нее проводом, концы которого были соединены с неподвижной телефонной трубкой T . При быстрых крутильных колебаниях катушки вокруг ее оси OO' в цепи появлялся переменный ток, вызывавший треск в телефонной трубке. Этот опыт подтвердил существование инерционного движения носителей заряда в проводнике. Однако он не позволил определить направление тока, а значит, и знак заряда частиц, перемещавшихся в проводе.

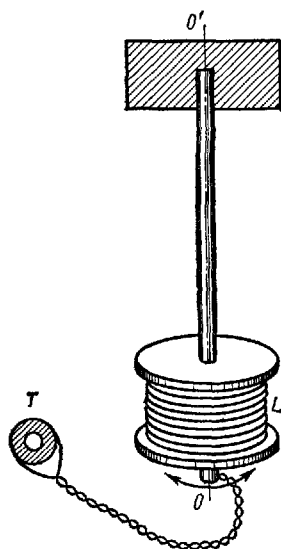


Рис. 8.4

В 1917 г. Т. Стюарт и Р. Толмен усовершенствовали этот опыт, заменив телефон чувствительным гальванометром. Этот опыт показал, что носители заряда в металлах заряжены отрицательно. Удельный заряд этих частиц оказался приблизительно одинаковым для всех исследованных металлов и близким к удельному заряду электрона. Таким образом, было доказано, что носителями заряда в металлах действительно являются электроны.

4. Для объяснения электронного характера проводимости металлов нужно предположить, что часть атомов в металле диссоциирована на электроны и положительные ионы, в результате чего в металле имеется большое число так называемых «свободных» электронов. По современным воззрениям, такого рода электронами являются валентные электроны атомов металла, наиболее слабо связанные с ядрами атомов. В металлах валентные электроны легко переходят от одного атома к другому — они являются как бы «обобществленными» электронами атомов. Оказалось, что у одновалентных металлов на один атом приходится один свободный электрон. Поэтому число электронов проводимости в единице объема одновалентного металла можно определить из следующего соотношения:

$$N_A : n_0 = A : \rho,$$

где N_A — число (постоянная) Авогадро; A — молярная масса металла, ρ — его плотность. Для меди $A = 0,0636$ кг/моль, $\rho = 8,93 \cdot 10^3$ кг/м³ и $n_0 \approx 8,5 \cdot 10^{28}$ м⁻³.

5. Электроны проводимости распределены по всей кристаллической решетке металла, в узлах которой расположены положительные ионы. Ионы совершают тепловые колебания около положений равновесия (см. т. I, гл. XV), а все электроны проводимости участвуют в хаотическом поступательном тепловом движении, аналогичном тепловому движению молекул газа.

§ 8.4. Основы классической электронной теории электропроводности металлов

1. Электронная теория проводимости металлов была впервые создана П. Друде в 1900 г. и получила дальнейшее развитие в работах Г. Лоренца. С точки зрения классической электронной теории высокая электропроводность металлов объясняется наличием огромного числа носителей заряда — электронов проводимости, перемещающихся по всему объему проводника. Друде предположил, что электроны проводимости в металле можно рассматривать как электронный газ, обладающий свойствами одноатомного идеального газа. При своем движении электроны проводимости сталкиваются с ионами кристаллической решетки металла. Поэтому можно говорить о средней длине свободного пробега электронов $\langle \lambda \rangle$, которая по порядку величины должна быть равной периоду кристаллической решетки металла, т.е. 10^{-8} см.

2. Пользуясь закономерностями кинетической теории газов (см. т. I, § 11.1), определим среднюю кинетическую энергию теплового движения электронов:

$$\frac{mv_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

где m — масса, а $v_{\text{кв}}$ — их средняя квадратичная скорость. При температуре 0°C $v_{\text{кв}} \approx 110$ км/с. Таков же порядок средней арифметической скорости $\langle u \rangle$ теплового движения электронов.

Тепловое движение электронов вследствие своей хаотичности не может привести к возникновению электрического тока.

3. Под действием внешнего электрического поля в металлическом проводнике возникает упорядоченное движение электронов, т.е. электрический ток. Плотность тока j равна общему заряду всех электронов, проходящих за одну секунду через единицу площади поперечного сечения проводника. Эти электроны заключены в объеме цилиндра, площадь основания которого равна единице, а высота — средней скорости $\langle v \rangle$ упорядоченного движения электронов под действием внешнего электрического поля. Если в единице объема находится n_0 электронов, то числовое значение плотности тока выразится формулой

$$j = n_0 e \langle v \rangle. \quad (8.8)$$

4. Оценим порядок величины средней скорости $\langle v \rangle$ упорядоченного движения электронов. Для провода из определенного материала и заданного сечения существует максимальная технически допустимая нагрузка, превышение которой приводит к опасному перегреву провода. Например, для изолированного медного провода сечением в 1 мм^2 наибольшая допустимая плотность тока равна $11 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2$. Так как для меди объемная плотность электронов проводимости $n_0 \approx 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, а абсолютная величина заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, то по формуле (8.8) средняя скорость $\langle v \rangle$ движения электронов при этих условиях оказывается равной:

$$\langle v \rangle \approx \frac{11 \cdot 10^6}{8,5 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.}$$

Таким образом, средняя скорость упорядоченного движения электронов, соответствующая электрическому току в проводнике, чрезвычайно мала по сравнению со средней скоростью их теплового движения при обычных температурах. Незначительная средняя скорость $\langle v \rangle$ объясняется весьма частыми столкновениями электронов с ионами кристаллической решетки.

5 Как согласовать очень малую скорость $\langle v \rangle$ электронов с практически мгновенной передачей электрических, например телеграфных, сигналов на очень большие расстояния?

Замыкание электрической цепи на станции отправления влечет за собой распространение электрического поля в проводах и вокруг них. Всякое изменение электрического поля передается вдоль проводов с огромной скоростью c , равной $3 \cdot 10^8$ м/с (скорость света). Таким образом, спустя время $t = L/c$, где L — длина провода, вдоль цепи установится стационарное поле и в ней начнется упорядоченное движение электронов проводимости. Если $L = 1000$ м, то $t = 0,3 \times 10^{-6}$ с. Поэтому движение электронов под действием внешнего электрического поля возникает на всем протяжении провода практически одновременно с подачей сигнала.

§ 8.5. Вывод законов Ома и Джоуля—Ленца в классической электронной теории

1. Важнейшей задачей классической электронной теории проводимости металлов является теоретический вывод основных законов электрического тока — законов Ома и Джоуля—Ленца, установленных опытным путем. Приведем вывод этих законов.

Предположим, что при соударениях с узлами кристаллической решетки электроны полностью теряют скорость упорядоченного движения, которую они приобретают под действием внешнего электрического поля за время τ свободного пробега. В процессе свободного пробега электроны движутся равноускоренно. Поэтому средняя скорость $\langle v \rangle$ их упорядоченного движения

$$\langle v \rangle = \langle v_{\text{макс}} \rangle / 2,$$

где $\langle v_{\text{макс}} \rangle$ — среднее значение скорости, приобретаемой электроном под действием поля за время свободного пробега.

Пусть m — масса электрона, e — абсолютное значение его заряда и E — напряженность стационарного электрического поля в проводнике. Тогда уравнение движения электрона имеет следующий вид:

$$m (dv/dt) = eE$$

Интегрируя это уравнение по v от 0 до $\langle v_{\text{макс}} \rangle$ и по t от 0 до $\langle \tau \rangle$ ($\langle \tau \rangle$ — средняя продолжительность свободного пробега электрона), получаем

$$\langle v_{\text{макс}} \rangle = \frac{eE}{m} \langle \tau \rangle \text{ и } \langle v \rangle = \frac{eE}{2m} \langle \tau \rangle. \quad (8.9)$$

Электроны проводимости одновременно участвуют также в тепловом движении. Если v — скорость электрона в упорядоченном движении, u — его скорость в тепловом движении, то результирующая скорость электрона $v_3 = v + u$. Будем считать, как это делал Друде, что абсолютные значения скоростей u всех электронов одинаковы и равны u . Среднее время $\langle \tau \rangle$ свободного пробега электрона связано со средней длиной свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ и средним значением модуля его скорости $\langle v_3 \rangle$ очевидным соотношением

$$\langle \tau \rangle = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v_3 \rangle} = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle |v+u| \rangle}.$$

Выше было показано, что средняя скорость упорядоченного движения электронов во много раз меньше скорости их теплового движения. Поэтому в предыдущей формуле можно пренебречь величиной v по сравнению с u :

$$\langle \tau \rangle = \langle \lambda \rangle / u.$$

Подставим это значение $\langle \tau \rangle$ во вторую формулу (8.9):

$$\langle v \rangle = e \langle \lambda \rangle E / 2mu. \quad (8.9')$$

Заменим в (8.8) $\langle v \rangle$ его выражением (8.9'):

$$j = (n_0 e^2 \langle \lambda \rangle / 2mu) E. \quad (8.10)$$

Величину

$$\gamma = n_0 e^2 \langle \lambda \rangle / 2mu \quad (8.11)$$

называют **удельной электрической проводимостью**, а обратную ей величину $\rho = 1/\gamma$ — **удельным электрическим сопротивлением** проводника. Следовательно,

$$j = (1/\rho) E = \gamma E. \quad (8.12)$$

Формула (8.12) выражает **закон Ома для плотности тока**: *плотность тока в проводнике равна произведению удельной проводимости проводника на напряженность электрического поля.*

Векторы E и j имеют одинаковое направление. Поэтому закон Ома можно записать также в векторной форме:

$$\mathbf{j} = (1/\rho) \mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}. \quad (8.12')$$

2. Рассмотрим превращение энергии, происходящее при соударениях электронов проводимости с узлами кристаллической решетки. В конце свободного пробега каждый электрон теряет скорость упорядоченного движения, приобретенную им под действием электрического поля за время свободного пробега. При этом энергия упорядоченного движения электронов преобразуется во внутреннюю энергию проводника, нагревающегося в процессе прохождения по нему электрического

тока. Средняя энергия, приобретаемая электроном под действием поля на длине свободного пробега и преобразующаяся во внутреннюю энергию при столкновении электрона с ионом металла,

$$\langle \Delta W_э \rangle = m \langle v_{\text{макс}}^2 \rangle / 2.$$

В самом деле

$$\Delta W_э = \frac{m}{2} (\mathbf{u} + \mathbf{v}_{\text{макс}})^2 - \frac{mu^2}{2},$$

где \mathbf{u} — скорость теплового движения электрона в начале свободного пробега, $\mathbf{v}_{\text{макс}}$ — скорость, сообщенная электрону электрическим полем. Поскольку

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}_{\text{макс}})^2 = u^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\text{макс}}) + v_{\text{макс}}^2,$$

то

$$\Delta W_э = m(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\text{макс}}) + mv_{\text{макс}}^2/2.$$

Среднее значение энергии $\Delta W_э$ равно

$$\langle \Delta W_э \rangle = m \langle v_{\text{макс}}^2 \rangle / 2,$$

так как в силу хаотичности теплового движения $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$ и

$$\langle (\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\text{макс}}) \rangle = (\langle \mathbf{u} \rangle, \langle \mathbf{v}_{\text{макс}} \rangle) = 0.$$

Пренебрегая различием между $\langle v_{\text{макс}}^2 \rangle$ и $\langle v_{\text{макс}} \rangle^2$, будем в дальнейшем считать, что

$$\langle \Delta W_э \rangle = m \langle v_{\text{макс}} \rangle^2 / 2. \quad (8.13)$$

В единице объема проводника имеется n_0 электронов проводимости, каждый из которых испытывает в среднем $u/\langle \lambda \rangle$ столкновений с ионами — узлами кристаллической решетки.

Следовательно, энергия тока, преобразующаяся во внутреннюю в единице объема проводника за единицу времени, равна

$$\omega = n_0 \frac{u}{\langle \lambda \rangle} \frac{m}{2} \langle v_{\text{макс}} \rangle^2. \quad (8.14)$$

Величину ω называют **объемной плотностью тепловой мощности тока**. Заменяя $\langle v_{\text{макс}} \rangle$ по формуле (8.9), где $\langle \tau \rangle = \langle \lambda \rangle / u$, получаем

$$\omega = (n_0 e^2 \langle \lambda \rangle / 2mi) E^2. \quad (8.15)$$

Коэффициент, стоящий при E^2 , есть не что иное, как удельная электрическая проводимость γ металла. Поэтому

$$\omega = \gamma E^2 = (1/\rho) E^2. \quad (8.16)$$

Формула (8.16) представляет математическое выражение **закона Джоуля — Ленца для плотности тепловой мощности тока**: *объемная плотность тепловой мощности тока в проводнике равна произведению его удельной электрической проводимости на квадрат напряженности электрического поля.*

Формулу (8.16) можно записать в несколько ином виде, если учесть, что $E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$. Заменяя один из векторов \mathbf{E} на $\rho \mathbf{j}$ по формуле (8.12'), получим: $E^2 = \mathbf{E} \rho \mathbf{j} = \rho \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ и

$$\omega = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (8.16')$$

3. В приведенных выше выводах законов Ома и Джоуля — Ленца мы предполагали, что при соударениях электронов с узлами кристаллической решетки электроны полностью теряют скорость упорядоченного движения. Г. Лоренц показал, что это предположение несущественно. К тем же результатам можно прийти, считая, что соударения электронов с узлами решетки являются абсолютно упругими.

§ 8.6. Связь между электропроводностью и теплопроводностью металлов

1. В 1853 г. Г. Видеман и Р. Франц на основе экспериментов установили, что для всех металлов при одной и той же температуре отношение коэффициента теплопроводности K к удельной электрической проводимости γ одинаково (закон Видемана—Франца):

$$(K/\gamma) = C. \quad (8.17)$$

Дальнейшие исследования Л. Лоренца показали, что отношение K/γ для металлов прямо пропорционально их абсолютной температуре:

$$(K/\gamma) = C_1 T. \quad (8.17')$$

2. Электронная теория проводимости металлов позволила получить этот закон и найти значение константы C_1 . В § 15.3 первого тома курса говорилось, что теплопроводность металлов в основном осуществляется за счет движения электронов проводимости. Электронный газ в металле подобен одноатомному идеальному газу. Поэтому коэффициент теплопроводности металлов, как показано в том же параграфе, равен

$$K = \frac{1}{2} k n_0 \langle \lambda \rangle \langle u \rangle, \quad (8.18)$$

где k — постоянная Больцмана, n_0 — концентрация электронов проводимости, а $\langle \lambda \rangle$ и $\langle u \rangle$ — их средняя длина свободного пробега и средняя скорость теплового движения.

3. В теории Друде $\langle u \rangle = v_{\text{кв}} = u$. Поэтому из формул (8.18) и (8.11) следует, что

$$\frac{K}{\gamma} = \frac{k}{e^2} m u^2.$$

Поскольку

$$\frac{m u^2}{2} = \frac{m v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} k T, \text{ то}$$

$$\frac{K}{\gamma} = 3 \frac{k^2}{e^2} T. \quad (8.19)$$

Формула (8.19) совпадает с (8.17'), если принять, что константа закона Видемана — Франца

$$C_1 = 3 (k^2/e^2). \quad (8.20)$$

Полагая $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К и $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, найдем, что $C_1 = 2,23 \cdot 10^{-8}$ Дж²/(Кл²·К²). Эта величина оказалась несколько меньше значения C_1 , найденного из опытов, однако она достаточно близка к экспериментальным данным.

§ 8.7. Недостатки классической электронной теории проводимости металлов

1. Электронная теория проводимости металлов, развитая Друде, была чрезмерно упрощенной, так как в ней предполагалось, что все электроны имеют одинаковую скорость теплового движения. Между тем в электронном газе, как и в газе, состоящем из молекул, должно существовать какое-то распределение электронов по скоростям, электроны должны подчиняться некоторой статистике. Лоренц усовершенствовал теорию Друде и последовательно применил к электронному газу статистику Максвелла — Больцмана (см. т. I, § 11.2). Он исходил из того, что при отсутствии электрического поля в металле электроны проводимости распределены по скоростям в соответствии с законом Максвелла. Это не может вызвать упорядоченного перемещения электронов, так как максвелловское распределение электронов по скоростям соответствует тому, что все направления их теплового движения равновероятны. Если в металле существует электрическое поле, максвелловское распределение скоростей электронов нарушается: на тепловое движение электронов накладывается движение, вызванное этим полем; средняя скорость этого движения пропорциональна напряженности электрического поля. Лоренц получил закон Ома для плотности тока в виде соотношения (8.12). Однако выражение для удельной электрической проводимости имело несколько отличный от формулы (8.11) вид, а именно:

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{n_0 e^2 \langle \lambda \rangle}{m} \left\langle \frac{1}{u} \right\rangle. \quad (8.21)$$

В этой формуле все обозначения физических величин, кроме $\langle 1/u \rangle$, те же, что и в теории Друде; $\langle 1/u \rangle$ — среднее значение обратной величины тепловой скорости электронов, вычисленное с помощью статистического распределения электронов по скоростям. Формула (8.21) содержит ту же зависимость от физических характеристик электронов в металлах, что и формула (8.11). Ничего существенно нового усовершенствованная теория Лоренца не дала. Лоренц получил закон Видемана—Франца, в выражении которого (8.19) вместо коэффициента $3(k^2/e^2)$ появился коэффициент $2(k^2/e^2)$:

$$\frac{K}{\gamma} = 2(k^2/e^2)T. \quad (8.19')$$

Этот коэффициент хуже согласуется с опытными данными, чем результат Друде, так как теоретически вычисленное отношение $K/(\gamma T)$ становится еще меньшим. Таким образом, оказалось, что уточненная классическая электронная теория, учитывающая статистические свойства электронного газа в металлах, хуже согласуется с опытными данными, чем более грубая теория Друде. Как мы увидим в гл. XIII, объяснение этого парадоксального результата привело к серьезному пересмотру основ классической электронной теории металлов.

2. Теория Друде—Лоренца не смогла объяснить целого ряда явлений, наблюдающихся на опыте.

а) Экспериментально установлено, что в довольно большом интервале температур удельное сопротивление пропорционально абсолютной температуре ($\rho \sim T$ или $\gamma \sim \frac{1}{T}$). Эту зависимость должны были объяснить теория Друде [формула (8.11)] и теория Лоренца [формула (8.21)]. Из статистической физики известно, что $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$ [в теории Лоренца $\langle 1/u \rangle \sim \sqrt{1/T}$], поэтому, согласно формулам (8.11) и (8.21), $\rho \sim \sqrt{T}$.

Для того чтобы теоретические результаты не противоречили опыту, нужно предположить, что произведение $n_0 \langle \lambda \rangle$ обратно пропорционально \sqrt{T} ($n_0 \langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$). Однако, пользуясь известным из кинетической теории газов выражением для $\langle \lambda \rangle$, обосновать такую зависимость невозможно.

Таким образом, классическая электронная теория не объяснила температурной зависимости удельного сопротивления металлов.

б) Еще большие затруднения возникли при подсчете теплоемкости металлов. При ее вычислении нельзя пренебречь теплоемкостью электронного газа, обладающего, согласно классической электронной теории, всеми свойствами идеального газа. Молярная теплоемкость металла должна складываться из теплоемкости ионной кристаллической решетки $C_1 = 6$ кал/(моль·К) и теплоемкости электронного газа $C_2 = (i/2)R$, где $i = 3$ — число степеней свободы электронов, R — универсальная (молярная) газовая постоянная, равная 2 кал/(моль·К). Отсюда следует, что молярная теплоемкость металлов $C = C_1 + C_2 = 6 + 3 = 9$ кал/(моль·К).

Но из опытов (см. закон Дюлонга и Пти, т. I, § 15.4) известно, что молярная теплоемкость металлов мало отличается от молярной теплоемкости других твердых тел и равна приблизительно 6 кал/(моль·К).

Сопоставление теоретического и экспериментального значений молярной теплоемкости металла приводит к выводу, что энергия беспорядочного теплового движения электронов проводимости не изменяется при нагревании проводника. Объяснить этот вывод с помощью классической электронной теории невозможно.

в) Наконец, возникли трудности при оценке средней длины свободного пробега электронов в металле. Для того чтобы, пользуясь формулой (8.11) или (8.21), получить такие значения удельной электрической проводимости металла, которые не расходились бы с опытными дан-

ными, приходится принимать среднюю длину свободного пробега электронов в сотни раз большей, чем период решетки металла¹. Иными словами, приходится предположить, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни межузельных расстояний. Такое предположение непонятно в рамках классической электронной теории Друде—Лоренца.

Вопросы для повторения

1. Что называется электрическим током и каковы условия возникновения тока проводимости?
2. Какие опыты помогли выяснить природу электропроводности металлов?
3. Какие гипотезы положены в основу классической электронной теории проводимости металлов?
4. Сформулируйте и выведите на основании электронной теории закон Ома для плотности тока и закон Джоуля—Ленца объемной плотности тепловой мощности тока.
5. В чем состоят недостатки классической электронной теории проводимости металлов?

Примеры решения задач

Задача 8.1. Плотность электрического тока в медном проводе равна 100 А/см^2 . Определить плотность тепловой мощности тока, если удельное сопротивление меди $1,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Дано:

$$\begin{aligned} j &= 10^6 \text{ А/м}^2 \\ \rho &= 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м} \\ \omega &= ? \end{aligned}$$

Решение. По закону Джоуля—Ленца (8.16) плотность тепловой мощности тока равна $\omega = (1/\rho)E^2$, где E — напряженность электрического поля.

С другой стороны, по закону Ома (8.12) для плотности тока имеем $E = \rho j$. Таким образом,

$$\omega = \rho j^2.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$\omega = \rho j^2 = 1,8 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{12} \text{ Вт/м}^3 = 1,8 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^3 = 18 \text{ кВт/м}^3.$$

¹ Концентрацию n_0 электронов проводимости можно определить экспериментально из наблюдений так называемого явления Холла (см. § 18.2).

Глава IX

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 9.1. Сторонние силы

1. Закон Ома (8.12') показывает, что плотность тока прямо пропорциональна напряженности E электрического поля, действующего на свободные заряды и вызывающего их упорядоченное движение. Прежде чем перейти к выводу закона Ома для силы тока I , необходимо рассмотреть, что представляет собой электрическое поле в проводнике. В нем имеется электростатическое поле, создаваемое электронами и положительными ионами (поле кулоновских сил).

Кулоновские силы взаимодействия между зарядами всегда приводят к такому перераспределению свободных зарядов, при котором электрическое поле в проводнике исчезает, а потенциалы во всех точках выравниваются. Поэтому поле кулоновских сил не может вызвать стационарный процесс упорядоченного движения зарядов, т.е. не может являться причиной возникновения постоянного электрического тока.

2. Очевидно, что для поддержания постоянного тока в цепи на свободные заряды должны действовать помимо кулоновских сил еще какие-то иные, неэлектростатические силы. Эти силы носят название **сторонних сил**. Если кулоновские силы вызывают соединение разноименных зарядов, что ведет к выравниванию потенциалов и исчезновению электрического поля в проводнике, то сторонние силы вызывают разделение разноименных зарядов и поддерживают разность потенциалов на концах проводника. Добавочное поле сторонних сил в цепи создается источниками электрической энергии (гальваническими элементами, аккумуляторами, электрическими генераторами).

Источник сторонних сил в цепи постоянного тока так же необходим, как необходим насос для создания постоянной циркуляции жидкости в любой замкнутой гидравлической системе. Так, например, в замкнутой водяной системе, изображенной на рис. 9.1, от точки A до точки B вода движется против силы тяжести под действием «сторонних сил», создаваемых насосом H ; от точки B до точки A она движется под действием силы тяжести. Роль насоса в электрической цепи играет источник электрической энергии. За счет создаваемого им поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника

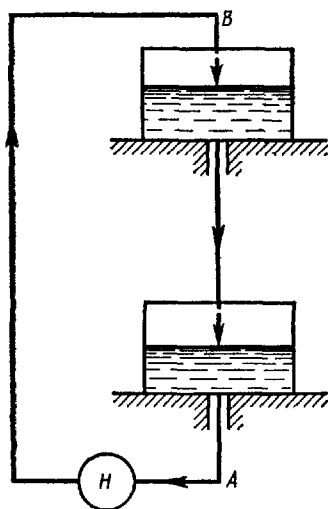


Рис. 9.1

электрической энергии против сил электростатического поля. Вследствие этого на концах внешней цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи идет постоянный ток. Перемещая заряды, сторонние силы совершают работу за счет энергии, затрачиваемой в источнике электрической энергии.

Так, например, в электромагнитном генераторе работа сторонних сил производится за счет механической энергии, расходуемой на вращение ротора генератора, а в гальванических элементах — за счет энергии, которая выделяется при химических процессах растворения электродов в электролите.

§ 9.2. Закон Ома

1. Напряженность поля кулоновских сил обозначим через $E_{\text{кул}}$, напряженность поля сторонних сил — через $E_{\text{стор}}$. Тогда для любой точки внутри проводника напряженность E результирующего поля равна их векторной сумме:

$$E = E_{\text{кул}} + E_{\text{стор}}. \quad (9.1)$$

Подставив это выражение в формулу (8.12'), получим

$$j = (1/\rho) (E_{\text{кул}} + E_{\text{стор}}) \quad (9.2)$$

Умножим скалярно обе части равенства (9.2) на вектор dl , численно равный элементу dl длины проводника и направленный по касательной к проводнику в ту же сторону, что и вектор плотности j тока:

$$(j, dl) = (1/\rho) [E_{\text{кул}}dl + E_{\text{стор}}dl]$$

Так как скалярное произведение совпадающих по направлению векторов j и dl равно произведению их модулей, то это равенство можно переписать в виде

$$\rho j dl = E_{\text{кул}}dl + E_{\text{стор}}dl,$$

или с учетом (8.5)

$$I(\rho/S) dl = E_{\text{кул}}dl + E_{\text{стор}}dl.$$

Интегрируя по длине проводника l от сечения 1 до некоторого сечения 2 и учитывая, что сила тока во всех сечениях проводника одинакова, получаем

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 E_{\text{кул}}dl + \int_1^2 E_{\text{стор}}dl. \quad (9.3)$$

2. Рассмотрим подробнее физический смысл всех членов, входящих в уравнение (9.3). Интеграл $\int_1^2 E_{\text{кул}}dl$ численно равен работе, совершаемой кулоновскими силами при перенесении единичного поло-

жительного заряда из точки 1 в точку 2. В электростатике было показано [см. формулу (3.16)], что

$$E_{\text{кул}} dl = -d\varphi,$$

где φ — потенциал электростатического поля.

Таким образом,

$$\int_1^2 E_{\text{кул}} dl = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (9.4)$$

где φ_1 и φ_2 — значения потенциала в точках 1 и 2.

Аналогичный линейный интеграл, содержащий вектор $E_{\text{стор}}$ напряженности поля сторонних сил, называется **электродвижущей силой** (э.д.с.) \mathcal{E}_{12} , действующей на участке цепи 1—2:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 E_{\text{стор}} dl. \quad (9.5)$$

Электродвижущая сила \mathcal{E}_{12} численно равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении по проводнику единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2. Эта работа производится за счет источника электрической энергии. Поэтому величину \mathcal{E}_{12} можно также называть электродвижущей силой источника электрической энергии, включенного на участке цепи 1—2. В СИ э.д.с. выражается в вольтах.

Напряжением на участке цепи 1—2 называется физическая величина U_{12} , численно равная работе, совершаемой суммарным полем кулоновских и сторонних сил при перемещении вдоль цепи единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2:

$$U_{12} = \int_1^2 (E_{\text{кул}} + E_{\text{стор}}) dl = \int_1^2 E dl, \quad (9.6)$$

или

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (9.7)$$

В СИ напряжение выражается в вольтах. Введенное нами понятие напряжения не совпадает с тем, которым иногда пользуются в электростатике для обозначения разности потенциалов, а является его обобщением. Напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов только в том случае, если на этом участке не приложены э.д.с.

Интеграл

$$\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{12} \quad (9.8)$$

называется **сопротивлением** участка цепи между сечениями 1 и 2. Для однородного линейного проводника $\rho = \text{const}$, $S = \text{const}$ и

$$R_{12} = \rho \frac{l_{12}}{S} = \frac{l_{12}}{\gamma S}, \quad (9.8')$$

где l_{12} — длина проводника между сечениями 1 и 2.

Сопротивление проводника в СИ выражается в омах. Сопротивление участка цепи равно 1 Ом, если при токе в 1 А напряжение на этом участке равно 1 В:

$$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А.}$$

Удельное сопротивление ρ в СИ выражается в Ом·м. На практике его часто выражают в Ом·см ($1 \text{ Ом}\cdot\text{см} = 0,01 \text{ Ом}\cdot\text{м}$) и в Ом·мм²/м ($1 \text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м} = 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$).

3. Из соотношений (9.3) — (9.8) следует, что

$$R_{12}I = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}. \quad (9.9)$$

Это уравнение является математической записью **обобщенного закона Ома для участка цепи** электрического тока: *произведение сопротивления участка цепи на силу тока в нем равно сумме падения электрического потенциала на этом участке и э.д.с. всех источников электрической энергии, включенных на участке.*

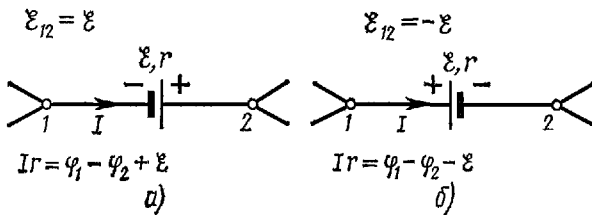


Рис. 9.2

Обобщенный закон Ома, как видно из его вывода, выражает закон сохранения и превращения энергии применительно к участку цепи постоянного электрического тока. Он в равной мере справедлив как для участков электрической цепи, не содержащих источников электрической энергии и называемых **пассивными участками**, так и для **активных участков**, содержащих указанные источники.

При выводе уравнения (9.9) мы обходили рассматриваемый участок $I-2$ цепи в направлении электрического тока в этом участке (вектор $d\mathbf{l}$ совпадал по направлению с вектором плотности тока \mathbf{j}). Поэтому при определении \mathcal{E}_{12} в (9.9) нужно пользоваться следующим правилом знаков для э.д.с. источников, включенных на участке цепи $I-2$: если напряженность поля сторонних сил в источнике совпадает по направлению с током в участке цепи, т.е. если в н у т р и и с т о ч н и к а ток идет от катода к аноду, то при подсчете \mathcal{E}_{12} э.д.с. этого источника нужно считать положительной (рис. 9.2, а). Если же ток внутри источника идет от анода к катоду, то э.д.с. этого источника следует считать отрицательной (рис. 9.2, б).

Обобщенный закон Ома можно также представить, пользуясь соотношением (9.7), в форме

$$R_{12}I = U_{12}. \quad (9.10)$$

4. Во всех сечениях неразветвленной замкнутой электрической цепи сила тока одинакова. Такую цепь можно рассматривать как участок, концы которого (сечения 1 и 2) совпадают, так что $\varphi_2 = \varphi_1$ и $R_{12} = R$ — общее сопротивление всей цепи. Поэтому закон Ома для замкнутой цепи имеет вид

$$RI = \mathcal{E}, \quad (9.11)$$

где \mathcal{E} — алгебраическая сумма всех э.д.с., приложенных в этой цепи.

Пусть замкнутая цепь состоит из источника электрической энергии

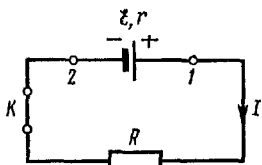


Рис. 9.3

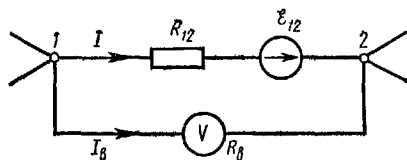


Рис. 9.4

с э.д.с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r , а также внешней части цепи, имеющей сопротивление R (рис. 9.3). Силу тока в цепи найдем по закону Ома (9.11):

$$I = \mathcal{E}/(R + r).$$

Разность потенциалов на электродах источника равна напряжению на внешней части цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = RI = \mathcal{E} - Ir. \quad (9.10')$$

Если с помощью ключа K цепь разомкнуть, то ток в ней прекратится и, как видно из (9.10'), разность потенциалов на клеммах источника будет равна его э.д.с.

5. Покажем, что вольтметр, подключенный параллельно какому-либо участку электрической цепи постоянного тока, измеряет разность потенциалов на концах этого участка (рис. 9.4). Напишем обобщенный закон Ома для рассматриваемого участка 1—2:

$$R_{12}I = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

С другой стороны, по тому же закону, записанному для участка 1—2 цепи вольтметра, на котором нет э.д.с.,

$$R_{\text{в}}I_{\text{в}} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где $R_{\text{в}}$ и $I_{\text{в}}$ — сопротивление вольтметра и ток в нем. Таким образом, ток в вольтметре, определяющий отклонение его подвижной системы, пропорционален именно разности потенциалов на участке 1—2 элек-

трической цепи, а не напряжению $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$. В случае пассивного участка $\mathcal{E}_{12} = 0$, поэтому разность потенциалов и напряжение на таком участке равны друг другу.

§ 9.3. Закон Джоуля—Ленца

1. В том случае, когда электрический ток в цепи постоянен, а образующие ее проводники не подвижны, работа сторонних сил целиком расходуется на нагревание проводников¹.

Если в единице объема проводника за единицу времени выделяется энергия ω (объемная плотность тепловой мощности), то в объеме dV за время dt — энергия

$$dW = \omega dV dt.$$

По закону Джоуля—Ленца (8.16'), объемная плотность тепловой мощности тока $\omega = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$. Поэтому

$$dW = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV dt. \quad (9.12)$$

Объем dV равен произведению элемента длины проводника dl на элемент площади поперечного сечения dS : $dV = dl \cdot dS$. Так как векторы \mathbf{j} и $d\mathbf{l}$ совпадают по направлению, то $\mathbf{j} = j(d\mathbf{l}/dl)$. Подставив выражения для dV и \mathbf{j} в (9.12), получим

$$dW = \mathbf{E} dl j dS dt. \quad (9.13)$$

2. Энергию W , выделяющуюся за время t по всему объему проводника, длина которого l , а площадь поперечного сечения S , найдем интегрированием выражения (9.13):

$$W = IUt, \quad (9.14)$$

где I — сила тока, а U — напряжение на рассматриваемом участке цепи постоянного тока.

Соответствующее этой энергии количество теплоты, выделяющейся в проводнике,

$$Q = IUt. \quad (9.15)$$

Формула (9.15) выражает закон Джоуля — Ленца: количество теплоты, выделяемой током в проводнике, пропорционально силе тока, времени его прохождения и напряжению.

3. Пусть R — сопротивление проводника, тогда по закону Ома $U = IR$ и формулу (9.15) можно переписать в виде

$$Q = I^2 R t, \quad \text{или} \quad Q = U^2 t / R. \quad (9.15')$$

Зависимость количества теплоты, выделяющейся в проводнике при прохождении тока, от сопротивления проводника можно продемонстрировать на следующих опытах. Возьмем два куска медной и нихро-

¹ Речь идет об электрических цепях, составленных из металлических проводников.

мовой проволоки, одинаковых по длине и площади поперечного сечения. Удельное сопротивление нихрома приблизительно в 60 раз больше удельного сопротивления меди. Во столько же раз сопротивление R_1 куска нихромового провода больше сопротивления R_2 медного провода. Соединим эти провода последовательно и включим их в цепь аккумуляторной батареи B через резистор (рис. 9.5, а). Подбирая величину R его сопротивления, можно добиться того, что нихромовый провод раскалится докрасна. Температура медного провода при этом повысится незначительно, и до него можно дотронуться рукой. Этот опыт легко объяснить с помощью первой формулы (9.15'), выражающей закон Джоуля—Ленца. Сила тока в последовательно соединенных проводах одинакова. Поэтому выделяющиеся в них количества теплоты пропорциональны их сопротивлениям:

$$Q_1 : Q_2 = R_1 : R_2 \approx 60.$$

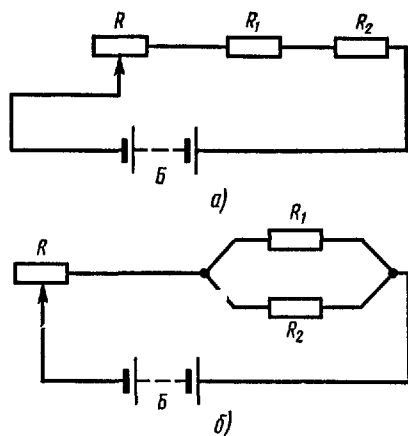


Рис. 9.5

Соединим теперь медный и нихромовый провода параллельно и вновь включим в цепь аккумуляторной батареи (рис. 9.5, б). В этом случае картина изменяется: медный провод раскалится докрасна, а нихромовый почти не нагревается. Для объяснения этого опыта удобно воспользоваться второй формулой (9.15') закона Джоуля—Ленца. Напряжения на параллельно соединенных проводах одинаковы. Поэтому выделяющиеся в проводах количества теплоты обратно пропорциональны их сопротивлениям:

$$Q_2 : Q_1 = R_1 : R_2 \approx 60.$$

4. Тепловое действие электрического тока нашло широкое применение в технике. В 1873 г. русский инженер А. Н. Лодыгин впервые использовал тепловое действие тока для устройства электрического освещения. Первоначально им были созданы лампы накаливания с угольными стерженьками. В дальнейшем Лодыгин их значительно усовершенствовал, а в 1893—1894 гг. получил патенты на лампы накаливания с платиновой нитью, покрытой различными металлами (радийем, хромом, вольфрамом и др.).

На нагревании проводников электрическим током основано действие электропечей и различных бытовых нагревательных приборов. Это явление используется также в электронных лампах, в измерительной технике, в контактной электросварке и во многих других областях техники.

§ 9.4. Правила Кирхгофа

1. На практике часто приходится рассчитывать сложные (разветвленные) цепи постоянного тока, например по заданным сопротивлениям участков цепи и приложенным к ним э.д.с. находить силы токов во всех участках. Решение этой задачи значительно облегчается, если воспользоваться двумя правилами Г. Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа выражает приведенное в § 8.2 условие постоянства тока в цепи и вытекает из того, что в случае установившегося постоянного тока ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды.

Назовем **узлом** любую точку разветвления цепи, т.е. любую точку, в которой сходится больше двух проводников. Тогда первое правило Кирхгофа можно сформулировать следующим образом: *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (9.16)$$

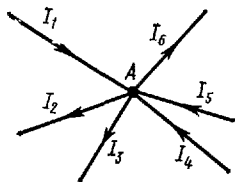


Рис. 9.6

где n — число проводников, сходящихся в узле, а I_k — токи в них. При этом токи, подходящие к узлу, считают положительными, а токи, отходящие от него, — отрицательными. На рис. 9.6 в узле A сходятся шесть проводников; направления токов в них показаны стрелками. Первое правило Кирхгофа (9.16) запишется для узла A следующим образом:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6 = 0.$$

2. **Второе правило Кирхгофа** является обобщением закона Ома (9.11) на разветвленные электрические цепи. Оно состоит в следующем: *в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_k на сопротивления R_k соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме э.д.с. \mathcal{E}_k в контуре*:

$$\sum_{k=1}^{n_1} I_k R_k = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k, \quad (9.17)^1$$

где n_1 — число отдельных участков, на которые контур разбивается узлами.

Для составления уравнения (9.17) необходимо условиться о направлении обхода контура (по часовой стрелке или против нее). Выбор этого направления совершенно произволен. Все токи I_k , совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считают положитель-

¹ Формулу (9.17) легко получить последовательным применением закона Ома (9.9) ко всем участкам замкнутого контура.

ными. Э.д.с. \mathcal{E}_k источников тока, включенных на различных участках контура, считают положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура. Так, например, в случае обхода по часовой стрелке замкнутого контура $ABCD$, изображенного на рис. 9.7, уравнение (9.17) записывается следующим образом:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

3. При решении задач рекомендуется следующий порядок расчета сложной цепи постоянного тока:

а) произвольно выбрать и обозначить на чертеже направления токов во всех участках цепи;

б) подсчитать число узлов в цепи (m). Записать выражения (9.16) для каждого из $m - 1$ узлов. Уравнение (9.16) для m -го узла ничего нового не дает, так как оно является простым следствием предыдущих $m - 1$ уравнений;

в) выделить произвольные замкнутые контуры в цепи и, условившись о направлении обхода, записать для них систему уравнений (9.17). Уравнения (9.17) следует писать не для всех контуров, так как часть из этих уравнений является следствием предыдущих. Оказывается, что в разветвленной цепи, состоящей из p ветвей (участков цепи между соседними узлами) и m узлов, число независимых уравнений (9.17) равно $p - m + 1$.

При составлении независимых уравнений (9.17) следует выбирать контуры таким образом, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один участок цепи, не входивший в уже рассмотренные контуры.

Примеры использования правил Кирхгофа при расчете цепей постоянного тока приведены в задачах к этой главе.

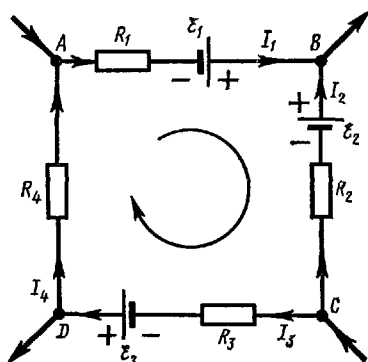


Рис. 9.7

Вопросы для повторения

1. Какие силы называются сторонними?
2. Поясните физический смысл электродвижущей силы, напряжения и разности потенциалов.
3. В чем состоит закон Ома для участка цепи, для замкнутой цепи? Каков его физический смысл?
4. В чем состоят и на чем основаны правила Кирхгофа?

Примеры решения задач

Задача 9.1. Имеется миллиамперметр с внутренним сопротивлением $R_0 = 9,9$ Ом, предназначенный для измерения токов не более 10 мА. Что нужно сделать для того, чтобы этот прибор можно было применять для измерения: 1) токов до 1 А и 2) напряжений до 1 В?

Дано:

$$\begin{aligned} I_0 &= 10^{-2} \text{ А} \\ R_0 &= 9,9 \text{ Ом} \\ I &= 1 \text{ А} \\ U &= 1 \text{ В} \\ \hline R_{\text{ш}} &= ? \quad R_{\text{д}} = ? \end{aligned}$$

Решение. 1. Амперметр включается в цепь последовательно. Поэтому, если ток I в цепи больше максимального тока I_0 , на который рассчитан амперметр, то параллельно последнему следует включить добавочное сопротивление $R_{\text{ш}}$, называемое шунтом (рис. 9.8, а). Величина $R_{\text{ш}}$ выбирается таким образом, чтобы ток в приборе не превышал I_0 .

Из правил Кирхгофа следует, что

$$I = I_0 + I_{\text{ш}}, \quad I_0 R_0 = I_{\text{ш}} R_{\text{ш}},$$

где $I_{\text{ш}}$ — сила тока в шунте. Исключая из этих уравнений $I_{\text{ш}}$, получим

$$R_{\text{ш}} = R_0 I_0 / (I - I_0).$$

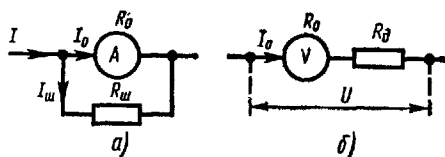


Рис. 9.8

2. Вольтметр включается параллельно тому участку цепи, напряжение U на котором необходимо измерить. Это напряжение не должно быть выше U_0 , соответствующего максимальной силе тока I_0 , на которую рассчитан прибор ($U_0 = I_0 R_0$). Поэтому для измерения напряжений $U > U_0$ последовательно с вольтметром следует включить добавочное сопротивление $R_{\text{д}}$ (рис. 9.8, б), кото-

рое выбирается таким, чтобы ток в приборе не превышал I_0 :

$$(R_0 + R_{\text{д}}) I_0 = U; \quad R_{\text{д}} = (U/I_0) - R_0.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$1. R_{\text{ш}} = \frac{R_0 I_0}{I - I_0} = \frac{9,9 \cdot 0,01}{1 - 0,01} \text{ Ом} = 0,1 \text{ Ом}.$$

$$2. R_{\text{д}} = \frac{U}{I_0} - R_0 = \left(\frac{1}{0,01} - 9,9 \right) \text{ Ом} = 90,1 \text{ Ом}.$$

Задача 9.2. В приведенной на рис. 9.9 электрической схеме заданы сопротивления R_2, R_3, R_4 и электродвижущие силы \mathcal{E} и \mathcal{E}_1 . Определить сопротивление R_1 , если известно, что ток в цепи гальванометра G отсутствует ($I_g = 0$). Рассмотреть полученный результат при $\mathcal{E}_1 = 0$.

Решение. Выберем направления токов в различных ветвях контура так, как показано на рис. 9.9. Применим первое правило Кирхгофа к узлам A, B и C :

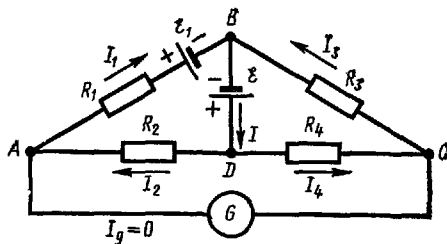


Рис. 9.9

$$а) I_2 - I_1 = 0, \quad б) I_1 + I_3 - I = 0, \quad в) I_4 - I_3 = 0.$$

Применим второе правило Кирхгофа к замкнутым контурам $ABCGA$, $ADCGA$ и $BCDB$, считая положительным обход этих контуров против часовой стрелки:

$$г) -I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1, \quad д) I_2 R_2 - I_4 R_4 = 0, \quad е) I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}.$$

Из уравнений (а) и (в) следует, что $I_1 = I_2$ и $I_3 = I_4$, а из уравнения (е) находим

$$I_3 = I_4 = \mathcal{E}/(R_3 + R_4).$$

Из уравнения (д) следует, что

$$I_1 = I_2 = I_4 R_4 / R_2.$$

Подставив значения I_1 и I_3 в (г), после некоторых преобразований получим

$$R_1 = \frac{R_3 R_2}{R_4} - \frac{R_2 (R_3 + R_4)}{R_4} \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}}.$$

Если $\mathcal{E}_1 = 0$, то результат не зависит от \mathcal{E} :

$$R_1 = R_3 R_2 / R_4.$$

В этом случае схема, изображенная на рис. 9.9, представляет собой схему мостика Уитстона, применяемого для измерения сопротивлений. Можно показать, что последняя формула для неизвестного сопротивления R_1 справедлива и в том случае, если гальванометр G и источник \mathcal{E} поменять в мостике Уитстона местами, а сопротивления R_1 , R_3 и R_4 подобрать такими, чтобы сила тока, проходящего через гальванометр, была по-прежнему равна нулю.

Глава X

КОНТАКТНАЯ РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ. ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ЭМИССИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 10.1 Работа выхода электрона из металла. Контактная разность потенциалов

1. Электроны проводимости в металле находятся в беспорядочном тепловом движении. Наиболее быстро движущиеся электроны, обладающие достаточно большой кинетической энергией, могут вырваться из металла в окружающее пространство. При этом они совершают работу как против сил притяжения со стороны избыточного положительного заряда, возникающего в металле в результате их вылета, так и против сил отталкивания со стороны ранее вылетевших электронов, образующих вблизи поверхности проводника электронное «облако». Между электронным газом в металле и электронным «облаком» устанавливается динамическое равновесие.

Работу, которую нужно совершить для удаления электрона из металла в вакуум, называют **работой выхода**. Работа выхода производится электронами за счет уменьшения их кинетической энергии. Поэтому понятно, что медленно движущиеся электроны вырваться из металла не могут.

Работа выхода зависит от химической природы металла и состояния его поверхности; загрязнения, следы влаги и пр. изменяют ее величину. Для чистых металлов работа выхода колеблется в пределах нескольких электронвольт.

2. Недостаток электронов в металлическом проводнике и их избыток в окружающем пространстве, образовавшиеся в результате вылета части электронов из металла, проявляются только в очень тонком слое по обе стороны от поверхности проводника. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям в металле. В первом приближении можно считать, что поверхность металла представляет собой двойной электрический слой, подобный весьма тонкому конденсатору. Разность потенциалов $\Delta\phi$ между обкладками такого конденсатора зависит от работы A выхода электрона из металла:

$$\Delta\phi = A/e, \quad (10.1)$$

где e — абсолютное значение заряда электрона.

Электрон, вылетая за пределы металла, должен преодолеть задерживающее его электрическое поле двойного слоя. Характеризующую это поле разность потенциалов $\Delta\phi$ принято называть **поверхностным скачком потенциала** или **контактной разностью потенциалов** между металлом и окружающей средой.

Вне двойного слоя электрического поля нет, и потенциал среды равен нулю. Следовательно, внутри металла потенциал положителен и равен $\Delta\phi$, а потенциальная энергия электронов проводимости отри-

цательна и равна $-e\Delta\varphi = -A$. Иными словами, можно считать, что весь объем металла представляет для электронов проводимости «потенциальную яму», «глубина» которой равна работе выхода A (см. рис. 13.1).

3. Рассмотрим два разнородных металла 1 и 2 с работами выхода A_1 и A_2 . Ради определенности предположим, что $A_1 > A_2$. Если эти металлы привести в контакт, то электроны проводимости преимущественно переходят из второго металла в первый. При этом оба металла заряжаются разноименно (их заряды численно равны друг другу) и создают в окружающем пространстве электрическое поле. Казалось бы, переход электронов прекращается и достигается состояние равновесия тогда, когда потенциалы обоих металлов становятся равными. На самом деле, как показывает опыт, в состоянии термодинамического равновесия между двумя контактирующими разнородными металлами имеется некоторая разность потенциалов $\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$, называемая **внутренней контактной разностью потенциалов**.

Разность потенциалов $\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ между двумя точками, находящимися в непосредственной близости от поверхностей первого (φ_1) и второго (φ_2) контактирующих металлов в h и x , называется **внешней контактной разностью потенциалов**. Она характеризует электростатическое поле, создаваемое контактирующими металлами в окружающем их пространстве.

4. Возникновение контактной разности потенциалов между соприкасающимися металлическими проводниками было открыто в конце XVIII в. итальянским физиком А. Вольтой. Он экспериментально установил следующие два закона (**законы Вольты**):

I. При соединении двух проводников, изготовленных из различных металлов, между ними возникает контактная разность потенциалов, которая зависит только от их химического состава и температуры.

II. Разность потенциалов между концами цепи, состоящей из последовательно соединенных металлических проводников, находящихся при одинаковой температуре, не зависит от химического состава промежуточных проводников. Она равна контактной разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

5. Классическая электронная теория проводимости металлов позволила объяснить законы Вольты и найти выражение для внешней и внутренней контактных разностей потенциалов.

Найдем прежде внешнюю контактную разность потенциалов. Для этого рассмотрим замкнутый контур $abcd$ (рис. 10.1), точки c и d которого находятся вблизи поверхностей соответственно первого и второго металлов. Из потенциальности электростатического поля следует, что работа, совершаемая силами поля при перемещении электрона вдоль этого контура, равна нулю:

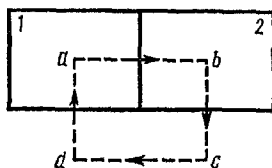


Рис. 10.1

$$-e(\varphi_a - \varphi_b) - A_2 - e(\varphi_c - \varphi_d) + A_1 = 0.$$

Так как $\varphi_a - \varphi_b = \Delta\varphi_{12}$, а $\varphi_d - \varphi_c = \Delta\varphi'_{12}$, то

$$\Delta\varphi'_{12} = [-(A_1 - A_2)/e] + \Delta\varphi_{12}. \quad (10.2)$$

Ниже будет показано, что при обычных температурах $\Delta\varphi_{12} \ll \Delta\varphi'_{12}$. Поэтому можно считать, что внешняя контактная разность потенциалов обусловлена различием в значениях работы выхода электронов из контактирующих металлов:

$$\Delta\varphi'_{12} = -(A_1 - A_2)/e. \quad (10.3)$$

В квантовой теории доказывается, что для $\Delta\varphi'_{12}$ справедлива именно эта формула, а не (10.2).

6. Причина появления внутренней контактной разности потенциалов между металлами 1 и 2 связана с представлением об электронном газе в металлах как об идеальном газе. Давление идеального газа, как известно (см. т. I, § 9.2), равно $p = n_0 kT$, где n_0 — концентрация молекул (в нашем случае — число электронов), k — постоянная Больцмана. Таким образом, если даже температуры обоих металлов одинаковы, но $n_{01} \neq n_{02}$, то давление электронного газа в этих металлах различны. Если, например, $p_1 > p_2$, то под действием перепада давлений $p_1 - p_2$ электроны будут переходить из первого металла во второй в большем количестве, чем из второго в первый. Это будет происходить до тех пор, пока электрическое поле, возникающее вследствие преимущественного диффузионного перехода электронов, не компенсирует своим противодействием влияния перепада давления. Контактная разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$, которая возникает на границе двух металлов в результате диффузионного перехода электронов, выражается формулой

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}}. \quad (10.4)$$

Концентрация n_0 и давление p электронного газа не претерпевают скачкообразного изменения на границе раздела металлов, а изменяются, хотя и очень быстро, но все же непрерывно в пределах сравнительно небольшой переходной области, расположенной по обе стороны от поверхности раздела металлов. Поэтому для вывода формулы (10.4) необходимо рассмотреть действие сил электрического поля и перепада давления на электроны переходной области между двумя металлами. Если ось X перпендикулярна поверхности раздела A (рис. 10.2), которую для простоты будем считать плоской, то в пределах переходной области

$$n_0 = n_0(x).$$

Рассмотрим электроны, заключенные внутри изображенного на рис. 10.2 бесконечно малого цилиндра с образующими dx , перпендикулярными плоскости раздела металлов, и основаниями dS , параллельными ей. Обозначим концентрацию электронов вблизи левого основания через n_0 , а вблизи правого — через $n_0 + dn_0$. Давления электронного газа вблизи левого и правого оснований соответственно равны p и $p + dp$, причем

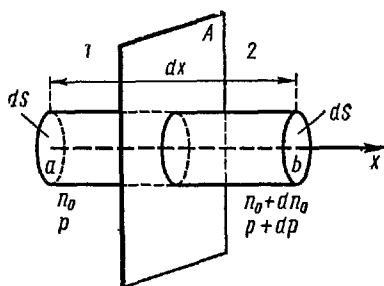


Рис. 10.2

$$dp = kTdn_0.$$

Под действием силы $dF = dpdS$ электроны, заключенные в рассматриваемом цилиндре, будут перемещаться справа налево. Вследствие этого правая половина цилиндра будет заряжаться положительно, а левая — отрицательно, так что между основаниями a и b возникает разность потенциалов $d\varphi$. Электрическое поле будет действовать на все электроны, заключенные внутри цилиндра, с силой $dF_e = -n_0edSdx E$, направленной противоположно силе dF . При равенстве числовых значений сил dF и dF_e установится состояние динамического равновесия, которое нас и интересует. Оно определяется уравнением

$$kTdn_0 = -n_0eE_x dx. \quad (10.5)$$

Знак минус в правой части уравнения поставлен потому, что при $(dn_0/dx) > 0$ проекция напряженности электрического поля $E_x < 0$ — поле направлено от металла 2 к металлу 1. Если учесть, что $E_x dx = -d\varphi$, то уравнение (10.5) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dn_0}{n_0} = -\frac{e}{kT} E_x dx = \frac{e}{kT} d\varphi.$$

Приняв интегрирование этого уравнения по n_0 от n_{02} до n_{01} и по φ от φ_2 до φ_1 , получим формулу (10.4).

Формула (10.4) является математическим выражением первого закона Вольты, так как она показывает, что $\varphi_1 - \varphi_2$ зависит только от температуры и химической природы контактирующих металлов.

7. Для доказательства второго закона Вольты рассмотрим, например, цепь, состоящую из четырех последовательно соединенных металлических проводников I—IV (рис. 10.3). Предположим, что температура во всех проводниках одинакова. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_4$ между концами цепи равна алгебраической сумме скачков потенциала во всех контактах:

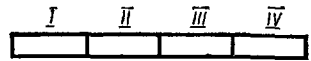


Рис. 10.3

$$\varphi_1 - \varphi_4 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + (\varphi_3 - \varphi_4).$$

Пользуясь уравнением (10.4), найдем

$$\varphi_1 - \varphi_4 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{02}}{n_{03}} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{03}}{n_{04}} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{04}},$$

т.е. $\varphi_1 - \varphi_4$ действительно не зависит от природы промежуточных проводников.

8. Оценим величины внешней и внутренней контактных разностей потенциалов. Работа выхода A_1 и A_2 у различных металлов лежит в пределах нескольких электронвольт, т.е. $\Delta\varphi'_{12} \approx 1$ В. Если считать, что n_0 приблизительно равно концентрации атомов металла, то отношение n_{01}/n_{02} лежит в пределах единиц и $\ln(n_{01}/n_{02}) \approx 1$. Поэтому внутренняя контактная разность потенциалов по порядку величины равна (в вольтах)

$$\Delta\varphi_{12} \approx \frac{kT}{e} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot T \approx \frac{T}{10^4}.$$

Следовательно, при комнатной температуре $\Delta\varphi_{12} \approx 0,03$ В, т.е. $\Delta\varphi_{12} \ll \Delta\varphi_{12}$.

Опыт показывает, что $\Delta\varphi_{12}$ практически не зависит от температуры, в то время как $\Delta\varphi_{12}$ возрастает пропорционально абсолютной температуре [если пренебречь более слабой зависимостью $\ln(n_{01}/n_{02})$ от температуры].

§ 10.2. Термоэлектрические явления и их применения

1. Рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из двух металлических проводников 1 и 2 (рис. 10.4). По закону Ома (9.11) электродвижущая сила \mathcal{E} , приложенная в этой цепи, равна сумме падений напряжений U_1 и U_2 соответственно на участках $a1b$ и $b2a$, т.е. в первом и втором проводниках (направление обхода контура показано на рис. 10.4 стрелками):

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2.$$

Значения U_1 и U_2 можно определить с помощью закона Ома для участка цепи (9.9), если учесть, что на участках $a1b$ и $b2a$ нет приложенных э.д.с.: $U_1 = \varphi_{1a} - \varphi_{1b}$ и $U_2 = \varphi_{2b} - \varphi_{2a}$, так что

$$\mathcal{E} = (\varphi_{1a} - \varphi_{2a}) + (\varphi_{2b} - \varphi_{1b}).$$

Таким образом, в рассматриваемой цепи действует электродвижущая сила, равная алгебраической сумме всех внутренних контактных разностей потенциалов.

Если температуры обоих спаев одинаковы, т.е. $T_a = T_b = T$, то на основании уравнения (10.4) имеем

$$\mathcal{E} = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{01}}{n_{02}} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{02}}{n_{01}} = 0.$$

В замкнутой цепи, образованной из нескольких металлических проводников, все спаи которой находятся при одинаковых температурах, невозможно возникновение электродвижущей силы за счет одних только контактных скачков потенциала.

2. Иначе обстоит дело, если температуры спаев T_a и T_b различны, например $T_a > T_b$. В этом случае в замкнутой цепи появляется так называемая **термоэлектродвижущая сила** (термо-э.д.с.), которая, как видно из (10.4), пропорциональна разности температур спаев:

$$\mathcal{E} = \frac{k}{e} (T_a - T_b) \ln \frac{n_{01}}{n_{02}} = \alpha (T_a - T_b), \quad (10.6)$$

где $\alpha = (k/e) \ln(n_{01}/n_{02})$ — величина, характеризующая свойства кон-

такта данных двух металлов и называемая **удельной термо-э.д.с.**¹ Благодаря термоэлектродвижущей силе в замкнутой цепи возникает термоэлектрический ток, направление которого при $T_a > T_b$ ($n_{01} > n_{02}$) указано стрелками на рис. 10.4. Для поддержания постоянного тока необходимо обеспечивать постоянство разности температур спаев, т.е. к более нагретому спаю нужно непрерывно подводить теплоту, а от холодного — непрерывно ее отводить. В данном случае происходит преобразование внутренней энергии системы в электрическую, которое полностью соответствует второму закону термодинамики: для осуществления этого преобразования энергии используют два источника теплоты (нагреватель и холодильник). Коэффициент полезного действия замкнутого цикла, описывающего подобное преобразование внутренней энергии в электрическую, невелик и составляет 0,1%. Весьма мала и термоэлектродвижущая сила, не превышающая нескольких милливольт при разности температур спаев $T_a - T_b$, равной 100 К.

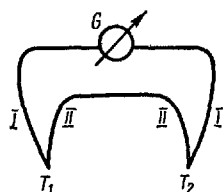


Рис. 10.5

3. Термоэлектрические явления в металлах в настоящее время широко используются главным образом для измерения температуры. Для этой цели применяют **термоэлементы**, или **термопары**, представляющие собой две проволоки, изготовленные из различных металлов или сплавов, с известным значением коэффициента α в уравнении (10.6). Концы этих проволок сварены (рис. 10.5). Один спай помещается в среду, температуру T_1 которой нужно измерить, а второй — в среду с известной постоянной температурой T_2 (например, в сосуд Дьюара с тающим льдом). Термопары в отличие от обычных термометров позволяют измерять температуры в широком интервале: $\sim (10 \div 10^3)$ К.

С помощью термопары можно не только измерять температуру, но и следить за ее изменением во времени. Возможность установить гальванометр на значительном расстоянии от термопары позволяет с успехом применять термопары в контрольных и автоматических устройствах (терморегуляторы и т. п.).

Для увеличения чувствительности термопар применяют их последовательные соединения, называемые **термо-батареями** или **термостолбиками**.

4. При пропускании тока через цепь, состоящую из двух различных спаянных металлов, происходит не только их нагревание вследствие выделения джоулевой теплоты, но и добавочное выделение теплоты в одном из спаев, в то время как другой спай охлаждается (рис. 10.6). Если направление электрического тока совпадает

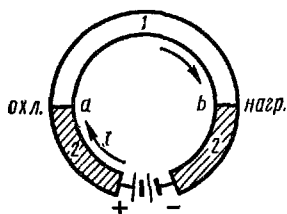


Рис. 10.6

¹ При значительных изменениях температуры спаев коэффициент α в уравнении (10.6) несколько изменяется, что можно объяснить изменением отношения концентраций электронов n_{01}/n_{02} в спаянных металлах.

с направлением термоэлектрического, возникающего при условии $T_a > T_b$ (рис. 10.4), то происходит нагревание спая b и охлаждение спая a . При изменении направления тока на обратное спай b охлаждается, а спай a нагревается. Это явление было открыто Пельтье в 1834 г. и называется **эффектом Пельтье**.

Явление Пельтье, так же как и появление термоэлектрической э.д.с., связано с возникновением контактной разности потенциалов на границе двух металлов. Предположим, что металл 1 спая a зарядился положительно, а металл 2 — отрицательно, т.е. что $n_{01} > n_{02}$. Тогда в случае, если ток и термоэлектрический ток совпадают по направлению, как показано на рис. 10.6, при $T_a > T_b$ электроны в спаяе a движутся в направлении $1 \rightarrow 2$ и тормозятся электрическим полем контактного слоя. При этом кинетическая энергия электронов частично преобразуется в их потенциальную энергию, так что температура электронного газа и кристаллической решетки, находящейся с ним в термодинамическом равновесии, понижается — спай a охлаждается. В спаяе b происходит обратное явление. Электроны, движущиеся в этом спаяе в направлении $2 \rightarrow 1$, ускоряются электрическим полем контактного слоя. Поэтому температура спая b повышается. Очевидно, что при изменении направления тока на противоположное спай a будет нагреваться, а спай b — охлаждаться.

Явление Пельтье можно использовать для устройства холодильной машины (см. т. I, § 12.1). Однако экономичность такой машины, основанной на эффекте Пельтье в металлах, очень мала. Значительно более экономичными являются полупроводниковые холодильные устройства (см. § 13.8).

5. Необходимо отметить, что истолкование контактных термоэлектрических явлений, приведенное в этой главе и основанное на представлениях о классическом электронном газе в металлах, не дает правильного ответа на многие вопросы. Например, неясным остается вопрос, почему все термоэлектрические эффекты, связанные с контактом двух металлов, столь малы. Как мы увидим в гл. XIII (см. § 13.1), причина этой и всех других трудностей классической теории электропроводности металлов (см. § 8.7) заключается в том, что для описания свойств электронов в металлах и других твердых телах нельзя применять классические представления об электронном газе.

§ 10.3. Термоэлектронная эмиссия

1. **Явление термоэлектронной эмиссии** состоит в испускании электронов нагретыми металлами. Электрон проводимости может вылететь из какого-либо металла в том случае, если его энергия W превышает работу A выхода электрона из металла.

Концентрация n_0 электронов проводимости в металле весьма велика; их тепловые скорости при данной температуре различны и распределены, по классическим представлениям, в соответствии с законом Максвелла (см. т. I, § 11.2). Это означает, что даже при средних тем-

пературах в металле имеется достаточно большое число электронов проводимости, способных совершить работу выхода и вылететь из металла. Опыт показывает, что при температурах металла $\sim 10^2$ К явление термоэлектронной эмиссии становится интенсивным. В результате термоэлектронной эмиссии возникает **термоэлектронный ток**.

Это явление можно показать на следующем опыте: в стеклянной трубке (рис. 10.7), в которую впаяны два электрода — катод K и

анод A , создается высокий вакуум для того, чтобы электроны при своем движении в трубке не сталкивались с частицами газа, а катод не окислялся. Катод из исследуемого металла нагревается током от батареи нака-

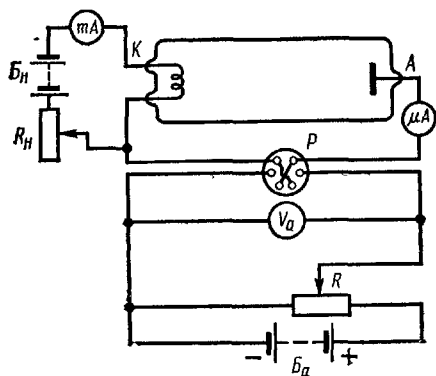


Рис. 10.7

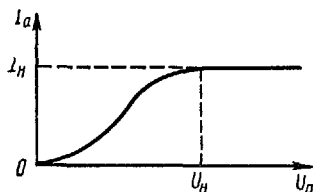


Рис. 10.8

ла B_n . Сила тока в цепи накала регулируется резистором R_n . С помощью потенциметрической схемы, состоящей из батареи элементов B_a и потенциометра R , между анодом и катодом создается анодное напряжение U_a , измеряемое вольтметром V_a . Переключатель P служит для перемены знака напряжения между электродами K и A . Термоэлектронный ток измеряется микроамперметром μA .

Из опытов следует, что сила термоэлектронного тока I_a зависит от созданного между электродами напряжения U_a , температуры катода и материала, из которого он сделан.

2. На рис. 10.8 показана зависимость термоэлектронного тока I_a от анодного напряжения U_a при постоянной температуре катода. При небольших анодных напряжениях сила тока I_a вначале медленно растет с повышением напряжения. Это объясняется тем, что при малых значениях U_a не все электроны, испускаемые катодом, достигают анода. Часть электронов образует между катодом и анодом электронное облако (пространственный заряд), которое препятствует движению к аноду вновь вылетающих из катода электронов. С увеличением напряжения U_a электронное облако постепенно рассеивается и ток I_a растет. При $U_a = U_n$ рост тока прекращается. Это связано с тем, что число электронов, достигающих анода за единицу времени, становится равным числу электронов, вылетающих за это же время из катода. Максимальный термоэлектронный ток, возможный при данной температуре катода, называется **током насыщения** I_n .

Зависимость термоэлектронного тока от анодного напряжения,

когда $U_a \ll U_H$, описывается формулой **Богуславского—Ленгмюра** («закон трех вторых»):

$$I_a = BU_a^{3/2}, \quad (10.7)$$

где B — коэффициент, зависящий от формы электродов и их взаимного расположения.

Термоэлектронный ток в анодной цепи прекращается, если с помощью переключателя P (рис. 10.7) переменить знак напряжения U_a и «запереть» катод¹. Это означает, что в электронной трубке наблюдается односторонняя проводимость.

3. Если при данной температуре за единицу времени катодом испускается N электронов, то сила тока насыщения

$$I_H = Ne.$$

Из опытов следует, что ток насыщения растет с повышением температуры катода. Предполагая, что электроны в металле подчиняются квантовой статистике (см. § 13.1), можно показать, что плотность тока насыщения j_H вычисляется по формуле, известной под названием формулы **Ричардсона—Дешмена**:

$$j_H = B'T^2 e^{-A/kT}, \quad (10.8)$$

где A — работа выхода электрона из металла, T — абсолютная температура катода, B' — эмиссионная постоянная, зависящая от материала катода и состояния его поверхности. Из формулы (10.8), хорошо согласующейся с опытом, следует, что j_H быстро растет при нагревании катода, т.е. с увеличением тока накала. Для получения большего тока насыщения применяют катоды из материалов с возможно меньшей работой выхода электрона. Исследования показали, что работа выхода электрона из оксидированных (покрытых окислами щелочноземельных металлов) и торированных (вольфрамовых, покрытых мономолекулярным слоем тория) катодов значительно меньше, чем работа выхода электрона из чистых поверхностей металла. Например, торированный катод ($W + Th$) дает при 1700 °С ток насыщения в 3000 раз больший, чем чистый вольфрам при 2500 °С.

В настоящее время кроме торированных катодов применяются бариевые ($W + Ba$), цезиевые ($W + Cs$ или окисленный $W + CsO$) и др.

4. Расположив вблизи от катода K анод A с небольшим отверстием, можно получить узкий пучок электронов — **электронный**, или **катодный**, **луч**, легко обнаруживаемый по свечению, которое он вызывает, попадая на экран, покрытый сернистым цинком.

В электрическом поле между катодом и анодом электрон ускоряется, приобретая кинетическую энергию, равную

$$\frac{1}{2} mv^2 = eU_a. \quad (10.9)$$

¹ Строго говоря, очень слабый термоэлектронный ток наблюдается при $U_a = 0$ и даже при небольших отрицательных значениях U_a . Это связано с тем, что некоторые термоэлектроны, вылетев из катода, имеют еще запас кинетической энергии, достаточной для их «прорыва» через слабое задерживающее электрическое поле.

Для получения достаточно быстрых электронов применяют два последовательно расположенных анода. Ускорение электронов пучка в электрическом поле между катодом и кольцевыми анодами используют в высоковольтных линейных ускорителях (см. § 18.5).

5. Явление термоэлектронной эмиссии лежит в основе работы электронных ламп, которые рассмотрены в гл. XXII, а также

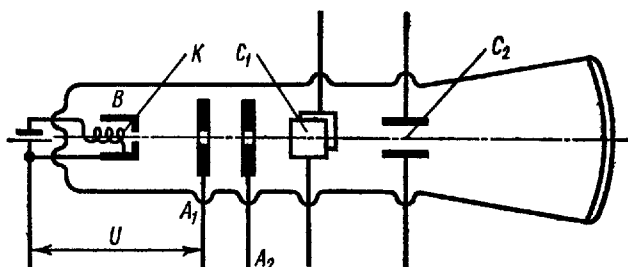


Рис. 10.9

ряда других приборов. Остановимся на принципе действия электронного осциллографа (рис. 10.9).

Электронный луч, вышедший из катода, проходит через цилиндрический направляющий электрод B и далее через аноды A_1 и A_2 . Затем электроны движутся через плоские конденсаторы C_1 и C_2 , расположенные перпендикулярно друг другу. На первый конденсатор накладывается известное переменное напряжение, на второй — исследуемое переменное напряжение. Электронный луч, периодически отклоняясь в полях конденсаторов в двух взаимно перпендикулярных направлениях, выписывает на люминесцирующем экране осциллограмму в виде фигур Лиссажу (см. т. I, § 8.4).

Обычно на первый конденсатор подается напряжение, периодически изменяющееся со временем по «пилообразному» закону (рис. 10.10). Отклонение электронного луча в горизонтальном направлении (в конденсаторе C_1) пропорционально напряжению, изменяющемуся в



Рис. 10.10

свою очередь пропорционально времени. Таким образом, отклонениями электронного луча в горизонтальном направлении изображаются промежутки времени. Смещения электронного луча в вертикальном направлении в конденсаторе C_2 пропорциональны исследуемому напряжению. В результате светящийся след вычерчивает на экране осциллографа график изменения во времени изучаемого напряжения — его «временную развертку». Весьма малая инерция электронного луча позволяет изучать таким методом электрические процессы, протекающие за очень короткие промежутки времени порядка 10^{-7} с.

§ 10.4. Понятие о других эмиссионных явлениях

1. Энергию, необходимую электронам для выхода из металла, можно сообщить им не только нагреванием металла, но и другими способами. В зависимости от того, каким способом электронам сообщается эта энергия, различают автоэлектронную, фотоэлектронную и вторичную электронную эмиссии.

Автоэлектронной или **холодной эмиссией** называется вырывание электронов из металла электрическим полем. Она может происходить и при невысоких температурах, причем температура металла в процессе холодной эмиссии практически не изменяется. В результате действия на металл поля с напряженностью E электрону может быть сообщена энергия, необходимая для преодоления контактной разности потенциалов на границе металла с окружающей средой. Предположим, что поверхностный скачок потенциала (см. § 10.1) происходит на расстоянии $l = 10^{-8}$ см и работа выхода $A = 1$ эВ. Если поле однородно, то работу выхода по формуле (10.1) можно записать так:

$$A = e\Delta\varphi = eEl.$$

Следовательно, минимальная напряженность поля, которое может вырвать электрон из металла,

$$E = \frac{A}{el} = \frac{1 \text{ эВ}}{1,6 \cdot 10^{-8} \text{ см}} = 10^8 \text{ В/см.}$$

В действительности, как показывают опыты, электроны вырываются из металла электрическими полями, в сотни раз меньшими. Это находит свое истолкование в современной квантовой теории твердого тела. Однако объяснение этого явления выходит за рамки нашего курса. Укажем лишь, что автоэлектронная эмиссия связана с так называемым туннельным эффектом, который рассмотрен в т. III данного курса.

2. **Фотоэлектронной эмиссией** или **внешним фотоэффектом** называется явление вырывания электронов из вещества под действием света. Катоды электровакуумных приборов, испускающие электроны под действием света, называются **фотокатодами**. Основной характеристикой фотокатода служит его **квантовый выход**, равный отношению числа вылетевших из фотокатода электронов к числу фотонов, поглощенных фотокатодом.

В современных сложных фотокатодах работа выхода электрона уменьшена путем специальной обработки катода. Например, кислородно-цезиевые фотокатоды состоят из четырех слоев: серебра, окиси серебра и окиси цезия, на поверхности которой абсорбированы атомы цезия. Такие катоды обладают пониженной работой выхода и их чувствительность достигает $1/300$. В сурьмяно-цезиевых фотокатодах¹ чувствительность доходит до $1/4$.

¹ Химическое соединение сурьмы и цезия, на поверхности которого абсорбированы атомы цезия.

3. Если поверхность металла в вакууме бомбардируется электронами, ускоряемыми электрическим полем, то она сама становится источником электронов. Это явление называется **вторичной электронной эмиссией**. Вторичный электронный поток состоит частично из электронов, отраженных поверхностью, и частично из электронов, вырванных из металла.

Для некоторых чистых металлических поверхностей (ртуть, платина) число n_2 вторичных электронов в лучшем случае в 1,75—1,78 раза превышает число n_1 первичных электронов, энергия которых равна 700 эВ. Отношение $(n_2/n_1) = \delta$ называется **коэффициентом вторичной эмиссии**. У полупроводников и диэлектриков δ больше, чем у металлов. У этих веществ энергии первичных электронов, соответствующие максимуму δ , больше, чем у металлов.

Явление вторичной электронной эмиссии применяется в умножителях, служащих для многократного усиления слабых электронных токов. Начиная с 30-х годов различные типы электронных умножителей были созданы Л. А. Кубецким, П. В. Тимофеевым и др.

На рис. 10.11 изображена схема электронного умножителя. Электроны, возникающие на фотокатоде K , направляются на катод вторичной эмиссии — эмиттер — KS_1 , имея энергию, соответствующую разности потенциалов между K и KS_1 . Число вторичных электронов, вырванных из катода KS_1 , в δ раз превышает число электронов, вышедших из катода K . Усиленный электронный поток направляется на эмиттер KS_2 . Процесс умножения потоков повторяется на катодах KS_3, \dots, KS_n . Если умножитель имеет n эмиттеров или n каскадов, то на последнем электроде — аноде, называемом **коллектором**, можно получить достаточно сильный электронный ток.

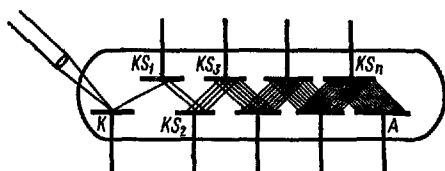


Рис. 10.11

Вопросы для повторения

1. Что называется работой выхода электрона из металла? Чем она обусловлена и от чего зависит?
2. Сформулируйте законы Вольты и на основании электронной теории выведите выражение для контактной разности потенциалов между двумя металлами.
3. Что называется термоэлектродвижущей силой и от чего она зависит?
4. Поясните физический смысл эффекта Пельтье.
5. В чем состоит явление термоэлектронной эмиссии? Объясните зависимость термоэлектронного тока от анодного напряжения.
6. Опишите принцип действия электронного осциллографа и принцип действия электронного умножителя.

Примеры решения задач

Задача 10.1. Термопара \mathcal{E}_T железо — константан и соединенный с нею последовательно гальванометр G включены между точкой A и движком C потенциометра (рис. 10.12). К зажимам A и B потенциометра, полное сопротивление которого $R_{AB} = 10^4$ Ом, присоединен аккумулятор с э.д.с.

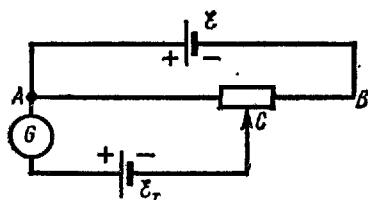


Рис. 10.12

$\mathcal{E} = 2$ В. Холодный спай термопары находится в сосуде Дьюара с тающим снегом. Постоянная термопары $\alpha = 5,3 \cdot 10^{-5}$ В/К. Какова температура горячего спаия термопары, если ток в цепи гальванометра равен нулю при таком положении движка C , когда сопротивление $R_{AC} = 132,5$ Ом? Внутренним сопротивлением аккумулятора и сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

Дано:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2 \text{ В} \\ R_{AC} &= 132,5 \text{ Ом} \\ R_{AB} &= 10^4 \text{ Ом} \\ \alpha &= 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ В/К} \\ T_2 &= 273 \text{ К} \\ T_1 &= ? \end{aligned}$$

Решение. По второму правилу Кирхгофа для замкнутого контура ток в цепи гальванометра равен нулю, если э.д.с. термопары равна напряжению на участке AC потенциометра:

$$\mathcal{E}_T = U_{AC} = IR_{AC},$$

где I — сила тока в потенциометре. По закону Ома для замкнутой цепи \mathcal{E}_{AB} имеем $I = \mathcal{E}/R_{AB}$. Поэтому э.д.с. термопары

$$\mathcal{E}_T = \mathcal{E} R_{AC} / R_{AB}. \quad (а)$$

С другой стороны, по формуле (10.6),

$$\mathcal{E}_T = \alpha (T_1 - T_2), \quad (б)$$

где T_1 и T_2 — температуры горячего и холодного спаев. Из формул (а) и (б) следует, что

$$T_1 = T_2 + \frac{\mathcal{E}}{\alpha} \cdot \frac{R_{AC}}{R_{AB}}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$T_1 = T_2 + \frac{\mathcal{E}}{\alpha} \cdot \frac{R_{AC}}{R_{AB}} = \left(273 + \frac{2 \cdot 132,5}{5,3 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4} \right) \text{ К} = 773 \text{ К}; \quad t_1 = 500 \text{ }^\circ\text{С}.$$

Глава XI

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ

§ 11.1. Законы электролиза Фарадея. Электролитическая диссоциация

1. Наблюдения показали, что многие жидкости очень плохо проводят электрический ток, например дистиллированная вода, глицерин, керосин и др. Наоборот, водные растворы солей, кислот и щелочей хорошо проводят ток. Прохождение тока через эти жидкости вызывает выделение их составных частей на электродах. Это явление получило название **электролиза**, а проводники, в которых прохождение тока сопровождается электролизом, называются **проводниками второго рода** или **электролитами**.

Иногда из-за вторичных реакций конечными продуктами электролиза являются составные части растворителя, а не растворенного вещества, или другие вещества, получающиеся в результате химической реакции выделившегося вещества с электродами.

2. Основные законы электролиза были экспериментально установлены М. Фарадеем в 1834 г.

Первый закон Фарадея: *масса M выделившегося на электроде вещества пропорциональна электрическому заряду q , прошедшему через электролит:*

$$M = kq. \quad (11.1)$$

Коэффициент пропорциональности k , численно равный массе вещества, выделившегося при прохождении через электролит единицы электрического заряда, зависит от химической природы вещества и называется **электрохимическим эквивалентом** вещества.

Если через электролит пропускается постоянный ток I в течение времени t , то $q = It$ и уравнение (11.1) можно записать в виде

$$M = kIt. \quad (11.1')$$

Второй закон Фарадея: *электрохимический эквивалент вещества пропорционален отношению молярной массы A ионов этого вещества к их валентности Z :*

$$k = \frac{1}{F} \frac{A}{Z}, \quad (11.2)$$

где F — одинаковая для всех веществ величина, называемая **постоянной (числом) Фарадея**.

Подставив это выражение для k в (11.1), получим формулу, объединяющую оба закона Фарадея:

$$M = \frac{1}{F} \frac{A}{Z} q. \quad (11.3)$$

3. Из (11.3) легко выяснить смысл постоянной Фарадея. В самом деле, если $(M/A) = (1/Z)$ молей (такое количество вещества называют

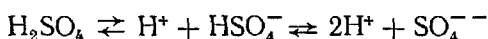
грамм-эквивалентом), то заряд q , прошедший через электролит, численно равен F . Итак, постоянная Фарадея численно равна заряду, который надо пропустить через электролит для выделения на электроде одного грамм-эквивалента вещества. Для одновалентного вещества грамм-эквивалент равен молю. Следовательно, постоянная Фарадея численно равна заряду, при прохождении которого через электролит на электроде выделяется один моль одновалентного вещества. Как показали многочисленные эксперименты,

$$F = (96\,486,70 \pm 0,54) \text{ Кл/моль}$$

4. Прохождение тока через электролиты неразрывно связано с переносом вещества. Отсюда следует, что в электролитах в отличие от металлических проводников (проводников первого рода) носителями тока являются не свободные электроны, а **ионы** — заряженные частицы вещества. Ионы представляют собой атомы или группы атомов, обладающие избыточным или недостаточным количеством электронов по сравнению с нейтральными атомами или молекулами.

5. Процесс расщепления нейтральных молекул жидкости на положительно и отрицательно заряженные ионы называется **электролитической диссоциацией**.

Если молекулы жидкости не диссоциированы на ионы, то такая жидкость (например, водный раствор сахара) не может проводить электрический ток. Хорошая проводимость водных растворов кислот, солей и щелочей объясняется тем, что значительная часть молекул этих веществ при растворении диссоциирует на положительные ионы, или **катионы** (ионы металлов и водорода), и на отрицательные ионы, или **анионы** (ионы кислотных остатков и гидроксильной группы):



Диссоциация молекулы растворенного вещества, состоящей из взаимосвязанных ионов, происходит при ее столкновении с другой молекулой (растворителя или растворенного вещества), имеющей достаточно большую кинетическую энергию теплового движения. Интенсивная диссоциация кислот, солей и щелочей в водных растворах связана с тем, что молекулы воды обладают большим электрическим моментом, т.е. подобны сильно вытянутым диполям. Под влиянием электрического поля, создаваемого полярной молекулой кислоты, соли или щелочи, окружающие ее диполи воды ориентируются преимущественно таким образом (рис. 11.1), что своим электрическим полем существенно ослабляют связь между ионами этой молекулы и тем самым облегчают ее диссоциацию. После разрыва молекулы на ионы диполи растворителя обвола-

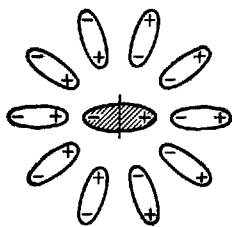


Рис. 11.1

квивают их, образуя сольватную оболочку, сильно затрудняющую движение ионов (рис. 11.2).

6. Из-за хаотического теплового движения ионов в растворе происходит и обратный процесс столкновения ионов противоположных знаков и воссоединения их в нейтральные молекулы. Этот процесс называется молизацией или рекомбинацией.

Предположим, что в единице объема раствора находится n_0 молекул растворенного вещества, из которых $n'_0 = \alpha n_0$ диссоциированы на ио-

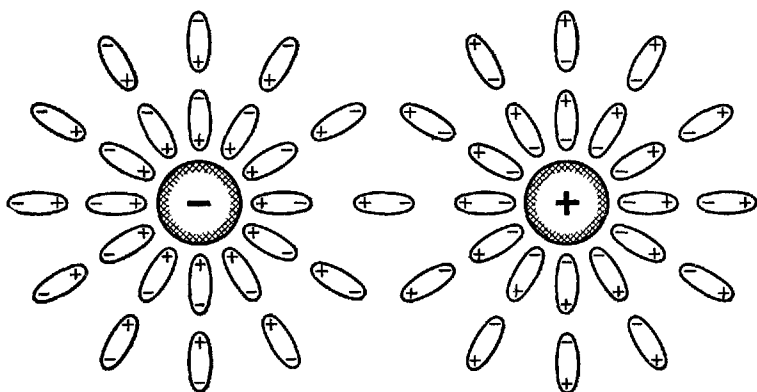


Рис. 11.2

ны; α называется коэффициентом диссоциации. Очевидно, что число молекул $\Delta n'_0$, которые диссоциируют за единицу времени в единице объема, пропорционально числу недиссоциированных молекул, т.е.

$$\Delta n'_0 = \beta (1 - \alpha) n_0,$$

где β — коэффициент пропорциональности.

Число же нейтральных молекул $\Delta n''_0$, образующихся в единице объема за единицу времени в результате процесса рекомбинации, пропорционально как числу положительных, так и числу отрицательных ионов, содержащихся в единице объема:

$$\Delta n''_0 = \gamma \alpha^2 n_0^2,$$

где γ — коэффициент пропорциональности.

В случае динамического равновесия между обоими процессами $\Delta n'_0 = \Delta n''_0$. Таким образом,

$$\beta (1 - \alpha) n_0 = \gamma \alpha^2 n_0^2, \text{ или } \frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = \text{const} \cdot n_0. \quad (11.4)$$

Если $n_0 \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow 1$, т.е. в слабых растворах $\alpha \approx 1$ и почти все молекулы диссоциированы.

По мере увеличения концентрации n_0 раствора α убывает. В сильно концентрированных растворах

$$\alpha \approx \text{const}/\sqrt{n_0}.$$

§ 11.2. Атомность электричества

1. Законы Фарадея впервые навели на мысль о том, что любой электрический заряд состоит из целого числа элементарных, т.е. далее не делимых, зарядов — «атомов электричества».

Действительно, для выделения на электроде одного моля одновалентного вещества необходимо, чтобы через электролит прошел электрический заряд, равный постоянной Фарадея F . Если вещество Z -валентное, то для выделения одного моля потребуется заряд, равный ZF . Так как при этом переносится одно и то же число N_A частиц (ионов) вещества (число Авогадро), то на каждую частицу Z -валентного вещества приходится заряд

$$q = ZF/N_A, \quad (11.5)$$

а в случае одновалентного вещества —

$$e = F/N_A. \quad (11.6)$$

Отсюда возможны были два вывода:

а) заряды Z -валентных ионов различны, но в среднем равны ZF/N_A подобно тому, как в газе молекулы обладают различной кинетической энергией поступательного движения, но в среднем она равна $3/2 kT$;

б) каждый ион несет вполне определенный заряд $q = ZF/N_A$, причем заряды ионов могут отличаться лишь на величины, кратные элементарному заряду, равному заряду одновалентного иона $e = F/N_A$. Второй вывод эквивалентен предположению об атомном («зернистом») строении всех электрических зарядов. Опыт показал, что этот вывод оказался правильным.

2. Опыты, проведенные А. Ф. Иоффе в 1912 г., полностью подтвердили атомистический характер электричества.

Схема опытов приведена на рис. 11.3. Отрицательно заряженная металлическая пылинка помещалась между обкладками конденсатора, напряженность поля в котором подбиралась такой, чтобы пылинка находилась в равновесии, т.е. $-qE = mg$. Затем пылинка освещалась ультрафиолетовым светом. Вследствие фотоэффекта отрицательный заряд пылинки от времени уменьшался и для сохранения равновесия в конденсаторе приходилось соответственно изменять напряженность электрического поля:

$$-mg = q_0 E_0 = q_1 E_1 = q_2 E_2 = \dots,$$

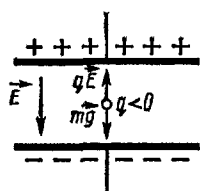


Рис. 11.3

откуда

$$q_0 : q_1 : q_2 : \dots = \frac{1}{E_0} : \frac{1}{E_1} : \frac{1}{E_2} : \dots \quad (11.7)$$

Оказалось, что заряд пылинки может принимать лишь ряд дискретных значений.

3. Величина элементарного электрического заряда (заряда электрона) была измерена Р. А. Миллиkenом (1909—1914). Идея его опытов состоит в определении заряда микроскопической масляной капли на основе измерения скорости ее движения в однородном электрическом поле плоского конденсатора. Движение сферической частицы радиуса r в вязкой жидкости было нами рассмотрено в § 14.3 т. I. При отсутствии электрического поля устанавливается равномерное движение капли со скоростью v . Действующие на нее сила тяжести, архимедова сила и сила Стокса взаимно уравниваются:

$$mg - F_{\text{арх}} = 6\pi\eta r v, \quad (11.8)$$

где η — коэффициент вязкости среды. Считая, что плотность капли ρ , а плотность среды ρ_1 , имеем

$$(4/3) \pi r^3 g (\rho - \rho_1) = 6\pi\eta r v.$$

Отсюда легко вычислить радиус капли: $r = \sqrt{9\eta v / 2g (\rho - \rho_1)}$.

Затем между обкладками конденсатора создается электрическое поле напряженностью E , заставляющее движение капли. Тогда для положительно заряженной капли ($q > 0$) вместо (11.8) имеем

$$(4/3) \pi r^3 g (\rho - \rho_1) - qE = 6\pi\eta r v. \quad (11.9)$$

Измерив v_1 , из (11.9) находят заряд q капли.

Опыты Миллиkenа показали, что во всех случаях заряды капель q являлись кратными и некоторому так называемому элементарному заряду e . Согласно последним данным,

$$e = (1,6021917 \pm 0,0000070) 10^{-19} \text{ Кл, или}$$

$$e = (4,803250 \pm 0,000021) 10^{-10} \text{ СГС Э}_q.$$

§ 11.3. Электролитическая проводимость жидкостей

1. Ток в электролитах представляет собой упорядоченное движение ионов под действием внешнего электрического поля. Поэтому плотность тока \mathbf{j} в произвольном сечении SS , расположенном перпендикулярно направлению движения ионов (рис. 11.4), равна геометрической сумме плотностей тока как положительных, так и отрицательных ионов:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-,$$

причем $\mathbf{j}_+ = q_+ n_{0+} \langle \mathbf{v}_+ \rangle$ и $\mathbf{j}_- = q_- n_{0-} \langle \mathbf{v}_- \rangle$, где q_+ и q_- , n_{0+} и n_{0-} , $\langle \mathbf{v}_+ \rangle$ и $\langle \mathbf{v}_- \rangle$ — соответственно заряды, концентрации и средние скорости

ти упорядоченного движения (дрейфа под влиянием электрического поля) положительных и отрицательных ионов. Путем расчетов, аналогичных приведенным в § 8.5 для электронов проводимости в металлах, легко показать, что скорости дрейфа ионов пропорциональны напряженности E электрического поля:

$$\langle v_+ \rangle = u_+ E, \quad \langle v_- \rangle = -u_- E, \quad (11.10)$$

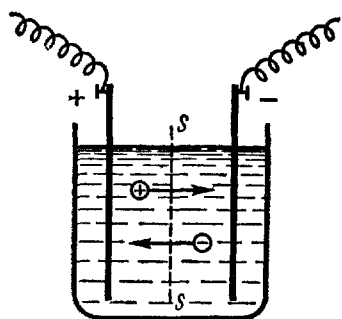


Рис. 11.4

где u_+ и u_- — положительные величины, называемые подвижностями ионов. Подвижность иона равна отношению скорости его дрейфа в электрическом поле к напряженности поля. Как показывают опыты, подвижность иона зависит от его природы, а также от температуры, вязкости и других характеристик электролита. Весьма существенно, что подвижность ионов в электролитах не зависит от напряженности E электрического поля.

Соотношения (11.10) можно также получить, рассматривая дрейф ионов как их установившееся движение в вязкой среде — электролите с постоянными скоростями $\langle v_+ \rangle$ и $\langle v_- \rangle$. При этом для каждого иона электрическая сила уравновешивается силой вязкого сопротивления электролита, пропорциональной скорости дрейфа иона. Например, для положительного иона $q_+ E + F_+ = 0$, где сила сопротивления $F_+ = -c_+ \langle v_+ \rangle$, $c_+ > 0$ — коэффициент пропорциональности, так что $\langle v_+ \rangle = u_+ E$, где $u_+ = q_+/c_+$.

2. С помощью выражений (11.10) плотность тока в электролитах можно представить в форме

$$\mathbf{j} = (q_+ n_{0+} u_+ - q_- n_{0-} u_-) \mathbf{E}. \quad (11.11)$$

В электролитах, так же как в металлических проводниках, нет объемных зарядов. Поэтому $q_+ n_{0+} + q_- n_{0-} = 0$ и

$$\mathbf{j} = q_+ n_{0+} (u_+ + u_-) \mathbf{E}. \quad (11.11')$$

Образование ионов в электролите не связано с прохождением электрического тока. Поэтому их концентрации n_{0+} и n_{0-} , подобно подвижностям u_+ и u_- , не зависят от напряженности электрического поля. Таким образом, формулы (11.11) и (11.11') показывают, что для электролитов выполняется закон Ома: плотность тока в электролите пропорциональна напряженности электрического поля и совпадает с ней по направлению.

3. Заряд положительного иона равен произведению элементарного заряда e на валентность иона Z_+ :

$$q_+ = e Z_+ = (F/N_A) Z_+.$$

Следовательно, закон Ома для плотности тока в электролите (11.11') можно записать в виде

$$\mathbf{j} = (F/N_A) Z_+ n_{0+} (u_+ + u_-) \mathbf{E}. \quad (11.12)$$

Удельное сопротивление электролита

$$\rho = N_A [FZ_+ n_{0+} (u_+ + u_-)]^{-1}, \quad (11.13)$$

где n_{0+} зависит от числа молекул растворенного вещества, содержащихся в единице объема (n_0), и коэффициента диссоциации α . Если при диссоциации молекулы растворенного вещества образуется k_+ положительных и k_- отрицательных ионов, то $k_+ Z_+ = k_- Z_-$, $n_{0+} = k_+ \alpha n_0$, $n_{0-} = k_- \alpha n_0$ и

$$\rho = N_A [FZ_+ k_+ \alpha n_0 (u_+ + u_-)]^{-1}. \quad (11.13')$$

Отношение N_A/Z_+ представляет собой число положительных ионов в одном грамм-эквиваленте, а $C = (k_+ n_0 Z_+ / N_A) = (k_- n_0 Z_- / N_A)$ — число грамм-эквивалентов ионов одного знака, содержащихся в единице объема электролита (в свободном состоянии и связанных в молекулах). Величина C называется **эквивалентной концентрацией раствора**. Если ввести ее в формулу (11.13'), то получается следующее выражение для удельного сопротивления электролита:

$$\rho = [F\alpha C (u_+ + u_-)]^{-1}. \quad (11.13'')$$

С повышением температуры электролита его удельное сопротивление уменьшается, так как, во-первых, увеличивается коэффициент диссоциации α , во-вторых, уменьшается вязкость раствора, а поэтому возрастают подвижности ионов u_+ и u_- .

Зависимость ρ от концентрации раствора имеет сложный характер. При изменении концентрации изменяются α , C и подвижность ионов. При малых концентрациях, как видно из экспериментальной кривой для водного раствора H_2SO_4 (рис. 11.5), ρ убывает с ростом концентрации [α и $(u_+ + u_-)$ изменяются слабо и $\rho \sim 1/C$]. При дальнейшем увеличении концентрации ρ достигает минимума, а затем возрастает вследствие убывания как коэффициента диссоциации α , так и подвижности ионов.

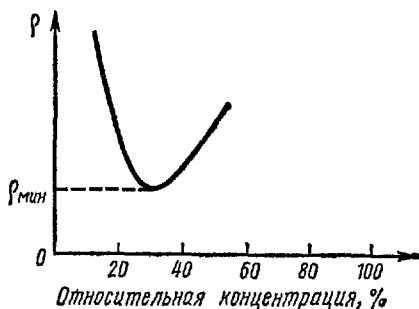


Рис. 11.5

4. Как показывают опыты, ионной проводимостью обладают не только водные и другие растворы солей, кислот и щелочей, но и расплавленные соли. Это явление широко используется в электрометаллургии для получения алюминия, магния и ряда других металлов. Электролитической (ионной) проводимостью обладают ионные кристаллы (например, хлористый свинец, галогено-серебряные соли и др.). При прохождении тока через эти кристаллы происходит их электролиз и разрушение. Ионная проводимость твердых тел сильно воз-

растает при увеличении температуры. Так, если стекло при обычных температурах плохо проводит ток, то при нагреве до температуры 300°C оно становится хорошим электролитическим проводником электричества.

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте законы Фарадея для электролиза. Какие выводы можно из них сделать относительно зарядов ионов?
2. Опишите опыты А. Ф. Иоффе и Р. А. Милликена.
3. Выведите закон Ома для плотности тока в электролитах.
4. Как зависит удельное сопротивление электролитов от температуры и концентрации?

Примеры решения задач

Задача 11.1 Через водный раствор соляной кислоты пропускают электрический ток силой $0,5\text{ А}$ в течение 100 с . Какой объем гремучего газа образуется при нормальных условиях?

Дано:
 $I = 0,5\text{ А}$
 $t = 100\text{ с}$
 $T = 273\text{ К}$
 $p = 1,01 \cdot 10^5\text{ Па}$
 $Z_1 = 1, Z_2 = 2$
 $V = ?$

Решение. Объем V гремучего газа равен сумме объемов V_1 водорода и V_2 кислорода, образовавшихся при электролизе подкисленной воды:

$$V = V_1 + V_2. \quad (\text{а})$$

Согласно уравнению (11.3), масса выделившегося водорода

$$M_1 = \frac{1}{F} \frac{A_1}{Z_1} It.$$

По формуле Менделеева—Клапейрона,

$$pV_1 = \frac{M_1}{\mu_1} RT,$$

где $\mu_1 = 2A_1$ — молярная масса водорода.
Поэтому

$$V_1 = \frac{M_1 RT}{\mu_1 p} = \frac{ItRT}{2FZ_1 p}.$$

Аналогично, объем выделившегося кислорода

$$V_2 = \frac{ItRT}{2FZ_2 p}.$$

Подставив в формулу (а) выражения для V_1 и V_2 , найдем

$$V = V_1 + V_2 = \frac{ItRT}{2Fp} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right).$$

Произведем вычисления в СИ:

$$\begin{aligned} V &= \frac{ItRT}{2Fp} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) = \frac{0,5 \cdot 100 \cdot 8,31 \cdot 273}{2 \cdot 9,65 \cdot 10^4 \cdot 1,01 \cdot 10^5} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \text{ м}^3 = \\ &= 0,87 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 8,7 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ

§ 12.1. Электропроводность газов

1. Газы в отличие от металлов и электролитов состоят из электрически нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных зарядов (электронов и ионов), способных придать в упорядоченное движение под действием электрического поля. Следовательно, при нормальных условиях газы являются изоляторами. Это подтверждается опытами с заряженными изолированными проводниками в сухом воздухе: их заряд практически не изменяется в течение длительного времени. Газ становится проводником, если часть его молекул ионизируется, т.е. они расщепляются на электроны и положительные ионы. В газе могут возникать и отрицательные ионы вследствие соединения с его нейтральными молекулами части освободившихся электронов.

Атомы и молекулы газа представляют собой устойчивые системы заряженных частиц. Поэтому для ионизации атома (или молекулы) необходимо совершить работу против сил взаимодействия между вырываемым электроном и остальными частицами атома (или молекулы). Эта работа называется **работой ионизации** A_i . Величина работы ионизации зависит от химической природы газа и энергетического состояния вырываемого электрона в атоме или молекуле. Наиболее слабо связаны с ядром внешние (валентные) электроны атома, поэтому для удаления из атома валентного электрона нужно затратить меньшую работу, чем для вырывания любого другого электрона. После удаления из атома одного электрона возрастает прочность связи с ядром остальных электронов. Следовательно, для отщепления от однократно ионизированного атома еще одного электрона нужно совершить работу значительно большую, чем работа отрыва первого электрона. Так, например, работа ионизации атома азота (N) равна 14,5 эВ, его одновалентного иона (N^+) — 29,5 эВ, двухвалентного иона (N^{++}) — 47,4 эВ и т. д.

2. Работу ионизации можно характеризовать с помощью потенциала ионизации. **Потенциалом ионизации** φ_i называется та разность потенциалов, которую должен пройти электрон в ускоряющем электрическом поле для того, чтобы увеличение его энергии было равно работе ионизации. Из формулы (3.14) следует, что

$$\varphi_i = A_i/e.$$

Если A_i выражено в электронвольтах, а φ_i — в вольтах, то φ_i численно равно A_i . Значения потенциалов ионизации для некоторых атомов и молекул приведены в табл. 12.1.

3. Ионизация газа может происходить под влиянием различных внешних воздействий: сильного нагрева газа, рентгеновских лучей, α -, β - и γ -лучей, возникающих при радиоактивном распаде, космических лучей, бомбардировки молекул газа быстро движущимися элек-

Таблица 12.1

Атомы	H	He	O	N	Ne	Cl	Na	Hg	K	Ar
φ_1 , В	13,5	24,5	13,6	14,5	21,5	13,0	5,12	10,4	4,32	15,7
Молекулы	H ₂	O ₂	H ₂ O	N ₂	NO ₂	Cl ₂	CO ₂	CO	HCl	NO
φ_1 , В	15,8	12,5	13,0	15,8	11,0	13,0	14,4	14,1	13,8	9,5

тронами или ионами. Количественной характеристикой процесса ионизации служит **интенсивность ионизации**, измеряемая числом пар противоположных по знаку заряженных частиц, возникающих в единице объема газа за единицу времени.

Так как в обычных условиях газ всегда подвергается действию космических лучей и радиоактивных излучений, то необходимо уточнить высказанное выше утверждение об отсутствии в газах свободных зарядов. Строго говоря, **проводимость газа** никогда не равна нулю: в нем всегда имеются свободные заряды, если только не приняты специальные меры для защиты газа от воздействия всех внешних ионизаторов. Однако интенсивность ионизации под влиянием космических лучей и распада рассеянных в земной коре радиоактивных элементов очень мала. Поэтому проводимость газов в естественных условиях, хотя и не равна нулю, но очень близка к нему. В дальнейшем будет показано, что присутствие в газах даже малого количества свободных электронов и ионов играет существенную роль в возникновении заметной проводимости газов в достаточно сильных электрических полях.

4. Рассмотрим подробнее процесс ионизации газа под действием движущихся электронов или ионов, получивший название **ударной ионизации**. Кинетическая энергия заряженной частицы (электрона или иона), прошедшей в ускоряющем электрическом поле разность потенциалов $\Delta\varphi$, $W_k = q\Delta\varphi$, где q — заряд частицы. В дальнейшем будем считать, что все ионы одновалентны, т.е. $q = e$ и

$$W_k = e\Delta\varphi. \quad (12.1)$$

Если масса частицы m , то ее скорость v равна¹

$$v = \sqrt{2W_k/m} = \sqrt{2e\Delta\varphi/m}. \quad (12.2)$$

Для простоты рассмотрим одноатомный газ. При столкновении частицы с нейтральным атомом газа она передает ему часть своей энергии. Если кинетическая энергия частицы сравнительно мала, то, как показывают опыты, ее соударение с атомом носит характер упругого

¹ Предполагается, что скорость v во много раз меньше скорости света c и поэтому масса m не зависит от v (см. т. I, § 2.3).

удара. Энергия, сообщаемая при этом атому, недостаточна для его ионизации. Поэтому бомбардировка атомов газа частицами, обладающими малой энергией, вызывает лишь нагревание газа.

Совершенно иначе происходят соударения с атомами газа частиц, кинетическая энергия которых достаточно велика. В этом случае, как показывают опыты, соударения становятся неупругими и вызывают возбуждение атомов газа, т.е. перевод атома с нормального энергетического уровня на более высокий, или даже ионизацию атомов. Оценим минимальное значение кинетической энергии, которой должна обладать частица для того, чтобы вызвать ударную ионизацию газа. Скорость теплового движения молекул во много раз меньше скорости ионизирующей частицы. Поэтому можно считать, что до удара атом неподвижен. Из закона сохранения импульса при неупругом ударе (см. т. I, § 2.5) имеем

$$mv = (m + M)u, \quad (12.3)$$

где M — масса атома, u — скорость частицы и атома после удара. При этом приближенно считаем, что скорость электрона, выбитого из атома, тоже равна u . Начальная кинетическая энергия частицы расходуется при ударе на работу ионизации A_i и сообщение частице и атому кинетической энергии, соответствующей их скорости u после удара:

$$\frac{mv^2}{2} = A_i + \frac{(m + M)u^2}{2}.$$

Заменив скорость u ее выражением из (12.3), получим

$$\frac{mv^2}{2} = A_i \frac{m + M}{M} = A_i \left(1 + \frac{m}{M}\right). \quad (12.4)$$

Таким образом, минимальная кинетическая энергия, которой должна обладать частица для осуществления ударной ионизации атома газа, не может быть меньше работы ионизации A_i и будет тем ближе к A_i , чем меньше масса частицы по сравнению с массой атома. Для электрона эта энергия меньше, чем для любого иона. Из формулы (12.2) видно, что в одном и том же ускоряющем электрическом поле электрон и одновалентный ион приобретают одинаковую кинетическую энергию. Поэтому для осуществления ударной ионизации ионы должны пройти в ускоряющем электрическом поле большую разность потенциалов, чем электроны. Работа, необходимая для возбуждения атома, меньше работы ионизации. Следовательно, неупругие соударения частиц с атомами газа возможны и при энергии частиц, меньшей той, которая соответствует формуле (12.4).

Процесс соударения электронов или ионов с молекулами, состоящими из двух и большего числа атомов, качественно подобен рассмотренному нами процессу их соударения с молекулами одноатомных газов. Однако в этом случае следует учитывать, что возбуждение двухатомной и более сложной молекулы может состоять в увеличении не только энергии ее электронов, но и энергии колебаний ядер атомов и энергии вращательного движения молекулы.

5. Одновременно с ионизацией газа в его объеме происходит рекомбинация ионов в нейтральные частицы. Рассмотрим опыт, иллюстрирующий процесс рекомбинации (рис. 12.1). В стеклянный цилиндр *A*, расширяющийся внизу, впаяны электроды *B*, *C* и *D*, соединенные с одинаковыми электроскопами. Электроскопы заряжаются так, чтобы листочки их разошлись на одинаковые углы (рис. 12.1, *a*).

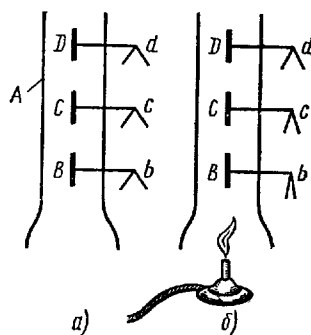


Рис. 12.1

Затем под цилиндр подводится горелка, пламя которой ионизирует воздух. Струя горячего ионизированного воздуха поднимается вверх. Листочки электроскопа *b* спадают, так как он теряет свой заряд (рис. 12.1, *b*); листочки электроскопа *c* показывают лишь небольшое уменьшение заряда, а отклонение листочков электроскопа *d* вообще не изменяется.

Из этого опыта следует, что в течение времени, необходимого для достижения ионами электродов *C* и *D*, происходит постепенное их воссоединение в нейтральные частицы и струя газа, поднимаясь в цилиндре *A*, постепенно теряет свою электропроводность.

§ 12.2. Несамостоятельный газовый разряд

1. Процесс прохождения электрического тока через газ называется **газовым разрядом**. Если электропроводность газа создается внешними ионизаторами, то электрический ток, возникающий в нем, называется **несамостоятельным газовым разрядом**. С прекращением действия внешних ионизаторов несамостоятельный разряд прекращается. Несамостоятельный газовый разряд не сопровождается свечением газа.

2. Для исследования зависимости силы тока I при несамостоятельном газовом разряде от напряжения U между электродами воспользуемся установкой, схема которой изображена на рис. 12.2. Напряжение,

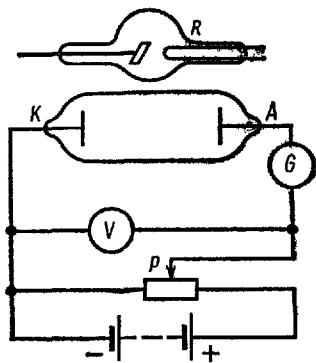


Рис. 12.2

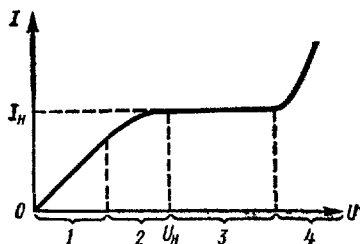


Рис. 12.3

приложенное к электродам A и K , регулируется при помощи потенциометра P и измеряется вольтметром V . Для измерения силы тока служит чувствительный гальванометр G . Газ ионизируется рентгеновскими лучами, испускаемыми трубкой R . Интенсивность ионизации во время опыта остается неизменной. Результаты измерений представлены в виде кривой на рис. 12.3.

Рассмотрим эту кривую. При небольших напряжениях сила тока пропорциональна напряжению (1-я область напряжений). Это легко понять, если учесть, что несамостоятельный газовый разряд подобен току в электролитах: оба они осуществляются упорядоченно движущимися ионами¹. Следовательно, в данном случае для плотности тока в разряде можно воспользоваться выражением (11.11'):

$$j = q_+ n_{0+} (u_+ + u_-) E, \quad (12.5)$$

где u_+ и u_- — подвижности положительных и отрицательных ионов, а q_+ и n_{0+} — заряд и концентрация положительных ионов. При ионизации в газах обычно образуются электроны и одновалентные положительные ионы, поэтому можно принять, что $q_+ = e$ и $n_{0+} = n_0$, где n_0 — число пар ионов в единице объема. Тогда формула (12.5) примет вид

$$j = en_0 (u_+ + u_-) E. \quad (12.5')$$

Как показывает опыт, подвижность газовых ионов в широком интервале давлений (от 10 до 10^7 Па) обратно пропорциональна давлению.

3. При дальнейшем увеличении напряжения U между электродами линейная зависимость силы тока I от U нарушается (2-я область напряжения). Это явление связано со следующим существенным отличием несамостоятельного газового разряда от тока в электролитах: убыль ионов, участвующих в проводимости и нейтрализующихся у электродов, непрерывно пополняется в объеме жидкости вследствие диссоциации новых молекул электролита. Поэтому число пар ионов в единице объема (n_0) в первом приближении не зависит от плотности тока и остается постоянным. В несамостоятельном разряде пополнение ионов целиком зависит от мощности внешнего источника ионизации, поэтому лишь при малых плотностях тока (т.е. при малых E и U) можно считать, что $n_0 = \text{const}$ и j пропорционально E . При дальнейшем увеличении напряженности E поля концентрация ионов убывает и линейная зависимость силы тока от напряжения нарушается: с возрастанием напряжения U сила тока растет все медленнее.

4. Начиная с некоторого значения напряжения U_n сила тока при несамостоятельном разряде остается неизменной, несмотря на дальнейшее увеличение напряжения (3-я область напряжений). Это явление объясняется тем, что в сильных электрических полях скорость ионов достигает больших значений и все ионы, возникающие в газе, на пути к электродам не успевают воссоединиться в нейтральные

¹ Электроны, образующиеся при ионизации молекул газа, представляют собой простейшие отрицательные «ионы».

молекулы. Поэтому при неизменной интенсивности ионизации не происходит дальнейшего возрастания тока.

Максимальная сила тока $I_{\text{н}}$, возможная при данной интенсивности ионизации, называется **током насыщения**. При токе насыщения к электродам ежесекундно прибывает электрический заряд eN_0 , где N_0 — число пар одновалентных ионов, образующихся в объеме газа под действием ионизатора за одну секунду. Очевидно, что ток насыщения

$$I_{\text{н}} = eN_0. \quad (12.6)$$

Из уравнения (12.6) видно, что если увеличить в несколько раз интенсивность ионизации, т.е. число N_0 пар ионов, образующихся за одну секунду, то во столько же раз увеличится и ток насыщения $I_{\text{н}}$. Существование тока насыщения подтверждает ионную природу проводимости газов.

При дальнейшем увеличении напряжения между электродами сила тока снова начинает резко возрастать (4-я область напряжений). Это явление, обусловленное возникновением ударной ионизации и резким возрастанием числа носителей заряда в газе, будет подробнее рассмотрено в следующем параграфе.

§ 12.3. Самостоятельный газовый разряд

1. Электрический разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется **самостоятельным газовым разрядом**. Для его осуществления необходимо, чтобы в результате самого разряда в газе непрерывно образовывались свободные заряды. Основным источником их возникновения является ударная ионизация молекул газа.

2. Рассмотрим влияние напряжения U между электродами газоразрядной трубки, изображенной на рис. 12.2, на проводимость газа и процессы, происходящие в нем при прохождении электрического тока. При некотором достаточно большом значении напряжения электроны, возникающие в газе под действием внешнего ионизатора R , настолько сильно ускоряются электрическим полем, что, сталкиваясь с молекулами газа, ионизируют их: При этом образуются вторичные электроны и ионы. Вторичные электроны тоже ускоряются электрическим полем и в свою очередь ионизируют новые молекулы газа. Таким образом, число носителей тока в газе и его проводимость сильно возрастают. В этом и состоит причина резкого увеличения тока в начале 4-й области напряжений на рис. 12.3. Однако ударная ионизация, производимая одними электронами, недостаточна для поддержания разряда при удалении внешнего ионизатора, т.е. для осуществления самостоятельного разряда. В самом деле, каждый электрон движется в электрическом поле газоразрядной трубки в направлении от катода к аноду. Поэтому он может ионизировать только те молекулы газа, которые лежат близ анода по сравнению с местом его собственного возникновения. Иными словами, если энергия положительных ионов недостаточна для ударной ионизации молекул газа

или для выбивания электронов из металлического катода газоразрядной трубки, то вблизи последнего электроны могут возникать только благодаря действию в нем ионизатора. Если его действие внезапно прекратится, то область ударной ионизации газа электронами постепенно будет сокращаться, стягиваясь к аноду по мере движения к нему электронов. В конце концов ударная ионизация и электрический ток в газе прекратятся совсем.

Совершенно иная картина будет наблюдаться, если напряжение U столь велико, что положительные ионы также приобретают способность порождать вторичные электроны¹. В этом случае образуется двусторонняя лавина электронов и положительных ионов, возникающих во всех частях объема газа. Теперь внешний ионизатор уже не играет практически никакой роли в осуществлении газового разряда, так как число создаваемых им первичных электронов и ионов ничтожно по сравнению с числом вторичных электронов и ионов, образующихся благодаря указанным выше процессам. Поэтому прекращение действия внешнего ионизатора никак не отражается на дальнейшем протекании газового разряда. Таким образом, при достаточно большом повышении напряжения между электродами газоразрядной трубки самостоятельный газовый разряд может перейти в самостоятельный. Этот переход называется **электрическим пробоем газа**, а соответствующее ему напряжение U_3 — **напряжением зажигания** или **напряжением пробоя**.

Из сказанного ясно, что для возникновения электрического пробоя газа необходимо, чтобы в нем имелось хотя бы небольшое начальное число свободных зарядов, способных сыграть роль «запала». Однако для этого не требуется применение специальных внешних ионизаторов (например, рентгеновских лучей), так как в естественных условиях газ всегда подвергается действию космических лучей и радиоактивного излучения Земли, ионизирующих небольшую часть его молекул.

3. Мы рассмотрели упрощенную картину возникновения и протекания газового разряда, в которой не учитывается ряд процессов, играющих в разряде более или менее существенную роль. Укажем на некоторые из них. Сталкиваясь с молекулами газа, электроны и ионы, обладающие недостаточной энергией для ионизации молекул, могут переводить их в возбужденные состояния. Возвращаясь в нормальное состояние, возбужденные молекулы излучают свет. Испускание света происходит также при рекомбинации положительных ионов с электронами (так называемое **рекомбинационное свечение**). Свет, падая на катод, может вызывать на его поверхности фотоэффект, т.е. выбивать из катода фотоэлектроны, участвующие в образовании двусторонней лавины.

Вырывание электронов из катода происходит в результате его

¹ Опыты показывают, что в большинстве случаев для выбивания электрона из катода положительный ион должен совершать меньшую работу, чем для ударной ионизации молекулы газа. Поэтому основной причиной появления вторичных электронов под действием положительных ионов является процесс выбивания электронов из катода газоразрядной трубки.

нагревания при бомбардировке положительными ионами (термоэлектронная эмиссия), а также под действием сильного электрического поля (холодная эмиссия). Наконец, электроны, ударяясь об анод, могут выбивать из него положительные ионы.

4. Опыты показывают, что напряжение зажигания U_3 в газоразрядной трубке с плоскими электродами, параллельными друг другу, зависит от химической природы газа, материала катода и произведе-

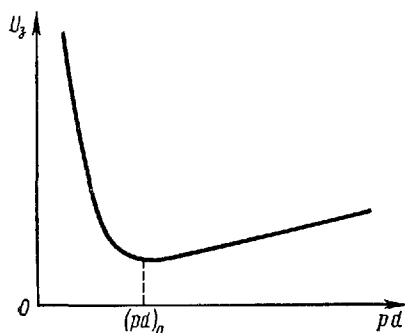


Рис. 12.4

ния давления p газа на расстояние d между электродами трубки. Чем меньше потенциал ионизации молекул газа и чем меньше работа выхода электронов из металла, тем при прочих равных условиях меньше напряжение зажигания. Более сложный вид имеет зависимость U_3 от произведения pd , представленная на рис. 12.4. Ее можно пояснить следующим образом. Зависимость напряжения зажигания от давления газа и расстояния d между электродами определяется двумя условиями возникновения самостоятельного газового разряда: во-первых, необходимо, чтобы

энергия, приобретаемая электронами под действием электрического поля, была достаточна для ударной ионизации молекул газа, а энергия, приобретаемая положительными ионами, была достаточна для выбивания электронов из катода; во-вторых, необходимо, чтобы вероятность неупругих соударений электронов с молекулами газа была сравнительно велика, так как в противном случае число носителей заряда в газе и его проводимость будут малы. Электроны и положительные ионы ускоряются электрическим полем в процессе их свободного пробега между двумя последовательными соударениями с молекулами газа. С увеличением давления газа средние длины свободного пробега электронов и ионов уменьшаются. Поэтому для сообщения им необходимой энергии нужно увеличивать напряженность электрического поля, т.е. при постоянном d увеличивать напряжение между электродами газоразрядной трубки. Этим объясняется возрастание напряжения зажигания с увеличением произведения pd при $pd > (pd)_0$ (рис. 12.4). В области малых значений $pd < (pd)_0$ решающую роль играет второе условие. При малых значениях давления p или расстояния d вероятность соударения электронов с молекулами газа значительно меньше, чем при большом значении произведения pd . Поэтому для выполнения второго условия нужно, чтобы возможно большее число этих соударений носило неупругий характер. Иными словами, в области малых значений pd с уменьшением давления газа нужно увеличивать напряженность электрического поля. Этим объясняется возрастание U_3 с уменьшением произведения pd при $pd < (pd)_0$.

Напряжение зажигания в значительной степени зависит от наличия в газе примесей.

5. В следующих параграфах будут рассмотрены некоторые типы самостоятельных газовых разрядов, отличающихся друг от друга как по внешнему виду, так и по характеру физических процессов, обуславливающих их возникновение и протекание.

§ 12.4. Тлеющий разряд

1. **Тлеющий разряд** наблюдается в газах при низких давлениях порядка нескольких десятков миллиметров ртутного столба и меньше. На рис. 12.5 изображена трубка с тлеющим разрядом и показано распределение потенциала φ вдоль ее оси. Основными частями тлеющего разряда являются **катодное темное пространство (I)**, резко отделенное от него **отрицательное, или тлеющее, свечение (II)**, которое постепенно переходит в область **фарадеева темного пространства (III)**. Эти три области образуют катодную часть разряда, за которой следует основная светящаяся часть разряда, определяющая его оптические свойства и называемая **положительным столбом (IV)**.

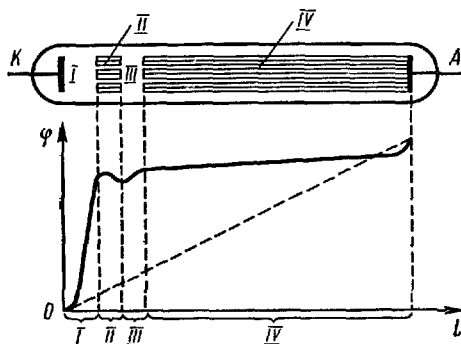


Рис. 12.5

2. Основную роль в поддержании тлеющего разряда играют первые две области его катодной части. Характерной особенностью этого типа разряда является резкое падение потенциала вблизи катода, которое связано с большой концентрацией положительных ионов на границе I и II областей, обусловленной сравнительно малой скоростью движения ионов к катоду. В катодном темном пространстве происходит сильное ускорение электронов и положительных ионов, выбивающих электроны из катода. В области тлеющего свечения электроны производят интенсивную ударную ионизацию молекул газа и теряют свою энергию. Здесь образуются положительные ионы, необходимые для поддержания разряда. Напряженность электрического поля в этой области мала. Тлеющее свечение в основном вызывается рекомбинацией электронов и ионов. Протяженность катодного темного пространства определяется свойствами газа и материала катода.

В области положительного столба концентрация электронов и ионов приблизительно одинакова и очень велика, что обуславливает большую электропроводность положительного столба и незначительное падение в нем потенциала. Свечение положительного столба определяется свечением возбужденных молекул газа. Вблизи анода

вновь наблюдается сравнительно резкое изменение потенциала, связанное с процессом генерации положительных ионов. В ряде случаев положительный столб распадается на отдельные светящиеся участки — **страты**, разделенные темными промежутками.

Положительный столб не играет существенной роли в поддержании тлеющего разряда, поэтому при уменьшении расстояния между электродами трубки длина положительного столба сокращается и он может исчезнуть совсем. Иначе обстоит дело с длиной катодного темного пространства, которая при сближении электродов не изменяется. Если электроды сблизилась настолько, что расстояние между ними станет меньше длины катодного темного пространства, то тлеющий разряд в газе прекратится. Опыты показывают, что при прочих равных условиях длина d катодного темного пространства обратно пропорциональна давлению газа. Следовательно, при достаточно низких давлениях электроны, выбиваемые из катода положительными ионами, проходят через газ почти без столкновений с его молекулами, образуя **электронные, или катодные, лучи**, свойства которых известны из курса средней школы.

3. Тлеющий разряд используется в газосветных трубках, лампах дневного света, стабилизаторах напряжения, для получения электронных и ионных пучков. Если в катоде сделать щель, то сквозь нее в пространство за катодом проходят узкие ионные пучки, часто называемые **канальными лучами**.

Широко используется явление **катодного распыления**, т.е. разрушение поверхности катода под действием ударяющихся о него положительных ионов. Ультрамикроскопические осколки материала катода летят во все стороны по прямым линиям и покрывают тонким слоем поверхность тел (особенно диэлектриков), помещенных в трубку. Таким способом изготовляют зеркала для ряда приборов, наносят тонкий слой металла на селеновые фотоэлементы и т.д.

§ 12.5. Самостоятельный разряд при нормальном и больших давлениях

1. Различают несколько форм самостоятельного газового разряда при нормальном и больших давлениях, а именно: **коронный, кистевой, искровой и дуговой разряды**.

Коронный разряд возникает при нормальном давлении в газе, находящемся в сильно неоднородном электрическом поле (например, около остриев или проводов линий высокого напряжения). При коронном разряде ионизация газа и его свечение происходят лишь вблизи коронирующих электродов. В случае коронирования катода (отрицательная корона) электроны, вызывающие ударную ионизацию молекул газа, выбиваются из катода при бомбардировке его положительными ионами. Если коронирует анод (положительная корона), то рождение электронов происходит вследствие фотоионизации газа вблизи анода. Корона — вредное явление, сопровождающееся утечкой тока и потерей электрической энергии. Для уменьшения коронирования увеличивают радиус кривизны проводников, а их поверхность делают воз-

можно более гладкой. При достаточно высоком напряжении между электродами коронный разряд переходит в искровой.

2. При повышенном напряжении коронный разряд на острие приобретает вид исходящих из острия и перемежающихся во времени светлых линий. Эти линии, имеющие ряд изломов и изгибов, образуют подобие кисти, вследствие чего такой разряд называется **кистевым**.



Рис. 12.6

3. **Искровой разряд** имеет вид ярких зигзагообразных разветвляющихся нитей-каналов (рис. 12.6), которые пронизывают разрядный промежуток и исчезают, сменяясь новыми. Исследования показали, что каналы искрового разряда начинают расти иногда от положительного электрода, иногда от отрицательного, а иногда и от какой-либо точки между электродами. Это объясняется тем, что ионизация ударом в случае искрового разряда происходит не по всему объему газа, а по отдельным каналам, проходящим в тех местах, в которых концентрация ионов случайно оказалась наибольшей. Искровой разряд сопровождается выделением большого количества теплоты, ярким свечением газа, треском или громом. Все эти явления вызываются электронными и ионными лавинами, которые возникают в искровых каналах и приводят к огромному увеличению давления, достигающему $10^7 \div 10^8$ Па, и повышению температуры до $10\,000^\circ\text{C}$.

Характерным примером искрового разряда является молния. Главный канал молнии имеет диаметр от 10 до 25 см, а длина молнии может достигать нескольких километров. Максимальная сила тока импульса молнии достигает десятков и сотен тысяч ампер.

4. При малой длине разрядного промежутка искровой разряд вызывает специфическое разрушение анода, называемое **эрозией**. Это явление было использовано в электроискровом методе резки, сверления и других видах точной обработки металла.

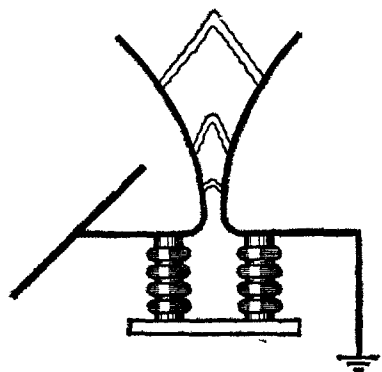


Рис. 12.7

Искровой промежуток применяется в качестве предохранителя от перенапряжений в электрических линиях передач (например, в телефонных линиях). Если вблизи линии проходит сильный кратковременный ток, то в проводах этой линии индуцируются напряжения и токи, которые могут разрушить электрическую установку и опасны для жизни людей. Во избежание этого используют специальные предохранители (рис. 12.7), состоящие из двух изогнутых электродов, один из которых присоединен к линии, а другой заземлен. Если потенциал линии относительно

земли сильно возрастает, то между электродами возникает искровой разряд, который вместе с нагретым им воздухом поднимается вверх, удлинняется и обрывается.

Наконец, электрическая искра применяется для измерения больших разностей потенциалов с помощью шарового разрядника, электродами которого служат два металлических шара с полированной поверхностью. Шары раздвигают, и на них подается измеряемая разность потенциалов. Затем шары сближают до тех пор, пока между ними не проскочит искра. Зная диаметр шаров, расстояние между ними, давление, температуру и влажность воздуха, находят разность потенциалов между шарами по специальным таблицам. Этим методом можно измерять с точностью до нескольких процентов разности потенциалов порядка десятков тысяч вольт.

5. **Дуговой разряд** был открыт В. В. Петровым в 1802 г. Этот разряд представляет одну из форм газового разряда, осуществляющуюся при большой плотности тока и сравнительно небольшом напряжении между электродами (порядка нескольких десятков вольт). Основной причиной дугового разряда является интенсивное испускание термоэлектронов раскаленным катодом. Эти электроны ускоряются электрическим полем и производят ударную ионизацию молекул газа, благодаря чему электрическое сопротивление газового промежутка между электродами сравнительно мало. Если уменьшить сопротивление внешней цепи, увеличить силу тока дугового разряда, то проводимость газового промежутка столь сильно возрастает, что напряжение между электродами уменьшается. Поэтому говорят, что дуговой разряд имеет падающую вольт-амперную характеристику. При атмосферном давлении температура катода достигает 3000 °С. Электроны, бомбардируя анод, создают в нем углубление (кратер) и нагревают его. Температура кратера около 4000 °С, а при больших давлениях воздуха достигает 6000—7000 °С. Температура газа в канале дугового разряда достигает 5000—6000 °С, поэтому в нем происходит интенсивная термоионизация.

В ряде случаев дуговой разряд наблюдается и при сравнительно низкой температуре катода (например, в ртутной дуговой лампе).

6. В 1876 г. П. Н. Яблочков впервые использовал электрическую дугу как источник света. В «свече Яблочкова» угли были расположены параллельно и разделены изолирующей прослойкой, а их концы соединены проводящим «запальным мостиком». Когда ток включался, запальный мостик сгорал и между углями образовывалась электрическая дуга. По мере сгорания углей изолирующая прослойка испарялась.

Дуговой разряд применяется как источник света и в наши дни, например в прожекторах и проекционных аппаратах.

Высокая температура дугового разряда позволяет использовать его для устройства **дуговой печи**. В настоящее время дуговые печи, питаемые током очень большой силы, применяются в ряде областей промышленности: для выплавки стали, чугуна, ферросплавов, бронзы, получения карбида кальция, окиси азота и т. д.

В 1882 г. Н. Н. Бенардосом дуговой разряд был впервые исполь-

зован для резки и сварки металла. Разряд между неподвижным угольным электродом и металлом нагревает место соединения двух металлических листов (или пластин) и сваривает их. Этот же метод Бенардос применил для резания металлических пластин и получения в них отверстий. В 1888 г. Н. Г. Славянов усовершенствовал этот метод сварки, заменив угольный электрод металлическим.

Дуговой разряд нашел применение в **ртутном выпрямителе**, преобразующем переменный электрический ток в ток постоянного направления.

7. В заключение этой главы остановимся на понятии плазмы. **Плазмой** называют состояние газа, отличающееся столь высокой степенью ионизации, что концентрация электронов и ионов в газе очень велика. Таково, например, состояние газа в положительном столбе тлеющего разряда, в дуговом разряде, в канале искрового разряда. В нейтральной плазме концентрации электронов и положительных ионов одинаковы, так что суммарный пространственный заряд равен нулю. Скорости теплового движения электронов плазмы удовлетворяют закону Максвелла (см. т. I, § 11.2). Под действием электрического поля электроны медленно перемещаются к аноду. Однако упругие соударения, непрерывно испытываемые электронами в плазме, хаотически изменяют направления их скоростей. Поэтому энергия, сообщаемая электронам электрическим полем, идет на усиление их теплового движения, благодаря чему средняя кинетическая энергия электронов в плазме газового разряда (**газоразрядной плазме**) очень велика. Она может быть в зависимости от природы плазмы порядка десятков электронвольт и значительно превосходить среднюю энергию теплового движения ионов и нейтральных частиц газа. Соответствующая этой энергии температура электронного газа в плазме достигает десятков тысяч градусов и значительно превосходит действительную температуру газа. В плазме непрерывно происходят два компенсирующих друг друга процесса — термоионизация и рекомбинация. Газоразрядная плазма устойчива только при наличии электрического поля, ускоряющего электроны. Прекращение действия электрического поля приводит к почти мгновенному исчезновению газоразрядной плазмы в результате рекомбинации электронов и положительных ионов. При сверхвысоких температурах порядка миллионов градусов атомы газа полностью ионизируются, т. е. распадаются на электроны и ядра. Свойства такой высокотемпературной плазмы и способы ее получения приобрели в последнее время большое значение в связи с проблемой осуществления управляемых термоядерных реакций. Этот вопрос рассмотрен в третьем томе курса.

Вопросы для повторения

1. В чем состоит ионизация газа и чем она может быть вызвана?
2. Что называется работой ионизации и потенциалом ионизации и от чего они зависят?
3. Однаковые ли разности потенциалов должны пройти в ускоряющем электрическом поле электроны и ионы, чтобы приобрести энергию, достаточную для ударной ионизации молекул одного и того же газа?

4. Изложите сущность физических процессов, происходящих при несамостоятельном газовом разряде. Чем объясняется существование тока насыщения?
5. В чем отличие самостоятельного газового разряда от несамостоятельного и каково необходимое условие его существования?
6. Перечислите известные вам типы самостоятельных газовых разрядов. В чем состоят их особенности? Где они применяются?
7. Что называется плазмой? Какими особыми свойствами она обладает?

Примеры решения задач

Задача 12.1. Какова концентрация ионов в воздухе, если при напряженности электрического поля $E = 20$ В/м плотность тока далека от насыщения и равна $j = 6,58$ мкА/м². Ионы одновалентны. Их подвижности равны $u_+ = 1,38 \cdot 10^{-4}$ м²/(с·В) и $u_- = 1,91 \cdot 10^{-4}$ м²/(с·В).

Дано:

$$E = 20 \text{ В/м}$$

$$j = 6,58 \cdot 10^{-6} \text{ А/м}^2$$

$$u_+ = 1,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{с} \cdot \text{В})$$

$$u_- = 1,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2(\text{с} \cdot \text{В})$$

$$n_0 \text{ — ?}$$

Решение. Из формулы (12.5') для плотности тока при несамостоятельном разряде в газе следует, что концентрация ионов

$$n_0 = j/eE(u_+ + u_-).$$

Произведем вычисления в СИ:

$$n_0 = \frac{j}{eE(u_+ + u_-)} = \frac{6,58 \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 20 (1,38 + 1,91) \cdot 10^{-4}} \text{ м}^{-3} = 6,25 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

СОВРЕМЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 13.1. Понятие о современной электронной теории проводимости металлов

1. Развитие физики привело к созданию квантовой теории твердого тела, позволившей более глубоко и с единой точки зрения объяснить электрические, тепловые и другие свойства металлов, кристаллических диэлектриков и полупроводников. Благодаря этому открылась возможность широкого и многообещающего применения полупроводников в самых различных отраслях техники. В этой главе будут кратко изложены основные идеи современной теории электропроводности твердых тел и некоторые результаты, к которым она приводит. В первую очередь рассмотрим современную теорию проводимости металлов.

2. В первоначальной квантовой теории металлов, так же как в классической теории Друде—Лоренца, использовалось понятие об электронном газе. Считалось, что валентные электроны свободны и движутся внутри металла так, как будто положительные ионы решетки не создают никакого электрического поля. Поэтому движение электронов в металле можно было описать с помощью модели, называемой «потенциальным ящиком».

Если принять, что вне металла потенциальная энергия электронов равна нулю, то внутри металла она равна $-A$, где A — положительная работа выхода электрона из металла (см. § 10.1). Иными словами, можно считать, что свободные электроны металла находятся внутри «потенциальной ямы» («потенциального ящика») с вертикальными стенками и глубиной, равной A (рис. 13.1). Плоское «дно» потенциального ящика свидетельствует о том, что никакого электрического поля внутри металла нет и весь его объем эквипотенциален. Движение электронов внутри ящика ограничено только тем, что они не могут выйти за его пределы, так как для этого они должны преодолеть «потенциальный барьер» высотой A .

3. Однако для описания движения свободных электронов в потенциальном ящике вместо классической статистики Максвелла—Больцмана была применена статистика Ферми—Дирака (см. т. I, § 11.5), т.е. были учтены квантовые свойства электронов. Дело в том, что движение электрона или другой микрочастицы нельзя рассматривать с точки зрения классической механики. Для таких частиц справедлива особая — волновая, или квантовая, механика, которая является выражением двойственной — корпускулярно-волновой — природы микрочастиц. Эти вопросы изложены в третьем томе курса. Пока же



Рис. 13.1

приведем без доказательства некоторые важные для дальнейшего результаты квантовомеханического рассмотрения движения электронов в потенциальном ящике.

Оказалось, что импульс (количество движения) и энергия электронов в металле не могут принимать произвольные значения: существуют определенные дискретные значения скорости электронов и дискретные (квантованные) энергетические уровни электронов в металле. В первом томе (см. т. I, § 11.6 и 15.4) в связи с проблемой теплоемкости газов и твердых тел мы уже говорили об энергетических уровнях электронов в атомах. Между энергетическими уровнями электронов в металлах и такими же уровнями в изолированных атомах имеется заметное отличие. Расстояние между соседними энергетическими уровнями в атомах значительно больше, чем в кристаллах металла.

4. Понятие о дискретности значений энергии электронов в металле было первым существенным изменением, внесенным квантовой теорией в классические представления. Но этим дело не ограничилось. По-новому был решен вопрос о возможном распределении электронов по дозволенным энергетическим уровням.

Полная энергия W_0 электрона в металле равна сумме его кинетической W и потенциальной W_n энергий: $W_0 = W + W_n$. Энергия W связана с импульсом p электрона соотношением $W = p^2/2m$, где m — масса электрона¹. Следовательно,

$$W_0 = p^2/2m + W_n \quad (13.1)$$

При пользовании моделью потенциального ящика с плоским дном мы предполагали, что $W_n = \text{const}$ во всех точках внутри металла. Поэтому энергия W_0 зависит только от числового значения импульса электрона.

Если бы электронный газ был подобен идеальному, то при температуре $T = 0$ К в соответствии с законом Максвелла (см. т. I, § 11.2) скорости, а следовательно, и импульсы всех электронов были бы равны нулю и $W_0 = W_n$. Иными словами, все электроны, обладая одной и той же энергией W_n , находилась бы на дне потенциального ящика и были бы неподвижны. В действительности такое состояние невозможно, так как электронный газ подчиняется не классической статистике Максвелла—Больцмана, а квантовой статистике Ферми—Дирака, основанной на принципе запрета В. Паули. Применительно к рассматриваемому случаю этот принцип можно сформулировать следующим образом: *в электронном газе не может быть больше двух электронов, находящихся в одинаковых состояниях, причем собственные моменты импульсов (спины)² этих двух электронов должны быть антипараллельны*. В статистике Ферми—Дирака состояния двух электронов считаются одинаковыми, если их декартовы координаты x , y , z и проекции p_x , p_y , p_z на оси координат векторов их импульсов

¹ Напомним, что для частиц, движущихся со скоростями v , во много раз меньшими скорости света в вакууме, $W = mv^2/2$, а $p = mv$.

² Подробнее вопрос о спине электрона рассмотрен в § 20.4.

заклучены в пределах: $x, x + \Delta x; y, y + \Delta y; z, z + \Delta z; p_x, p_x + \Delta p_x; p_y, p_y + \Delta p_y; p_z, p_z + \Delta p_z$, причем

$$\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3,$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

Если объем металла равен единице, то для всех находяющихся в нем электронов $\Delta x \Delta y \Delta z = 1$ и условие тождественности их состояний имеет вид

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3.$$

Таким образом, во всем объеме металла не может быть больше двух свободных электронов, обладающих одинаковыми импульсами p и энергиями W , т.е. на каждом энергетическом уровне не может быть больше двух электронов.

Очевидно, что все электроны стремятся занять наиболее низкие энергетические уровни, как самые устойчивые. Поэтому они попарно заполняют дозволенные энергетические уровни, начиная от дна потенциальной ямы. Число занятых уровней имеет тот же порядок,



Рис. 13.2

что и концентрация свободных электронов в металле. На рис. 13.2 эти уровни показаны горизонтальными линиями. Из этого рисунка видно, что работу A выхода электрона из металла нужно отсчитывать не от дна потенциального ящика, как это делалось в классической теории, а от верхнего из занятых электронами энергетических уровней. Этот уровень называется **уровнем Ферми** по имени итальянского физика Э. Ферми, внесшего большой вклад в развитие современной физики.

5. В отличие от классических представлений при абсолютном нуле электроны в металле движутся с весьма большими скоростями. Подсчеты показали, что скорость электронов, находящихся на уровне Ферми, имеет значение порядка 10^6 м/с. Например, для серебра она равна $1,4 \cdot 10^6$ м/с. Этот результат вначале ошеломляет. Он означает, что в этом состоянии вещества, которое М. В. Ломоносов называл «крайней степенью холода», частицы обладают огромной кинетической энергией. Согласно классической кинетической теории, атом серебра имеет такую же энергию при температуре, близкой к $50\,000$ °С. Трудно представить себе более убедительное доказательство того, что поведение электронов в металле нельзя описывать методами классической статистики. Понятно, что и к исследованию теплоемкости и электропроводности металлов нужно тоже подходить иначе, чем это делалось в классической электронной теории. Необходимо учитывать квантовый характер энергии электронов в металле и особый характер размещения электронов по энергетическим уровням.

Как показывают расчеты, различия выводов квантовой и классической статистик становятся особенно заметными при низких температурах и больших концентрациях электронов, т.е. в вырожденных

состояниях. Плотность электронного газа в металлах настолько велика ($n_0 = 10^{28} \div 10^{29} \text{ м}^{-3}$), что даже при обычных температурах этот газ находится в вырожденном состоянии.

6. На рис. 13.3, а изображена кривая распределения электронов металла по дозволенным энергетическим уровням при $T = 0 \text{ К}$. По

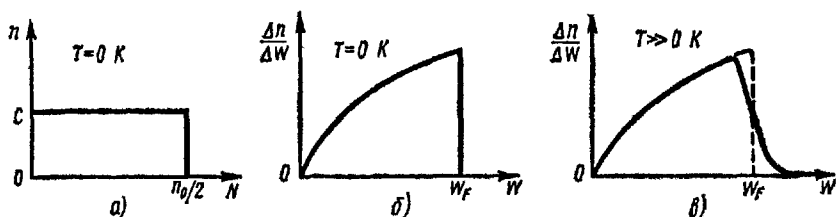


Рис. 13.3

оси абсцисс отложены номера энергетических уровней, отсчитываемые от дна потенциальной ямы, а по оси ординат — числа электронов, находящихся на данном уровне. Электроны попарно занимают все энергетические уровни от дна ямы до уровня Ферми, номер которого равен $n_0/2$, так как общее число электронов, заключенных в единице объема металла, равно n_0 . Обозначим кинетическую энергию электронов, находящихся на уровне Ферми, через W_F . Расчеты показали, что эта энергия пропорциональна $n_0^{2/3}$ и для различных металлов колеблется в пределах от 5 до 10 эВ. Поэтому среднее расстояние между соседними энергетическими уровнями электронов в металлах, равное $2W_F/n_0$, имеет чрезвычайно малое значение, порядка 10^{-22} эВ. Однако в действительности расстояния между уровнями вблизи дна ямы больше, чем вблизи уровня Ферми. Оказывается, что число уровней, соответствующих значениям энергии от W до $W + \Delta W$, пропорционально произведению $\sqrt{W} \Delta W$. Поэтому при $T = 0 \text{ К}$ зависимость от W отношения числа Δn электронов, энергии которых заключены в пределах от W до $W + \Delta W$, к величине ΔW имеет вид, изображенный на рис. 13.3, б. Эту кривую обычно называют кривой распределения электронов металла по энергиям. Из нее видно, что при абсолютном нуле нет электронов с энергией, большей W_F .

7. Согласно квантовой статистике, важнейшим свойством электронов в металле является малая чувствительность к температуре как числа свободных электронов, так и их энергии. Повышение температуры изменяет кривую распределения электронов по энергиям только вблизи W_F и притом таким образом, что скачкообразное спадание кривой до нуля при $W = W_F$ сменяется более плавным ее спаданием в сравнительно узкой области значений энергии W , близких к W_F (рис. 13.3, в).

Таким образом, нагревание металла приводит к изменению энергии сравнительно небольшого числа свободных электронов, в то время как их основная масса не участвует в обмене энергией между металлом и нагревателем. В самом деле, для того чтобы «принять» некоторую энергию при нагревании, электрон должен иметь возмож-

ность перейти с занимаемого им энергетического уровня на другой, соответствующий большому значению энергии W . Однако даже при температуре нагревателя около 1000 К энергия, которую он может передавать электронам металла, приблизительно равна 0,1 эВ. Поэтому в обмене энергией с нагревателем могут участвовать только те немногие электроны, которые находятся на энергетических уровнях, достаточно близких к уровню Ферми. Все остальные электроны не могут поглощать энергию при нагревании металла, так как вблизи от занимаемых ими энергетических уровней нет свободных уровней, на которые эти электроны могли бы переходить. Таким образом, была устранена трудность классической теории в объяснении отсутствия электронной составляющей теплоемкости металлов (см. § 8.7).

8. Аналогичным образом следует рассматривать и вопрос об электропроводности металлов. Электрический ток проводимости в металлах представляет упорядоченное движение электронов, которое накладывается на их хаотическое тепловое движение и возникает под действием электрического поля, создаваемого в металле. Следовательно, для того чтобы электроны металла начали упорядоченно двигаться под действием внешнего электрического поля, их энергия должна увеличиться. При обычных напряжениях в цепи электроны принимают весьма малую энергию в том случае, если существуют близкие, не занятые другими электронами энергетические уровни. При этом происходит переход электронов на эти свободные уровни и возникает электрический ток в направлении внешнего электрического поля.

В том же случае, когда отсутствуют близкие незаполненные энергетические уровни, на которые электроны могли бы переходить, упорядоченное движение электронов в направлении внешнего электрического поля не возникает. Электроны свободно движутся со своими тепловыми скоростями сквозь решетку кристалла, но это хаотическое движение не создает электрического тока. Такое движение электронов имеет место в кристаллических диэлектриках (см. § 13.3).

9. Теория электропроводности металлов, построенная на основе квантовой теории, привела к выражению закона Ома для плотности тока, аналогичному равенству (8.10). Удельная электрическая проводимость, согласно квантовой теории, вычисляется по формуле, похожей на (8.11):

$$\gamma = n_0 e^2 \langle \lambda \rangle / m u_0. \quad (13.2)$$

Однако этот результат существенно отличается от классического: в знаменателе (13.2) вместо средней тепловой скорости электронов $\langle u \rangle$ стоит скорость u_0 электрона, находящегося на верхнем занятом энергетическом уровне; эта скорость практически не зависит от температуры металла. Формула (13.2), как и в классической теории, содержит величину $\langle \lambda \rangle$, имеющую размерность длины и играющую роль среднего свободного пробега электрона в металле. Чтобы экспериментальные данные соответствовали теоретическим значениям γ , следует считать, что величина $\langle \lambda \rangle$ составляет сотни межузельных расстояний в решетке. Такой же результат, как мы видели в § 8.8, полу-

чился и в классической теории Друде—Лоренца. Эту трудность удалось преодолеть, когда были учтены волновые свойства электронов проводимости. На языке современной теории движение электронов сквозь решетку металла означает распространение электронных волн. Характер взаимодействия этих волн с ионами решетки качественно отличен от простого соударения электрона с узлом, которое рассматривалось в классической электронной теории. Электронные волны рассеиваются на ионах решетки.

В первом томе курса говорилось о рассеянии тепловых волн в кристалле на ангармонических колебаниях узлов кристаллической решетки (см. т. I, § 15.3) и введено понятие о средней длине свободного пробега волны в кристалле. Теперь мы имеем в некотором смысле аналогичную задачу. В современной теории электропроводности вводится понятие о средней длине свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ электронной волны, т.е. о среднем расстоянии, которое волна может пройти без рассеяния на узлах кристаллической решетки. Средняя длина пробега $\langle \lambda \rangle$ непосредственно не связана с межузельным расстоянием в решетке (с периодом решетки) и может составлять сотни таких периодов. Для распространения электронных волн узлы решетки не являются жесткой преградой: электронные волны могут «обтекать» узлы и распространяться без рассеяния на значительные расстояния. Этому соответствует в классическом представлении средняя длина свободного пробега электронов, равная сотням периодов решетки. Дело в том, что если длина пробега электронных волн достаточно велика, то это означает, что вероятность обнаружения электрона, прошедшего в решетке сотни межузельных расстояний, также будет отлична от нуля. Иначе говоря, это означает, что электрон свободно прошел в кристалле большое расстояние.

10. Новый взгляд на характер взаимодействия электронов с решеткой металла привел к иному толкованию природы сопротивления металлических проводников и его зависимости от температуры. В первом томе курса (см. т. I, § 15.3) мы видели, что ангармоничность колебаний частиц, находящихся в узлах кристаллической решетки, имеет

большое значение для понимания тепловых свойств твердых тел. Оказывается, что ангармоничность колебаний очень существенна для характера процесса рассеяния электронных волн ионами металла и приводит к возникновению сопротивления проводников. В квантовой теории металлов показано, что если бы колебания узлов решетки были строго гармоническими и периодичность кристаллической решетки ничем не нарушалась, то не происходило бы рассеяния электронных волн на ионах решетки и сопротивление металла при любой температуре было

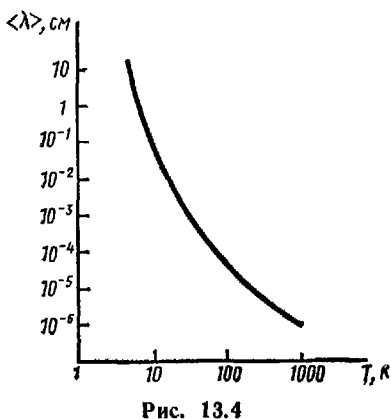


Рис. 13.4

бы равно нулю. С повышением температуры возрастает рассеяние электронных волн на тепловых колебаниях решетки, и поэтому уменьшается их средняя длина свободного пробега, что означает уменьшение среднего свободного пробега электронов. Средняя длина свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ электронов резко возрастает при понижении температуры металла. На рис. 13.4 показано изменение $\langle \lambda \rangle$ с температурой в серебре. Можно доказать, что при обычных комнатных температурах $\langle \lambda \rangle$ оказывается обратно пропорциональной первой степени температуры. Это и приводит по формуле (13.2) к хорошо подтверждающейся на опыте зависимости удельной электрической проводимости от температуры ($\gamma \sim 1/T$). Таким образом, удалось устранить и эту трудность классической теории электропроводности.

§ 13.2. Понятие о зонной теории твердых тел

1. В квантовой теории металлов, изложенной в предыдущем параграфе, предполагалось, что потенциальная энергия электронов в металле везде одинакова. Поэтому движение электронов в металле рассматривалось как свободное движение внутри «потенциального ящика» с вертикальными стенками и плоским дном. В действительности дело обстоит значительно сложнее. Положительно заряженные ионы — узлы кристаллической решетки — создают внутри металла электрическое поле, влияющее на движение электронов проводимости. Узлы решетки расположены в пространстве в строгом порядке. Поэтому создаваемое ими электрическое поле является периодической функцией координат. Следовательно, потенциальная энергия электронов в металле не постоянна, а периодически зависит от их координат. На рис. 13.5 показано изменение потенциальной энергии электрона вдоль оси X , проведенной через узлы кристаллической решетки. Минимумы энергии соответствуют местам, где расположены положительные ионы.

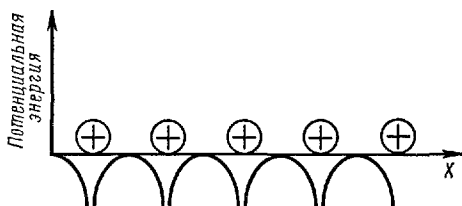


Рис. 13.5

2. Периодическое электрическое поле в кристалле приводит к существенному изменению энергетических состояний электронов в твердом теле по сравнению с их состоянием в изолированных атомах. Электроны изолированных атомов могут находиться только в таких состояниях, которые соответствуют вполне определенным дискретным значениям их энергии. На рис. 13.6 схематично представлены дискретные уровни энергии W электронов в атоме. В твердом теле энергетическое состояние электронов определяется не только их взаимодействием с ядром своего атома, но и электрическим полем кристаллической решетки, т.е. взаимодействием с другими атомами В

результате этого взаимодействия энергетические уровни электронов *расщепляются*. Вместо каждого энергетического уровня изолированного атома в твердом теле, содержащем *N* взаимодействующих атомов, возникает *N* близко расположенных друг от друга энергетических уровней, которые образуют **энергетическую полосу**.

3. На рис. 13.7 показано расщепление уровней энергии изолированных атомов при их сближении и образование энергетических полос твердого тела; r_0 — расстояние между атомами в кристалле. Из рисунка видно, что не все уровни расщепляются одинаково. Взаимодействие между

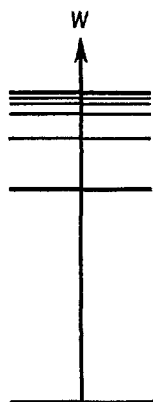


Рис 13.6

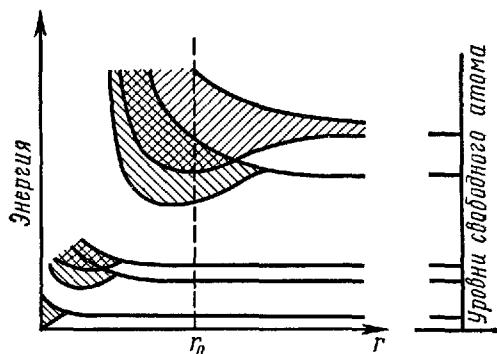


Рис 13.7

атомами твердого тела сильнее всего сказывается на энергетических уровнях внешних электронов атомов, обладающих наибольшей энергией. Наоборот, энергетические уровни внутренних электронов либо совсем не расщепляются при $r = r_0$, либо расщепляются очень слабо. Поэтому можно считать, что твердое тело подобно огромной молекуле, состоящей из множества атомов. Внутренние электроны этих атомов ведут себя практически так же, как и в изолированных атомах, внешние же электроны коллективизированы: они принадлежат всей молекуле (твердому телу), а не каким-нибудь определенным атомам. Энергия этих электронов может находиться в пределах заштрихованных на рис. 13.7 областей, называемых **разрешенными энергетическими зонами** или **полосами**.

4. В соответствии со сказанным выше каждая разрешенная энергетическая зона состоит из *N* близких уровней, где *N* — общее число атомов твердого тела. В 1 см^3 твердого тела находится 10^{22} — 10^{23} атомов. Такой же порядок имеет и число уровней в зоне. Расстояние между соседними уровнями зоны составляет приблизительно 10^{-22} эВ. Поэтому общая ширина зоны имеет порядок нескольких электронвольт. Подобно тому, как в изолированном атоме дискретные уровни энергии разделены областями недозволенных значений энергии, в твердом теле разрешенные энергетические зоны разделены участками (зонами) запрещенных значений энергии. Ширина запрещенных зон соизмерима по величине с шириной разрешенных зон. С увеличением энергии

ширина разрешенных энергетических зон увеличивается, а ширина запрещенных зон уменьшается. Схема энергетических зон твердого тела изображена на рис. 13.8.

5. В изолированном атоме дозволенные квантованные энергетические уровни могут быть заняты электронами или свободны. Соответственно в твердом теле энергетические зоны могут иметь различное «заполнение» электронами. В предельных случаях они могут быть целиком заполнены или совершенно свободны

6. Подобно тому, как в отдельном атоме электроны могут переходить с одного энергетического уровня на другой, электроны в кристаллах могут переходить из одной разрешенной зоны в другую, а также совершать переходы внутри одной и той же зоны. Для перехода электрона из нижней энергетической зоны в соседнюю верхнюю необходимо затратить энергию, равную ширине запрещенной зоны, лежащей между ними (энергию порядка нескольких электронвольт). Для перехода электрона внутри разрешенной зоны требуется весьма малая энергия.

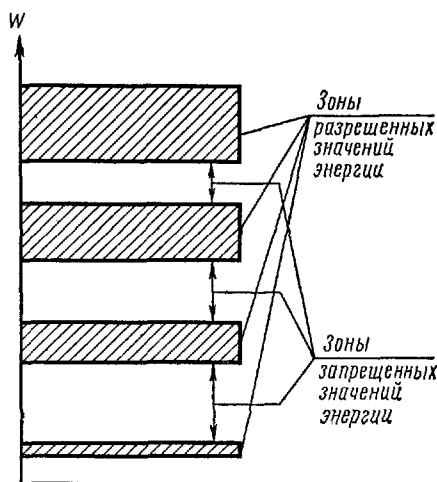


Рис. 13.8

Энергия, приобретаемая электроном в металле под действием электрического поля, на длине свободного пробега составляет 10^{-4} — 10^{-8} эВ, и ее вполне достаточно для внутризонных переходов. Средняя энергия тепловых колебаний атомов твердого тела при комнатной температуре приблизительно равна 0,05 эВ. Эту энергию можно передать электронам, ее также достаточно для переходов электронов внутри разрешенной зоны.

Рассмотрим теперь влияние внешнего электрического поля и теплового возбуждения на переходы электронов между соседними разрешенными зонами. При обычных разностях потенциалов, приложенных к кристаллу, энергия, получаемая электроном на длине свободного пробега, недостаточна для переброса электрона в следующую разрешенную зону. Повышение температуры может привести к передаче электрону значительно большей энергии. Поэтому тепловой механизм возбуждения обуславливает как внутризонные, так и межзонные переходы электронов.

7. Все изложенное выше относится не только к металлам, но и ко всем другим типам кристаллических твердых тел. В самом деле, расщепление энергетических уровней электронов в твердых телах и образование зон разрешенных и запрещенных значений энергии являются результатом существования внутри тела периодического элек-

трического поля. Это поле создается у п о р я д о ч е н н о расположенными в пространстве узлами кристаллической решетки. В металлах и кристаллических телах с ионной решеткой наличие такого поля очевидно. Однако оно имеется и в том случае, когда решетка построена из н е й т р а л ь н ы х частиц — атомов и молекул, состоящих из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов. Поэтому они нейтральны лишь в том смысле, что с у м м а р н ы й заряд ядер каждой молекулы численно равен суммарному заряду ее электронов. В то же время напряженность электрического поля, создаваемого ядрами и электронами, в общем случае отлична от нуля. Это поле особенно велико внутри атомов и молекул и в непосредственной близости от них.

Таким образом, в случае л ю б о г о твердого тела, состоящего из упорядоченно расположенных частиц (ионов, атомов или молекул), имеет место образование зонного энергетического спектра.

§ 13.3. Металлы и диэлектрики в зонной теории

1. С точки зрения зонной теории различия в электрических свойствах разных типов твердых тел могут объясняться следующими причинами:

- а) шириной запрещенных энергетических зон;
- б) различным заполнением электронами разрешенных энергетических зон.

Основной вопрос, который возникает при изучении электрических свойств твердого тела, а именно: проводит оно электрический ток или нет, решается в зависимости от двух указанных факторов. Необходимым условием проводимости твердого тела является н а л и ч и е свободных энергетических уровней, на которые поле сторонних сил могло бы перевести электроны¹.

2. В обычных, не слишком сильных полях могут осуществляться только внутризонные переходы. Поэтому легко указать, в каких случаях твердое тело будет проводником электрического тока.

Предположим, что энергетические зоны твердого тела разделены запрещенными областями, как указано на рис. 13.8. В качестве примера рассмотрим металлический натрий. В изолированном атоме натрия имеются две заполненные электронные оболочки, на которых находятся соответственно 2 и 8 электронов. Валентный одиннадцатый электрон атома натрия согласно принципу Паули заполняет лишь наполовину верхний энергетический уровень атома. В кристаллическом натрии первой и второй заполненным оболочкам изолированных атомов соответствуют целиком з а п о л н е н н ы е электронами з о н ы. Следующая зона разрешенных значений энергии электронов заполнена валентными электронами лишь наполовину (рис. 13.9). Эту зону называют **зоной проводимости**, так как находящиеся в ней электроны могут участвовать в образовании тока проводимости. Под действием поля, создаваемого в кристалле источником электрической

¹ Строго говоря, эти уровни не должны быть п о л н о с т ь ю заняты электронами.

энергии, валентные электроны приходят в упорядоченное движение, увеличивая свою энергию и переходя на более высокие свободные энергетические уровни в зоне проводимости.

Таким образом, если зона не полностью занята валентными электронами, то твердое тело всегда будет **проводником** электрического тока.

3. В свободном атоме дискретные уровни энергии электронов расположены так, что высшие энергетические состояния всегда имеют

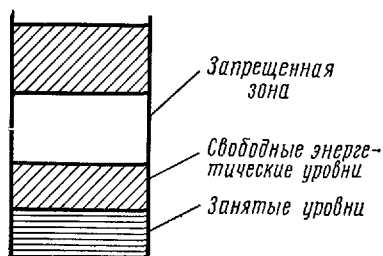


Рис. 13.9

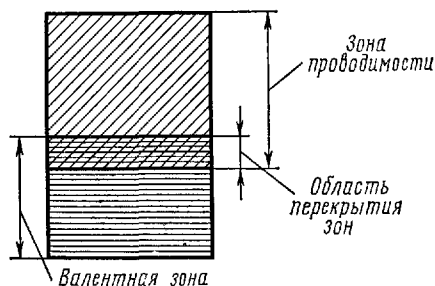


Рис. 13.10

энергию больше, чем энергия ниже расположенных состояний. При образовании кристаллического твердого тела зона, возникшая при расщеплении верхнего (возбужденного) состояния атома, может **перекрываться** с зоной, возникшей за счет расщепления нижнего состояния валентных электронов (см. рис. 13.7). Это имеет место у кристаллов элементов, образующих вторую группу периодической системы Д. И. Менделеева (Be, Cd, Mg, Zn и др.). В этом случае образуется более широкая гибридная зона, в которой размещаются валентные электроны (рис. 13.10 и 13.7). Электроны заполняют гибридную зону лишь частично. Поэтому гибридная зона является зоной проводимости, а подобные кристаллы — проводниками.

4. Зонная теория позволила объяснить, почему увеличение валентности металла, т.е. числа «свободных» электронов, приходящихся на один атом, не вызывает соответствующего возрастания электропроводности. Так, например, удельная электропроводность трехвалентного алюминия почти вдвое меньше, чем одновалентной меди. Оказалось, что электропроводность твердого тела зависит не от числа валентных электронов, а от отношения числа электронов в зоне проводимости к общему числу энергетических уровней в этой зоне. Если валентных электронов так много, что они целиком заполняют все энергетические уровни верхней зоны, то твердое тело не проводит электрического тока. Рассмотренные выше двухвалентные щелочноземельные металлы обладают сравнительно хорошей электропроводностью только благодаря тому, что у них образуется гибридная зона, содержащая свободные энергетические уровни.

5. У **твердых диэлектриков** энергетические зоны не **перекрываются**, причем зона, объединяющая внешние электроны атомов или

ионов, целиком заполнена электронами, а все более высокие зоны при $T = 0$ К совершенно пусты¹.

Зону, целиком заполненную электронами, называют **валентной зоной** кристалла, пустую зону—**зоной проводимости**. Примером кристаллического диэлектрика может служить поваренная соль NaCl.

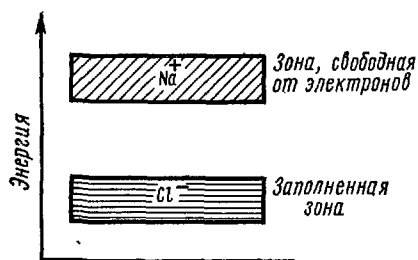


Рис. 13.11

В молекуле NaCl внешний (валентный) электрон атома Na переходит на внешнюю оболочку атома Cl. В результате этого образуются ионы Na^+ и Cl^- с полностью застроенными электронными оболочками. Поэтому в кристалле NaCl верхняя зона иона хлора и все нижележащие зоны целиком заполнены электронами, а лежащая выше верхняя зона иона натрия совсем их не содержит (рис. 13.11). Расстояние между этими зонами Na^+ и Cl^- соответствует энергии 6 эВ. Следо-

вательно, внешнее электрическое поле не может перевести электроны из целиком заполненной зоны Cl^- в свободную зону проводимости Na^+ .

6. В твердых диэлектриках электроны могут перемещаться по кристаллу с тепловыми скоростями. Однако это движение хаотично и не создает направленного электронного «дрейфа» — электрического тока. Поэтому электроны в кристаллах диэлектриков следует считать в некотором смысле более свободными, чем в металлах: внешнее электрическое поле не может заставить их двигаться в определенном направлении и вызвать электрический ток. Таким образом, современные представления о строении диэлектриков совершенно отличаются от представлений о связанных зарядах, лежащих в основе классической теории, которая была изложена в гл. VI.

§ 13.4. Собственная проводимость полупроводников

1. Между металлами с удельным сопротивлением 10^{-6} — 10^{-8} Ом·м и диэлектриками с удельным сопротивлением 10^8 — 10^{13} Ом·м находится много материалов, относящихся к **полупроводникам**, удельное сопротивление которых изменяется в широком интервале от 10^{-5} до 10^9 Ом·м.

Почти вся окружающая нас природа состоит из полупроводящих веществ. Окислы металлов, сульфиды, теллуриды и селениды многих металлов имеют полупроводниковые свойства. В периодической системе Д. И. Менделеева полупроводники образуют компактную группу элементов, показанную на рис. 13.12. Слева и снизу от полупроводни-

¹ В дальнейшем на всех рисунках не будут изображаться целиком заполненные зоны, кроме последней, которая называется верхней заполненной зоной.

ковых элементов находятся металлы, справа и сверху расположены элементы, которые в твердом состоянии являются диэлектриками. К типичным представителям полупроводников относятся германий, кремний и теллур.

2. Германий — один из наиболее широко применяемых полупроводниковых элементов. Он расположен в IV группе и IV периоде

⁵ В (1,1)	⁶ С (5,2)			
	¹⁴ Si (1,1)	¹⁵ P (1,5)	¹⁶ S (2,5)	
	³² Ge (0,72)	³³ As (1,2)	³⁴ Se (1,7)	
	⁵⁰ Sn (0,1)	⁵¹ Sb (0,12)	⁵² Te (0,36)	⁵³ I (1,25)

Рис. 13.12

периодической системы элементов. 32 электрона его атома распределены таким образом, что на внешней оболочке имеется 4 валентных электрона. В кристалле германия электроны соседних атомов вступают в химические, или ковалентные, связи (рис. 13.13), так что «свободных» электронов при $T = 0$ К в чистом германии нет. Поэтому он должен быть хорошим изолятором. Германий весьма рассеян в природе и является дорогостоящим элементом.

Большое значение в современной полупроводниковой технике имеет кремний. 14 электронов его атома распределены так, что четыре из них, как и у германия, находятся на внешней оболочке. Они также вступают в химические связи с электронами соседних атомов.

Для возникновения так называемой **собственной проводимости** чистого полупроводника необходимо электроны из нижней заполненной зоны «перебросить» в зону проводимости. Для этого нужно затратить энергию, равную, по крайней мере, ширине запрещенной зоны. Эта величина является важнейшей характеристикой электрических свойств полупроводника и называется **энергией активации собственной проводимости** (для кремния она равна 1,1 эВ). Энергии активации (в электронвольтах) полупроводниковых элементов указаны на рис. 13.12 цифрами в кружках.

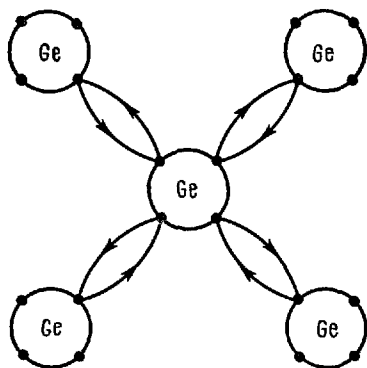


Рис. 13.13

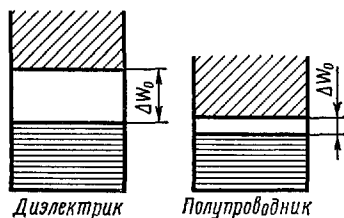


Рис. 13.14

3 Замечательным свойством полупроводников, которое используется в ряде чувствительных приборов, является сильное уменьшение их электрического сопротивления с повышением температуры. В этом отношении они ведут себя противоположно металлам.

Зонная теория объяснила возможность существования таких свойств у твердого тела. Если верхняя, полностью занятая электронами энергетическая зона кристалла отделена от ближайшей свободной зоны узкой энергетической областью, то такое тело будет диэлектриком лишь при низких температурах.

Вследствие теплового возбуждения с повышением температуры электроны, расположенные у верхней границы валентной зоны, могут перейти в зону проводимости. На рис. 13.14 показано расположение энергетических зон диэлектрика и полупроводника. С повышением температуры у полупроводников растет число электронов, перешедших вследствие теплового возбуждения в свободную энергетическую зону и участвующих в проводимости. Поэтому сопротивление полупроводников уменьшается с повышением температуры.

4. Если в электрически нейтральном веществе один из электронов оставляет свое место и переходит в другое, например к другому иону, то в оставленном им месте возникает избыток положительного заряда, или, как принято говорить, «положительная дырка». Эта «дырка» ведет себя как положительный заряд, равный по величине заряду электрона. На освобожденное электроном место («дырку») может переместиться соседний электрон, а это равносильно тому, что переместилась «положительная дырка»: она появится в новом месте, откуда ушел электрон. Так, например, если в ряду кресел в театре имеется свободное крайнее правое место и зрители последовательно пересаживаются на свободное место, все происходит так, как будто свободное место движется справа налево, в сторону, противоположную перемещению зрителей.

Во внешнем электрическом поле электроны движутся в сторону, противоположную направлению напряженности электрического поля, а положительные дырки — в направлении напряженности, т.е. в ту сторону, куда под действием поля перемещался бы положительный заряд. Электропроводность полупроводника, обусловленную перемещением дырок, принято называть **дырочной проводимостью**.

Процесс перемещения дырок в направлении напряженности внешнего электрического поля, а электронов — в противоположном направлении происходит во всей массе полупроводника.

Итак, собственная проводимость полупроводника носит смешанный электронно-дырочный характер. Она обусловлена двумя типами носителей заряда: электронами в зоне проводимости и дырками в валентной зоне. Каждому электрону, перешедшему в зону проводимости, соответствует одна дырка. Поэтому концентрации электронов проводимости (n_e) и дырок (n_h) одинаковы. Расчеты показывают, что

$$n_e = n_h = \text{const} \cdot e^{-\Delta W_0/2kT}, \quad (13.3)$$

где ΔW_0 — энергия активации собственной проводимости полупроводника, T — его температура. С ростом температуры концентрация

носителей заряда и удельная электрическая проводимость полупроводника быстро возрастают.

Все сказанное выше относится к химически чистым полупроводникам, технология изготовления которых, в частности кремния, представляет большие трудности.

§ 13.5. Примесная проводимость полупроводников

1. Введение в полупроводник примесей сильно влияет на его электрические свойства. Под примесями подразумевают как атомы или ионы посторонних элементов, так и различного рода дефекты и искажения в кристаллической решетке: пустые узлы, сдвиги, возникающие при деформациях кристалла, трещины и т.п. Все эти примеси и включения вносят дополнительные изменения в периодическое поле кристалла и влияют на поведение электронов и их энергетические состояния. Если в основную кристаллическую решетку полупроводника вносятся примесные атомы, то независимо от того, где эти атомы располагаются в кристалле, возникают дополнительные энергетические уровни расположенные в запрещенной зоне и называемые **примесными энергетическими уровнями**.

2. Примеси могут играть двоякую роль. Они могут служить, с одной стороны, дополнительными поставщиками электронов в кристалл, с другой стороны — центрами «прилипания» имеющихся в кристалле электронов. Рассмотрим, например, что произойдет, если в решетке германия один его атом будет замещен атомом примеси, обладающим пятью валентными электронами (фосфор, мышьяк, сурьма). Четыре электрона примесного атома будут находиться в химической связи с соседними атомами германия, а пятый электрон не может образовать валентную связь. Этот «лишний» электрон слабее связан с ядром и его сравнительно легко перевести в зону проводимости полупроводника.

Энергия «лишних» примесных электронов несколько меньше, чем энергия, соответствующая нижней границе незаполненной зоны проводимости полупроводника. Поэтому энергетические уровни примесных электронов располагаются вблизи дна зоны проводимости. Эти уровни заполнены некоторым числом электронов и потому называются **донорными**, а атомы примесей, поставляющие «лишние» электроны в решетку, называются **атомами-донорами**. Для перевода электрона с донорного уровня в зону проводимости нужна незначительная энергия ΔW_e , которую он может получить при тепловом возбуждении. Так, например, если для кремния примесью является мышьяк, то $\Delta W_e = 0,054$ эВ.

В результате переброса электронов с донорных уровней в зону проводимости в полупроводнике возникает **электронная примесная проводимость (проводимость n -типа)**. Полупроводники такого типа называются **электронными (или полупроводниками n -типа)**. На рис. 13.15 показана схема энергетических уровней полупроводника n -типа.

3. Предположим теперь, что в решетку германия введен примесный атом с тремя валентными электронами (бор, алюминий, индий). Такой атом не может сформировать полного комплекта необходимых связей в решетке германия (см. рис. 13.13), так как у него для этого не хватает одного электрона. Однако он сможет насытить все связи, если позаймствует электрон у ближайшего атома германия.

Тогда на месте электрона, ушедшего из атома германия, появится «положительная дырка», которая будет заполняться электроном из соседнего атома германия. Процесс последовательного заполнения свободной связи эквивалентен движению дырки в полупроводнике.

Трехвалентные примеси приводят к появлению в запрещенной энергетической зоне примесных энергетических уровней, не занятых

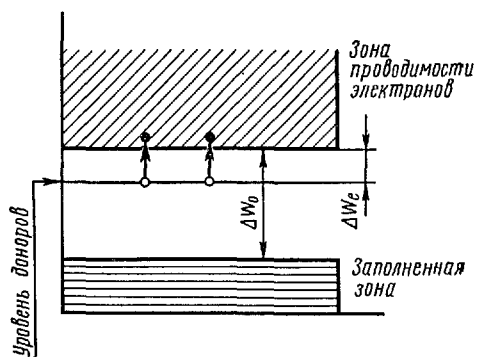


Рис. 13.15

электронами. Они называются **уровнями прилипания** или «акцепторными» уровнями. Атомы примесей в этом случае называются **атомами акцепторами**. Акцепторные уровни располагаются несколько выше верхнего края заполненной энергетической зоны основного кристалла. Например, в кристаллах кремния при введении трехвалентного бора акцепторные уровни лежат на $\Delta W_a = 0,08$ эВ выше заполненной зоны. Эта энергия во много раз меньше общей ширины запрещенной зоны. Возникновение **дырочной примесной проводимости** в таком полупроводнике связано с тем, что электроны, расположенные у верхнего края заполненной зоны, легко могут быть переведены на уровни прилипания. В результате нижняя зона будет содержать «вакантные» электронные уровни, проявляющие себя как «положительные дырки»; она становится **зоной дырочной проводимости**. Под действием электрического поля электроны в нижней зоне будут последовательно заполнять дырки, а это эквивалентно перемещению дырки в направлении, противоположном движению электронов. Описанный тип проводимости называется **проводимостью p-типа**, а полупроводники с такой проводимостью — **дырочными** или **полупроводниками p-типа**.

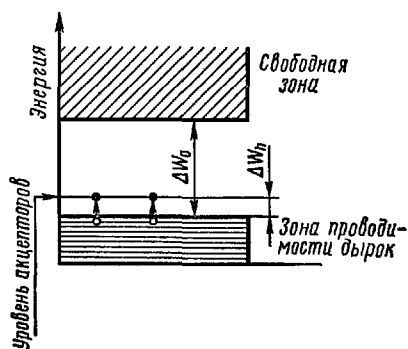


Рис. 13.16

На рис. 13.16 показана схема энергетических уровней полупроводника p-типа.

4. При одновременном введении в полупроводник донорных и акцепторных примесей характер проводимости (n - или p -тип) будет зависеть от того, какие из примесей создают повышенную концентрацию носителей заряда.

Акцепторные энергетические уровни лежат ниже донорных. Поэтому происходит своеобразная «компенсация примесей»: электроны доноров опускаются на свободные уровни акцепторов, и происходит рекомбинация электронов и дырок. Электроны доноров «закрепляются» на акцепторных атомах, и общее число носителей заряда в полупроводнике уменьшается. Так, например, если в германий с n -типом проводимости, обусловленной донорными примесями, вводится 10% трехвалентной примеси (от числа доноров), то это эквивалентно убыли донорных примесей на 10% — электроны доноров «заполняют дырки», созданные акцепторами. При этом электропроводность германия уменьшится. Наоборот, если в германий p -типа будет введена акцепторная примесь, то его электропроводность увеличится. Это связано с появлением новых свободных уровней, расположенных у верхнего края валентной зоны. На эти уровни будут дополнительно переходить электроны из валентной зоны германия, и число дырок в ней возрастает.

5. В заключение обратим внимание на одно очень существенное отличие свойств носителей заряда в полупроводниках от свойств электронов в металлах. Выше было указано (см. § 13.1), что в металлах число-носителей заряда и их энергия практически не зависят от температуры. В полупроводниках при любом характере их проводимости число носителей заряда значительно меньше, чем в металлах и, что особенно важно, концентрация носителей заряда и их энергия в е с ь м а с и л ь н о з а в и с я т о т т е м п е р а т у р ы: они возрастают при ее повышении.

§ 13.6. Выпрямляющее действие контакта металла с полупроводником

1. Изучение контактных явлений на границе полупроводника и металла привело к открытию **выпрямляющего действия** этого контакта на переменный электрический ток. Для пояснения выпрямляющего действия такого контакта воспользуемся зонной теорией твердых тел.

Рассмотрим вначале более простой случай контакта металлов 1 и 2 с различными работами выхода A_1 и A_2 , т.е. с различной высотой верхнего заполненного электронами энергетического уровня Ферми (рис. 13.17).

Пусть в противоположность тому, что мы предполагали в § 10.2, $A_1 < A_2$. В первом металле электронами заполнены более высокие энергетические уровни, чем во втором. Поэтому электроны будут переходить через поверхность контакта преимущественно в направлении от металла 1 к металлу 2, вследствие чего первый металл заряжается положительно, а второй — отрицательно. Одновременно происходит относительное смещение энергетических уровней электронов в контак-

тирующих металлах. В металле, заряжающемся отрицательно, все уровни смещаются в верх, а в металле, заряжающемся положительно, — вниз. В состоянии равновесия уровни Ферми в обоих металлах совпадают (рис. 13.18).

Это можно доказать, исходя из законов термодинамики (в состоянии устойчивого равновесия свободная энергия системы должна быть ми-

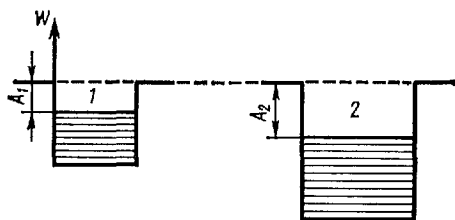


Рис. 13.17

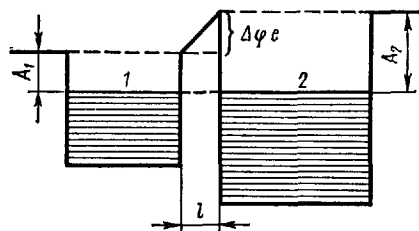


Рис. 13.18

нимальной). Выравнивание уровней Ферми в контактирующих металлах в известной мере аналогично выравниванию уровней однородной жидкости в двух сообщающихся сосудах.

2. Из рис. 13.18 видно, что внешняя контактная разность потенциалов $\Delta\varphi = \Delta\varphi'_{12}$ (см. § 10.1) зависит только от разности работ выхода A_1 и A_2 и выражается формулой (10.3). Если энергия Ферми W_{F1} и W_{F2} двух контактирующих металлов неодинакова, то между металлами имеется внутренняя контактная разность потенциалов, которая в отличие от (10.4), равна

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = (W_{F1} - W_{F2})/e.$$

Изменение потенциала от φ_1 до φ_2 происходит в пределах двойного электрического слоя толщиной l , возникающего у поверхности контакта металлов (рис. 13.19).

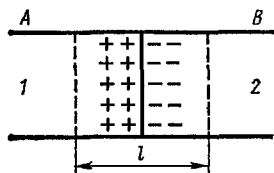


Рис. 13.19

3. Двойной электрический слой (рис. 13.19) подобен плоскому конденсатору, в котором заряды распределены не на поверхности обкладок, а по всему его объему. Принимая в первом приближении, что концентрация n_0 электрических зарядов в двойном слое равна концентрации свободных электронов в металле (10^{22} см⁻³) и что эти заряды целиком сосредоточены на плоскостях A и B , ограничивающих двойной слой, легко найти связь между толщиной l этого слоя и контактной разностью потенциалов $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = q/C,$$

где $q = en_0(l/2)S$ — заряд «пластин» конденсатора AB , S — площадь поверхности контакта, $C = \epsilon_0 S/l$ — емкость конденсатора AB . Таким образом,

$$\Delta\varphi = en_0 l^2 / 2\epsilon_0 \quad \text{и} \quad l = \sqrt{2\epsilon_0 \Delta\varphi / en_0}.$$

Полагая $\Delta\varphi = 1$ В, найдем, что $l \approx 1,6 \cdot 10^{-10}$ м. Следовательно, толщина двойного слоя имеет такой же порядок величины, что и межзельные расстояния в решетке металла.

Следовательно, для создания реально существующих контактных разностей потенциалов в несколько вольт достаточно, чтобы ничтожная доля свободных электронов, имеющихся в 1 см^3 металла, перешла из одного металла в другой. Практически это не изменяет удельного сопротивления контактного слоя металлов по сравнению с удельным сопротивлением всего остального их объема. Поэтому электрический ток проходит через контакт двух металлов, так же как и в самих металлах. Иными словами, контактный слой проводит электрический ток в обоих направлениях ($1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 1$) одинаково хорошо и не дает эффекта выпрямления, который всегда связан с одной стороной проводимостью.

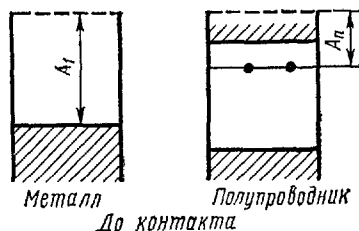


Рис. 13.20

4. Рассмотрим теперь более важный случай контакта металла с полупроводником. Для определенности выберем полупроводник n -типа. Сделаем важное для дальнейшего предположение, что работа выхода A_1 электрона из металла больше, чем его работа выхода A_n из n -полупроводника. Расположение зоны проводимости металла, целиком заполненной зоны полупроводника и его донорных уровней до контакта показано на рис. 13.20. При соприкосновении металла с полупроводником электроны с донорных уровней будут переходить в металл. Приконтактный слой n -полупроводника обеднится электронами и зарядится положительно, а металл получит отрицательный заряд. Между металлом и полупроводником образуется двойной электрический слой. Однако условия для создания этого слоя существенно иные, чем в случае контакта двух металлов. Это связано со значительно меньшей концентрацией электронов проводимости в n -проводнике по сравнению с металлом (10^{15} см^{-3} вместо 10^{22} см^{-3}). В поверхностном слое полупроводника площадью в 1 см^2 и толщиной около 10^{-8} см находится 10^7 электронов. Если рассматривать двойной слой как плоский конденсатор, то можно показать, что при толщине двойного слоя, равной 10^{-8} см , на границе металла с полупроводником создавалась бы ничтожная разность потенциалов $\Delta\varphi$ порядка 10^{-3} В. Между тем из опытов известно, что $\Delta\varphi$ составляет несколько вольт. Это соответствует толщине контактного слоя $l \approx 10^{-4} \text{ см}$. Таким образом, вследствие сравнительно малой концентрации электронов проводимости в полупроводнике толщина контактного слоя в нем приблизительно в 10 000 раз больше, чем в металле.

5. В контактном слое полупроводника почти нет свободных электронов. Поэтому электрическое сопротивление этого слоя значительно больше, чем остального объема полупроводника. Такой слой называется запирающим слоем. Он является причиной выпрямляющего

(«вентильного») действия контакта металла с полупроводником на переменный ток.

Рассмотрим подробнее влияние направления внешнего электрического поля на размеры и сопротивление контактного слоя. Если поле направлено от металла к полупроводнику¹, то электроны втягиваются из объема полупроводника в контактный слой, что приводит к уменьшению его толщины l и сопротивления. В этом направлении, называемом **пропускным**, ток может проходить через контакт металла с полупроводником. Если же внешнее поле направлено от полупроводника к металлу, то электроны вытесняются из двойного слоя в глубь полупроводника, увеличивая толщину запирающего слоя и его сопротивление. В этом направлении контакт металла с полупроводником практически не пропускает тока. Это направление называется **запирающим**. Таким образом, контакт металла с n -полупроводником обладает односторонней проводимостью и выпрямляет переменные токи.

Кроме примера, который мы рассмотрели, возможен случай, когда n -полупроводник имеет большую работу выхода, чем металл ($A_n > A_1$). При этом электроны переходят из металла в полупроводник и сопротивление контактного двойного слоя будет меньше, чем остального объема полупроводника. Контакт металла с таким полупроводником образует запирающего слоя и не оказывает выпрямляющего действия на переменные токи.

§ 13.7. Понятие о полупроводниковых диодах

1. Рассмотрим явления, которые происходят при соприкосновении двух полупроводников. Наибольший практический интерес представляет контакт двух полупроводников с разными типами примесной проводимости. Этот контакт является основой работы полупроводниковых приборов.

Граница соприкосновения двух полупроводников, один из которых имеет электронную, а другой — дырочную проводимость, называется **электронно-дырочным переходом** (p - n -переход). Он может быть осуществлен в одном и том же кристалле полупроводника, если в нем из соответствующих примесей созданы области различной (n и p) проводимости. Обычно области различной проводимости полупроводника создают либо обработкой однородных монокристаллов, либо при выращивании монокристаллов. Так, если при выращивании монокристалла германия в расплавленный металл вводить необходимые примеси, то получается монокристалл, в котором имеются последовательно расположенные области с различным типом проводимости. В однородном монокристалле германия p - n -переход можно создать при местной термической обработке. Если германий нагреть до 850°C и затем

¹ Это означает, что металл соединен с положительным полюсом источника тока, а полупроводник — с отрицательным.

быстро охладить, то его проводимость будет дырочной. Если тот же самый образец отжечь в течение нескольких часов при 450°C , то он приобретет электронную проводимость. Внесение примесей вызывает в полупроводниках появление проводимости, характер которой можно предсказать заранее. При прохождении через полупроводник тяжелых

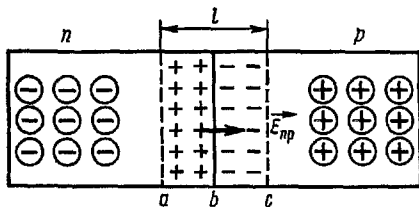


Рис 13.21

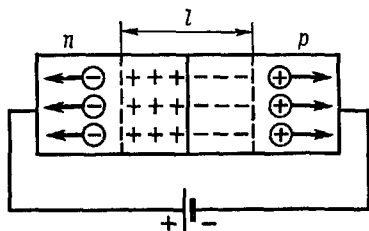


Рис. 13.22

частиц (протонов, нейтронов, α -частиц) возникает искусственная радиоактивность. Конечные продукты радиоактивного распада ведут себя в полупроводнике так же, как примесные атомы.

2. Соприкосновение двух полупроводников с разными типами проводимости в результате перемещения электронов и дырок через поверхность раздела приводит к образованию двойного электрического слоя. Электроны из n -полупроводника переходят в p -полупроводник, дырки же перемещаются в противоположном направлении (рис. 13.21). В области ab n -полупроводника образуется избыточный положительный заряд, в области bc на p -полупроводнике — избыточный отрицательный заряд. Двойной слой, обедненный подвижными носителями заряда, создает контактное электрическое поле с напряженностью E_{np} и некоторой разностью потенциалов на его границах. Это поле препятствует дальнейшему переходу носителей заряда: электронов слева направо и дырок — справа налево. При определенной толщине электронно-дырочного перехода наступает состояние равновесия¹. Толщина l слоя p - n -перехода в практически важных полупроводниках (германий, кремний, теллур) имеет величину от 10^{-4} до 10^{-5} см. Контактная разность потенциалов, представляющая собой потенциальный барьер для подвижных носителей заряда, составляет несколько десятых вольта. Электроны и дырки могут преодолеть такую разность потенциалов лишь при температуре в несколько тысяч градусов. Поэтому электроны и дырки полупроводников при обычных температурах не могут проникнуть в равновесный контактный слой, который является запятой, обладающим повышенным сопротивлением.

3. Рассмотрим влияние внешнего электрического поля на свойства p - n -перехода. Для этого включим контактирующие между собой p - и n -полупроводники в цепь источника электрической энергии. В случае, изображенном на рис. 13.22, внешнее электрическое поле бу-

¹ В этом состоянии происходит выравнивание уровней Ферми в обоих полупроводниках.

дет усиливать поле контактного слоя и приведет к возрастанию потенциального барьера для электронов и дырок, переходящих через контакт. Вместе с тем внешнее поле вызовет движение электронов в n -полупроводнике и дырок в p -полупроводнике в стороны, противоположные от контакта. Это приведет к увеличению толщины запирающего

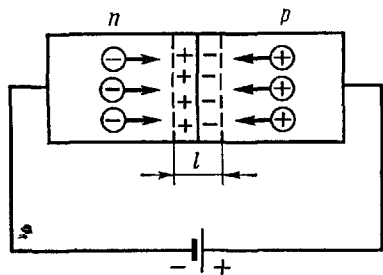


Рис. 13.23

возрастать. Этому способствует встречное движение электронов и дырок, которые перемещаются под действием внешнего поля из глубины полупроводников к границе p - n -перехода (рис. 13.23). Толщина l контактного слоя и его сопротивление при этом уменьшаются. Следовательно, ток может более или менее свободно проходить через p - n -переход в направлении от p -к n -полупроводнику. Это направление принято называть **пропускным**. Таким образом, контакт двух примесных полупроводников с разными знаками носителей заряда обладает **о д н о с т о р о н н е й** проводимостью. Если имеется один электронно-дырочный переход, то действие контакта аналогично выпрямляющему действию двухэлектродной лампы — диода (см. § 22.3). Поэтому полупроводниковое устройство, содержащее один p - n -переход, называется **полупроводниковым диодом**. Более сложные полупроводниковые устройства, включающие два p - n -перехода, так называемые **кристаллические триоды** или **транзисторы**, рассмотрены в § 22.3.

§ 13.8. Термоэлектрические явления в полупроводниках

1. Термоэлектрические явления в металлах используются главным образом в измерительной технике (см. § 10.2). Применение металлических термоэлементов в качестве термоэлектрического генератора, превращающего часть теплоты, сообщаемой горячему спаю, в электрическую энергию, нерентабельно. Физическая причина малости термоэлектрических эффектов в металлах заключается в том, что, как мы уже неоднократно подчеркивали, число носителей заряда в металлах и их энергия практически не зависят от температуры. В полупроводниках же число носителей заряда (электронов и дырок) резко возрастает с повышением температуры, и при этом увеличи-

вается их энергия. Это существенное отличие полупроводников от металлов приводит к высоким термоэлектродвижущим силам в полупроводниках и позволяет реально осуществлять задачу непосредственного получения электрической энергии за счет нагревания.

2. Если в электронном полупроводнике возникает разность температур, то в местах с высокой температурой создается большая концентрация электронов и увеличивается скорость их движения. Электроны перемещаются из этих участков полупроводника в более холодные места. Горячий конец полупроводника заряжается положительно, холодный — отрицательно, и между ними возникает разность потенциалов. В дырочном полупроводнике при наличии разности температур нагретые участки заряжаются отрицательно, а холодные — положительно. Если полупроводник изолирован, то с ростом разности потенциалов, вызванной различием температур внутри полупроводника, будет возрастать электрическое поле, препятствующее движению зарядов от горячих участков к холодным. В результате совместного действия разности температур и этого поля в полупроводнике установится равновесие, соответствующее определенной разности потенциалов между нагретым и холодным участками полупроводника. Эта разность потенциалов в десятки и сотни раз больше, чем в металлах, и достигает 1 мВ на один градус разности температур.

3. Если полупроводники, в которых создана разность температур, составляют замкнутую электрическую цепь (или часть цепи), то под влиянием возникшей термоэлектродвижущей силы создается ток. Коэффициент полезного действия полупроводниковых термоэлементов достигает 10%. Простота устройства термоэлектрических генераторов, их малые размеры и сравнительная устойчивость работы — все это дает возможность применять их в тех местах, где отсутствуют другие источники электрической энергии.

4. В § 10.2 указывалось, что применение эффекта Пельтье в металлах для устройства холодильной машины невыгодно, так как коэффициент полезного действия такой машины был бы очень мал. Разность температур, которая создается в результате эффекта Пельтье, и количество теплоты, которое ток отнимает от охлаждаемого им спая и сообщает нагреваемому, зависят от тех же величин, что и коэффициент полезного действия термоэлемента. Это означает, что, применяя полупроводники, дающие заметный коэффициент полезного действия термоэлемента, можно создать достаточно экономичную и производительную холодильную установку. Если температуру нагреваемого спая поддерживать близкой к комнатной, отводя от него теплоту, выделяющуюся при прохождении электрического тока, то второй спай и окружающий его воздух в холодильном шкафу могут быть значительно охлаждены.

Вопросы для повторения

1. Как, согласно квантовой теории, распределены электроны проводимости металлов по энергиям при $T = 0$ К? Как изменяется это распределение при повышении температуры?

2. Как квантовая теория разрешает противоречия между данными экспериментов и результатами классической теории электропроводности металлов?

3. В чем различие энергетических состояний электронов в кристалле и в изолированном атоме? Какие зоны называются разрешенными и какие запрещенными?

4. В чем состоит отличие металлов от диэлектриков согласно зонной теории?

5. Какие вещества называются полупроводниками? Как объясняются их электрические свойства зонной теорией?

6. Как влияют примеси на электропроводность полупроводников? Объясните, как возникают дырочная и электронная примесные проводимости полупроводников.

7. С помощью зонной теории поясните особые свойства контактов двух металлов и металла с полупроводником.

8. Как объяснить выпрямляющее действие полупроводникового диода?

9. В чем состоят преимущества полупроводниковых термоэлементов перед металлическими?

Часть V

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Глава XIV

ОСНОВНЫЕ МАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ. ЗАКОН АМПЕРА

§ 14.1. Магнитное поле

1. Занимаясь изучением электропроводности твердых, жидких и газообразных тел и основных законов постоянного тока, мы ограничивались рассмотрением процессов, происходящих в н у т р и проводников с токами. Однако этим не исчерпываются все явления, связанные с прохождением электрического тока. Опыты показали, что вокруг проводников с током и постоянных магнитов¹ существует **магнитное поле**, которое легко обнаружить по силовому действию, оказываемому им на другие проводники с током или постоянные магниты. Дальше мы увидим, что магнитное поле, подобно электрическому, обладает энергией и свойством инерции. Таким образом, оно столь же материально, как и рассмотренное нами выше электрическое поле.

2. Из курса физики средней школы известны элементарные сведения о магнетизме, а именно: все постоянные магниты обладают двумя разноименными полюсами — северным, или положительным, и южным, или отрицательным. Одноименные полюсы взаимно отталкиваются, а разноименные — взаимно притягиваются. В связи с этим постоянные магниты оказывают ориентирующее действие на помещенную вблизи от них магнитную стрелку, если она может свободно вращаться вокруг своего центра тяжести. Исследования поведения таких магнитных стрелок в различных точках земного шара привели к выводу о существовании магнитного поля Земли. Магнитные полюсы Земли не совпадают с ее географическими полюсами, причем положение магнитных полюсов с течением времени медленно изменяется.

3. Для изучения основных свойств магнитного поля и способов его создания рассмотрим два опыта.

О п ы т 1. Взаимодействие между неподвижными электрическими зарядами и постоянными магнитами.

Расположим вблизи магнитной стрелки компаса легкий шарик из диэлектрика (например, из сердцевины бузины), подвешенный на изолирующей нити. Сообщив ему заряд, мы не обнаружим никакого

¹ Постоянные магниты изготавливаются из ферромагнитных металлов и сплавов. О природе ферромагнетизма см. в гл. XX.

действия со стороны неподвижных электрических зарядов шарика на магнитную стрелку компаса¹. В свою очередь, магнитное поле стрелки не действует на заряженный шарик. Таким образом, приходим к выводу, что неподвижные электрические заряды не создают магнитного поля и что постоянное магнитное поле не действует на неподвижные заряды.

Опыт 2. Взаимодействие между постоянным электрическим током и магнитной стрелкой.

Под прямолинейным проводником, расположенным горизонтально, поместим магнитную стрелку, которая может свободно вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 14.1).

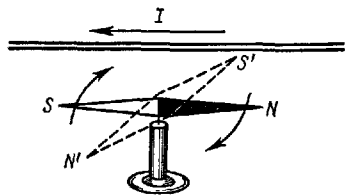


Рис. 14.1

При пропускании по проводнику постоянного тока I магнитная стрелка поворачивается вокруг своей оси, стремясь расположиться перпендикулярно проводнику с током. Ось стрелки тем точнее совпадает с этим направлением, чем больше сила тока и слабее влияние магнитного поля Земли. Это явление было открыто в 1820 г. датским физиком Г. Эрстедом и послужило началом исследования электромагнитных явлений.

Эрстед обнаружил, что направление поворота северного полюса стрелки под действием тока изменяется на противоположное при изменении направления тока в проводнике.

В дальнейшем экспериментально исследовалось действие на магнитную стрелку электрического тока, протекающего по проводникам самой различной формы. Во всех случаях проводники с током оказывали ориентирующее действие на магнитную стрелку. Таким образом, можно сделать следующий вывод: при прохождении по проводнику тока вокруг проводника возникает магнитное поле, действующее на помещенную в это поле магнитную стрелку.

4. Ток в проводнике представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов. Поэтому на основании приведенных выше опытов естественно предположить, что вокруг всякого движущегося заряда должно существовать магнитное поле. При этом материал проводника и характер его проводимости (электронный или ионный), а также происходящие в нем процессы (например, нагревание, электролиз и т.д.) никакой роли не играют. Действительно, используя в опыте Эрстеда проводники одинаковой формы и размеров, изготовленные из разных металлов, а также из разных твердых и жидких электролитов, мы не обнаружим никаких различий в отклонении магнитной стрелки, если во всех случаях сила тока в проводниках будет одинаковой.

¹ Чтобы исключить притяжение заряженного шарика к металлическому корпусу компаса, обусловленное явлением электростатической индукции (см. § 4.2), шарик следует поместить в центре сферической оболочки, изготовленной из медной сетки.

5. Непосредственное измерение действия магнитного поля движущихся электронов на магнитную стрелку было произведено в 1911 г. А. Ф. Иоффе. Принципиальная схема его установки приведена на рис. 14.2. Внутри стеклянной трубки M был создан высокий вакуум. Электроны, вылетающие из катода K , который нагревался током от батареи накала B_n , ускорялись электрическим полем, созданным

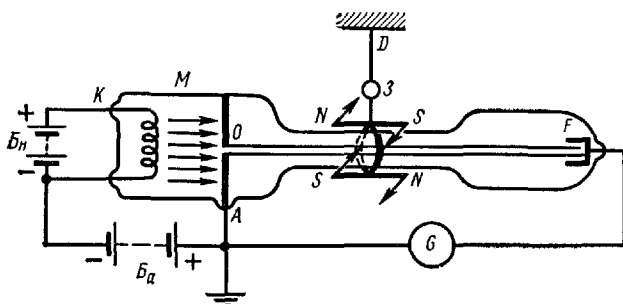


Рис. 14.2

между катодом K и анодом A батареей B_a . В центре O анода трубки имелось небольшое отверстие, через которое проходила часть электронов. Узкий пучок электронов в пространстве за анодом попадал в цилиндр Фарадея F , соединенный через гальванометр G с положительным полюсом батареи B_a . В средней части трубки по обе стороны электронного пучка располагались две одинаковые легкие магнитные стрелки $N - S$, антипараллельные друг другу. Стрелки были скреплены между собой легким кольцом, свободно охватывающим трубку. Вся эта система была подвешена на упругой нити. Применение двух параллельных и противоположно направленных магнитных стрелок (такая система называется *астатической*) позволило исключить влияние магнитного поля Земли, так как его действия на стрелки взаимно уничтожаются.

При движении в трубке пучка электронов возникает магнитное поле, действующее на каждую стрелку так, как показано на рис. 14.2. Угол закручивания нити D , регистрировавшийся по смещению светового зайчика, отраженного от зеркальца Z , позволял судить о силе, с которой магнитное поле электронного пучка действовало на магнитные стрелки. Сила тока в трубке измерялась гальванометром G . Заменяв катодную трубку M прямолинейным проводником, по которому шел ток такой же силы, как и в трубке, Иоффе установил, что угол закручивания нити не изменился. Таким образом, было доказано, что свободные электронные пучки по своему магнитному действию эквивалентны токам в проводниках.

6. Рядом исследований, в числе которых необходимо отметить опыты А. А. Эйхенвальда (1901 г.), было доказано, что магнитное действие конвекционных токов, образованных движением в простран-

стве заряженных тел и поляризованных диэлектриков, также подобно магнитному действию токов проводимости.

Упрощенная схема прибора Эйхенвальда приведена на рис. 14.3. Внутри металлического корпуса F находился диск A , который мог вращаться вокруг оси OO_1 . Диск был изготовлен из материала, обладающего высокими диэлектрическими свойствами. На этот диск по внешней его окружности наклеивался станиоловый ободок B , представлявший собой незамкнутое кольцо. Корпус прибора F и станиоловый ободок B играли роль двух обкладок конденсатора, емкость C которого была предварительно измерена. Конденсатор заряжался от электростатической машины до разности потенциалов $\Delta\phi$ между обкладками. При этом заряд обкладки B равен $q = C\Delta\phi$.

Диск A приводился в быстрое вращение вокруг оси OO_1 . Сила возникающего при этом конвекционного тока

$$I_{\kappa} = qn = C\Delta\phi n,$$

где n — число оборотов диска за единицу времени. О магнитном поле конвекционного тока можно было судить по его действию на легкую магнитную стрелку M , подвешенную на упругой нити L внутри защитного металлического кожуха E со стеклянным окошечком N . Угол поворота стрелки определялся по смещению от-

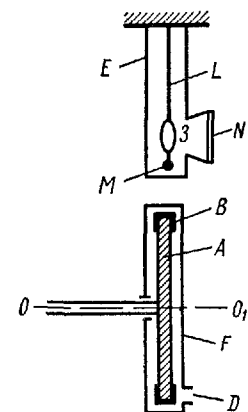


Рис. 14.3

раженного от зеркала Z светового луча, падающего на шкалу, не изображенную на рисунке.

Затем диск A устанавливался неподвижно, и через отверстие D в корпусе прибора к концам станиолового ободка B подводился ток от внешнего источника. Ток проводимости I в ободке подбирался таким, чтобы отклонение магнитной стрелки было равно ее отклонению при конвекционном токе I_{κ} . Опыты показали, что $I = I_{\kappa}$. Этим было доказано, что конвекционные токи по своему магнитному действию подобны токам проводимости.

7. Рассмотренные опыты показывают, что вокруг всякого движущегося заряда, будь то электрон, ион или заряженное тело, помимо электрического поля существует также и магнитное поле. Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нем заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует только на движущиеся в этом поле электрические заряды. Следовательно, между двумя движущимися друг относительно друга зарядами существуют электрическое и магнитное взаимодействия. Подробнее мы остановимся на этом вопросе в § 18.1.

8. Основной характеристикой магнитного поля служит **вектор магнитной индукции \mathbf{B}** . Не останавливаясь сейчас на выяснении физического смысла вектора магнитной индукции и точном его определении, укажем лишь на один из способов установления направления вектора

В в различных точках магнитного поля¹. Условились считать, что вектор магнитной индукции **В** в произвольной точке поля совпадает по направлению с силой, которая действует на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в эту точку поля. Такая магнитная стрелка не может своим присутствием исказить то поле, в кото-

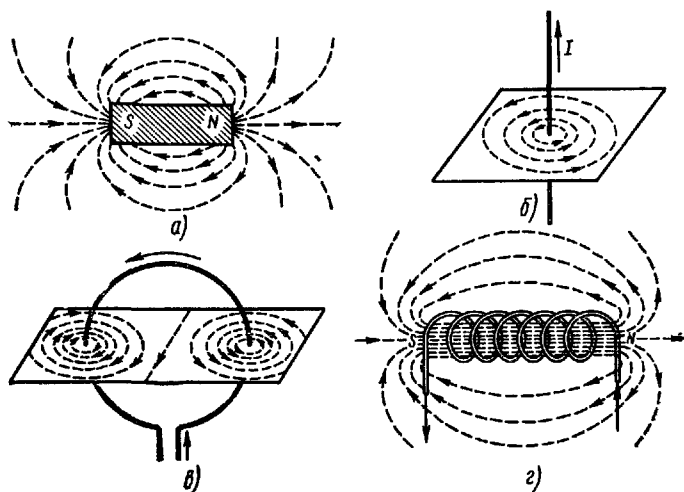


Рис 14.4

рое она вносится. Сила, действующая со стороны магнитного поля на южный полюс стрелки, направлена в сторону, противоположную вектору **В**. Оба полюса такой магнитной стрелки лежат в бесконечно близких точках поля, так что силы, действующие на оба полюса, численно равны друг другу. Следовательно, в магнитном поле на магнитную стрелку действует пара сил, поворачивающая ее таким образом, чтобы ось стрелки, соединяющая южный полюс с северным, совпала с направлением поля, т. е. вектора **В**.

9. Для графического изображения магнитных полей удобно пользоваться линиями магнитной индукции. **Линиями магнитной индукции** называют линии, проведенные в магнитном поле так, что вектор **В** в каждой точке этой линии направлен по касательной к ней.

Линии магнитной индукции проще всего наблюдать с помощью мелких игольчатых железных опилок, которые намагничиваются в исследуемом поле и ведут себя подобно маленьким магнитным стрелкам. Картины плоских сечений простейших магнитных полей (рис. 14.4) известны из курса физики средней школы.

Из рис. 14.4, б, в, г видно, что линии магнитной индукции охватывают проводники с током. Вблизи проводника линии магнитной индукции лежат в плоскостях, перпендикулярных проводнику. Направ-

¹ Другой способ, основанный на ориентирующем действии магнитного поля на рамку с током, рассмотрен в § 17 1.

ление линий индукции магнитного поля тока определяется по известному **правилу буравчика**: если ввинчивать буравчик по направлению вектора плотности тока в проводнике, то направление движения рукоятки буравчика укажет направление линий магнитной индукции.

Линии индукции магнитного поля тока ни в каких точках поля не могут обрываться, т. е. ни начинаться, ни кончаться. Эти линии либо замкнуты (рис. 14.4, б, в, г), либо идут из бесконечности в бесконечность (рис. 14.4, в, г), либо, наконец, бесконечно навиваются на некоторую поверхность, всюду плотно заполняя ее, но никогда не возвращаясь вторично в любую точку поверхности. Можно доказать, что этот последний случай реализуется, например, в поле, создаваемом системой из кругового тока I_1 и бесконечного прямого тока I_2 , проходящего через центр кругового тока перпендикулярно его плоскости (рис. 14.5)

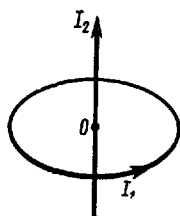


Рис. 14.5

Для сравнения магнитного поля с электростатическим полезно напомнить, что силовые линии электростатического поля **р а з о м к н у т ы**. Они начинаются на положительных зарядах, оканчиваются на отрицательных и вблизи от заряженного проводника направлены перпендикулярно его поверхности.

10. Из сопоставления рис. 14.4, а и 14.4, г видно, что магнитное поле вне соленоида, т. е. длинной катушки с током, подобно магнитному полю полосового магнита. Северный полюс магнита (см. рис. 14.4, а) соответствует тому концу соленоида, из которого ток в витках виден идущим против часовой стрелки (см. рис. 14.4, г). Магнитное поле кругового тока (см. рис. 14.4, в), представляющего собой один виток соленоида, подобно полю очень короткого полосового магнита, расположенного в центре витка так, что его ось перпендикулярна плоскости витка. Такой полосовой магнитик естественно назвать **магнитным диполем**.

Из рис. 14.4, а видно, что линии магнитной индукции постоянного магнита выходят из его северного полюса и входят в южный. На первый взгляд кажется, что здесь имеется полная аналогия с силовыми линиями электростатического поля, причем полюсы магнита играют роль магнитных «зарядов» (магнитных масс), создающих магнитное поле. Однако опыты показали, что, разрезая постоянный магнит на части, нельзя разделить его полюсы, т. е. нельзя получить магнит либо с одним северным, либо с одним южным полюсом. Каждая сколь угодно малая часть постоянного магнита всегда имеет оба полюса. Следовательно, в отличие от электрических зарядов свободных магнитных «зарядов» в природе не существует. Нет их и в полюсах постоянных магнитов. Поэтому линии магнитной индукции не могут обрываться на полюсах.

Полная аналогия между магнитными полями полосовых магнитов и соленоидов позволила выдающемуся французскому физика А. Амперу (1821—1822) высказать гипотезу о том, что магнитные свойства

постоянных магнитов обусловлены существующими в них микротоками. О природе и характере этих микротоков Ампер ничего не мог сказать, так как в то время учение о строении вещества находилось еще в начальной стадии. Лишь после открытия электрона и выяснения строения атомов и молекул, т. е. спустя почти 100 лет, гипотеза Ампера была блестяще подтверждена и легла в основу современных представлений о магнитных свойствах вещества. Гипотетические микротоки Ампера получили простое и наглядное истолкование: они связаны с движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

§ 14.2. Закон Ампера

1. В предыдущем параграфе мы говорили о том, что проводники с током создают вокруг себя магнитное поле и действуют на находящиеся около них постоянные магниты. В свою очередь магнит-

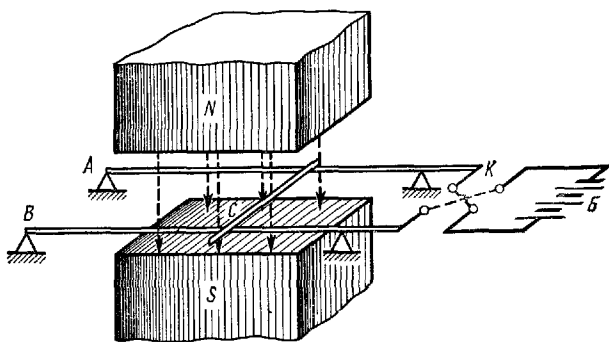


Рис 14.6

ное поле действует на проводники с током. Для доказательства этого сделаем следующий опыт. Два параллельных металлических стержня A и B поместим между полюсами магнита N и S (рис. 14.6). Легкий металлический стержень C опирается своими концами на стержни A и B и может свободно перемещаться вдоль них. Стержни A и B присоединены к аккумуляторной батарее B через коммутатор K , с помощью которого можно замыкать и размыкать электрическую цепь, образованную проводниками A , C и B , а также изменять направление электрического тока в ней. Опыт показывает, что при замыкании цепи проводник C перемещается вдоль стержней A и B . Направление перемещения проводника C зависит от направления электрического тока в нем. На рис. 14.7 показаны оба возможных случая. Если ток I в проводнике C идет пер-

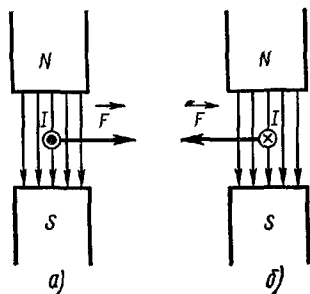


Рис. 14.7

пендикулярно плоскости чертежа «к нам» (такой ток принято обозначать кружком с точкой в его центре), то проводник перемещается вправо (рис. 14.7, а). Если ток I идет в противоположном направлении (такой ток принято обозначать кружком с крестом внутри его), то проводник C перемещается влево (рис. 14.7, б).

2. Действие магнитного поля на проводники с током было обнаружено Г. Эрстедом и А. Ампером. Ампер подробно исследовал это явление и пришел к выводу, что сила F , которая действует на прямолинейный проводник с током, находящийся в однородном магнитном поле¹, пропорциональна силе тока I в проводнике, его длине l , магнитной индукции B и синусу угла α между направлением тока в проводнике и вектором \mathbf{B} :

$$F = \kappa I B l \sin \alpha \quad (14.1)$$

Закон Ампера (14.1) легко обобщить на случай неоднородного магнитного поля и проводника произвольной формы. В самом деле, бесконечно малый элемент dl проводника любой формы можно считать прямолинейным, а магнитное поле в области, занятой элементом dl , можно считать однородным.

Поэтому в общем случае закон Ампера имеет вид

$$dF = \kappa I B dl \sin(\widehat{dl, \mathbf{B}}), \quad (14.2)$$

где dF — сила, действующая на элемент проводника длиной dl , а угол α заменен углом между векторами dl (проведенным в направлении тока I) и \mathbf{B} . Коэффициент пропорциональности κ в формулах (14.1) и (14.2) зависит только от выбора единиц величин I , B , l и F . При выражении всех этих величин в единицах одной и той же системы единиц $\kappa = 1$ (исключением является только система единиц Гаусса, см. § 15.3) Поэтому в дальнейшем коэффициент κ в законе Ампера мы будем опускать.

3. Закон Ампера позволяет определить числовое значение магнитной индукции B . Предположим, что элемент проводника dl с током I перпендикулярен направлению магнитного поля [$\sin(\widehat{dl, \mathbf{B}}) = 1$], тогда закон Ампера можно записать в виде

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}. \quad (14.3)$$

Из формулы (14.3) следует, что магнитная индукция B численно равна силе, действующей со стороны поля на единицу длины проводника, по которому течет электрический ток единичной силы и который расположен перпендикулярно направлению магнитного поля. Таким образом, магнитная индукция является с л о в о й характеристикой магнитного поля, подобно тому, как напряженность E является силовой характеристикой электростатического поля.

¹ Магнитное поле называется однородным, если векторы индукции во всех точках этого поля одинаковы, т. е. численно равны и имеют одинаковые направления.

Единицы магнитной индукции в различных системах единиц рассмотрены в гл. XV.

4. Закон Ампера, записанный в форме (14.2), не указывает направления силы $d\mathbf{F}$ и поэтому не определяет ее полностью. Как показали опыты (см., например, рис. 14.7), направление силы $d\mathbf{F}$ можно найти по правилу левой руки: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входили линии магнитной индукции, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению электрического тока в проводнике, то отставленный большой палец укажет направление силы, действующей на проводник со стороны поля. Это правило очень удобно, когда элемент $d\mathbf{l}$ проводника с током перпендикулярен направлению магнитного поля. Во всех остальных случаях оно нуждается в дополнительных пояснениях. Поэтому для отыскания направления силы $d\mathbf{F}$ лучше пользоваться более универсальным правилом: вектор $d\mathbf{F}$ направлен перпендикулярно плоскости, образованной векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{B} таким образом, чтобы из конца вектора $d\mathbf{F}$ вращение от вектора $d\mathbf{l}$ к вектору \mathbf{B} по кратчайшему пути происходило против часовой стрелки. Иными словами, вектор $d\mathbf{F}$ совпадает по направлению с векторным произведением $[d\mathbf{l} \mathbf{B}]$. Из математики известно, что модуль векторного произведения равен произведению модулей векторов на синус угла между ними:

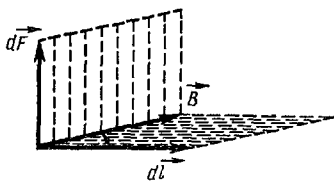


Рис. 14.8

$$|[d\mathbf{l} \mathbf{B}]| = dlB \sin(\widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{B}}) \quad (14.4)$$

Поэтому можно записать закон Ампера в векторной форме следующим образом:

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l} \mathbf{B}] \quad (14.5)$$

Взаимное расположение векторов $d\mathbf{F}$, $d\mathbf{l}$ и \mathbf{B} представлено на рис. 14.8. Если элемент проводника $d\mathbf{l}$ перпендикулярен \mathbf{B} , то при заданном значении силы тока I сила $d\mathbf{F}$ максимальна: $d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_{\text{макс}}$. Таким образом, можно указать еще один способ нахождения направления вектора магнитной индукции. Вектор \mathbf{B} образует с векторами $d\mathbf{F}_{\text{макс}}$ и $d\mathbf{l}$ правую тройку, т.е. направлен перпендикулярно плоскости этих векторов таким образом, чтобы из его конца вращение от $d\mathbf{F}_{\text{макс}}$ к $d\mathbf{l}$ по кратчайшему пути было видно происходящим против часовой стрелки. Само собой разумеется, что этот способ определения направления вектора \mathbf{B} полностью согласуется со способом, приведенным в § 14.1 и основанным на использовании магнитной стрелки.

5. В заключение остановимся на существенной особенности сил электромагнитного взаимодействия, которая выражена в законе Ампера. В электростатике мы имели дело с **центральными силами**, так как сила взаимодействия между двумя точечными зарядами направлена по линии, соединяющей эти заряды. Примером центральных сил

являются также силы тяготения (гравитационные силы). Сила, действующая на точечный заряд q , помещенный в электростатическое поле с напряженностью E , совпадает по величине и направлению с вектором qE , т.е. направлена по касательной к силовой линии электростатического поля. Силы же электромагнитного взаимодействия, как видно из закона Ампера (14.5), не являются центральными. Они всегда направлены перпендикулярно линиям магнитной индукции и проводникам с токами, т.е. их абсолютные значения и направления существенным образом зависят от ориентации в магнитном поле рассматриваемых элементов проводников с токами.

Вопросы для повторения

1. Опишите опыты Эрстеда, Иоффе и Эйхенвальда, позволившие обнаружить магнитное действие токов.

2. В чем состоит закон Ампера? Какова особенность сил электромагнитного взаимодействия?

3. Какая величина является силовой характеристикой магнитного поля? Дайте ее определение.

4. Что называется линиями магнитной индукции? Как устанавливается их направление? Нарисуйте линии магнитной индукции для простейших магнитных полей.

5. В чем состоит гипотеза Ампера о природе магнетизма?

Глава XV

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

§ 15.1. Закон Био—Савара—Лапласа

1. После опытов Г. Эрстеда началось интенсивное изучение магнитного поля постоянного электрического тока. В 1820 г. французские ученые Ж. Био и Ф. Савар исследовали магнитные поля, создаваемые в воздухе прямолинейным током, круговым током, катушкой с током и т. д. На основании многочисленных опытов они пришли к следующим выводам:

а) во всех случаях индукция магнитного поля электрического тока пропорциональна силе тока;

б) магнитная индукция зависит от формы и размеров проводника с током;

в) магнитная индукция в произвольной точке поля зависит от расположения этой точки по отношению к проводнику с током.

Так, например, в случае длинного прямолинейного проводника с током I магнитная индукция пропорциональна отношению I/r , где r — расстояние от рассматриваемой точки поля до проводника. Магнитная индукция в центре кругового витка радиуса R с током I оказалась пропорциональной I/R .

2. Био и Савар пытались получить общий закон, который позволял бы вычислять магнитную индукцию в каждой точке поля, создаваемого током, текущим по проводнику любой формы. Однако сделать это им не удалось. По их просьбе этой задачей занялся выдающийся французский математик, астроном и физик П. Лаплас. Он учел векторный характер магнитной индукции и высказал важную гипотезу о том, что индукция \mathbf{B} в каждой точке магнитного поля любого проводника с током представляет собой векторную сумму индукций $d\mathbf{B}$ элементарных магнитных полей, создаваемых каждым участком $d\mathbf{l}$ этого проводника. Тем самым Лаплас предположил, что при наложении магнитных полей справедлив принцип суперпозиции, т.е. принцип независимого действия полей, с которым мы уже имели дело в электростатике (см. § 2.2).

Лаплас обобщил результаты экспериментов Био и Савара в виде следующего дифференциального закона, называемого **законом Био—Савара—Лапласа**

$$d\mathbf{B} = \kappa_1 \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}], \quad (15.1)$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор, численно равный длине $d\mathbf{l}$ элемента проводника и совпадающий по направлению с током, \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из элемента проводника $d\mathbf{l}$ в рассматриваемую точку поля, $r = |\mathbf{r}|$, κ_1 — коэффициент пропорциональности, определяемый опытным путем.

Из закона Био—Савара—Лапласа следует, что вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ в какой-либо точке C магнитного поля перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} , и его направление таково, что из конца вектора $d\mathbf{B}$ поворот вектора $d\mathbf{l}$ до совмещения с вектором \mathbf{r} по кратчайшему пути виден происходящим против часовой стрелки (рис. 15.1). Такое же направление вектора $d\mathbf{B}$ дает правило буравчика, изложенное в § 14.1.

3. Дальнейшие экспериментальные исследования показали, что при одинаковых силе тока, форме и размерах проводника магнитная индукция зависит от свойств среды, в которой создается магнитное поле. Следовательно, коэффициент κ_1 в законе Био—Савара—Лапласа (15.1) должен зависеть не только от выбора единиц величин, входящих в это уравнение, но и от свойств среды. Если среда однородна и изотропна, то κ_1 можно представить в виде

$$\kappa_1 =: \kappa_2 \mu, \quad (15.2)$$

где κ_2 — коэффициент, зависящий только от выбора системы единиц, μ — безразмерная величина, характеризующая магнитные свойства среды и называемая **относительной магнитной проницаемостью среды**. Она не зависит от выбора системы единиц и равна единице для вакуума. У всех сред, кроме ферромагнитных, значения μ очень мало отличаются от единицы (см. гл. XX).

Таким образом, закон Био—Савара—Лапласа (15.1) можно переписать в форме

$$d\mathbf{B} = \kappa_2 \mu \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]. \quad (15.3)$$

В Международной системе единиц (СИ) принимается, что

$$\kappa_2 = \mu_0 / 4\pi. \quad (15.4)$$

где μ_0 — так называемая **магнитная постоянная**. Поэтому

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]. \quad (15.5)$$

Такая форма записи закона Био—Савара—Лапласа и всех вытекающих из него уравнений электромагнитного поля называется **рационализованной**. Во всем дальнейшем изложении мы будем пользоваться только ею. Произведение $\mu\mu_0$ часто называют **абсолютной магнитной проницаемостью среды**.

Если учесть, что модуль векторного произведения $[d\mathbf{l} \mathbf{r}]$ равен

$$|[d\mathbf{l} \mathbf{r}]| = r dl \cdot \sin(\widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{r}}),$$

то числовое значение вектора $d\mathbf{B}$ равно

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(d\mathbf{l}, \mathbf{r})}{r^2} \cdot \quad (15.6)$$

Значения коэффициента κ_2 в других системах единиц рассмотрены в § 15.3.

4. Наряду с магнитной индукцией \mathbf{B} вводится другая векторная характеристика магнитного поля — напряженность \mathbf{H} . Для магнитного поля в изотропной среде связь между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} имеет вид¹

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0} \quad (15.7)$$

Из (15.5) следует, что в безграничной однородной и изотропной среде напряженность магнитного поля электрического тока не зависит от свойств среды:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}], \quad (15.8)$$

$$dH = \frac{I dl \sin(d\mathbf{l}, \mathbf{r})}{4\pi r^2} \cdot \quad (15.9)$$

Формулы (15.8) и (15.9) представляют собой часто употребляемый вид записи закона Био—Савара—Лапласа.

Сравнение векторных характеристик электрического (\mathbf{E} и \mathbf{D}) и магнитного (\mathbf{B} и \mathbf{H}) полей показывает, что аналогом вектора напряженности \mathbf{E} электрического поля является вектор магнитной индукции \mathbf{B} , так как \mathbf{E} и \mathbf{B} определяют силы действия этих полей и зависят от свойств среды, в которой создаются поля. В свою очередь аналог вектора электрического смещения \mathbf{D} — вектор напряженности \mathbf{H} магнитного поля.

5. Закон Био—Савара—Лапласа позволяет найти напряженность \mathbf{H} и индукцию \mathbf{B} магнитного поля электрического тока, текущего по проводнику конечных размеров и произвольной формы. В соответствии с принципом суперпозиции магнитная индукция \mathbf{B} в любой точке магнитного поля проводника с током I равна векторной сумме индукций $\Delta\mathbf{B}_i$ элементарных магнитных полей, создаваемых всеми отдельными участками Δl_i этого проводника:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \Delta\mathbf{B}_i, \quad (15.10)$$

где n — общее число участков, на которые он разбит.

Неограниченно увеличивая число участков n и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, можно заменить сумму, стоящую в правой части уравнения (15.10), интегралом:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B}, \quad (15.11)$$

¹ Универсальную связь между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} для магнитного поля в произвольной среде мы рассмотрим в § 20.5.

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника с током I , а символ « \int » означает, что интегрирование распространено на всю его длину l .

В следующих параграфах будут даны примеры расчета магнитных полей тока, текущего по проводникам правильной геометрической формы.

§ 15.2. Магнитное поле прямолинейного проводника с током

1. Часть замкнутой электрической цепи — прямолинейный проводник MN — лежит в плоскости чертежа (рис. 15.2). Согласно закону Био—Савара—Лапласа (15.6), вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}$ поля, создаваемого в точке A элементом dl проводника с током I , численно равен

$$dB = \mu\mu_0 I dl \sin \varphi / 4\pi r^2,$$

где φ — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} . Векторы $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} для всех участков прямолинейного проводника лежат в плоскости чертежа. Поэтому в точке A все векторы $d\mathbf{B}$, характеризующие магнитные поля, создаваемые отдельными участками нашего проводника, направлены перпендикулярно плоскости чертежа («к нам»). Это сильно упрощает определение индукции \mathbf{B} результирующего магнитного поля; вектор \mathbf{B} также перпендикулярен плоскости чертежа и численно равен алгебраической сумме модулей векторов $d\mathbf{B}$:

$$B = \int dl dB = \int \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \varphi}{4\pi r^2}.$$

Учитывая, что величины μ , μ_0 и I при интегрировании не изменяются, получаем

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \varphi}{r^2}. \quad (15.12)$$

Чтобы произвести интегрирование, выразим dl и r через одну независимую переменную φ . Проведем из точки A дугу CD окружности, радиус которой вследствие малости длины dl участка BC проводника можно считать равным r . По этой же причине угол при вершине D треугольника BCD можно считать прямым. Обозначим через r_0 длину перпендикуляра AE , опущенного из точки A на проводник. Как видно из чертежа, $r = r_0 / \sin \varphi$ и $dl = CD / \sin \varphi$. В то же время $CD = r d\varphi$, поэтому $dl = \frac{r d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{r_0 d\varphi}{\sin^2 \varphi}$. Подставив r и dl в (15.2),

получим

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{r_0},$$

где φ_1 и φ_2 — значения угла φ для крайних точек проводника MN .
 Проинтегрировав это выражение, находим

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (15.13)$$

Если проводник MN бесконечно длинный, то $\varphi_1 = 0$, а $\varphi_2 = \pi$. Тогда магнитная индукция в любой точке поля такого проводника с током равна

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r}, \quad (15.14)$$

т.е. обратно пропорциональна кратчайшему расстоянию от этой точки до проводника.

Напряженность $H = B/\mu\mu_0$ магнитного поля прямолинейного проводника с током выражается формулой

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \quad (15.15)$$

для бесконечно длинного проводника

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{2I}{r_0}. \quad (15.16)$$

2. Применим полученные нами формулы к расчету магнитного поля в центре O прямоугольного витка $ACDE$ с током I (рис. 15.3). Виток лежит в плоскости чертежа. Легко видеть, что векторы индукции B_1, B_2, B_3 и B_4 магнитных полей, создаваемых в точке O прямолинейными проводниками EA, AC, CD и DE , соответственно имеют одинаковое направление — перпендикулярно плоскости витка «от нас». Поэтому индукция результирующего магнитного поля в точке O

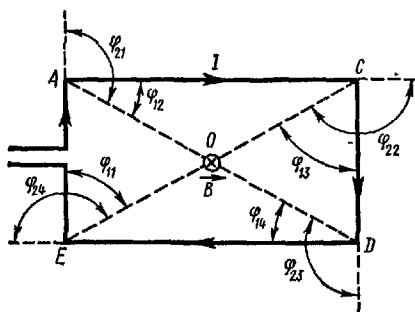


Рис. 15.3

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4.$$

Стороны прямоугольника EA и CD обозначим a , а AC и DE — b . Заменяя B_1, B_2, B_3 и B_4 по формуле (15.13) и вводя второй индекс углов φ для обозначения номера стороны прямоугольника, получим

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} I \left[\frac{2}{b} (\cos \varphi_{11} - \cos \varphi_{21}) + \frac{2}{a} (\cos \varphi_{12} - \cos \varphi_{22}) + \right. \\ \left. + \frac{2}{b} (\cos \varphi_{13} - \cos \varphi_{23}) + \frac{2}{a} (\cos \varphi_{14} - \cos \varphi_{24}) \right].$$

Из рис. 15.3 видно, что

$$\cos \varphi_{11} = \cos \varphi_{13} = a/\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos \varphi_{12} = \cos \varphi_{14} = b/\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\cos \varphi_{21} = \cos \varphi_{23} = -\sin \varphi_{12} = -a/\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\cos \varphi_{22} = \cos \varphi_{24} = -\sin \varphi_{11} = -b/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Подставив эти значения в предыдущую формулу и произведя преобразования, получим следующие выражения для магнитной индукции и напряженности магнитного поля в центре прямоугольного витка с током:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{8l \sqrt{a^2 + b^2}}{ab}; \quad (15.17)$$

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{8l \sqrt{a^2 + b^2}}{ab}. \quad (15.18)$$

3. Рассмотрим два длинных прямолинейных проводника, расположенных параллельно друг другу

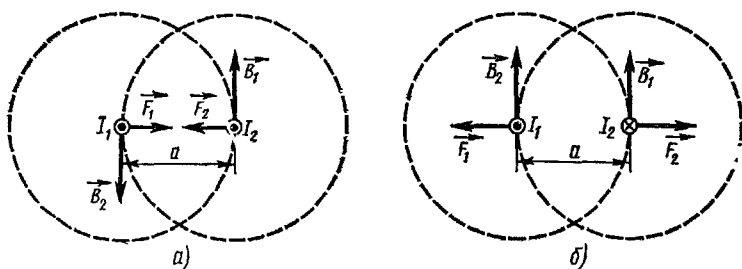


Рис. 15.4

на расстоянии a (рис. 15.4). Опыт показывает, что при пропускании по проводникам тока между ними возникают силы взаимодействия. Если токи I_1 и I_2 в обоих проводниках направлены в одну сторону (рис. 15.4, а), то проводники притягиваются друг к другу, а если направления токов взаимно противоположны, то проводники отталкиваются друг от друга (рис. 15.4, б). Это явление впервые было обнаружено А. Ампером в 1820 г. Взаимодействие параллельных токов легко объяснить на основе закона Ампера, если учесть, что каждый из проводников создает свое магнитное поле.

По закону Ампера (14.2), на элемент dl второго проводника с током I_2 действует сила dF_2 , численно равная

$$dF_2 = I_2 B_1 dl \sin(\widehat{dl, \mathbf{B}_1}),$$

где \mathbf{B}_1 — магнитная индукция поля, создаваемого током I_1 , идущим по первому проводнику.

Если длина проводников во много раз больше расстояния a между ними, а элемент dl находится вдали от концов проводника, то при определении B_1 можно считать первый проводник бесконечно длинным.

Тогда по формуле (15.14)

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{a},$$

причем вектор \mathbf{B}_1 перпендикулярен элементу $d\mathbf{l}$ второго проводника, так что $\sin(\widehat{d\mathbf{l}, \mathbf{B}_1}) = 1$. Поэтому сила $d\mathbf{F}_2$ численно равна

$$dF_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 dl}{a}.$$

Аналогичными рассуждениями легко показать, что на участок $d\mathbf{l}$ первого проводника действует сила $d\mathbf{F}_1$, направленная в сторону, противоположную $d\mathbf{F}_2$, и численно равная ей:

$$dF_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2 dl}{a}.$$

Тогда для dF_1 и dF_2 можно написать общую формулу:

$$dF = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} dl. \quad (15.19)$$

Для нахождения числового значения вектора силы \mathbf{F} , действующей на участок проводника конечной длины l , проинтегрируем это равенство по l от 0 до l :

$$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} l. \quad (15.19')$$

§ 15.3. Системы единиц электромагнитных величин

1. **Международная система единиц (СИ).** За единицу силы тока в СИ принимается ампер (А) — сила такого постоянного тока, при прохождении которого по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины, находящимся в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, сила электромагнитного взаимодействия между проводниками равна $2 \cdot 10^{-7}$ на каждый метр длины. С помощью этого определения ампера и формулы (15.19') находим значение магнитной постоянной μ_0 :

$$\mu_0 = \frac{4\pi F a}{2I^2 l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ В} \cdot \text{с}/(\text{А} \cdot \text{м}),$$

так как $1 \text{ Н} = 1 \text{ Дж/м} = 1 \text{ В} \cdot \text{Кл/м} = 1 \text{ В} \cdot \text{А} \cdot \text{с/м}$.

Единицей магнитной индукции является тесла (Т) — магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой в 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника с током в 1 А, расположенного перпендикулярно направлению поля. Из формулы (14.3) следует, что

$$1 \text{ Т} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

За единицу напряженности магнитного поля, называемую **ампер на метр** (А/м), принимается напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Т.

2. **Абсолютная электромагнитная система единиц (СГСМ)**. В основу этой системы положены первичные единицы системы СГС для механических величин (сантиметр, грамм массы, секунда), а коэффициент κ_2 в законе Био—Савара—Лапласа (15.3) считается безразмерным и полагается равным единице:

$$d\mathbf{B} = \mu \frac{I}{r^3} [dl \mathbf{r}]. \quad (15.20)$$

Форма записи закона Ампера (14.5) в системе СГСМ такая же, как и в СИ. Поэтому формула для силы электромагнитного взаимодействия двух длинных параллельных прямолинейных проводников с током несколько отличается от (15.19')

$$F = \mu \frac{2I_1 I_2}{a} l. \quad (15.21)$$

За единицу силы тока в системе СГСМ принимается сила такого постоянного тока, при прохождении которого по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины, находящимся в вакууме на расстоянии 2 см друг от друга, сила электромагнитного взаимодействия между проводниками равна 1 дин на каждый сантиметр длины. Из формулы (15.21) следует

$$1 \text{ СГСМ}_I = 1 \text{ дин}^{1/2} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Для нахождения связи между 1 СГСМ_I и ампером вычислим по формуле (15.19'), где $I_1 = I_2 = I$, силу тока I в амперах при условии, что $F = 1 \text{ дин} = 10^{-5}$ Н, $a = 2 \cdot 10^{-2}$ м и $l = 10^{-2}$ м:

$$I = \sqrt{\frac{4\pi a F}{2\mu_0 l}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2}}} \text{ А} = 10 \text{ А}.$$

Таким образом, единицы силы тока и заряда в системе СГСМ и СИ связаны соотношениями:

$$1 \text{ СГСМ}_I = 10 \text{ А} \text{ и } 1 \text{ СГСМ}_q = 10 \text{ Кл}.$$

Соответственно единицы силы тока и заряда в системах СГСМ и СГСЭ связаны соотношениями:

$$1 \text{ СГСМ}_I = 3 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ}_I \text{ и } 1 \text{ СГСМ}_q = 3 \cdot 10^{10} \text{ СГСЭ}_q.$$

Связь между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля в системе СГСМ имеет вид

$$B = \mu H. \quad (15.22)$$

За единицу магнитной индукции в системе СГСМ, называемую **гауссом** (Гс), принимается магнитная индукция однородного магнитного поля, действующего с силой в 1 дин на каждый сан-

тиметр длины прямолинейного проводника с током в 1 СГСМ_I, расположенного перпендикулярно направлению поля. Из формулы (14.3) следует:

$$1 \text{ Гс} = 1 \frac{\text{дин}}{\text{СГСМ}_I \cdot \text{см}} = \frac{10^{-6} \text{ Н}}{10 \text{ А} \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 10^{-4} \text{ Т.}$$

Единицей напряженности магнитного поля является эрстед (Э) — напряженность такого магнитного поля, магнитная индукция которого в вакууме равна 1 Гс. В СИ напряженность этого поля

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{10^3}{4\pi} \text{ А/м.}$$

Следовательно, $1 \text{ Э} = (10^3/4\pi) \text{ А/м.}$

3. **Абсолютная система единиц Гаусса.** В этой системе, наиболее часто используемой в теоретической физике, все электрические величины выражаются в единицах системы СГСЭ, а все магнитные — в единицах системы СГСМ. Поэтому коэффициенты κ_2 в законе Био—Савара—Лапласа (15.3) и κ в законе Ампера (14.2) отличны от единицы: $\kappa_2 = \kappa = 1/c$, где c — так называемая **электродинамическая постоянная**, показывающая, скольким единицам заряда (или силы тока) в системе СГСЭ эквивалентна одна единица заряда (или силы тока) в системе СГСМ, т.е.

$$c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{СГСЭ}_q}{\text{СГСМ}_q} = 3 \cdot 10^{10} \frac{r^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}}{r^{1/2} \cdot \text{см}^{1/2}} = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с.}$$

В гауссовой системе единиц законы Ампера и Био—Савара—Лапласа имеют вид:

$$dF = \frac{1}{c} I [dl \text{ В}], \quad (15.23)$$

$$dH = \frac{1}{c} \frac{I}{r^3} [dl \text{ г}] \text{ и } dB = \frac{\mu}{c} \frac{I}{r^3} [dl \text{ г}]. \quad (15.24)$$

§ 15.4. Магнитное поле кругового тока

1. Найдем индукцию и напряженность магнитного поля в центре O кругового витка радиуса R с током I (рис. 15.5). По закону Био—Савара—Лапласа (15.6), магнитная индукция поля, создаваемого в точке O элементом dl витка с током,

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin(\widehat{dl, r})}{r^2}.$$

В рассматриваемом примере радиус-вектор r перпендикулярен элементу тока dl , а по модулю равен радиусу витка, так что

$\sin(d\hat{l}, \hat{r}) = 1$ и $r = R$. Поэтому

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}.$$

Все векторы $d\mathbf{B}$ магнитных полей, создаваемых в точке O различными участками dl кругового витка с током, направлены перпендикулярно плоскости чертежа «от нас». Поэтому индукция результирующего поля в точке O

$$B = \int_0^B dB = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int_0^{2\pi R} dl;$$

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R}. \quad (15.25)$$

Напряженность магнитного поля в центре кругового тока

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{I}{2R}.$$

2. Определим индукцию и напряженность магнитного поля, создаваемого круговым витком с током в произвольной точке оси витка. Пусть кольцевой виток радиуса R с током I расположен перпендикулярно плоскости чертежа так, что его ось OO' лежит в плоскости

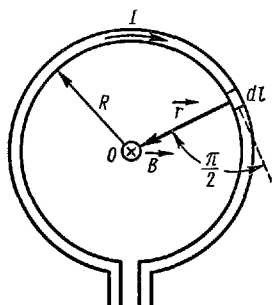


Рис. 15.5

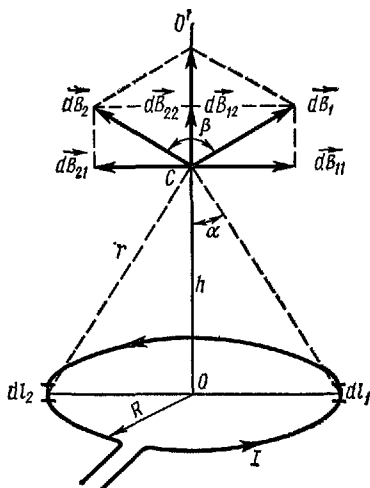


Рис. 15.6

кости чертежа (рис. 15.6). Векторы магнитной индукции

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]$$

поля, создаваемого в точке C , лежащей на оси OO' , различными участками витка с током, не совпадают по направлению. Из написанной выше формулы и рис. 15.6 видно, что векторы $d\mathbf{B}$ расположены по образующим конуса с вершиной в точке C , осью OO' и углом β при вершине, равным $2[(\pi/2) - \alpha]$. Все векторы $d\mathbf{B}$ для равных по длине элементов dl витка численно равны между собой:

$$dB = dB_1 = dB_2 = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin(d\hat{l}, \hat{r})}{r^2}.$$

Из чертежа видно, что $r^2 = R^2 + h^2$ и $\sin(\widehat{dl, r}) = 1$, так как векторы dl и r перпендикулярны друг другу. Поэтому

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2 + h^2}. \quad (15.26)$$

Рассмотрим векторы индукции $d\mathbf{B}_1$ и $d\mathbf{B}_2$ магнитных полей, создаваемых в точке C двумя равными по длине, но диаметрально противоположными элементами dl_1 и dl_2 кругового витка ($dl_1 = dl_2 = dl$). Разложим каждый из этих векторов на две составляющие: перпендикулярную оси OO' ($d\mathbf{B}_{11}$ и $d\mathbf{B}_{21}$) и направленную вдоль оси OO' ($d\mathbf{B}_{12}$ и $d\mathbf{B}_{22}$). Векторы $d\mathbf{B}_1$ и $d\mathbf{B}_2$ составляют с осью OO' одинаковые углы, равные $\beta/2$. Так как модули этих векторов также равны друг другу, то

$$d\mathbf{B}_{11} = -d\mathbf{B}_{21}; \quad d\mathbf{B}_{12} = d\mathbf{B}_{22}, \quad \text{причем } dB_{12} = dB_{22} = dB \sin \alpha.$$

Сумма векторов $d\mathbf{B}_1$ и $d\mathbf{B}_2$ равна

$$d\mathbf{B}_1 + d\mathbf{B}_2 = d\mathbf{B}_{12} + d\mathbf{B}_{22},$$

т. е. представляет вектор, направленный вдоль оси витка. Поэтому индукция \mathbf{B} магнитного поля кругового витка в точке C также направлена вдоль оси OO' и численно равна

$$B = \int dB \sin \alpha. \quad (15.27)$$

Из рис. 15.6 видно, что $\sin \alpha = (R/r) = R/\sqrt{R^2 + h^2}$. Подставив это выражение в (15.27) и заменив dB по формуле (15.26), получим

$$B = \int \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + h^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi r} dl;$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (15.28)$$

3. Площадь, охватываемая круговым витком, $S = \pi R^2$. Поэтому магнитная индукция в произвольной точке C оси кругового витка с током

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (15.29)$$

Произведение тока I в витке на площадь S этого витка называют магнитным моментом p_m витка с током:

$$p_m = IS. \quad (15.30)$$

Магнитный момент — векторная величина, направленная вдоль оси витка с током в ту же сторону, что и индукция \mathbf{B} его магнитного поля. Из конца вектора p_m ток в витке виден идущим против часовой стрелки (рис. 15.7).

Введем магнитный момент витка с током в

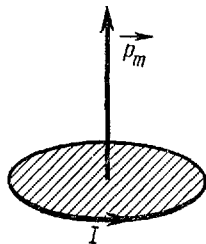


Рис. 15.7

уравнение (15.29) и запишем его в векторной форме:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (15.31)$$

Тогда напряженность магнитного поля в точке C

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{2p_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (15.32)$$

Если точка C лежит далеко от центра кругового тока, т.е. $h \gg R$, то величиной R в знаменателе правой части (15.32) можно пренебречь:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{2p_m}{h^3}. \quad (15.33)$$

Формула (15.33) по виду аналогична выражению для электрического смещения \mathbf{D} в точках поля, лежащих на оси электрического диполя достаточно далеко от него [см. (2.10) и (2.19)¹]. Поэтому магнитное поле кольцевого тока часто рассматривают как магнитное поле некоторого условного «магнитного диполя», причем положительным или северным полюсом называют ту сторону плоскости витка, из которой линии магнитной индукции выходят, а отрицательным или южным магнитным полюсом — ту сторону плоскости витка, в которую они входят.

4. Введенное выше понятие о магнитном моменте кругового тока можно распространить также и на контур тока, имеющий произвольную форму:

$$p_m = I \int_{\xi} \mathbf{n} dS, \quad (15.30')$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к элементарному участку dS поверхности S , ограниченной контуром, I — сила тока в контуре. Очевидно, что в случае плоского контура поверхность S тоже плоская и все векторы \mathbf{n} одинаково направлены (из конца вектора \mathbf{n} ток в контуре должен быть виден идущим против часовой стрелки). Поэтому

$$p_m = I S n \text{ и } p_m = IS. \quad (15.30'')$$

В гл. XVII показано, что вектор p_m определяет взаимодействие между контуром тока и внешним магнитным полем.

§ 15.5. Магнитное поле соленоида

1. Соленоидом называется цилиндрическая катушка, состоящая из большого числа намотанных вплотную друг к другу витков проводника, по которому идет ток. Соленоид можно рассматривать как систему последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось. Магнитное поле тока, текущего по соленоиду, изображено на рис. 14.4, г.

¹ Можно показать, что выражения для \mathbf{H} кругового витка и \mathbf{D} электрического диполя имеют аналогичный вид не только в точках, лежащих соответственно на оси витка и оси диполя, но и во всех других точках.

2. На рис. 15.8 показано сечение соленоида длиной L с током I . Кружки с точками представляют собой сечения витков радиуса R , в которых ток направлен из-за чертежа к нам, а кружки с крестами —

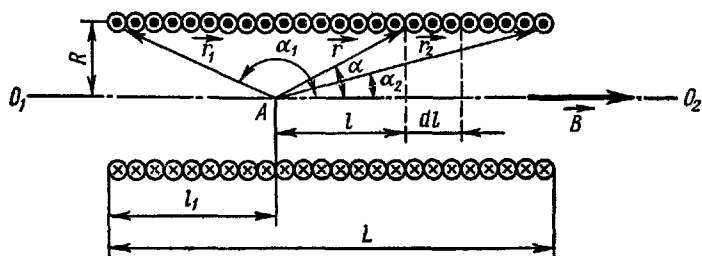


Рис. 15.8

сечения витков, в которых ток направлен за чертеж; n — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида

Очевидно, что магнитная индукция \mathbf{B} в любой точке A , лежащей на оси O_1O_2 соленоида, направлена вдоль оси по правилу буравчика и численно равна алгебраической сумме индукций магнитных полей, создаваемых в точке A всеми витками

Проведем из точки A к какому-либо витку радиус-вектор r , образующий с осью O_1O_2 угол α . Индукция B_1 магнитного поля витка с током в точке A численно равна [см. (15.28)]

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + l^2)^{3/2}}.$$

На малый участок длины соленоида dl приходится ndl витков, создающих в точке A магнитное поле, индукция которого численно равна

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + l^2)^{3/2}} ndl \quad (15.34)$$

Выразим переменные величины dl и $\sqrt{R^2 + l^2} = r$ через одну независимую переменную — угол α . Как видно из рис. 15.8, расстояние $l = R \operatorname{ctg} \alpha$, откуда

$$dl = - \frac{R dx}{\sin^2 \alpha}. \quad (15.35)$$

Длина радиуса-вектора r равна

$$r = \sqrt{R^2 + l^2} = R/\sin \alpha. \quad (15.36)$$

Подставим в уравнение (15.34) выражения для dl и $(R^2 + l^2)^{3/2}$ из (15.35) и (15.36). После сокращения получим

$$dB = - (1/2) \mu\mu_0 n I \sin \alpha d\alpha. \quad (15.37)$$

Для нахождения числового значения магнитной индукции в точке A поля соленоида с током необходимо проинтегрировать выражение (15.37) по всем значениям α . Пусть углы, которые образуют с осью соленоида радиусы-векторы r_1 и r_2 , проведенные к крайним виткам соленоида, равны α_1 и α_2 (рис. 15.8).

Тогда

$$B = - (1/2) \mu \mu_0 n I \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha$$

3. Магнитная индукция \mathbf{B} в произвольной точке A оси соленоида численно равна

$$B = (1/2) \mu \mu_0 n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \text{ где } \alpha_2 < \alpha_1. \quad (15.38)$$

Напряженность \mathbf{H} магнитного поля в точке A численно равна

$$H = \frac{B}{\mu \mu_0} = \frac{nI}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (15.38')$$

Из рис. 15.8 видно, что

$$\cos \alpha_1 = - \frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{L - l_1}{\sqrt{R^2 + (L - l_1)^2}}. \quad (15.39)$$

Из уравнений (15.38) и (15.39) следует, что числовое значение магнитной индукции в точке A , лежащей на оси соленоида, зависит от относительной магнитной проницаемости μ среды, заполняющей соленоид, густоты обмотки n , силы тока I в соленоиде, длины соленоида L и радиуса R витков, а также от положения точки A по отношению к его концам.

Можно доказать, что при прочих равных условиях индукция B наибольшая в точке, лежащей на середине оси соленоида, причем

$$B_{\text{макс}} = \mu \mu_0 n I L / \sqrt{4R^2 + L^2}. \quad (15.40)$$

4. Если длина соленоида во много раз больше радиуса его витков ($L \gg R$), то соленоид можно считать бесконечно длинным. Для точек оси такого соленоида, расположенных достаточно далеко от его концов, $\alpha_1 = \pi$ и $\alpha_2 = 0$. Следовательно, по формуле (15.38) магнитная индукция внутри бесконечно длинного соленоида на его оси численно равна

$$B = \mu \mu_0 n I, \quad (15.41)$$

а напряженность магнитного поля

$$H = (B/\mu \mu_0) = nI. \quad (15.42)$$

В § 16.1 показано, что магнитное поле внутри такого соленоида однородно. Поэтому формула (15.41) справедлива для магнитной индукции во всех точках, находящихся внутри соленоида.

Если точка A находится на одном из концов длинного соленоида, то, как видно из рис. 15.8, либо $\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = 0$, либо $\alpha_1 = \pi$ и $\alpha_2 = \pi/2$. Поэтому индукция и напряженность магнитного поля в точках оси длинного соленоида, совпадающих с его концами, равны:

$$B = \mu \mu_0 n I / 2 \quad \text{и} \quad H = nI / 2.$$

5. Магнитный момент \mathbf{p}_m соленоида равен геометрической сумме магнитных моментов всех его витков. Ток во всех витках одинаков,

их площади равны, а оси совпадают с осью соленоида. Поэтому магнитный момент p_m соленоида направлен вдоль его оси и численно равен

$$p_m = nLS, \quad (15.43)$$

где S — площадь витка, nL — общее число витков.

§ 15.6. Магнитное поле движущегося электрического заряда

1. В § 14.1 были приведены опыты (например, опыт А. Ф. Иоффе), неопровержимо доказывающие существование магнитного поля вокруг движущихся электрических зарядов. Закон Био — Савара — Лапласа позволяет найти выражения для индукции и напряженности этого магнитного поля.

Запишем закон Био — Савара — Лапласа в виде (15.5):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}], \quad \text{или} \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]. \quad (15.44)$$

Сила постоянного тока в однородном проводнике связана с плотностью j тока соотношением (8.5) $I = jS$, где S — площадь поперечного сечения проводника. Поэтому

$$I d\mathbf{l} = S d\mathbf{l} j \quad (15.45)$$

Предположим ради простоты, что ток в проводнике связан с упорядоченным движением одинаковых частиц-носителей заряда (например, электронов проводимости). Пусть q — заряд одной частицы, n_0 — их концентрация в проводнике, а \mathbf{v} — одинаковая для всех частиц скорость их упорядоченного движения. В таком случае вектор плотности тока

$$\mathbf{j} = qn_0\mathbf{v}. \quad (15.46)$$

Следует заметить, что в формулу (15.46) необходимо подставлять алгебраическое значение заряда q , так как согласно определению вектор плотности \mathbf{j} тока совпадает по направлению с движением положительных зарядов.

Подставив значение для \mathbf{j} из (15.46) в (15.45), получим

$$I d\mathbf{l} = qS d\mathbf{l} n_0 \mathbf{v}.$$

Произведение $S d\mathbf{l} n_0$ представляет собой полное число dn заряженных частиц, находящихся в объеме участка проводника длиной $d\mathbf{l}$: $S d\mathbf{l} n_0 = dn$, поэтому

$$I d\mathbf{l} = qv dn. \quad (15.45')$$

Подставим выражение для $I d\mathbf{l}$ в формулу (15.44):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qdn}{r^3} [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]. \quad (15.47)$$

Все dn зарядов упорядоченно движутся в одном направлении и с одинаковой скоростью. Поэтому индукция \mathbf{B}_q магнитного поля, создаваемого каждым из этих зарядов в отдельности, меньше индукции $d\mathbf{B}$ результирующего поля в dn раз:

$$\mathbf{B}_q = \frac{d\mathbf{B}}{dn} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^3} [\mathbf{v}\mathbf{r}]. \quad (15.48)$$

Напряженность магнитного поля заряда q , движущегося со скоростью \mathbf{v} ,

$$\mathbf{H}_q = \frac{\mathbf{B}_q}{\mu\mu_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^3} [\mathbf{v}\mathbf{r}]. \quad (15.49)$$

2. В системах СГСМ и Гаусса формулы для \mathbf{B}_q и \mathbf{H}_q имеют следующий вид:

$$\mathbf{B}_q = \mu \frac{q}{r^3} [\mathbf{v}\mathbf{r}] \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_q = \frac{q}{r^3} [\mathbf{v}\mathbf{r}] \quad (\text{СГСМ});$$

$$\mathbf{B}_q = \frac{\mu}{c} \frac{q}{r^3} [\mathbf{v}\mathbf{r}] \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_q = \frac{1}{c} \frac{q}{r^3} [\mathbf{v}\mathbf{r}] \quad (\text{система Гаусса}),$$

где c — электродинамическая постоянная.

3. Выражения (15.48) и (15.49) для индукции и напряженности магнитного поля движущегося заряда были получены выше исходя из рассмотрения частного случая движения заряженных частиц — упорядоченного движения носителей заряда в проводнике. Именно поэтому в формулах (15.48) и (15.49) \mathbf{v} — скорость упорядоченного движения заряженной частицы. Однако в действительности формулы (15.48) и (15.49) пригодны для магнитного поля заряженной частицы, движущейся произвольным образом со скоростью \mathbf{v} . Например, если ток в проводнике отсутствует, то скорость упорядоченного движения носителей заряда равна нулю. Между тем каждая из этих частиц совершает тепловое движение и создает свое магнитное поле, индукция которого рассчитывается по формуле (15.48), где \mathbf{v} — скорость рассматриваемой частицы. Основываясь на выражении (15.48), можно показать, что в силу полной хаотичности теплового движения индукция результирующего магнитного поля всех носителей заряда, имеющих в проводнике, должна быть всюду равна нулю.

4. Из формул (15.48) и (15.49) следует, что индукция \mathbf{B}_q и напряженность \mathbf{H}_q магнитного поля движущегося заряда в произвольной точке A направлены перпендикулярно плоскости, проведенной через вектор \mathbf{v} скорости заряда q и радиус-вектор \mathbf{r} . Если $q > 0$, то из кон-

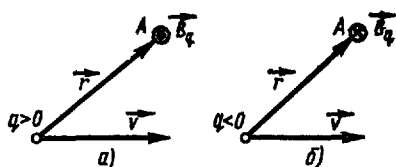


Рис. 15.9

¹ Предполагается, что скорость заряда во много раз меньше скорости света в вакууме.

цов векторов \mathbf{B}_q и \mathbf{H}_q вращение от \mathbf{v} к \mathbf{r} по кратчайшему пути видно происходящим против часовой стрелки (рис. 15.9, а). Если $q < 0$, то векторы \mathbf{B}_q и \mathbf{H}_q направлены в противоположную сторону (рис. 15.9, б).

Магнитное поле движущегося заряда в каждой точке пространства зависит от времени, так как в процессе движения заряда изменяются числовое значение и направление радиуса-вектора \mathbf{r} .

Магнитная индукция в точке A поля движущегося заряда численно равна

$$B_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{r}})}{r^2}. \quad (15.50)$$

Из формулы (15.50) следует, что индукция B_q в любой точке магнитного поля движущегося заряда пропорциональна величине заряда, его скорости и относительной магнитной проницаемости среды и обратно пропорциональна квадрату расстояния данной точки поля от заряда. Индукция B_q зависит от угла между векторами \mathbf{v} и \mathbf{r} . При прочих равных условиях она максимальна в точках плоскости, проведенной через заряд перпендикулярно вектору его скорости \mathbf{v} . Во всех точках поля, лежащих на прямой, совпадающей с вектором \mathbf{v} , магнитная индукция равна нулю.

Таким образом, магнитное поле движущегося заряда не является симметричным в отличие от электростатического поля неподвижного точечного заряда, которое обладает центральной симметрией.

Вопросы для повторения

1. В чем состоит закон Био—Савара—Лапласа?
2. Найдите выражение для силы взаимодействия между двумя длинными параллельными проводниками с током и, пользуясь им, поясните физический смысл относительной магнитной проницаемости среды
3. Какая величина называется электродинамической постоянной и чему она равна?
4. Чему равен и как направлен магнитный момент плоского контура с током?
5. От каких величин зависит магнитная индукция в точке, лежащей на оси бесконечно длинного соленоида?
6. Охарактеризуйте магнитное поле движущегося заряда.

Примеры решения задач

Задача 15.1. По проводу, согнутому в виде равнобедренного треугольника со стороной, равной 50 см, проходит постоянный ток силой 3,14 А. Чему равна напряженность магнитного поля в центре треугольника?

Дано:
 $I = 3,14 \text{ А}$
 $l = 0,5 \text{ м}$
 $H = ?$

Решение. Напряженность \mathbf{H} магнитного поля треугольника с током равна векторной сумме напряженностей магнитных полей, создаваемых всеми его сторонами:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3.$$

В центре O треугольника (рис. 15.10) все эти векторы направлены из-за черт перпендикулярно его плоскости. Кроме того, из условия симметрии оче-

видно, что $H_1 = H_2 = H_3$. Следовательно, $H = 3H_1$ и $H = 3H_1$. По формуле (15.15) имеем

$$H_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{l}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2); \quad H = \frac{3}{4\pi} \frac{l}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

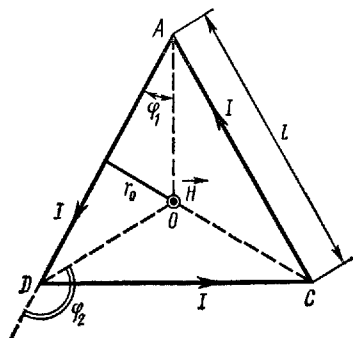


Рис. 15.10

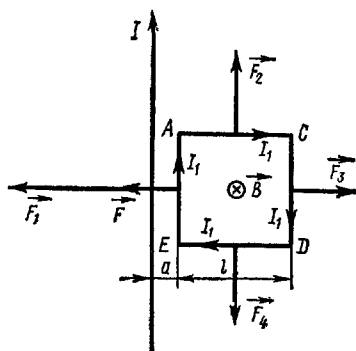


Рис. 15.11

Из рис. 15.10 видно, что $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ и $r_0 = (l/2) \operatorname{tg} \varphi_1$, где l — длина стороны треугольника. Поэтому

$$H = \frac{3l}{2\pi l} \frac{\cos \varphi_1 - \cos(\pi - \varphi_1)}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{3l \cos^2 \varphi_1}{\pi l \sin \varphi_1}.$$

Так как $\varphi_1 = \pi/6$, то $\sin \varphi_1 = 1/2$, $\cos \varphi_1 = \sqrt{3}/2$ и

$$H = 9I/2\pi l.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$H = \frac{9I}{2\pi l} = \frac{9 \cdot 3,14}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,5} \frac{\text{А}}{\text{м}} = 9 \text{ А/м}.$$

Задача 15.2. С какой силой действует постоянный ток силой 10 А, проходящий по прямолинейному бесконечно длинному проводнику, на контур из провода, изогнутого в форме квадрата? Проводник расположен в плоскости контура параллельно двум его сторонам. Длина стороны контура 40 см, сила тока в нем 2,5 А. Направления токов указаны на рис. 15.11. Расстояние от прямолинейного тока до ближайшей стороны контура равно 2 см.

Дано:

$$I = 10 \text{ А}$$

$$I_1 = 2,5 \text{ А}$$

$$\mu = 1$$

$$l = 0,4 \text{ м}$$

$$a = 0,02 \text{ м}$$

$$F = ?$$

Решение. Во всех точках контура $ACDE$ векторы \mathbf{B} индукции магнитного поля прямолинейного тока I направлены перпендикулярно плоскости контура (за чертеж при выбранных на рис. 15.11 направлениях тока I и взаимном расположении прямолинейного проводника и контура). Стороны контура AC и DE одинаково расположены по отношению к прямолинейному проводнику с током I , однако направления тока I_1 в них прямо противоположны. Поэтому силы \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_4 , действующие со стороны магнитного поля

тока I на участки AC и DE контура с током I_1 , численно равны и противоположны по направлению:

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_4, \text{ так что } \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_4 = 0.$$

Таким образом, результирующая сила F , действующая на контур, равна векторной сумме сил F_1 и F_3 , приложенных к сторонам контура EA и CD :

$$F = F_1 + F_3.$$

Силы F_1 и F_3 направлены в противоположные стороны и по формуле (15.19') численно равны:

$$F_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{a} l, \quad F_3 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{a+l} l.$$

Результирующая сила F направлена в ту же сторону, что и сила F_1 , и численно равна

$$F = F_1 - F_3 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} 2I_1 l \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{II_1 l^2}{a(a+l)}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{II_1 l^2}{a(a+l)} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 2,5 \cdot 0,4^2}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,02 \cdot 0,42} \text{ Н} = 9,52 \cdot 10^{-5} \text{ Н} = 95,2 \text{ мкН}.$$

Задача 15.3. Тонкий диск, радиус которого 25 см, сделан из диэлектрика и равномерно заряжен по поверхности. Заряд диска 5 Кл. Диск вращается в воздухе вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, с постоянной угловой скоростью, делая 5 оборотов за секунду. Определить магнитную индукцию в центре диска.

Дано:

$$R = 0,25 \text{ м}$$

$$q = 5 \text{ Кл}$$

$$n = 5 \text{ об/с}$$

$$\mu = 1$$

$$B = ?$$

Решение. Вращающийся заряженный диск эквивалентен бесконечно большому числу бесконечно малых концентрических кольцевых токов. Магнитные поля в общем центре кольцевых токов направлены в одну и ту же сторону перпендикулярно плоскости диска. По формуле (15.25) магнитная индукция dB в центре кольцевого тока dl , радиус которого r , равна

$$dB = \mu\mu_0 \frac{dl}{2r}. \quad (a)$$

Поверхностная плотность заряда q диска равна $\sigma = q/2\pi R^2$. Поэтому заряд dq , находящийся на поверхностях бесконечно тонкого кольца, ограниченного цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$, выразится формулой

$$dq = 2\sigma \cdot 2\pi r dr = \frac{2q}{R^2} r dr.$$

Сила тока, соответствующая n оборотам этого кольца за секунду,

$$dl = \frac{2q}{R^2} n r dr.$$

Подставив в (a) выражение dl и проинтегрировав по r от 0 до R , получим

$$B = \frac{\mu\mu_0 q n}{R^2} \int_0^R dr = \frac{\mu\mu_0 q n}{R}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$B = \frac{\mu\mu_0 q n}{R} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 5}{0,25} \text{ Т} = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ Т} = 0,126 \text{ мТ}.$$

Глава XVI

ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА. РАСЧЕТ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

§ 16.1. Закон полного тока

1. В § 3.1 было показано, что циркуляция напряженности \mathbf{E} электростатического поля вдоль любого замкнутого контура L равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0. \quad (16.1)$$

Это соотношение свидетельствует о том, что электростатическое поле является потенциальным.

2. Магнитное поле в отличие от электростатического — непотенциальное поле: циркуляция вектора \mathbf{B} магнитной индукции поля вдоль замкнутого контура, вообще говоря, не равна нулю и зависит от выбора контура. Такое поле в векторном анализе называют **вихревым полем**.

Рассмотрим в качестве примера магнитное поле бесконечного прямолинейного проводника с током I , находящегося в вакууме (рис. 16.1). Линии магнитной индукции этого поля представляют собой окружности, плоскости которых перпендикулярны проводнику, а центры лежат на его оси. На рис. 16.1 эти линии изображены пунктиром. Найдем циркуляцию вектора \mathbf{B} вдоль произвольной линии магнитной индукции — окружности радиуса r :

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_L B dl \cos(\widehat{\mathbf{B}}, d\mathbf{l}). \quad (16.2)$$

Во всех точках линии индукции вектор \mathbf{B} численно равен

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} \quad (16.3)$$

и направлен по касательной к этой линии, так что $\cos(\widehat{\mathbf{B}}, d\mathbf{l}) = 1$. Следовательно,

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I. \quad (16.4)$$

Из (16.4) можно сделать два вывода:

а) магнитное поле прямолинейного тока — вихревое поле, так как в нем циркуляция вектора \mathbf{B} вдоль линии магнитной индукции не равна нулю;

б) циркуляция вектора \mathbf{B} магнитной индукции поля прямолинейного тока в вакууме одинакова вдоль всех линий магнитной индукции и равна произведению магнитной постоянной на силу тока.

3. Покажем, что формула (16.4) справедлива для замкнутого контура L произвольной формы, охватывающего бесконечно длинный прямолинейный проводник с током I (рис. 16.2). В точке A

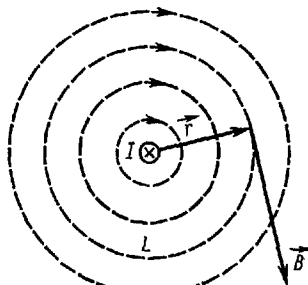


Рис 16.1

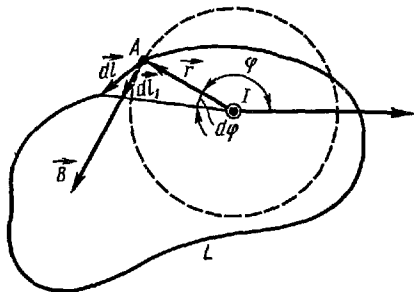


Рис 16.2

контура L вектор \mathbf{B} магнитной индукции поля этого тока перпендикулярен радиусу-вектору \mathbf{r} . Из рис. 16.2 видно, что

$$B dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = B dl_1, \quad (16.5)$$

где $dl_1 = dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}})$ — длина проекции вектора $d\mathbf{l}$ на направление вектора \mathbf{B} . В то же время малый отрезок dl_1 касательной к окружности радиуса r можно заменить дугой окружности: $dl_1 = r d\varphi$, где $d\varphi$ — центральный угол, под которым виден элемент $d\mathbf{l}$ контура L из центра окружности. Подставляя это значение dl_1 в (16.5) и заменяя B по формуле (16.3), получаем

$$B dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi \quad (16.6)$$

Интегрируя вдоль всего замкнутого контура L и учитывая, что при этом угол φ изменяется от нуля до 2π , находим

$$\oint B dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad \text{или} \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Таким образом, нами доказано, что формула (16.4) справедлива для любого замкнутого контура, охватывающего проводник, независимо от формы этого контура.

4. В предыдущих выводах предполагалось, что направление обхода контура L при вычислении циркуляции вектора \mathbf{B} согласовано с направлением тока в проводнике по правилу буравчика. Это значит, что для наблюдателя, смотрящего навстречу вектору \mathbf{j} плотности тока в проводнике, обход контура L виден происходящим против часовой стрелки (рис. 16.2). При противоположном направлении обхода контура вместо (16.4) получается

$$\oint_L \mathbf{B} dl = -\mu_0 I. \quad (16.4')$$

Если в этом случае ток I считать отрицательным, то формула (16.4') эквивалентна (16.4). Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться только формулой (16.4), полагая в ней $I > 0$, если направление тока в проводнике соответствует (по правилу буравчика) направлению обхода контура, и считая $I < 0$ в противном случае.

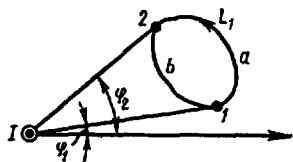


Рис. 16.3

5. Предположим теперь, что замкнутый контур L_1 не охватывает проводника с током (рис. 16.3). Тогда

$$\oint_{L_1} \mathbf{B} dl = \int_{1a2} \mathbf{B} dl + \int_{2b1} \mathbf{B} dl,$$

где $1a2$ и $2b1$ — участки контура L_1 . Заменяя подынтегральные выражения по формуле (16.6), получим

$$\oint_{L_1} \mathbf{B} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi \right) = 0. \quad (16.7)$$

Итак, циркуляция вектора магнитной индукции поля прямолинейного проводника с током вдоль замкнутого контура, не охватывающего этого проводника, равна нулю.

6. Можно доказать, что соотношения (16.4) и (16.7) для магнитного поля в вакууме универсальны. Они справедливы для магнитного поля проводника с током любой формы и любых размеров, а не только для поля бесконечного прямолинейного проводника с током

В общем случае магнитное поле может создавать целая система из n' проводников с током $I_1, I_2, \dots, I_{n'}$. Обозначим \mathbf{B}_i индукцию магнитного поля в вакууме одного i -го проводника с током I_i . Индукция результирующего магнитного поля согласно принципу суперпозиции

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n'} \mathbf{B}_i.$$

Циркуляция вектора \mathbf{B} вдоль произвольного замкнутого контура L , проведенного в поле, равна

$$\oint_L \mathbf{B} dl = \oint_L \left(\sum_{i=1}^{n'} \mathbf{B}_i \right) dl = \oint_L \sum_{i=1}^{n'} (\mathbf{B}_i dl) = \sum_{i=1}^{n'} \oint_L \mathbf{B}_i dl.$$

В соответствии с (16.4) и (16.7) получим

$$\oint_L \mathbf{B}_i dl = \begin{cases} \mu_0 I_i, & \text{если контур } L \text{ охватывает ток } I_i, \\ 0, & \text{если контур } L \text{ не охватывает тока } I_i. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (16.8)$$

где n — число проводников с током, охватываемых контуром L ($n \leq n'$), а индекс суммирования i заменен на k для того, чтобы подчеркнуть, что в сумму, стоящую в (16.8), входят только те токи, которые охватываются контуром L . Уравнение (16.8) является математическим выражением закона полного тока для магнитного поля в вакууме: циркуляция вдоль замкнутого контура вектора индукции магнитного поля в вакууме равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром.

7. Так как напряженность \mathbf{H} магнитного поля в вакууме связана с магнитной индукцией \mathbf{B} соотношением $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, то с учетом (16.8) закон полного тока можно также записать в форме

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (16.9)$$

В гл. XX показано, что закон полного тока в виде (16.9) справедлив для магнитного поля не только в вакууме, но и в произвольной среде.

Алгебраическая сумма токов I_k , охватываемых замкнутым контуром L , есть не что иное, как результирующая сила тока проводимости сквозь поверхность S , натянутую на контур L . Поэтому, используя формулу (8.4), можно написать:

$$\sum_{k=1}^n I_k = \int_S \mathbf{j} dS,$$

где \mathbf{j} — плотность тока проводимости в пределах малого элемента dS поверхности, натянутой на контур L . Подставив это выражение в (16.9), получим

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{j} dS. \quad (16.9')$$

8. Закон полного тока (16.9) имеет такое же важное значение для расчета магнитных полей постоянного электрического тока, как и теорема Остроградского—Гаусса для расчета электростатических полей.

В качестве примера применим закон полного тока к расчету магнитного поля тороида. Тороидом называется кольцевая катушка, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. 16.4). На рис. 16.5 показано сечение тороида плоскостью, проходящей через его осевую линию $ABCA$. Обозначим через R_1 и R_2 соответственно внешний и внутренний радиусы сечения тороида (размерами поперечного сечения провода, из которого сделана обмотка, пренебрегаем). Из условия симметрии следует, что линии индукции магнитного поля тороида должны иметь форму окружностей, центры которых лежат на прямой, проходящей через центр тороида O и перпендикулярной плос-

кости чертежа¹. Очевидно также, что во всех точках одной и той же силовой линии числовые значения напряженности H магнитного по-

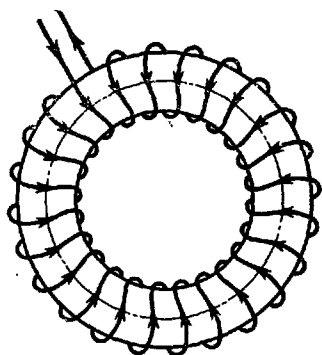


Рис. 16.4

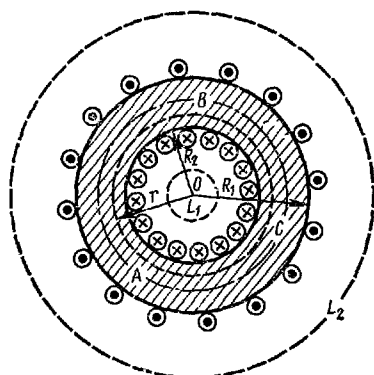


Рис. 16.5

ля должны быть одинаковыми. Поэтому циркуляция вектора \mathbf{H} вдоль окружности радиуса r равна

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = H \int_0^{2\pi} dl = 2\pi Hr. \quad (16.10)$$

Пусть обмотка тороида имеет N витков, а ток в ней I . Если $r < R_2$, то окружность L_1 радиуса r не охватывает проводников с током, так что $\sum_{k=1}^n I_k = 0$ и, по закону полного тока (16.9),

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = 2\pi Hr = 0, \text{ т. е. } H = 0.$$

Если $r > R_1$, то окружность L_2 радиуса r охватывает $2N$ проводников с током I . Однако, как видно из рис. 16.5, в N из них ток I идет в одном направлении, а в остальных N проводниках — в обратном направлении. Поэтому алгебраическая сумма токов во всех проводниках равна нулю, а из закона полного тока (16.9) следует:

$$2\pi Hr = 0, \text{ или } H = 0.$$

Следовательно, вне тороида магнитного поля нет. Оно целиком локализовано внутри объема тороида ($R_2 < r < R_1$). Окружность радиуса r , лежащая внутри тороида, охватывает N проводников, токи в которых равны I и одинаково направлены. Поэтому

¹ Это верно только в случае идеального тороида, обмотка которого состоит из бесконечно большого числа витков исчезающе тонкой проволоки, вплотную прилегающих друг к другу.

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^n I_k = NI. \quad (16.11)$$

Из формул (16.10) и (16.11) следует, что напряженность магнитного поля внутри тороида

$$H = NI/2\pi r. \quad (16.12)$$

Таким образом, напряженность поля внутри тороида уменьшается по мере удаления от его центра O :

$$H_{\text{макс}} = \frac{NI}{2\pi R_2} \quad \text{и} \quad H_{\text{мин}} = \frac{NI}{2\pi R_1} = \frac{NI}{2\pi(R_2 + d)}.$$

Здесь d — диаметр витков обмотки.

Напряженность магнитного поля на осевой линии тороида $|r = R_{\text{ср}} = (R_1 + R_2)/2|$ равна

$$H_{\text{ср}} = \frac{NI}{2\pi R_{\text{ср}}} = nl,$$

где n — число витков на единицу длины средней линии тороида.

Если неограниченно увеличивать средний радиус тороида, сохраняя неизменными диаметр d и плотность n витков его обмотки, то неоднородность поля внутри тороида будет уменьшаться. В пределе вместо тороида получим бесконечно длинный соленоид. Поле внутри такого соленоида однородно, так как векторы \mathbf{H} направлены параллельно оси соленоида и численно равны друг другу.

Магнитная индукция внутри тороида численно равна

$$B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 NI/2\pi r, \quad (16.12')$$

где μ — относительная магнитная проницаемость сердечника тороида.

§ 16.2. Магнитный поток

1. **Потоком вектора магнитной индукции или магнитным потоком** сквозь малую площадку dS называется физическая величина, равная произведению этой площадки и проекции B_n вектора \mathbf{B} на направление нормали \mathbf{n} к площадке dS :

$$d\Phi_m = B_n dS = B dS \cos(\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{n}}) = B dS, \quad (16.13)$$

где $dS = n dS$ — вектор площадки dS . Интегрируя это выражение по S , получим

$$\Phi_m = \int_S B_n dS = \int_S B dS, \quad (16.14)$$

где Φ_m — магнитный поток сквозь произвольную поверхность S .

При вычислении этого интеграла векторы \mathbf{n} нормалей к площадкам dS нужно направлять в одну и ту же сторону по отношению к по-

верхности S . Например, если S — замкнутая поверхность, то векторы \mathbf{n} должны быть либо все внешними, либо все внутренними.

Если поле однородное, а поверхность S плоская и расположена перпендикулярно полю, то $B_n = B = \text{const}$ и

$$\Phi_m = BS. \quad (16.14')$$

В дальнейшем мы увидим, что магнитный поток играет важную роль в явлениях, связанных с взаимодействием между магнитными полями и проводниками с током, в явлении электромагнитной индукции и т. д. Поэтому магнитный поток является одной из основных величин, применяемых в электромагнетизме.

2. Из формулы (16.14') следует, что за единицу магнитного потока принимается магнитный поток сквозь плоскую поверхность единичной площади, расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна единице.

Единица магнитного потока в СИ называется **вебером** (Вб):

$$1 \text{ Вб} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \text{ В} \cdot \text{с},$$

а в системе СГСМ — **максвеллом** (Мкс):

$$1 \text{ Мкс} = 1 \text{ Гс} \cdot 1 \text{ см}^2.$$

Так как $1 \text{ Т} = 10^4 \text{ Гс}$, а $1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ см}^2$ (см. § 15.3), то

$$1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}.$$

3. В электродинамике доказывается следующая **теорема Остроградского — Гаусса для магнитного поля**: *магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю*:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_S B_n dS = 0. \quad (16.15)$$

Эта теорема является математическим следствием отсутствия в природе магнитных «зарядов», на которых могли бы начинаться и заканчиваться линии магнитной индукции. Согласно терминологии, принятой в векторном анализе, теорема Остроградского—Гаусса (16.15) свидетельствует о том, что магнитное поле представляет собой так называемое **соленоидальное поле**.

4. Доказательство теоремы Остроградского—Гаусса для магнитного поля выходит за рамки нашего курса.

Покажем ее справедливость на простом примере. Рассмотрим магнитное поле бесконечно длинного прямолинейного проводника с током I . В качестве замкнутой поверхности S возьмем поверхность прямого кругового цилиндра, радиус основания которого равен r , высота — h , а ось совпадает с осью проводника (рис. 16.6). Линии индукции магнитного

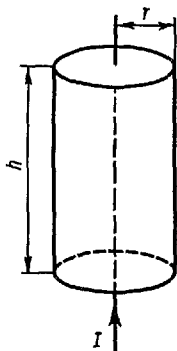


Рис. 16.6

поля прямолинейного тока представляют собой concentрические окружности, центры которых лежат на оси проводника, а плоскости перпендикулярны ему. Поэтому линии индукции не пересекают ни боковой поверхности цилиндра, ни его оснований. Следовательно, в любой точке поверхности цилиндра проекция вектора \mathbf{B} на направление нормали \mathbf{n} к поверхности равна нулю ($B_n = 0$) и

$$\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0.$$

§ 16.3. Законы магнитных цепей

1. В § 16.1 было показано, что магнитное поле тороида полностью заключено внутри его сердечника. Таким же свойством обладает магнитное поле бесконечно длинного соленоида. Совокупность областей пространства, в которых локализовано магнитное поле, называют **магнитной цепью**. Таким образом, внутренние полости тороида и бесконечно длинного соленоида представляют собой простейшие магнитные цепи. Для усиления магнитного поля применяют магнитные

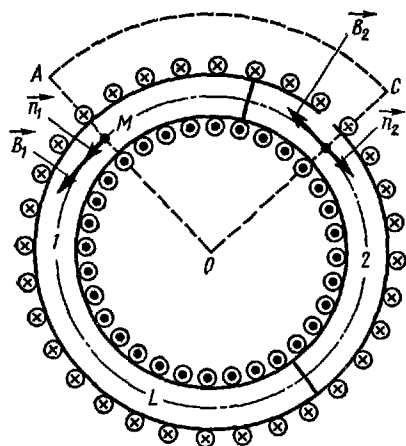


Рис. 16.7

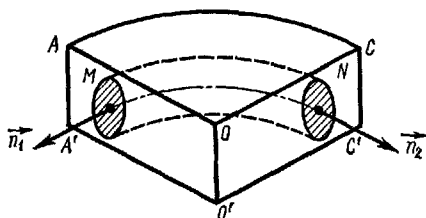


Рис. 16.8

цепи, изготовленные из материалов с большими значениями относительной магнитной проницаемости μ . Чаще всего используют железо. Источником возникновения магнитного поля в такой цепи является электрический ток в соленоидальных катушках, намотанных на всю цепь или на отдельные ее участки. Расчет магнитных цепей, составляющих необходимую часть всех электрических машин и большого числа электрических устройств (трансформаторов, электромагнитов и др.), представляет большой практический интерес.

Расчет магнитных цепей основывается на законе полного тока (16.9) и теореме Остроградского—Гаусса для магнитного поля (16.15), с помощью которых удается получить сравнительно простые соотношения, называемые **законами магнитных цепей**.

2. В качестве примера рассчитаем магнитное поле тороида, изображенного на рис. 16.7. Сердечник тороида с площадью поперечного

сечения состоит из двух частей 1 и 2, изготовленных из веществ с различными магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Для упрощения расчетов предположим, что радиус сечения S мал по сравнению с размером тороида, поэтому в пределах площадки S магнитное поле можно считать однородным. В противном случае сердечник пришлось бы разбить на отдельные кольца с достаточно малыми поперечными сечениями. Линии магнитной индукции в сердечнике представляют собой концентрические окружности, центры которых лежат на оси симметрии O тороида.

Проведем через ось O радиальные плоскости OA и OC , разрезающие тороид на две части (рис. 16.7). Построим цилиндрический сектор $AOC C'O'A'A$ (рис. 16.8), длину OO' которого вдоль оси симметрии тороида выберем так, чтобы часть тороида MN находилась внутри объема сектора. Пусть S' — поверхность цилиндрического сектора, тогда по теореме Остроградского—Гаусса (16.15) магнитный поток сквозь эту поверхность равен нулю:

$$\oint_{S'} B_n dS = 0. \quad (16.16)$$

Магнитное поле тороида локализовано внутри его сердечника. Поэтому во всех точках боковой поверхности $ACC'A'A$ и оснований AOC и $A'O'C'$ цилиндрического сектора индукция B магнитного поля равна нулю. Следовательно, и магнитный поток сквозь эти поверхности равен нулю.

По тем же соображениям магнитные потоки сквозь плоские поверхности $AOO'A'A$ и $COO'C'C$ равны потокам Φ_{m1} и Φ_{m2} соответственно сквозь сечения S_1 и S_2 сердечника тороида в точках M и N :

$$\Phi_{m1} = \int_{S_1} B_n dS, \quad \Phi_{m2} = \int_{S_2} B_n dS. \quad (16.17)$$

На основании сказанного уравнение (16.16) можно записать в форме

$$\Phi_{m1} + \Phi_{m2} = 0, \quad \text{или} \quad \Phi_{m1} = -\Phi_{m2}. \quad (16.18)$$

Из уравнения (16.18) следует, что абсолютное значение магнитного потока во всех сечениях магнитной цепи тороида одинаково. Как известно, сила тока в любом сечении неразветвленной цепи также одинакова. Поэтому, проводя аналогию между магнитной и электрической цепями, можно сказать, что магнитный поток играет в магнитной цепи такую же роль, какую в электрической цепи играет сила тока.

3. Вычислим интегралы, стоящие в формулах (16.17). Внешняя нормаль \mathbf{n}_1 (см. рис. 16.7) к плоскому сечению S_1 совпадает по направлению с вектором индукции \mathbf{B}_1 , а внешняя нормаль \mathbf{n}_2 к сечению S_2 противоположна вектору индукции \mathbf{B}_2 . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{m1} &= \int_{S_1} B_n dS = \int_{S_1} B_1 dS = B_1 S_1, \\ \Phi_{m2} &= \int_{S_2} B_n dS = - \int_{S_2} B_2 dS = -B_2 S_2 \end{aligned} \right\} \quad (16.17')$$

Подставив эти значения в (16.18) и учитывая, что $S_1 = S_2 = S$, получим $B_1 = B_2$. Следовательно, индукция магнитного поля тороида с составным сердечником во всех его сечениях одинакова. Поэтому в дальнейшем будем ее обозначать через B без индекса, а магнитный поток в сердечнике — через Φ_m :

$$\Phi_m = BS. \quad (16.19)$$

4. Для нахождения индукции B воспользуемся законом полного тока (16.9), причем в качестве замкнутого контура L возьмем осевую линию тороида (см. рис. 16.7), представляющую собой одну из линий магнитной индукции. Вектор напряженности \mathbf{H} направлен по касательной к контуру L во всех его точках, так что

$$H \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = H. \quad (16.20)$$

По формуле (15.7) напряженности H_1 и H_2 магнитного поля в первой и второй частях сердечника тороида равны:

$$H_1 = B/\mu_1\mu_0, \quad H_2 = B/\mu_2\mu_0. \quad (16.21)$$

Из (16.20) и (16.21) следует, что циркуляция вектора \mathbf{H} вдоль замкнутого контура L равна

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = \int_{l_1} H_1 dl + \int_{l_2} H_2 dl = H_1 l_1 + H_2 l_2,$$

где l_1 и l_2 — длины первой и второй частей магнитной цепи. С другой стороны, из закона полного тока (16.9) следует, что

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI, \quad (16.22)$$

где I — сила тока, N — число витков в обмотке тороида. Выразив H_1 и H_2 через B по формулам (16.21), получим

$$B \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0} + B \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0} = NI,$$

или

$$B = \frac{NI}{(l_1/\mu_1\mu_0) + (l_2/\mu_2\mu_0)}. \quad (16.23)$$

Подставляя значение B в (16.19), находим магнитный поток в сердечнике тороида:

$$\Phi_m = \frac{IN}{(l_1/\mu_1\mu_0 S) + (l_2/\mu_2\mu_0 S)}. \quad (16.24)$$

Выражение (16.24) по своей форме подобно закону Ома для замкнутой электрической цепи:

$$I = \mathcal{E}/R, \quad (16.25)$$

где \mathcal{E} — электродвижущая сила, R — электрическое сопротивление

цепи. Поэтому естественно ввести обозначения:

$$\mathcal{E}_m = IN, \quad R_m = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S} + \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S} \quad (16.26)$$

и назвать \mathcal{E}_m магнитодвижущей силой, а R_m — полным магнитным сопротивлением цепи. Тогда формула (16.24) принимает вид

$$\Phi_m = \mathcal{E}_m / R_m. \quad (16.27)$$

Это соотношение называется **формулой Голкинсона** для магнитной цепи.

5. Магнитное сопротивление R_m участка цепи длиной l с постоянной площадью поперечного сечения S и относительной магнитной проницаемостью μ принимается равным

$$R_m = l / \mu \mu_0 S. \quad (16.28)$$

Если площадь поперечного сечения S непостоянна, то

$$R_m = \int_0^l \frac{dl}{\mu \mu_0 S}. \quad (16.28')$$

Формула (16.28) подобна по своему виду формуле для электрического сопротивления цилиндрического проводника [см. (9.8')]:

$$R = l / \gamma S, \quad (16.29)$$

причем аналогом удельной электрической проводимости γ является абсолютная магнитная проницаемость $\mu \mu_0$.

6. Из формул (16.28) и (16.26) видно, что общее магнитное сопротивление R_m последовательно соединенных участков магнитной цепи, число которых n , равно сумме магнитных сопротивлений R_{mi} всех участков:

$$R_m = \sum_{i=1}^n R_{mi} \quad (16.30)$$

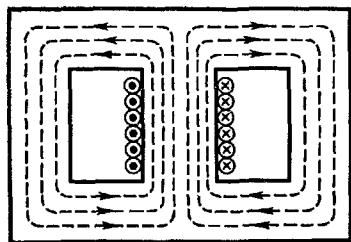


Рис. 16.9

Эта формула аналогична выражению для общего электрического сопротивления последовательно соединенных проводников.

7. Можно доказать, что для расчета разветвленных магнитных цепей (рис. 16.9) справедливы два **правила Кирхгофа**, которые по своей форме аналогичны правилам Кирхгофа для цепей постоянного электрического тока (см. § 9.4).

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма магнитных потоков в n участках цепи, сходящихся в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{mi} = 0. \quad (16.31)$$

Знак магнитного потока Φ_{mi} определяется направлением соответствующих ему линий индукции. Если линии индукции подходят к узлу, то поток Φ_{mi} считают положительным, а если линии индукции выходят из узла, то поток Φ_{mi} отрицателен.

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной магнитной цепи, алгебраическая сумма произведений магнитных потоков на магнитные сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме магнитодвижущих сил в этом контуре, т.е.

$$\sum_{i=1}^k \Phi_{mi} R_{mi} = \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_{mi}, \quad (16.32)$$

где k — число участков, составляющих замкнутый контур. Магнитные потоки Φ_{mi} и магнитодвижущие силы \mathcal{E}_{mi} считаются в этом уравнении положительными, если направление соответствующих им магнитных полей (линий индукции) совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура.

8. Из правил Кирхгофа вытекает, что магнитные потоки в двух параллельно включенных участках магнитной цепи, не содержащих магнитодвижущих сил, обратно пропорциональны их магнитным сопротивлениям:

$$\frac{\Phi_{m1}}{\Phi_{m2}} = \frac{R_{m2}}{R_{m1}}. \quad (16.33)$$

Общее магнитное сопротивление R_m участка цепи, состоящего из n параллельно включенных магнитных сопротивлений R_{mi} , равно

$$R_m = \frac{1}{\sum_{i=1}^n 1/R_{mi}}. \quad (16.34)$$

9. Рассмотренные законы магнитных цепей можно проиллюстрировать рядом опытов.

Опыт 1. Последовательное соединение магнитных сопротивлений.

Два одинаковых электромагнита с железными сердечниками A и C укрепим параллельно друг другу в деревянном каркасе D ($\mu \approx 1$), как показано на рис. 16.10. При пропускании тока через обмотки электромагнитов (на рис. 16.10 заштрихованы) сердечники A и C намагничиваются. Пусть направления токов в обмотках таковы, что в сердечнике A линии магнитной индукции идут сверху вниз, а в сердечнике C — снизу вверх. Верхние концы сердечников замкнем накоротко толстой железной пластиной E . Поднесем к нижним полюсам сердечников толстую железную пластину F с грузом P и подберем такую силу тока в обмотках электромагнитов, при которой пластина F прочно удерживается ими. Затем, сохраняя неизменной силу тока в обмотках, удалим верхнюю пластину E . При этом нижняя пластина F под действием груза P отрывается. Это явление легко объяснить, если учесть, что подъемная сила электромагнита зависит от значения магнитной ин-

дукции в сердечнике, т.е. от пропорциональной ей величины Φ_m магнитного потока. При постоянной силе тока в обмотках поток Φ_m в магнитной цепи электромагнитов, состоящей из четырех последовательно включенных магнитных сопротивлений R_{mA} , R_{mC} , R_{mE} и R_{mF} ,

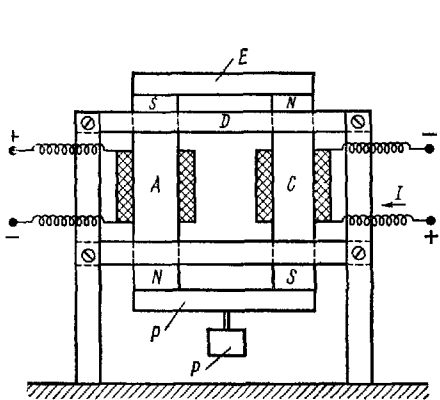


Рис. 16.10

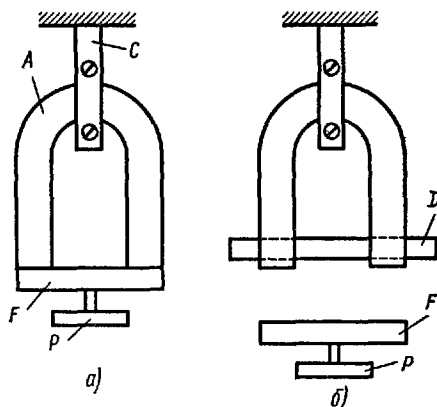


Рис. 16.11

обратно пропорционален сумме этих сопротивлений [см. формулы (16.27) и (16.30)]:

$$\Phi_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R_{mA} + R_{mC} + R_{mE} + R_{mF}} = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m}.$$

Удаляя пластину E , мы сильно увеличиваем общее сопротивление магнитной цепи, так как относительная магнитная проницаемость воздуха во много раз меньше, чем у железа. Поэтому удаление пластины приводит к значительному ослаблению магнитного поля электромагнитов, а следовательно, и к резкому уменьшению их подъемной силы.

О п ы т 2. Магнитный шунт.

Сильный подковообразный магнит A укреплен вертикально в деревянном зажиме C (рис. 16.11). Полюсы магнита замкнуты железной пластиной F с грузом P , подобранным так, чтобы сила тяжести пластины F и груза P была несколько меньше подъемной силы магнита (рис. 16.11, а). Если с помощью железной пластины D замкнут полюсы магнита A , как показано на рис. 16.11, б, то пластина F отрывается от магнита и падает вниз. Присоединение пластины D приводит к разветвлению магнитной цепи, так что на пластину F приходится лишь часть магнитного потока подковообразного магнита и соответствующее ему магнитное поле недостаточно для удержания пластины F в равновесии.

Закоротим полюсы магнита A пластиной D , изготовленной из алюминия. При этом пластина F с грузом P по-прежнему будет прочно удерживаться магнитом A . Причина этого явления состоит в том, что относительная магнитная проницаемость алюминия, как и других ферромагнитных материалов (см. § 20.5), очень близка к относитель-

ной магнитной проницаемости воздуха. Поэтому введение алюминиевой пластины D не должно влиять на распределение магнитного потока в цепи подковообразного магнита.

Опыт 3. Экранирование магнитного поля.

Возьмем магнитную стрелку, свободно вращающуюся вокруг вертикальной оси. Приблизим к ней северный полюс полосового магнита. Под влиянием поля магнита стрелка повернется к нему своим южным полюсом. При перемещении полосового магнита следом за ним повернется и магнитная стрелка. Совершенно иная картина наблюдается, если магнит поместить внутрь толстой железной трубы. Поле такого магнита не действует на магнитную стрелку, которая независимо от положения трубы с магнитом всегда располагается в плоскости магнитного меридиана поля Земли. Если на магнит надеть трубу, сделанную из алюминия, меди или другого неферромагнитного материала, то его действие на стрелку будет таким же, как и в отсутствие трубы.

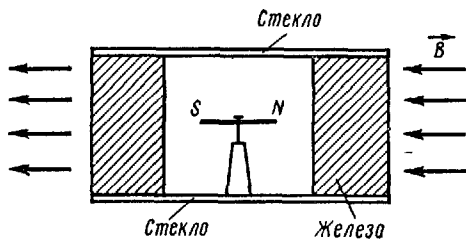


Рис. 16.12

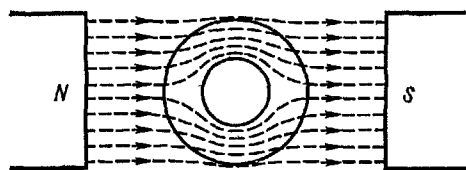


Рис. 16.13

Опыт 4. Поместим магнитную стрелку, свободно вращающуюся вокруг вертикальной оси, внутрь цилиндрической коробки, боковая стенка которой изготовлена из куска толстой железной трубы, а верхняя и нижняя стенки — стеклянные (рис. 16.12). Помещая коробку в однородное магнитное поле с индукцией B , направление которого показано на рис. 16.12, мы не обнаружим никакого действия магнитного поля на стрелку. Независимо от направления поля стрелка будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

Следовательно, внутри коробки магнитное поле отсутствует, так же как в предыдущем опыте оно отсутствует вне железной трубы, надетой на полосовой магнит. Это явление широко используется для защиты измерительных приборов от влияния внешних магнитных полей.

Экранирующее действие стенок железного сосуда можно объяснить, исходя из законов магнитных цепей. На рис. 16.13 показано массивное железное кольцо, помещенное между полюсами электромагнита. Внутренняя полость и стенки кольца представляют собой параллельно включенные магнитные сопротивления. Магнитные потоки в них по формуле (16.33) обратно пропорциональны их магнитным сопротивлениям. Относительная магнитная проницаемость железа во

много раз больше, чем воздуха. Поэтому поток индукции, а следовательно, и индукция магнитного поля в воздушной полости железного кольца практически равны нулю. Магнитное поле концентрируется («сгущается») внутри стенок кольца. На рис. 16.13 показано влияние железного кольца на ход линий индукции в зазоре между полюсами электромагнита.

Вопросы для повторения

1. Какой закон выражает вихревой характер магнитного поля? Докажите справедливость этого закона для какого-нибудь простейшего случая.
2. Найдите напряженность в произвольной точке магнитных полей, создаваемых тороидом и бесконечно длинным соленоидом.
3. Что называется магнитным потоком? В чем состоит теорема Остроградского—Гаусса для магнитного поля и каков ее физический смысл?
4. В чем состоят правила Кирхгофа для магнитных цепей?
5. Каким образом можно осуществить экранирование магнитного поля?

Примеры решения задач

Задача 16.1. В железном торе сделан поперечный прорез шириной l_1 . Радиус осевой окружности тора $R = 10$ см. По обмотке, имеющейся на торе и состоящей из $N = 3600$ витков, пропускается ток. При силе тока $I = 2$ А магнитная индукция в зазоре $B_1 = 10$ кГс, а относительная магнитная проницаемость железа $\mu_2 = 2000$. Определить ширину прореза l_1 , считая, что площадь S_1 поперечного сечения магнитной цепи в прорезе в 1,12 раза больше площади S_2 поперечного сечения тора.

Дано:

$$B_1 = 1 \text{ Т}$$

$$R = 0,1 \text{ м}$$

$$I = 2 \text{ А}$$

$$N = 3600$$

$$\mu_2 = 2000$$

$$\mu_1 = 1 \text{ (воздух)}$$

$$(S_1/S_2) = 1,12$$

$$l_1 = ?$$

Решение. По формуле Гопкинсона (16.27), магнитный поток в зазоре

$$\Phi_m = \mathcal{E}_m / R_m,$$

где $\mathcal{E}_m = IN$ — магнитодвижущая сила, R_m — полное магнитное сопротивление цепи, равное сумме магнитных сопротивлений зазора (R_{m_1}) и железного сердечника (R_{m_2}): $R_m = R_{m_1} + R_{m_2}$.

По формуле (16.28) найдем R_{m_1} и R_{m_2} :

$$R_{m_1} = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} \quad \text{и} \quad R_{m_2} = \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2},$$

где $l_2 = 2\pi R - l_1$ — средняя длина железного сердечника. Таким образом,

$$\Phi_m = IN \left/ \left(\frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} + \frac{2\pi R - l_1}{\mu_2 \mu_0 S_2} \right) \right. . \quad (a)$$

Магнитный поток в зазоре равен

$$\Phi_m = B_1 S_1. \quad (b)$$

Из (a) и (b) после несложных преобразований получим

$$l_1 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_0 IN - 2\mu_1 \pi R B_1 (S_1/S_2)}{[\mu_2 - \mu_1 (S_1/S_2)] B_1}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$l_1 = \frac{2000 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3600 - 2 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 1 \cdot 1,12}{(2000 - 1,12) \cdot 1} \text{ м} = 8,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ
НА ПРОВОДНИКИ С ТОКОМ§ 17.1. Плоский замкнутый контур тока
в магнитном поле

1. В § 14.2 был сформулирован закон Ампера, лежащий в основе расчета сил, действующих в магнитном поле на проводники с током. Продолжим изучение этого важного вопроса электродинамики. Рассмотрим опыт, схема которого приведена на рис. 17.1. Медный диск A , свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси O , помещен между полюсами сильного подковообразного магнита C . Нижний край диска погружен в ртуть, налитую в ванну D . Если подшипники диска соединить с одним полюсом аккумуляторной батареи, а электрод, опущенный в ртуть, — с другим, то через диск и ртуть будет проходить ток, причем диск начнет вращаться. При указанных на рис. 17.1 направлении тока I и расположении полюсов магнита диск вращается по часовой стрелке. В случае изменения направления тока или расположения полюсов магнита диск будет вращаться против часовой стрелки. Движение диска является результатом взаимодействия между идущим в нем электрическим током и магнитным полем. Направление действующей на диск силы, а следовательно, и направление его вращения соответствуют правилу левой руки (см. § 14.2).

2. Большой интерес представляет действие магнитного поля на замкнутые проводники с током, так как на этом явлении основаны все современные электрические двигатели.

Проводник, изогнутый в виде прямоугольной рамки A , поместим в однородное магнитное поле электромагнита, полюсные наконечники которого изображены на рис. 17.2. Рамка свободно подвешена на неупругой нити C . В отсутствие тока в рамке она находится в состоянии безразличного равновесия и располагается, например, так, как показано на рис. 17.2 сплошной линией. При пропускании через рамку постоянного тока она поворачивается вокруг оси нити C таким образом, что ее плоскость располагается перпендикулярно вектору \mathbf{B} магнитной индукции поля электромагнита. Новое положение рамки показано на рис. 17.2 пунктиром. Изменяя направление

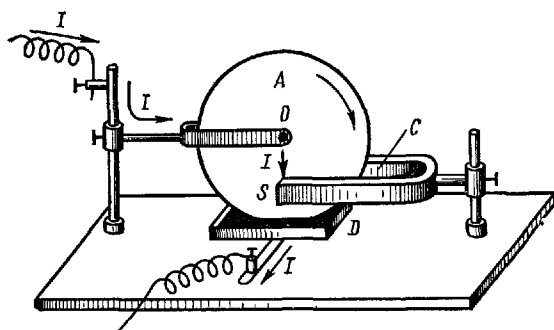


Рис. 17.1

тока и расположение полюсов электромагнита, можно убедиться в том, что рамка с током всегда устанавливается во внешнем однородном магнитном поле в таком положении, при котором собственный магнитный момент \vec{p}_m рамки (см. § 15.4) совпадает с направлением вектора \vec{B} . Иными словами, плоскость рамки с током всегда перпендикулярна вектору \vec{B} , причем из конца этого вектора ток в рамке виден идущим против часовой стрелки. Таким образом, о направлении магнитного поля можно судить по ориентации в этом поле не только магнитной стрелки (см. § 14.1), но и рамки с током. При исследовании неоднородного магнитного поля следует пользоваться рамкой возможно меньшего размера, чтобы в ее пределах неоднородность поля не была заметной.

3. Найдем выражение для момента сил, действующих в однородном маг-

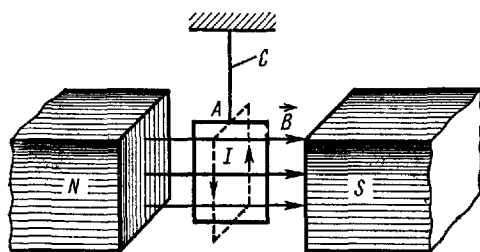


Рис. 17.2

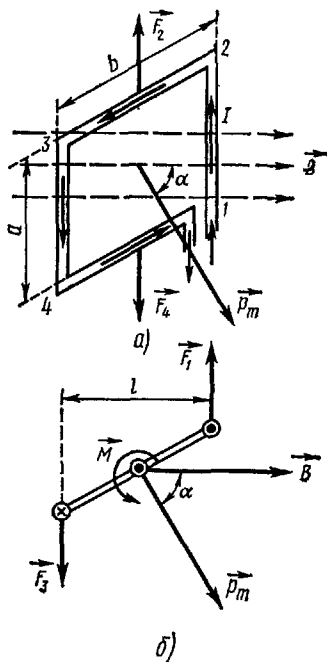


Рис. 17.3

нитном поле на прямоугольную рамку 1-2-3-4 с током I (рис. 17.3). Считаем, что стороны рамки 2-3 и 1-4 лежат в плоскостях, параллельных вектору \vec{B} , а стороны 1-2 и 3-4 перпендикулярны вектору \vec{B} . Это предположение не влияет на конечный результат, но несколько упрощает его получение.

Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_3 , действующие на прямолинейные проводники 1-2 и 3-4, направлены перпендикулярно плоскости рис. 17.3, а в противоположные стороны (на рис. 17.3, б показан вид рамки сверху) и по закону Ампера численно равны

$$F_1 = F_3 = IaB. \quad (17.1)$$

Силы \vec{F}_2 и \vec{F}_4 , приложенные к прямолинейным проводникам 2-3 и 4-3, численно равны

$$F_2 = F_4 = IbB \sin(90^\circ - \alpha) = IbB \cos \alpha \quad (17.2)$$

и направлены вдоль вертикальной оси рамки в противоположные стороны. Поэтому они полностью уравновешивают друг друга. Резуль-

тирующий вращающий момент M , действующий на рамку, равен моменту пары сил F_1 и $F_2 = -F_1$, т.е. $M = F_1 l$, где $l = b \sin \alpha$. Заменяв F_1 по формуле (17.1), получим

$$M = IabB \sin \alpha = ISB \sin \alpha, \quad (17.3)$$

где $S = ab$ — площадь рамки, IS — числовое значение p_m вектора магнитного момента рамки с током, а α — угол между векторами p_m и B . Поэтому формулу (17.3) можно переписать в виде

$$M = p_m B \sin \alpha = p_m B \sin (\widehat{p_m B}). \quad (17.4)$$

Вращение рамки под действием пары сил F_1 и F_2 происходит вокруг вертикальной оси, перпендикулярной как вектору B , так и вектору p_m . Вектор вращающего момента M откладывается вдоль оси вращения так, чтобы из его конца вращение рамки под действием пары сил F_1 и F_2 было видно происходящим против часовой стрелки. На рис. 17.3, б вектор M направлен из-за чертежа перпендикулярно его плоскости. Из этого рисунка и формулы (17.4) следует, что вектор вращающего момента, действующего на рамку с током в магнитном поле, равен векторному произведению магнитного момента рамки на магнитную индукцию внешнего поля:

$$M = [p_m B] \quad (17.5)$$

Исходя из закона Ампера, можно доказать, что формула (17.5) справедлива для любого плоского контура тока независимо от его формы.

4. Из формулы (17.4) следует, что вращающий момент M равен нулю и контур находится в равновесии, если магнитный момент контура совпадает по направлению с вектором B или противоположен ему ($\sin \alpha = 0$). При этом полный магнитный поток Φ_m сквозь поверхность S контура, создаваемый внешним магнитным полем (B) и собственным магнитным полем (B_1) тока в контуре, максимален, когда векторы B и p_m параллельны (рис.

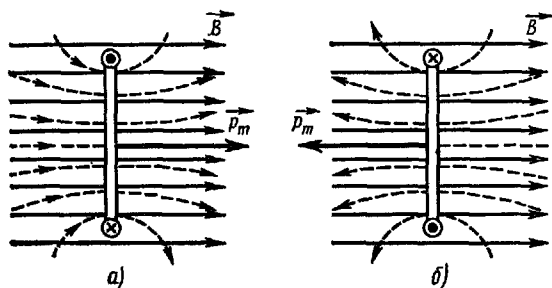


Рис. 17.4

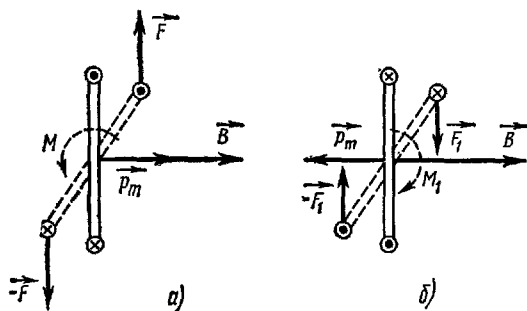


Рис. 17.5

17. 4, а), и имеет наименьшее значение, когда эти векторы противоположны по направлению (рис. 17.4, б):

$$(\Phi_m)_{\max} = BS + \int_S B_1 dS, \quad (\Phi_m)_{\min} = BS - \int_S B_1 dS.$$

Из рис. 17.2 видно, что устойчивым является только такое положение контура, при котором векторы \mathbf{p}_m и \mathbf{B} параллельны друг другу, а полный магнитный поток максимален. Это можно объяснить, если рассмотреть моменты сил, действующих на прямоугольную рамку в токе, когда она благодаря случайному внешнему воздействию слегка выведена из положения равновесия (рис. 17.5).

На рис. 17.5, а изображен случай, когда момент пары сил \mathbf{F} и $-\mathbf{F}$, действующих на перпендикулярные магнитному полю стороны рамки, возвращает рамку в положение равновесия. Следовательно, равновесие рамки устойчиво. Наоборот, в случае, показанном на рис. 17.5, б, момент пары сил \mathbf{F}_1 и $-\mathbf{F}_1$ вызывает дальнейшее отклонение рамки из первоначального положения равновесия, которое поэтому неустойчиво.

При любом положении витка в токе в магнитном поле на все его участки, не параллельные внешнему полю, действуют силы, деформирующие виток. На рис. 17.6 показаны направления результирующих сил, которые приложены ко всем сторонам прямоугольной рамки в токе, находящейся в состоянии устойчивого равновесия (магнитное поле направлено из-за чертежа перпендикулярно его плоскости).

Эти силы необходимо учитывать при расчете на прочность контуров, по которым идут большие токи и которые находятся в сильных магнитных полях.

5. В § 6.1 мы показали, что на электрический диполь, находящийся в однородном электрическом поле, тоже действует вращающий момент (обозначим его через \mathbf{M}_e), равный [см. (6.3')]

$$\mathbf{M}_e = [\mathbf{p}_e \mathbf{E}], \quad (17.6)$$

где \mathbf{p}_e — электрический момент диполя.

Соотношения (17.5) и (17.6) тождественны по своей форме. Поэтому можно считать, что замкнутый контур тока ведет себя в магнитном поле так же, как вел бы себя магнитный диполь с таким же магнитным моментом \mathbf{p}_m .

6. Эта аналогия позволяет объяснить поведение контура в токе в неоднородном магнитном поле. Рассмотрим такой опыт

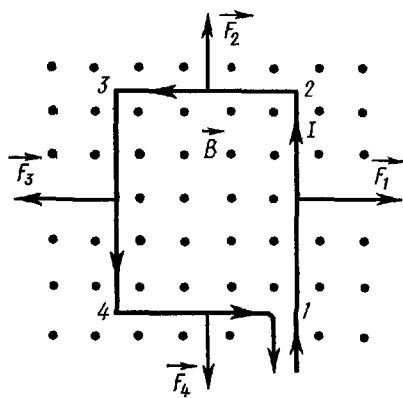


Рис. 17.6

(рис. 17.7). Вблизи одного из полюсов полосового магнита подвешена на длинной нити круговой виток медной проволоки. Если тока в витке нет, то его магнитный момент $p_m = IS = 0$ и неподвижный полосовой магнит не действует на виток. При пропускании через виток электрического тока виток поворачивается вокруг оси нити так, что его плоскость оказывается перпендикулярной плоскости чертежа. При этом магнитный момент витка совпадает по направлению с полем магнита. Затем виток притягивается к полюсу магнита и занимает положение, изображенное на рис. 17.7 пунктиром.

В § 6.1 было показано, что в неоднородном электрическом поле на электрический диполь помимо момента M_e , стремящегося установить диполь в направлении внешнего поля, действует результирующая сила

$$F = p_e \frac{\partial E}{\partial l},$$

втягивающая диполь в область более сильного поля. Аналогичная сила действует на «магнитный диполь» — виток с током, находящийся в неоднородном магнитном поле:

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial l}, \quad (17.7)$$

Именно эта сила вызывает притяжение витка с током к полюсу полосового магнита в опыте, изображенном на рис. 17.7.

В векторном анализе доказано, что выражение (17.7) можно представить в виде

$$F = p_{mx} \frac{\partial B}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial B}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (17.8)$$

где p_{mx} , p_{my} и p_{mz} — проекции вектора p_m на оси декартовой системы координат.

§ 17.2. Понятие о магнитоэлектрических и электродинамических измерительных приборах

1. Действие магнитного поля на рамку с током широко используется в различных электроизмерительных приборах. В зависимости от того, каким образом в приборах создается магнитное поле, они делятся на магнитоэлектрические и электродинамические.

2. В магнитоэлектрических приборах рамка с током помещается в магнитное поле сильного подковообразного магнита. Принципиальная схема магнитоэлектрического гальванометра показана на

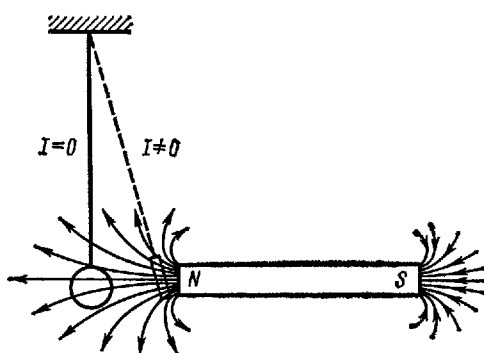


Рис. 17.7

рис. 17.8. Рамка D , состоящая из нескольких витков тонкой проволоки и подвешенная на упругой нити E , помещена в цилиндрический зазор между полюсными наконечниками магнита A и сплошным железным цилиндром C , укрепленными в корпусе прибора. Благодаря влиянию железного цилиндра C линии магнитной индукции в зазоре направлены радиально, а числовое значение индукции B постоянно. При пропускании через рамку измеряемого тока I на нее действует вращающий момент, равный

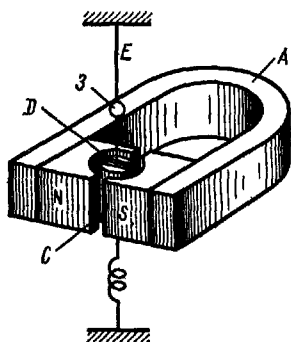


Рис. 17.8

$$M = ISNB,$$

где N — число витков провода в рамке, S — площадь рамки.

Под действием момента M рамка поворачивается, закручивая нить E на угол φ . В пределах упругой деформации угол кручения φ пропорционален моменту M :

$$\varphi = \alpha M, \quad (17.9)$$

где α — коэффициент, зависящий от упругих свойств материала нити и ее размеров. Таким образом, угол кручения нити пропорционален току в рамке:

$$\varphi = \alpha SNBI = \beta I, \quad (17.10)$$

где $\beta = \alpha SNB$ — постоянная прибора, определяемая при его градуировке путем пропускания через прибор тока, сила которого известна. Угол кручения φ регистрируется по смещению светового луча, отраженного от зеркальца Z , жестко связанного с нитью E .

Рамка поворачивается в противоположную сторону, если в ней изменить направление тока. Момент инерции подвижной системы магнитоэлектрического прибора нельзя сделать очень малым. Поэтому приборы такого типа пригодны только для измерений постоянных токов.

Для измерения силы тока прибор следует включить в цепь последовательно, а для измерения разности потенциалов на участке цепи — параллельно этому участку.

3. Магнитоэлектрический гальванометр можно использовать для измерения электрического заряда q , проходящего через поперечное сечение цепи при кратковременном токе (например, при разрядке конденсатора). Такой гальванометр называется баллистическим. В нем искусственно увеличен момент инерции J_0 подвижной системы. Благодаря этому период T_0 свободных колебаний рамки гальванометра сравнительно велик. Обозначим буквой τ время прохождения тока через гальванометр ($\tau \ll T_0$). Импульс момента сил, действующих на рамку при прохождении кратковременного тока I , равен

$$\int_0^{\tau} M dt = \int_0^{\tau} ISNB dt = SNB \int_0^{\tau} I dt.$$

По определению (см. § 8.2), $I = dq/dt$, поэтому

$$\int_0^{\tau} M dt = SNBq,$$

где q — искомый электрический заряд, прошедший через рамку гальванометра.

Так как $\tau \ll T_0$, то можно считать, что за время τ рамка практически не успевает выйти из положения равновесия, а лишь приобретает начальный момент импульса $J_0 \omega_0$. Из основного закона вращательного движения [см. т. I, формула (4.15)] имеем

$$J_0 \omega_0 = \int_0^{\tau} M dt = SNBq, \quad (17.11)$$

где ω_0 — угловая скорость, приобретенная подвижной системой гальванометра за время τ .

Начальная кинетическая энергия $W_{к0}$ подвижной системы равна см. т. I, формула (4.18)]

$$W_{к0} = \frac{J_0 \omega_0^2}{2} = \frac{S^2 N^2 B^2}{2J_0} q^2. \quad (17.12)$$

В дальнейшем при движении рамки происходит закручивание нити E (рис. 17.8), сопровождающееся переходом кинетической энергии подвижной системы в потенциальную энергию W_n упругодеформированной нити, равную $W_n = \int_0^{\varphi} M d\varphi$. Подставив сюда значение M

из (17.9), получим

$$W_n = \int_0^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi^2}{2}, \quad (17.13)$$

т.е. энергия W_n пропорциональна квадрату деформации φ .

При максимальном угле φ_0 отклонения подвижной системы ее начальная кинетическая энергия переходит в потенциальную. Поэтому положим в (17.13) $\varphi = \varphi_0$ и приравняем начальную кинетическую энергию (17.12) потенциальной:

$$\frac{S^2 N^2 B^2}{2J_0} q^2 = \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi_0^2}{2},$$

откуда

$$q = C_6 \varphi_0, \quad (17.14)$$

где $C_6 = \frac{1}{SNB} \sqrt{\frac{J_0}{\alpha}}$ — постоянная прибора.

Формула (17.14) позволяет определить заряд, прошедший через баллистический гальванометр, по максимальному углу отклонения Φ_0 подвижной системы гальванометра из положения равновесия.

4. В электродинамических приборах магнитное поле, действующее на рамку с током, создается соленоидом. Ось вращения рамки σ током, помещенной внутри соленоида, перпендикулярна его оси. В отсутствие тока плоскость рамки параллельна оси соленоида. Соленоид и рамка включаются последовательно, так что по ним проходит один и тот же измеряемый ток I . Вращающий момент M , действующий на рамку, можно определить по формуле (17.4):

$$M = IS_1 N_1 B_2 \sin \alpha = IS_1 N_1 B_2 \cos \varphi, \quad (17.15)$$

где N_1 — число витков провода в рамке, S_1 — площадь витка, $\alpha = (\pi/2) - \varphi$ — угол между осью соленоида и нормалью к плоскости рамки, φ — угол поворота рамки из положения равновесия, а $B_2 = \mu_0 n_2 I$ — магнитная индукция поля соленоида, содержащего n_2 витков на единицу длины.

Из формул (17.9) и (17.15) следует, что угол поворота подвижной системы равен

$$\varphi = \alpha S_1 N_1 n_2 \cos \varphi \cdot \mu_0 I^2. \quad (17.16)$$

Так как обычно угол φ небольшой, то $\cos \varphi \approx 1$ и

$$\varphi = \gamma I^2, \quad (17.17)$$

где $\gamma = \alpha S_1 N_1 n_2 \mu_0$ — постоянная прибора.

5. Электродинамический гальванометр неудобен тем, что в силу квадратичной зависимости (17.17) его шкалу нельзя сделать равномерной. Зато гальванометр такого типа универсален — он пригоден для измерения как постоянных, так и переменных токов. Действительно, при изменении направления тока в рамке одновременно изменяется на противоположное и направление магнитного поля соленоида. Поэтому направление отклонения рамки в магнитном поле соленоида сохраняется.

6. Электродинамический гальванометр можно использовать для измерения мощности, развиваемой электрическим током на пассивном участке цепи. Для этого обмотку соленоида следует включить параллельно участку цепи, а обмотку рамки — последовательно. Тогда ток I_2 в соленоиде и индукция B_2 его магнитного поля будут пропорциональны не силе тока I в цепи, а напряжению U на рассматриваемом участке:

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2 = \mu_0 n_2 U / R_2.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{\gamma}{R_2} UI = \gamma' UI, \quad (17.18)$$

где R_2 — сопротивление цепи соленоида, UI — измеряемая мощность тока.

§ 17.3. Взаимодействие соленоидов

1. Рассмотрим взаимодействие двух бесконечно длинных соосных соленоидов *A* и *B*, ближние концы которых отстоят друг от друга на расстоянии *a* (рис. 17.9). Обозначим число витков, приходящихся на единицу длины

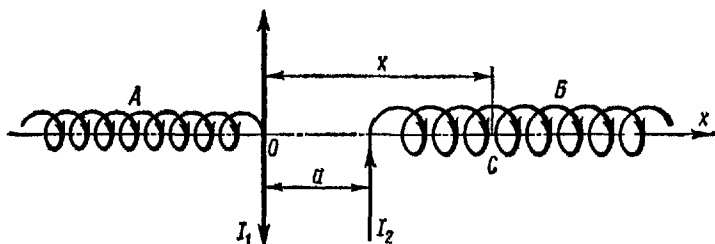


Рис. 17.9

первого и второго соленоидов, соответственно через n_1 и n_2 , а площади этих витков — через S_1 и S_2 . Пусть в соленоиде *A* идет ток I_1 , а в соленоиде *B* — I_2 . Проведем ось *X* вдоль оси соленоидов слева направо и примем за начало отсчета координаты *x* правый конец соленоида *A* (точка *O*). Предположим, что расстояние *a* между соленоидами во много раз больше радиусов их витков. Тогда можно считать, что векторы B_1 индукции магнитного поля соленоида *A*, по которому идет ток I_1 , одинаковы во всех точках в пределах каждого из витков соленоида *B* и направлены вдоль оси *OX*. Значение B_1 в произвольной точке *C*, лежащей на оси соленоидов и отстоящей на расстоянии *x* от начала координат, найдем по формуле (15.38):

$$B_1 = (\mu\mu_0/2) n_1 I_1 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad (17.19)$$

где $\alpha_1 = \pi$, $\cos \alpha_2 = -x / \sqrt{x^2 + R_1^2}$ и R_1 — радиус витков соленоида *A*.

Преобразуем выражение для $\cos \alpha_2$:

$$\cos \alpha_2 = - \frac{1}{\sqrt{1 + R_1^2/x^2}} = - \left(1 + \frac{R_1^2}{x^2}\right)^{-1/2}.$$

Разложим $\cos \alpha_2$ в ряд по формуле бинома Ньютона. Тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= - \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1^2}{x^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R_1^2}{x^2}\right)^2 - \dots \right], \\ \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 &= \left[-1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1^2}{x^2} - \frac{3}{8} \left(\frac{R_1^2}{x^2}\right)^2 + \dots \right] + 1 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{R_1^2}{x^2} - \frac{3}{8} \left(\frac{R_1^2}{x^2}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (17.20)$$

По условию, $R_1 \ll x$, поэтому вторым и всеми следующими членами в знаменателем ряду (17.20) можно пренебречь по сравнению с первым членом:

$$\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \approx \frac{1}{2} \frac{R_1^2}{x^2}. \quad (17.20')$$

Подставив это выражение в формулу (17.19), получим

$$B_1 = \frac{\mu\mu_0}{2} n_1 l_1 \cdot \frac{1}{2} \frac{R_1^2}{x^2}, \text{ или } B_1 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{n_1 l_1 S_1}{x^2}, \quad (17.21)$$

где $S_1 = \pi R_1^2$ — площадь витков соленоида A .

2. Магнитный момент одного витка соленоида A равен $p_m = I_2 S_2 i$. Если центр этого витка находится в точке C , то действующую на него силу можно найти по формуле (17.8):

$$F' = I_2 S_2 \frac{\partial B_1}{\partial x} = - \frac{\mu\mu_0}{2\pi} I_2 S_2 n_1 l_1 S_1 \frac{1}{x^3} i. \quad (17.22)$$

На участке соленоида B длиной dx размещается $n_2 dx$ витков. Поэтому сила dF , действующая на элемент соленоида B длиной dx со стороны магнитного поля соленоида A , равна

$$dF = F' n_2 dx = - \frac{\mu\mu_0}{2\pi} I_2 S_2 n_1 l_1 S_1 \frac{n_2 dx}{x^2} i. \quad (17.23)$$

Интегрируя это выражение по всей длине соленоида B , т. е. от $x = a$ до $x = \infty$, найдем силу взаимодействия между двумя бесконечно длинными соленоидами A и B :

$$F = - \frac{\mu\mu_0}{2\pi} I_2 S_2 n_1 l_1 S_1 n_2 \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^3} i = - \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 S_2 n_2 l_1 S_1 n_1}{a^2} i. \quad (17.24)$$

Знак минус в формуле (17.24) свидетельствует о том, что сила F , действующая на соленоид B , направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси X . Действительно, при выбранных на рис. 17.9 направлениях токов I_1 и I_2 соленоиды притягиваются друг к другу.

Если оси соленоидов A и B не совпадают друг с другом, то силовое взаимодействие между ними носит более сложный характер. При этом возникают также моменты сил, стремящиеся повернуть соленоиды так, чтобы их оси совпали, а магнитные моменты были направлены в одну сторону. Формула (17.24) не справедлива в случае взаимодействия коротких и близко расположенных друг к другу соосных катушек с током.

§ 17.4. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле

1. На проводник с током в магнитном поле действуют силы, подчиняющиеся закону Ампера (14.5) и часто называемые поэтому **силами Ампера**. Вычислим работу, совершаемую этими силами при перемещении проводника с током в магнитном поле. При малом перемещении dr элемента $d\mathbf{l}$ проводника с током I работа силы Ампера dF равна

$$\delta A^* = dF dr. \quad (17.25)$$

По закону Ампера (14.5),

$$dF = I [d\mathbf{l} \mathbf{B}],$$

где \mathbf{B} — магнитная индукция. Подставив это выражение в (17.25), получим

$$\delta A^* = I [d\mathbf{l} \mathbf{B}] dr = I dr [d\mathbf{l} \mathbf{B}]. \quad (17.26)$$

Из векторной алгебры известно, что смешанное произведение трех векторов не изменится, если в нем произвести циклическую перестановку сомножителей. Поэтому выражение (17.26) можно переписать в виде

$$\delta A^* = I \mathbf{B} [d\mathbf{r} d\mathbf{l}] = I \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (17.26')$$

или

$$\delta A^* = I d\Phi_m^*, \quad (17.26'')$$

где $d\mathbf{S} = [d\mathbf{r} d\mathbf{l}]$ — вектор малой площадки $d\mathbf{S}$, прочерчиваемой элементом проводника длиной $d\mathbf{l}$ при его малом перемещении $d\mathbf{r}$ (рис. 17.10), $d\Phi_m^* = \mathbf{B} d\mathbf{S}$ — магнитный поток сквозь эту площадку.

2. Элементарная работа δA амперовых сил при малом перемещении проводника конечной длины равна сумме элементарных работ δA^* амперовых сил для всех малых участков этого проводника, т.е. интегралу от $I d\Phi_m^*$, взятому по длине l проводника:

$$\delta A = \int_l I d\Phi_m^*.$$

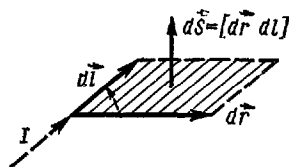


Рис. 17.10

Сила тока I не изменяется по длине проводника. Поэтому

$$\delta A = I \int_l d\Phi_m^* = I d\Phi_m, \quad (17.27)$$

где

$$d\Phi_m = \int_l d\Phi_m^* = \int_l \mathbf{B} [d\mathbf{r} d\mathbf{l}] \quad (17.27')$$

— магнитный поток сквозь поверхность, прочерчиваемую всем проводником при малом перемещении этого проводника. Заметим попутно, что вектор перемещения $d\mathbf{r}$, стоящий в подынтегральном выражении, вообще говоря, различен для разных точек проводника (он постоянен по длине проводника только если последний движется поступательно).

Если проводник, ток в котором поддерживается постоянным, совершает конечное перемещение, то работа амперовых сил на этом перемещении

$$A = I \Phi_m. \quad (17.28)$$

Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле проводника, ток в котором постоянен, равна произведению силы тока на магнитный поток сквозь поверхность, которую прочерчивает проводник при своем движении.

3. Найдем работу амперовых сил при перемещении в магнитном поле замкнутого контура с током I . Пусть в результате малого перемещения контур перешел из положения C в положение C' (рис. 17.11). При этом малый элемент $d\mathbf{l}$ контура совершил перемещение $d\mathbf{r}$ и прочертил малую площадку dS . Вектор этой площадки $d\mathbf{S} = [d\mathbf{r}d\mathbf{l}]$ показан на рис. 17.11.

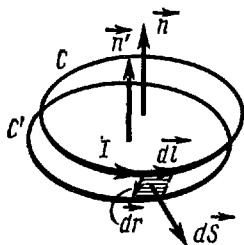


Рис. 17.11

Искомая работа амперовых сил δA при малом перемещении контура выражается формулой (17.27). Однако в данном случае величине $d\Phi_m$ можно дать иное толкование. Для этого рассмотрим магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на контур. В электротехнике этот поток часто называют «магнитным потоком, сцепленным с контуром». При вычислении указанного магнитного потока Φ_m направление нормали согласуют с направлением тока в контуре по правилу буравчика: из конца вектора нормали ток в контуре должен быть виден идущим против часовой стрелки. Соответствующие направления нормалей \mathbf{n} и \mathbf{n}' в положениях C и C' контура показаны на рис. 17.11¹.

Поверхности, натянутые на контур в его положениях C и C' , а также поверхность, прочерченная контуром при переходе из C и C' , образуют замкнутую поверхность. Согласно теореме Остроградского—Гаусса, магнитный поток сквозь нее равен нулю, т.е. если при вычислении этого потока брать в нее \mathbf{H} и \mathbf{e} нормали, то

$$\Phi_m - \Phi'_m + d\Phi_m = 0. \quad (17.29)$$

Знак минус перед членом Φ'_m взят потому, что при его вычислении использована нормаль \mathbf{n}' , являющаяся внутренней нормалью к соответствующему участку замкнутой поверхности. Из (17.29) следует, что $d\Phi_m = \Phi'_m - \Phi_m$ — изменение магнитного потока, сцепленного с контуром, происходящее при его малом перемещении.

Интегрируя выражение (17.27), найдем работу, совершаемую силами Ампера при перемещении контура с током из начального положения 1 в произвольное конечное положение 2:

$$A_{1-2} = \int_1^2 I d\Phi_m. \quad (17.30)$$

Если в процессе перемещения контура сила тока в нем остается постоянной, то

$$A_{1-2} = I \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} d\Phi_m = I (\Phi_{m2} - \Phi_{m1}). \quad (17.31)$$

¹ Этот рисунок соответствует простейшему случаю, когда контур и натянутая на него поверхность плоские, так что для всех малых участков поверхности векторы нормалей направлены одинаково.

Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура, по которому проходит постоянный ток, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.

4. При выводе формул (17.30) и (17.31) мы рассматривали простейший замкнутый контур, состоящий из одного плоского витка провода (рис. 17.11). Однако они в равной мере справедливы для контуров любой формы. Например, в случае перемещения в магнитном поле катушки с током, состоящей из N витков провода, элементарная работа δA сил Ампера равна

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \delta A_i,$$

где δA_i — элементарная работа этих сил при перемещении одного i -го витка. По формуле (17.27), $\delta A_i = I d\Phi_{mi}$ и

$$\delta A = I \sum_{i=1}^N d\Phi_{mi} = Id \left(\sum_{i=1}^N \Phi_{mi} \right). \quad (17.32)$$

Эта формула тождественна с (17.27), если в последней под Φ_m понимать полный магнитный поток сквозь все N витков катушки:

$$\Phi_m = \sum_{i=1}^N \Phi_{mi}$$

В электротехнике принято обозначать полный магнитный поток через Ψ и называть его **потокосцеплением контура** (в отличие от магнитного потока сквозь один виток, обозначаемого через Φ_m). Поэтому формулу (17.32) записывают в виде

$$\delta A = I d\Psi. \quad (17.33)$$

Потокосцепление контура обусловлено как внешним магнитным полем, так и магнитным полем тока I в самом контуре. Если внешнего поля нет, то потокосцепление контура обусловлено только магнитным полем тока в этом контуре и называется **потокосцеплением самоиндукции** (Ψ_c). Наконец, если внешнее магнитное поле создается электрическим током в каком-то контуре, то соответствующее ему потокосцепление другого контура называется **потокосцеплением взаимной индукции** этих двух контуров.

Вопросы для повторения

1. Как действуют на плоский замкнутый контур тока однородное и неоднородное магнитные поля?
2. Опишите устройство и принцип действия баллистического гальванометра.
3. Почему магнитоэлектрический гальванометр пригоден для измерения только постоянных токов? Какие токи можно измерять с помощью электродинамических приборов?
4. Найдите выражение для работы, совершаемой силами магнитного поля при перемещении в нем проводника с током и замкнутого контура с током.

Примеры решения задач

Задача 17.1. В опыте, описанном в § 17.1 (см. рис. 17.1), радиус диска $R = 0,1$ м, сила тока в цепи 6 А, среднее значение магнитной индукции между полюсами магнита $0,1$ Т. В какую сторону вращается диск, если магнитное поле направлено из-за чертежа к нам, а ток в диске проходит снизу вверх? Определить мощность, затрачиваемую источником тока на вращение диска, если последний делает 1 об/с.

Дано:
 $I = 6$ А
 $n = 1$ об/с
 $R = 0,1$ м
 $B = 0,1$ Т
 $P = ?$

Решение. Применяя правило левой руки, найдем, что диск вращается против часовой стрелки.

Мощность P , затрачиваемая источником тока на вращение диска в магнитном поле, измеряется произведением вращающего момента M на угловую скорость ω вращения диска:

$$P = \dot{M} \omega = M \cdot 2\pi n. \quad (a)$$

Ток в диске идет вдоль вертикального радиуса, играющего таким образом роль проводника с током. Сила dF , действующая на элемент dr этого проводника, находящийся на расстоянии r от оси диска, по закону Ампера численно равна

$$dF = IB dr \sin(\widehat{dr, B}) = IB dr,$$

так как векторы dr и B взаимно перпендикулярны. Сила dF перпендикулярна вертикальному радиусу диска. Поэтому создаваемый ею вращающий момент

$$dM = rdF = IB r dr.$$

Полный вращающий момент M , действующий на диск, равен сумме всех элементарных моментов dM :

$$M = \int_0^R dM = IB \int_0^R r dr = IB R^2 / 2.$$

Подставив выражение для M в формулу (а), получим

$$P = M \cdot 2\pi n = \pi n IB R^2.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$P = \pi n IB R^2 = 3,14 \cdot 6 \cdot 0,1 \cdot 0,1^2 \text{ Вт} = 0,0188 \text{ Вт} = 18,8 \text{ мВт}.$$

Задача 17.2. Квадратный проводящий контур со стороной $a = 10$ см и током 6 А свободно подвешен в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Т. Какую работу нужно совершить для того, чтобы повернуть контур на 180° вокруг оси, перпендикулярной направлению магнитного поля? Считать, что ток в контуре в процессе его поворота не изменяется.

Дано:
 $I = 6$ А
 $a = 0,1$ м
 $B = 1$ Т
 $A = ?$

Решение. Работа A , совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле контура с током I , по формуле (17.31) равна

$$A = I (\Phi_{m2} - \Phi_{m1}),$$

где Φ_{m1} и Φ_{m2} — магнитные потоки сквозь поверхность, ограниченную контуром, в его начальном и конечном положениях. Так как контур с током свободно подвешен в однородном магнитном поле, то его начальное положение соответствует состоянию устойчивого равновесия, при котором вектор p_m магнитного момента контура совпадает с направлением внешнего магнитного поля.

При вычислении Φ_{m_1} и Φ_{m_2} нормаль к поверхности, ограниченной контуром, нужно проводить в ту же сторону, куда направлен вектор \mathbf{r}_m (см. § 17.4, п. 3). Тогда по формуле (16.14'),

$$\Phi_{m_1} = BS = Ba^2,$$

где $S = a^2$ — площадь поверхности, ограниченной контуром. После поворота его на 180° вокруг оси, перпендикулярной вектору \mathbf{B} , проекция B_n этого вектора на направление нормали к поверхности контура будет равна $-B$. Поэтому

$$\Phi_{m_2} = -BS = -Ba^2 \quad \text{и} \quad A = -2I Ba^2.$$

Искомая работа A' совершается внешними силами против сил Ампера. Поэтому

$$A' = -A = 2I Ba^2.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$A = 2I Ba^2 = 2 \cdot 6 \cdot 0,1^2 \text{ Дж} = 0,12 \text{ Дж}.$$

Глава XVIII

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 18.1. Сила Лоренца

1. Магнитное поле действует не только на проводники с током, но и на отдельные электрические заряды, движущиеся в поле. В этом можно убедиться на опытах с электронными пучками (рис. 18.1). Внутри стеклянной катодной трубки M с диафрагмой D , имеющей небольшое круглое отверстие O , создается узкий пучок электронов. На конце трубки установлен экран C , покрытый слоем сернистого цинка, способного светиться под действием падающих на него электронов. Поэтому в месте падения электронного пучка получается его «изображение» в виде светящегося пятна. Если внешнего магнитного поля нет,

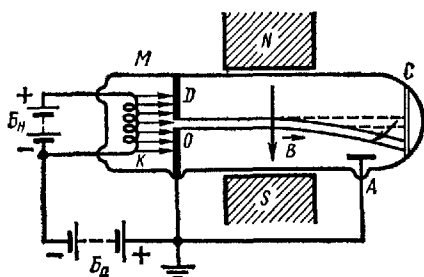


Рис. 18.1

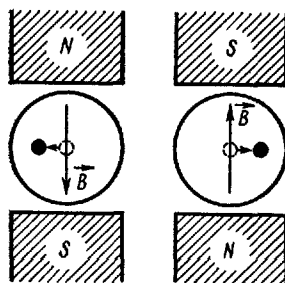


Рис. 18.2

то электроны в пучке за диафрагмой D движутся прямолинейно вдоль оси отверстия O (пунктир на рис. 18.1). Если же трубку поместить в сильное магнитное поле, то траектория электронов искривляется в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа. В соответствии с этим смещается и светящееся пятно на экране. На рис. 18.2 изображены новые положения пятна (черные круги) при различных направлениях вектора индукции \mathbf{B} внешнего магнитного поля. Скорость электронов направлена из-за чертежа. Опыт показывает, что во внешнем магнитном поле электроны отклоняются в направлении перпендикулярном векторам индукции \mathbf{B} и скорости \mathbf{v} движения электронов. Таким образом, на электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила, направленная в ту же сторону, что и векторное произведение $[\mathbf{Bv}]$.

2. Наблюдения под движением в магнитном поле положительных и отрицательных ионов показали, что на них тоже действуют силы, перпендикулярные векторам \mathbf{B} и \mathbf{v} (скорость частицы). Было установлено, что для положительно заряженных частиц сила совпадает по направлению с вектором $[\mathbf{vB}]$, а для отрицательно заряженных частиц — с вектором $[\mathbf{Bv}]$.

3. Найдем выражение для силы, действующей на заряд, движущийся в магнитном поле. По закону Ампера (14.5), на элемент dl проводника с током I , находящийся в магнитном поле, действует сила

$$dF = I[dl \mathbf{B}] = [I dl \mathbf{B}].$$

Если ток I в проводнике обусловлен движением частиц, заряд которых равен q , то по формуле (15.45')

$$I dl = qv dn, \quad (18.1)$$

где dn — число частиц в объеме проводника длиной dl , v — скорость их упорядоченного движения. Поэтому

$$dF = qdn [v \mathbf{B}] \quad (18.2)$$

Поделив обе части равенства (18.2) на число частиц dn , найдем силу F_n , действующую на каждую заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле:

$$F_n = \frac{dF}{dn} = q[v \mathbf{B}]. \quad (18.3)$$

Выражение (18.3) впервые было получено Г. А. Лоренцем. По этому сила F_n называется силой Лоренца

4. В формуле (18.3) q — алгебраическая величина движущегося заряда, т. е. $q > 0$ для положительных зарядов и $q < 0$ для отрицательных. Поэтому направление силы Лоренца, определяемое формулой (18.3), согласуется с указанными выше результатами экспериментов. На рис. 18.3 показаны взаимные расположения векторов F_n , v и \mathbf{B} для положительного и отрицательного зарядов.

Сила Лоренца численно равна

$$F_n = |q| v B \sin \alpha, \quad (18.4)$$

где α — угол между векторами v и \mathbf{B}

5. Сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости заряженной частицы, сообщая ей нормальное ускорение. Следовательно, сила Лоренца не совершает работы. Она изменяет только направление скорости движения частицы в магнитном поле. Абсолютное значение скорости заряда и его кинетическая энергия при движении в магнитном поле не изменяются.

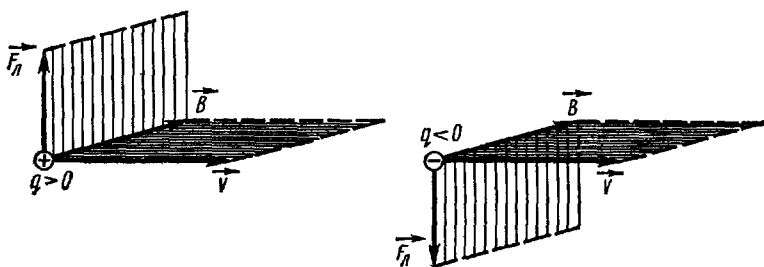


Рис. 18.3

6. В общем случае на движущийся заряд помимо магнитного поля с индукцией \mathbf{B} может еще действовать и электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} . Тогда результирующая сила \mathbf{F} , приложенная к заряду, равна геометрической сумме силы $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$, действующей на заряд со стороны электрического поля, и силы Лоренца:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (18.5)$$

Соотношение (18.5) называется **формулой Лоренца**.

Часто именно эту результирующую силу \mathbf{F} называют силой Лоренца. Однако в дальнейшем мы будем понимать под силой Лоренца только магнитную составляющую силы \mathbf{F} , выражаемую формулой (18.3).

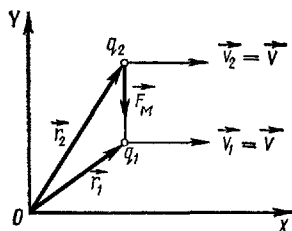


Рис 18.4

7. Найдем силу магнитного взаимодействия между двумя заряженными частицами q_1 и q_2 , движущимися в вакууме. Пусть $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$, а скорости частиц одинаковы и направлены параллельно оси OX (рис. 18.4); $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, причём $v \ll c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. По формуле (18.3) сила \mathbf{F}_M , действующая на движущийся заряд q_2 со стороны магнитного поля движущегося заряда q_1 , равна

$$\mathbf{F}_M = q_2 [\mathbf{v}_2 \mathbf{B}_1]. \quad (18.6)$$

Вектор \mathbf{B}_1 найдем по формуле (15.47), полагая в ней для вакуума $\mu = 1$:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1}{r^2} [\mathbf{v}_1 \mathbf{r}_{12}], \quad (18.7)$$

где $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — радиус-вектор, соединяющий заряды q_1 и q_2 , а $r = |\mathbf{r}_{12}|$ — расстояние между зарядами. На рис. 18.4 векторы \mathbf{v}_1 и \mathbf{r}_{12} взаимно перпендикулярны, а \mathbf{B}_1 направлен из-за чертежа перпендикулярно его плоскости. Поэтому сила \mathbf{F}_M численно равна

$$F_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} v^2. \quad (18.8)$$

Сила электростатического отталкивания между взаимно неподвижными зарядами q_1 и q_2 , находящимися в вакууме ($\epsilon = 1$) на том же расстоянии r , по закону Кулона (1.8) численно равна

$$F_{\text{эл}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (18.9)$$

Из (18.8) и (18.9) следует, что

$$\frac{F_M}{F_{\text{эл}}} = \mu_0 \epsilon_0 v^2. \quad (18.10)$$

В Международной системе единиц (СИ), которой мы пользуемся,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ В} \cdot \text{с} / (\text{А} \cdot \text{м}) \quad \text{и} \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ А} \cdot \text{с} / (\text{В} \cdot \text{м}).$$

Поэтому $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} \frac{\text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{1}{\text{с}^2}$ и (18.10) можно переписать в виде

$$\frac{F_M}{F_{Эл}} = \frac{v^2}{c^2}. \quad (18.10')$$

Итак, мы показали, что при малых скоростях ($v \ll c$) магнитное взаимодействие между движущимися зарядами во много раз слабее их электрического взаимодействия.

8. На первый взгляд кажется, что этот вывод противоречит рассмотренному выше магнитному взаимодействию параллельных проводников с током. Однако это неверно. Проводники с током в целом электрически нейтральны, так что результирующая сила электрического взаимодействия между ними равна нулю. Поэтому силы, действующие на них, имеют электромагнитную природу. Хотя сила магнитного взаимодействия между каждой парой электронов мала, число этих пар столь велико, что результирующая сила взаимодействия параллельных проводников с током может быть значительной.

§ 18.2. Явление Холла

1. В 1880 г. американский физик Э. Холл проделал следующий опыт. Постоянный ток I пропусклся через пластинку M (рис. 18.5), изготовленную из золота,

и измерялась разность потенциалов $\Delta\varphi$ между противоположными точками A и C на верхней и нижней гранях. Эти точки лежат в одном и том же поперечном сечении проводника M . Поэтому, как и следовало ожидать, оказалось, что $\Delta\varphi = 0$. Когда

пластина с током была помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное ее боковым граням, то потенциалы точек A и C стали различными. Это явление получило название **явления Холла**. Было установлено, что разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками A и C пропорциональна силе тока I , индукции магнитного поля B и обратно пропорциональна ширине b пластинки, т. е.

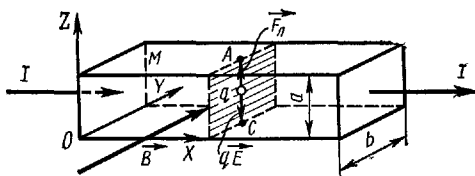


Рис. 18.5

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C = R \frac{IB}{b}, \quad (18.11)$$

где R — **константа Холла**.

2. Дальнейшие исследования показали, что явление Холла наблюдается во всех проводниках и полупроводниках независимо от их материала. Изменение направления тока или магнитного поля на противоположное вызывает изменение знака разности потенциалов $\Delta\varphi$. Числовое значение константы Холла R зависит от материала пластинки M , причем этот коэффициент для одних веществ положителен, а для других — отрицателен.

3. Явление Холла можно объяснить следующим образом. Пусть ток I в пластинке M обусловлен упорядоченным движением частиц — носителей зарядов q . Если их концентрация равна n_0 , а средняя ско-

рость их упорядоченного движения \mathbf{v} , то сила тока I выразится формулой

$$I = qv_x n_0 S = qv_x n_0 ab, \quad (18.12)$$

где $S = ab$ — площадь поперечного сечения пластинки, а v_x — проекция вектора \mathbf{v} на ось OX , проведенную в направлении вектора \mathbf{j} плотности тока. Если заряд частиц, образующих ток, $q > 0$, то их скорость \mathbf{v} совпадает с направлением тока и $v_x = v$. Если же заряд $q < 0$, то скорость \mathbf{v} частиц противоположна по направлению вектору \mathbf{j} и $v_x = -v < 0$.

На частицу, движущуюся в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , действует сила Лоренца $\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, вызывающая отклонение частиц к верхней грани пластинки¹. Таким образом, вблизи верхней грани будет избыток зарядов q , а вблизи нижней грани обнаружится их недостаток. В результате этого в пластине возникнет поперечное электрическое поле, направленное сверху вниз, если заряды q положительны, и снизу вверх, если они отрицательны. Пусть напряженность образовавшегося поля будет \mathbf{E} . Сила $q\mathbf{E}$, действующая со стороны поперечного электрического поля на заряд q , направлена в сторону, противоположную направлению силы Лоренца \mathbf{F}_L . В случае установившегося тока в пластине эти силы взаимно уравновешиваются:

$$q\mathbf{E} = -q[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

откуда

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (18.13)$$

Вектор \mathbf{E} направлен вдоль оси OZ , а векторы \mathbf{v} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны. Поэтому проекция \mathbf{E} на ось OZ

$$E_z = -v_x B. \quad (18.13')$$

Соответственно разность потенциалов между точками A и C равна

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C = - \int_0^a E_z dz = v_x Ba.$$

Подставив сюда значение v_x из (18.12), окончательно найдем

$$\Delta\varphi = \frac{1}{qn_0} \frac{IB}{b}. \quad (18.14)$$

Таким образом, полученный результат совпадает с экспериментальной формулой (18.11).

4. Из сравнения (18.14) и (18.11) следует, что константа Холла

$$R = 1/qn_0. \quad (18.15)$$

¹ Эти рассуждения справедливы только для указанных на рис. 18.5 направлений тока и вектора \mathbf{B} .

Отсюда видно, что знак константы Холла совпадает со знаком заряда q частиц, обуславливающих проводимость данного материала. Поэтому на основании измерения константы Холла для полупроводника можно судить о природе его проводимости: если $R < 0$, то проводимость электронная, если $R > 0$, то дырочная. Если в полупроводнике одновременно осуществляются оба типа проводимости, то по знаку константы Холла можно судить о том, какой из них является преобладающим (см. § 13.5).

С помощью константы Холла можно также определить концентрацию носителей заряда, если характер проводимости и величина их заряда известны (например, для металлов):

$$n_0 = 1/qR.$$

Так, для одновалентных металлов оказалось, что концентрация электронов проводимости совпадает с концентрацией атомов.

Зная константу Холла для электронного проводника, можно оценить значение $\langle \lambda \rangle$ средней длины свободного пробега электронов. Из (8.11) и (18.15) следует, что

$$\langle \lambda \rangle = \frac{2m\mu\gamma}{n_0 e^2} = \frac{2m\mu\gamma R}{e}, \quad (18.16)$$

где e и m — абсолютная величина заряда электрона и его масса, u — средняя скорость теплового движения электронов в проводнике, γ — удельная электрическая проводимость и R — константа Холла. Оказалось, что средняя длина свободного пробега электронов в металлах достигает сотен межузельных расстояний ($\langle \lambda \rangle \approx 10^{-8}$ см).

§ 18.3. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

1. Полученное выше выражение для силы Лоренца (18.3) позволяет установить ряд закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле, лежащих в основе устройства электронного микроскопа, масс-спектрографа и ускорителей заряженных частиц.

Рассмотрим движение заряженных частиц в о д н о р о д н о м магнитном поле. При этом будем считать, что на частицы не действуют никакие электрические поля.

2. Начнем с простейшего случая — движения заряженной частицы в д о л ь линий индукции магнитного поля. При этом угол α между векторами скорости \mathbf{v} частицы и индукции \mathbf{B} равен 0 или π . Поэтому по формуле (18.4) сила Лоренца равна нулю, т. е. магнитное поле не действует на частицу. Она будет двигаться по инерции — равномерно и прямолинейно.

3. Пусть частица, имеющая заряд q , движется п е р п е н д и к у л я р н о линиям магнитной индукции ($\alpha = \pi/2$). Тогда сила Лоренца направлена перпендикулярно векторам \mathbf{v} и \mathbf{B} (рис. 18.3) и численно равна

$$F_{\perp} = |q|vB. \quad (18.17)$$

Следовательно, частица движется в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции, причем сила Лоренца является центростремительной силой, вычисляемой по формуле

$$F_{ц} = mv^2/r, \quad (18.18)$$

где m — масса частицы, r — радиус кривизны ее траектории. Приравняв правые части выражений (18.17) и (18.18), найдем

$$r = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v}{B}. \quad (18.19)$$

Так как в однородном поле $B = \text{const}$, а числовое значение скорости частицы не изменяется, то радиус кривизны траектории частицы оказывается постоянным. Поэтому она будет двигаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна вектору магнитной индукции, а радиус пропорционален отношению скорости частицы к произведению ее удельного заряда q/m на индукцию B поля

4. Направления силы Лоренца F_L и вызываемого ею отклонения заряженной частицы в магнитном поле зависят от знака ее заряда q . Если частица движется в плоскости чертежа (рис. 18.6) слева направо, а магнитное поле направлено из-за чертежа перпендикулярно его плоскости, то при

$q > 0$ частица отклоняется вниз, а при $q < 0$ — вверх. Таким образом, по характеру отклонения частицы в магнитном поле можно судить о знаке ее заряда. Этим широко пользуются в исследованиях элементарных частиц.

5. Частица движется по окружности радиуса r равномерно. Поэтому период обращения частицы, т. е. время ее одного полного оборота, как видно из (18.19), равен

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right|. \quad (18.20)$$

Период обращения обратно пропорционален произведению индукции магнитного поля на удельный заряд частицы и не зависит от ее скорости.

При очень больших скоростях движения частицы, соизмеримых со скоростью света, обнаруживается зависимость ее массы m от скорости. Поэтому сделанный нами вывод о независимости периода обращения частицы от скорости справедлив только для движений со скоростями v , во много раз меньшими скорости света.

6. Рассмотрим теперь общий случай движения заряженной частицы в однородном магнитном поле, когда ее скорость v направлена

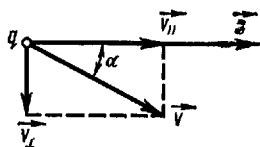


Рис. 18.7

Рис. 18.6

под произвольным острым углом α к вектору индукции \mathbf{B} поля (рис 18.7). Разложим вектор скорости \mathbf{v} на две составляющие — параллельную вектору \mathbf{B} (\mathbf{v}_{\parallel}) и перпендикулярную ему (\mathbf{v}_{\perp}):

$$\left. \begin{aligned} v_{\parallel} &= v \cos \alpha, \\ v_{\perp} &= v \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

Скорость \mathbf{v}_{\parallel} в магнитном поле не изменяется. Частица одновременно участвует в двух движениях: она равномерно вращается со скоростью v_{\perp} по окружности радиуса

$$r = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v_{\perp}}{B} = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v \sin \alpha}{B} \quad (18.22)$$

и движется поступательно с постоянной скоростью v_{\parallel} в направлении, перпендикулярном плоскости вращения. Поэтому траектория заряженной частицы представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с линией индукции магнитного поля (рис. 18.8). Радиус r витков выражается формулой (18.22), а расстояние между соседними витками (шаг винтовой линии) равно $h = v_{\parallel} T$.

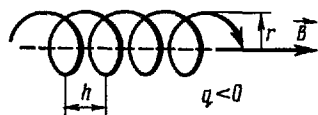


Рис. 18.8

Заменив T по формуле (18.20), а v_{\parallel} по (18.21), получим

$$h = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right| v \cos \alpha. \quad (18.23)$$

§ 18.4. Экспериментальное определение удельного заряда частиц. Масс-спектрография

1. Рассмотренные в предыдущем параграфе закономерности движения заряженных частиц в однородном магнитном поле позволили разработать весьма точные методы экспериментального нахождения масс этих частиц. В самом деле, для определения массы частицы достаточно измерить ее заряд q и удельный заряд q/m . Некоторые методы определения заряда частиц были описаны в § 11.2. Теперь мы кратко остановимся на простейших методах измерения удельного заряда частиц.

2. Упрощенная схема установки для измерения удельного заряда электрона показана на рис. 18.9. Металлический катод K вакуумной трубки M нагревается током от батареи $B_{\text{н}}$. Электроны, вылетающие из катода вследствие термоэлектронной эмиссии, ускоряются сильным электрическим полем, созданным между катодом и анодом A трубки высоковольтной батареей $B_{\text{а}}$. Через узкое отверстие O в пространстве за анод проникает только тонкий пучок электронов, распространяющихся вдоль оси трубки и улавливаемых цилиндром Фарадея D , который включен в цепь батареи $B_{\text{а}}$ через гальванометр G . Кроме того, в трубку впаян небольшой боковой электрод C , включенный в цепь через гальванометр G_1 . В пространстве за анодом с помощью сильного

электромагнита, полюсы которого условно показаны пунктирной окружностью, создают перпендикулярные плоскости чертежа однородное магнитное поле. При указанном на рисунке направлении поля (из-за чертежа) электронный пучок отклоняется вверх. Индукция B магнитного поля подбирается таким образом, чтобы отклоненный пучок попа-

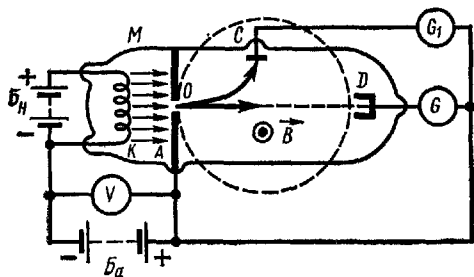


Рис. 18.9

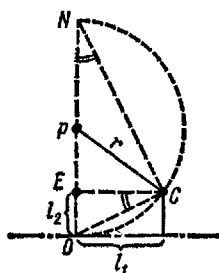


Рис. 18.10

дал на боковой электрод C . Траектория OC электронов в магнитном поле представляет собой дугу окружности, касающейся в точке O горизонтальной оси трубки. Зная расстояния между точками O и C по оси трубки (l_1) и по вертикали (l_2), можно определить радиус r траектории электронов в магнитном поле (рис. 18.10). Из подобия треугольников CEO и CEN имеем

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{2r - l_2}{l_1},$$

откуда

$$r = (l_1^2 + l_2^2)/2l_2. \quad (18.24)$$

Скорость v электронов в пространстве за анодом можно найти, измерив с помощью вольтметра V напряжение U между анодом и катодом трубки: $\frac{mv^2}{2} = eU^1$, откуда

$$v = \sqrt{2eUm}. \quad (18.25)$$

Подставив выражения (18.24) и (18.25) в (18.19) и полагая $q = e$, получим следующую расчетную формулу для абсолютного значения удельного заряда электрона:

$$\frac{e}{m} = \frac{8Ul_2^2}{B^2(l_1^2 + l_2^2)^2}. \quad (18.26)$$

¹ Начальной кинетической энергией электронов, вылетающих из катода, можно пренебречь, если напряжение достаточно велико.

В результате опытов было найдено:

$$(e/m) = 1,75 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

3. В дальнейшем с помощью более совершенных методов этот результат был уточнен. Было показано, что удельный заряд электрона, движущегося со скоростью v , соизмеримой со скоростью c света, зависит от v по закону

$$\frac{e}{m} = \left(\frac{e}{m}\right)_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad (18.27)$$

где $(e/m)_0$ — удельный заряд при $v = 0$.

Все известные в настоящее время опыты, а также теоретические данные свидетельствуют о том, что заряд электрона не зависит от скорости его движения. Поэтому зависимость удельного заряда электрона от скорости можно объяснить только тем, что масса электрона возрастает при увеличении его скорости по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (18.28)$$

где m_0 — масса покоящегося электрона.

Формула (18.28) хорошо согласуется с выводами теории относительности, рассматриваемой в третьем томе курса.

4. В результате многочисленных измерений удельного заряда электрона, проведенных различными и весьма совершенными методами, было установлено:

$$(e/m_0) = (1,7588028 \pm 0,0000054) \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг.}$$

Соответственно масса покоя электрона (значение e приведено в § 11.2)

$$m_0 = (9,109558 \pm 0,000054) \cdot 10^{-31} \text{ кг.}$$

5. В § 12.4 упоминалось о каналových лучах, получаемых в помощью газоразрядной трубки, в катодe которой просверлено небольшое отверстие. По отклонению каналových лучей в электрическом поле было установлено, что они представляют собой пучок положительных ионизированных частиц. Химический анализ показал, что эти частицы являются ионами газа, заполняющего разрядную трубку.

Удельный заряд положительных ионов и их массу можно найти, измеряя отклонение каналových лучей в магнитном поле. Однако эта задача оказалась более сложной, чем определение удельного заряда электрона. Положительные ионы образуются в газоразрядной трубке не в каком-то одном месте, а по всему ее объему. Различные ионы проходят в ускоряющем электрическом поле трубки неодинаковые пути, и их скорости колеблются в весьма широких пределах. Попадая в поперечное магнитное поле, ионы движутся по окружностям самых различных радиусов. Поэтому установка, подобная изображенной на рис. 18.9, непригодна для измерения удельного заряда положительных ионов.

6. Впервые измерение удельных зарядов положительных ионов было произведено Д. Томсоном. Каналовые лучи пропускались через

плоский конденсатор, помещенный между полюсами электромагнита таким образом, чтобы направления электрического и магнитного полей совпадали или были противоположны друг другу (рис. 18.11). В результате совместного действия электрического и магнитного полей положительные ионы, образующие каналовые лучи, отклонялись как в вертикальном, так и в поперечном направлениях. Можно показать, что в плоскости Q , перпендикулярной первоначальному направлению каналовых лучей, положительные ионы должны распределяться по ветви параболы AO , ось которой параллельна направлению электрического и магнитного полей. Различным точкам параболы соответствуют ионы,

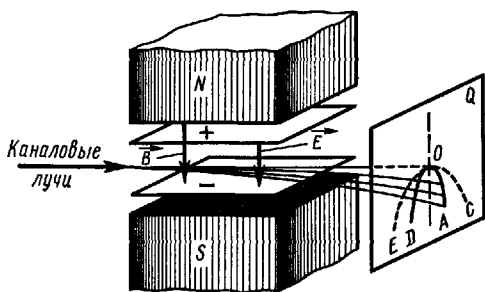


Рис. 18.11

обладающие разными скоростями. Чем больше скорость иона, тем слабее он отклоняется в электрическом и магнитном полях. Поэтому соответствующая ему точка параболы должна лежать ближе к вершине O . Вторая ветвь параболы (OD) получается при изменении направления магнитного поля на противоположное. Ионам с различными удельными зарядами соответствуют разные параболы. Так, например, если ионам с удельным зарядом q/m соответствует параболы AOD , то ионам с удельным зарядом $(q/m_1) > (q/m)$ соответствует менее сжатая параболы COE с большим фокальным параметром. Для регистрации отклонения ионов в электрическом и магнитном полях в плоскости Q помещалась фотографическая пластинка. В местах попадания ионов на ее светочувствительный слой происходила фотохимическая реакция разложения бромистого серебра. Поэтому после проявления пластинки на ней получалось изображение распределения ионов в плоскости Q .

7. Проводя опыты с пучками одновалентных ионов неона, Томсон обнаружил на фотопластинке изображения ветвей двух разных парабол, соответствующих несколько отличным одно от другого значениям удельного заряда. Этот результат свидетельствовал о том, что существуют два типа ионов неона, различающихся своими массами. Масса одновалентного иона отличается от массы атома на ничтожно малую величину, равную массе электрона. Поэтому опыты Томсона явились первым экспериментальным доказательством существования различных по своей массе атомов одного и того же элемента. В дальнейшем разновидности атомов химического элемента, отличающиеся только массой, получили название **изотопов**.

8. Метод определения удельного заряда положительных ионов, предложенный Томсоном, в силу ряда причин, на которых мы не будем останавливаться, оказался недостаточно точным.

В 1919 г. Ф. Астон, ученик Томсона, сконструировал более совершенный прибор, названный им **масс-спектрографом**. Принципиальная

схема этого прибора показана на рис. 18.12. Пучок A исследуемых ионов проходит через две диафрагмы D_1 и D_2 с узкими щелями, перпендикулярными плоскости чертежа. В однородном электрическом поле плоского конденсатора C ионы отклоняются в направлении поля тем сильнее, чем меньше их скорость и больше удельный заряд. Затем ионы

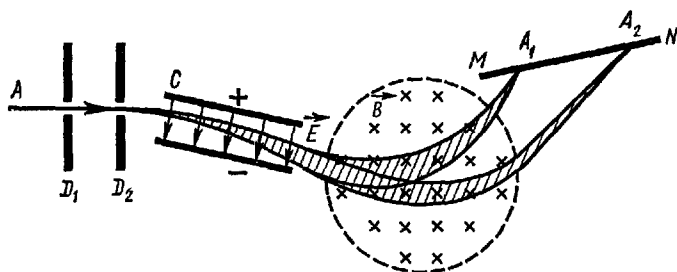


Рис. 18.12

падают в однородное магнитное поле B , направленное за чертеж, и движутся в нем по дугам окружностей. Радиусы этих окружностей тем больше, чем больше скорость ионов и меньше их удельный заряд [см. (18.19)]. Поэтому в магнитном поле пучок ионов расщепляется на несколько пучков, каждый из которых соответствует определенному значению удельного заряда ионов. На рис. 18.12 показаны два таких пучка. В каждом пучке радиус верхней границы его больше радиуса нижней границы, так как вдоль верхней окружности движутся наиболее быстрые ионы, а вдоль нижней — наиболее медленные. Следовательно, магнитное поле фокусирует ионы, обладающие одинаковым удельным зарядом и различными скоростями. Магнитную индукцию B можно подобрать так, чтобы ионы фокусировались на фотопластинке MN , расположенной перпендикулярно плоскости чертежа. Тогда на пластинке получается ряд узких параллельных линий, соответствующих различным значениям удельных зарядов ионов. В случае, изображенном на рис. 18.12, линия A_1 соответствует ионам с большим удельным зарядом, а линия A_2 — ионам с меньшим удельным зарядом. Зная удельный заряд ионов, дающих линию A_1 , расстояние между линиями A_2 и A_1 , а также параметры установки, можно определить удельный заряд ионов, соответствующих линии A_2 .

9. Масс-спектрограф Астона сыграл важную роль в развитии атомной и ядерной физики, так как позволил обнаружить существование изотопов самых различных элементов. Было установлено, что у большинства элементов есть несколько устойчивых, т. е. нерадиоактивных, изотопов.

Однако масс-спектрограф Астона имел существенный недостаток. В нем получалась достаточно четкая фокусировка ионов на фотопластинке только в том случае, когда векторы скоростей ионов в пучке, входящем в прибор, были строго параллельны друг другу. Если это условие не выполнялось, то на фотопластинке получались не четкие

линии, а размытые полосы, и точность измерения удельного заряда ионов резко снижалась. Иными словами, масс-спектрограф Астона не давал фокусировки ионов по направлению. Поэтому приходилось пользоваться диафрагмами D_1 и D_2 (рис. 18.12) с очень узкими щелями. Это, в свою очередь, приводило к тому, что сквозь них проходило срав-

нительно небольшое число ионов, а поэтому интенсивность линий на фотопластинке была мала.

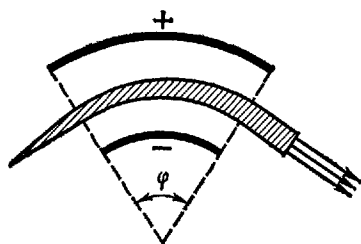


Рис. 18.13

10. В 1935—1936 гг. были построены первые совершенные масс-спектрографы с двойной фокусировкой ионов как по скоростям (энергиям), так и по направлению. Для этого в масс-спектрографе Астона плоский конденсатор был заменен цилиндрическим. Пучок ионов движется в цилиндрическом конденсаторе в плоскости, перпендикулярной его оси

(рис. 18.13). Соответствующим выбором угла φ можно добиться того, чтобы расходящийся пучок ионов, поступающих в сектор цилиндрического конденсатора, превратился на выходе из него в плоскопараллельный пучок.

Кроме того, в современных масс-спектрографах видоизменена форма полюсов электромагнита, благодаря чему магнитное поле локализуется в части пространства, имеющей форму трехгранной призмы, ребра которой параллельны оси цилиндрического конденсатора.

Благодаря этим усовершенствованиям точность измерения масс ионов легких элементов была доведена до $10^{-4}\%$.

11. По интенсивности линий на фотопластинке масс-спектрографа, соответствующих ионам различных изотопов одного и того же элемента, можно выяснить относительную распространенность различных изотопов. Однако этот метод недостаточно точен из-за малой интенсивности линий. Поэтому для определения относительной концентрации различных изотопов в их естественных смесях применяют масс-спектрометры — приборы с электрической регистрацией ионных токов. В масс-спектрометрах используют пучки ионов с близкими по величине кинетическими энергиями (моноэнергетические пучки). Для создания таких пучков применяют ионные источники специальной конструкции. Благодаря особенностям поведения моноэнергетических ионов в поперечном магнитном поле удается осуществить достаточно хорошую фокусировку даже для сильно расходящихся пучков. Поэтому в масс-спектрометрах можно пользоваться пучками, содержащими большое число ионов, что значительно повышает точность измерения концентрации различных изотопов.

Масс-спектрометры нашли широкое и разнообразное применение в различных областях физики, химии и техники. Они используются для определения содержания примесей в газах, для анализа состава и процентного содержания различных смесей углеводородов, для отыскания течи в вакуумных установках и т. д.

§ 18.5. Ускорители заряженных частиц

1. В связи с развитием экспериментальной ядерной физики возникла потребность в специальных установках, с помощью которых можно было бы получать в лабораторных условиях направленные пучки заряженных частиц (электронов, протонов, атомных ядер и ионов легких элементов), обладающих весьма большой кинетической энергией. Такие установки получили название **ускорителей заряженных частиц**.

Первые ускорители, которые позволили сообщать электронам и положительным ионам водорода (протонам) энергию порядка нескольких миллионов электронвольт (МэВ), были созданы в начале 30-х годов. В последующие десятилетия ускорительная техника развивалась бурными темпами. Были построены ускорители различных типов, а максимальная энергия, сообщаемая в них заряженным частицам, достигла в 1973 г. 400 млрд. эВ (400 ГэВ).

По форме траектории ускоряемых частиц все ускорители можно разделить на две основные группы — **линейные ускорители** и **циклические ускорители**. В первых траектории частиц близки к прямым линиям, а во вторых — к окружностям или раскручивающимся спиральям.

2. Энергия ускоряемых частиц увеличивается при их движении в электрическом поле ускорителя. Это поле может быть в зависимости от типа ускорителя электростатическим, индуктированным (см. § 21.2) или переменным высокочастотным полем.

В **электростатическом линейном ускорителе** заряженная частица проходит через ускоряющее электрическое поле однократно. Если q — заряд частицы, а φ_1 и φ_2 — значения потенциала поля в начальной и конечной точках траектории частицы в поле, то энергия, приобретаемая частицей в ускорителе, равна

$$W = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Чем больше разность потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$), тем больше и энергия частицы. Поэтому поле в ускорителях этого типа создается либо высоковольтным генератором Ван-дер-Граафа (см. § 4.1), либо импульсным генератором (см. § 5.3). Однако таким образом удастся получить значения ($\varphi_1 - \varphi_2$), не превышающие 15 млн. вольт.

3. Значительно большие энергии можно сообщать заряженным частицам в **линейных резонансных ускорителях**. В этих ускорителях энергия частиц увеличивается под влиянием переменного электрического поля сверхвысокой частоты. Это поле изменяется синхронно (в резонанс) с движением ускоряемых частиц. В США действует линейный резонансный ускоритель электронов, который на длине пути в 3 км сообщает им энергию в 22 ГэВ. При столь больших энергиях электронов линейные резонансные ускорители оказываются более перспективными, чем циклические. Иначе обстоит дело в отношении ускорителей протонов и других более тяжелых частиц.

4. Наиболее мощные современные ускорители протонов и других положительно заряженных частиц построены по циклическому типу.

В этих ускорителях заряженная частица многократно проходит через электрическое поле, каждый раз увеличивая свою энергию от нескольких тысяч до нескольких сотен тысяч электронвольт. Для управления движением частиц и периодического возвращения их в область ускоряющего электрического поля применяется сильное поперечное магнитное

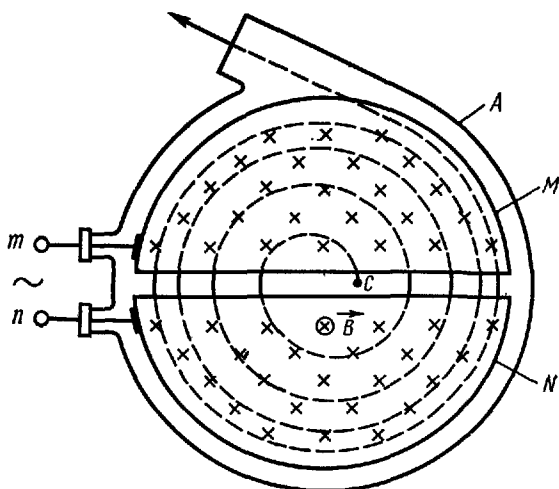


Рис. 18.14

поле. Поясним подробнее принцип действия циклических ускорителей на примере циклотрона, впервые построенного Э. Лоуренсом в 1931 г.

Циклотрон состоит из двух металлических дуантов M и N (рис. 18.14), представляющих собой две половины невысокой тонкостенной цилиндрической коробки, разделенные узкой щелью. Дуанты заключены в плоскую замкнутую камеру A, помещенную между полюсами сильного электромагнита. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости чертежа. Дуанты с помощью электродов m и n присоединены к полюсам электрического генератора, создающего в щели между ними переменное электрическое поле. Введем в точку C положительный ион в тот момент, когда электрическое поле между дуантами максимально и направлено снизу вверх. Под действием электрического поля ион начнет равноускоренно перемещаться в плоскости чертежа снизу вверх. Как только он войдет в дуант M, ускоряющее действие электрического поля прекратится, так как металлические стенки дуанта практически полностью экранируют его внутреннюю полость от электрического поля в зазоре. Внутри дуанта M ион под действием магнитного поля опишет полуокружность, радиус которой можно определить по формуле (18.19). К тому моменту времени, когда ион, двигаясь в дуанте M, будет подходить к зазору между дуантами, направление электрического поля изменится на противоположное первоначальному и поле снова будет ускорять движение иона. Затем внутри дуанта N ион опишет полуокружность но уже несколько большего радиуса,

соответствующего возросшей скорости. К моменту вылета иона в зазор электрическое поле снова изменит свое направление и будет ускорять движение иона. В результате многократного ускорения иона электрическим полем его кинетическая энергия может стать очень большой. Для уменьшения вероятности торможения ионов из-за столкновения с молекулами воздуха в камере A создается высокий вакуум.

5. Описанный процесс непрерывного ускорения ионов возможен только в том случае, если движение иона и изменение электрического поля в зазоре будут происходить строго с и н х р о н н о. В противном случае ион при прохождении через зазор будет то ускоряться, то замедляться. Таким образом, для нормальной работы циклотрона необходимо, чтобы период T_0 колебаний электрического поля совпадал с периодом T обращения иона:

$$T_0 = T. \quad (18.29)$$

По формуле (18.20),

$$T = \frac{2\pi}{B} \frac{m}{q}, \quad (18.29')$$

где q/m — удельный заряд иона, B — индукция магнитного поля в дуантах.

6. В циклотроне магнитное поле постоянно, а напряженность E электрического поля изменяется во времени по гармоническому закону $E = E_0 \sin(2\pi/T_0)t$ с постоянным периодом (рис. 18.15). Покажем, что в таком случае не всегда соблюдается условие синхронности движения ионов и изменения электрического поля и что существует некоторое предельное значение кинетической энергии, приобретаемой ионом в циклотроне.

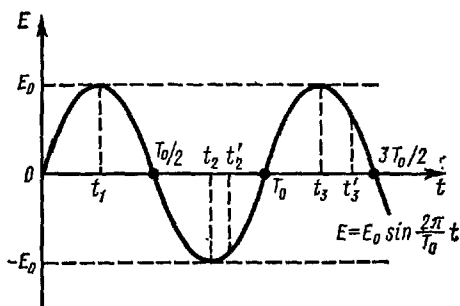


Рис. 18.15

В предыдущем параграфе мы говорили о зависимости массы электрона от его скорости. Такая же зависимость существует для любых частиц. Масса движущегося иона по формуле (18.28) равна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

где m_0 — масса покоящегося иона.

При малых скоростях движения ($v \ll c$), т. е. для иона, кинетическая энергия которого невелика, масса m практически постоянна и равна m_0 . Поэтому, как видно из формулы (18.29'), период T обращения иона в циклотроне постоянен. Условие синхронности (18.29) легко

осуществить соответствующим выбором T_0 или индукции B магнитного поля.

Однако при возрастании скорости иона до значений, соизмеримых со скоростью света, начинает сказываться изменение его массы. Период обращения T возрастает и перестает быть равным T_0 . Условие синхронности нарушается.

7. Рассмотрим подробнее процессы ускорения иона в циклотроне при $T = T_0$ и при $T > T_0$. Пусть в начальный момент $t = t_1$ ион движется через зазор между дуантами, а напряженность ускоряющего электрического поля максимальна и равна E_0 (рис. 18.15). Если $T = T_0$, то и во все последующие моменты времени $t_2 = t_1 + T_0/2$, $t_3 = t_2 + T_0/2$ и т. д., соответствующие прохождению иона между дуантами, электрическое поле максимально и совпадает с направлением движения иона. Поэтому энергия иона будет непрерывно возрастать. Это явление аналогично возрастанию энергии колеблющейся консервативной системы при резонансе.

Если $T > T_0$, то ион в своем движении отстает от изменения электрического поля. Он проходит через зазор в моменты времени $t'_2 = t_1 + T/2$, $t'_3 = t'_2 + T/2$ и т. д., соответствующие все более и более малым значениям напряженности электрического поля. Поэтому ускорение иона в циклотроне постепенно уменьшается. Наконец, начиная с некоторого момента t'_n ион попадает в зазоре не в ускоряющее, а в замедляющее поле. В процессе дальнейшего движения иона его скорость, масса и кинетическая энергия постепенно уменьшаются. Период обращения T также уменьшается, приближаясь к T_0 .

Можно показать, что предельная энергия, которую имеет ион в конце процесса ускорения (перед началом торможения), равна

$$W_{\text{пред}} = 4 \sqrt{m_0 c^2 q U_0 / \pi}, \quad (18.30)$$

где q и m_0 — заряд и масса покоящегося иона, c — скорость света, U_0 — амплитуда напряжения между дуантами. Таким образом, предельная энергия иона пропорциональна $\sqrt{U_0}$.

Из формулы (18.30) видно, что предельная энергия, приобретаемая заряженной частицей в циклотроне, тем больше, чем больше ее масса покоя и заряд. Так, например, при $U_0 = 100$ кВ для протона $W_{\text{пред}} = 21,9$ МэВ, а для электрона $W_{\text{пред}} = 0,51$ МэВ. Поэтому циклотрон мало пригоден для ускорения электронов.

8. Указанные выше теоретические значения предельной энергии ионов в действительности получить не удастся. Оказалось, что при соблюдении строгой однородности магнитного поля движение ионов в циклотроне является неустойчивым. При случайных отклонениях ионов от спиральной орбиты они не возвращаются на нее, а ударяются о стенки дуантов и тормозятся. Расчеты, которые мы опускаем, показывают, что для обеспечения устойчивости ионов на орбите необходимо, чтобы индукция B магнитного поля слегка уменьшалась от центра к краям дуантов. Поэтому возрастание периода обращения иона в процессе ускорения в циклотроне происходит не только из-за увеличения его массы, но и из-за ослабления магнитного поля. В ре-

зультате совместного действия обеих причин дальнейшее ускорение иона прекращается при его энергии, меньшей $W_{\text{пред}}$.

9. Максимальную энергию ионов, ускоряемых в циклотроне, можно было бы значительно повысить, если по мере их разгона и удаления от центра дуантов период T_0 изменения электрического поля постепенно

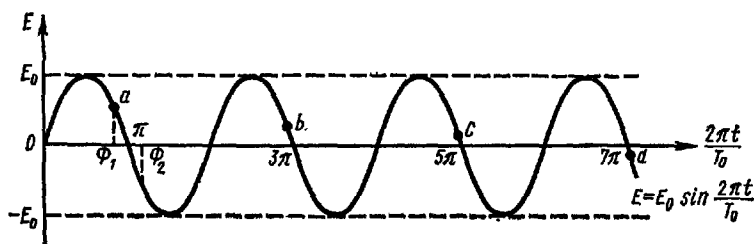


Рис. 18.16

увеличивать. Однако следует иметь в виду, что в циклотрон непрерывно поступают (впрыскиваются) ускоряемые частицы. Проследить за одной частицей в циклотроне и изменять значение периода T_0 в соответствии с изменением периода ее обращения практически невозможно. Тем более не представляется возможным осуществить необходимое изменение периода T_0 в случае множества ускоряемых ионов. На первый взгляд кажется, что повышение кинетической энергии ионов в той области скоростей, где сказывается изменение массы частиц в зависимости от их скорости, невозможно.

В 1944 г. советский физик В. И. Векслер доказал существование принципа автофазировки¹. Это открытие оказало огромное влияние на все дальнейшее развитие ускорительной техники и показало принципиальную возможность ускорять частицы, движущиеся с большими скоростями. На основе принципа автофазировки были спроектированы и построены сверхмощные циклические ускорители различного типа, позволяющие получить пучки заряженных частиц с энергиями порядка десятков и даже сотен миллиардов электронвольт.

10. Для пояснения принципа автофазировки рассмотрим движение в циклотроне положительных ионов, энергия W которых такова, что зависимость их массы от скорости играет существенную роль. Ионы такой энергии получают с помощью какого-нибудь другого ускорителя, например линейного, и вводят в циклотрон. Пусть период T_0 переменного электрического поля между дуантами выбран равным периоду T обращения ионов в магнитном поле циклотрона,

Зависимость напряженности E электрического поля в циклотроне от времени t представлена на рис. 18.16, где по оси абсцисс отложена фаза напряженности $\Phi = 2\pi t/T_0$. Если ионы попадают в зазор между дуантами в те моменты времени t , когда $\Phi = \pi, 3\pi, 5\pi$ и т. д., то $E=0$ и поле не оказывает никакого влияния на движение этих ионов.

¹ В 1945 г. этот принцип был независимо от Векслера установлен американским физиком Е. Мак-Милланом.

Они будут равномерно вращаться с периодом T_0 по устойчивой круговой орбите, соответствующей их энергии W . Ионы, попадающие в зазор несколько раньше (например, при $\Phi = \Phi_1$), ускоряются электрическим полем. Их масса и период обращения несколько увеличиваются. Поэтому они в своем движении постепенно отстают от изменения поля. Моменты последовательных прохождений этих ионов через зазор из одного и того же дуанта в другой обозначены на рис. 18.16 точками a, b, c и d . Так как точка d соответствует движению ионов уже в тормозящем поле, то скорость и масса ионов, а также их период обращения T в дальнейшем постепенно уменьшаются. Когда T станет меньше T_0 , ионы в своем движении будут опережать изменения поля. Поэтому они в конце концов опять будут попадать в зазор в ускоряющее поле и вновь будет происходить процесс увеличения их скорости и периода обращения. Аналогичный колебательный процесс, но только в обратной последовательности, происходит с ионами, которые попадают в циклотрон при $\Phi_2 > \pi$.

Из сказанного выше ясно, что все ионы, поступающие в зазор между дуантами циклотрона при значениях фазы Φ , отличных от $\pi, 3\pi, 5\pi$ и т. д., совершают медленные колебания вокруг устойчивой круговой орбиты, соответствующей их начальной энергии W . Период обращения ионов периодически изменяется, оставаясь в среднем равным периоду T_0 электрического поля, а их энергия в среднем равна энергии W , соответствующей устойчивому вращению с периодом T_0 в магнитном поле ускорителя.

Таким образом, все заряженные частицы движутся в ускорителе в среднем с и н х р о н н о с изменением электрического поля. Этот результат и является выражением п р и н ц и п а а в т о ф а з и р о в к и.

11. Из принципа автофазировки следует, что при достаточно медленном увеличении периода T_0 электрического поля соответственно возрастает и период обращения заряженных частиц в ускорителе. Среднее значение энергии всех частиц при этом постепенно увеличивается, так как согласно формуле (18.29') возрастание T при $B = \text{const}$ возможно лишь за счет увеличения массы m частиц, что может происходить только в результате увеличения их скорости.

Основанный на этом принципе циклический ускоритель ионов получил название **фазотрона**. В фазотроне магнитное поле постоянно, а частота $\nu_0 = 1/T_0$ переменного электрического поля м е д л е н н о и з м е н я е т с я с периодом $\tau \gg T_0$. Ускоряемые ионы вводятся в фазотрон в тот момент, когда частота ν_0 максимальна и равна частоте обращения в магнитном поле фазотрона ионов, энергия которых мала. При минимальном значении ν_0 энергия ионов становится наибольшей и они с помощью специальных устройств выводятся из фазотрона. Таким образом, фазотрон позволяет получить пульсирующий пучок ионов большой энергии.

По мере ускорения ионов в фазотроне радиус их орбиты возрастает. Поэтому предельное значение энергии ионов определяется индукцией магнитного поля и диаметром полюсных наконечников электромагнита. Чтобы представить себе размеры электромагнита действующего в СССР

фазотрона, ускоряющего протоны до энергии в 680 Мэв, укажем, что его масса $7 \cdot 10^6$ кг, а диаметр полюсов 6 м.

12. Фазотрон мало пригоден для ускорения электронов, так как уже при энергии электрона порядка нескольких мегаэлектронвольт его скорость отличается от скорости света примерно на 1%. Поэтому его масса, радиус орбиты и период обращения очень быстро возрастают при ускорении.

Для получения пучков электронов большой энергии применяют два других типа циклических ускорителей — **бетатрон** и **синхротрон**. Бетатрон основан на явлении электромагнитной индукции и будет рассмотрен в гл. XXI.

В синхротроне частота ускоряющего электрического поля постоянна, а индукция B магнитного поля меняется во времени. В теории относительности показано (см. т. III, § 9.6), что полная энергия W частицы пропорциональна ее массе m :

$$W = mc^2, \quad (18.31)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Поэтому формулу (18.29') для периода обращения электрона в магнитном поле синхротрона можно записать в виде

$$T = \frac{2\pi}{ec^2} \frac{W}{B}. \quad (18.32)$$

Следовательно, для выполнения условия синхронизма (18.29) при $T_0 = \text{const}$ необходимо, чтобы в процессе ускорения электрона индукция магнитного поля возрастала пропорционально полной энергии электрона:

$$B = \frac{2\pi}{ec^2} \frac{W}{T_0},$$

где T_0 — период высокочастотного ускоряющего электрического поля. В синхротроне

$$\frac{m}{B} = \frac{eT_0}{2\pi} = \text{const}$$

и ускоряемые электроны движутся по орбитам, близким к круговым (см. формулу (18.19), где $v \approx c$). Поэтому в синхротронах применяют кольцевые магниты, создающие магнитное поле в сравнительно узкой области вблизи круговой орбиты электрона. Сердечник электромагнита собирается, подобно сердечнику обычного трансформатора, из тонких железных пластин, так как это предотвращает возникновение в нем индукционных токов при изменении магнитного поля (см. § 19.3).

Из (18.19), где $v \approx c$, и (18.31) видно, что радиус r_0 круговой орбиты электрона в синхротроне и соответственно размеры всего ускорителя пропорциональны энергии $W_{\text{макс}}$, приобретаемой электронами:

$$r_0 = W_{\text{макс}} / ecB_{\text{макс}}, \quad (18.33)$$

где $B_{\text{макс}}$ — индукция магнитного поля в конце цикла ускорения электронов.

13. В электродинамике доказывается, что всякий ускоренно движущийся заряд должен излучать электромагнитные волны. В синхротроне электрон движется с большим нормальным ускорением, поэтому потери энергии на излучение должны быть значительными. Этот вопрос впервые был рассмотрен советскими физиками Л. А. Арцимовичем, И. Я. Померанчуком и Д. Д. Иваненко. Оказалось, что энергия, теряемая электроном за один оборот, обратно пропорциональна радиусу орбиты и прямо пропорциональна четвертой степени его энергии. Если эта энергия станет равной энергии, сообщаемой электрону электрическим полем за один оборот, то дальнейшее ускорение электрона станет невозможным.

14. Наиболее мощным ускорителем протонов является **синхрофазотрон**. В нем комбинируются принципы, положенные в основу работы синхротрона и фазотрона. В синхрофазотроне одновременно изменяются и частота ν_0 ускоряющего электрического поля, и индукция B магнитного поля. Расчеты показывают, что путем согласованного уменьшения ν_0 и увеличения B можно добиться такого состояния, при котором ускоряемые протоны будут двигаться по круговой орбите постоянного радиуса. Поэтому в синхрофазотроне применяется кольцевой электромагнит, подобный магниту синхротрона.

15. Для нормальной работы синхротрона и синхрофазотрона необходимо, чтобы движение ускоряемых в них частиц было устойчивым. Это значит, что при случайных отклонениях частицы от расчетной круговой орбиты как в радиальном, так и в вертикальном направлениях на частицу должна действовать сила, возвращающая ее на расчетную орбиту. Оказалось, что для обеспечения вертикальной устойчивости нужно, чтобы вблизи расчетной орбиты индукция магнитного поля убывала с увеличением расстояния r от центра орбиты:

$$B = \text{const}/r^n, \quad (18.34)$$

где $n > 0$. В свою очередь, радиальная устойчивость обеспечивается, если $n < 1$. Таким образом, условия одновременного осуществления вертикальной (аксиальной) и радиальной устойчивости имеют вид

$$0 < n < 1 \quad (18.35)$$

Циклические ускорители, удовлетворяющие указанным условиям, называют ускорителями с «мягкой фокусировкой». Расчеты показывают, что с увеличением энергии $W_{\text{макс}}$, приобретаемой частицами в таком ускорителе, очень быстро возрастают масса электромагнита (приблизительно пропорционально $W_{\text{макс}}^3$) и стоимость ускорителя. Например, сооружение синхротрона на энергии электронов $W_{\text{макс}} > (1 \div 1,5)$ ГэВ оказывается экономически неоправданным.

16. Дальнейшее увеличение энергии $W_{\text{макс}}$ частиц, ускоряемых в синхротронах и синхрофазотронах, было достигнуто путем замены «мягкой фокусировки» на так называемую «жесткую фокусировку». В ускорителях с жесткой фокусировкой частица движется по орбите, близкой к круговой, вдоль которой попеременно расположены магнитные секции двух типов. Одни создают магнитное

поле вида (18.34), где $n \ll 0$ (например, $n = -100$), а другие — поле вида (18.34), где $n \gg 1$. Секции первого типа обеспечивают очень сильную радиальную фокусировку пучка ускоряемых частиц за счет его некоторого размытия в вертикальном направлении. Секции второго типа обеспечивают очень сильную вертикальную фокусировку за счет некоторого радиального размытия пучка. В результате совместного действия на ускоряемые частицы магнитных полей обоих типов размах радиальных и вертикальных колебаний частиц около расчетной орбиты радиуса r_0 оказывается значительно меньшим, чем в ускорителе с мягкой фокусировкой. Соответственно можно существенно уменьшить поперечное сечение вакуумной камеры ускорителя, массу электромагнита и стоимость всей установки.

Во всех наиболее мощных современных синхротронах и синхрофазотронах использован метод жесткой фокусировки. В настоящее время действуют синхротроны с жесткой фокусировкой, сообщающие электронам энергию $W_{\text{макс}} = 10$ ГэВ. Первый такой синхрофазотрон, ускоряющий протоны до $W_{\text{макс}} = 28$ ГэВ, был запущен в 1960 г. в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) вблизи Женевы (Швейцария). Масса его электромагнита составляет 3 тыс. тонн, тогда как для сооружения слабофокусирующего ускорителя на ту же энергию протонов понадобился бы электромагнит массой в 10^6 т! В 1967 г. был введен в строй синхрофазотрон Института физики высоких энергий под Серпуховом. Этот ускоритель с жесткой фокусировкой сообщает протонам энергию $W_{\text{макс}} = 76$ ГэВ. В 1972 г. в Батавии (близ Чикаго, США) начал действовать синхрофазотрон, дающий пучок протонов с энергией $W_{\text{макс}} = 400$ ГэВ.

Наибольшие значения магнитной индукции, осуществимые в синхрофазотронах, не превосходят $(1,5 \div 2)$ Т. Поэтому радиусы r_0 орбит протонов и размеры этих гигантских ускорителей весьма велики. Например, в Серпуховском синхрофазотроне $r_0 \approx 230$ м!

17. Бомбардируя частицами высокой энергии неподвижную мишень, нельзя использовать всю кинетическую энергию этих частиц для осуществления исследуемых ядерных реакций. Часть энергии налетающей частицы расходуется на сообщение кинетической энергии частицам, являющимся продуктами реакции. Это связано с тем, что при столкновении должен выполняться не только закон сохранения энергии, но и закон сохранения импульса. Расчеты показывают, что доля кинетической энергии W_k налетающей частицы, полезно используемая для осуществления ядерной реакции, убывает по мере увеличения W_k . Поэтому наряду с созданием сверхмощных ускорителей заряженных частиц разрабатываются установки, в которых используется метод встречных пучков. Например, в ЦЕРНе построен ускоритель со встречными протон-протонными пучками, в каждом из которых энергия протонов равна 31,5 ГэВ. Суммарный импульс двух протонов, движущихся до столкновения навстречу друг другу с численно одинаковыми скоростями, равен нулю. Поэтому энергия столкновения этих двух частиц достигает 63 ГэВ. Такую же энергию столкновения можно получить, бомбардируя пучком протонов неподвижную водородную мишень, лишь при энергии налетающих протонов порядка 2 тыс. ГэВ!

Вопросы для повторения

1. Какая сила действует на электрический заряд, движущийся в магнитном поле? Чему она равна и как направлена?
2. Объясните взаимодействие параллельных проводников с токами на основе взаимодействия между движущимися зарядами.
3. В чем состоит явление Холла и как оно объясняется?
4. Как на основе явления Холла определить тип примесной проводимости полупроводника?
5. Опишите экспериментальный метод определения удельного заряда электрона.
6. Каков принцип действия масс-спектрографа и для чего он применяется?
7. Для чего предназначен циклотрон и как он действует?
8. В чем состоит принцип автофазировки? Как он используется в современных ускорителях?

Примеры решения задач

Задача 18.1. Электрон, прошедший в ускоряющем электрическом поле разность потенциалов 10 кВ, движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Т, перпендикулярной его скорости. Определить момент импульса электрона.

Дано:

$$\Delta\varphi = 10^4 \text{ В}$$

$$B = 0,5 \text{ Т}$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$L = ?$$

Решение. На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца $F_L = -e[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, где e — абсолютное значение заряда электрона, \mathbf{v} — его скорость, \mathbf{B} — индукция магнитного поля. Если магнитное поле однородное, а векторы \mathbf{v} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны, то $F_L = evB = \text{const}$ и электрон движется по окружности, радиус r которой находим по формуле (18.19):

$$r = \frac{m}{e} \frac{v}{B}.$$

Момент импульса L электрона на круговой орбите численно равен произведению его импульса mv на радиус орбиты r :

$$L = mvr = mv \frac{m}{e} \frac{v}{B} = \frac{2m}{eB} \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия $mv^2/2$ приобретается электроном в ускоряющем электрическом поле. Поэтому она равна работе, совершаемой силами поля: $(1/2)mv^2 = e\Delta\varphi$. Таким образом,

$$L = \frac{2m\Delta\varphi}{B}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$L = \frac{2m\Delta\varphi}{B} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^4}{0,5} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = 3,64 \cdot 10^{-26} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

Задача 18.2. Циклотрон предназначен для ускорения протонов до энергии 5 МэВ. Каков должен быть радиус дуантов циклотрона, если индукция его магнитного поля 1 Т? Какова наименьшая продолжительность одного цикла работы этого ускорителя, если начальная энергия протонов пренебрежимо мала, а амплитуда напряжения между дуантами равна 16 кВ? Влиянием зависимости массы протона от его скорости пренебречь.

Дано:

$$W_{\text{пр}} = 8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$U = 16000 \text{ В}$$

$$B = 1 \text{ Т}$$

$$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$R = ?$$

$$t_{\text{мин}} = ?$$

Решение. Протон движется в циклотроне по спиральной орбите, состоящей из полуокружностей с постепенно увеличивающимся радиусом. Радиус полуокружности, описываемой протоном внутри дуанта, по формуле (18.19) равен

$$r = \frac{m}{q} \frac{v}{B} = \frac{\sqrt{2m}}{qB} \sqrt{\frac{mv^2}{2}} = \frac{\sqrt{2m}}{qB} \sqrt{W},$$

где m и q — соответственно масса и заряд протона, B — индукция магнитного поля и W — энергия протона

Радиус R дуантов должен быть больше максимального значения радиуса r орбиты, соответствующего расчетному значению $W_{\text{пр}}$ энергии протона:

$$R > \frac{\sqrt{2m}}{qB} \sqrt{W_{\text{пр}}}$$

Период обращения протона в циклотроне по формуле (18.20) равен $T = \frac{2\pi}{B} \frac{m}{q}$. За это время протон дважды проходит через ускоряющее электрическое поле между дуантами и его энергия возрастает на величину $\Delta W = 2qU$, где U — напряжение между дуантами в момент прохождения протона через их электрическое поле.

Продолжительность одного цикла ускорения протона до энергии $W_{\text{пр}}$ равна

$$t = \frac{W_{\text{пр}}}{\Delta W} T = \frac{W_{\text{пр}}}{2qU} \frac{2\pi m}{qB} = \frac{\pi m W_{\text{пр}}}{q^2 B U}$$

Это время будет минимальным, если U равно амплитудному значению $U_{\text{макс}}$, т. е.

$$t_{\text{мин}} = \frac{\pi m W_{\text{пр}}}{q^2 B U_{\text{макс}}}$$

Произведем вычисления в СИ:

$$R > \frac{\sqrt{2m}}{qB} \sqrt{W_{\text{пр}}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sqrt{8 \cdot 10^{-19}} \text{ м} = 0,323 \text{ м.}$$

$$t_{\text{мин}} = \frac{\pi m W_{\text{пр}}}{q^2 B U_{\text{макс}}} = \frac{3,14 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 8 \cdot 10^{-19}}{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 16000} \text{ с} = 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

Глава XIX

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 19.1. Основной закон электромагнитной индукции

1. В гл. XIV мы говорили о том, что Ампер, исследуя действие проводников с током друг на друга и на постоянные магниты, пришел к выводу об электродинамической природе магнетизма. В связи с этим он впервые предложил разбить все учение об электрических и магнитных явлениях на две части: электростатику и электродинамику. Идеи Ампера были очень холодно приняты его современниками. Признание их означало отказ от общепринятых в то время представлений об особой магнитной жидкости, позволявших объяснить взаимодействие постоянных магнитов без введения непонятных в то время молекулярных токов Ампера. Для объяснения действия проводника с током на магнитную стрелку сторонниками представлений о магнитной жидкости (Био и др.) была высказана гипотеза о том, что под действием тока нейтральная магнитная жидкость в проводнике поляризуется и он приобретает свойства магнита.

2. В 1824 г. французский физик Д. Араго обнаружил, что колебания свободно подвешенной магнитной стрелки затухают значительно быстрее, если над этой стрелкой или под ней находится медная пластинка. В 1825 г., видоизменив этот опыт, он обнаружил еще более поразительное явление: при быстром вращении медной пластинки расположенная под ней магнитная стрелка начинает вращаться в том же направлении. Казалось, что такое поведение стрелки можно объяснить поляризацией магнитной жидкости в пластинке, т. е. намагничиванием ее через влияние, которое аналогично известному из электростатики заряджению тел через влияние. Но в таком случае магнитная стрелка должна притягиваться как к вращающейся, так и к неподвижной пластине. опыты Араго, повторенные другими исследователями, показали, что ни к неподвижной, ни к вращающейся медной пластине стрелка не притягивается. Тем самым жидкостной теории магнетизма был нанесен серьезный удар. Для ее спасения Араго предположил существование в металлах особого «магнетизма вращения».

3. Правильное объяснение опытов Араго было дано спустя несколько лет выдающимся английским физиком М. Фарадеем, открывшим явление электромагнитной индукции. Фарадей был сторонником теории Ампера. Он считал, что между электрическими и магнитными явлениями существует тесная взаимосвязь. Ампер, Био и другие выяснили лишь одну сторону этой взаимосвязи, а именно магнитное действие тока. Фарадей считал необходимым исследовать электрическое действие магнитного поля. При этом Фарадей исходил из следующего: если электрические и магнитные явления взаимосвязаны и если вокруг проводника с током возникает магнитное поле, то естественно ожидать, что должно иметь место и обратное явление — возникновение электрического тока в замкнутом проводнике под действием магнитного поля. Однако первые опыты с проводником, помещенным в магнитное поле **п о с т о я н н о г о** тока, не дали положительных результатов.

4. Только в 1831 г., после десяти лет упорных поисков, Фарадею удалось, наконец, решить задачу, которую он поставил перед собой, и осуществить опыт, имевший огромное значение для дальнейшего

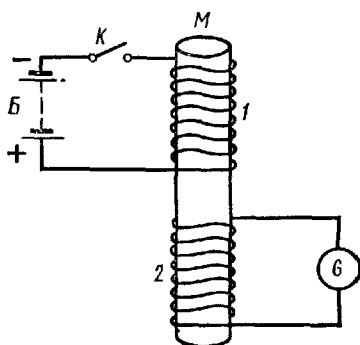


Рис. 19.1

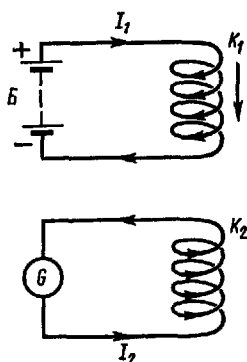


Рис. 19.2

развития физики и техники. Принципиальная схема установки Фарадея приведена на рис. 19.1. На деревянный стержень M намотаны два длинных куска изолированного медного провода. Концы одного из них через ключ K присоединены к батарее гальванических элементов B , а концы другого — к гальванометру G . При неизменной силе тока в первой цепи гальванометр показывал отсутствие тока во второй. Однако при замыкании и размыкании ключа K стрелка гальванометра слегка отклонялась и затем быстро возвращалась в положение равновесия, что свидетельствовало о возникновении в проводнике 2 кратковременного тока, названного Фарадеем **индукционным током**. Направления индукционных токов при замыкании и размыкании ключа K были прямо противоположными. Заменяв ключ K реостатом, Фарадей заметил, что при изменении силы тока I_1 в первом проводнике во втором по-прежнему наводится индукционный ток, направление которого зависит от того, уменьшается I_1 или увеличивается.

5. Изменение тока I_1 сопровождалось одновременным изменением его магнитного поля. Поэтому неясно было, что же является причиной возникновения индукционного тока: изменение тока I_1 или его магнитного поля в той части пространства, где находится второй проводник? Ответ на этот вопрос был получен Фарадеем с помощью следующих опытов. Надо взять две катушки (рис. 19.2), одна из которых, K_1 , замыкается на батарею B ; по этой катушке идет постоянный ток I_1 . Катушка K_2 замкнута на гальванометр. Если катушку K_1 приближать к K_2 , в последней возникает индукционный ток I_2 , направление которого показано на рис. 19.2. При удалении катушки K_1 от K_2 ток I_2 также возникает, но имеет противоположное направление. Аналогичная картина наблюдается при удалении или приближении катушки K_2 к неподвижной катушке K_1 . Наконец, ток I_2 отсутствует, когда взаимное расположение катушек не изменяется.

Опыты Фарадея ясно показали, что причиной возникновения индук-

ционного тока I_2 является изменение магнитного поля, пронизывающего катушку K_2 . Чтобы окончательно убедиться в этом, Фарадей провел еще один опыт. Катушка с током была заменена длинным полосовым магнитом (рис. 19.3). При перемещении магнита вдоль оси катушки K_2 было обнаружено возникновение в ней индукционного тока, направление которого зависело от того, каким полюсом был обращен к катушке магнит и удалялся он от нее или приближался к ней. Результаты опыта полностью подтвердили сделанный выше вывод о причине возникновения индукционного тока.

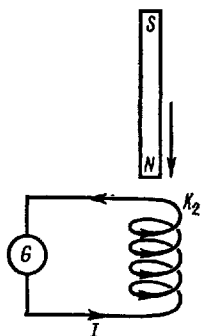


Рис. 19.3

6. В § 15.1 было показано, что существуют две векторные характеристики магнитного поля: магнитная индукция \mathbf{B} и напряженность \mathbf{H} . В переменном магнитном поле и \mathbf{B} , и \mathbf{H} изменяются. В рассмотренных нами опытах Фарадея относительная магнитная проницаемость μ материала сердечников катушек (дерево и воздух) практически не отличалась от единицы (см. гл. XX). Поэтому возникает вопрос — изменение какой из этих величин, \mathbf{B} или \mathbf{H} , определяет индукционный ток? Ответ и на этот вопрос был дан Фарадеем на основании опытов. По формуле (15.7) для магнитного поля в однородной и изотропной среде,

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H},$$

причем напряженность \mathbf{H} , как видно из (15.8), не зависит от свойств среды, в которой создается магнитное поле тока. Наоборот, \mathbf{B} прямо пропорционально относительной магнитной проницаемости среды.

Фарадей провел следующий опыт. На деревянное тороидальное кольцо наматывались две обмотки. Одна из них через ключ K была присоединена к батарее B , а другая — замкнута на гальванометр G (рис. 19.4). При замыкании и размыкании ключа K в цепи гальванометра возникал кратковременный индукционный ток. О силе этого тока можно было приближенно судить по показанию гальванометра. Затем деревянный сердечник тороида заменялся таким же по размерам железным: было замечено, что при прочих равных условиях индукционный ток возрастал. Этот опыт доказывал, что в явлении возникновения индукционного тока основную роль играла магнитная индукция, а не напряженность магнитного поля.

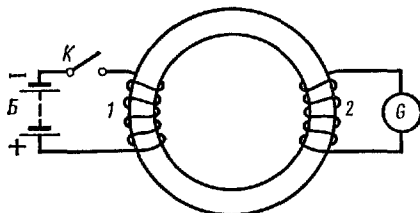


Рис. 19.4

7. Открытое Фарадеем явление получило название **электромагнитной индукции**. Оно наряду с обнаруженным им же в 1821 г. явлением вращения прямолинейного проводника с током вокруг полосового магнита явилось той основой, на базе которой в последующие годы

были созданы электрические двигатели, генераторы и трансформаторы. Поэтому Фарадей заслуженно считается одним из основателей электротехники.

Ток проводимости в замкнутой цепи может возникнуть только под действием стороннего электрического поля. Следовательно в замкнутом контуре, находящемся в переменном магнитном поле, появляется так называемое **индуктированное электрическое поле**. Энергетической мерой этого поля служит **электродвижущая сила электромагнитной индукции** \mathcal{E}_i .

Дальнейшие исследования индукционного тока в контурах различной формы и размеров показали, что *э. д. с. электромагнитной индукции \mathcal{E}_i в контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока Φ_m сквозь поверхность, натянутую на этот контур (закон Фарадея):*

$$\mathcal{E}_i = \kappa \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (19.1)$$

где абсолютное значение коэффициента пропорциональности κ зависит только от выбора единиц величин, входящих в эту формулу. В системах единиц СИ и СГСМ $\kappa = 1$.

8. Профессор Петербургского университета Э. Х. Ленц исследовал связь между направлением индукционного тока и характером вызвавшего его изменения магнитного потока. В 1834 г. он установил следующий закон (**закон Ленца**): *при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока.*

Так, например, при приближении полосового магнита к замкнутой на гальванометр катушке (см. рис. 19.3) в ней наводится индукционный ток, который своим магнитным действием препятствует приближению магнита и связанному с этим возрастанию магнитного потока сквозь витки катушки. При удалении магнита от катушки в ней наводится ток противоположного направления, который своим магнитным действием также препятствует движению магнита. Легко проверить, что внутри катушки векторы магнитной индукции поля магнита и поля индукционного тока в первом случае направлены в противоположные стороны, а во втором — в одну и ту же сторону.

9. Интересной иллюстрацией закона Ленца служит следующий опыт (рис. 19.5). На вертикальный железный сердечник катушки с большим числом витков провода свободно надето алюминиевое кольцо A . Катушку можно включить в цепь аккумуляторной батареи B с помощью ключа K . При замыкании цепи катушки кольцо подскакивает вверх и падает на стол рядом с ней. Чтобы вновь надеть это кольцо на сердечник катушки, находящейся под током, требуется приложить некоторое усилие. В момент выключения тока кольцо, надетое на сердечник, прижимается к катушке. Такое поведение кольца объясняется возникновением в нем индукционного тока. Если ток в катушке отсутствует, то магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную кольцом (магнитный поток, сцепленный с кольцом), равен нулю. При

замыкании цепи катушки магнитный поток, сцепленный с кольцом, резко возрастает. В кольце возникает индукционный ток, магнитное поле которого, согласно закону Ленца, должно быть *п р о т и в о п о л о ж н о* по направлению магнитному полю тока в катушке. Поэтому индукционный ток в кольце направлен противоположно току в витках катушки. Между такими токами действует сила взаимного отталкивания, и кольцо подбрасывается вверх. При размыкании цепи катушки

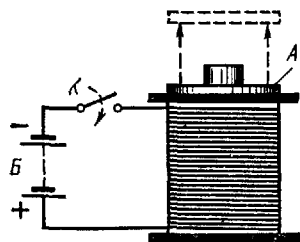


Рис. 19.5

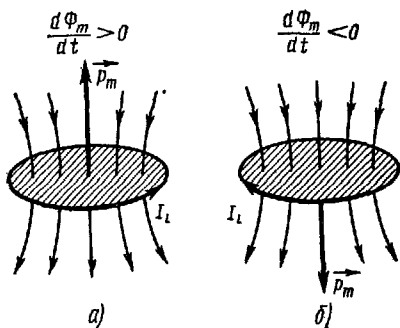


Рис. 19.6

магнитный поток, сцепленный с кольцом, быстро уменьшается. Теперь в кольце возникает индукционный ток, *с о в п а д а ю щ и й* по направлению с током в катушке. Поэтому кольцо притягивается к ней.

Направления индукционного тока I_i при увеличении и уменьшении магнитного потока, сцепленного с кольцом, показаны на рис. 19.6.

10. Условимся считать э. д. с. электромагнитной индукции в контуре *п о л о ж и т е л ь н о й*, если магнитный момент p_m соответствующего ей индукционного тока образует *о с т р ы й* угол с линиями магнитной индукции того поля, которое наводит этот ток. Тогда в случае, изображенном на рис. 19.6, а, $\mathcal{E}_i < 0$, а в случае показанном на рис. 19.6, б $\mathcal{E}_i > 0$. Сопоставив этот результат с формулой (19.1) и полагая, что все входящие в нее величины выражены в единицах одной и той же системы (СИ или СГСМ), получим, что $k = -1$ и

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (19.2)$$

Формула (19.2), объединяющая законы Фарадея и Ленца, является математическим выражением **основного закона электромагнитной индукции**: *электродвижущая сила электромагнитной индукции в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур.*

В формуле (19.2) Φ_m — *п о л н ы й* магнитный поток сквозь поверхность, натянутую на контур. Поэтому в электротехнике основной закон электромагнитной индукции принято записывать в форме

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (19.2')$$

где Ψ — потокосцепление контура (см. § 17.4, п. 4).

Формула (19.2') позволяет установить единицу потенциала в системе СГСМ и связать ее с единицей потенциала в СИ. За единицу потенциала в системе СГСМ принимается э. д. с. индукции, возникающая в замкнутом контуре при скорости изменения потокосцепления контура, равной 1 Мкс/с:

$$1 \text{ СГСМ}_\varphi = 1 \text{ Мкс/с.}$$

В § 16.2 было показано, что $1 \text{ Мкс} = 10^{-8} \text{ Вб}$. Поэтому

$$1 \text{ СГСМ}_\varphi = 10^{-8} \text{ Вб/с} = 10^{-8} \text{ СИ}_\varphi = 10^{-8} \text{ В.}$$

11. Немецкий физик Г. Гельмгольц показал, что основной закон электромагнитной индукции (19.2) является следствием закона сохранения энергии. Рассмотрим замкнутый проводящий контур, помещенный в неоднородное магнитное поле (например, в магнитное поле полбсового магнита или катушки с током). Если этот контур включить в цепь гальванического элемента, то под действием сил Ампера незакрепленный контур придет в движение.

Элементарная работа δA , совершаемая при перемещении контура с током I за время dt , выражается формулой (17.30): $\delta A = Id\Phi_m$, где $d\Phi_m$ — изменение магнитного потока сквозь площадь контура, происходящее за время dt . Работа, совершаемая током за время dt по преодолению электрического сопротивления R цепи, равна $I^2 R dt$. Наконец, полная работа, совершаемая за это же время гальваническим элементом, равна $\mathcal{E} I dt$. По закону сохранения энергии сумма первых двух работ должна быть равна третьей:

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + I d\Phi_m,$$

откуда

$$I = \frac{\mathcal{E} + (-d\Phi_m/dt)}{R} = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R}, \quad (19.3)$$

где $\mathcal{E}_i = -d\Phi_m/dt$.

Таким образом, при изменении магнитного потока, сцепленного с контуром, в последнем возникает добавочная электродвижущая сила, которая выражается формулой (19.2).

12. Легко показать, что э. д. с. электромагнитной индукции возникает не только в замкнутом проводнике, но и в отрезке проводника, пересекающем при своем движении линии индукции магнитного поля. Для простоты будем считать, что отрезок прямолинейного металлического проводника AC длиной l движется с постоянной скоростью \mathbf{v} в плоскости XOZ , перпендикулярной вектору \mathbf{B} магнитной индукции (рис. 19.7). При этом на электроны проводимости металла действует сила Лоренца

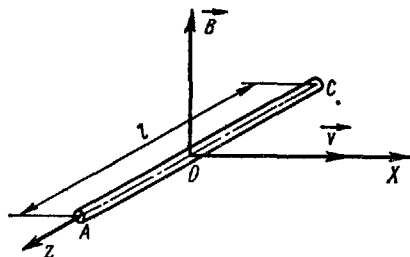


Рис. 19.7

$$\mathbf{F}_L = -e[(\mathbf{v} + \mathbf{v}')\mathbf{B}], \quad (19.4)$$

где \mathbf{v}' — скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника. Эта скорость обусловлена касательной к проводнику составляющей силы Лоренца $\mathbf{F}_L' = -e[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ и направлена от A к C . Она отлична от нуля только в самом начале движения проводника, так как упорядоченное движение электронов вдоль проводника от A к C вызывает возникновение в проводнике электростатического поля, препятствующего дальнейшему перераспределению электронов. Вектор \mathbf{E} напряженности этого поля направлен от A к C и численно равен

$$E = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{l}, \quad (19.5)$$

где φ_A и φ_C — потенциалы точек A и C .

Сила $-e\mathbf{E}$, действующая на электрон со стороны электростатического поля, противоположна по направлению силе Лоренца. При равенстве численных значений этих сил дальнейшее передвижение электронов по проводнику прекратится. Поэтому для равновесного состояния ($\mathbf{v}' = 0$) имеем

$$eE = evB, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\varphi}{l} = vB. \quad (19.6)$$

По закону Ома [см. (9.9)] для разомкнутой цепи ($I = 0$),

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C = -\mathcal{E},$$

где \mathcal{E} — электродвижущая сила, приложенная в цепи, т. е. в проводнике AC . Так как на участке AC никаких гальванических элементов или других источников электрической энергии нет, то естественно считать, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i$. Заменив разность потенциалов $\Delta\varphi$ ее выражением из (19.6), получим

$$\mathcal{E}_i = -Blv. \quad (19.7)$$

Так как вдоль оси Ox скорость движения проводника $v = dx/dt$, то

$$\mathcal{E}_i = -Bl(dx/dt). \quad (19.7')$$

Произведение $ldx = dS$ представляет площадь поверхности, очерчиваемой проводником при его движении за время dt , а $BdS = d\Phi_m$ — магнитный поток сквозь эту поверхность. Следовательно, э. д. с. индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (19.8)$$

13. Полученный результат (19.8) по своей форме тождествен уравнению (19.2) основного закона электромагнитной индукции. Однако смысл правой части этого уравнения для контура и отрезка проводника различен. В первом случае $d\Phi_m/dt$ — скорость изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур. Во втором — это отношение магнитного потока сквозь поверхность, очерчиваемую проводником при его движении за бесконечно малый промежуток вре-

мени, к величине dt этого промежутка, так что $d\Phi_m/dt$ часто называют скоростью пересечения проводником линий индукции магнитного поля.

При перемещении в магнитном поле замкнутого проводящего контура электродвижущие силы электромагнитной индукции наводятся во всех его участках, пересекающих линии магнитной индукции. Алгебраическая сумма этих э. д. с. равна общей электродвижущей силе индукции в контуре. В соответствии с законом сохранения энергии для перемещения замкнутого проводника в магнитном поле следует совершить работу, равную работе возникающего в нем индукционного тока.

14. С помощью силы Лоренца можно объяснить возникновение индукционного тока в проводниках, движущихся в магнитном поле. Однако это объяснение не универсально. Оно неприменимо для случая электромагнитной индукции в неподвижных замкнутых проводниках, находящихся в переменном магнитном поле. Действительно, сила Лоренца на неподвижные заряды не действует и привести их в движение не может. Поэтому для истолкования электромагнитной индукции в неподвижных проводниках необходимо считать, что *переменное магнитное поле вызывает появление электрического поля, под действием которого и возникает индукционный ток в замкнутом проводнике*. Найдем связь между напряженностью \mathbf{E} этого поля и изменением потока магнитной индукции сквозь поверхность, натянутую на проводящий контур. В соответствии с данным в § 9.2 определением электродвижущей силы запишем, что

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \mathbf{E}_{\text{стор}} d\mathbf{l}, \quad (19.9)$$

где интегрирование распространено на всю длину L замкнутого проводника. Напряженность поля сторонних сил $\mathbf{E}_{\text{стор}}$ в (19.9) согласно формуле (9.1) равна

$$\mathbf{E}_{\text{стор}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{кул}}$$

где $\mathbf{E}_{\text{кул}}$ — напряженность электростатического поля. Подставим это выражение в (19.9):

$$\mathcal{E}_i = \oint_L (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{кул}}) d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} - \oint_L \mathbf{E}_{\text{кул}} d\mathbf{l}.$$

В силу потенциальности электростатического поля $\oint_L \mathbf{E}_{\text{кул}} d\mathbf{l} = 0$, и тогда

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (19.10)$$

Магнитный поток Φ_m сквозь поверхность, натянутую на контур, может измениться по ряду причин — благодаря изменению формы контура и его расположения в магнитном поле, а также вследствие зависимости магнитной индукции от времени. Полная производная $d\Phi_m/dt$

учитывает действие всех этих причин. В случае неподвижного контура Φ_m изменяется только вследствие зависимости магнитной индукции от времени. Поэтому вместо $d\Phi_m/dt$ следует брать частную производную $\partial\Phi_m/\partial t$, так что э. д. с. индукции в неподвижном замкнутом проводнике

$$\mathcal{E}_l = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}. \quad (19.11)$$

Из (19.10) и (19.11) окончательно получим

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial t} \quad (19.12)$$

Таким образом, *электрическое поле, возбуждаемое переменным магнитным полем, является вихревым*; циркуляция вектора его напряженности вдоль замкнутого контура отлична от нуля¹.

В согласии с принятой в физике праввинтовой системой координат направление вектора нормали \mathbf{n} , используемого при определении магнитного потока Φ_m в правой части соотношения (19.12), выбирается так, чтобы из конца вектора \mathbf{n} обход замкнутого контура L при вычислении циркуляции \mathbf{E} был виден происходящим против часовой стрелки.

15. Различное истолкование электромагнитной индукции в движущихся и неподвижных проводниках является результатом зависимости напряженности электрического поля и магнитной индукции от выбора системы отсчета. В действительности, как показал Максвелл (см. гл. XX), электрическое и магнитное поля взаимосвязаны и образуют единое **электромагнитное поле**. В дальнейшем будет показано, что в некоторых случаях и в некоторых системах отсчета это поле может проявляться как чисто электрическое или как чисто магнитное. Поэтому разделение электромагнитного поля на электрическое и магнитное является **относительным**. Оно зависит от того, в какой системе отсчета рассматривается действие этого поля.

§ 19.2. Электрический ток в витке, движущемся в однородном магнитном поле

1. По закону Ома, сила тока в витке, представляющем собой замкнутую электрическую цепь,

$$I = \mathcal{E}/R,$$

где R — электрическое сопротивление витка, \mathcal{E} — алгебраическая сумма всех электродвижущих сил, действующих в этом контуре.

В дальнейшем будем считать, что виток при движении не деформируется и что никакие другие э. д. с., кроме э. д. с. электромагнитной индукции, в нем не действуют.

2. При поступательном движении витка его ориентация по отношению к вектору магнитной индукции \mathbf{B}_0 внешнего **однород-**

¹ Д. К. Максвелл обобщил этот результат на произвольный замкнутый контур, проведенный в переменном магнитном поле (см. гл. XXI).

и о г о поля не изменяется. Поэтому магнитный поток сквозь площадь S витка остается постоянным:

$$\Phi_m = \int_S B_{0n} dS = \text{const.}$$

$$\text{Следовательно, } \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 0 \text{ и} \\ I = 0.$$

В витке, движущемся поступательно в однородном магнитном поле, индукционный ток не возникает.

3. Из равенства нулю э. д. с. индукции для всего витка не следует делать вывод, что $\mathcal{E}_i = 0$ в любом отдельном элементе этого контура. В качестве примера рассмотрим прямоугольную рамку $ACDF$ (рис. 19.8), движущуюся со скоростью \mathbf{v} в однородном магнитном поле. Плоскость рамки перпендикулярна вектору магнитной индукции \mathbf{B}_0 , а скорость \mathbf{v} параллельна сторонам AF и CD . Обозначим э. д. с. индукции, возникающие в сторонах AC , CD , DF и FA рамки, соответственно через \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_3 и \mathcal{E}_4 . Стороны CD и FA при своем движении описывают не поверхности, а прямые линии. Поэтому для них $\Phi_m = 0$ и $(d\Phi_m/dt) = 0$. Следовательно, э. д. с. индукции в этих сторонах рамки не наводятся:

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4 = 0.$$

Э. д. с. индукции в сторонах AC и DF по формуле (19.7) численно равны:

$$|\mathcal{E}_1| = |\mathcal{E}_3| = B_0lv.$$

Направления векторов напряженностей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_3 соответствующих сторонних электрических полей показаны на рис. 19.8 стрелками. Таким образом, каждая из э. д. с. \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_3 в отдельности вызывает противоположные по направлению токи в рамке, т. е. эти э. д. с. различаются знаком:

$$\mathcal{E}_3 = -\mathcal{E}_1.$$

Полная э. д. с. индукции в рамке равна алгебраической сумме:

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 = 0.$$

Таким образом, хотя полная э. д. с. индукции в рамке равна нулю и индукционный ток в ней отсутствует, э. д. с. индукции в проводниках AC и DF отличны от нуля. В связи с этим электроны проводимости в сторонах AC и DF движущейся рамки перераспределяются таким образом, что создаваемое ими электростатическое поле компенсирует действие сторонних сил (сил Лоренца): потенциал постепенно изменя-

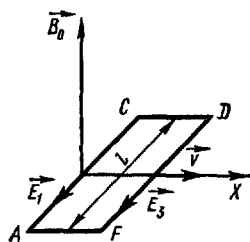


Рис. 19.8

ется от минимального значения в точках C и D до максимального в точках A и F , причем

$$\varphi_A - \varphi_C = \varphi_F - \varphi_D = |\mathcal{E}_1| = B_0 lv.$$

4. Если виток вращается вокруг оси, параллельной вектору магнитной индукции \mathbf{B}_0 однородного поля, то магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную витком, не изменяется и

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = 0.$$

Следовательно, индукционный ток в витке не возникает.

5. Иначе обстоит дело, если замкнутый проводник вращается вокруг оси, не параллельной вектору \mathbf{B}_0 . Рассмотрим простейший и в то же самое время наиболее часто встречающийся на практике

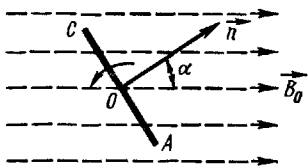


Рис. 19.9

случай вращения плоского витка в однородном магнитном поле, когда ось вращения лежит в плоскости витка и перпендикулярна вектору магнитной индукции. На рис. 19.9 плоскость витка AC и ось его вращения O перпендикулярны плоскости чертежа. Проведем вектор \mathbf{n} , нормальный к плоскости витка, и обозначим через α угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{B}_0 . Выберем начало отсчета времени t так, чтобы при $t = 0$

$\alpha = 0$. Если угловая скорость вращения витка постоянна и равна ω , то в произвольный момент времени угол $\alpha = \omega t$.

Магнитный поток сквозь площадь S , натянутую на виток, найдем по формуле (16.14):

$$\Phi_m = \int_S B_{0n} dS,$$

где $B_{0n} = B_0 \cos \alpha$ одинаковы на всей поверхности интегрирования S . Поэтому

$$\Phi_m = B_0 \cos \alpha \int_S dS = B_0 S \cos \alpha = B_0 S \cos \omega t. \quad (19.13)$$

Подставив значение Φ_m в основной закон электромагнитной индукции (19.2), найдем выражение для электродвижущей силы индукции, возникающей в витке:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = B_0 S \omega \sin \omega t. \quad (19.14)$$

6. Таким образом, в плоском витке, равномерно вращающемся в однородном магнитном поле, возбуждается э. д. с. индукции, изменяющаяся во времени по гармоническому закону. \mathcal{E}_i обращается в нуль при $\alpha = \omega t = 0, \pi, 2\pi$ и т. д., т. е. когда плоскость рамки перпендикулярна вектору магнитной индукции \mathbf{B}_0 . Э. д. с.

максимальна в те моменты времени, когда плоскость рамки располагается параллельно направлению поля:

$$\mathcal{E}_{\text{макс}} = B_0 S \omega \quad (19.15)$$

Поэтому формулу (19.14) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{\text{макс}} \sin \omega t \quad (19.14')$$

Возникновение э. д. с. индукции во вращающемся витке явилось основой для создания генераторов электрического тока.

7. Под действием э. д. с. индукции в витке возникает индукционный ток, также изменяющийся по гармоническому закону:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = I_{\text{макс}} \sin \omega t, \quad (19.16)$$

где R — сопротивление цепи, $I_{\text{макс}} = \mathcal{E}_{\text{макс}}/R$ — максимальный ток.

8. Подсчитаем электрический заряд q , проходящий через поперечное сечение витка вследствие существования в витке индукционного тока. Из определения силы тока следует, что $I_i = dq/dt$, поэтому

$$dq = I_i dt = \frac{\mathcal{E}_i}{R} dt$$

Заменяя \mathcal{E}_i по формуле (19.2), получим

$$dq = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt} dt = -\frac{1}{R} d\Phi_m.$$

Интегрируя это равенство, найдем

$$q = (\Phi'_m - \Phi''_m)/R, \quad (19.17)$$

где Φ'_m и Φ''_m — значения магнитного потока сквозь поверхность витка в его начальном и конечном положениях.

Таким образом, заряд q пропорционален уменьшению магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную витком, и обратно пропорционален электрическому сопротивлению цепи.

9. Пусть в начальный момент плоскость витка перпендикулярна направлению вектора \mathbf{B}_0 магнитной индукции однородного поля, а затем виток быстро повернут на 90° вокруг оси, перпендикулярной вектору \mathbf{B}_0 . Тогда $\Phi'_m = B_0 S$, $\Phi''_m = 0$ и

$$q = B_0 S/R, \quad (19.18)$$

где S — площадь витка.

Измеряя величину q баллистическим гальванометром и зная площадь витка и сопротивление R цепи, можно по формуле (19.18) определить магнитную индукцию B_0 . На этом принципе основаны специальные приборы для измерения магнитного потока и магнитной индукции, называемые **флюксметрами**.

10. Рассмотрим случай, когда в однородном магнитном поле равномерно вращается не один виток, а плоская рамка, состоящая из N после-

довательно соединенных одинаковых витков. Пусть ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна направлению поля. Тогда в каждом витке индуцируется э. д. с., выражаемая формулой (19.14). Все эти э. д. с. создают в витках одинаковые по направлению индукционные токи. Поэтому все э. д. с. имеют одинаковый знак, и результирующая э. д. с. индукции в рамке равна их арифметической сумме:

$$\mathcal{E}_i = NB_0S\omega \sin \omega t. \quad (19.19)$$

11. При выводе формул (19.13)—(19.16) и (19.19) мы предполагали, что магнитный поток Φ_m сквозь поверхность, ограниченную витком, создается только в нем и магнитным полем. Однако это не вполне точно, так как индукционный ток в витке также создает магнитное поле, которое накладывается на внешнее поле. Поэтому полный магнитный поток Φ_m нужно определять по формуле, отличной от (19.13):

$$\Phi_m = B_0S \cos \omega t + \int_S B_n dS, \quad (19.13')$$

где B_n — проекция на нормаль к плоскости витка вектора \mathbf{B} магнитной индукции поля, создаваемого индукционным током в витке. Второе слагаемое правой части уравнения (19.13') представляет собой так называемый **магнитный поток самоиндукции контура** Φ_{mc} . В электротехнике его называют, как уже указывалось в § 17.4, потокоцеплением самоиндукции. Способ вычисления Φ_{mc} рассмотрен в § 19.4.

Из основного закона электромагнитной индукции и выражения (19.13') следует, что э. д. с. индукции и индукционный ток в контуре равны:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = B_0S\omega \sin \omega t - \frac{d\Phi_{mc}}{dt}, \quad (19.14'')$$

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{B_0S\omega}{R} \sin \omega t - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_{mc}}{dt}. \quad (19.16')$$

§ 19.3. Вихревые токи (токи Фуко)

1. До сих пор мы рассматривали индукционные токи в **линейных контурах**, т. е. в проводниках, поперечные размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с их длиной. Однако индукционные токи возникают и в массивных проводниках. Отличие этих токов от индукционных в линейных проводниках состоит в том, что для их возникновения нет необходимости включать проводник в замкнутую цепь. Замкнутая цепь индукционного тока образуется в толще самого проводника. Поэтому индукционные токи в массивных проводниках носят вихревой характер.

2. Сила вихревого тока по закону Ома равна

$$I_{\text{вихр}} = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (19.20)$$

где Φ_m — магнитный поток, сцепленный с контуром тока, R — сопротивление цепи вихревого тока. Подсчитать это сопротивление трудно. Однако совершенно очевидно, что оно тем меньше, чем больше удельная проводимость материала проводника и чем больше его размеры. В массивных проводниках R мало и вихревые токи могут достигать большой силы даже в не очень быстро меняющихся магнитных полях (например, в магнитном поле, создаваемом обычным переменным током, частота которого 50 Гц).

3. Вихревые токи вызывают сильное нагревание проводников. На это впервые обратил внимание французский физик Л. Фуко, поэтому вихревые токи обычно называют **токами Фуко**. Из закона Джоуля—Ленца и формулы (19.20) следует, что количество теплоты, выделяемое в единицу времени вихревым током, пропорционально квадрату частоты изменения магнитного поля. Поэтому в индукционных печах, служащих для плавки металлов при помощи токов Фуко, магнитное поле создается переменным током высокой частоты.

В электрических машинах и трансформаторах токи Фуко приводят к значительным потерям энергии. Ввиду этого магнитные цепи электрических машин и сердечники трансформаторов делают не сплошными, а собирают из отдельных тонких листов железа, изолированных друг от друга специальным лаком или окалиной. Токи Фуко образуются в плоскостях, перпендикулярных линиям магнитной индукции (токи «охватывают» линии индукции). Поэтому плоскости пластин, из которых собирают магнитные цепи, следует располагать параллельно линиям магнитной индукции. Таким образом, можно сильно увеличить электрическое сопротивление магнитной цепи, почти не меняя ее магнитного сопротивления. Для увеличения удельного электрического сопротивления магнитных цепей к железу добавляют небольшую примесь кремния. Магнитные цепи и сердечники электрических установок, работающих при высоких частотах, изготавливают из **магнитодиэлектриков**, представляющих собой спрессованные под большим давлением смеси порошкообразных ферромагнитных веществ (см. § 20.6) и диэлектриков.

Развитие техники высоких и сверхвысоких частот потребовало создания материалов, в которых вредное влияние вихревых токов было бы минимальным. Поэтому магнитодиэлектрики стали изготавливать в виде тонких листов и лент, но это привело к их удорожанию и ухудшению магнитных свойств таких материалов. Проблема получения магнитных материалов с малой электропроводностью была решена в 40—50-х годах путем создания **ферритов** — полупроводниковых ферромагнитных материалов с удельным сопротивлением, в миллиарды раз превышающим удельное сопротивление металлических ферромагнитных веществ. Ферриты представляют собой химические соединения оксидов железа (Fe_2O_3) с оксидами других металлов. Общая формула для простых ферритов имеет вид $MeOFe_2O_3$, где Me — двухвалентный металл (например, Mg , Ni , Co , Mn , Cu , Zn и др.). Ферритовые изделия производят методом керамики, т. е. путем прессования порошкообразного вещества и последующего спекания при температурах свыше $1000^\circ C$.

4. На вихревые токи, возникающие в массивных проводниках при их движении в магнитном поле, действуют амперовы силы. В согласии с правилом Ленца вихревые токи имеют такое направление, что действующие на них амперовы силы должны тормозить движение проводника. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий опыт. Между полюсами сильного электромагнита качается массивный алюминиевый маятник (рис. 19.10,а). Если ток в обмотке электромагнита отсутствует, то маятник совершает слабо затухающие колебания. При включении тока затухание колебаний резко возрастает. Если магнитное поле достаточно сильное, то колебания маятника становятся аperiodическими—отклоненный маятник медленно возвращается в положение равновесия. Это явление широко используется для гашения колебаний подвижных систем электроизмерительных приборов.

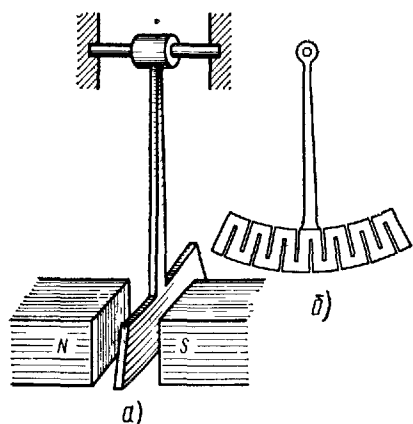


Рис. 19.10

Затухание колебаний маятника в магнитном поле уменьшится, если увеличить электрическое сопротивление маятника для индукционных токов. Это можно осуществить, сделав в маятнике большое число узких поперечных вырезов (рис. 19.10,б).

5. Токи Фуко действуют на источники индуктирующего их магнитного поля. Наглядным примером этого являются опыты Араго, рассмотренные в начале § 19.1. Вихревые токи, возникающие в медной пластинке при колебаниях расположенной вблизи нее магнитной стрелки, по закону Ленца тормозят движение стрелки. Наоборот, если стрелка неподвижна, а расположенная над стрелкой параллельная ей пластинка приводится в быстрое вращение, то в этой пластинке также возникают вихревые токи. Причина появления этих токов заключается в движении пластинки в магнитном поле стрелки. Если стрелка вращается синхронно с пластинкой, то в последней не возникает индукционного тока. По закону Ленца, индукционные токи Фуко в пластине противодействуют причине, вызвавшей их возникновение. Поэтому вращающаяся пластина увлекает за собой магнитную стрелку.

§ 19.4. Явление самоиндукции

1. Вокруг всякого проводника с током существует магнитное поле. Собственное магнитное поле контура создает магнитный поток самоиндукции $\Phi_{то}$ сквозь поверхность S , натянутую на этот контур:

$$\Phi_{mc} = \int_S B_n dS, \quad (19.21)$$

где B_n — проекция вектора индукции \mathbf{B} магнитного поля тока на нормаль к элементу поверхности dS .

По закону Био — Савара — Лапласа (15.5), магнитная индукция в точке, находящейся на расстоянии r от элемента $d\mathbf{l}$ контура тока I ,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}],$$

откуда

$$\mathbf{B} = \oint_l d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}], \quad (19.22)$$

где интегрирование распространено на всю длину l контура.

Проекция векторной суммы \mathbf{B} на некоторое направление равна алгебраической сумме проекций на это направление всех составляющих векторов. Поэтому

$$B_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]_n, \quad (19.23)$$

где $[d\mathbf{l} \mathbf{r}]_n$ — проекция векторного произведения $[d\mathbf{l} \mathbf{r}]$ на направление нормали к элементу dS поверхности. Подставляя значение B_n из (19.23) в (19.21), получаем

$$\Phi_{mc} = \int_S \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]_n \right\} dS.$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из начала вектора $d\mathbf{l}$ в центр элемента dS поверхности.

Сила тока I в контуре не зависит от S , а $\mu_0/4\pi$ — универсальная постоянная. Поэтому

$$\Phi_{mc} = I \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]_n, \quad (19.24)$$

или

$$\Phi_{mc} = LI, \quad (19.25)$$

где

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_l \frac{\mu}{r^3} [d\mathbf{l} \mathbf{r}]_n, \quad (19.26)$$

Величина L называется индуктивностью (статической индуктивностью) контура.

2. Из формулы (19.26) следует, что индуктивность контура зависит только от геометрической формы контура, его размеров и относительной магнитной проницаемости той среды, в которой он находится.

В этом отношении индуктивность контура является аналогом электрической емкости уединенного проводника, которая, как показано в § 5.1, зависит только от формы проводника, его размеров и относительной диэлектрической проницаемости среды.

Из (19.25) следует, что индуктивность контура численно равна магнитному потоку самоиндукции контура, когда сила тока в нем равна единице. При этом предполагается, что нет никаких иных магнитных полей, кроме магнитного поля, создаваемого током в рассматриваемом контуре.

3. Единица индуктивности в СИ называется **генри** (Г). Генри — индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при силе тока в 1А равен 1 Вб:

$$1 \text{ Г} = 1 \text{ Вб/А} = 1 \text{ В} \cdot \text{с/А}$$

В системе СГСМ за единицу индуктивности принимается **1 сантиметр**, так как размерность индуктивности контура в этой системе единиц оказывается равной размерности длины. Индуктивность контура равна 1 см, если при токе в 1 единицу СГСМ магнитный поток самоиндукции контура равен 1 Мкс:

$$1 \text{ см} = 1 \text{ Мкс/СГСМ}_I.$$

Так как $1 \text{ А} = 0,1 \text{ СГСМ}_I$ (см. § 15.3), $1 \text{ Вб} = 10^8 \text{ Мкс}$ (см. § 16.2), то

$$1 \text{ Г} = 10^9 \text{ см}.$$

4. Покажем на примере длинного соленоида, что индуктивность действительно зависит только от относительной магнитной проницаемости среды и геометрических размеров контура. Из выражения (19.25) имеем

$$L = \frac{\Phi_{mc}}{I} = \frac{N\Phi_m}{I}, \quad (19.27)$$

где N — общее число витков соленоида, $\Phi_m = BS$ — магнитный поток сквозь площадь S , ограниченную одним витком. Магнитная индукция B поля внутри длинного соленоида по формуле (15.41) равна

$$B = \mu\mu_0 nI = \mu\mu_0 (N/l) I,$$

где l — длина соленоида, $n = N/l$ — число витков на единицу длины. Поэтому индуктивность соленоида (19.27) можно выразить еще следующей формулой:

$$L = \mu\mu_0 (N^2/l) S = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (19.28)$$

где $V = Sl$ — объем соленоида.

Таким образом, индуктивность соленоида пропорциональна квадрату числа витков на единицу длины, объему соленоида и относительной магнитной проницаемости вещества, из которого сделан сердечник. Строго говоря, формула (19.28) справедлива только для бесконечно длинного соленоида, витки которого вплотную прилегают друг к другу

и сделаны из провода с очень малым сечением, так как при ее выводе мы считали магнитное поле внутри соленоида однородным.

5. При прохождении по контуру непостоянного тока магнитный поток самоиндукции изменяется и в контуре наводится э. д. с. индукции.

Возникновение электродвижущей силы индукции в результате изменения тока в цепи получило название явления **самоиндукции**, а сама э. д. с. — э. д. с. **самоиндукции**, обозначаемой через \mathcal{E}_c . Из (19.2) и (19.25) следует, что

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d}{dt}(LI) \quad (19.29)$$

Если контур тока не деформируется и относительная магнитная проницаемость среды не изменяется, то $L = \text{const}$ и

$$\mathcal{E}_c = -\frac{dI}{dt} L \quad (19.30)$$

Под действием э. д. с. самоиндукции появляется индукционный ток, который по закону Ленца противодействует изменению тока в цепи: замедляет его возрастание или убывание. По формуле (19.30) э. д. с. самоиндукции, а следовательно, и индукционный ток при прочих равных условиях пропорциональны индуктивности контура. Таким образом, индуктивность контура является мерой его инертности по отношению к изменению тока.

В гл. XX показано, что относительная магнитная проницаемость μ ферромагнетиков сильно зависит от напряженности магнитного поля. Поэтому при изменении тока в контуре, помещенном в ферромагнитную среду, индуктивность L контура изменяется. Однако и в этом случае э. д. с. самоиндукции можно записать в форме, аналогичной (19.30):

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi_{mc}}{dt} = -L_{\text{дин}} \frac{dI}{dt}, \quad (19.30')$$

где $L_{\text{дин}} = d\Phi_{mc}/dI$ — так называемая **динамическая индуктивность контура**.

6. Найдем закон изменения тока в цепи при ее замыкании и размыкании, т. е. при неустановившемся режиме в цепи. Пусть индуктивность цепи L , а ее электрическое сопротивление R . По формуле (19.3), сила тока в цепи

$$I = (\mathcal{E} + \mathcal{E}_i)/R,$$

где \mathcal{E} — алгебраическая сумма э. д. с. источников электрической энергии, включенных в цепь; \mathcal{E}_i — э. д. с. индукции. Если внешнее магнитное поле постоянно, то индукционные явления в неподвижной цепи обусловлены только изменением тока, поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \mathcal{E}_c = -L(dI/dt), \\ I &= \frac{\mathcal{E} - L(dI/dt)}{R}. \end{aligned} \quad (19.31)$$

Для нахождения зависимости силы тока от времени разделим переменные в уравнении (19.31):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E} - IR}{L}, \quad \frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{1}{L} dt.$$

Полагая \mathcal{E} , R и L постоянными и интегрируя, получаем

$$\ln(\mathcal{E} - IR) = -\frac{R}{L}t + \ln C,$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Следовательно,

$$\mathcal{E} - IR = Ce^{-Rt/L}. \quad (19.32)$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ сила тока равна I_0 . Тогда

$$\mathcal{E} - I_0R = C.$$

Подставим значение C в (19.32):

$$\mathcal{E} - IR = (\mathcal{E} - I_0R)e^{-Rt/L}.$$

После преобразований получим

$$I = I_0 e^{-Rt/L} + \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}) \quad (19.33)$$

Формула (19.33) позволяет найти законы изменения тока в замкнутой цепи, обладающей постоянными сопротивлением R и индуктивностью L , при включении в эту цепь и выключении из нее источника постоянной э. д. с. \mathcal{E} .

7. В случае включения источника э. д. с. начальный ток $I_0 = 0$, и формула (19.33) имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}). \quad (19.34)$$

Ток в цепи постепенно увеличивается от нуля до значения \mathcal{E}/R , соответствующего силе постоянного тока (рис. 19.11). Нарастание тока происходит тем быстрее, чем больше отношение R/L , т. е. чем меньше индуктивность цепи и больше ее сопротивление. Это явление можно наблюдать в опыте, схема которого приведена на рис. 19.12. Две одинаковые лампы накаливания A и B включены параллельно в цепь аккумуля-

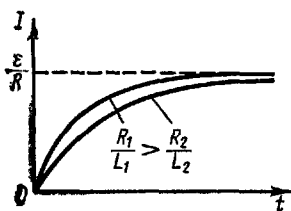


Рис. 19.11

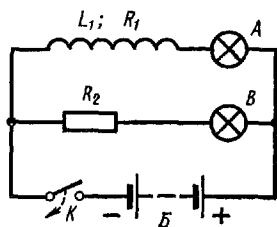


Рис. 19.12

муляторной батареи B . Последовательно с лампой A включен соленоид с железным сердечником, индуктивность которого L_1 , а сопротивление R_1 . Последовательно с лампой B включен резистор сопротивлением $R_2 = R_1$. При замыкании ключа K ток в лампе B устанавливается практически мгновенно, а в лампе A он постепенно возрастает до

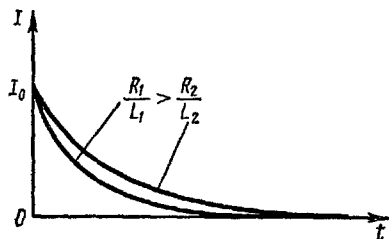


Рис. 19.13

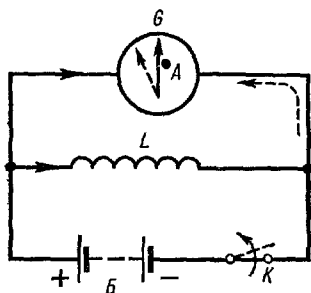


Рис. 19.14

равновесного значения. Поэтому нить лампы A накаливается значительно медленнее, чем нить лампы B .

После установления в лампе A равновесного постоянного тока она светится так же, как и лампа B .

8. В случае выключения источника э. д. с. $\mathcal{E} = 0$ и формула (19.33) имеет вид

$$I = I_0 e^{-Rt/L}. \quad (19.35)$$

Ток в цепи постепенно уменьшается от начального значения I_0 до нуля (рис. 19.13). Ток уменьшается тем быстрее, чем больше сопротивление цепи и чем меньше ее индуктивность.

Существование индукционного тока при выключении источника э. д. с. можно продемонстрировать на опыте, предложенном А. А. Эйнхенвальдом (рис. 19.14). Магнитоэлектрический гальванометр G (см. § 17.2) и катушка L , обладающая большой индуктивностью, включены параллельно в цепь аккумуляторной батареи B . При замкнутом ключе K ток в гальванометре и катушке направлен слева направо, при этом стрелка гальванометра отклоняется вправо. Если на шкале прибора вблизи нейтрального положения стрелки установить стопор A , препятствующий отклонению стрелки вправо, то при замкнутом ключе K она будет оставаться в нейтральном положении. При размыкании ключа K индукционный ток, возникающий в катушке, будет совпадать с направлением основного тока. Проходя через гальванометр справа налево (см. пунктирную стрелку на рис. 19.14), этот ток вызовет заметное отклонение стрелки влево.

9. Произведем приближенную оценку значения э. д. с. самоиндукции, возникающей при мгновенном увеличении сопротивления цепи постоянного тока от R_0 до R . Пусть \mathcal{E} — алгебраическая сумма э. д. с. всех источников, возбуждающих постоянный ток силой

$$I_0 = \mathcal{E}/R_0. \quad (19.36)$$

После мгновенного увеличения сопротивления сила тока I в цепи изменяется по формуле (19.33). Подставив в нее из (19.36) I_0 , имеем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0} e^{-Rt/L} + \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

Дифференцируя это выражение по t и умножая на $(-L)$, получаем

$$\mathcal{E}_c = \frac{\mathcal{E}R}{R_0} e^{-Rt/L} - \mathcal{E} e^{-Rt/L} = \mathcal{E} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) e^{-Rt/L},$$

откуда

$$\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} = \frac{(R/R_0) - 1}{e^{Rt/L}}. \quad (19.37)$$

Из формулы (19.37), следует, что при значительном увеличении сопротивления цепи $[(R/R_0) \gg 1]$, обладающей большой индуктивностью, э. д. с. самоиндукции может во много раз превышать \mathcal{E} .

Большая э. д. с. самоиндукции, возникающая при быстром размыкании электрической цепи, может вызвать пробой воздушного зазора между контактами выключателя (проскакивает искра или даже возникает дуговой разряд). Электрическая дуга расплавляет контакты выключателя и выводит его из строя. Для предотвращения искрения контактов выключателя цепи низкого напряжения параллельно контактам включают конденсатор. В момент замыкания цепи конденсатор заряжается, а затем разряжается через цепь. В электрических цепях высокого напряжения применяются выключатели специальной конструкции (масляные и др.), обеспечивающие быстрое гашение дугового разряда.

10. При прохождении по проводнику переменного тока магнитное поле внутри проводника изменяется и в нем возникают вихревые токи самоиндукции. В случае круглого цилиндрического проводника плоскости вихревых токов проходят через его ось. Направление этих токов можно определить с помощью закона Ленца. На рис. 19.15, а

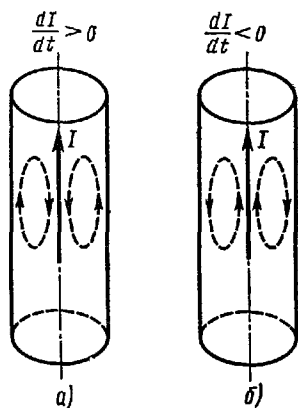


Рис. 19.15

показано направление вихревых токов при возрастании основного тока I в проводнике, а на рис. 19.15, б — при его убывании. В обоих случаях вихревые токи направлены таким образом, что они противодействуют изменению основного тока внутри проводника и способствуют его изменению вблизи поверхности. Следовательно, для переменного тока сопротивление внутренних частей проводника оказывается больше, чем внешних. Поэтому плотность переменного тока неодинакова по сечению. Она максимальна на поверхности проводника и минимальна на его оси. Это явление получило название **поверхностного эффекта** или **скин-эффекта**¹.

¹ По-английски слово «скин» (skin) означает «кожа», т. е. в вольном переводе — поверхность.

Переменные токи высокой частоты проходят только по очень тонкому поверхностному слою проводника. Для таких токов применяются проводники трубчатой формы. Их внешняя поверхность не должна иметь трещин, коррозии и других повреждений, так как это сильно влияет на сопротивление. Поэтому поверхность проводников, предназначенных для токов высокой частоты, часто покрывают тонким слоем серебра.

При нагреве сплошных проводников токами высокой частоты в результате скин-эффекта почти вся теплота выделяется в поверхностном слое. На этой основе В. П. Вологдин и другие разработали методы поверхностной закалки металлов, широко применяемые при изготовлении шестерен, коленчатых валов и других деталей машин, подвергающихся ударным нагрузкам.

§ 19.5. Взаимная индукция. Трансформатор

1. Явление взаимной индукции заключается в наведении э. д. с. индукции во всех проводниках, находящихся вблизи цепи переменного тока. Впервые это явление наблюдал Фарадей в опыте, изображенном на рис. 19.1. При изменении тока I_1 в первой цепи (с помощью ключа или реостата) во второй наводится э. д. с. взаимной индукции \mathcal{E}_2 и возникает индукционный ток. Из основного закона электромагнитной индукции (19.2) следует, что

$$\mathcal{E}_2 = -d\Phi_{m21}/dt, \quad (19.38)$$

где Φ_{m21} — магнитный поток сквозь поверхность второго контура, обусловленный магнитным полем тока, проходящего в первом контуре. Эту величину естественно назвать магнитным потоком взаимной индукции второго и первого контуров. В электротехнике ее называют потокоцеплением взаимной индукции (см. § 17.4).

2. В соответствии с законом Био — Савара — Лапласа индукция магнитного поля первого контура пропорциональна току I_1 . Путем рассуждений, аналогичных приведенным в начале предыдущего параграфа, можно показать, что магнитный поток Φ_{m21} пропорционален току I_1 :

$$\Phi_{m21} = M_{21} I_1, \quad (19.39)$$

где M_{21} — коэффициент пропорциональности, зависящий только от геометрической формы, размеров и взаимного расположения первого и второго контуров, а также от относительной магнитной проницаемости среды, в которой они находятся¹. Коэффициент M_{21} называется взаимной индуктивностью (статической взаимной индуктивностью) второго и первого контуров.

Из сопоставления формул (19.39) и (19.25) следует, что взаимная индуктивность двух контуров имеет такую же размерность и выражается в тех же единицах, что и индуктивность L .

¹ Предполагается, что контуры изолированы от влияния внешних магнитных полей, а среда однородна и изотропна.

Если источник тока отключить от первого контура и подключить ко второму, то в последнем возникнет ток I_2 . Магнитный поток Φ_{m12} , создаваемый током I_2 сквозь поверхность первого контура, выразится формулой, аналогичной (19.39):

$$\Phi_{m12} = M_{12} I_2, \quad (19.40)$$

где M_{12} — взаимная индуктивность первого и второго контуров.

3. В гл. XX показано, что относительная магнитная проницаемость всех веществ, за исключением ферромагнитных, не зависит от напряженности магнитного поля. Иными словами, их относительная магнитная проницаемость не зависит от того, какова сила тока, создающего магнитное поле. Можно показать, что для рассмотренных выше двух контуров, находящихся в неферромагнитной среде (воздухе, воде и т. д.), взаимные индуктивности M_{21} и M_{12} равны друг другу:

$$M_{21} = M_{12}. \quad (19.41)$$

В связи с этим величины M_{21} и M_{12} были названы в з а м н о й индуктивностью двух контуров.

Если среда ферромагнитна, то M_{21} и M_{12} зависят не только от геометрической формы, размеров и взаимного расположения контуров, но и от силы токов в них. В этом случае равенство (19.41) не соблюдается.

4. Окончательное выражение для э. д. с. взаимной индукции, возникающей во втором контуре при изменении в первом тока I_1 , можно найти, заменив в (19.38) Φ_{m21} его выражением по формуле (19.39):

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d}{dt} (M_{21} I_1) \quad (19.42)$$

Если форма, размеры и взаимное расположение контуров, а также относительная магнитная проницаемость среды постоянны, то $M_{21} = \text{const}$ и формулу (19.42) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_2 = - M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (19.43)$$

Если контуры 1 и 2 находятся в ферромагнитной среде, то M_{21} зависит от силы тока I_1 . Однако и в этом случае для э. д. с. \mathcal{E}_2 можно пользоваться формулой, аналогичной (19.43):

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\Phi_{m21}}{dt} = - M_{21 \text{дин}} \frac{dI_1}{dt}, \quad (19.43')$$

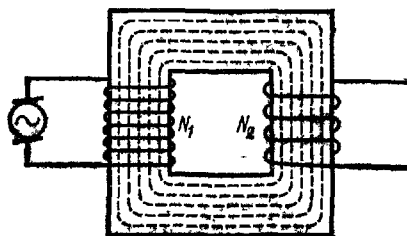


Рис. 19.16

где $M_{21 \text{дин}} = d\Phi_{m21}/dI_1$ — так называемая **динамическая взаимная индуктивность** второго и первого контуров.

5. На явлении взаимной индукции основано действие трансформаторов, служащих для повышения или понижения напряжения переменного тока. Принципиальная схема трансформатора приведена на

рис. 19.16. Трансформатор состоит из двух соленоидальных обмоток, укрепленных на общем замкнутом железном сердечнике. Концы первой обмотки присоединены к источнику переменного тока, а концы второй включены в цепь потребителей электрической энергии. Переменное магнитное поле тока I_1 в первой (первичной) обмотке трансформатора вызывает появление э. д. с. взаимной индукции во второй обмотке. Магнитное поле первичной обмотки практически полностью локализовано в железном сердечнике, играющем роль магнитной цепи. Поэтому применение в трансформаторе замкнутого сердечника, общего для обеих обмоток, позволяет резко увеличить магнитный поток взаимной индукции этих обмоток и их взаимную индуктивность.

6. Определим статическую и динамическую взаимные индуктивности обмоток трансформатора. По формулам (19.39) и (19.43'),

$$M_{21} = \frac{\Phi_{m21}}{I_1} \quad \text{и} \quad M_{21 \text{ дин}} = \frac{d\Phi_{m21}}{dI_1},$$

где Φ_{m21} — магнитный поток сквозь все витки вторичной обмотки.

По формуле Гопкинсона (16.27), магнитный поток в сердечнике трансформатора

$$\Phi_m = \mathcal{E}_m / R_m,$$

где \mathcal{E}_m — алгебраическая сумма магнитодвижущих сил, создаваемых токами в первичной и вторичной обмотках трансформатора, R_m — магнитное сопротивление сердечника.

Ограничимся рассмотрением холостого хода трансформатора, соответствующего его работе при разомкнутой вторичной цепи ($I_2 = 0$). При холостом ходе

$$\mathcal{E}_m = N_1 I_1,$$

где N_1 — число витков первичной обмотки. Поэтому

$$\Phi_m = \frac{N_1 I_1}{R_m} \quad \text{и} \quad \Phi_{m21} = N_2 \Phi_m,$$

где N_2 — число витков вторичной обмотки. Следовательно,

$$M_{21} = N_2 \frac{\Phi_m}{I_1}, \quad M_{21 \text{ дин}} = N_2 \frac{d\Phi_m}{dI_1}, \quad (19.44)$$

$$M_{21} = \frac{N_1 N_2}{R_m} \quad \text{и} \quad M_{21 \text{ дин}} = N_1 N_2 \frac{d}{dI_1} \left(\frac{I_1}{R_m} \right). \quad (19.45)$$

Статическая и динамическая индуктивности первичной обмотки трансформатора соответственно равны:

$$L_1 = N_1 \frac{\Phi_m}{I_1} = \frac{N_1^2}{R_m} \quad \text{и} \quad L_{1 \text{ дин}} = N_1 \frac{d\Phi_m}{dI_1} = N_1^2 \frac{d}{dI_1} \left(\frac{I_1}{R_m} \right). \quad (19.46)$$

7. Найдем отношение абсолютных значений разностей потенциалов $\Delta\varphi_2$ и $\Delta\varphi_1$ на концах вторичной и первичной обмоток при холостом ходе, называемое коэффициентом трансформации. По формуле (9.10') $\Delta\varphi_2$ при холостом ходе ($I_2 = 0$) равно э.д.с. взаимной индукции \mathcal{E}_2 :

$$\Delta\varphi_2 = \mathcal{E}_2 = -M_{21} \text{ дин} \frac{dI_1}{dt} . \quad (19.47)$$

Аналогично, $\Delta\varphi_1$ равно разности между э.д.с. \mathcal{E} источника электрической энергии и напряжением $I_1 r$ на его внутреннем сопротивлении r , т. е.

$$\Delta\varphi_1 = \mathcal{E} - I_1 r .$$

По закону Ома,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_1}{R_1 + r} \quad \text{и} \quad \Delta\varphi_1 = I_1 R_1 - \mathcal{E}_1 ,$$

где R_1 — сопротивление первичной обмотки, \mathcal{E}_1 — э.д.с. самоиндукции в ней. Заменяв \mathcal{E}_1 ее выражением по формуле (19.30'), получим

$$\Delta\varphi_1 = I_1 R_1 + L_1 \text{ дин} \frac{dI_1}{dt} .$$

Для всех существующих трансформаторов первый член правой части этого равенства пренебрежимо мал по сравнению со вторым. Поэтому приближенно можно считать, что

$$\Delta\varphi_1 = L_1 \text{ дин} \frac{dI_1}{dt} . \quad (19.48)$$

Из соотношений (19.45)—(19.48) следует, что коэффициент трансформации при холостом ходе равен

$$\left| \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta\varphi_1} \right| = \frac{M_{21} \text{ дин}}{L_1 \text{ дин}} = \frac{N_2}{N_1} . \quad (19.49)$$

8. Трансформаторы чрезвычайно широко применяются в современной электро- и радиотехнике. Они позволяют сравнительно просто и с ничтожными потерями энергии изменять в нужных пределах напряжение переменного тока.

§ 19.6. Энергия магнитного поля электрического тока

1. Во всех выводах этого параграфа предполагается, что проводники с током находятся в не ферромагнитной однородной и изотропной среде.

В § 19.4 было показано, что при возрастании тока в контуре возникает э. д. с. самоиндукции, противодействующая увеличению тока. По закону Ома сила тока I в контуре с сопротивлением R и индуктивностью L равна

$$I = (\mathcal{E} + \mathcal{E}_c)/R ,$$

где \mathcal{E} — э. д. с. источника электрической энергии, а \mathcal{E}_c — э. д. с. самоиндукции, которая по формуле (19.30) равна $\mathcal{E}_c = -L(dI/dt)$. Таким образом,

$$\mathcal{E} = IR + L(dI/dt) .$$

Работа, совершаемая источником электрической энергии за время dt , равна

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + LI dl . \quad (19.50)$$

Первый член правой части уравнения (19.50) представляет обычную ленц-джоулеву работу, расходуемую на нагревание проводника. Второй член — дополнительная работа, обусловленная индукционными явлениями. Дополнительная работа A , затрачиваемая на увеличение тока в контуре от нуля до I , запишется в виде

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (19.51)$$

Выражение $LI^2/2$ принято называть **собственной энергией** тока I в контуре с индуктивностью L .

2. Увеличение тока в проводнике вызывает соответствующее усиление его магнитного поля, которое, подобно электрическому полю, обладает энергией. Найденная нами собственная энергия тока в контуре есть не что иное, как энергия W_m магнитного поля этого контура в током.

В качестве примера рассмотрим однородное магнитное поле длинного соленоида, индуктивность которого $L = \mu\mu_0 n^2 V$ [см. (19.28)], где V — объем поля соленоида. Магнитная индукция поля соленоида выражается формулой (15.41): $B = \mu\mu_0 nI$, откуда

$$I = \frac{B}{\mu\mu_0} \frac{1}{n}. \quad (19.52)$$

Подставив эти значения для L и I в (19.51), найдем энергию магнитного поля длинного соленоида:

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V. \quad (19.53)$$

Поскольку рассматриваемое поле однородно, его энергия W_m распределена равномерно по всему объему V поля с объемной плотностью

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0}. \quad (19.54)$$

Так как индукция и напряженность магнитного поля связаны соотношением $B = \mu\mu_0 H$, то выражение (19.54) можно записать в следующих трех эквивалентных формах:

$$\omega_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2. \quad (19.54')$$

Формулы (19.54) и (19.54') справедливы для магнитного поля в изотропной среде. Если же среда анизотропна, то объемная плотность энергии магнитного поля

$$\omega_m = \mathbf{BH}/2. \quad (19.54'')$$

3. Рассмотрим теперь **н е о д н о р о д н о е** магнитное поле, создаваемое током I в контуре произвольной формы, индуктивность кото-

рого L . В пределах бесконечно малого объема dV поле можно считать однородным. Поэтому энергия объема dV поля равна

$$dW_m = w_m dV = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} dV.$$

Интегрируя это выражение по всему объему V поля, находим полную энергию W_m магнитного поля:

$$W_m = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0\mu} dV. \quad (19.55)$$

С другой стороны,

$$W_m = LI^2/2. \quad (19.56)$$

Таким образом, можно дать следующее энергетическое определение индуктивности: индуктивность контура численно равна удвоенной энергии магнитного поля, создаваемого проходящим по контуру током единичной силы.

По формуле (19.25), $LI = \Phi_{mc}$ — магнитный поток самоиндукции контура. Поэтому энергию магнитного поля этого контура (19.56) можно представить в виде

$$W_m = \Phi_{mc} I/2. \quad (19.57)$$

4. В общем случае магнитное поле создается произвольной системой из n контуров с различными токами I_1, I_2, \dots, I_n . Энергия такого поля выражается универсальной формулой (19.55). Однако, как показывают расчеты, эту энергию можно также представить в форме, аналогичной (19.57):

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_{mk} I_k. \quad (19.58)$$

Здесь Φ_{mk} — полный магнитный поток, сцепленный с k -м контуром. При вычислении этого потока нормаль \mathbf{n}_k к поверхности, натянутой на контур, проводится так, чтобы из конца вектора \mathbf{n}_k ток в контуре был виден идущим против часовой стрелки. Магнитный поток Φ_{mk} равен сумме потока самоиндукции $(\Phi_{mk})_c$ рассматриваемого контура и потока его взаимной индукции $(\Phi_{mk})_{вз}$, соответствующего магнитному полю всех остальных контуров с токами:

$$\Phi_{mk} = (\Phi_{mk})_c + (\Phi_{mk})_{вз}.$$

Так как $(\Phi_{mk})_c = L_k I_k$ и $(\Phi_{mk})_{вз} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq k)}}^n M_{kl} I_l$, то

$$\Phi_{mk} = L_k I_k + \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq k)}}^n M_{kl} I_l, \quad (19.59)$$

где L_k — индуктивность k -го контура, M_{kl} — взаимная индуктивность k -го и l -го контуров. Таким образом, энергия магнитного поля

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n L_k I_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq k)}}^n M_{kl} I_k I_l. \quad (19.60)$$

Первая сумма в правой части этого выражения представляет собой сумму собственных энергий всех токов, а вторая — так называемую **взаимную энергию токов**:

$$W_{вз} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq k)}}^n M_{kl} I_k I_l. \quad (19.61)$$

Следует заметить, что в соответствии с указанным выше правилом выбора направления вектора нормали \mathbf{n}_k при вычислении магнитного

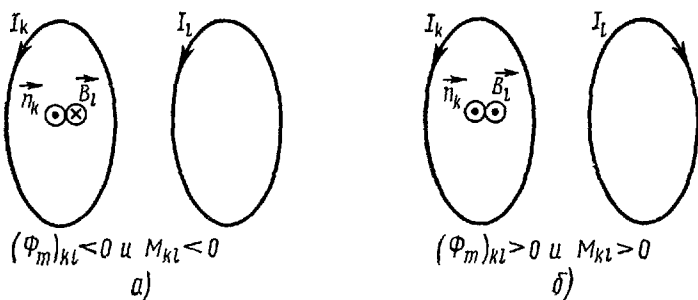


Рис. 19.17

потока Φ_{mk} взаимные индуктивности M_{kl} k -го и l -го контуров могут быть как положительными (рис. 19.17, б), так и отрицательными (рис. 19.17, а).

Вопросы для повторения

1. В чем состоит явление электромагнитной индукции? Опишите опыты Фарадея.
2. Сформулируйте законы Фарадея и Ленца для электромагнитной индукции. Проиллюстрируйте их примерами.
3. Покажите, что основным закон электромагнитной индукции является следствием закона сохранения энергии.
4. Как доказать, что электрическое поле, возбуждаемое переменным магнитным полем, является вихревым?
5. Найдите выражения для э.д.с. индукции и индукционного тока в плоском витке, равномерно вращающемся в однородном магнитном поле.
6. Что представляют собой вихревые токи? Какие практические применения они находят? Каковы способы борьбы с ними?
7. В чем состоят явления самоиндукции и взаимной индукции? Напишите выражения для э.д.с. индукции в обоих случаях.
8. Что называется индуктивностью проводящего контура и взаимной индуктивностью двух контуров? От чего они зависят и каков их физический смысл?

9. Найдите взаимную индуктивность обмоток трансформатора и поясните принцип его действия.

10. Найдите выражение для объемной плотности энергии магнитного поля.

Примеры решения задач

Задача 19.1. Катушка, состоящая из 100 витков провода площадью 10 см^2 каждый, помещена в однородное магнитное поле и подключена к баллистическому гальванометру. Ось катушки совпадает с направлением поля. При быстром повороте катушки на 180° вокруг ее диаметра через гальванометр пройдет электрический заряд 2 мкКл . Определить индукцию магнитного поля. Сопротивление катушки и гальванометра равно 5 кОм .

Дано:

$$N = 100$$

$$S = 10^{-8} \text{ м}^2$$

$$q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$$

$$R = 5000 \text{ Ом}$$

$$B = ?$$

Решение. При повороте катушки в магнитном поле в ней возникает кратковременный индукционный ток. Заряд q , проходящий через гальванометр, можно определить по формуле (19.17):

$$q = (\Phi_m' - \Phi_m'')/R,$$

где Φ_m' и Φ_m'' — магнитные потоки сквозь все витки катушки в ее начальном и конечном положениях. До и после поворота плоскости витков перпендикулярны направлению магнитного поля. Однако если в первом случае вектор магнитной индукции \mathbf{B} совпадает с направлением нормали к плоскостям витков, то во втором случае он направлен в противоположную сторону. Поэтому $\Phi_m' = BSN$ и $\Phi_m'' = -BSN$, где N — число витков провода в катушке. Таким образом,

$$q = 2BSN/R \quad \text{и} \quad B = qR/2SN.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$B = \frac{qR}{2SN} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-8} \cdot 100} \text{ Т} = 0,05 \text{ Т} = 50 \text{ мТ}.$$

§ 20.1. Магнитные моменты электронов и атомов

1. В предыдущих главах было рассмотрено действие магнитных полей на проводники с током и движущиеся электрические заряды. При этом магнитное поле считалось заданным, а процессы, происходящие в веществе под действием магнитного поля, не рассматривались. Влияние свойств среды на магнитное взаимодействие проводников с током или движущихся зарядов учитывалось введением в формулы относительной магнитной проницаемости μ среды [см., например, формулу (15.19')].

Для выяснения причины различия магнитных свойств сред и их влияния на индукцию магнитного поля необходимо изучить процессы, происходящие в веществе под действием внешнего магнитного поля, т. е. необходимо исследовать действие магнитного поля на атомы и молекулы вещества. Подобно тому, как диэлектрик, помещенный во внешнее электрическое поле, поляризуется и в нем возникает внутреннее электрическое поле, так и в любом веществе, помещенном во внешнее магнитное поле, возникает особое состояние намагниченности и создается внутреннее магнитное поле.

2. Рассмотрим прежде всего изолированный атом, не подверженный действию внешнего магнитного поля. Согласно представлениям классической физики, электроны в атомах движутся по некоторым замкнутым орбитам. Такое движение каждого электрона эквивалентно замкнутому контуру тока — своеобразной «ниточке» тока. Поэтому любой атом или молекулу, с точки зрения их магнитных свойств, можно рассматривать как некоторую совокупность электронных микротоков. В этом и состоит, как указывалось в § 14.1, гипотеза Ампера о природе магнетизма.

3. Магнитный момент p_m электрического тока, вызванного движением электрона по орбите, называется **орбитальным магнитным моментом электрона**. Предположим для простоты, что электрон в атоме движется со скоростью v по круговой орбите радиуса r (рис. 20.1). Направления движения электрона и тока I указаны на рисунке стрелками. Согласно определению магнитного момента тока (15.30), орбитальный магнитный момент электрона численно равен

$$p_m = IS = I\pi r^2,$$

где S — площадь орбиты электрона. Вектор p_m направлен в ту же сторону, что и магнитное поле в центре кругового тока I . Обозначим через ν число оборотов электрона в секунду. Тогда

$$I = e\nu = e\nu/2\pi r,$$

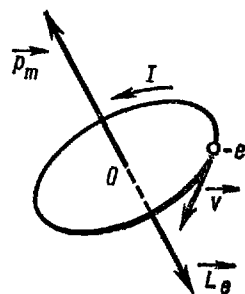


Рис. 20.1

$$p_m = e v r / 2. \quad (20.1)$$

4. С другой стороны, каждый электрон массы m , равномерно вращающийся по орбите, обладает моментом импульса L_e , численно равным

$$L_e = m v r. \quad (20.2)$$

Направление вектора L_e можно определить из более общей векторной записи выражения (20.2):

$$L_e = m [\mathbf{r} \mathbf{v}]. \quad (20.2')$$

Из формул (20.1) и (20.2) следует, что

$$\frac{p_m}{L_e} = \frac{e}{2m}. \quad (20.3)$$

Отношение числового значения орбитального магнитного момента электрона к числовому значению его орбитального момента импульса не зависит ни от скорости электрона на орбите, ни от радиуса орбиты. Из рис. 20.1 видно, что векторы p_m и L_e направлены во взаимно противоположные стороны. Поэтому

$$p_m = - (e/2m) L_e = - g L_e, \quad (20.3')$$

где $g = e/2m$ — гиромагнитное отношение.

Орбитальный магнитный момент электрона пропорционален его орбитальному моменту импульса, причем оба момента противоположны по направлению, так как заряд электрона отрицателен.

5. Полученные результаты справедливы для любого из электронов, находящихся в атоме. Вектором орбитального магнитного момента атома P_m называется векторная сумма орбитальных магнитных моментов всех его электронов:

$$P_m = \sum_{i=1}^Z p_{mi}, \quad (20.4)$$

где Z — число электронов в атоме, равное порядковому номеру элемента в периодической системе Менделеева.

Аналогично этому, вектором орбитального момента импульса атома называется векторная сумма орбитальных моментов импульса всех электронов атома:

$$L = \sum_{i=1}^Z L_{ei}. \quad (20.4')$$

Используя формулы (20.3'), (20.4) и (20.4'), получим, что для атомных моментов P_m и L справедливо соотношение

$$P_m = - (e/2m) L = - g L. \quad (20.3'')$$

6. В этом томе мы не будем учитывать влияние, которое оказывают на магнитные свойства вещества магнитные моменты атомных ядер. Дело в том, что магнитные моменты ядерных частиц (нейтронов и про-

тонов) приблизительно в две тысячи раз меньше магнитных моментов электронов. Поэтому в первом приближении магнитными моментами атомных ядер можно пренебречь по сравнению с магнитными моментами электронных оболочек атомов.

§ 20.2. Атом в магнитном поле

1. Рассмотрим влияние магнитного поля на движение электронов в атомах вещества. В большинстве случаев ввиду малости атомов можно считать, что в пределах каждого из них магнитное поле однородно. Предположим для простоты, что электрон в атоме движется с угловой скоростью ω_0 по круговой орбите, плоскость которой перпендикулярна вектору индукции \mathbf{B} магнитного поля (рис. 20.2). Когда магнитное поле отсутствует, на электрон действует электрическая сила \mathbf{F}_e притяжения его ядром, играющая роль центростремительной силы:

$$m\omega_0^2 r = F_e.$$

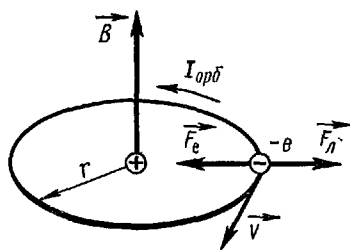


Рис. 20.2

В магнитном поле на электрон помимо силы \mathbf{F}_e действует еще сила Лоренца \mathbf{F}_L , которая в случае, представленном на рис. 20.2, направлена в сторону, противоположную \mathbf{F}_e . Поэтому центростремительная сила численно равна разности $F_e - F_L$. Изменение силы, действующей на электрон, приводит к изменению угловой скорости его вращения по орбите.

2. Изменение угловой скорости вращения электрона происходит в процессе нарастания того магнитного поля, в которое вносится атом. Процесс «включения» магнитного поля, действующего на атом, происходит в течение некоторого промежутка времени. При этом возникает индукционное вихревое электрическое поле, направленное по касательной к орбите электрона. Э. д. с. индукции, наводимая в круговом контуре-орбите, по формуле (19.2) будет

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS) = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}. \quad (20.5)$$

Индуктированное электрическое поле действует на электрон с силой \mathbf{F} , численно равной

$$F = eE = e \frac{\mathcal{E}_i}{2\pi r} \quad (20.6)$$

и направленной по касательной к орбите электрона в сторону, противоположную скорости его движения (на рис. 20.2 сила \mathbf{F} не показана). Подставив в (20.6) выражение для \mathcal{E}_i из (20.5), получим

$$F = -\frac{er}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (20.7)$$

Изменение числового значения импульса электрона равно произведению силы F на время t возрастания индукции магнитного поля от 0 до B :

$$\Delta(mv) = \int_0^t F dt = -\frac{er}{2} \int_0^B dB = -\frac{er}{2} B. \quad (20.8)$$

Так как линейная скорость v электрона связана с его угловой скоростью ω соотношением $v = \omega r$, то $\Delta(mv) = m\Delta v = mr\Delta\omega$. Поэтому изменение угловой скорости вращения электрона под действием магнитного поля равно

$$\Delta\omega = -eB/2m. \quad (20.9)$$

Полученный результат является частным случаем теоремы Лармора.

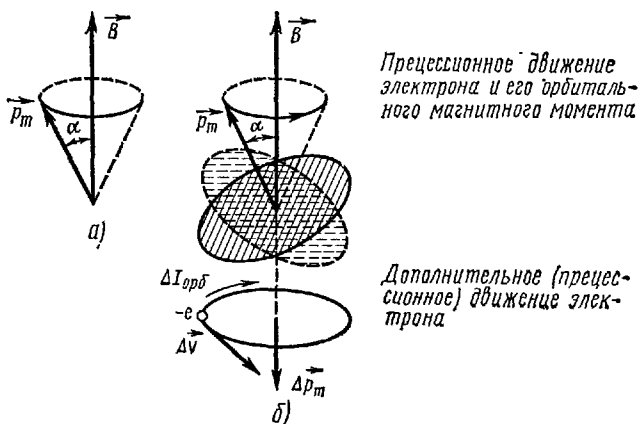


Рис. 20.3

3. Мы рассмотрели влияние магнитного поля на движение электрона по орбите в простейшем случае, когда плоскость орбиты перпендикулярна вектору \mathbf{B} . Если орбита электрона расположена произвольным образом относительно вектора \mathbf{B} , так что орбитальный магнитный момент \mathbf{p}_m электрона составляет с направлением вектора магнитной индукции угол α (рис. 20.3,а), то влияние поля оказывается более сложным. Можно доказать, что в этом случае вся орбита приходит в такое движение, при котором угол α сохраняется неизменным, а вектор \mathbf{p}_m (перпендикулярный плоскости орбиты электрона) вращается вокруг направления \mathbf{B} с угловой скоростью

$$\omega_L = eB/2m. \quad (20.9')$$

Такое движение в механике называется **прецессионным**. Оно аналогично движению оси вращающегося волчка. Теорема Лармора гласит: *единственным результатом влияния магнитного поля на орбиту электрона в атоме является прецессия орбиты и вектора \mathbf{p}_m с угловой скоростью ω_L вокруг оси, проходящей через ядро атома и параллельной вектору \mathbf{B} индукции магнитного поля.*

4. Изменение угловой скорости вращения электрона, или, в общем случае, появление прецессии, приводит к изменению орбитального тока, т. е. к появлению дополнительного тока:

$$\Delta I_{\text{орб}} = e \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B}{4\pi m}. \quad (20.10)$$

Направление этого тока показано на рис. 20.3,б.

Току $\Delta I_{\text{орб}}$ соответствует **наведенный орбитальный магнитный момент электрона Δp_m** , численно равный

$$\Delta p_m = \Delta I_{\text{орб}} S_{\perp} = \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} B, \quad (20.11)$$

где S_{\perp} — площадь проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную направлению \mathbf{B} . Вектор наведенного орбитального магнитного момента Δp_m противоположен по направлению вектору магнитной индукции \mathbf{B} (рис. 20.3,б).

$$\Delta p_m = - \frac{e^2 S_{\perp}}{4\pi m} \mathbf{B}. \quad (20.11')$$

Полученный результат является частным случаем закона Ленца о направлении индукционного тока (см. § 19.1).

Если в атоме имеется Z электронов, взаимодействием между которыми можно пренебречь, то **общий наведенный орбитальный момент атома ΔP_m** равен векторной сумме наведенных орбитальных магнитных моментов всех электронов:

$$\Delta P_m = - \frac{e^2 \mathbf{B}}{4\pi m} \sum_{i=1}^Z S_{\perp i}$$

Сумму, входящую в выражение для ΔP_m , можно преобразовать, если ввести понятие о средней величине площади проекции орбит электронов в атоме на плоскость, перпендикулярную направлению \mathbf{B} :

$$\langle S_{\perp} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z S_{\perp i}$$

тогда

$$\Delta P_m = - \frac{e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} \mathbf{B}. \quad (20.12)$$

§ 20.3. Диамагнетики в однородном магнитном поле

1. Результат, полученный в предыдущем параграфе, применим к атому любого вещества, помещенному в магнитное поле. Однако особый интерес этот результат приобретает в случае диамагнитных веществ, или диамагнетиков.

Диамагнетиками называются вещества, магнитные моменты атомов или молекул которых при отсутствии внешнего магнитного поля равны нулю. Иначе говоря, в атомах или молекулах диамагнитных веществ векторная сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов равна нулю. Диамагнетиками являются инертные газы, большинство органических соединений, многие металлы (висмут, цинк, золото, медь, серебро, ртуть и др.), смолы, вода, стекло, мрамор.

При внесении диамагнитного вещества в магнитное поле в каждом его атоме наводится магнитный момент $\Delta \mathbf{P}_m$, направленный **п р о т и в о п о л о ж н о** вектору \mathbf{B} индукции магнитного поля.

2. Для характеристики намагничивания вещества вводится физическая величина, называемая интенсивностью намагничивания.

Вектором намагниченности или **интенсивностью намагничивания** \mathbf{J} называется отношение магнитного момента малого объема ΔV вещества к этому объему:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{mi}, \quad (20.13)$$

где \mathbf{P}_{mi} — магнитный момент i -й молекулы, n — общее число молекул в объеме ΔV . Объем ΔV должен быть столь малым, чтобы в его пределах магнитное поле можно было считать однородным. В то же время в нем должно содержаться еще столь большое число молекул [$n \gg 1$], чтобы к ним можно было применять статистические методы исследования.

В Международной системе единиц (СИ) вектор намагниченности измеряется в амперах на метр (А/м).

В пределах малого объема ΔV изотропного диамагнетика введенные магнитные моменты $\Delta \mathbf{P}_m$ всех молекул одинаковы и направлены в сторону, противоположную вектору \mathbf{B} . Поэтому по формулам (20.13) и (20.12) вектор намагниченности

$$\mathbf{J} = \frac{n\Delta \mathbf{P}_m}{V} = n_0 \Delta \mathbf{P}_m = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle}{4\pi m} \mathbf{B}. \quad (20.14)$$

Обозначив через χ' величину

$$\chi' = - \frac{n_0 e^2 Z \langle S_{\perp} \rangle \mu_0}{4\pi m}, \quad (20.15)$$

получим

$$\mathbf{J} = \chi' \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad (20.16)$$

где χ' — безразмерная величина, характеризующая магнитные свойства вещества, причем у всех диамагнетиков $\chi' < 0$. По исторически сложившейся традиции в качестве характеристики магнитных свойств среды пользуются так называемой **магнитной восприимчивостью** χ , связанной с χ' соотношением

$$1 + \chi = 1/(1 - \chi'), \quad (20.15')$$

откуда

$$\chi = \chi'/(1 - \chi'). \quad (20.15'')$$

У диамагнетиков абсолютное значение χ' очень мало ($|\chi'| \sim 10^{-6}$). Поэтому практически можно считать, что $\chi = \chi'$.

3. Поведение диамагнетиков в магнитном поле существенно отличается от поведения диэлектриков с неполярными молекулами в электри-

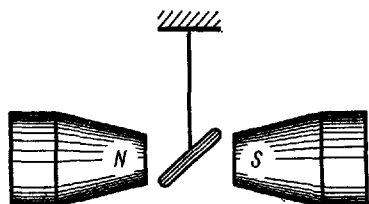


Рис. 20.4

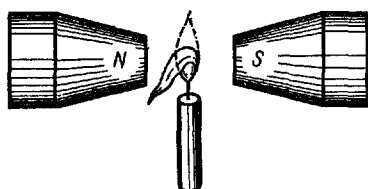


Рис. 20.5

ческом поле. Диэлектрик поляризуется в направлении вектора напряженности \mathbf{E} электрического поля. Поэтому легкий стержень, изготовленный из диэлектрика и свободно подвешенный в однородном электрическом поле, устанавливается так, чтобы его ось была направлена параллельно \mathbf{E} . В неоднородном электрическом поле стержень из диэлектрика **втягивается** в область более сильного поля. Стержень из диамагнитного материала (например, из висмута) намагничивается в направлении, противоположном вектору индукции \mathbf{B} внешнего магнитного поля. Поэтому в неоднородном магнитном поле диамагнетик **выталкивается** в область более слабого поля и устанавливается так, чтобы его ось была **перпендикулярна** вектору \mathbf{B} (рис. 20.4). Газы, входящие в состав продуктов сгорания, также обладают диамагнитными свойствами. Поэтому в неоднородном магнитном поле пламя свечи отклоняется в сторону более слабого поля (рис. 20.5).

§ 20.4. Парамагнитные вещества в однородном магнитном поле

1. Если векторная сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов атома (или молекулы) не равна нулю, то атом в целом обладает некоторым магнитным моментом \mathbf{P}_m . Такие атомы (молекулы) называются **парамагнитными**, а состоящие из них вещества — **парамагнетиками**. К парамагнетикам относятся кислород, окись азота,

алюминий, платина, редкоземельные элементы, щелочные и щелочно-земельные металлы и другие вещества.

2. Рассмотрим, что произойдет при внесении парамагнетика в однородное магнитное поле, индукция которого \mathbf{B} .

Каждый электрон атома парамагнитного тела участвует в двух движениях: орбитальном и прецессионном. Согласно теореме Лармора, все магнитные моменты электронов данного атома, а также его результирующий магнитный момент прецессируют вокруг направления \mathbf{B} с одинаковой угловой скоростью ω_L .

Тепловое движение частиц парамагнетика и их соударения вызывают постепенное затухание прецессии магнитных моментов атомов, а также уменьшение углов между направлениями \mathbf{P}_m и \mathbf{B} . Таким образом, несмотря на производимое тепловым движением «разбрасывание» атомов, это движение в то же время способствует преимущественной ориентации магнитных моментов атомов по направлению вектора \mathbf{B} , так как само по себе магнитное поле может вызвать лишь прецессию векторов \mathbf{P}_m вокруг направления \mathbf{B} . Магнитный момент \mathbf{P}_m отдельного атома имеет величину порядка 10^{-23} Дж/Т (10^{-20} эрг/Гс)¹, но совокупное действие магнитных моментов всех атомов, заключенных в единице объема вещества, приводит к эффекту намагничивания, значительно превосходящему диамагнитный эффект. Поэтому в парамагнитном теле появляется собственное магнитное поле, направленное в ту же сторону, что и внешнее магнитное поле.

3. Классическая теория парамагнетизма была развита П. Ланжевеном в 1905 г. Он рассмотрел статистическую задачу о поведении молекулярных токов (и соответствующих им магнитных моментов \mathbf{P}_m) в однородном магнитном поле.

Ориентирующее действие магнитного поля на атом зависит от магнитного момента атома и магнитной индукции \mathbf{B} поля «Разбрасывающее» действие теплового движения определяется величиной kT , пропорциональной средней тепловой энергии одной частицы (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Оказалось, что результирующее действие двух противоположных факторов зависит от отношения

$$a = P_m B / kT.$$

Ланжевэн нашел зависимость намагниченности изотропного парамагнетика от параметра a :

$$J = f(a) = n_0 P_m L(a). \quad (20.17)$$

Функция $L(a)$ называется классической функцией Ланжевэна и имеет вид

$$L(a) = \left\{ \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right\}. \quad (20.17')$$

¹ Современные методы измерения магнитных моментов атомов рассмотрены в третьем томе курса.

На рис. 20.6 приведен график функции Ланжевена. При $a \ll 1$ функция возрастает линейно, причем можно доказать, что $L(a) \approx a/3$; при $a \gg 1$

$$L(a) \rightarrow 1. \quad (20.17'')$$

Это соответствует такому состоянию, когда все магнитные моменты атомов направлены параллельно полю.

При комнатных температурах ($T \approx 300$ К) условие $a = 1$ может осуществляться лишь в очень сильных магнитных полях ($B \sim 100$ Т).

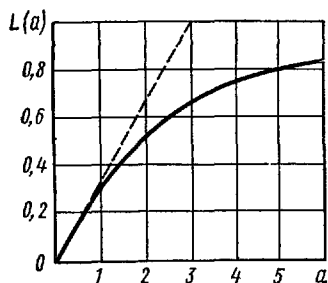


Рис. 20.6

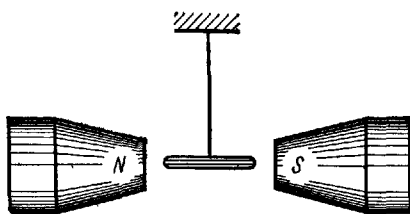


Рис. 20.7

Практически же всегда осуществляется условие $a \ll 1$. В очень сильных магнитных полях или при очень низких температурах, когда большая часть векторов \mathbf{P}_m «выстроена» вдоль направления вектора \mathbf{B} , имеет место явление: интенсивность намагничивания не зависит от B .

Используя соотношение (20.17) и учитывая, что вдали от области насыщения $L(a) \approx a/3$, запишем следующее выражение для интенсивности намагничивания парамагнетиков:

$$\mathbf{J} = \frac{n_0 P_m^2}{3kT} \mathbf{B} = \chi' \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad (20.18)$$

где

$$\chi' = \frac{n_0 P_m^2 \mu_0}{3kT}. \quad (20.19)$$

Величина χ' для парамагнетиков положительна и лежит в пределах от 10^{-5} до 10^{-3} . Поэтому магнитная восприимчивость парамагнетиков практически не отличается от χ' [см. (20.15'')]: $\chi \approx \chi'$.

Можно показать на опыте, что намагничивание парамагнетика действительно происходит в направлении, совпадающем с вектором \mathbf{B} индукции магнитного поля. При внесении парамагнитного стержня в магнитное поле, созданное между полюсами электромагнита, он устанавливается вдоль линий индукции этого поля (рис. 20.7).

4. Как уже указывалось выше, процесс намагничивания парамагнетика состоит в упорядочении расположения магнитных моментов его

атомов (или молекул) по отношению к направлению вектора индукции магнитного поля. Механический момент импульса атома связан с его магнитным моментом соотношением (20.3''). Поэтому намагничивание парамагнетика сопровождается также преимущественной ориентацией векторов (L_i) моментов импульса его атомов:

$$\sum_{i=1}^N L_i = -\frac{1}{g} \sum_{i=1}^N P_{mi},$$

где N — число атомов, содержащихся в объеме V парамагнетика. Пренебрегая неоднородностью магнитного поля в пределах этого объема, на основании (20.13) и (20.18) получим

$$\sum_{i=1}^N L_i = -\frac{1}{g} VJ = -\frac{\chi' V}{g} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Таким образом, суммарный момент импульса всех атомов магнетика пропорционален индукции магнитного поля и равен нулю в отсутствие поля. Поворот атомов парамагнетика в магнитном поле происходит в результате их тепловых соударений, т. е. под влиянием в н у т р е н н и х с и л. Поэтому должен выполняться закон сохранения момента импульса (см. т. I, § 4.3): момент импульса парамагнитного тела при его намагничивании не изменяется. Следовательно, одновременно с упорядочением направлений векторов магнитных моментов и моментов импульса атомов парамагнитного тела в однородном магнитном поле это тело должно начать вращаться вокруг оси, параллельной вектору \mathbf{B} . Угловая скорость ω вращения тела должна быть такой, чтобы соответствующий ей момент импульса тела $J_0\omega$ (J_0 — момент инерции тела) был равен

$$J_0\omega = -\sum_{i=1}^N L_i = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^N P_{mi} = \frac{VJ}{g} = \frac{\chi' V}{g} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (20.20)$$

Это явление называется **магнитомеханическим эффектом**. Зная J_0 , V и χ' и измеряя опытным путем B и ω , можно по формуле (20.20) определить гиромагнитное отношение g .

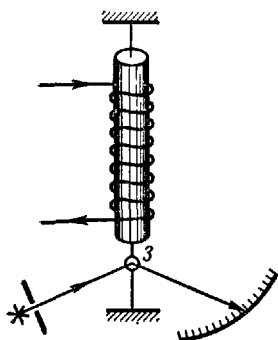


Рис. 20.8

Магнитомеханический эффект впервые был обнаружен экспериментально в 1915 г. А. Эйнштейном и В. де-Гаазом. Железный стержень, подвешенный на тонкой кварцевой нити, помещался внутри вертикального соленоида вдоль его оси (рис. 20.8). При пропускании через соленоид тока стержень намагничивался и приобретал соответствующий вращательный импульс, под действием которого он поворачивался на некоторый угол, закручивая кварцевую нить. Это наблюдалось с помощью

светового луча, отражавшегося от зеркала Z , закрепленного на нити. Угол поворота стержня был очень мал. Поэтому через соленоид пропускался переменный ток, частота которого соответствовала резонансным крутильным колебаниям стержня.

В 1915 г. С. Барнетт обнаружил обратный эффект — намагничивание быстро вращающегося железного стержня при отсутствии внешнего магнитного поля. Вектор магнитного момента противоположен по направлению вектору угловой скорости вращения стержня. Это связано с тем, что векторы механических и магнитных моментов электронов (отрицательно заряженных частиц) направлены в противоположные стороны.

5. Опыты Эйнштейна и де-Гааза, проведенные с железными стержнями, привели к неожиданным результатам. Гиромагнитное отношение g_s оказалось в два раза большим, чем это следует из уравнений (20.3') или (20.3''), т. е.

$$g_s = e/m. \quad (20.21)$$

Этот результат имел огромное значение не только для изучения магнитных свойств железа, но и для всего дальнейшего развития физики. Для его объяснения пришлось предположить, что электрон помимо орбитальных моментов L_e и p_m обладает еще собственным моментом импульса L_{es} , который был назван спином электрона¹, и соответствующим ему собственным магнитным моментом

$$p_{ms} = -g_s L_{es}. \quad (20.21')$$

Вначале элементарное представление о спине связывалось с вращением электрона вокруг собственной оси. Однако в дальнейшем выяснилось, что такая модель спина неверна. В настоящее время доказано, что электрону присущи некоторые собственные механический и магнитный моменты, подобно тому, как ему присущи заряд $-e$ и масса m . Спин является неотъемлемым свойством электрона и проявляется в большом числе экспериментальных фактов. Спином электрона объясняются многие важные закономерности физики. К ним относятся: распределение электронов по энергетическим состояниям и в связи с этим по оболочкам в атомах, тонкая структура спектра излучения, испускаемого возбужденными атомами, и расщепление спектральных линий в не очень сильных магнитных полях. Эти явления рассмотрены в третьем томе курса. Спин электрона оказывает влияние на распределение электронов по энергиям в металлах (см. § 13.1). Спином электронов объясняются магнитные свойства ферромагнетиков (см. § 20.6).

6. В современной физике доказано, что абсолютное значение спина электрона

$$L_{es} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar, \quad (20.22)$$

где h — постоянная Планка, $\hbar = h/2\pi$.

¹ Спин по-английски означает кручение, верчение, веретено.

Из формулы (20.21) следует, что абсолютное значение спинового магнитного момента электрона

$$\rho_{ms} = \sqrt{3} \frac{he}{4\pi m}. \quad (20.22')$$

Величина

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 0,927 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс.}$$

называется **магнетон Бора**. Оказывается, что орбитальные магнитные моменты электронов в атомах также имеют значения порядка магнетона Бора.

Важнейшая особенность спина электрона состоит в том, что в магнитном поле¹ спин может быть ориентирован только двумя способами: его проекция на направление вектора **B** индукции магнитного поля может быть равна либо $+\hbar/2$, либо $-\hbar/2$. Соответственно, проекции спиновых магнитных моментов равны $-\mu_B$ и $+\mu_B$. В первом случае принято говорить, что **спин параллелен вектору B**, а во втором — **антипараллелен ему**. Указанную особенность спина подтверждают все эксперименты, в которых проявляется влияние спина электрона. Прямым экспериментальным доказательством наличия только двух ориентаций спина являются опыты О. Штерна и В. Герлаха, которые рассмотрены в третьем томе.

7. У большого числа металлических парамагнетиков (щелочные и щелочноземельные металлы, хром, ванадий, марганец и др.) наблюдается **аномальный парамагнитный эффект**, состоящий в том, что их магнитная восприимчивость практически не зависит от температуры. Это явление обусловлено спиновым парамагнетизмом электронов проводимости. Его нельзя объяснить, исходя из законов классической физики. Действительно, если бы электроны проводимости в металле вели себя как классический газ, «атомы» которого обладают постоянными магнитными моментами ρ_{ms} , произвольно ориентированными в пространстве, то магнитная восприимчивость такого газа зависела бы от температуры по закону (20.19), т. е. была бы обратно пропорциональна абсолютной температуре.

В действительности электронный газ подчиняется не классической, а квантовой статистике Ферми—Дирака, основанной на принципе Паули. В § 13.1 говорилось о том, что в соответствии с принципом Паули свободные электроны попарно заполняют энергетические уровни в зоне проводимости металла, причем спины двух электронов, находящихся на одном уровне, направлены в противоположные стороны. Спиновые магнитные моменты таких пар электронов взаимно компенсируют друг друга. Поэтому в отсутствие внешнего магнитного поля суммарный магнитный момент электронов проводимости металла

¹ Причины возникновения этого поля не играют никакой роли. Оно может порождаться как токами проводимости («внешнее поле»), так и орбитальным движением электронов или магнитными моментами ядер атомов («внутреннее поле»).

равен нулю. Во внешнем магнитном поле энергетическая эквивалентность обоих направлений спиновых магнитных моментов электронов нарушается. Электрон, спиновый магнитный момент которого параллелен внешнему магнитному полю, обладает меньшей энергией, чем электрон с противоположно направленным спиновым магнитным моментом. Таким образом, первый электрон находится в энергетически более выгодном (устойчивом) состоянии, чем второй. Здесь имеется известная аналогия с двумя ориентациями плоского контура тока в магнитном поле, соответствующими параллельности векторов \mathbf{r}_m и \mathbf{B} и их антипараллельности (см. § 17.1).

В зоне проводимости не все энергетические уровни заполнены электронами. Поэтому в результате действия на металл внешнего магнитного поля должен происходить «поворот» антипараллельных полю спиновых магнитных моментов у тех электронов, которые оказались на энергетических уровнях, более высоких, чем свободные уровни, соответствующие электронам, спиновые магнитные моменты которых параллельны полю. Это явление называется **парамагнетизмом электронного газа в металлах**. Таким образом, минимуму свободной энергии металла во внешнем магнитном поле соответствует намагниченное состояние. Интенсивность намагничивания пропорциональна разности концентраций электронов, спиновые магнитные моменты которых ориентированы параллельно и антипараллельно полю.

§ 20.5. Магнитное поле в веществе

1. При изучении магнитного поля в веществе (магнетике) различают два типа токов — макротоки и микротоки. Под **макротоками** понимают электрические токи проводимости, а также конвекционные токи, связанные с движением заряженных макроскопических тел. **Микротоками** или **молекулярными токами** называют токи, обусловленные движением электронов в атомах, ионах и молекулах.

В веществе на магнитное поле макротоков (его часто называют **внешним**) накладывается дополнительное магнитное поле микротоков (его соответственно называют **внутренним**). Вектор магнитной индукции \mathbf{B} характеризует результирующее магнитное поле в веществе, т. е. он равен геометрической сумме магнитных индукций внешнего (\mathbf{B}_0) и внутреннего ($\mathbf{B}_{\text{внутр}}$) полей:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{внутр}}. \quad (20.23)$$

Из сказанного ясно, что вектор \mathbf{B} должен зависеть от магнитных свойств магнетика. Магнитное поле микротоков возникает в результате намагничивания магнетика при его помещении во внешнее магнитное поле. Поэтому первичным источником магнитного поля в веществе являются макротоки.

2. Закон полного тока (16.8) для магнитного поля в вакууме легко обобщить на магнитное поле в веществе. В вакууме поле создают только макротоки, а в веществе — макротоки и микротоки. Следовательно, для поля в веществе

$$\oint_L \mathbf{B} dl = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}), \quad (20.24)$$

где $I_{\text{макро}}$ и $I_{\text{микро}}$ — алгебраические суммы соответственно макро- и микротоков, охватываемых замкнутым контуром L , т. е. результирующие макро- и микротоки сквозь поверхность, натянутую на контур L .

Величину $I_{\text{микро}}$ можно подсчитать, основываясь на предположении, что молекула с магнитным моментом \mathbf{P}_m эквивалентна замкнутому «витку» молекулярного тока

$$I_{\text{мол}} = P_m / S_{\text{мол}},$$

где $S_{\text{мол}}$ — площадь «витка» (рис. 20.9). В случае парамагнитной среды \mathbf{P}_m — собственный магнитный момент молекулы, а в случае диа-

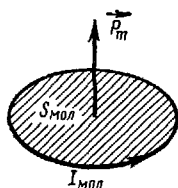


Рис. 20.9

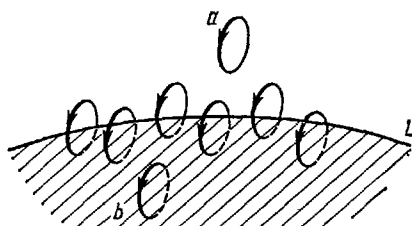


Рис. 20.10

магнитной среды — наведенный магнитный момент $\Delta \mathbf{P}_m$. Вклад в $I_{\text{микро}}$ дают только те молекулярные токи, «витки» которых «нанизаны» на рассматриваемый контур L , как бусы на нитку (рис. 20.10). В самом деле, молекулярные токи, не удовлетворяющие этому условию, либо вообще не пересекают поверхность, натянутую на контур L и заштрихованную на рис. 20.10 («виток» a), либо пересекают ее дважды («виток» b) во взаимно противоположных направлениях.

3. Для нахождения величины $I_{\text{микро}}$ рассмотрим магнитное поле в д и а м а г н и т н о м веществе. Во внешнем магнитном поле молекулы этого вещества имеют наведенные магнитные моменты $\Delta \mathbf{P}_m$, направленные строго упорядоченно — в сторону, противоположную вектору магнитной индукции \mathbf{B} . Обозначим через α угол между вектором $d\mathbf{l}$ малого элемента $d\mathbf{l}$ замкнутого контура L и вектором $\Delta \mathbf{P}_m$. На элемент $d\mathbf{l}$ контура «нанизаны» молекулярные токи всех dn молекул, находящихся в объеме косоугольного цилиндра (рис. 20.11) с образующей $d\mathbf{l}$ и основанием, равным $S_{\text{мол}}$, нормаль к которому составляет угол α с образующей цилиндра:



Рис. 20.11

$$dn = n_0 S_{\text{мол}} dl \cos \alpha,$$

где n_0 — концентрация молекул

Таким образом, малому элементу $d\mathbf{l}$ кон-

тура L соответствует охватываемый этим контуром микроток, равный

$$dl_{\text{микро}} = I_{\text{мол}} n_0 S_{\text{мол}} dl \cos \alpha = n_0 \Delta P_m dl \cos \alpha,$$

или на основании (20.14)

$$dl_{\text{микро}} = J dl \cos \alpha = J dl,$$

где \mathbf{J} — вектор намагниченности. Интегрируя это выражение по всему замкнутому контуру L , находим

$$I_{\text{микро}} = \oint_L \mathbf{J} dl. \quad (20.25)$$

Для парамагнитной среды расчет $I_{\text{микро}}$ более сложен, так как из-за теплового движения магнитные моменты молекул ориентированы по-разному. Однако можно доказать, что и в этом случае для $I_{\text{микро}}$ справедливо выражение (20.25).

Итак, *сумма микротоков, охватываемых замкнутым контуром, равна циркуляции вдоль этого контура вектора намагниченности.*

4. Разделим обе части уравнения (20.24) на μ_0 и подставим в него значение $I_{\text{микро}}$ в форме (20.25):

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} dl = I_{\text{макро}} + \oint_L \mathbf{J} dl.$$

После несложных преобразований получим

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) dl = I_{\text{макро}}. \quad (20.26)$$

Вектор

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \quad (20.27)$$

называют **напряженностью магнитного поля**. Поэтому (20.26) можно переписать в виде

$$\oint_L \mathbf{H} dl = I_{\text{макро}}. \quad (20.28)$$

Это уравнение является обобщением на магнитное поле в веществе соотношения (16.9), полученного выше для магнитного поля в вакууме. Оно выражает **закон полного тока** для магнитного поля в любой среде: *циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль произвольного замкнутого контура равна результирующему макротoku сквозь поверхность, натянутую на этот контур.*

5. В случае изотропной среды связь между векторами магнитной индукции и намагниченности имеет вид [см. (20.16) и (20.18)]

$$\mathbf{J} = \chi' \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Поэтому из (20.27) следует, что напряженность и магнитная индукция поля в изотропной среде связаны соотношением

$$\mathbf{H} = (1 - \chi') \frac{\mathbf{B}}{\mu_0},$$

или на основании (20.15')

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu \mu_0}, \quad (20.27')$$

где

$$\mu = 1 + \chi \quad (20.29)$$

— относительная магнитная проницаемость среды, а χ — магнитная восприимчивость среды.

Для диамагнитных веществ $\chi < 0$ и $\mu < 1$. Для парамагнитных веществ $\chi > 0$ и $\mu > 1$. Относительная магнитная проницаемость этих веществ не зависит от напряженности магнитного поля, в котором они находятся.

Из данных для χ , которые были приведены ранее, следует, что μ пара- и диамагнитных веществ незначительно отличается от единицы ($\mu \approx 1$). Это связано с тем, что внутренние магнитные поля в таких веществах намного слабее тех внешних полей, которые вызывают намагничивание вещества.

Объемная плотность энергии магнитного поля в неферромагнитной среде с относительной магнитной проницаемостью μ по формуле (19.54') равна

$$\omega_m = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

В § 7.2 было показано, что энергия электрического поля в диэлектрике равна сумме энергии электрического поля в вакууме и энергии поляризованного диэлектрика. Аналогично этому, энергия магнитного поля складывается из энергии поля в вакууме ($\mu = 1$) и энергии намагниченной среды (магнетика). Поэтому

$$\omega_m = \omega_{m(\text{вак})} + \omega_{m(\text{магн})}.$$

Объемная плотность энергии поля в вакууме

$$\omega_{m(\text{вак})} = \mu_0 H^2 / 2.$$

Объемная плотность энергии намагниченной среды

$$\omega_{m(\text{магн})} = \omega_m - \omega_{m(\text{вак})} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} - \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{(\mu - 1) \mu_0 H^2}{2}. \quad (20.30)$$

Формула (20.30) по своему виду аналогична соответствующей формуле (7.9) для энергии поляризованного диэлектрика.

§ 20.6. Ферромагнетизм

1. Ферромагнитными веществами — ферромагнетиками — называются такие вещества, в которых внутреннее (собственное) магнитное поле может в сотни и тысячи раз превышать вызвавшее его внешнее магнитное поле. К ферромагнетикам относятся железо, никель, кобальт и ряд сплавов, причем ферромагнетизм обнаружен только в кристаллическом состоянии перечисленных веществ. Ферромагнитные материалы начали широко применяться лишь с конца прошлого столетия в связи с необходимостью создания для различных электрических машин и аппаратов магнитных цепей, обладающих возможно меньшим магнитным сопротивлением (см. §.16.3).

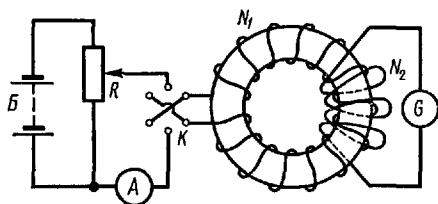


Рис. 20.12

2. Экспериментальное изучение ферромагнетиков было начато В. Г. Столетовым в 1871 г. Он исследовал зависимость интенсивности намагничивания железа от напряженности магнитного поля. Примененный им метод заключался в измерении магнитного потока Φ_m в ферромагнитных кольцах при помощи баллистического гальванометра. Торонд, первичная обмотка которого состояла из N_1 витков, имел сердечник из исследуемого материала (например, отожженного железа). Вторичная обмотка из N_2 витков была замкнута на баллистический гальванометр G (рис. 20.12). Обмотка N_1 включалась в цепь аккумуляторной батареи B . Напряжение, приложенное к этой обмотке, а следовательно, и силу тока I в ней можно было изменять с помощью потенциометра R . Направление тока изменялось коммутатором K . Магнитная индукция B внутри сердечника тороида по формуле (20.23) равна

$$B = B_0 + B_{\text{внутр}},$$

где B_0 — индукция магнитного поля, создаваемого током в обмотке N_1 , а $B_{\text{внутр}}$ — индукция магнитного поля, создаваемого намагниченным веществом сердечника.

При изменении направления тока в обмотке N_1 на противоположное в цепи обмотки N_2 возникал кратковременный индукционный ток. Электрический заряд q , который проходил при этом через баллистический гальванометр, определяется по формуле (19.7):

$$q = 2N_2 \Phi_m / R,$$

где R — электрическое сопротивление цепи гальванометра, Φ_m — магнитный поток в сердечнике тороида.

Определив из последнего равенства магнитный поток Φ_m и зная площадь сечения S тороида, можно найти магнитную индукцию $B = \Phi_m / S$. Напряженность H магнитного поля в тороиде вычисляется по формуле (16.12).

Вычислив значения H для различных токов и получив из опыта соответствующие им численные значения магнитной индукции B в сердечнике, можно найти для данного ферромагнетика относительную магнитную проницаемость $\mu = B/\mu_0 H$ и намагниченность $J = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}$.

3. Результаты экспериментального изучения свойств ферромагнетиков приведены на рис. 20.13—20.15. На рис. 20.13 показана зависимость

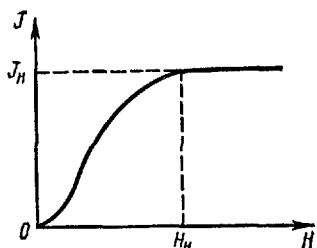


Рис. 20.13



Рис. 20.14

интенсивности намагничивания от напряженности намагничивающего поля. Начиная с некоторого значения $H = H_n$ числовое значение вектора намагниченности практически остается постоянным и равным J_n . Это явление Столетов назвал **магнитным насыщением**. График зависимости магнитной индукции B от H (рис. 20.14) отличается от графика $J = f(H)$ отсутствием горизонтальной части: как только наступает насыщение, магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J})$ растет по линейному закону в зависимости от напряженности внешнего магнитного поля. Существенной особенностью ферромагнетиков является зависимость μ от H . Относительная магнитная проницаемость μ ферромагнетика вначале быстро растет с возрастанием H , достигает максимума и затем убывает, стремясь к единице при сильных намагничивающих полях (рис. 20.15). Последнее объясняется тем, что при больших значениях \mathbf{H} в формуле $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}$ можно пренебречь членом $\mu_0 \mathbf{J}$ по сравнению с $\mu_0 \mathbf{H}$. Тогда $B = \mu_0 \mu H \rightarrow \mu_0 H$ и $\mu \rightarrow 1$. Максимальные значения μ для ферромагнетиков очень велики. Так, для железа $\mu_{\text{макс}} = 5000$, для кремнистого железа (с содержанием 3,3% Si) — 10000, для чугуна (3% C) — 2000 и для пермаллоя (78% Ni и 22% Fe) — 100 000.

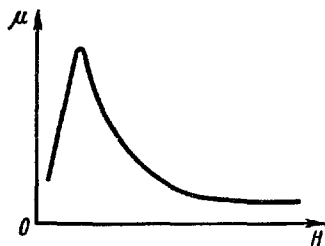


Рис. 20.15

4. Работы Столетова позволили подойти к созданию теории ферромагнитных явлений. Классическая теория ферромагнетизма была разработана французским физиком П. Вейссом. Теория Вейсса по существу является развитием термодинамической теории парамагнетизма Ланжевена и применением ее к «молекулярному

полю» в ферромагнетиках. В основу этой теории положены две гипотезы. Первая из них состоит в том, что в определенной области температур (от абсолютного нуля до точки Кюри) ферромагнетики обладают самопроизвольной намагниченностью, не зависящей от наличия внешнего намагничивающего поля. Однако опыты показа-

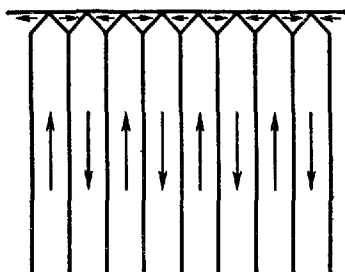


Рис. 20.16

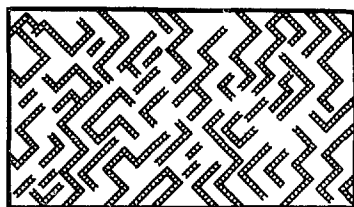


Рис. 20.17

ли, что в случае отсутствия внешнего поля, если не учитывать явления магнитного гистерезиса, всякое ферромагнитное тело в целом будет размагничено. Это заставило ввести вторую гипотезу о том, что ниже точки Кюри любое ферромагнитное тело разбивается на малые области, обладающие однородной самопроизвольной (спонтанной) намагниченностью. Такие области называются доменами. Линейные размеры доменов достигают 10^{-2} — 10^{-3} см.

При отсутствии внешнего магнитного поля векторы магнитных моментов отдельных доменов ориентированы в пространстве таким образом, что результирующий магнитный момент всего тела равен нулю. Внешнее магнитное поле, действующее на ферромагнетик, ориентирует магнитные моменты не отдельных частиц, как это имеет место в случае парамагнетиков, а целых областей спонтанной намагниченности. На рис. 20.16 показана структура таких областей вблизи поверхности ферромагнитного образца.

Существование областей спонтанной намагниченности было доказано опытами Н. С. Акулова и его сотрудников. Мелкий ферромагнитный порошок, взвешенный в жидкости, наносился в виде суспензии на хорошо отполированную поверхность ферромагнетика. При оседании порошка на поверхности ферромагнитных кристаллов образовывались полосы, очерчивавшие области спонтанной намагниченности (рис. 20.17).

5. Классическая теория ферромагнетизма позволила объяснить существование магнитного насыщения. Очевидно, что магнитное насыщение наступает тогда, когда векторы магнитных моментов во всех областях спонтанной намагниченности устанавливаются параллельно вектору индукции внешнего магнитного поля. Исследования показали, что при намагничивании ферромагнетика зависимость B от H не является плавной (рис. 20.18). Такой характер кривой намагничивания свидетельствует о том, что внутри ферромагнетика происходит с к а ч-

к о о б р а з н ы й рост внутреннего магнитного поля. Под действием внешнего намагничивающего поля происходит быстрое изменение ориентации магнитных моментов отдельных доменов или целых их групп. Это осуществляется прежде всего в тех доменах, которые намагничены в направлениях, наиболее близких к направлению вектора магнитной индукции. При усилении внешнего поля размеры областей, намагниченных вдоль этого поля, растут за счет уменьшения областей с другими ориентациями внутреннего магнитного поля. В случае достаточно сильного магнитного поля весь ферромагнитный образец оказывается однородно намагниченным до насыщения.

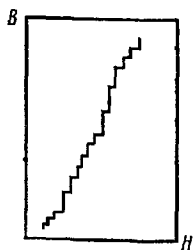


Рис. 20.18

Скачкообразный характер изменения интенсивности намагничивания ферромагнетиков в магнитных полях носит название **эффекта Баркгаузена**. Его можно обнаружить следующим простым акустическим методом, разработанным В. К. Аркадьевым. Если на ферромагнитный сердечник,

намагничивающийся в поле соленоида L_1 , надеть катушку L_2 , соединенную с телефоном T (рис. 20.19), то при увеличении напряженности намагничивающего поля в телефоне слышен шорох. Этот шорох вызывается ориентацией областей спонтанной намагниченности сердечника в направлении внешнего поля.

6. А. Г. Столетов изучил явление намагничивания ферромагнетика в переменном по величине и направлению внешнем магнитном поле и обнаружил важное свойство ферромагнетиков: способность сохранять намагниченность после того, как внешнее магнитное поле выключено.

Пусть намагничивание ферромагнетика до насыщения (точка a , рис. 20.20) происходит по кривой Oa . Если далее уменьшать напряженность H намагничивающего поля, то опыт показывает, что при этом намагниченность J изменяется по кривой, лежащей выше кривой aO . При $H = 0$ намагниченность отличается от нуля: в ферромагнетике наблюдается **остаточная намагниченность** J_R , обусловленная тем, что и после прекращения действия внешнего поля у части доменов сохра-

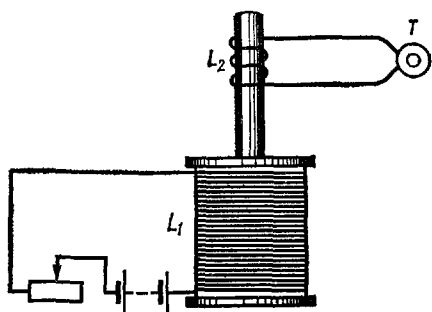


Рис. 20.19

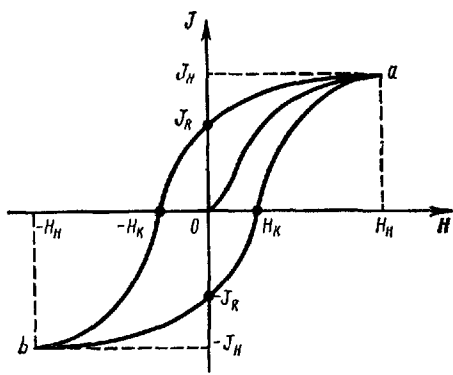


Рис 20.20

няется преимущественная ориентация их магнитных моментов. Чтобы полностью размагнитить образец, следует создать магнитное поле с напряженностью, равной H_k , направленное в противоположную сторону. Величина H_k называется **коэрцитивной** (задерживающей) силой. При дальнейшем увеличении магнитного поля, противоположного первоначальному, намагниченность образца снова достигает насыщения (точка b). Возвращаясь постепенно к напряженности намагничивающего поля $+H_k$, получим замкнутую кривую, которая называется **петлей гистерезиса**.

С явлением гистерезиса мы уже встречались при изучении процесса поляризации сегнетоэлектриков в переменном по величине и направлению внешнем электрическом поле (см. § 6.4).

Коэрцитивная сила характеризует свойство ферромагнетика сохранять намагниченность и наряду с магнитной проницаемостью определяет его применимость для тех или иных практических целей. Большой коэрцитивной силой обладают углеродистые (50 ÷ 60 Э), вольфрамовые и хромовые (70 Э), алюминий-никелевые (700 Э) и другие стали. Эти материалы дают широкую петлю гистерезиса и называются **«твердыми» магнитными материалами**. Из них изготавливаются постоянные магниты.

К **«мягким» магнитным материалам**, обладающим малой коэрцитивной силой и дающим узкую петлю гистерезиса, относятся: мягкое железо, сплавы железа с никелем, например Мо — пермаллой (Fe — 16%; Ni — 78,5%; Mo — 3,8%; $H_k = 0,04$ Э), супермаллой (Fe — 15%; Ni — 79%; Mo — 5%; $H_k = 0,004$ Э) и др. Эти материалы используются для изготовления сердечников трансформаторов.

Перемагничивание ферромагнетика связано с поворотом областей спонтанной намагниченности. Работа, необходимая для этого, совершается за счет энергии внешнего магнитного поля. Можно показать, что количество теплоты, выделяющейся при перемагничивании, пропорционально площади петли гистерезиса.

7. Нарушение остаточной преимущественной ориентации областей спонтанной намагниченности, т. е. дезориентация этих областей, может быть вызвана ударом или сотрясением образца. Поэтому постоянные магниты следует предохранять от ударов. Аналогично действует нагревание ферромагнитного тела. С повышением температуры остаточная намагниченность ферромагнетика уменьшается. При достаточно высокой температуре, называемой **точкой Кюри**, она исчезает полностью. Это объясняется тем, что тепловое движение частиц ферромагнетика становится столь интенсивным, что области спонтанной намагниченности распадаются.

Точка Кюри для железа равна 780, никеля — 350, кобальта — 1150 и пермаллой — 550 °С.

При температурах выше точки Кюри ферромагнетик ведет себя во внешнем магнитном поле как парамагнитное вещество. Он не только теряет свои ферромагнитные свойства, но у него изменяются и теплоемкость, электропроводность и некоторые другие физические характеристики. Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное, происходящий в точке Кюри, не сопровождается выделением

или поглощением теплоты. Поэтому он является примером фазового перехода второго рода (см. т. I, § 15.5).

8. При намагничивании ферромагнетика происходит изменение его формы и объема. Это явление называется **магнитострикцией**. Явление магнитострикции было открыто Д. Джоулем в 1842 г. Впервые правильное объяснение магнитострикции дал Н. С. Акулов в 1928 г.

Величина и знак магнитострикции зависят от напряженности H намагничивающего поля и природы ферромагнетика. Так, в никеле линейная магнитострикция $\Delta l/l_0$ при любых магнитных полях отрицательна, в пермаллое — положительна; в железе при слабых полях положительна, а при сильных полях — отрицательна. У ферромагнетиков наблюдается также и обратное явление — изменение намагниченности при деформации. Сплавы со значительной магнитострикцией применяются в приборах, служащих для измерения давлений и деформаций. Механические колебания, возникающие в ферромагнетиках при их намагничивании в периодически изменяющемся магнитном поле, используются в ультразвуковых магнитострикционных вибраторах. Теоретическое объяснение явления магнитострикции выходит за рамки нашего курса.

§ 20.7. Понятие о природе ферромагнетизма

1. В классической теории ферромагнетизма не вскрывалась природа внутреннего («молекулярного») поля. В соответствии с двумя гипотезами, положенными в основу классической теории ферромагнитных явлений, объяснение ферромагнетизма разбивается на две части:

а) истолкование природы самопроизвольной намагниченности, т. е. выяснение физического смысла ферромагнетизма;

б) объяснение действия внешнего магнитного поля на области спонтанной намагниченности, т. е. создание теории кривой намагничивания $J = f(H)$.

В этом параграфе мы коротко остановимся на современных представлениях о природе ферромагнетизма.

2. Опыты Эйнштейна и де-Гааза и явление Барнетта позволяют определить числовые значения гиромангнитного отношения g для различных веществ. Для ферромагнитных веществ g оказалось таким, какое имеет место для спиновых моментов p_{ms} и L_{es} [см. формулу (20.21)]. Результаты этих опытов являются экспериментальным доказательством того, что в создании самопроизвольной намагниченности ферромагнетиков орбитальные магнитные моменты практически не принимают участия. Из опытов по измерению g для ферромагнитных тел следует, что элементарными носителями магнетизма в таких телах являются **спин о в ы е м а г н и т н ы е м о м е н т ы э л е к т р о н о в**.

3. Согласно классическим представлениям, электроны в атоме движутся вокруг ядра по некоторым орбитам, причем совокупность определенного числа электронных орбит образует **электронную оболочку**. В каждом атоме имеется некоторое число оболочек, каждая из которых содержит определенное число электронов. Все оболочки, кроме

ближайшей к ядру, в свою очередь подразделяются на **слои**, или **подоболочки**. Электроны в атоме стремятся занять места в оболочках и подоболочках, ближе расположенных к ядру, так как энергия электрона при этом уменьшается и его состояние делается более устойчивым. Вопрос о том, как в соответствии с принципом Паули происходит заполнение электронами оболочек и подоболочек, подробно рассмотрен в третьем томе курса. Сейчас обратим внимание лишь на одну особенность ферромагнитных металлов. Атомы элементов, обладающих ферромагнитными свойствами (Fe, Co, Ni), принадлежат к числу переходных атомов периодической системы Д. И. Менделеева. В этих атомах нарушается последовательность заполнения электронами мест в оболочках и слоях. Прежде чем полностью «застроится» нижняя оболочка, начинается заполнение выше расположенной оболочки. Поэтому в переходном атоме появляются не заполненные электронами внутренние слои и оболочки. Например, в атоме железа 26 его электронов распределены на четырех оболочках. Первая и вторая оболочки целиком заполнены и содержат соответственно 2 и 8 электронов. Третья и четвертая оболочки не достроены: на третьей оболочке находится 14 электронов (вместо 18), а на четвертой — 2 (вместо 32). 14 электронов третьей оболочки распределены по слоям следующим образом: в первом слое — 2, а во втором и третьем — по 6 электронов. Спины электронов, расположенных в каждом слое, могут быть ориентированы в двух противоположных направлениях. В застроенных первых двух оболочках атома железа магнитные спиновые моменты электронов взаимно компенсируют друг друга. В третьей оболочке первые два слоя также характерны тем, что спиновые магнитные моменты электронов, расположенных в этих слоях, компенсируют друг друга. Что же касается третьего слоя, то из шести находящихся в нем электронов пять имеют спины, ориентированные в одном направлении¹, и лишь один электрон имеет спин, ориентированный противоположно. Итак, в атоме железа четыре электронных спина в третьей оболочке остаются некомпенсированными. Что касается наружных валентных электронов атома железа, то их спины, вообще говоря, тоже могут быть некомпенсированы. Однако, как показывает опыт, на магнитные свойства атома железа валентные электроны, слабо связанные с атомом, существенного влияния не оказывают.

В изолированном атоме железа орбитальные движения электронов дают некоторый орбитальный магнитный момент. Однако при образовании кристалла железа происходит своеобразное «замораживание» электронных орбит, приводящее к тому, что орбитальные магнитные моменты электронов практически не участвуют в создании магнитных моментов атомов. Причины такого «замораживания» еще не вполне выяснены. Вместе с тем измерения гиромагнитного отношения g ясно показывают, что магнитные свойства ферромагнитных веществ связаны с некомпенсированными спиновыми магнитными моментами небольшого числа электронов атома. Таким образом, ферромагнитными свой-

¹ Это не противоречит принципу Паули, так как энергетические состояния этих электронов оказываются различными.

ствами могут обладать только такие вещества, в атомах которых имеются недостроенные внутренние электронные оболочки. Однако это условие является необходимым, но не достаточным. Например, ряд атомов элементов переходной группы (Cr, Mn, Pt и др.) и атомы редкоземельных элементов имеют недостроенные внутренние оболочки, но эти вещества являются парамагнетиками.

4. Для объяснения самопроизвольной намагниченности ферромагнетиков необходимо предположить, что в них между носителями магнетизма — спинами электронов — существует сильное взаимодействие, способное при температурах, более низких, чем точка Кюри, создать внутреннее («молекулярное») поле. Естественно предположить, что между спиновыми магнитными моментами существует обыкновенное магнитное взаимодействие, подобное взаимодействию двух проводников с токами (см. § 15.2) или двух соленоидов (см. § 17.3). Однако расчеты показывают, что при этом энергия магнитного взаимодействия спинов оказывается весьма малой величиной порядка 10^{-23} Дж. Даже при температуре жидкого воздуха средняя энергия теплового движения атомов превосходит эту энергию магнитного взаимодействия атомов. Поэтому за счет магнитного взаимодействия невозможно образование самопроизвольной намагниченности. В 1927 г. Я. Г. Дорфман экспериментально доказал, что «молекулярное» поле имеет не магнитное происхождение. Он наблюдал за отклонениями пучков электронов, прошедших сквозь намагниченную никелевую фольгу. Если бы в никеле существовали внутренние «молекулярные» магнитные поля, достаточные для возникновения ферромагнетизма, то пучок электронов должен был бы сильно отклоняться. Опыт показал, что электронный пучок отклонялся незначительно. Этим была доказана немагнитная природа взаимодействия между спинами электронов, являющегося причиной ферромагнетизма.

В § 20.4, рассматривая спиновый парамагнетизм металлов, мы видели, что энергия системы электронов зависит от ориентации спинов электронов. Если электроны между собой не взаимодействуют, то энергия системы электронов в отсутствие внешнего поля минимальна, а состояние системы наиболее устойчиво в том случае, когда спиновые магнитные моменты электронов ориентируются попарно противоположно друг другу. Если между электронами существует электронное взаимодействие, то, как показали Я. И. Френкель и В. Гейзенберг, состояние системы электронов в теле может быть более устойчивым и энергетически выгодным, когда спиновые магнитные моменты электронов ориентированы параллельно друг другу. В последнем случае может наблюдаться самопроизвольная намагниченность тела. Возникновение самопроизвольной намагниченности за счет электрических сил нельзя объяснить с точки зрения классической физики. Само существование спина у электрона является «неклассическим», т. е. чуждым классической физике явлением. Не удивительно поэтому, что и электрическое взаимодействие электронов, приводящее к состоянию самопроизвольной намагниченности ферромагнетиков, также является особым квантовым взаимодействием, называемым обменным взаимодействием.

§ 20.8. Явление сверхпроводимости

1. В § 8.7 и 13.1 мы говорили о том, что удельное электрическое сопротивление чистых металлов пропорционально их абсолютной температуре. Однако, как показывают опыты, эта зависимость справедлива лишь при средних температурах. При достаточно низких температурах удельное сопротивление металлов стремится к некоторому пределу, называемому **остаточным удельным сопротивлением**. Характер зависимости удельного сопротивления ρ металлического проводника от его температуры T показан на рис. 20.21, где ρ_0 — удельное сопротивление этого же проводника при 0°C . На рис. 20.22 приведены температурные зависимости удельного сопротивления различных образцов золота. Кривые на рис. 20.22 отличаются друг от друга лишь величинами остаточного сопротивления и могут быть переведены одна в другую параллельным переносом вдоль оси ординат. Чем химически чище металл и чем меньше в нем различных неоднородностей, обусловленных внутренними напряжениями, тем меньше его остаточное сопротивление. Для идеально чистого, ненапряженного металла с неискаженной кристаллической решеткой остаточное сопротивление должно обратиться в нуль, т. е. $\rho \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$. К такому же выводу приводит квантовая теория электрических свойств металлов (см. § 13.1).

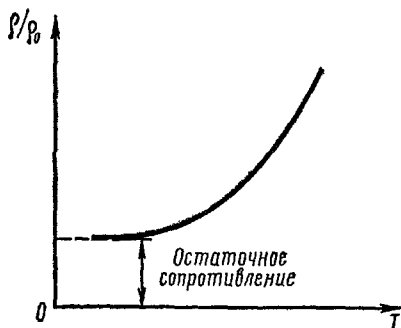


Рис. 20.21

2. Измерение сопротивления при очень низких температурах представляет собой сложную задачу. Трудность ее заключается прежде всего в необходимости осушения крайне низких температур. Температура до $0,7\text{ К}$ была достигнута испарением жидкого гелия при пониженном давлении. Более низкие температуры получают методом адиабатического размагничивания парамагнитных солей. Наиболее низкая температура, достигнутая таким способом, составляет $0,003\text{ К}$.

В 1911 г. голландский ученый Х. Камерлинг-Оннес провел эксперимен-

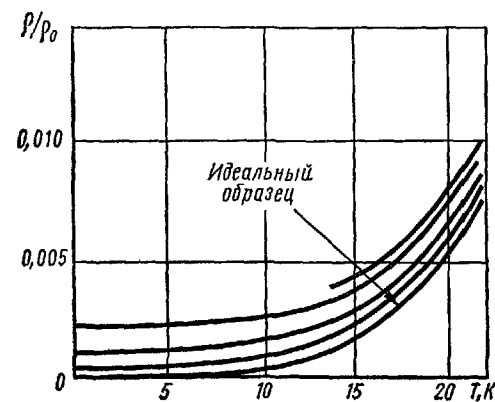


Рис. 20.22

т

тальное исследование удельного сопротивления чистой ртути при низких температурах. Опыты Камерлинг-Оннеса проводились следующим образом. Замкнутый проводник из твердой ртути помещался между полюсами электромагнита. При выключении тока из обмотке электромагнита в проводнике возникал индукционный ток, который при обычных условиях весьма быстро затухал. Однако при охлаждении ртути жидким гелием до температуры ниже 4,21 К сопротивление ртути резко уменьшалось и индукционный ток продолжал идти по проводнику в течение многих часов без сколько-нибудь заметного ослабления. По уточненным данным, резкое падение сопротивления ртути наступает при $T = 4,15$ К. Это явление получило название **сверхпроводимости**, а вещества, обладающие таким свойством, были названы **сверхпроводниками**. Явление сверхпроводимости было обнаружено еще у двадцати двух металлов (свинца, цинка, алюминия и др.). Известно также большое число сверхпроводящих сплавов (сплав висмута и золота, карбиды молибдена и вольфрама, нитрид ниобия и др.).

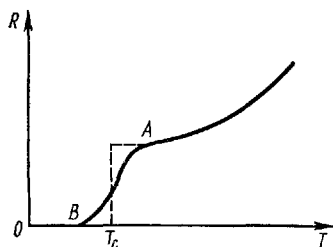


Рис. 20.23

Температурная зависимость сопротивления сверхпроводников изображена на рис. 20.23. Температурный интервал, соответствующий переходной области AB возникновения сверхпроводимости, зависит от неоднородности металла и в первую очередь от наличия примесей и внутренних напряжений. Для химически чистых образцов он не превышает тысячных долей градуса. Поэтому можно говорить о вполне определенном значении температуры перехода в сверхпроводящее состояние T_c , которую часто называют также критической температурой. При заметной ширине области AB под T_c обычно понимают температуру, при которой сопротивление равно половине сопротивления, соответствующего точке A . Температуры T_c у чистых металлов лежат в пределах от 0,35 К (для гафния) до 9,2 К (для ниобия), а у сплавов — от 0,155 К (Bi_2Pt) до 23,2 К (Nb_3Ge).

3. Одновалентные металлы, являющиеся наилучшими проводниками, не переходят в сверхпроводящее состояние вплоть до предельно низких температур, при которых проводились опыты (например, для золота — до 0,0204 К, для меди — до 0,0156 К). В настоящее время нет оснований для установления связи между явлением сверхпроводимости чистых металлов и их расположением в периодической системе элементов Менделеева, хотя известно, что сверхпроводники образуют в этой системе несколько компактных групп.

Прямой связи между строением кристаллической решетки и сверхпроводимостью не обнаружено. Однако установлено, что строение решетки играет роль в явлении сверхпроводимости. Так, например, белое олово является сверхпроводником, а серое — нет. Для лантана с кубической гранцентрированной решеткой температура перехода T_c сов-

тавляет 5,4 К, а для модификации лантана с гексагональной решеткой она равна 3,9 К. Влияние кристаллической структуры на температуру перехода было обнаружено также при исследовании более 30 сверхпроводящих химических соединений, которые можно было получить при низкой температуре в различных кристаллических модификациях.

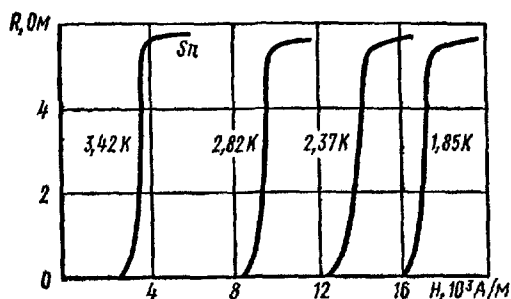


Рис. 20.24



Рис. 20.25

Большое значение для выяснения природы сверхпроводимости имеет **изотопический эффект**, заключающийся в том, что температуры T_c перехода в сверхпроводящее состояние у различных изотопов одного и того же металла неодинаковы. В первом приближении можно считать, что температуры T_c обратно пропорциональны квадратным корням из атомных масс изотопов.

4. В 1914 г. Камерлинг-Оннес экспериментально установил, что при постоянной температуре сверхпроводящее состояние вещества нарушается при внесении его в достаточно сильное магнитное поле. Дальнейшие исследования показали, что влияние магнитного поля на явление сверхпроводимости сводится к понижению температуры, при которой веществу переходит в сверхпроводящее состояние. На рис. 20.24 изображены кривые зависимости сопротивления R образца, изготовленного из белого олова, от напряженности H магнитного поля при различных температурах. Магнитное поле, вызывающее при данной температуре переход вещества из сверхпроводящего состояния в нормальное, называется **критическим полем**. Его напряженность обозначается через H_c . С понижением температуры сверхпроводника напряженность критического поля увеличивается (рис. 20.25). В первом приближении можно считать, что

$$H_c = H_0 [1 - (T/T_c)^2].$$

Область под кривой соответствует сверхпроводящему состоянию металла, а область над кривой — его нормальному состоянию.

Сверхпроводящие свойства проводника исчезают при пропускании через него достаточно сильного электрического тока, что связано с действием на проводник магнитного поля этого тока.

5. Через 20 лет после открытия сверхпроводимости были экспериментально установлены существенные различия магнитных свойств

вещества в нормальном и сверхпроводящем состояниях. Выяснилось, что внешнее магнитное поле не проникает в толщу сверхпроводника, т. е. магнитная индукция B внутри сверхпроводника всегда равна нулю. Это справедливо только в случае полей, более слабых, чем критическое.

На рис. 20.26 и 20.27 показаны расположения линий магнитной индукции вблизи цилиндрического сверхпроводника, внесенного в одно-

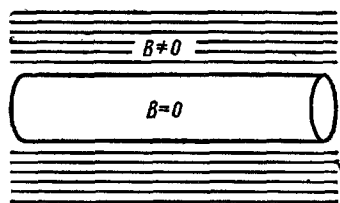


Рис. 20.26

родное внешнее магнитное поле, направленные в первом случае вдоль оси сверхпроводника, а во втором — перпендикулярно ей. Таким образом, сверхпроводник как бы «выталкивает» магнитное поле из занимаемой им части пространства, т. е. ведет себя как идеальный диамагнетик с магнитной восприимчивостью $\chi = -1$. Действительно, согласно (20.29) при этом значении χ относительная магнитная проницаемость $\mu = 0$ и $B = \mu \mu_0 H = 0$. В реальных сверхпроводниках существует некоторая глубина проникновения δ магнитного поля. Экспериментально установлено, что распределение поля по глубине сверхпроводника зависит от геометрической формы образца и его температуры. При температурах, которые на 1—2 К ниже температуры перехода, глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводники имеет величину порядка 10^{-5} см. Поэтому в тонких сверхпроводящих пленках толщиной в 10^{-5} см и меньше магнитное поле нигде не равно нулю. Такие пленки сверхпроводников нельзя рассматривать как идеальные диамагнетики.

6. Переход в сверхпроводящее состояние сопровождается не только существенным изменением магнитных свойств вещества, но и изменением его тепловых свойств. Так, в отсутствие магнитного поля при температуре перехода T_c скачкообразно изменяется теплоемкость. При наличии магнитного поля изотермический переход из сверхпроводящего состояния в нормальное связан как со скачкообразным изменением теплоемкости, так и с поглощением теплоты, а обратный переход — с ее выделением. Кроме того, при этом скачкообразно изменяется теплопроводность вещества.

Указанные экспериментальные факты легли в основу термодинамической теории сверхпроводимости, в которой сверхпроводящее и нормальное состояния рассматриваются как две различные фазы вещества. Эти фазы переходят одна в другую при определенных значениях параметров состояния: температуры T и напряженности H магнитного поля, соответствующих кривой $H_c = f(T)$ на рис. 20.25. Здесь имеет место известная аналогия с переходом вещества из жидкого состояния в газообразное (см. т. I, § 15.5). Переход сверхпроводника в нормальное со-

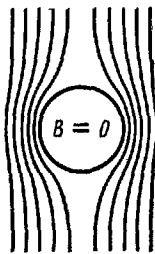


Рис. 20.27

стояние под действием магнитного поля, т. е. при $T < T_c$, подобен фазовому переходу первого рода, наблюдающемуся в жидкости при докритической температуре ($T < T_k$). Переход сверхпроводника в нормальное состояние при отсутствии магнитного поля, т. е. при $T = T_c$, соответствует фазовому переходу второго рода, происходящему в жидкости при ее нагревании до критической температуры T_k .

7. Термодинамическая теория сверхпроводимости позволила формально объяснить основные экспериментальные факты. Однако основной вопрос о природе явления сверхпроводимости остался открытым. Выяснить это удалось лишь в самое последнее время благодаря созданию законченной микроскопической (статистической) теории сверхпроводимости, решающий вклад в которую был внесен в 1957 г. советским физиком Н. Н. Боголюбовым. Мы кратко остановимся лишь на качественной стороне теории сверхпроводимости, так как для ее полного рассмотрения необходимо применение квантовой механики.

8. Очень малое значение удельного сопротивления вещества в сверхпроводящем состоянии свидетельствует о том, что электроны проводимости движутся в сверхпроводнике беспрепятственно — без «трения» об узлы кристаллической решетки. Таким образом, между явлениями сверхпроводимости и сверхтекучести гелия II (см. т. I, §13.6) имеется глубокая аналогия: **сверхпроводимость есть не что иное, как сверхтекучесть электронов в металле.**

В §13.1 мы говорили о том, что электрическое сопротивление металлических проводников обусловлено рассеянием электронов на тепловых колебаниях кристаллической решетки. Эти колебания эквивалентны распространению в кристалле звуковых волн, которые, как показывается в квантовой механике, можно заменить совокупностью «частиц» — фононов, движущихся в кристалле со скоростью звука. Фононы обладают энергией $h\nu$, где h — постоянная Планка и ν — частота колебаний узлов решетки, а также импульсом (количеством движения), численно равным $h\nu/u$, где u — скорость звука. Таким образом, электрическое сопротивление кристаллических проводников является результатом рассеяния электронов проводимости на фононах.

В 1950 г. была высказана важная идея о том, что при некоторых условиях взаимодействие электронов с фононами может явиться причиной перехода вещества в сверхпроводящее состояние. Дело в том, что это взаимодействие приводит к возникновению обменного взаимодействия между самими электронами, которое имеет квантовомеханическую природу и состоит в их **взаимном притяжении**. Математическое решение этой весьма сложной задачи квантовой статистики было дано в 1957 г. Н. Н. Боголюбовым, который, кроме того, учел электростатическое отталкивание между электронами. Оказалось, что обменное взаимодействие особенно велико для пар электронов, имеющих противоположные спины и импульсы. При некоторых условиях взаимное притяжение между такими электронами может значительно превышать их электростатическое отталкивание. Благодаря этому

сильному взаимодействию электроны проводимости в металле образуют связанный коллектив, который не может отдавать энергию малыми частями. Поэтому соударения с узлами решетки не изменяют энергию электронов проводимости и металл ведет себя как идеальный сверхпроводник с нулевым удельным сопротивлением.

Чтобы нарушить связь какого-либо электрона с другими электронами коллектива, необходимо затратить определенную энергию, соответствующую средней энергии тепловых колебаний узлов решетки при температуре перехода T_c . Поэтому при $T > T_c$ сверхпроводящее состояние не существует.

Последовательное проведение этих идей позволило построить теорию сверхпроводимости, в которой нашли свое объяснение все свойства сверхпроводников. Особенно необходимо отметить следующий результат: теоретически получены критерии того, что в системе взаимодействующих электронов могут возникать связанные состояния, т. е. будет иметь место сверхпроводимость. К сожалению, эти критерии не имеют прямой связи с такими простейшими характеристиками элементов, как атомная масса, порядковый номер, валентность и др.

Найденные теоретическим путем зависимость температуры перехода от атомных масс различных изотопов сверхпроводящего металла и зависимость напряженности критического магнитного поля от температуры хорошо согласуются с данными экспериментов. Получили истолкование магнитные и тепловые свойства сверхпроводников.

Вопросы для повторения

1. Как действует внешнее магнитное поле на орбитальный магнитный момент электрона в атоме?
2. Какие вещества называются диамагнетиками? Что происходит с диамагнетиком при его внесении в магнитное поле?
3. Какие вещества называются парамагнетиками? Что происходит с парамагнетиком при его внесении в магнитное поле?
4. Что называется вектором намагниченности и как он связан с индукцией магнитного поля?
5. Чем различаются магнитные свойства диа- и парамагнетиков?
6. Как связаны между собой векторы магнитной индукции, напряженности магнитного поля намагниченности? Каково соотношение между относительной магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью диа- и парамагнетиков?
7. Чему равна циркуляция вдоль замкнутого контура: а) вектора напряженности магнитного поля; б) вектора намагниченности; в) вектора магнитной индукции?
8. Изложите метод исследования ферромагнетиков, предложенный А. Г. Столетовым. Каковы результаты его опытов?
9. Каковы особенности магнитных свойств ферромагнетиков?
10. В чем состоял опыт Эйнштейна и де-Гааза и каково его значение для выяснения природы ферромагнетизма?
11. Изложите основы классической теории ферромагнетизма и приведите опыты, подтверждающие доменную структуру ферромагнетиков.
12. В чем состоит явление сверхпроводимости? Изложите основные результаты экспериментальных исследований этого явления.

Примеры решения задач

Задача 20.1. Один из методов экспериментального определения магнитной восприимчивости жидкостей основан на том, что взаимная индуктивность двух проводников пропорциональна относительной магнитной проницаемости той среды, в которой они находятся. В результате опытов с двумя жестко связанными друг с другом проводниками неизменной формы было найдено, что при одной и той же скорости изменения силы тока в первом проводнике э.д.с. взаимной индукции во втором проводнике была 2,00000 В для проводников в вакууме и 2,00252 В в исследуемой жидкости. Какова магнитная восприимчивость жидкости?

Дано:
 $\mathcal{E}_0 = 2,00000 \text{ В}$
 $\mathcal{E}_2 = 2,00252 \text{ В}$
 $\chi = ?$

Решение. Э.д.с. \mathcal{E}_2 взаимной индукции, возникающая во втором проводнике при изменении силы тока I_1 в первом проводнике, по формуле (19.43) равна

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} (dI_1/dt),$$

где M_{21} — взаимная индуктивность проводников.

Из условия задачи следует, что в рассматриваемых опытах э.д.с. \mathcal{E}_2 изменялась только за счет изменения магнитной проницаемости среды. Поэтому можно считать, что

$$\mathcal{E}_2 = \mu \cdot \text{const.} \quad (\text{а})$$

Для вакуума $\mu = 1$. Следовательно, константа в правой части формулы (а) равна э.д.с. \mathcal{E}_0 взаимной индукции для проводников, находящихся в вакууме:

$$\mathcal{E}_2 = \mu \mathcal{E}_0. \quad (\text{б})$$

По формуле (20.29), магнитная восприимчивость вещества $\chi = \mu - 1$. Заменив μ ее выражением из соотношения (б), получим

$$\chi = (\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_0) - 1.$$

Вычисление результата:

$$\chi = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_0} - 1 = \frac{2,00252}{2,00000} - 1 = 0,00126.$$

§ 21.1. Общая характеристика теории Максвелла

1. В предыдущих главах были рассмотрены основные законы электрических и электромагнитных явлений: теорема Остроградского — Гаусса (§ 2.4, 6.3), законы полного тока (§ 16.1, 20.5) и электромагнитной индукции (§ 19.1). Эти законы, являющиеся обобщением экспериментальных фактов, позволяют решать основную задачу, возникающую при изучении электромагнитных явлений: по заданному распределению зарядов и токов отыскать созданные ими в каждой точке пространства электрические и магнитные поля.

В 60-х годах прошлого столетия Д. К. Максвелл, основываясь на идеях Фарадея об электрическом и магнитном полях, обобщил законы, установленные экспериментальным путем, и разработал законченную теорию единого электромагнитного поля, создаваемого произвольной системой зарядов и токов. Теория Максвелла явилась величайшим вкладом в развитие классической физики и позволила в общей точке зрения охватить огромный круг явлений, начиная от электростатического поля неподвижных зарядов и кончая электромагнитной природой света. В этой главе мы кратко остановимся на существовании идей Максвелла и содержании его теории.

2. Теория Максвелла представляет собой феноменологическую теорию электромагнитного поля. Это означает, что внутренний механизм явлений, происходящих в среде и вызывающих появление электрических и магнитных полей, в теории не рассматривается.

Электрические и магнитные свойства среды характеризуются в теории Максвелла тремя величинами: относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , относительной магнитной проницаемостью μ и удельной электрической проводимостью γ . Зависимость этих величин от свойств среды, физический смысл явлений, происходящих в ней при поляризации и намагничивании, в теории Максвелла не исследуются.

3. Теория Максвелла является макроскопической теорией электромагнитного поля. В ней рассматриваются электрические и магнитные поля, создаваемые макроскопическими зарядами и токами, т. е. зарядами, сосредоточенными в объемах, неизмеримо больших, чем объемы отдельных атомов и молекул. Кроме того, предполагается, что расстояния от источников полей до рассматриваемых точек пространства также во много раз больше размеров молекул. Поэтому заметные изменения полей, исследуемых в теории Максвелла, возможны только на протяжении расстояний, огромных по сравнению с размерами атомов и молекул. Наконец, периоды изменения переменных электрических и магнитных полей должны быть во много раз больше периодов внутримолекулярных процессов.

В действительности макроскопические заряды и токи представляют собой совокупности микроскопических зарядов и токов,

которые создают свои электрические и магнитные поля, непрерывно изменяющиеся в каждой точке пространства. Поэтому и результирующие электрическое и магнитное поля всегда переменны. Эти поля получили название **микрополей**.

Из сказанного выше следует, что в теории Максвелла рассматриваются у с р е д н е н н ы е электрическое и магнитное поля, причем усреднение соответствующих микрополей производится для интервалов времени, значительно больших периодов обращения или колебания элементарных зарядов, и для участков поля, объемы которых во много раз больше объемов атомов и молекул.

§ 21.2. Первое уравнение Максвелла. Бетатрон

1. В § 19,1 было показано, что э. д. в. индукции, возбуждаемая в неподвижном замкнутом п р о в о д я щ е м контуре, выражается формулой (19.12):

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t}. \quad (21.1)$$

Тем самым было выяснено, что переменное магнитное поле создает в проводящем замкнутом контуре вихревое электрическое поле. Максвелл предложил считать, что соотношение (21.1) справедливо не только для проводящего, но и для л ю б о г о замкнутого контура, мысленно выбранного в переменном магнитном поле. Иными словами, он предположил, что *переменное магнитное поле создает в любой точке пространства вихревое электрическое поле независимо от того, находится в этой точке проводник или нет*. Обобщенное таким образом равенство (21.1) называется **первым уравнением Максвелла в интегральной форме**: циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру L равна взятой в обратном знаке скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур.

Магнитный поток $\Phi_m = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$. Считая поверхность интегрирования S , натянутую на неподвижный контур L , тоже неподвижной, получим

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Поэтому первое уравнение Максвелла (21.1) можно также записать в форме

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (21.2)$$

где направление обхода контура L и векторов $d\mathbf{S}$ согласовано между собой по правилу буравчика [см. соответствующее замечание к формуле (19.12)].

Если рассматриваемый контур — проводящий и в нем помимо э. д. с. электромагнитной индукции имеются другие э. д. с. $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$, то для такого контура

$$\oint_L \mathbf{E} dl = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k. \quad (21.2')$$

2. Возникновение в пространстве вихревого электрического поля под влиянием переменного магнитного поля было использовано для создания индукционного ускорителя электронов — бетатрона. Идея этого метода ускорения электронов высказана в 1928 г. Р. Видероз. В дальнейшем она была разработана Я. П. Терлецким.

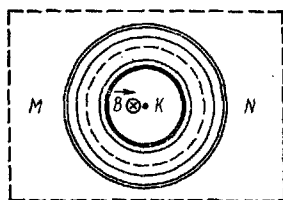
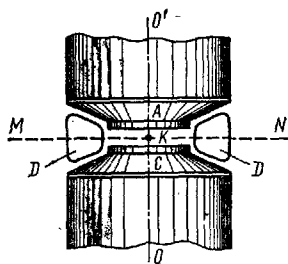


Рис. 21.1

Основными элементами бетатрона являются сильный электромагнит с коническими полюсными наконечниками A и C (рис. 21.1) и вакуумная ускорительная камера D , имеющая форму замкнутого кольца. Ось камеры совпадает с осью симметрии OO' полюсных наконечников. Изменение силы тока в обмотке электромагнита вызывает в пространстве между его полюсами изменение магнитного поля и возникновение вихревого электрического поля. Магнитное поле симметрично относительно оси OO' . Поэтому силовые линии вихревого электрического поля в плоскости MN , перпендикулярной оси OO' и проходящей через середину зазора между полюсами, имеют вид окружностей, центры которых

лежат в точке K . Числовые значения напряженности E электрического поля во всех точках каждой окружности одинаковы.

Циркуляция вектора \mathbf{E} вдоль окружности радиуса r равна

$$\oint_l \mathbf{E} dl = \oint_l E_\tau dl = 2\pi r E_\tau \quad (21.3)$$

где E_τ — проекция вектора \mathbf{E} на касательную к окружности. По уравнению (21.1) с учетом формулы (16.14) также имеем

$$\oint_l \mathbf{E} dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS, \quad (21.4)$$

где $S = \pi r^2$ — площадь круга радиуса r , B_n — проекция вектора магнитной индукции на ось OO' . Из условия симметрии ясно, что во всех точках круга вектор \mathbf{B} параллелен оси OO' . Поэтому

$$\int_S B_n dS = \int_S B dS = B_{cp} S = \pi r^2 B_{cp},$$

где $B_{\text{ср}}$ — среднее значение магнитной индукции в пределах круга радиуса r . Таким образом, (21.4) можно записать в форме

$$\oint_r \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\pi r^2 \frac{\partial B_{\text{ср}}}{\partial t}. \quad (21.5)$$

Приравнивая правые части уравнений (21.3) и (21.5) и учитывая, что $(\partial B_{\text{ср}}/\partial t) = (dB_{\text{ср}}/dt)$, так как $B_{\text{ср}}$ зависит только от t , получаем выражение для напряженности вихревого электрического поля:

$$E_{\tau} = -\frac{1}{2} r \frac{dB_{\text{ср}}}{dt}. \quad (21.6)$$

3. Введем в камеру D электрон таким образом, чтобы его скорость \mathbf{v} была направлена по касательной к рассмотренной выше окружности— силовой линии электрического поля. На электрон действует электрическая сила, направленная по касательной к силовой линии в сторону, противоположную вектору \mathbf{E} . Изменение числового значения импульса электрона под действием этой силы за малое время dt равно

$$d(mv) = -eE_{\tau} dt.$$

Подставив значение E_{τ} из (21.6), получим

$$d(mv) = \frac{er}{2} dB_{\text{ср}}. \quad (21.7)$$

Если индукция магнитного поля бетатрона зависит от времени по линейному закону, то $(dB_{\text{ср}}/dt) = \text{const}$ и напряженность E тоже постоянна во всех точках окружности радиуса r .

Предположим, что электрон непрерывно движется по одной и той же окружности радиуса r и что его начальной кинетической энергией можно пренебречь. Тогда за n оборотов он приобретет энергию $2\pi r e E n$. Если даже энергия, приобретаемая электроном за один оборот, невелика, то за большое число оборотов она может сильно возрасти. Пусть, например, равномерное изменение магнитного поля таково, что при однократном обходе окружности радиуса $r = 0,4$ м электрон приобретает энергию 20 эВ. Тогда за время $8,45 \cdot 10^{-8}$ с электрон пройдет путь 2520 км, сделает 10^6 оборотов и накопит энергию 20 МэВ. При этой энергии масса электрона будет примерно в 40 раз больше его массы покоя, но это возрастание массы не повлияет на процесс ускорения электрона. В бетатроне в отличие от ускорителей, рассмотренных в § 18.5, не существует проблемы синхронизации. Единственным условием ускорения электрона является его непрерывное движение по одной и той же орбите. Предположим, что это условие выполнено и электрон все время находится на орбите постоянного радиуса r . Пусть в отсутствие магнитного поля, т. е. при $B = B_{\text{ср}} = 0$, скорость электрона $v = 0$.

Проинтегрируем выражение (21.7):

$$\int_0^{mv} d(mv) = \frac{er}{2} \int_0^{B_{\text{ср}}} dB_{\text{ср}},$$

$$mv = er \frac{B_{\text{ср}}}{2}. \quad (21.8)$$

Сопоставим это выражение с формулой (18.19), определяющей радиус r кривизны стабильной траектории электрона в магнитном поле, направленном перпендикулярно ее плоскости:

$$mv = erB.$$

Сравнение двух последних выражений приводит к следующему условию стабильности орбиты электрона в бетатроне: в каждый момент времени магнитная индукция B на орбите должна быть равна половине средней магнитной индукции $B_{\text{ср}}$, вычисленной для площади, охватываемой контуром орбиты:

$$B = B_{\text{ср}}/2. \quad (21.9)$$

4. Чтобы обеспечить устойчивость орбиты электрона, общая протяженность пути которого в бетатроне измеряется тысячами километров, необходимо выполнить два условия. Во-первых, вся орбита должна лежать по возможности в одной плоскости. Во-вторых, следует обеспечить возвращение на стабильную орбиту электронов, случайно сошедших с нее (например, в результате соударений с молекулами газа, не полностью откачанного из вакуумной камеры) в радиальном направлении: к центру окружности или от него. Первое условие, называемое **аксиальной фокусировкой**, достигается сообщением полюсным наконечникам электромагнита специальной формы, обеспечивающей постепенное ослабление магнитного поля в направлении от центра орбиты к периферии (сравните с § 18.5). Для выполнения второго условия, называемого **радиальной фокусировкой**, необходимо, как показывают расчеты, чтобы пространственное распределение магнитного поля обеспечивало его убывание от центра к периферии медленнее, чем $1/r$, где r — расстояние от данной точки поля до его оси симметрии.

§ 21.3. Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

1. Максвелл обобщил закон полного тока [см. § 20.5], имеющий вид [см. (20.24) и (20.28)]

$$\oint_L \mathbf{V} d\mathbf{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}}), \quad (21.10)$$

или

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{макро}}. \quad (21.11)$$

где $I_{\text{макро}}$ и $I_{\text{микро}}$ — результирующие макроток (проводимости и конвекционный) и микроток сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур L . Максвелл предположил, что переменное электрическое поле, подобно электрическому току, является источником магнитного поля.

2. Для количественной характеристики «магнитного действия» переменного электрического поля Максвелл ввел понятие тока смещения. По теореме Остроградского — Гаусса (6.10), поток смещения сквозь замкнутую поверхность S

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{своб}},$$

где $q_{\text{своб}}$ — алгебраическая сумма свободных электрических зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S . Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S}. \quad (21.12)$$

Если поверхность S неподвижна и не деформируется, то изменение во времени потока смещения сквозь поверхность S вызывается только изменением электрического смещения \mathbf{D} с течением времени. Поэтому полную производную, стоящую в правой части уравнения (21.12), можно заменить частной производной по времени и дифференцирование внести под знак интеграла:

$$\frac{dq}{dt} = \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (21.13)$$

Правая часть этой формулы имеет размерность силы тока. Из сравнения (21.13) с формулой (8.4), связывающей силу тока I и плотность \mathbf{j} тока проводимости:

$$I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S},$$

следует, что $\partial \mathbf{D} / \partial t$ имеет размерность плотности тока. Поэтому Максвелл предложил назвать $\partial \mathbf{D} / \partial t$ **плотностью тока смещения**:

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (21.14)$$

Плотность тока смещения в данной точке пространства равна скорости изменения вектора электрического смещения в этой точке.

Током смещения сквозь произвольную поверхность S называется физическая величина, численно равная потоку вектора плотности тока смещения сквозь эту поверхность:

$$I_{\text{смещ}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{смещ}} d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}. \quad (21.15)$$

3. Введя представление о токе смещения, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей электрического тока. Как известно (см. § 8.2), цепи постоянного тока должны быть замкнутыми. До Максвелла считалось, что это условие не обязательно для переменных токов. Например, при зарядке и разрядке конденсатора электри-

ческий ток протекает по проводнику, соединяющему обкладки, и не проходит через диэлектрик, находящийся между обкладками, т. е. цепь не замкнута. С точки зрения Максвелла, цепи любых непостоянных токов тоже замкнуты. Замкнутость таких цепей обеспечивается токами смещения, которые «протекают» в тех участках, где нет проводников, например между обкладками конденсатора в процессе его зарядки или разрядки.

На рис. 21.2 изображены векторы плотностей токов смещения и линии индукции их магнитных полей: а) при зарядке конденсатора (усиление электрического поля); б) при разрядке конденсатора (ослабление электрического поля).

4. Согласно Максвеллу, ток смещения, подобно обычным токам проводимости, является источником вихревого магнитного поля, т. е. такого поля, циркуляция напряженности \mathbf{H} которого по замкнутому контуру не равна нулю.

В диэлектрике вектор электрического смещения \mathbf{D} , как известно, состоит из двух слагаемых:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e.$$

Второе слагаемое — вектор поляризации \mathbf{P}_e — характеризует действительное смещение электрических зарядов в неполярных молекулах и поворот полярных молекул, находящихся в единице объема диэлектрика.

Плотность тока смещения в диэлектрике, согласно (21.14), состоит из двух частей:

$$\mathbf{j}_{\text{смещ}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t}. \quad (21.16)$$

Второе слагаемое правой части этого выражения $\partial \mathbf{P}_e / \partial t$ представляет собой плотность тока, обусловленного упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещение зарядов или поворот диполей). Такой ток называется **током поляризации** или **поляризационным током**.

Плотность тока смещения в диэлектрике состоит из плотности тока смещения в вакууме $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ и плотности поляризационного тока $\partial \mathbf{P}_e / \partial t$. Поляризационный ток, так же как и ток проводимости, связан с потерей энергии на нагревание диэлектрика при его поляризации. Ток смещения в вакууме не выделяет теплоты. Плотность

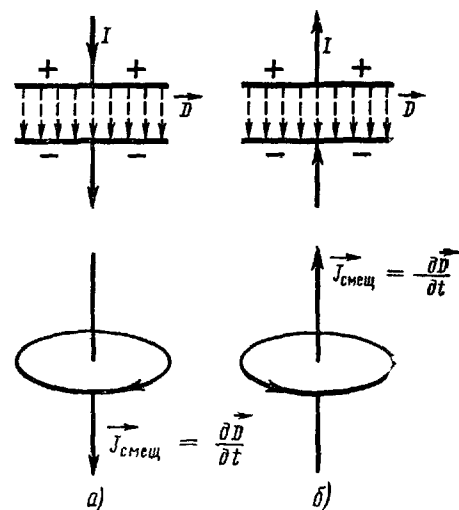


Рис. 21.2

этого тока тем больше, чем больше скорость измерения напряженности электрического поля.

5. В общем случае токи проводимости и ток смещения не разделены в пространстве, как это имеет место в конденсаторе с переменным напряжением на обкладках. Все типы токов существуют в одном и том же объеме и можно говорить о **полном токе**, равном сумме токов проводимости и конвекционных, а также тока смещения.

Максвелл обобщил закон полного тока, добавив в правую часть уравнения (21.11) ток смещения сквозь поверхность S , натянутую на замкнутый контур L :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{макро}} + I_{\text{смещ}}. \quad (21.17)$$

Это равенство называется **вторым уравнением Максвелла в интегральной форме**. Оно показывает, что циркуляция вектора \mathbf{H} напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру L равна алгебраической сумме макротоков и тока смещения сквозь поверхность, натянутую на этот контур.

Макроток и ток смещения, входящие в правую часть выражения (21.17), соответственно равны:

$$I_{\text{макро}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{макро}} d\mathbf{S}, \quad I_{\text{смещ}} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t},$$

где $\mathbf{j}_{\text{макро}}$ — вектор плотности макротока. Используя эти соотношения, второе уравнение Максвелла (21.17) можно переписать еще в двух эквивалентных формах:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{макро}} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}, \quad (21.18)$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_{\text{полн}} d\mathbf{S}. \quad (21.18')$$

Здесь $\mathbf{j}_{\text{полн}}$ — плотность полного тока, равная геометрической сумме плотностей макротока и тока смещения:

$$\mathbf{j}_{\text{полн}} = \mathbf{j}_{\text{макро}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (21.19)$$

6. Экспериментальным обоснованием второго уравнения Максвелла являются опыты, в которых обнаруживается магнитное поле тока смещения. Рассмотрим один из них — опыт А. А. Эйхенвальда, изучавшего магнитное поле тока поляризации, представляющего собой часть тока смещения. Диск S из диэлектрика помещен между двумя обкладками плоского конденсатора и вращается вокруг оси OO' (рис. 21.3). Каждая обкладка конденсатора разделена на две пластины (a, c и b, d), соединенные между собой, как показано на рисунке. Вследствие этого обе половины диэлектрика, помещенного между обкладками, поляризованы в противоположных направлениях. Во время вращения

диэлектрика направление вектора поляризации в каждой из его частей изменяется на противоположное при переходе от пары пластин a, b к паре пластин c, d . Поэтому при вращении диэлектрика в нем возникает ток поляризации, направленный параллельно оси вращения. Магнитное поле этого тока обнаруживается по его действию на магнитную стрелку, помещенную вблизи диска (на рис. 21.3 не показана).

7. Для области электромагнитного поля, в которой нет макротоков, соотношения (21.2) и (21.18) имеют почти симметричный вид:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \quad (21.20)$$

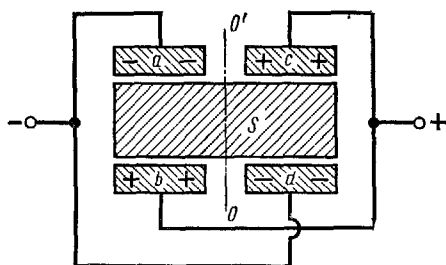


Рис. 21.3

и отличаются лишь знаками при производных в правых частях. Из сравнения двух уравнений Максвелла (21.20) можно сделать следующие важные выводы:

а) между электрическим и магнитным полями существует тесная взаимная связь: изменение во времени электрического поля вызывает появление магнитного поля, а переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля¹;

б) знаки при скоростях изменения потоков магнитной индукции и электрического смещения в обоих уравнениях Максвелла² различны, причем направления $\partial \mathbf{D} / \partial t$ и \mathbf{H} образуют «правовинтовую» систему (рис. 21.4), тогда как направления $\partial \mathbf{B} / \partial t$ и \mathbf{E} образуют левовинтовую систему (рис. 21.5). Различия в знаках правых частей уравнений Мак-

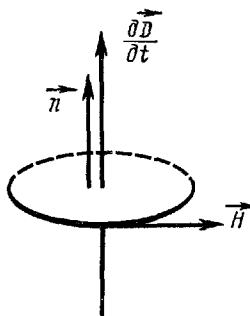


Рис 21.4

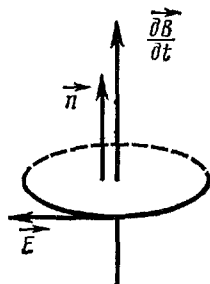


Рис. 21.5

¹ Не следует забывать, что магнитное поле всегда является вихревым.

² Нумерация уравнений Максвелла условна. Часто уравнение (21.18) называют первым, а (21.2) — вторым уравнением Максвелла.

свелла соответствуют требованиям закона сохранения энергии и закона Ленца. В случае одинаковых знаков при $\partial \mathbf{V}/\partial t$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$ бесконечно малое увеличение одного из полей вызывало бы неограниченное возрастание обоих полей, а бесконечно малое уменьшение одного из полей влекло бы за собой полное исчезновение этих полей. Различные знаки при $\partial \mathbf{V}/\partial t$ и $\partial \mathbf{D}/\partial t$ в правых частях уравнений Максвелла являются необходимым условием существования у с т о й ч и в о г о электромагнитного поля.

§ 21.4. Полная система уравнений Максвелла для электромагнитного поля

1. Рассмотрим остальные уравнения, входящие в полную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Третье уравнение Максвелла выражает теорему Остроградского—Гаусса для потока вектора электрического смещения \mathbf{D} сквозь произвольную замкнутую поверхность S , охватывающую суммарный свободный заряд $q_{\text{своб}}$:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{своб}}. \quad (21.21)$$

Эта теорема была доказана в § 2.4 и § 6.3 для э л е к т р о с т а т и ч е с к о г о поля. Максвелл обобщил теорему Остроградского — Гаусса, предположив, что она [в форме соотношения (21.21)] справедлива как для стационарного, так и для п е р е м е н н о г о электрического поля.

Четвертое уравнение Максвелла является обобщением теоремы Остроградского — Гаусса (16.15) на п е р е м е н н о е магнитное поле:

$$\oint_S \mathbf{V} d\mathbf{S} = 0. \quad (21.22)$$

2. Рассмотренные нами четыре уравнения Максвелла недостаточны для расчета электромагнитного поля в веществе. К ним нужно добавить уравнения, характеризующие электрические и магнитные свойства среды, в которой создано электромагнитное поле. Если среда и з о т р о п н а, а все макротоки — токи проводимости в проводниках, подчиняющиеся закону Ома, то дополнительные уравнения имеют вид:

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{V} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_{\text{макро}} = \gamma \mathbf{E}. \quad (21.23)$$

Таким образом, полная система уравнений, описывающих электромагнитное поле, состоит из четырех уравнений Максвелла (21.2), (21.18), (21.21), (21.22) и соотношений (21.23)¹.

3. Теория Максвелла является макроскопической теорией (см. § 21.1). Поэтому в ней не могли быть вскрыты зависимости характе-

¹ Строго говоря, для получения однозначного решения эту систему уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями для \mathbf{E} и \mathbf{H} .

ристик вещества ϵ , μ и γ от его молекулярного строения. Теория Максвелла охватила огромный круг экспериментальных фактов, описывающих электрические и магнитные поля макроскопических зарядов и токов, но не смогла объяснить тех явлений, где сказывается внутреннее строение вещества, например физических процессов в диэлектриках и магнетиках.

Дальнейшим развитием теории электромагнитного поля Максвелла явилась электронная теория, созданная Г. А. Лоренцем. Лоренц показал, что электрические и магнитные свойства вещества определяются характером движений и взаимодействий электрических зарядов, из которых состоят его атомы и молекулы. Эти вопросы были подробно рассмотрены в гл. VI, XX.

По теории Лоренца, все многообразие электрических и магнитных явлений объясняется определенным расположением и взаимодействием зарядов и токов, находящихся в неподвижном эфире¹. В каждой точке пространства существуют, согласно электронной теории, некоторое электрическое поле с напряженностью \mathbf{e} и магнитное поле с напряженностью \mathbf{h} , появляющиеся в результате действия всех токов и зарядов. Эти так называемые *м* и *к* *р* *о* *л* *я* подчиняются системе уравнений, аналогичных уравнениям Максвелла. Путем усреднения уравнений электронной теории можно перейти к уравнениям Максвелла для макроскопических полей. При этом оказывается, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} , характеризующие поля макроскопических зарядов и токов, являются усредненными значениями напряженностей микроскопических полей \mathbf{e} и \mathbf{h} :

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \tilde{\mathbf{h}}, \quad (21.24)$$

где знаком « \sim » обозначено усреднение, о котором шла речь в § 21.1.

Векторы \mathbf{D} и \mathbf{H} оказываются связанными с $\tilde{\mathbf{e}}$ и $\tilde{\mathbf{h}}$ и с векторами поляризации \mathbf{P}_e и намагниченности \mathbf{J} соотношениями, которые были получены в гл. VI и XX:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e, \quad \mathbf{H} = (\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{J}.$$

В электронной теории Лоренца получила свое объяснение зависимость электрических и магнитных характеристик вещества от их молекулярного строения. Изложение нашего курса по электричеству и электромагнитным явлениям основывалось на идеях и достижениях электронной теории. Свое дальнейшее развитие электродинамика Максвелла — Лоренца получила в квантовой физике. Частично мы уже применяли некоторые результаты квантовой физики в гл. XIII и XX.

4. С помощью уравнений Максвелла для электромагнитного поля можно найти соотношения между касательными и нормальными составляющими векторов напряженностей электрического \mathbf{E} и магнитного

¹ Вопрос об эфире рассмотрен в третьем томе курса.

H полей на границе раздела двух разнородных диэлектриков. Эти соотношения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} E_{1\tau} &= E_{2\tau}, & \epsilon_1 E_{1n} &= \epsilon_2 E_{2n}, \\ H_{1\tau} &= H_{2\tau}, & \mu_1 H_{1n} &= \mu_2 H_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (21.25)$$

где ϵ_1, μ_1 и ϵ_2, μ_2 — относительные диэлектрические и магнитные проницаемости соответственно первой и второй сред, E_1, H_1 и E_2, H_2 — векторы напряженностей полей в обеих средах, а $E_{1\tau}, H_{1\tau}$ и E_{1n}, H_{1n} — проекции этих векторов соответственно на касательную плоскость и общую нормаль к границе раздела двух сред.

5. Для вывода первого соотношения (21.25) рассмотрим небольшой замкнутый прямоугольный контур 1-2-3-4-1 (рис. 21.6), стороны 1-2 и 3-4 которого параллельны малому участку ab границы раздела сред. Плоскость контура выбрана так, чтобы векторы E_1 и E_2 лежали в этой плоскости. По первому уравнению Максвелла (21.20) циркуляция вектора E вдоль этого контура L равна

$$\oint_L E dl = - \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS$$

или

$$\int_1^2 E_1 dl + \int_2^3 E dl + \int_3^4 E_2 dl + \int_4^1 E dl = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS, \quad (21.26)$$

где B_n — проекция вектора магнитной индукции B на нормаль к плоскости контура, $S = lh$ — площадь поверхности, ограниченной контуром, Φ_m — магнитный поток сквозь эту поверхность.

Будем теперь уменьшать высоту h прямоугольника так, чтобы точки 1 и 4 неограниченно приближались к точке a , а точки 2 и 3 — к точке b . Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_2^3 E dl = \lim_{h \rightarrow 0} \int_4^1 E dl = \int_a^b E dl = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} S = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \int_S B_n dS = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_1^2 E_1 dl = \int_a^b E_1 dl = \int_a^b E_{1\tau} dl$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_3^4 E_2 dl = \int_b^a E_2 dl = \int_b^a E_{2\tau} dl.$$

Поэтому уравнение (21.26) в пределе при $h \rightarrow 0$ примет вид

$$\int_a^b (E_{1\tau} - E_{2\tau}) dl = 0. \quad (21.26')$$

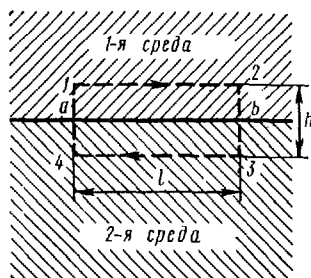


Рис. 21.6

Так как точки a и b выбраны на поверхности раздела двух сред совершенно произвольно, то условие (21.26') может выполняться только в том случае, если подынтегральная функция тождественно равна нулю, т. е. если выполняется первое соотношение (21.25).

Третье условие (21.25) можно получить аналогичным образом, если исходить из второго уравнения Максвелла (21.20):

$$\oint_L \mathbf{H} dl = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S D_n dS,$$

где D_n — проекция вектора электрического смещения \mathbf{D} на нормаль к границе раздела двух сред.

6. Для вывода второго соотношения (21.25) рассмотрим замкнутую цилиндрическую поверхность, основания 1-2 и 3-4 которой параллельны поверхности раздела двух сред и находятся по разные стороны от нее, а образующие перпендикулярны ей (рис. 21.7). Пусть этот цилиндр вырезает на поверхности раздела небольшой участок ab площадью ΔS .

По третьему уравнению Максвелла (21.21) поток смещения сквозь замкнутую поверхность цилиндра равен нулю:

$$\oint_S D_n dS = 0 \quad \text{или} \quad \oint_S \mathbf{D} n dS = 0,$$

где $D_n = \mathbf{D} n$ — проекция вектора электрического смещения \mathbf{D} на направление вектора единичной внешней нормали n к элементу dS замкнутой поверхности S . Учитывая, что для изотропных диэлектриков $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, где ϵ_0 — электрическая постоянная, можем переписать последнее уравнение в форме

$$\oint_S \epsilon \mathbf{E} n dS = 0. \quad (21.27)$$

Стоящий слева интеграл можно представить в виде суммы трех интегралов, соответствующих верхнему и нижнему основаниям цилиндра и его боковой поверхности:

$$\int_{S_{\text{верх}}} \epsilon_1 \mathbf{E}_1 n_1 dS + \int_{S_{\text{нижн}}} \epsilon_2 \mathbf{E}_2 n_2 dS + \int_{S_{\text{бок}}} \epsilon \mathbf{E} n dS = 0.$$

Будем теперь уменьшать высоту h цилиндра так, чтобы его верхнее и нижнее основания неограниченно приближались к участку ab поверхности раздела сред. Тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_{\text{верх}}} \epsilon_1 \mathbf{E}_1 n_1 dS = \int_{\Delta S} \epsilon_1 \mathbf{E}_1 n_1 dS,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_{\text{нижн}}} \epsilon_2 \mathbf{E}_2 n_2 dS = \int_{\Delta S} \epsilon_2 \mathbf{E}_2 n_2 dS,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_{\text{бок}}} \epsilon \mathbf{E} n dS = 0, \quad \text{так как} \quad \lim_{h \rightarrow 0} S_{\text{бок}} = 0.$$

Следовательно, в пределе при $h \rightarrow 0$ уравнение (21.27) будет иметь вид

$$\int_{\Delta S} [\varepsilon_1 E_1 n_1 + \varepsilon_2 E_2 n_2] dS = 0. \quad (21.27')$$

Нормали n_1 и n_2 направлены во взаимно противоположные стороны ($n_2 = -n_1$). Для участка поверхности ΔS , по которому производится интегрирование, естественно выбрать какое-нибудь одно направление нормали n , например $n = n_2$. Тогда $E_1 n_1 = -E_1 n = -E_{1n}$, $E_2 n_2 = E_2 n = E_{2n}$ и уравнение (21.27') можно представить в виде

$$\int_{\Delta S} (\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n}) dS = 0.$$

Так как участок ΔS выбран на поверхности раздела двух сред совершенно произвольно, то это равенство может выполняться только при условии

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 0,$$

совпадающем со вторым соотношением (21.25).

Четвертое условие (21.25) можно получить аналогичным образом, воспользовавшись четвертым уравнением Максвелла (21.22).

Вопросы для повторения

1. В чем состоит обобщение закона электромагнитной индукции, сделанное Максвеллом?
2. Поясните принцип действия бетатрона.
3. Что называется током смещения? Каково его магнитное действие и как его можно обнаружить?
4. Напишите выражение обобщенного закона полного тока.
5. Какова взаимосвязь между переменными электрическим и магнитным полями?
6. Напишите полную систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Примеры решения задач

Задача 21.1. Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника э.д.с. Доказать, что ток смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, равен току в цепи источника э.д.с. Искажениями поля у концов конденсатора пренебречь.

Решение. Для определенности предположим, что внутренняя обкладка конденсатора заряжается положительно. Проведем в диэлектрике цилиндрическое сечение радиуса r . Обозначим его площадь через S . Ток смещения сквозь это сечение диэлектрика, по формуле (21.15),

$$I_{\text{смеш}} = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t} dS, \quad (a)$$

где D_n — проекция вектора \mathbf{D} электрического смещения поля конденсатора на направление внешней нормали n к элементу сечения dS . Вектор n направлен по радиусу цилиндра S от его оси к элементу dS . Точно так же направлен и вектор \mathbf{D} в точках площадки dS . Поэтому $D_n = D$. По формуле (3.26) имеем

$$D_n = D = \tau/2\pi r,$$

где τ — линейная плотность зарядов на внутренней обкладке конденсатора. Если заряд этой обкладки равен q , а ее высота l , то

$$\tau = q/l \quad \text{и} \quad D_n = q/2\pi r l.$$

Для рассматриваемого сечения r постоянно, поэтому

$$\frac{\partial D_n}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r l} \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Заряд q конденсатора зависит только от времени, так что разницы между частной и полной производными от q по t нет:

$$\frac{\partial D_n}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r l} \frac{dq}{dt}.$$

Подставив это выражение в формулу (а), получим

$$I_{\text{смеш}} = \int_S \frac{1}{2\pi r l} \frac{dq}{dt} dS.$$

Так как dq/dt от переменной интегрирования S не зависит, то

$$I_{\text{смеш}} = \frac{1}{2\pi r l} \frac{dq}{dt} \int_S dS = \frac{S}{2\pi r l} \frac{dq}{dt}.$$

Площадь сечения диэлектрика $S = 2\pi r l$, а скорость изменения заряда конденсатора (dq/dt) есть сила зарядного тока I , т. е. тока в цепи, соединяющей конденсатор с источником э.д.с. Таким образом,

$$I_{\text{смеш}} = I.$$

§ 22.1. Колебательный контур

1. Рассмотрим электрическую цепь (рис. 22.1), состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкостью C , соленоидальной катушки с индуктивностью L , резистора сопротивлением R и ключа K . Если при разомкнутом ключе K конденсатор зарядить до разности потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, а затем замкнуть ключ, то конденсатор начнет разряжаться и в цепи возникнет ток I , изменяющийся с течением времени.

Оказывается, что если размеры этой цепи не слишком велики, а емкость конденсатора и индуктивность катушки не слишком малы, то можно считать, что в каждый момент времени сила тока во всех сечениях этой цепи одинакова. Поэтому мгновенные значения I силы переменного тока должны удовлетворять всем законам, установленным выше для цепей постоянного тока. Такие переменные токи называют **квазистационарными**.

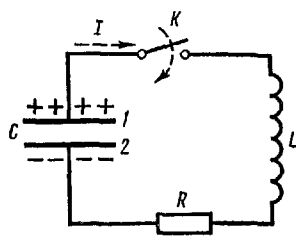


Рис. 22.1

Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Поэтому переменный ток с периодом T в электрической цепи длиной l можно считать квазистационарным, если выполнено условие: $T \gg l/c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Найдем зависимость силы квазистационарного тока от времени для цепи, изображенной на рис. 22.1, причем для простоты будем считать, что электрические сопротивления катушки L , соединительных проводов и ключа равны нулю.

По закону Ома (9.9) для участка цепи $1LR2$ имеем

$$IR = \Delta\varphi + \mathcal{E}, \quad (22.1)$$

где I , $\Delta\varphi$ и \mathcal{E} — мгновенные значения соответственно силы тока в цепи, разности потенциалов между обкладками 1 и 2 конденсатора и алгебраической суммы э. д. с., приложенных на рассматриваемом участке цепи. На участке цепи $1LR2$ приложена только э. д. с. самоиндукции, возникающая в катушке при протекании по ней переменного тока. Поэтому

$$\mathcal{E} = -L(dI/dt)$$

и уравнение (22.1) примет вид

$$IR = \Delta\varphi - L(dI/dt). \quad (22.2)$$

Обозначим заряд первой обкладки конденсатора через q . Тогда сила тока в цепи

$$I = -\frac{dq}{dt} \text{ и } \frac{dI}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}. \quad (22.3)$$

Знак минус в формулах (22.3) введен потому, что положительному направлению тока I , принятому при составлении уравнения (22.1) и указанному на рис. 22.1, соответствует убыль положительного заряда первой обкладки конденсатора [($dq/dt < 0$)]. Разность потенциалов между обкладками конденсатора по формуле (5.6) равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = q/C. \quad (22.4)$$

Подставив выражения (22.3) и (22.4) в (22.2), получим

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (22.5)$$

2. По своей форме это дифференциальное уравнение аналогично дифференциальному уравнению свободных затухающих колебаний груза, подвешенного на пружине [см. т. I, уравнение (8.27)]:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (22.6)$$

Аналогом массы m груза является индуктивность L цепи, аналогом коэффициента сопротивления r — сопротивление R цепи, а аналогом коэффициента упругости пружины k — величина, обратная емкости.

Решение уравнения (22.6), как видно из § 8.5 первого тома курса, имеет следующий вид:

$$x = A_0 e^{-(r/2m)t} \sin(\omega t + \alpha_0), \quad (22.7)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} \quad (22.8)$$

— циклическая частота затухающих колебаний груза на пружине, A_0 и α_0 — начальные значения амплитуды и фазы.

Заменив в (22.7) и (22.8) m , r и k соответственно на L , R и $1/C$, найдем решение дифференциального уравнения (22.5):

$$q = A_0 e^{-(R/2L)t} \sin(\omega t + \alpha_0), \quad (22.9)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (22.10)$$

Таким образом, при замыкании заряженного конденсатора на цепь, состоящую из последовательно соединенных индуктивности и резистора, заряд на обкладках конденсатора совершает **затухающие колебания**. Поэтому изображенная на рис. 21.1 цепь получила название **колебательного контура**.

Величина

$$\beta = R/2L \quad (22.11)$$

называется коэффициентом затухания.

Амплитуда A колебаний заряда q конденсатора, как видно из (22.9), равна

$$A = A_0 e^{-(R/2L)t} = A_0 e^{-\beta t}. \quad (22.12)$$

3. Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсатора пропорциональна q [см. (22.4)]. Поэтому

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{A_0}{C} e^{-(R/2L)t} \sin(\omega t + \alpha_0). \quad (22.13)$$

Из формул (22.3) и (22.9) найдем следующее выражение для силы тока в колебательном контуре:

$$I = -\frac{dq}{dt} = A_0 e^{-(R/2L)t} \left[\frac{R}{2L} \sin(\omega t + \alpha_0) - \omega \cos(\omega t + \alpha_0) \right]. \quad (22.14)$$

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) заряд конденсатора $q = q_0$ и ток в цепи отсутствует. Тогда из (22.9) и (22.14) имеем

$$A_0 \sin \alpha_0 = q_0,$$

$$\frac{R}{2L} \sin \alpha_0 - \omega \cos \alpha_0 = 0,$$

откуда для начальной фазы α_0 и начальной амплитуды A_0 получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_0 &= \frac{\omega}{R/2L} = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}, \\ A_0 &= q_0 \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} = q_0 / \sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}. \end{aligned}$$

Таким образом, начальные фаза и амплитуда колебаний в контуре существенным образом зависят от его параметров: емкости, индуктивности и сопротивления.

4. Период затухающих колебаний в колебательном контуре

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi / \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (22.15)$$

С увеличением сопротивления R контура период колебаний в нем возрастает и при $R = 2\sqrt{L/C}$ обращается в бесконечность. При $R > 2\sqrt{L/C}$ выражение (22.9) уже не является решением дифференциального уравнения (22.5) и процессы, происходящие в контуре при разряде конденсатора, не носят периодического характера. Такой разряд конденсатора называется **апериодическим**. В этом случае решение дифференциального уравнения (22.5) имеет вид

$$q = A_0 e^{-\beta t} e^{i\omega t} = A_0 e^{-(\beta - i\omega)t}. \quad (22.16)$$

Действительно, из (22.16) следует, что

$$\frac{dq}{dt} = -(\beta - i\omega)q \quad \text{и} \quad \frac{d^2q}{dt^2} = (\beta - i\omega)^2 q.$$

Подставляя эти выражения в (22.5), получаем

$$L(\beta - i\omega)^2 q - R(\beta - i\omega)q + \frac{1}{C}q = 0$$

или

$$L(\beta^2 - \omega^2) - R\beta + \frac{1}{C} - i(2L\beta\omega - R\omega) = 0.$$

Комплексное число равно нулю только тогда, когда его действительная и мнимая части порознь равны нулю. Поэтому можно написать следующие два равенства:

$$2L\beta\omega - R\omega = 0 \quad \text{и} \quad L(\beta^2 - \omega^2) - R\beta + \frac{1}{C} = 0,$$

которые действительно выполняются, если

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Таким образом, при аperiodическом разряде заряд конденсатора изменяется по закону

$$q = A_0 e^{-(\beta - i\omega)t} = A_0 e^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} \quad (22.17)$$

Обозначим начальный заряд конденсатора (при $t = 0$) через q_0 . Тогда $A_0 = q_0$ и формулу (22.17) можно записать в таком виде:

$$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}\right)t} \quad (22.17')$$

5. Переменный электрический ток в контуре вызывает появление переменного магнитного поля. Одновременно с этим изменяется и электрическое поле конденсатора. Поэтому рассмотренные нами свободные колебания заряда конденсатора и тока в контуре называют **свободными электромагнитными колебаниями**. Энергия этих колебаний в начальный момент времени равна энергии электрического поля конденсатора. Затем энергия электромагнитных колебаний в контуре постепенно уменьшается, так как в процессе прохождения электрического тока выделяется лент-джоулево тепло. Происходит «рассеяние» энергии электромагнитных колебаний, и последние затухают.

6. Если сопротивление R контура постепенно уменьшать, то затухание колебаний в нем также уменьшается. В пределе при $R = 0$ свободные электромагнитные колебания в контуре становятся **незатухающими**. В этом случае заряд конденсатора, разность потенциалов между его обкладками и сила тока в цепи изменяются по сле-

дующим законам, полученным из выражений (22.10), (22.9), (22.13) и (22.14) при $\beta = 0$:

$$\left. \begin{aligned} q &= A_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0), \\ \Delta\varphi &= (A_0/C) \sin(\omega_0 t + \alpha_0), \\ I &= -A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \end{aligned} \right\} \quad (22.18)$$

где

$$\omega_0 = 1 / \sqrt{LC} \quad (22.19)$$

— циклическая частота свободных незатухающих электромагнитных колебаний в контуре.

Период свободных незатухающих колебаний

$$T = (2\pi/\omega_0) = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (22.20)$$

Эта формула впервые была получена в 1853 г. В. Томсоном и называется **формулой Томсона**.

7. Преобразуем выражение (22.18) для силы тока в колебательном контуре:

$$I = -A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0) = A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0 - \pi/2). \quad (22.18')$$

Из формул (22.18) и (22.18') следует, что сила тока отстает по фазе от разности потенциалов между обкладками конденсатора на $\pi/2$. Амплитуда I_0 силы тока и амплитуда $\Delta\varphi_0$ разности потенциалов обкладок конденсатора равны:

$$I_0 = A_0 \omega_0 = \frac{A_0}{\sqrt{LC}}, \quad \Delta\varphi_0 = \frac{A_0}{C},$$

поэтому

$$I_0 = \Delta\varphi_0 \sqrt{C/L}$$

Величина $\sqrt{L/C}$ называется **волновым сопротивлением** контура.

8. Рассмотрим подробнее процессы, происходящие при незатухающих свободных колебаниях в контуре. Пусть в начальный момент времени (рис. 22.2,а) заряд конденсатора максимален ($q = q_0$). При этом разность потенциалов между его обкладками тоже максимальна ($\Delta\varphi = \Delta\varphi_0$), а сила тока в цепи отсутствует ($I = 0$). Затем начинается разряд конденсатора. Вследствие явления самоиндукции ток в контуре постепенно увеличивается и достигает максимального значения ($I = I_0$) в момент $t = T/4$, когда $q = C\Delta\varphi = 0$ (рис. 22.2,б). Далее ток в цепи, сохраняя свое направление, постепенно уменьшается по вели-

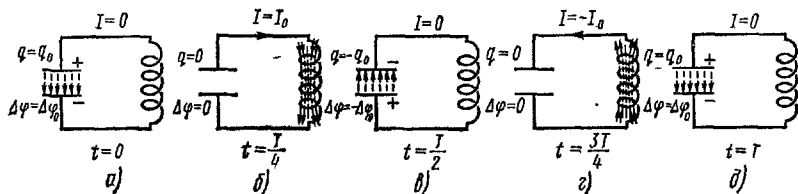


Рис. 22.2

чине, обращаясь в нуль при $t = T/2$ (рис. 22.2, в). При этом заряд конденсатора и разность потенциалов между его обкладками вновь достигают максимальных значений. Однако знаки зарядов пластин и направление электрического поля между ними противоположны тем, какие были в начальный момент времени. Таким образом, в результате явления самоиндукции происходит перезарядка конденсатора. Затем процессы идут в обратном направлении (рис. 22.2, г, д).

В § 8.2 т. I было показано, что при незатухающих свободных колебаниях механических систем происходит периодический переход кинетической энергии в потенциальную. Аналогично этому при свободных незатухающих электромагнитных колебаниях в контуре имеет место периодический переход энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля электрического тока. В моменты $t = 0, T/2, T$ и т. д. энергия электрического поля максимальна и равна $C(\Delta\varphi_0)^2/2$; энергия же магнитного поля равна нулю, так как тока в цепи нет. Наоборот, в моменты $t = T/4, 3T/4$ и т. д. энергия магнитного поля максимальна и равна $LI_0^2/2$; энергия же электрического поля равна нулю, так как конденсатор полностью разряжен. В случае свободных незатухающих колебаний сумма энергий электрического и магнитного полей колебательного контура, представляющая собой полную энергию электромагнитных колебаний, остается постоянной. Поэтому

$$\frac{C(\Delta\varphi_0)^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} \quad \text{и} \quad I_0 = \Delta\varphi_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

§ 22.2. Вынужденные электромагнитные колебания

1. Электрическое сопротивление R любого реального колебательного контура отлично от нуля. Поэтому свободные электромагнитные колебания в контуре постепенно затухают. Для получения незатухающих электромагнитных колебаний необходимо извне подводить энергию, компенсирующую потери на лентц-джоулево тепло. В этом случае мы будем иметь дело уже не со свободными, а с вынужденными электромагнитными колебаниями. Для осуществления таких колебаний необходимо включить в колебательный контур источник электрической энергии, э. д. с. которого периодически изменяется (рис. 22.3). Будем предполагать, что внутреннее сопротивление этого источника энергии равно нулю, так что его включение в рассматриваемый контур не изменяет свойств последнего¹.

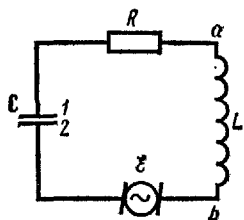


Рис. 22.3

2. Рассмотрим простейший случай вынужден-

¹ Источник электрической энергии, характеризующийся величиной э. д. с. и внутренним сопротивлением, называют в электротехнике источником напряжения.

ных электромагнитных колебаний в контуре, происходящих под действием синусоидальной э. д. с.:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t, \quad (22.21)$$

где \mathcal{E}_0 — амплитуда э. д. с., Ω — циклическая частота. Этот случай в то же время является и достаточно общим, так как по теореме Фурье любую непрерывную периодическую функцию $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ можно представить в виде суммы (конечной или бесконечной) простых синусоидальных функций, имеющих различные амплитуды, начальные фазы и циклические частоты.

Для получения дифференциального уравнения вынужденных электромагнитных колебаний необходимо в законе Ома (22.1) заменить \mathcal{E} суммой вынуждающей э. д. с. (22.21) и э. д. в. самоиндукции:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -\mathcal{E}_0 \sin \Omega t. \quad (22.22)$$

Полное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (22.22) равно сумме полного решения соответствующего однородного линейного уравнения [выражение (22.9)] и частного решения уравнения (22.22). Величина первого члена этой суммы обычно быстро убывает с течением времени, так как он характеризует свободные затухающие колебания в контуре. Поэтому вскоре после начала колебаний влиянием этого члена можно пренебречь. Частное решение уравнения (22.22) будем искать в форме

$$I = -\frac{dq}{dt} = I_0 \sin(\Omega t + \alpha). \quad (22.23)$$

Задача состоит в отыскании таких значений амплитуды тока I_0 и начальной фазы α , чтобы выражение (22.23) обращало уравнение (22.22) в тождество. Из (22.23) следует, что

$$q = \frac{I_0}{\Omega} \cos(\Omega t + \alpha) = -\frac{I_0}{\Omega} \sin\left(\Omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{dq}{dt} = -I_0 \sin(\Omega t + \alpha),$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -I_0 \Omega \cos(\Omega t + \alpha) = -I_0 \Omega \sin\left(\Omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставив эти выражения для q , $\frac{dq}{dt}$ и $\frac{d^2 q}{dt^2}$ в (22.22), получим

$$I_0 L \Omega \sin\left(\Omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + I_0 R \sin(\Omega t + \alpha) +$$

$$+ \frac{I_0}{\Omega C} \sin\left(\Omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t.$$

Левая часть этого тождества представляет собой сумму трех гармонических колебаний одной частоты, но имеющих разные начальные

фазы. Для их сложения удобно воспользоваться методом векторных диаграмм (рис. 22.4), который был уже нами применен при решении аналогичной задачи в механике (см. т. I, § 8.6). Из рис. 22.4 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1/\Omega C) - \Omega L}{R}, \quad (22.24)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + [(1/\Omega C) - \Omega L]^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad (22.25)$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + [(1/\Omega C) - \Omega L]^2}. \quad (22.26)$$

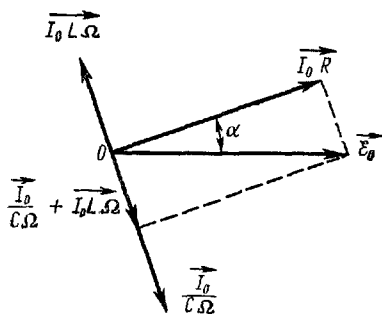


Рис. 22.4

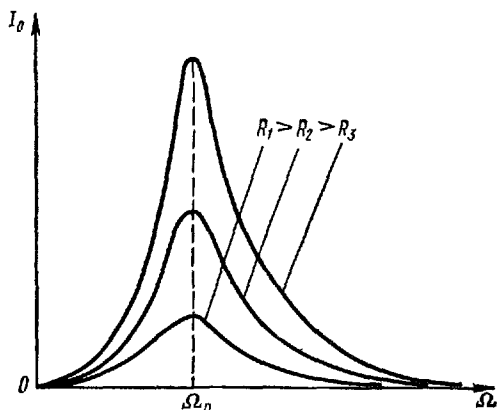


Рис. 22.5

Формула (22.25), показывающая зависимость амплитуды I_0 переменного тока в колебательном контуре от амплитуды \mathcal{E}_0 вынуждающей э. д. с., аналогична закону Ома (9.11) для замкнутой цепи постоянного тока. Поэтому величина Z называется **полным сопротивлением** электрической цепи переменного тока (колебательного контура). Оно складывается из **активного (омического) сопротивления** R , **индуктивного сопротивления** ΩL и **емкостного сопротивления** $1/\Omega C$.

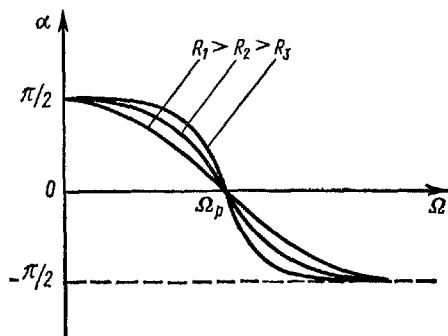


Рис. 22.6

3. Амплитуда силы тока в контуре, как видно из (22.25), зависит не только от параметров контура R , L и C и амплитуды \mathcal{E}_0 вынуждающей э. д. с., но и от циклической частоты Ω . На рис. 22.5 и 22.6 представлены зависимости амплитуды I_0 силы тока и сдвига фаз α между

силой тока и вынуждающей э. д. с. от частоты последней при постоянных R, L, C и \mathcal{E}_0 . Независимо от величины R активного сопротивления контура амплитуда силы тока в контуре достигает максимального значения:

$$I_{0 \text{ макс}} = \mathcal{E}_0 / R$$

при одном и том же значении Ω_p циклической частоты вынуждающей э. д. с., равном

$$\Omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (22.27)$$

Из (22.26) следует, что при $\Omega = \Omega_p$ полное сопротивление контура минимально и равно его активному сопротивлению. В этом случае $\alpha = 0$, т. е. сила тока совпадает по фазе с вынуждающей э. д. с.

Явление резкого возрастания амплитуды силы тока в колебательном контуре при приближении циклической частоты вынуждающей э. д. с. к значению Ω_p называется **явлением резонанса** в электрической цепи, а частота Ω_p — **резонансной циклической частотой**. Кривая зависимости I_0 от Ω называется **резонансной кривой**.

Из сравнения формул (22.27) и (22.10) видно, что электрический резонанс наступает при частоте вынуждающей э. д. с., несколько большей частоты свободных (затухающих) колебаний в цепи.

4. Найдем разности потенциалов на отдельных участках колебательного контура (см. рис. 22.3) при резонансе. Разность потенциалов $\Delta\varphi_L$ на концах индуктивности L равна э. д. с. самоиндукции:

$$\Delta\varphi_L = \varphi_b - \varphi_a = -L(dI/dt),$$

где I выражается формулой (22.23), в которой $\Omega = \Omega_p$ и $\alpha = 0$:

$$\Delta\varphi_L = -L\Omega_p I_0 \cos \Omega_p t = L\Omega_p I_0 \cos (\Omega_p t + \pi).$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора

$$\Delta\varphi_C = \varphi_1 - \varphi_2 = q/C.$$

Из формулы (22.23), полагая $\Omega = \Omega_p$, $\alpha = 0$ и выполняя интегрирование, получаем

$$\Delta\varphi_C = \frac{I_0}{\Omega_p C} \cos \Omega_p t.$$

Так как $\Omega_p = 1/\sqrt{LC}$, то амплитуды $\Delta\varphi_L$ и $\Delta\varphi_C$ одинаковы, т. е.

$$L\Omega_p I_0 = \frac{I_0}{\Omega_p C},$$

а фазы противоположны: $\Delta\varphi_L$ опережает $\Delta\varphi_C$ по фазе на π . Таким образом, $\Delta\varphi_L + \Delta\varphi_C = 0$, и напряжение U_R на активном сопротивлении равно э. д. с. \mathcal{E} источника энергии:

$$U_R = IR = I_0 R \sin \Omega_p t = \mathcal{E}.$$

В связи с этим рассмотренное нами явление резонанса в цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора, катушки индуктивности и конденсатора, называют **резонансом напряжений**

Явление резонанса напряжений можно наблюдать в опыте, схема которого изображена на рис. 22.7. Колебательный контур, состоящий

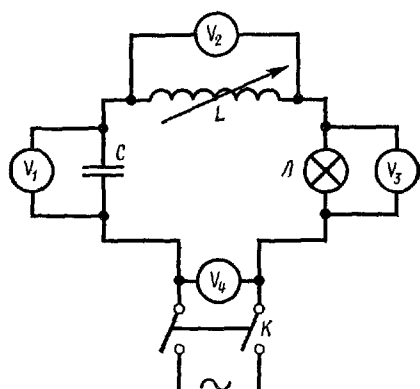


Рис. 22.7

из катушки L с подвижным железным сердечником, конденсатора C и лампы накаливания L , включается в цепь переменного тока с помощью рубильника K . Значения $\Delta\phi$ на всех участках контура и клеммах рубильника измеряются вольтметрами V_1 , V_2 , V_3 и V_4 . При произвольных значениях индуктивности катушки и емкости конденсатора показания всех вольтметров различны, а накал нити лампы слабее нормального. Изменяя индуктивность катушки путем перемещения сердечника, можно добиться наиболее яркого свечения лампы. При этом оказыва

ется, что показания вольтметров V_1 , V_2 и V_3 , V_4 попарно равны, т. е. наблюдается резонанс напряжений.

5. Если вынуждающая э. д. с. \mathcal{E} представляет собой сумму синусоидальных э. д. с. с различными циклическими частотами Ω_i , т. е.

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_0 \sin \Omega_i t,$$

то результирующий электрический ток I в колебательном контуре также будет представлять сумму синусоидальных токов с циклическими частотами Ω_i и начальными фазами α_i :

$$I = \sum_{i=1}^n I_{0i} \sin (\Omega_i t + \alpha_i).$$

Однако благодаря явлению электрического резонанса контур сильнее всего реагирует на ту составляющую э. д. с., частота Ω которой равна или наиболее близка к резонансной частоте Ω_p контура. Поэтому ток в контуре в основном определяет-

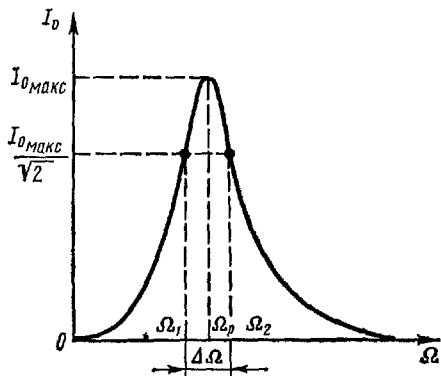


Рис. 22.8

ся этой составляющей э. д. с. На описанном явлении основаны все радиоприемные устройства, неотъемлемой частью которых является колебательный контур, резонансная частота которого может изменяться вследствие изменения его емкости или индуктивности.

Легко видеть, что влияние на колебательный контур вынуждающих э. д. с., частоты которых отличны от Ω_p , будет тем слабее, чем «острее» резонансная кривая для контура, т. е. чем резче зависимость I_0 от Ω вблизи значения $\Omega = \Omega_p = \omega_0$. «Остроту» резонансной кривой можно охарактеризовать ϵ помощью **относительной полуширины** этой кривой, равной $\Delta\Omega/\Omega_p$, где $\Delta\Omega$ — разность значений Ω_2 и Ω_1 циклической частоты, соответствующих $I_0^2 = (I_0^2)_{\text{макс}}/2$ (рис. 22.8).

Полагая в формуле (22.25) $I_0 = \frac{I_{0\text{ макс}}}{\sqrt{2}} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}R}$, получим

$$\frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}R} = \frac{\epsilon_0}{R \sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L \right)^2}},$$

или

$$\frac{\Omega^2 L^2}{R^2} \left(\frac{1}{\Omega^2 LC} - 1 \right)^2 = 1.$$

Заменив $(R^2/L^2) = 4\beta^2$ и $(1/LC) = \Omega_p^2$, после преобразований получим следующее уравнение, которому удовлетворяют искомые значения Ω_1 и Ω_2 циклической частоты:

$$(\Omega_p^2 - \Omega^2)^2 = 4\beta^2 \Omega^2.$$

Это биквадратное уравнение эквивалентно следующим двум квадратным уравнениям:

$$\Omega_p^2 - \Omega^2 = 2\beta\Omega \quad \text{и} \quad \Omega_p^2 - \Omega^2 = -2\beta\Omega.$$

Решая эти квадратные уравнения и отбрасывая отрицательные корни, так как они не соответствуют физическому смыслу величины Ω , найдем:

$$\Omega_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \Omega_p^2}, \quad \Omega_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 + \Omega_p^2},$$

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\beta.$$

Относительная полуширина резонансной кривой колебательного контура равна

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p} = \frac{2\beta}{\Omega_p}. \quad (22.28)$$

Отношение резонансной циклической частоты к удвоенному коэффициенту затухания электромагнитных колебаний в контуре называется **добротностью колебательного контура**:

$$Q = \frac{\Omega_p}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (22.29)$$

Можно показать, что добротность колебательного контура равна умноженному на 2π отношению полной энергии резонансных электромагнитных колебаний в контуре ($\Omega = \Omega_p$) к энергии, теряемой при этом на Ленц-Джоулево тепло за время одного полного колебания.

Из (22.28) и (22.29) следует, что относительная полуширина резонансной кривой колебательного контура обратно пропорциональна его добротности:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p} = \frac{1}{Q}.$$

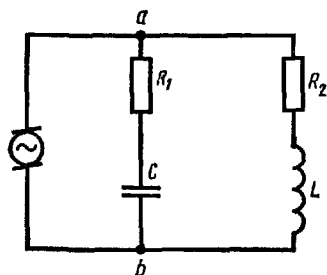


Рис. 22.9

6. Рассмотрим явление резонанса в электрической цепи, состоящей из параллельно включенных конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 22.9). Пусть разность потенциалов, приложенная к клеммам a и b , изменяется по гармоническому закону: $\varphi_a - \varphi_b = U_0 \sin \Omega t$.

Обозначим активные сопротивления первой и второй ветвей цепи через R_1 и R_2 , а силы тока в них — через I_1 и I_2 . Условимся считать I_1 и I_2 положительными, если токи направлены на рис. 22.9 сверху вниз. По закону Ома, токи I_1 и I_2 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$R_1 I_1 - \frac{q}{C} = U_0 \sin \Omega t, \quad (22.30)$$

$$R_2 I_2 = U_0 \sin \Omega t - L \frac{dI_2}{dt}, \quad (22.31)$$

где q — заряд конденсатора, связанный с силой тока I_1 соотношением (22.3):

$$I_1 = -dq/dt,$$

поэтому (22.30) можно переписать в виде

$$R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -U_0 \sin \Omega t. \quad (22.30')$$

Уравнение (22.30') совпадает с (22.22), если в последнем положить $\mathcal{E}_0 = U_0$, $L = 0$ и $R = R_1$. Следовательно,

$$I_1 = I_{01} \sin(\Omega t + \alpha_1), \quad (22.32)$$

где I_{01} и α_1 находятся по формулам (22.25) и (22.24) в предположении, что $\mathcal{E}_0 = U_0$, $L = 0$ и $R = R_1$:

$$I_{01} = \frac{U_0}{\sqrt{R_1^2 + 1/\Omega^2 C^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha_1 = \frac{1}{\Omega C R_1}.$$

Уравнение (22.31) также совпадает с (22.22), если в (22.22) положить $\mathcal{E}_0 = U_0$, $R = R_2$, $C = \infty$ и ввести замену переменных $\frac{dq}{dt} = -I_2$. Поэтому ток I_2 равен

$$I_2 = I_{02} \sin(\Omega t + \alpha_2), \quad (22.33)$$

где

$$I_{02} = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2 + \Omega^2 L^2}} \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha_2 = -\frac{\Omega L}{R_2}.$$

Ток I в неразветвленной части цепи представляет собой сумму синусоидальных токов I_1 и I_2 :

$$I = I_{01} \sin(\Omega t + \alpha_1) + I_{02} \sin(\Omega t + \alpha_2).$$

Из рассмотренного в первом томе (см. § 8.3) правила сложения гармонических колебаний следует, что ток I также должен быть синусоидальным с циклической частотой Ω :

$$I = I_0 \sin(\Omega t + \alpha), \quad (22.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \text{tg } \alpha &= \frac{I_{01} \sin \alpha_1 + I_{02} \sin \alpha_2}{I_{01} \cos \alpha_1 + I_{02} \cos \alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (22.35)$$

Задача упрощается, если активные сопротивления параллельных ветвей равны нулю ($R_1 = R_2 = 0$):

$$I_{01} = \frac{U_0}{1/\Omega C}, \quad I_{02} = \frac{U_0}{\Omega L},$$

$$\text{tg } \alpha_1 = \infty \quad \text{и} \quad \text{tg } \alpha_2 = -\infty,$$

т. е. $\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = 3\pi/2$, так что токи в ветвях противоположны по фазе.

Амплитуда I_0 тока во внешней (неразветвленной) цепи, как видно из (22.35), будет равна модулю разности амплитуд тока в параллельных ветвях:

$$I_0 = |I_{01} - I_{02}| = U_0 \left| \Omega C - \frac{1}{\Omega L} \right|. \quad (22.35')$$

Если $\Omega = \Omega_p = 1/\sqrt{LC}$, то $I_{01} = I_{02}$ и $I_0 = 0$.

Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно соединенные индуктивное и емкостное сопротивления, при приближении циклической частоты Ω вынуждающей э.д.с. к резонансной частоте $\Omega_p = 1/\sqrt{LC}$ называется **резонансом токов**.

Резонанс токов можно наблюдать в опыте, схема которого изображена на рис. 22.10, где L — катушка с постоянной индуктивностью, C — конденсатор переменной емкости, A_1 , A_2 и A_3 — амперметры. Если включить рубильник K и изменять емкость C конденсатора, то показания амперметров тоже меняются. При некотором значении этой емкости показания амперметров A_2 и A_3 становятся одинаковыми, а ток через амперметр A_1 практически отсутствует, т. е. имеет место резонанс токов.

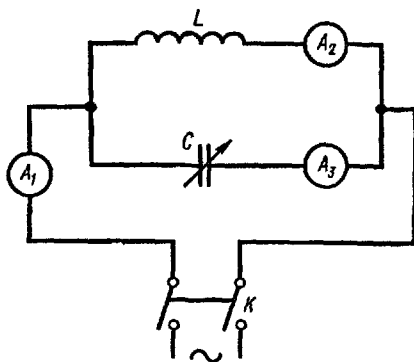


Рис. 22.10

§ 22.3. Электронные и полупроводниковые выпрямители и усилители

1. В этом параграфе мы рассмотрим физические принципы усиления электромагнитных колебаний и выпрямления переменного тока, т. е. превращения электрического тока, переменного как по численному значению, так и по направлению, в ток постоянного направления. Электрические цепи, предназначенные для этих целей, получили названия **усилителей** и **выпрямителей**. Важнейшими элементами цепей усилителей и выпрямителей являются электронные лампы и полупроводниковые устройства.

2. **Электронные лампы** основаны на явлении термоэлектронной эмиссии (см. § 10.3). Простейшим типом электронных ламп является диод (двухэлектродная лампа). Диод представляет собой запаянный стеклянный баллон с высоким вакуумом, в котором находятся два металлических электрода — анод и катод. Анод имеет форму тонкостенного кругового цилиндра, а катод — нити, натянутой по оси этого цилиндра. Условное изображение диода показано на рис. 22.11. При пропускании тока через нить накала (катод) она сильно нагревается и начинает испускать термоэлектроны.

Рис. 22.11

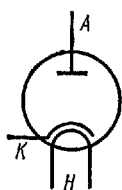


Рис. 22.12

Если анод лампы присоединить к положительному полюсу аккумуляторной батареи, а катод — к отрицательному (см. рис. 10.7), то, как показано в § 10.3, в цепи лампы устанавливается постоянный ток I_a . Зависимость термоэлектронного тока I_a в лампе от анодного напряжения U_a была рассмотрена в § 10.3. Описанный нами **диод прямого накала** обладает существенным недостатком: при нагреве нити переменным током ее температура периодически изменяется, что, в свою очередь, вызывает колебания анодного тока в лампе. Более совершенными являются **диоды с подогревными катодами**. В подогревном катоде вольфрамовая нить накала помещается внутри изолированного от нее металлического катода и служит только для нагрева последнего. Периодические колебания тока в нити лампы практически не влияют на температуру сравнительно массивного катода. Условное изображение диода с подогревным катодом показано на рис. 22.12.

3. Диоды обладают односторонней проводимостью: ток в лампе возможен только в том случае, когда потенциал анода выше потенциала катода ($U_a > 0$). Поэтому диоды можно применять для выпрямления переменного тока. Вакуумная двухэлектродная электронная лампа, служащая для выпрямления переменного тока, называется **кенотроном**. Схема простейшего **однополупериодного кенотронного выпрямителя** приведена на рис. 22.13. Первичная обмотка I трансформатора T соединена с источником переменного тока. Одна из вторичных обмоток III служит для питания нити накала кенотрона. Концы другой вторичной обмотки II присоединены к аноду и катоду кенотрона. В эту цепь включен потребитель выпрямленного тока, сопротивление которого обозна-

чено через R . Легко видеть, что электрический ток в лампе и потребителе может иметь только одно направление, показанное на рис. 22.13 стрелками. Однако сила I этого тока периодически изменяется. Такой ток называется **пульсирующим**. Если выпрямляемый переменный ток изменяется по гармоническому закону, то в течение первой половины

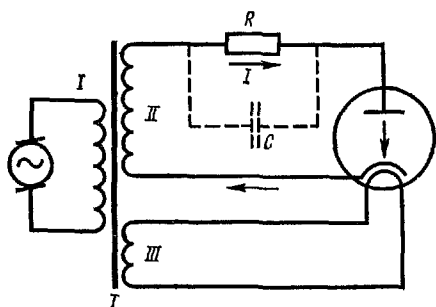


Рис. 22.13

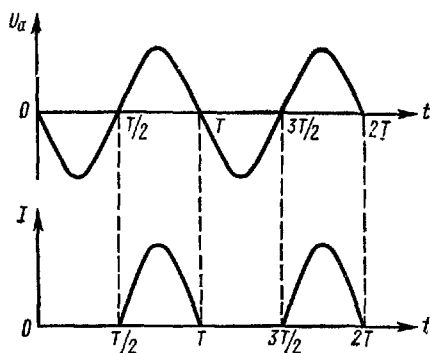


Рис. 22.14

периода, когда анодное напряжение U_a на лампе отрицательно, ток $I = 0$, а в течение второй половины периода постепенно возрастает до максимального значения и затем уменьшается до нуля (рис. 22.14).

Для сглаживания пульсаций выпрямленного тока I параллельно потребителю R включают специальные устройства, называемые **фильтрами**. Простейшим фильтром служит конденсатор C , показанный на рис. 22.13 пунктиром В процессе возрастания тока I и напряжения U_R на потребителе конденсатор заряжается, а затем при уменьшении U_R разряжается, сглаживая пульсации тока I . Более совершенным является фильтр, изображенный на рис. 22.15. Он состоит из катушки с железным сердечником, обладающей большой индуктивностью L и называемой **дресселем**, и из двух конденсаторов C_1 и C_2 . Сглаживающее действие дросселя на пульсирующий ток основано на явлении самоиндукции.

Используя два диода или диод с двумя анодами (сдвоенный

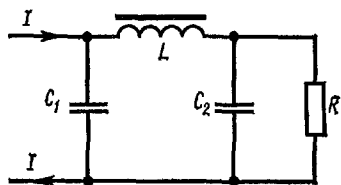


Рис. 22.15

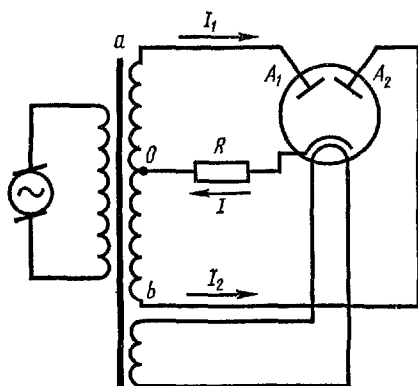


Рис. 22.16

диод), можно осуществить двухполупериодное выпрямление тока. Схема двухполупериодного кенотронного выпрямителя показана на рис. 22.16. Потребитель R тока присоединен к катоду сдвоенного диода и к средней точке O вторичной обмотки ab трансформатора. Направление выпрямленного тока I показано стрелкой. Аноды A_1 и A_2 лампы работают поочередно. Пусть в течение первого полупериода э. д. в во вторичной обмотке трансформатора имеет такой знак ($\mathcal{E}_{ab} > 0$), что на-



Рис. 22.17



Рис. 22.18

пряжение U_1 между анодом A_1 и катодом положительно, а напряжение U_2 между анодом A_2 и катодом отрицательно. В этом случае ток в лампе идет от анода A_1 к катоду ($I = I_1$). Во втором полупериоде знак э. д. с. изменяется на противоположный, так что $U_1 < 0$, а $U_2 > 0$. Поэтому ток в лампе идет уже от анода A_2 к катоду ($I = I_2$). Зависимость выпрямленного тока I от времени представлена на рис. 22.17. Сглаживание такого пульсирующего тока проще, чем в случае, изображенном на рис. 22.14.

4 Наряду с электронными выпрямителями переменного тока широкое распространение в технике получили ионные и полупроводниковые выпрямители. Примером ионного выпрямителя является упомянутый в § 12.5 ртутный выпрямитель.

Действие полупроводниковых выпрямителей — купроксного (меднозакисного), селенового и германиевого — основано на односторонней (вентильной) проводимости p - n -перехода, т. е. контакта дырочного и электронного полупроводников (см. § 13.7).

Рабочий элемент **купроксного выпрямителя** (купроксный вентиль) показан на рис. 22.18. На медную пластину 3 путем ее химической обработки нанесен слой 2 закиси меди Cu_2O , покрытый сверху тонким слоем серебра 1. Медная пластина и слой серебра играют роль электродов выпрямителя. Благодаря специальному выбору способа окисления меди и температурного режима этого процесса в закиси меди образуются два слоя с различными видами проводимости. Слой, прилегающий к медной пластине, обладает электронной проводимостью, а следующий слой — дырочной проводимостью. Граница между этими слоями закиси меди (p - n -переход) обладает вентильными свойствами: пропускает ток только в направлении от закиси меди к медному электроду. Таким образом, купроксный вентиль, подобно электронному диоду, выпрямляет переменный ток. Анодом купроксного диода является серебряный электрод, а катодом — медный.

В рабочем элементе **селенового выпрямителя** анодом служит алюминиевая или стальная пластина, на которую нанесен слой кристаллического селена, являющегося дырочным полупроводником. В качестве катода применен специальный сплав, содержащий кадмий. Вблизи катода образуется слой селенида кадмия, представляющий собой электронный полупроводник¹. *p-n*-Переход на границе между селеном и селенидом кадмия вызывает выпрямление переменного тока в селеновом вентиле — диоде.

Следует заметить, что наименование электродов полупроводниковых диодов введено нами по аналогии с наименованием электродов электронных ламп, т. е. на основании направления тока в н у т р и диода. При этом получается, что во внешней цепи диода ток идет от катода к аноду. Так как для потребителя выпрямленного тока полупроводниковый вентиль играет роль источника тока, то указанное выше наименование его электродов противоречит общепринятой терминологии. Поэтому для внешней цепи анодом купроксного выпрямителя является медная пластина, а анодом селенового выпрямителя — «катодный» сплав.

Основным элементом **германиевого силового диода** является кристалл германия, одна часть которого обладает электронной, а другая — дырочной проводимостью. Для получения области дырочной проводимости в кристалл германия, обладающий проводимостью *n*-типа, вводится небольшая примесь индия. Германиевые диоды позволяют выпрямлять переменные токи со сравнительно большой амплитудой напряжения (до 400 В). Они имеют малые габариты и вес.

Все рассмотренные выше полупроводниковые диоды очень чувствительны к изменению температурного режима работы. При повышении температуры их вентильное действие заметно понижается. В случае низких температур сильно возрастают электрическое сопротивление слоя полупроводника в диоде и потери энергии при выпрямлении тока. Поэтому рабочий диапазон температуры для различных типов полупроводниковых диодов колеблется от -60 до $+(50 \div 90)$ °С.

На рис. 22.19 показано условное обозначение полупроводникового диода, а на рис. 22.20 и 22.21 — соответственно схемы однополупериодного и двухполупериодного полупроводниковых выпрямителей.

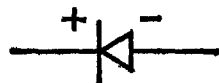


Рис. 22.19

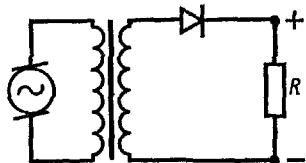


Рис. 22.20

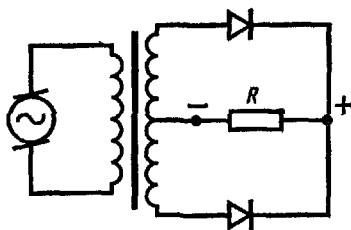


Рис. 22.21

¹ В некоторых селеновых вентилеях роль электронного полупроводника играет сульфид кадмия. В этом случае поверхность селена до нанесения катодного сплава покрывается тонким слоем серы.

5. Важной задачей радиотехники является усиление электромагнитных колебаний. Для этой цели применяются электронные и полупроводниковые триоды, а также более сложные многоэлектродные электронные лампы (тетроды, пентоды).

Трехэлектродная электронная лампа (**триод**) отличается от рассмотренного выше диода тем, что в ней между анодом и катодом помещен третий электрод, называемый **управляющей сеткой**. В простейшем триоде прямого накала с цилиндрическим анодом сетка C представляет собой тонкий металлический провод, изогнутый по винтовой линии, ось которой совпадает с осью анода A и нитью накала K (рис. 22.22). Условное обозначение триода прямого накала показано на рис. 22.23,а, а триода с подогревным катодом — на рис. 22.23,б.

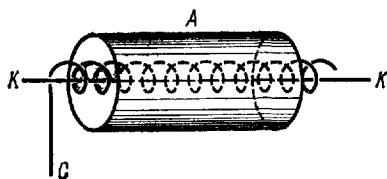


Рис. 22.22

Управляющая сетка триода расположена вблизи катода. Поэтому

даже при малом напряжении U_c между сеткой и катодом вблизи последнего создается сильное электрическое поле, оказывающее существенное влияние на движение электронов в триоде. На рис. 22.24 показана зависимость анодного тока I_a в триоде от сеточного напряжения U_c при одном и том же накале лампы и различных постоянных значениях напряжения U_a между анодом и катодом. Зависимость I_a от U_c при $U_a = \text{const}$ и неизменном накале называется **статической сеточной характеристикой** лампы. Вид сеточных характеристик триода, изображенных на рис. 22.24, легко понять, если учесть, что движение электронов в лампе определяется результирующим электрическим полем анода и сетки. Если потенциал сетки выше потенциала катода ($U_c > 0$), то создаваемое ею вблизи катода электрическое поле совпадает по направлению с основным электрическим полем, обусловленным различием потенциалов анода и катода. Это дополнительное поле способствует рассасыванию электронного облака у катода. Поэтому с увеличением U_c анодный ток в триоде возрастает. Наоборот, если $U_c < 0$, то концентрация электронов в облаке увеличивается, а анодный ток уменьшается. Потенциал сетки, при котором анодный ток полностью прекращается, называется **потенциалом запирания лампы**. Потенциал запирания лампы зависит от анодного напряжения U_a : чем оно больше,

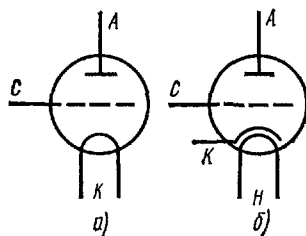


Рис. 22.23

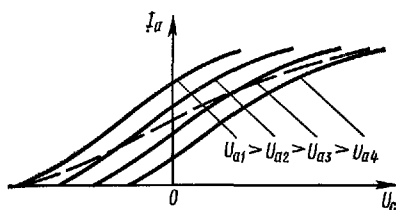


Рис. 22.24

тем больший по абсолютному значению отрицательный потенциал следует создать на сетке для того, чтобы нейтрализовать основное электрическое поле и «запереть» лампу.

Во всех предыдущих рассуждениях не принималась во внимание возможность улавливания электронов положительной заряженной сеткой (при $U_c > 0$). Это связано с тем, что площадь поверхности сетки мала по сравнению с площадью свободных промежутков между ее витками. Поэтому подавляющая часть электронов, испускаемых катодом, свободно пролетает сквозь сетку. Однако по мере увеличения положительного потенциала сетки утечка электронов через нее (так называемый **сеточный ток**) возрастает. При больших значениях U_c влиянием этого эффекта пренебрегать уже нельзя.

Сеточные характеристики триода имеют довольно сложную форму. Однако в области значений U_c , близких к нулю, сеточные характеристики триода можно приблизительно заменить семейством наклонных прямых¹. Величина S , численно равная тангенсу угла наклона сеточной характеристики к оси U_c , называется **крутизной сеточной характеристики триода**

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_c} \right) U_a.$$

Зависимость анодного тока I_a от анодного напряжения U_a при $U_c = \text{const}$ и постоянном накале называется **статической анодной характеристикой лампы**. На рис. 22.25 показано семейство статических анодных характеристик триода, соответствующих различным значениям потенциала сетки. Эти характеристики легко построить, если даны статические сеточные характеристики лампы. Наоборот, зная анодные характеристики триода, можно построить его сеточные характеристики. Величина R_i , численно равная котангенсу угла между касательной к статической анодной характеристике и осью U_a , называется **внутренним сопротивлением триода**

$$R_i = \left(\frac{\partial U_a}{\partial I_a} \right) U_c.$$

При постоянном напряжении

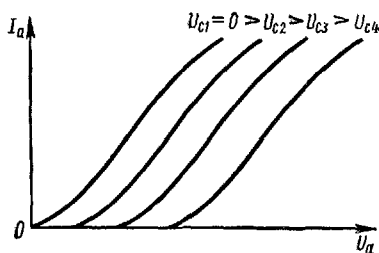


Рис. 22.25

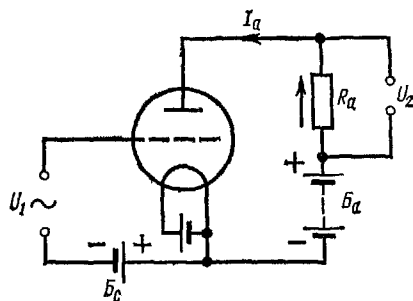


Рис. 22.26

¹ В зависимости от конструкции у некоторых триодов эта область может быть смещена в сторону отрицательных значений U_c (левые лампы) или в сторону положительных значений U_c (правые лампы).

накала анодный ток в триоде зависит только от анодного и сеточного напряжений: $I_a = f(U_a, U_c)$. Следовательно, приращение dI_a анодного тока, вызванное одновременно изменением анодного напряжения на dU_a и сеточного на dU_c , будет равно

$$dI_a = \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_a} \right)_{U_c} dU_a + \left(\frac{\partial I_a}{\partial U_c} \right)_{U_a} dU_c, \quad \text{или} \quad dI_a = \frac{1}{R_i} dU_a + S dU_c.$$

Обозначив

$$\mu = R_i S, \quad (22.36)$$

получим приращение анодного тока в триоде:

$$dI_a = \frac{1}{R_i} (dU_a + \mu dU_c). \quad (22.37)$$

Из формулы (22.37) видно, что приращение сеточного напряжения вызывает в μ раз большее изменение анодного тока в триоде, чем такое же изменение анодного напряжения. Величина μ называется **статическим коэффициентом усиления** трехэлектродной лампы. Величина

$D = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{R_i S}$ называется **проницаемостью лампы**.

6. На рис. 22.26 представлена простейшая схема усилителя переменного напряжения, основанного на свойствах электронного триода. Переменное напряжение U_1 , подлежащее усилению, подается на сетку триода. Усиленное напряжение U_2 снимается с концов активного сопротивления R_a , включенного в анодную цепь. Аккумуляторные батареи B_c и B_a создают соответственно постоянное отрицательное напряжение U_{c0} между сеткой и катодом триода и положительное напряжение U_a между анодом и катодом. Величина U_{c0} называется **сеточным смещением**. Если э. д. с. батареи B_c равна \mathcal{E}_1 , то $U_{c0} = -\mathcal{E}_1$. Полное напряжение между сеткой и катодом

$$U_c = U_{c0} + U_1 = -\mathcal{E}_1 + U_1. \quad (22.38)$$

Анодное напряжение лампы

$$U_a = \mathcal{E}_2 - I_a (R_a + r_a),$$

где \mathcal{E}_2 — э. д. с. батареи B_a , r_a — ее внутреннее сопротивление, I_a — сила анодного тока. Обычно $r_a \ll R_a$, поэтому можно считать, что

$$U_a = \mathcal{E}_2 - I_a R_a. \quad (22.39)$$

Так как

$$I_a R_a = U_2, \quad (22.40)$$

окончательно получаем

$$U_a = \mathcal{E}_2 - U_2. \quad (22.39')$$

Выше было показано, что анодный ток в триоде зависит от напряжения U_c (см. рис. 22.24). Из формулы (22.39) следует, что при посто-

янных \mathcal{E}_2 и R_a анодное напряжение уменьшается с ростом U_c . Поэтому зависимость I_a от U_c при постоянных \mathcal{E}_2 и R_a изображается более пологой кривой, чем статические сеточные характеристики. Такая зависимость называется **динамической характеристикой триода**. Она изображена пунктирной линией на рис. 22.25.

Из формул (22.38), (22.39') и (22.40) следует, что

$$dU_c = dU_1, \quad dU_a = -dU_2 \quad \text{и} \quad dI_a = dU_2/R_a.$$

Подставив эти значения в формулу (22.37), получим

$$\frac{dU_2}{R_a} = \frac{1}{R_i} (-dU_2 + \mu dU_1)$$

или

$$K = \frac{dU_2}{dU_1} = \frac{R_a}{R_a + R_i} \mu = \frac{\mu}{1 + R_i/R_a}. \quad (22.41)$$

Величина K , показывающая, во сколько раз изменение выходного напряжения U_2 больше изменения входного напряжения U_1 , называется **коэффициентом усиления**. Таким образом, коэффициент усиления напряжения в рассмотренной нами схеме пропорционален статическому коэффициенту усиления триода и зависит от отношения внутреннего сопротивления триода к величине активного сопротивления в его анодной цепи. При $R_a \gg R_i$ $K \approx \mu$.

Если статические анодные и сеточные характеристики триода имеют форму прямых линий, то его параметры R_i и S , а следовательно, и μ постоянны независимо от значений U_c и U_a . В этом случае коэффициент усиления K также постоянен. Тогда формулу (22.41) можно переписать в интегральной форме, заменив бесконечно малые приращения U_1 и U_2 их конечными приращениями:

$$\frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} = \frac{\mu}{1 + R_i/R_a}. \quad (22.41')$$

В действительности параметры R_i и μ триода зависят от напряжений на аноде и сетке. Однако при не слишком больших значениях изменения напряжения ΔU_1 на сетке можно так выбрать сеточное смещение U_{c0} и э. д. с. \mathcal{E}_2 анодной батареи, чтобы в пределах изменения U_c от $U_{c0} - \Delta U_1$ до $U_{c0} + \Delta U_1$ характеристики триода были близки к прямым линиям, а R_i и μ — приблизительно постоянны.

7. Из сказанного выше следует, что в усилительных схемах целесообразно применять лампы с возможным большим значением статического коэффициента усиления μ . Если в триоде анод удалить от катода, т. е. уменьшать их взаимную емкость $C_{a,k}$, называемую **выходной емкостью лампы**, то электрическое поле, обусловленное одним и тем же анодным напряжением U_a , будет

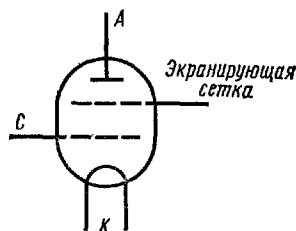


Рис. 22.27

ослабляться, а статический коэффициент усиления μ возрастет. Более радикальным способом уменьшения выходной емкости $C_{a,н}$ является установка между анодом и управляющей сеткой лампы четвертого электрода — **экранирующей сетки**. Такая четырех-электродная лампа называется **тетродом**. Схематическое изображение тетрода прямого накала представлено на рис. 22.27. Потенциал экранирующей сетки поддерживается постоянным и более низким,

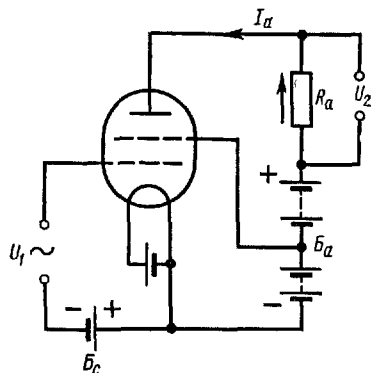


Рис. 22.28

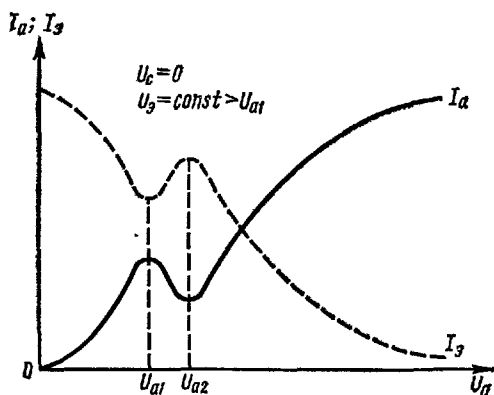


Рис. 22.29

чем потенциал анода. Благодаря этому экранирующая сетка ослабляет электрическое поле анода вблизи управляющей сетки и катода, увеличивая тем самым статический коэффициент усиления лампы. Схема простейшего усилителя напряжения, в котором используется четырех-электродная лампа, изображена на рис. 22.28.

Большим недостатком тетродов является немонотонный характер зависимости анодного тока от анодного напряжения при постоянных напряжениях на управляющей (U_c) и экранирующей (U_g) сетках (рис. 22.29). При малых анодных напряжениях анодный ток в тетроде, так же как и в триоде, возрастает с увеличением U_a . Однако начиная с некоторого значения $U_a = U_{a1}$ дальнейшее повышение анодного напряжения вызывает резкое ослабление анодного тока и лишь при $U_a > U_{a2}$ анодный ток вновь начинает увеличиваться. Это своеобразие анодной характеристики тетрода объясняется влиянием вторичной электронной эмиссии (см. § 10.4) из анода, называемой **динатронным эффектом**. При U_a , близких к U_{a1} , потенциал анода ниже потенциала экранирующей сетки. Поэтому вторичные электроны, выбиваемые из анода, устремляются к экранирующей сетке. В результате этого явления анодный ток уменьшается, а ток I_g в цепи экранирующей сетки увеличивается. Зависимость сеточного тока I_g от U_a показана на рис. 22.29 пунктиром. При малых значениях U_a влияние вторичной электронной эмиссии ничтожно мало, так как средняя энергия электронов, попадающих на анод, недостаточна для выбивания вторичных электронов. Возрастание U_a вызывает перераспределение первичных элект-

ронов, испускаемых катодом, между экранирующей сеткой и анодом. Поэтому возрастание анодного тока сопровождается соответствующим уменьшением сеточного тока I_s . При больших анодных напряжениях потенциал анода выше потенциала экранирующей сетки и вторичные электроны притягиваются к аноду.

Провал в анодной характеристике тетрода, используемого в схеме усилителя, ограничивает допустимое значение амплитуды анодного

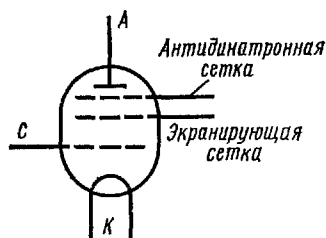


Рис. 22.30

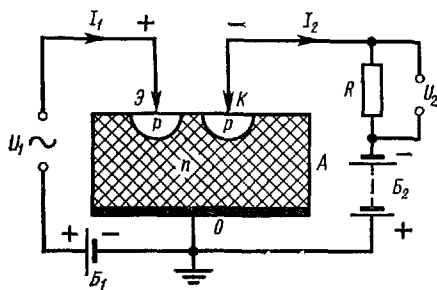


Рис. 22.31

напряжения. Во избежание искажения усиливаемых сигналов тетрод не должен работать в области анодных напряжений от U_{a1} до U_{a2} .

Одним из способов устранения вредного влияния динатронного эффекта является создание в лампе еще одной (третьей) сетки, называемой антидинатронной. Она помещается между анодом и экранирующей сеткой. Такая трехсеточная пятиэлектродная лампа называется пентодом. Ее условное изображение показано на рис. 22.30. Обычно антидинатронная сетка пентода соединяется с катодом. Между ней и анодом всегда существует электрическое поле, отталкивающее вторичные электроны обратно к аноду. Поэтому анодный ток в пентоде в отличие от тока в тетроде м о н о т о н н о возрастает с увеличением анодного напряжения. Для уменьшения влияния антидинатронной сетки на движение электронов, испускаемых катодом, ее делают достаточно редкой.

8. В заключение этого параграфа остановимся на принципе действия **полупроводниковых триодов (транзисторов)**. Транзисторы впервые были созданы в 1948 г. Благодаря ряду преимуществ перед электронными лампами (малые габариты и вес, продолжительный срок службы, отсутствие цепей накала) транзисторы нашли широкое и все возрастающее применение в различных радиотехнических устройствах.

Полупроводниковые триоды в отличие от рассмотренных выше диодов содержат два электронно-дырочных перехода. Для изготовления полупроводниковых триодов применяются германий и кремний, так как подвижность носителей заряда в германии и кремнии больше, чем в других полупроводниках. Кроме того, они обладают большой механической прочностью и химической устойчивостью. Наконец, что очень важно для нормальной работы транзисторов, рекомбинация электронов и дырок в этих полупроводниках происходит сравнительно медленно, так что разноименно заряженные носители проходят сквозь

тонкие слои германия или кремния, практически не рекомбинируя друг с другом.

Простейший точечный германиевый триод (рис. 22.31) представляет собой небольшой кристалл *A* германия, обладающий электронной проводимостью (*n*-типа). Снизу кристалл припаян к плоскому металлическому электроду *O* — основанию. Сверху он контактирует с двумя близко расположенными друг от друга точечными электродами: эмиттером *Э* и коллектором *К*, изготовленными из весьма тонкой металлической проволоки. Вблизи эмиттера и коллектора в кристалле германия имеются небольшие области дырочной проводимости (*p*-типа). Схема включения германиевого триода в электрическую цепь усилителя показана на рис. 22.31. Основание триода заземляется, на эмиттер подается усиливаемое переменное напряжение U_1 , в цепь коллектора включены аккумуляторная батарея B_2 и нагрузочное сопротивление R , с которого снимается усиленное напряжение U_2 . Э. д. с. \mathcal{E}_1 батареи B_1 выбирается таким образом, чтобы при любых значениях U_1 напряжение $U_{э0}$ между эмиттером и основанием было положительным. Поэтому ток I_1 в цепи эмиттер — основание всегда идет через кристалл германия от *Э* к *O*, т. е. в пропускном направлении *p-n*-перехода вблизи эмиттера. Иначе обстоит дело в цепи коллектора. Батарея B_2 включена таким образом, что напряжение между коллектором и основанием отрицательно. Следовательно, ток в цепи коллектор — основание должен идти через кристалл германия только от *O* к *К*, т. е. в направлении, я р о т и в о п о л о ж н о м п р о п у с к н о м у для *p-n*-перехода вблизи коллектора. Этот *p-n*-переход играет роль запирающего слоя с очень большим сопротивлением. Напомним, что, как показано в § 13.7, запирающее действие *p-n*-перехода (или, точнее, его малая проводимость) обусловлено обеднением контактного слоя подвижными носителями заряда (электронами и дырками) и связанным с этим ростом его толщины.

Если напряжение между эмиттером и основанием $U_{э0} > 0$, то под действием электрического поля дырки свободно переходят из области *p*-германия около эмиттера в основную часть кристалла (*n*-типа). Соответственно электроны проводимости свободно переходят из кристалла *n*-типа в область *p*-типа у эмиттера. При этом в цепи эмиттера идет ток силой $I_э$. При изготовлении транзисторов рассматриваемого типа примеси обычно вводят таким образом, чтобы концентрация n_p^0 дырок в *p*-германии была во много раз больше концентрации n_n^0 электронов проводимости в *n*-германии. Поэтому можно считать, что

$$I_э = en_1,$$

где e — элементарный заряд, n_1 — число дырок, переходящих за единицу времени из *p*- в *n*-германий вблизи эмиттера.

Таким образом, прилегающая к эмиттеру область *p*-германия играет роль, подобную роли катода электронной лампы: является источником возникновения подвижных носителей заряда. Потенциал коллектора значительно ниже потенциалов основания и эмиттера. Следовательно, дырки, инжектированные в *n*-германий, перемещаются в нем

по направлению к коллектору. Контакт p - и n -германия вблизи коллектора обладает малым сопротивлением для этих дырок, свободно переходящих из n - в p -область, образуя ток в цепи коллектора силой I_k . Если n_2 — число дырок, проходящих за единицу времени через p - n -переход вблизи коллектора, то

$$I_k = en_2.$$

Очевидно, что

$$n_2 = n_1 - \Delta n,$$

где Δn — «потери дырок» из-за их рекомбинации с электронами проводимости в n -германии на пути от эмиттера к коллектору. Коэффициент усиления транзистора по току

$$\alpha = \frac{I_k}{I_s} = 1 - \frac{\Delta n}{n_1} \quad (22.42)$$

не может быть больше единицы и тем ближе к ней, чем меньше величина Δn . Вероятность рекомбинации дырок с электронами, а следовательно, и Δn возрастают при увеличении пути, проходимого дырками в n -германии. Поэтому эмиттер и коллектор желательно располагать возможно ближе друг к другу. Обычно расстояние между ними не превышает 0,1 мм.

Коэффициент усиления транзистора по напряжению

$$K = \frac{U_2}{U_1},$$

где U_2 — напряжение на нагрузке R в цепи коллектора. Коэффициент K зависит не только от собственных свойств транзистора, но и от соотношения сопротивлений нагрузки в цепях коллектора и эмиттера:

$$K = \frac{I_k R}{I_s R_s} = \alpha \frac{R}{R_s}. \quad (22.42')$$

Поскольку R может во много раз превосходить R_s , коэффициент усиления транзистора по напряжению может достигать значительной величины.

Серьезным недостатком полупроводниковых триодов является то, что их нормальная работа возможна в сравнительно малом интервале температур. Для германия температура перехода к области собственной проводимости составляет около 100 °С. Вблизи этой температуры резко возрастает концентрация свободных носителей заряда в полупроводнике и управление их числом, совершенно необходимое для работы усилителя, становится затруднительным. Поэтому верхний предел рабочей температуры германиевых триодов не превышает 55—75 °С. При низкой температуре энергия теплового движения оказывается недостаточной для освобождения в объеме полупроводника необходимого числа носителей заряда. Это приводит к сильному увеличению сопротивления прибора и нарушению режима его работы. Для обычных полупроводниковых триодов нижний предел рабочей температуры лежит около —55 °С.

Полупроводниковые триоды с точечными контактами значительно усиливают напряжение, но их выходные мощности малы из-за опасности перегрева. Более мощными являются **плоскостные полупроводниковые триоды**. Для их изготовления применяют монокристаллы германия, в которых введением соответствующих примесей (трехвалентного индия и пентавалентных сурьмы или мышьяка) создают либо прослойку *n*-германия между двумя частями *p*-германия, либо, наоборот, слой *p*-германия между двумя частями *n*-германия. В зависимости от этого различают триоды на основе *n*-полупроводника (типа *p-n-p*) и триоды на основе *p*-полупроводника (типа *n-p-n*).

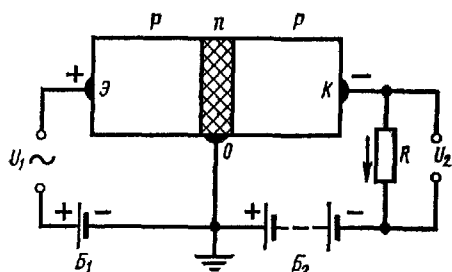


Рис. 22.32

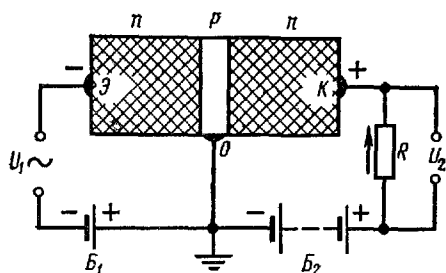


Рис. 22.33

Принцип действия плоскостного триода типа *p-n-p* (рис. 22.32) аналогичен принципу действия точечного германиевого триода. Эмиттером является левая часть кристалла (*p*-германий), коллектором — его правая часть, а прослойка из *n*-германия заземлена через основной электрод. Толщина слоя *n*-германия обычно не превышает 0,025 мм, так как ее увеличение приводит к возрастанию «потерь дырок» вследствие рекомбинации с электронами.

Схема включения плоскостного триода типа *n-p-n* показана на рис. 22.33. По сравнению с триодом типа *p-n-p* полярности эмиттера и коллектора изменены на противоположные. Это сделано потому, что в рассматриваемом случае подвижные носители заряда, инжектируемые в разделительный слой *p*-германия, представляют собой отрицательно заряженные электроны, а не положительно заряженные дырки. В остальном принципы действия плоскостных триодов обоих типов совпадают.

Схема включения плоскостного триода типа *n-p-n* показана на рис. 22.33. По сравнению с триодом типа *p-n-p* полярности эмиттера и коллектора изменены на противоположные. Это сделано потому, что в рассматриваемом случае подвижные носители заряда, инжектируемые в разделительный слой *p*-германия, представляют собой отрицательно заряженные электроны, а не положительно заряженные дырки. В остальном принципы действия плоскостных триодов обоих типов совпадают.

§ 22.4. Автоколебания

1. В § 22.2 мы рассмотрели вынужденные незатухающие электромагнитные колебания, происходящие под действием синусоидальной э. д. с. При этом потери энергии в колебательном контуре на лентч-джоулево тепло компенсировались путем подвода энергии от внешнего источника. Мы показали, что частота, амплитуда и начальная фаза таких колебаний зависят от частоты, амплитуды и начальной фазы вынуждающей э. д. с.

Большой интерес представляют автоколебательные системы, широко применяемые в радиотехнике для генерирования незатухающих электромагнитных колебаний. Происходящие в них колебания называются автоколебаниями. Отличительной особенностью автоколебаний является то, что их амплитуда и частота полностью определяются свойствами колебательной системы.

Потери энергии, неизбежные при колебаниях в любой реальной системе, восполняются за счет внутреннего источника энергии, составляющего необходимую часть автоколебательной системы. При этом существенно, что поступление энергии от источника автоматически регулируется самим колебательным процессом в системе. Примером механической автоколебательной системы является часовой механизм, в котором энергия и амплитуда колебаний поддерживаются неизменными за счет энергии предварительно сжатой пружины или поднятой гири.

2. Одна из простейших электрических автоколебательных систем — ламповый генератор с обратной связью (рис. 22.34). В анодную цепь триода включены последовательно колебательный контур LRC и батарея B_a . В цепь сетки включена катушка обратной связи L_c , находящаяся во взаимной индуктивной связи с катушкой L .

Обозначим через M взаимную индуктивность катушек L_c и L , а через I_1 и I_2 — силы токов в параллельных ветвях контура, содержащих соответственно катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C . Анодный ток в лампе

$$I_a = I_1 + I_2. \quad (22.43)$$

По формуле (22.37),

$$dI_a = \frac{1}{R_I} (dU_a + \mu dU_c).$$

Ограничимся случаем малых колебаний анодного (U_a) и сеточного (U_c) напряжений лампы. Тогда параметры триода R_I и μ можно считать постоянными и переписать формулу (22.37) в интегральной форме¹:

$$I_a = \frac{1}{R_I} (U_a + \mu U_c). \quad (22.44)$$

Напряжение U_c между сеткой и катодом лампы численно равно э.д.с. взаимной индукции, возникающей в катушке обратной связи при изменении тока I_1 . По формуле (19.43),

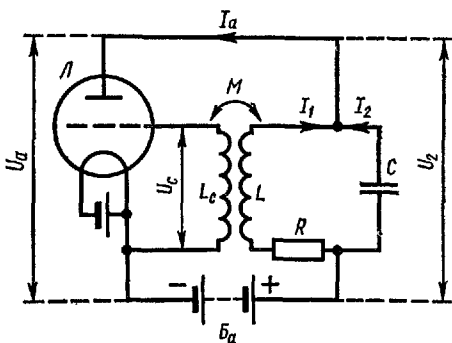


Рис. 22.34

¹ Строго говоря, при переходе от уравнения (22.37) к (22.44) предполагается, что анодные и сеточные характеристики триода имеют форму прямых линий ($R_I = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$). Поэтому основанная на формуле (22.44) приближенная теория лампового генератора с обратной связью называется линейной.

$$\varepsilon_i = -M (dI_1/dt).$$

Весьма важен здесь знак сеточного напряжения. В зависимости от того, какой конец катушки обратной связи присоединен к сетке триода, U_c может быть равно либо $+\varepsilon_i$, либо $-\varepsilon_i$:

$$U_c = \pm \varepsilon_i = \pm [-M (dI_1/dt)].$$

Если условиться считать $M > 0$ при $U_c = +\varepsilon_i$ и $M < 0$ при $U_c = -\varepsilon_i$, то это выражение можно упростить:

$$U_c = -M (dI_1/dt). \quad (22.45)$$

Анодное напряжение, по закону Ома для замкнутой цепи $B_a R L J B_a$,

$$U_a = \varepsilon + \varepsilon_c - I_a r - I_1 R,$$

где ε — э.д.с. батареи B_a , $\varepsilon_c = -L(dI_1/dt)$ — э.д.с. самоиндукции в индуктивности L , $I_a r$ — напряжение на внутреннем сопротивлении r батареи B_a , $I_1 R$ — напряжение на активном сопротивлении контура. Таким образом,

$$U_a = \varepsilon - L (dI_1/dt) - I_a r - I_1 R. \quad (22.46)$$

Подставив выражения (22.45) и (22.46) в (22.44), после преобразований получим

$$I_a = \frac{1}{R_i + r} [\varepsilon - I_1 R - \frac{dI_1}{dt} (L + \mu M)]. \quad (22.47)$$

Сила тока в емкостной ветви контура $I_2 = \frac{dq}{dt}$, где $q = CU_2$ — заряд нижней обкладки конденсатора C , находящегося под напряжением U_2 . Так как $C = \text{const}$, то

$$I_2 = C \frac{dU_2}{dt}.$$

По закону Ома для замкнутой цепи $B_a C J B_a$ имеем

$$U_2 = \varepsilon - I_a r - U_a.$$

Заменив U_a его выражением по формуле (22.46), получим

$$U_2 = I_1 R + L \frac{dI_1}{dt} \quad \text{и} \quad I_2 = RC \frac{dI_1}{dt} + LC \frac{d^2 I_1}{dt^2}.$$

Подставим выражение для I_2 в формулу (22.43):

$$I_a = I_1 + RC \frac{dI_1}{dt} + LC \frac{d^2 I_1}{dt^2}. \quad (22.48)$$

Приравнявая правые части уравнений (22.47) и (22.48) и производя несложные преобразования, получаем следующее дифференциальное уравнение лампового генератора с обратной связью:

$$LC \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \left(\frac{L + \mu M}{R_i + r} + RC \right) \frac{dI_1}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_i + r} \right) I_1 = \frac{\varepsilon}{R_i + r},$$

или

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \left[\frac{1 + \mu (M/L)}{C (R_i + r)} + \frac{R}{L} \right] \frac{dI_1}{dt} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{R}{R_i + r} \right) I_1 = \frac{\varepsilon \omega_0^2}{R_i + r}, \quad (22.49)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ — циклическая частота свободных незатухающих колебаний в контуре с индуктивностью L , емкостью C и активным сопротивлением $R = 0$ [см. формулу (22.19)]. Она называется **собственной частотой** колебательного контура.

3. Уравнение (22.49) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью. Полное решение I_1 этого уравнения равно сумме его частного решения I_* и полного решения I_{\sim} того же уравнения, но без правой части:

$$I_1 = I_* + I_{\sim}.$$

Частное решение I_* легко найти, если учесть, что правая часть уравнения (22.49) не зависит от времени:

$$I_* = \mathcal{E}/(R_i + R + r).$$

Величина I_* представляет собой силу постоянного анодного тока в лампе при $U_c = 0$. Этот результат совершенно очевиден. Его можно легко получить из закона Ома, если учесть, что для постоянного тока I_* конденсатор C имеет бесконечно большое сопротивление, а катушка индуктивности L — нулевое сопротивление.

Основной интерес представляет переменная слагающая I_{\sim} тока в контуре, удовлетворяющая следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 I_{\sim}}{dt^2} + \left[\frac{1 + \mu(M/L)}{C(R_i + r)} + \frac{R}{L} \right] \frac{dI_{\sim}}{dt} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{R}{R_i + r} \right) I_{\sim} = 0. \quad (22.50)$$

Соотношение (22.50) по своей форме аналогично дифференциальному уравнению (22.5) свободных затухающих электромагнитных колебаний в контуре. Поэтому его решение имеет вид [см. формулы (22.9) — (22.11)]

$$I_{\sim} = I_0 e^{-\beta_1 t} \sin(\omega t + \alpha_0), \quad (22.51)$$

где I_0 и α_0 — соответственно начальные амплитуда и фаза переменного тока, ω — его циклическая частота, равная

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 \left(1 + \frac{R}{R_i + r} \right) - \beta_1^2},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \mu(M/L)}{C(R_i + r)} + \frac{R}{L} \right]. \quad (22.52)$$

Из формулы (22.51) видно, что при $\beta_1 = 0$ переменный ток в контуре будет **незатухающим** синусоидальным током, циклическая частота которого

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + R/(R_i + r)}.$$

Обычно $R \ll R_i$, поэтому $\omega \approx \omega_0$.

Начальная амплитуда I_0 переменного тока обусловлена случайными флуктуационными колебаниями тока в лампе и поэтому очень мала. Таким образом, при $\beta_1 \geq 0$ переменный ток $I_{\sim} \ll I_*$ и электромагнитные колебания в схеме, изображенной на рис. 22.34, практически отсутствуют.

Иначе обстоит дело в том случае, когда $\beta_1 < 0$. Так как $-\beta_1 t > 0$, то амплитуда ($I_0 e^{-\beta_1 t}$) переменного тока в контуре возрастает с течением времени и может достигнуть значения, во много раз превышающего I_* . Такой режим работы генератора называется режимом **самовозбуждения**. На первый взгляд кажется, что в этом случае амплитуда тока I_{\sim} может возрастать неограниченно. Однако при достаточно-больших значениях I_{\sim} параметры R_i и μ триода уже нельзя считать постоянными. Оказывается, что в процессе возрастания амплитуды переменного тока R_i и μ изменяются таким образом, что $|\beta_1|$ постепенно уменьшается и в конце концов обращается в нуль. Поэтому дальнейшее увеличение амплитуды

тока $I \sim$ прекращается, а в контуре LRC происходят электромагнитные колебания с постоянной амплитудой.

4. Отношение $-M/L$ называется коэффициентом обратной связи:

$$k = -M/L.$$

Из формулы (22.52) следует, что

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \mu k}{C(R_i + r)} + \frac{R}{L} \right].$$

Чтобы генератор работал в режиме самовозбуждения ($\beta_1 < 0$), коэффициент обратной связи должен удовлетворять условию

$$\frac{1 - \mu k}{C(R_i + r)} + \frac{R}{L} < 0$$

или, пренебрегая r по сравнению с R_i ($R_i \gg r$) и учитывая, что по формуле (22.36) $\mu = SR_i$, получим

$$k > \left(\frac{1}{SR_i} + \frac{RC}{LS} \right) > 0,$$

так как все величины, входящие в правую часть неравенства, положительны. Условие самовозбуждения генератора с обратной связью можно перенести в форме

$$\frac{M}{L} = -k < - \left(\frac{1}{SR_i} + \frac{RC}{LS} \right) < 0. \quad (22.53)$$

Если индуктивность L контура достаточно велика, а его активное сопротивление R мало, то, как видно из формулы (22.46), анодное напряжение

$$U_a \approx -L (dI_1/dt).$$

В то же время сеточное напряжение $U_c = -M(dI_1/dt)$. Поэтому из условия самовозбуждения (22.53) следует, что

$$(U_c/U_a) < 0,$$

т.е. сеточное и анодное напряжения лампы противоположны по фазе (разность их начальных фаз равна π).

5. Физический смысл полученных результатов состоит в следующем. Потери на лентц-джоулево тепло в активном сопротивлении R колебательного контура компенсируются в генераторе с обратной связью за счет энергии батареи B_a . Подвод энергии в контур регулируется соответствующим изменением силы анодного тока. Это регулирование осуществляется автоматически изменением сеточного напряжения триода за счет э. д. с. взаимной индукции, возникающей в катушке обратной связи под действием колебаний тока в контуре. Оказывается, что генерирование незатухающих колебаний в контуре возможно лишь при соблюдении следующих двух условий:

а) взаимная индуктивность M катушек L_c и L должна быть достаточно велика;

б) взаимная индуктивная связь катушек L_c и L и присоединение концов катушки L_c к сетке и катоду лампы должны быть осуществлены таким образом, чтобы фаза сеточного напряжения триода была пр о-

т и в о п о л о ж н а фазе его анодного напряжения, т. е. отличалась от последней на π .

6. Незатухающие колебания высокой частоты ω называются **модулированными**, если один из их параметров (амплитуда, циклическая частота или начальная фаза) изменяется в соответствии с другими

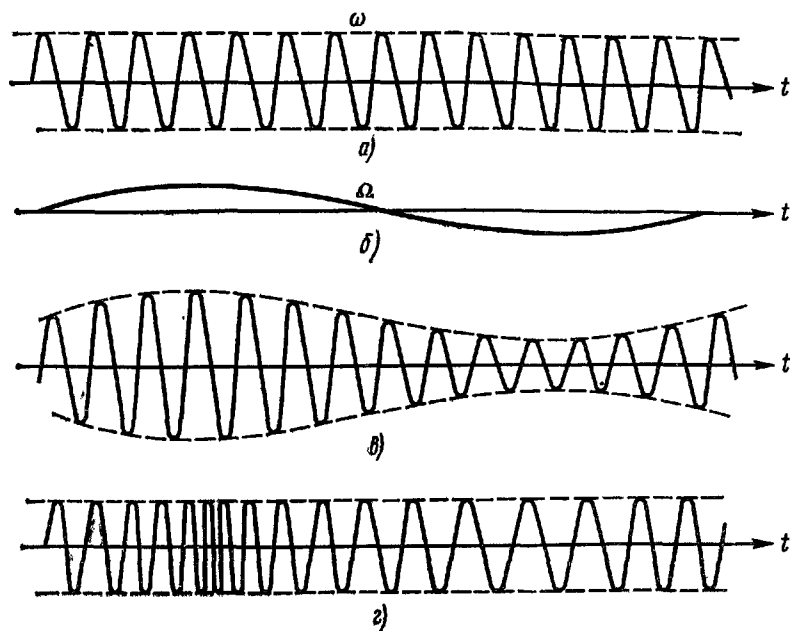


Рис. 22.35

колебаниями, имеющими более низкую частоту Ω . Частота ω называется **несущей**, а частота Ω — **модулирующей**. В зависимости от того, какой из параметров колебания изменяется, различают три типа модуляции: амплитудную, частотную и фазовую. На рис. 22.35 изображены колебания несущей высокой частоты (а), модулирующее колебание низкой частоты (б), а также результирующие (модулированные) колебания при амплитудной (в) и частотной или фазовой (г) модуляциях.

Вопросы для повторения

1. Опишите процессы, происходящие при свободных электромагнитных колебаниях в контуре. Найдите период этих колебаний.
2. Найдите выражение для амплитуды силы тока в случае вынужденных колебаний в контуре под действием синусоидальной э.д.с.
3. В чем состоит явление резонанса в колебательном контуре? Начертите резонансные кривые для контуров, отличающихся только значениями их активных сопротивлений.
4. От каких параметров контура зависит резонансная частота?
5. Опишите устройство электронного диода. Каким образом он используется для выпрямления переменного тока?

6. Поясните принцип действия и устройство полупроводниковых выпрямителей (купроксного, селенового и германиевого).

7. Начертите статические анодные и сеточные характеристики триода и поясните их.

8. Какое назначение транзисторов и в чем состоит принцип их действия?

9. В чем состоят отличительные особенности автоколебаний? Приведите пример автоколебательной системы.

10. Какие колебания называются модулированными?

Примеры решения задач

Задача 22.1. Батарея, состоящая из двух одинаковых заряженных конденсаторов емкостью 10 мкФ каждый, включается в цепь, индуктивность и активное сопротивление которой равны 10 мГ и 40 Ом. Определить период возникающих в цепи электромагнитных колебаний и ее добротность, если конденсаторы соединены параллельно и последовательно.

Дано:

$$C_0 = 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$L = 10^{-2} \text{ Г}$$

$$R = 40 \text{ Ом}$$

$$T_1 - ? \quad T_2 - ?$$

$$Q_1 - ? \quad Q_2 - ?$$

Решение. Период электромагнитных колебаний, по формуле (22.15),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Значения емкости батарей при параллельном и последовательном соединениях двух одинаковых конденсаторов емкостью C_0 соответственно равны:

$$C_1 = 2C_0 \quad \text{и} \quad C_2 = C_0/2.$$

Поэтому искомые периоды колебаний T_1 и T_2 можно найти по формулам:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2LC_0} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{LC_0} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Добротность колебательного контура, по формуле (22.29), $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Таким образом,

$$Q_1 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{2C_0}} \quad \text{и} \quad Q_2 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2L}{C_0}} = 2Q_1.$$

Произведем вычисления в СИ

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{2LC_0} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{2 \cdot 3,14}{\sqrt{\frac{1}{2 \cdot 0,01 \cdot 10^{-6}} - \frac{1600}{4 \cdot 10^{-4}}}} \text{ с} =$$
$$= 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 6,28 \text{ мс};$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{LC_0} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{2 \cdot 3,14}{\sqrt{\frac{2}{0,01 \cdot 10^{-6}} - \frac{1600}{4 \cdot 10^{-4}}}} \text{ с} =$$
$$= 1,57 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 1,57 \text{ мс};$$

$$Q_1 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{2C_0}} = \frac{1}{40} \sqrt{\frac{0,01}{2 \cdot 10^{-6}}} = 0,559;$$

$$Q_2 = 2Q_1 = 1,12.$$

Задача 22.2. Колебательный контур состоит из соединенных последовательно батареи конденсаторов и дросселя, активное сопротивление которого 100 Ом, а индуктивность 0,05 Г. Резонансная частота контура $\nu_p = 6000$ Гц. Каково полное сопротивление цепи для переменного тока, если его частота $\nu_1 = 50$ Гц? Каково оно будет при частотах $\nu_2 = 5$ кГц и $\nu_3 = 6$ кГц?

Дано:
 $R = 100$ Ом
 $L = 0,05$ Г
 $\nu_p = 6000$ Гц
 $\nu_1 = 50$ Гц
 $\nu_2 = 5000$ Гц
 $\nu_3 = 6000$ Гц

$Z_1 = ?$ $Z_2 = ?$ $Z_3 = ?$

Решение. Полное сопротивление цепи, по формуле (22.26),

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2},$$

где C — емкость, $\Omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота переменного тока. Таким образом,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi\nu C} - 2\pi\nu L\right)^2}.$$

Резонансная частота контура, по формуле (22.27),

$$\nu_p = \frac{\Omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

поэтому

$$Z = \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2 \left[\left(\frac{\nu_p^2}{\nu^2}\right) - 1\right]^2}.$$

Произведем вычисления в СИ:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu_1^2 L^2 \left[\left(\frac{\nu_p^2}{\nu_1^2}\right) - 1\right]^2} = \\ &= \sqrt{100^2 + 4 \cdot 3,14^2 \cdot 50^2 \cdot 0,05^2 \cdot \left[\left(\frac{6000}{50}\right)^2 - 1\right]^2} \text{ Ом} = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Ом} = 226 \text{ кОм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu_2^2 L^2 \left[\left(\frac{\nu_p^2}{\nu_2^2}\right) - 1\right]^2} = \\ &= \sqrt{100^2 + 4 \cdot 3,14^2 \cdot 5000^2 \cdot 0,05^2 \cdot \left[\left(\frac{6000}{5000}\right)^2 - 1\right]^2} \text{ Ом} = 698 \text{ Ом}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_3 &= \sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu_3^2 L^2 \left[\left(\frac{\nu_p^2}{\nu_3^2}\right) - 1\right]^2} = \\ &= \sqrt{100^2 + 4 \cdot 3,14^2 \cdot 6000^2 \cdot 0,05^2 \cdot \left[\left(\frac{6000}{6000}\right)^2 - 1\right]^2} \text{ Ом} = 100 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 363
 Акулова опыты 309
 Акценторные уровни 170
 Акценторы 170
 Ампер 97, 195
 Ампера гипотеза о природе магнетизма 184
 Анион 134
 Араго опыты 262
 Астатическая система 181
 Атома орбитальный момент импульса 292
 — — магнитный момент 292
 — — — — наведенный 295
 — — поляризуемость 69
 Барнетта опыт 301
 Бетатрон 324
 Вебер 214
 Возбуждение атомов газа 143
 Вольт 36
 Выпрямитель кенотропный двухполупериодный 352
 — — однополупериодный 350
 — — купроксный 352
 — — полупроводниковый 352
 — — селеновый 353
 Гальванометр баллистический 228
 — — магнитозлектрический 227
 — — электродинамический 230
 Гаусс 196
 Генератор импульсный 64
 — — ламповый с обратной связью 363
 — — — — режим самовозбуждения 365
 — — термоэлектрический 177
 — — электростатический Ван-де-Графа 50
 Генри 278
 Гиромагнитное отношение 292, 301
 Гистерезис сегнетозлектрика 82
 — ферромагнетика 311
 Градиент потенциала 37
 Давление на поверхность заряженного тела 51
 Движение прецессионное 295
 Двойной электрический слой 120
 Диамагнетик 296
 Диод германиевый силовой 353
 — — полупроводниковый 176
 — — электронный 350
 — — — — прямого накала 350
 — — — — с подогревным катодом 350
 Диполь магнитный 184, 200
 — — электрический 18
 — — — — в неоднородном поле 71
 — — — — однородном поле 70
 Диполь электрический жесткий 70
 — — упругий 69
 Диполя электрического момент 18
 — — плечо 18
 Диэлектрик 8, 166
 Диэлектрическая восприимчивость 73
 — — — — проницаемость абсолютная 13
 — — — — относительная 11
 — — — — , связь с диэлектрической восприимчивостью 79
 Добротность колебательного контура 347
 Домен 81, 309
 Доиорные уровни 169
 Доноры 169
 Дорфмана опыты 314
 Дроссель 351
 Дуанты 252
 Дуга Петрова 152
 Дуговая печь 152
 Дырки 168
 Закон (см. также правило, принцип, теорема, уравнение, формула)
 — Ампера 186, 187, 197
 — Био — Савара — Лапласа 189, 197
 — Видемана — Франца 105
 — Вольты второй 121
 — — первый 121
 — Джоуля — Ленца 114
 — — — — для плотности тепловой мощности тока 104
 — Кулона 11
 — Ленца 265
 — Ома для замкнутой цепи 113
 — — — — плотности тока 103
 — — — — — в электролитах 138
 — — обобщенный для участка цепи 112
 — — — — — полного тока для магнитного поля в вакууме 211
 — — — — — в среде 305
 — — — — обобщенный 329
 — — — — сохранения электрического заряда 9
 — — — — — Фарадея для электролиза второй 133
 — — — — — первый 133
 — — — — — объединенный 133
 — — — — — электромагнитной индукции основной 266
 — — — — — Фарадея 265
 Запирающий слой 175
 Заряд индуктированный 51
 — — пробный 15
 — — точечный 10
 — — удельный 99, 245

- Заряд элементарный 137
 Заряды поляризационные 75, 76
 — свободные 76
 — связанные 76
 Зона валентная 164
 — гибридная 165
 — дырочной проводимости 170
 — заполненная 164
 — запрещенная 162
 — проводимости 164
 — разрешенная 162
- Изотопы 248**
 Индуктивность взаимная динамическая 284
 — — статическая 283
 — динамическая 279
 — статическая 277
 — , единицы 278
 Индукция электростатическая 51
 Интенсивность намагничивания (намагниченность) 296
 Ион 134
 — , подвижность 138
 Ионизации интенсивность 142
 Ионизация ударная 142
 Иоффе опыт (элементарный заряд) 136
 — — (магнитное поле движущегося заряда) 181
 Источник электрической энергии 96
- Камерлинг — Оннеса опыты 315**
 Каналовые лучи 150
 Катион 134
 Катодное распыление 150
 — темное пространство 149
 Катодные лучи 150
 Кенотрон 350
 Колебательный контур 338
 — — , резонанс напряжений 346
 — — — , токов 349
 — — , резонансная кривая 345
 — — , резонансной кривой полуширина относительная 347
 — — , резонансная частота 345
 — — , добротность 347
 — — , сопротивление активное 344
 — — — волновое 341
 — — — емкостное 344
 — — — индуктивное 344
 — — — полное 344
 — — , частота собственная 365
 Коллектор 131, 360
 Конденсатор 59
 — плоский 59
 — сферический 61
 — цилиндрический 62
 Конденсаторов соединение 63
- Контактная разность потенциалов 120
 — — — внешняя 121
 — — — внутренняя 121
 Концентрация раствора эквивалентная 139
 Коэрцитивная сила 82, 311
 Коэффициент диссоциации 135
 — затухания электромагнитных колебаний в контуре 339
 — обратной связи 366
 — усиления 357
 — — статический электронного триода 356
 — — транзистора по напряжению 361
 — — — — току 361
 Кулон 13
- Лампа накаливания Лодыгина 115**
 Ланжевена функция классическая 298
 Линии магнитной индукции 183
- Магнетон Бора 302**
 Магнитная восприимчивость 306
 — индукция 182, 186
 — — , единицы 195, 196
 — — внутри тороида 213
 — — в центре кругового тока 198
 — — — — прямого витка с током 194
 — — на оси кругового тока 200
 — — — соленоида 202
 — — поля движущегося заряда 204
 — — — прямого проводника с током 193
 — постоянная 190
 — проницаемость абсолютная 190
 — — относительная 190
 — — — , связь с магнитной восприимчивостью 297, 306
 — цепь 215
 Магнитное насыщение парамагнетика 299
 — — ферромагнетика 308
 Магнитные материалы «мягкие» 311
 — — «твердые» 311
 Магнитный диполь 184, 200
 — момент атома орбитальный 292
 — — витка с током 199
 — — соленоида 202
 — — электрона орбитальный 291
 — — — собственный 301
 — поток 213
 — — , единицы 214
 — шунт 220
 Магнитодвижущая сила 218
 Магнитодиэлектрики 275
 Магнитомеханический эффект 300

- Магнитострикция 312
 Макроток 303
 Максвелл 214
 Мандельштам и Папалекси опыт 100
 Масс-спектрограф Астона 248
 Масс-спектрометр 250
 Милликена опыт 137
 Микрополе 332
 Микроток (молекулярные токи) 303
 Молекула, дипольный момент 68
 — неполярная 68
 — полярная 69
 Молизация 135
- Намагниченность 296
 — остаточная 310
 — самопроизвольная (спонтанная) 309
 Напряжение 111
 —, единица 111
 — зажигания в газоразрядной трубке 147
 — пробивное конденсатора 63
 Напряженность магнитного поля 191, 305
 — — —, единицы 196, 197
 — — — внутри тороида 213
 — — — в центре кругового тока 198
 — — — — — прямогоугольного витка с током 194
 — — — движущегося заряда 204
 — — — на оси кругового тока 200
 — — — — — соленоида 202
 — — — прямого проводника с током 193
 — электрического поля 15
 — электростатического поля длинного равномерно заряженного цилиндра 41
 — — — вблизи поверхности проводника 47
 — — — диполя 18—21
 — — — заряженной плоскости 40
 — — — двух параллельных плоскостей, заряженных разноименно 40
 — — — заряженной сферы 42
 — — — равномерно заряженной круглой пластинки 21—23
 — — — — — заряженного шара 43
 — — — — — цилиндра 41
 — — — точечного заряда 16
 — — —, единицы 16
 Носители заряда 46
- Ом 112
- Парамагнетизм электронного газа в металлах 303
- Парамагнетики 297
 Пентод 359
 —, антидинатронная сетка 359
 Плазма 153
 Плотность тепловой мощности тока 104
 — тока 97
 — —, единица 97
 — — смещения 327
 — электрических зарядов линейная 17
 — — — объемная 18
 — — — поверхностная 18
 Поверхность эквипотенциальная 38
 Позитрон 8
 Поле магнитное 179
 — —, вихревой характер 208
 — — критическое 317
 — — однородное 186
 — потенциальное 32
 — соленоидальное 214
 — сторонних сил 109
 — электрическое 15
 — — индуктированное 265
 — — однородное 23
 — электромагнитное 15, 322
 — электростатическое 15
 —, графическое изображение 23, 38
 Положительный столб 149
 Полупроводники 166
 — *p-n*-переход 174
 — проводимость дырочная 168
 — — примесная дырочная (*p*-типа) 170
 — — — электронная (*n*-типа) 169
 — — односторонняя 176
 — — собственная 167
 Полупроводниковый выпрямитель 352
 — диод 176
 — —, запирающий слой 176
 — триод (транзистор) 359
 — — плоскостный 362
 — — точечный 360
 Поляризации вектор 73
 Поляризационный ток 328
 Поляризация диэлектрика ионная 73
 — — ориентационная 72
 — — электронная 72
 — сегнетоэлектрика самопроизвольная (спонтанная) 81
 — — остаточная 82
 Поляризованность 73
 Потенциал заряженного проводника, измерение 52
 — ионизации 141
 — электростатического поля 34
 — — —, единицы 36
 — — —, измерение 53
 — — —, связь с напряженностью

- Потенциал электростатического поля
 двух параллельных плоскостей,
 заряженных разноименно 41
 — — — заряженной плоскости 40
 — — — равномерно заряженного
 шара 44
 — — — — цилиндра 42
 — — — — заряженной сферы 43
 Потенциальный барьер 155
 — ящик (яма) 155
 Поток напряженности электриче-
 ского поля 77
 — смещения 26, 77
 — электрической индукции 26
 Потокосцепление 235
 — взаимной индукции 235
 — самоиндукции 235
 Правило буравчика 184
 — Кирхгофа для магнитной цепи
 первое 218
 — — — — второе 219
 — — — — электрической цепи первое
 116
 — — — — — второе 116
 — левой руки 187
 Принцип автофазировки 255
 — Паули 156
 — суперпозиции полей 17, 189
 Пробой газа электрический 147
 Проводимость электрическая удель-
 ная 103
 Проводник 8, 165
 Протон 8
 Пьезоэлектрический эффект 82
 — — — поперечный обратный 84
 — — — прямой 83
 — — — продольный обратный 84
 — — — прямой 83

 Работа выхода 130
 — ионизации 141
 — перемещения в магнитном поле
 контура с током 235
 — — — — проводника с то-
 ком 233
 — сил электростатического поля 36
 Разряд газовый 144
 — — дуговой 152
 — — искровой 151
 — — коронный 150
 — — кистевой 151
 — — несамостоятельный 144
 — — самостоятельный 146
 — — тлеющий 149
 — конденсатора апериодический
 339
 Распределение электрических заря-
 дов на проводнике 48
 Резонанс напряжений 346
 — токов 349

 Резонансная кривая 345
 — — полуширина 347
 — — циклическая частота 345
 Рекомбинация ионов 135, 144
 Рекомбинационное свечение 147

 Сверхпроводимость 316
 Сегнетоэлектрики 80
 — , гистерезис 82
 — , поляризация спонтанная 81
 Сила взаимодействия параллельных
 проводников с током 195
 — — пластин заряженного конден-
 сатора 61
 — — соленоидов 232
 — — Лоренца 239
 — тока 96
 — — , единицы 97, 195, 196
 Силовые линии 23
 Силы сторонние 109
 Синхротрон 257
 Синхрофазотрон 258
 Система автоколебательная 363
 — единиц абсолютная Гаусса 197
 — — — электромагнитная (СГСМ)
 196
 — — — электростатическая (СГСЭ)
 12
 — — — Международная (СИ) 12, 195
 Скин-эффект 282
 Соленоид 200
 Сольватная оболочка 135
 Сопротивление активное 344
 — емкостное 344
 — индуктивное 344
 — магнитное 218
 — — , соединение параллельное
 219
 — — — последовательное 218
 — — — электрическое 111
 — — — , единица 112
 — — — удельное 108
 — — — , единицы 112
 — — — остаточное 315
 Спин электрона 301
 Столетова опыты 307
 Страты 150
 Стюарта и Толмена опыт 100

 Телесный угол 27
 Теорема Лармора 295
 — — Остроградского — Гаусса для
 магнитного поля 214
 — — — электростатического поля
 29, 77
 Теория Друде 101
 — — парамагнетизма Ланжевена 298
 — — сверхпроводимости микроскопи-
 ческая 319

- Теория сверхпроводимости термодинамическая 318
 — электромагнитного поля Максвелла 322
 — электронная Лоренца 106, 332
 Термобатарея 125
 Термопара 125
 Термостолбик 125
 Термоэлемент 125
 Термоэлектреты 79
 Термоэлектродвижущая сила 124
 Тесла 195
 Тетрод 358
 Ток электрический 95
 — — индукционный 263
 — — квазистационарный 337
 — — конвекционный 96
 — — насыщения 128, 146
 — — постоянный 96
 — — —, измерение 228—230
 — — проводимости 95
 — — пульсирующий 351
 — поляризационный 328
 — смещения 327
 — термоэлектронный 127
 Токи Фуко 275
 Торонд 211
 Точка Кюри 81, 311
 Транзистор (см. полупроводниковый триод)
 Трансформатор 284
 Трансформации коэффициент 285
 Триод электронный 354
 — — внутреннее сопротивление 355
 — — выходная емкость 357
 — — динамическая характеристика 357
 — — —, коэффициент усиления 357
 — — крутизна характеристики 355
 — — потенциал запирающий 354
 — — проницаемость лампы 356
 — — сеточный ток 355
 — — статическая характеристика анодная 355
 — — — — сеточная 354
 — — статический коэффициент усиления 356
 — — управляющая сетка 354
 Узел электрической цепи 116
 Уитстона мостик 119
 Уравнение Максвелла первое 323
 — — второе 329
 — — третье 331
 — — четвертое 331
 Ускоритель заряженных частиц линейный 251
 — — — — электростатический 251
 — — — — резонансный 251
 — — — — циклический 251
 Ускоритель заряженных частиц циклический, принцип автофазировки 255
 — — — —, с жесткой фокусировкой 258
 — — — —, метод встречных пучков 259
 Участок электрической цепи активный 112
 — — — — пассивный 112
 Фазотрон 256
 Фарада 57
 Фарадеево темное пространство 149
 Ферми уровень 157
 Ферриты 275
 Ферромагнетики 307
 Флюксметр 273
 Фононы 319
 Формула Богуславского — Ленгмюра 128
 — Гопкинсона 218
 — Лоренца 240
 — Ричардсона — Дешмена 128
 — Томсона 341
 Фотокатод 130
 — —, квантовый выход 130
 Фотозффект внешний 130
 Холла явление 241
 — константа 241
 Циклотрон 252
 Цилиндр Фарадея 50
 Циркуляция вектора напряженности магнитного поля 211, 329
 — — — — электрического поля 323, 324
 — — — — электростатического поля 32
 Число Фарадея 133, 134
 Шунт 118
 — магнитный 220
 Эйнштейна и де-Гааза опыт 300
 Эйхенвальда опыт (магнитное поле конвекционного тока) 181
 — — (направление индукционного тока) 281
 — — (магнитное поле тока смещения) 329
 Эквипотенциальная поверхность 38
 Экраивание магнитного поля 221
 — — электрического поля 52
 Электреты 79
 Электризация трением 8
 — — через влияние 51
 Электрическая емкость 57, 59
 — индукция 25
 — постоянная 13

- Электрический ветер 49
Электрическое смещение 25
— —, измерение 54
— — поля вблизи поверхности заряженного проводника 47
— — — заряженной плоскости 39
— — — двух параллельных плоскостей, заряженных разноименно 40
— — — равномерно заряженной сферы 42
— — — — заряженного цилиндра 41
— — — — шара 43
— — — точечного заряда 25
Электродвижущая сила 111
— —, единица 111
— — индукции 265, 266
Электродинамика 95
Электродинамическая постоянная 197
Електроемкость взаимная 59
— конденсатора плоского 60
— — сферического 61
— — цилиндрического 62
— конденсаторов, соединенных параллельно 63
— — — последовательно 64
— — — — — единичного проводника 57
— — шара 57
— —, единицы 57, 58
Электролиз 133
Электролит 133
Электролитическая диссоциация 134
— —, коэффициент 135
Электромагнитные колебания в контуре вынужденные 342
— — — — — затухающие 338
— — — — — незатухающие 340
— — — — — свободные 340
— — — — — модулированные 367
— — —, частота модулирующая 367
— — — — — несущая 367
Электрометр 48
— абсолютный 64
— струнный 64
Электрон 8
—, заряд 137
—, удельный 247
—, масса 272
—, магнитный момент орбитальный 291
—, — — — собственный 301
—, — — — спин 301
Электронвольт 36
Электронная лампа (см. диод, триод, тетрод, пентод)
- Электронный газ 101
— —, теплоемкость 107, 159
— луч 128
Электронный осциллограф 129
— умножитель 131
Электронные проводимости 46
Электростатика 8
Электростатическая защита 52
— индукция 51
Электрострикция 12
Электрохимический эквивалент 133
Эмиссия автоэлектронная (холодная) 130
— термоэлектронная 126
— фотоэлектронная 130
— электронная вторичная 131
— — —, коэффициент 131
Эмиттер 131, 360
Энергии объемная плотность, магнитного поля 287
— — — намагниченной среды 306
— — — поляризованного диэлектрика 92
— — — электрического поля 90
Энергия активации собственной проводимости полупроводника 167
— заряженного конденсатора 88
— — — — — единичного проводника 88
— системы зарядов 88—89
— магнитного поля 287, 288
— собственная тока в контуре 287
— токов взаимная 289
— электрического поля 90
Энергетические зоны 162
— уровни 156
Эрстед 197
Эрстеда опыт 180
Эффект Баркгаузена 310
— —, метод обнаружения Аркадьева 310
— динаatronный 358
— изотопический 317
— магнитомеханический 300
— парамагнитный аномальный 302
— Пельтье 126
— — в полупроводниках 177
— поверхностный (скин-эффект) 282
— пьезоэлектрический 82
- Явление взаимной индукции 283
— резонанса в электрической цепи 345
— самоиндукции 279
— сверхпроводимости 316
— Холла 241
— электромагнитной индукции 265

**Андрей Антонович Деглаф,
Борис Михайлович Яворский,
Лидия Брониславовна Милковская**

КУРС ФИЗИКИ

(В ТРЕХ ТОМАХ)

Т о м II

Электричество и магнетизм

**Редактор Е. С. Гридасова
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор Т. А. Новикова
Корректор Г. И. Кострякова**

ИБ № 621

**Сдано в набор 18/1-77 г. Подп. к печати 5/VII-77 г. Формат 60×90¹/₁₆. Бум.
тип. № 2 Объем 23,5 печ. л. Усл. п. л. 23,5 Уч.-изд. л. 23,04. Изд. № ФМ—594.
Тираж 70 000 экз. Цена 85 коп.**

**План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1977 г. Позиция № 39
Издательство «Высшая школа»
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14**

Заказ № 91. Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97,