Ж. ДИКСМЬЕ

C^*-алгебры и их представления

Перевод с французского
А. И. ШТЕРНА

Под редакцией
А. А. КИРИЛЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1974

517.2
Д 48
УДК 517

LES C^*-ALGÈBRES ET LEURS REPRÉSENTATIONS

Par Jacques DIXMIER
Professeur a la Faculté des Sciences de Paris

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS
GAUTHIER — VILLARS ÉDITEUR
1969

C^*-алгебры и их представления, Ж. Диксмье, перев. с франц., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1974 г.

В книге излагаются основы теории алгебр операторов в гильбертовом пространстве и рассматриваются приложения этой теории к изучению представлений групп; в качестве добавления приведена сводка результатов предыдущей монографии того же автора о теории алгебр фон Неймана. Книга рассчитана на студентов, аспирантов и научных работников в области математики и физики.

Д $\frac{20203-109}{053(02)-74}$ 43-74

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИМЕНЕНИЯ К ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ ГРУПП

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория C^*-алгебр, которой посвящена книга Ж. Диксмье, — это наиболее развитая и богатая приложениями часть теории нормированных колец. Она давно уже стала привычным аппаратом не только для математиков различных специальностей, но и для физиков-теоретиков. Современное изложение квантовой механики, теории поля, статистической физики немыслимо без свободного владения теорией C^*-алгебр и их представлений.

В последние 10—15 лет в этой теории получены новые сильные результаты. Самым важным из них, на мой взгляд, является теорема о совпадении трех классов C^*-алгебр, выделенных в разное время разными авторами: 1) алгебры типа I в смысле фон Неймана — Диксмье; 2) GCR-алгебры в смысле Капланского; 3) алгебры с гладким двойственным объектом в смысле Макки.

Этот результат был получен совместными усилиями целого ряда математиков. Наиболее существенный вклад был сделан Ж. Диксмье, Дж. Феллом, Дж. Глиммом, И. Капланским и Ш. Сакаи. Подробное и систематическое изложение теории операторных алгебр, включающее этот результат, имеется только в книге Диксмье. Кроме того, здесь впервые дается достаточно детальное изложение ряда других вопросов (некоммутативный аналог теоремы Стоуна — Вейерштрасса, структурная теория C^*-алгебр, некоторые приложения к теории представлений групп).

Несомненным достоинством книги является обширная библиография, содержащая практически все интересные работы по теории операторных алгебр до 1969 г. Кроме того, в приложении к книге перечислены все существенные результаты предыдущей монографии автора «Алгебры операторов в гильбертовом пространстве (алгебры фон Неймана)». Это избавляет читателя от необходимости пользоваться другими источниками и делает книгу своеобразной «энциклопедией теории операторных алгебр».

Следует отметить также продуманное построение книги, чрезвычайно четкий и ясный стиль автора.

К сожалению, в книгу не вошли некоторые последние достижения теории операторных алгебр. В частности, в ней отсутствует модулярная теория Томита и геометрическая теория состояний. В русский перевод добавлены ссылки на соответствующую литературу.

Перевод книги осуществлен со второго французского издания. Мы не пытались дать в переводе столь же подробную библиографию за 1970—1974 годы, какая приведена автором до 1969 г. Помимо большой работы это потребовало бы и дополнительного объема: число работ по операторным алгебрам за последнее десятилетие перевалило за тысячу. Мы ограничились лишь указанием небольшого числа наиболее важных (и наиболее близких переводчику и редактору) работ.

А. А. Кириллов

Марку, Эдит и Франсуазе

ВВЕДЕНИЕ

Пусть H — гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(H)$ — множество непрерывных линейных операторов в H. Рассмотрим подмножество A в $\mathfrak{B}(H)$, сохраняющееся при сложении, умножении, умножении на скаляры и сопряжении; предположим, что A замкнуто в смысле нормы оператора. Тогда A — инволютивная банахова алгебра специального типа. Такая алгебра называется *C^*-алгеброй.*

Теория этих алгебр началась в 1943 году, когда Гельфанд и Наймарк показали, что C^*-алгебры могут быть выделены среди инволютивных банаховых алгебр с помощью простых аксиом. Позже было замечено, что C^*-алгебры играют универсальную роль в изучении представлений гораздо более широкого класса инволютивных банаховых алгебр; для любой алгебры B из этого класса можно построить такую C^*-алгебру A, что представления B в гильбертовом пространстве отождествляются с представлениями A. Во многих вопросах (особенно тех, в которых участвуют идеалы) A более удобна, чем B. В частности, эта конструкция применима, если в качестве B взять алгебру интегрируемых функций на локально компактной группе G. Тогда изучение унитарных представлений G сводится к изучению представлений некоторой C^*-алгебры, называемой *C^*-алгеброй группы* G.

Изучение C^*-алгебр занимает почти четыре пятых этой книги. Излагаются основные результаты, полученные главным образом в работах Глимма, Кадисона, Капланского, Макки, Сигала, Фелла и других. Мне казалось ошибкой не использовать собранный таким образом материал и материал, содержащийся в моей книге об алгебрах фон Неймана (Cahiers Scientifiques, fasc. XXV, цитируется как [AvN]), и не сказать несколько слов об унитарных представлениях групп. Это тем более важно, что теория групп приводит к наиболее интересным примерам C^*-алгебр. Но последние страницы книги ни в какой мере не составляют трактата о представлениях групп. Чтобы составить себе понятие о вопросах, которые должны быть рассмотрены в таком трактате, читатель может обратиться к лекциям Макки: «Бесконечномерные представления групп» (Bull. Amer.

Math. Soc. **69** (1963), стр. 629—686). Из шестидесяти страниц этих лекций лишь первые двенадцать касаются вопросов, разбираемых в этой книге. Кроме того, Гельфанд и русская школа, с одной стороны, и Хариш-Чандра с другой, практически не цитируются здесь; это показывает, до какой степени мое изложение неполно в том, что касается групп.

Несмотря на то, что алгебры фон Неймана являются примерами C^*-алгебр, на самом деле теория C^*-алгебр опирается на теорию алгебр фон Неймана, что будет заметно во многих случаях. Чтобы избежать постоянных ссылок на [AvN], в приложении A собраны необходимые результаты об алгебрах фон Неймана. Признаюсь, что я использовал это приложение, чтобы переформулировать некоторые утверждения для более простого применения их. Почти всегда эта переформулировка очень проста; в исключительных случаях, где требуется некоторая работа, указано доказательство.

С другой стороны, результаты различной природы, используемые в тексте, собраны в приложении B. Это приложение, как и следовало ожидать, весьма хаотично.

При написании [AvN] мне казалось, что большая часть излагаемых теорем имеет почти окончательную форму. Напротив, теория C^*-алгебр кажется мне далеко не достигшей устойчивого состояния.

* * *

Каждый параграф заканчивается дополнениями, данными без доказательства или с эскизом доказательства. Некоторые из этих дополнений просты и могут служить упражнениями, но было бы затруднительно четко отделить их от остальных; я удовлетворился указанием (звездочкой) тех из дополнений, доказательство которых достаточно длинно (например, больше трех страниц). Я охотно признаю, что был не слишком пунктуален при этом делении. Дополнения не используются в последующих параграфах.

Библиография содержит все самое существенное из того, что касается C^*-алгебр. Напротив, она очень неполна в отношении групп.

Как и у читателя [AvN], у читателя настоящей книги предполагается хорошее знакомство с общей топологией, топологическими векторными пространствами и интегрированием. Доказательства, касающиеся C^*-алгебр, излагаются достаточно подробно; доказательства, касающиеся групп, более сжаты и предполают, что читатель знаком со свойствами свертки. С другой стороны, предполагается, что читателю известна теория коммутативных локально компактных групп; хотя она, вообще говоря, не используется (кроме нескольких исключительных частных вопросов), но ссылки на коммутативный случай поясняют многие изучаемые задачи.

Результаты нумеруются лексикографически. Ссылка вроде 4.7.5 понятна сама по себе. Ссылки вида A8, B15 относятся к приложениям A и B.

* * *

Несколько слов в конце об отношении этой книги к книгам Наймарка и Риккарта. Трактаты Наймарка и Риккарта содержат (среди других разделов) общую теорию нормированных алгебр, которой нет в этой книге. Напротив, моя книга более подробна в гораздо более специальных вопросах о C^*-алгебрах. Естественно ожидать совпадения некоторых рассуждений во всех трех книгах, но они сравнительно редки. Используемые в настоящей книге общие результаты о нормированных алгебрах немногочисленны; они приведены в приложении B.

C^*-АЛГЕБРЫ

§ 1. ИНВОЛЮТИВНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ

1.1. Инволютивные алгебры.

1.1.1. Определение. *Пусть A — алгебра над полем $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел. Инволюцией в A называется такое отображение $x \to x^*$ алгебры A в A, что*

(i) $(x^*)^* = x$,

(ii) $(x + y)^* = x^* + y^*$,

(iii) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$,

(iv) $(xy^*) = y^* x^*$

для любых $x, y \in A$ и $\lambda \in \boldsymbol{C}$. Алгебра над $\boldsymbol{C}$, снабженная инволюцией, называется инволютивной алгеброй.

Элемент x^* часто называют *сопряженным* к x. Подмножество A, сохраняющееся при инволюции, называется *самосопряженным.*

Из свойства (i) следует, что инволюция в A необходимо является биекцией A на A.

1.1.2. Примеры.

(1) На $A = \boldsymbol{C}$ отображение $z \to \bar{z}$ (комплексное число, сопряженное к z) есть инволюция, превращающая $\boldsymbol{C}$ в коммутативную инволютивную алгебру.

(2) Пусть X—локально компактное пространство, A—алгебра непрерывных комплексных функций на X, стремящихся к нулю на бесконечности. Снабжая A отображением $f \to \bar{f}$, получаем коммутативную инволютивную алгебру. Если X сводится к одной точке, мы возвращаемся к примеру (1).

(3) Пусть H — гильбертово пространство, $A = \mathfrak{B}(H)$ — алгебра непрерывных эндоморфизмов H. Снабжая A обычной операцией сопряжения, получаем инволютивную алгебру. Примеры (2) и (3) играют основную роль. (Во всей книге «гильбертово пространство» означает «комплексное гильбертово пространство».)

(4) Пусть G — локально компактная унимодулярная группа, A — алгебра $L^1(G)$ (относительно свертки). Для любого $f \in L^1(G)$ положим $f^*(s) = \overline{f(s^{-1})}$ $(s \in G)$. Снабжая A отображением $f \to f^*$, получаем инволютивную алгебру.

1.1.3. Введем терминологию, подсказываемую примером (3). Пусть A — инволютивная алгебра. Элемент $x \in A$ называется *эрмитовым*, если $x^* = x$, *нормальным*, если $xx^* = x^*x$. Идемпотентный эрмитов элемент[1]) называется *проектором*. Каждый эрмитов элемент нормален. Множество эрмитовых элементов есть вещественное векторное подпространство A. Если x и y эрмитовы, то $(xy)^* = y^*x^* = yx$; следовательно, xy эрмитов, если x и y перестановочны. Для каждого $x \in A$ элементы xx^* и x^*x эрмитовы [но, вообще говоря, эрмитов элемент не всегда представим в этом виде, как показывает пример (1)].

1.1.4. Каждый $x \in A$ записывается единственным образом в виде $x_1 + ix_2$, с эрмитовыми x_1, x_2. [В примере (1) это — разложение комплексного числа на вещественную и мнимую части.] Действительно, если мы положим

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*), \quad x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*),$$

то x_1 и x_2 эрмитовы, и имеем $x = x_1 + ix_2$. Обратно, если $x = x_1 + ix_2$ с эрмитовыми x_1 и x_2, то $x^* = x_1 - ix_2$, поэтому

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*), \quad x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*),$$

что доказывает наше утверждение. Заметим, что

$$xx^* = x_1^2 + x_2^2 + i(x_2x_1 - x_1x_2),$$
$$x^*x = x_1^2 + x_2^2 - i(x_2x_1 - x_1x_2),$$

так что x нормален тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 перестановочны.

1.1.5. Если A имеет левый единичный элемент 1, то для каждого $x \in A$

$$x \cdot 1^* = (1 \cdot x^*)^* = x^{**} = x,$$

поэтому 1^* — правый единичный элемент; следовательно, $1 = 1^*$ есть единичный элемент A. Если x — обратимый элемент A, то

$$(x^{-1})^* x^* = (xx^{-1})^* = 1^* = 1, \quad x^*(x^{-1})^* = (x^{-1}x)^* = 1^* = 1,$$

поэтому x^* обратим и $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$; обратно, если x^* обратим, то элемент $x^{**} = x$ обратим. Так как $(x - \lambda \cdot 1)^* = x^* - \bar{\lambda} \cdot 1$ для любого $\lambda \in \boldsymbol{C}$, то имеем

$$\mathrm{Sp}_A x^* = \overline{\mathrm{Sp}_A x}.$$

---

[1]) Элемент алгебры называется идемпотентным, если все его (натуральные) степени совпадают. — *Прим. ред.*

(В любой алгебре B с единичным элементом назовем *спектром элемента* x и обозначим через $\mathrm{Sp}_B\, x$ или $\mathrm{Sp}\, x$ множество таких скаляров λ, что $x-\lambda\cdot 1$ необратим.)

Элемент $x\in A$ называется *унитарным*, если $xx^*=x^*x=1$, иначе говоря, если x обратим и $x=x^{*-1}$. [В примере (1) унитарные элементы суть комплексные числа с модулем 1.] Унитарные элементы A образуют группу по умножению — унитарную группу A; действительно, если x и y — унитарные элементы A, то

$$(xy)^{*-1}=(y^*x^*)^{-1}=x^{*-1}y^{*-1}=xy,$$

поэтому xy унитарен, и так как $(x^{-1})^{*-1}=\left(x^{*-1}\right)^{-1}=x^{-1}$, то x^{-1} унитарен.

1.1.6. Пусть A — инволютивная алгебра. Если $\tilde{A}$ — алгебра, получаемая из A присоединением единичного элемента, то, как легко видеть, на $\tilde{A}$ существует единственная инволюция, продолжающая инволюцию на A; она определяется по правилу $(\lambda, x)^*=(\bar{\lambda}, x^*)$ для $\lambda\in \boldsymbol{C}$, $x\in A$. Для любого $x\in A$ имеем

$$\mathrm{Sp}'_A\, x^*=\overline{\mathrm{Sp}'_A\, x}.$$

(Если B — алгебра, имеющая или не имеющая единичный элемент, то $\mathrm{Sp}'_B\, x$ или $\mathrm{Sp}'\, x$ обозначает множество $\mathrm{Sp}_{\tilde{B}}\, x$, где $\tilde{B}$ — алгебра, получаемая из B присоединением единичного элемента. Для всякого $x\in B$ имеем $0\in \mathrm{Sp}'_B\, x$.)

1.1.7. Пусть A и B — две инволютивные алгебры. Назовем *морфизмом* (соотв. *изоморфизмом*) A в B такое отображение (соотв. биективное отображение) φ множества A в B, что $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$, $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$, $\varphi(x^*)=\varphi(x)^*$ для любых $x, y\in A$, $\lambda\in\boldsymbol{C}$. В частности, φ есть морфизм алгебры A в алгебру B. Если появится опасность путаницы, будем уточнять: «морфизм по отношению к структуре инволютивной алгебры» или «морфизм по отношению к структуре алгебры».

1.1.8. Пусть A — инволютивная алгебра. Назовем *инволютивной подалгеброй* A подалгебру A, переходящую в себя при инволюции. Любое пересечение инволютивных подалгебр есть инволютивная подалгебра; следовательно, если M — подмножество A, то существует наименьшая инволютивная подалгебра в A, содержащая M; она называется инволютивной подалгеброй A, порожденной M; это — множество линейных комбинаций элементов вида $x_1x_2\ldots x_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n\in M\cup M^*$. Если M состоит из одного элемента x, то эта подалгебра коммутативна тогда и только тогда, когда x нормален.

Пусть A — инволютивная алгебра, B — самосопряженный двусторонний идеал алгебры A. Инволюция в A определяет при факторизации инволюцию в алгебре A/B, и каноническое отображение A на A/B есть морфизм.

Всякое произведение инволютивных алгебр есть очевидным образом инволютивная алгебра.

Алгебра, противоположная инволютивной алгебре[1]), снабженная той же инволюцией, есть инволютивная алгебра.

1.1.9. Пусть A — инволютивная алгебра, M — самосопряженная часть A. Тогда коммутант M' множества M в A есть инволютивная подалгебра A. Следовательно, бикоммутант M'' множества M в A есть инволютивная подалгебра A, содержащая M; она, вообще говоря, отличается от инволютивной подалгебры A, порождённой M (например, если A коммутативна). Если элементы M попарно перестановочны, то $M \subset M'$, поэтому $M' \supset M''$ и M'' коммутативна. Пусть $x \in A$ и $M = \{x, x^*\}$; тогда M'' коммутативна в том и только в том случае, когда x нормален.

1.1.10. Пусть A — инволютивная алгебра. Если f — линейная форма на A, то функция $x \to \overline{f(x^*)}$ на A есть линейная форма, которая обозначается f^* и называется *сопряженной* к f. Имеем $f^{**} = f$, $(f + f')^* = f^* + f'^*$, $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$ для $\lambda \in \boldsymbol{C}$. Если $f = f^*$, то f называется эрмитовой. Любая линейная форма f на A записывается единственным образом в виде $f_1 + if_2$ с эрмитовыми f_1, f_2; имеем

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + f^*), \quad f_2 = \frac{1}{2i}(f - f^*).$$

Для того чтобы линейная форма f на A была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы она была вещественной на множестве A_h эрмитовых элементов A. Отображение $f \to f \mid A_h$ есть изоморфизм вещественного векторного пространства эрмитовых форм на векторное пространство, сопряженное к вещественному векторному пространству A_h. Если A коммутативна и если χ — характер[2]) A, то χ^* — характер A.

Библиография: [10], [110].

1.2. Инволютивные нормированные алгебры.

1.2.1. Определение. *Инволютивной нормированной алгеброй называется нормированная алгебра A, снабженная*

---

[1]) Если A — алгебра, то противоположная алгебра A^0 совпадает с A, как линейное пространство, а произведение элементов x и y в A^0 совпадает с произведением элементов y и x в A (ср. ниже п. 1.3.3). — *Прим. ред.*

[2]) Линейный функционал на коммутативной алгебре A называется *характером*, если он мультипликативен (т. е. является морфизмом алгебры A в алгебру $\boldsymbol{C}$). — *Прим. ред.*

такой инволюцией $x \to x^*$, *что* $\|x^*\| = \|x\|$ *для каждого* $x \in A$. *Если, кроме того, A полна, то A называется инволютивной банаховой алгеброй.*

1.2.2. Примеры. Четыре примера 1.1.2 становятся примерами инволютивных банаховых алгебр, если определить норму следующим образом: в примере (1) положим $\|z\| = |z|$ для каждого $z \in \boldsymbol{C}$; в примере (2) положим $\|f\| = \sup\limits_{t \in X} |f(t)|$ для каждой $f \in A$; в примере (3) возьмем обычную норму в $\mathfrak{B}(H)$; в примере (4) введем $\|f\| = \int\limits_G |f(g)|\,dg$ для каждой $f \in L^1(G)$.

1.2.3. Пусть A — инволютивная нормированная алгебра, $\tilde{A}$ — инволютивная алгебра, получаемая из A присоединением единичного элемента. На $\tilde{A}$ существует норма, продолжающая норму на A и превращающая $\tilde{A}$ в инволютивную нормированную алгебру (например, можно положить $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$ для $\lambda \in \boldsymbol{C}$, $x \in A$). Каждая инволютивная нормированная алгебра, возникающая таким образом, называется инволютивной нормированной алгеброй, получаемой из A присоединением единичного элемента.

1.2.4. Пусть A и B — инволютивные нормированные алгебры. *Морфизмом A в B* называется просто морфизм A в B как инволютивных алгебр (без какого-либо условия на нормы). Напротив, *изоморфизмом* называется изоморфизм A и B как инволютивных алгебр, сохраняющий нормы.

1.2.5. Пусть A — инволютивная нормированная алгебра. Замыкание инволютивной подалгебры есть инволютивная подалгебра. Если $M \subset A$, то наименьшая замкнутая инволютивная подалгебра $B \subset A$, содержащая M, называется *замкнутой инволютивной подалгеброй*, порожденной M; она является замыканием инволютивной подалгебры, порожденной M. Если M состоит из одного нормального элемента, то B коммутативна.

Фактор-алгебра инволютивной нормированной алгебры по самосопряжённому замкнутому двустороннему идеалу, противоположная к инволютивной нормированной алгебре, произведечие конечного числа инволютивных нормированных алгебр, пополнение инволютивной нормированной алгебры суть естественным образом инволютивные нормированные алгебры.

1.2.6. Пусть A — инволютивная нормированная алгебра. Если f — непрерывная линейная форма на A, то f^* непрерывна и $\|f^*\| = \|f\|$, ибо единичный шар A самосопряжен. Множество A_h эрмитовых элементов A есть вещественное нормированное векторное пространство. Пусть f — эрмитова непрерывная линейная форма на A и $g = f \mid A_h$. Имеем $\|f\| = \|g\|$; действительно, ясно, что $\|f\| \geqslant \|g\|$; с другой стороны, для каждого

$\varepsilon > 0$ существует $x \in A$ такой, что $\|x\| \leqslant 1$ и $|f(x)| \geqslant \|f\| - \varepsilon$; умножая x на скаляр с модулем 1, можем считать, что $f(x) \geqslant 0$; тогда

$$\left| g\left(\frac{1}{2}(x + x^*)\right)\right| = \frac{1}{2}|f(x) + f(x^*)| = f(x) \geqslant \|f\| - \varepsilon,$$

и так как $\|(1/2)(x + x^*)\| \leqslant 1$, то $\|g\| \geqslant \|f\| - \varepsilon$, откуда следует утверждение. Поэтому можно отождествить эрмитовы непрерывные линейные формы на A и вещественные непрерывные линейные формы на A_h.

Библиография: [10], [110].

1.3. C^*-алгебры.

1.3.1. Определение. *C^*-алгеброй называется такая инволютивная банахова алгебра A, что $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ для любого $x \in A$.*

1.3.2. Примеры (1), (2), (3) из 1.1.2, 1.2.2 суть примеры C^*-алгебр. Напротив, пример (4), вообще говоря, не является примером C^*-алгебры.

1.3.3. Если A — C^*-алгебра, то каждая замкнутая инволютивная подалгебра A есть C^*-алгебра. В частности, если H — гильбертово пространство, то каждая замкнутая инволютивная подалгебра $\mathfrak{B}(H)$ есть C^*-алгебра; мы увидим позже (2.6.1), что каждая C^*-алгебра изоморфна C^*-алгебре этого вида; кстати, из этого примера выросла теория C^*-алгебр.

Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — семейство C^*-алгебр. Пусть A — множество $(x_i)_{i \in I}$ таких, что $x_i \in A_i$ для каждого $i \in I$ и $\sup\limits_{i \in I} \|x_i\| < +\infty$. Очевидно, что A есть C^*-алгебра относительно операций

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \qquad \lambda(x_i) = (\lambda x_i),$$

$$(x_i)(y_i) = (x_i y_i), \qquad (x_i)^* = (x_i^*)$$

и нормы

$$\|(x_i)\| = \sup \|x_i\|;$$

A называется C^*-алгеброй-произведением A_i. Примем во внимание, что множество A не есть произведение множеств A_i.

Пусть A — C^*-алгебра. Сохраним операции и норму в A, за исключением умножения $(x, y) \to xy$, которое заменим умножением $(x, y) \to yx$. Иначе говоря, рассмотрим инволютивную нормированную алгебру A^0, противоположную A. Очевидно, что A^0 есть C^*-алгебра.

Вопрос о фактор-алгебрах C^*-алгебр более тонок (см. 1.8.2).

1.3.4. Пусть A — банахова алгебра, снабженная такой инволюцией, что

$$\|x\|^2 \leqslant \|x^*x\|.$$

Отсюда получаем $\|x\|^2 \leqslant \|x^*\| \cdot \|x\|$ и $\|x\| \leqslant \|x^*\|$; заменяя x на x^*, видим, что $\|x^*\| = \|x\|$. Тогда из условия следует, что

$$\|x\|^2 \leqslant \|x^* x\| \leqslant \|x\|^2,$$

поэтому A — C^*-алгебра.

1.3.5. Пусть A — C^*-алгебра. Для любого $x \in A$ имеем

$$\|x\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|xx'\|.$$

Действительно, ясно, что из $\|x'\| \leqslant 1$ следует $\|xx'\| \leqslant \|x\|$. Для доказательства неравенства $\|x\| \leqslant \sup\limits_{\|x'\| \leqslant 1} \|xx'\|$ можно предположить, что $\|x\| = 1$; тогда $\|x^*\| = 1$ и

$$\sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|xx'\| \geqslant \|xx^*\| = \|x\|^2 = 1.$$

1.3.6. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом. Тогда

$$\|1\|^2 = \|1^* 1\| = \|1\|, \quad \text{поэтому} \quad \|1\| = 0 \quad \text{или} \quad 1.$$

Если $A \neq 0$, видим, что $\|1\| = 1$. Поэтому для любого унитарного элемента u из A имеем $\|u\| = \|u^* u\|^{1/2} = 1$, если $A \neq 0$.

1.3.7. Напомним, что в определении морфизмов инволютивных нормированных алгебр не требовалось никаких условий непрерывности. Мы сейчас увидим, что морфизмы C^*-алгебр автоматически непрерывны. Точнее:

Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, B — C^*-алгебра, π — морфизм A в B. Для любого $x \in A$ имеем $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$.*

Для любого эрмитова элемента y из B имеем $\|y^2\| = \|y^* y\| = \|y\|^2$, поэтому по индукции $\|y^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|y\|$. При $n \to \infty$ левая часть стремится к спектральному радиусу $\rho(y)$ элемента y (см. B1), поэтому

$$\rho(y) = \|y\|. \tag{1}$$

Тогда для любого $x \in A$ имеем

$$\mathrm{Sp}'_B\, \pi(x) \subset \mathrm{Sp}'_A\, x, \quad \text{откуда} \quad \rho(\pi(x)) \leqslant \rho(x) \leqslant \|x\|,$$

поэтому, учитывая (1), получаем

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x^* x)\| = \rho(\pi(x^* x)) \leqslant \|x^* x\| \leqslant \|x^*\| \cdot \|x\| = \|x\|^2.$$

1.3.8. Следующее предложение позволяет почти всегда ограничиваться изучением C^*-алгебр с единичным элементом.

Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, $\tilde{A}$ — инволютивная алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента. На $\tilde{A}$ существует единственная норма, продолжающая норму на A и превращающая $\tilde{A}$ в C^*-алгебру.*

Единственность следует из 1.3.7. Докажем существование. Предположим сначала, что A обладает единичным элементом e, и обозначим через 1 единичный элемент $\tilde{A}$. Тогда A и $\boldsymbol{C}(1-e)$ суть два самосопряженных взаимно дополнительных двусторонних идеала в $\tilde{A}$, поэтому существует изоморфизм инволютивной алгебры $\tilde{A}$ на инволютивную алгебру $\boldsymbol{C}\times A$, который переводит A в $\{0\}\times A$; тогда можно снабдить $\boldsymbol{C}\times A$ структурой произведения C^*-алгебр. Предположим отныне, что A не обладает единичным элементом. Каждый элемент x из $\tilde{A}$ определяет оператор левого умножения L_x в двустороннем идеале A в $\tilde{A}$; положим $\|x\|=\|L_x\|$. Для $x\in A$ мы получаем исходную норму в A вследствие 1.3.5. С другой стороны, ясно, что $x\to\|x\|$ есть полунорма на $\tilde{A}$, и $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$. Эта полунорма является нормой, так как, предполагая, что $x=\lambda-x'$ ($\lambda\in\boldsymbol{C}$, $x'\in A$) — такой элемент из $\tilde{A}$, что $\|L_x\|=0$, т. е. $xy=0$ для любого $y\in A$, мы сейчас увидим, что $x=0$. Если $\lambda\neq 0$, то для каждого $y\in A$ имеем $0=\lambda^{-1}xy=y-\lambda^{-1}x'y$, т. е. $\lambda^{-1}x'$ есть правая единица в A и A имеет единичный элемент (1.1.5), в противоречие с предположением. Поэтому $\lambda=0$, т. е. $x\in A$ и $\|x\|=0$ влечет $x=0$; итак, $x\to\|x\|$ есть норма на $\tilde{A}$. Так как A полна и коразмерности 1 в $\tilde{A}$, то $\tilde{A}$ полна. Осталось показать (см. 1.3.4), что $\|x\|^2\leqslant\|x^*x\|$ для любого $x\in\tilde{A}$; достаточно сделать это для $\|x\|=1$. Для каждого $r<1$ существует такой $y\in A$, что $\|y\|\leqslant 1$ и $\|xy\|^2\geqslant r$; тогда, так как $xy\in A$,

$$\|x^*x\|\geqslant\|y^*(x^*x)y\|=\|(xy^*)(xy)\|=\|xy\|^2\geqslant r;$$

следовательно, $\|x^*x\|\geqslant 1$.

1.3.9. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра.*

(i) *Если h — эрмитов элемент A, то каждая точка из* $\operatorname{Sp}'h$ *вещественна.*

(ii) *Если A имеет единичный элемент и если u — унитарный элемент A, то каждая точка из* $\operatorname{Sp}u$ *имеет модуль* 1.

Вследствие 1.3.8 для доказательства обеих частей утверждения можно предположить, что A имеет единичный элемент (и $A\neq 0$). Вследствие 1.3.6 имеем $\|u\|=\|u^{-1}\|=1$, поэтому $\rho(u)\leqslant 1$, $\rho(u^{-1})\leqslant 1$, поэтому $\operatorname{Sp}u$ и $\operatorname{Sp}(u^{-1})=(\operatorname{Sp}u)^{-1}$ содержатся в единичном круге в $\boldsymbol{C}$, откуда следует (ii). С другой стороны,

$$(\exp(ih))^* = \left(1 + ih + \frac{i^2h^2}{2!} + \ldots\right)^* =$$
$$= 1 + (-i)h + \frac{(-i)^2h^2}{2!} + \ldots = \exp(-ih),$$

поэтому $\exp(ih)$ унитарен; следовательно, если $z \in \operatorname{Sp} h$, то $|\exp(iz)| = 1$ (B4), откуда $z \in \boldsymbol{R}$. (Во всей книге $\boldsymbol{R}$ обозначает множество вещественных чисел.)

1.3.10. Следующее предложение показывает, что в случае C^*-алгебр не нужно знать объемлющую алгебру, чтобы определить спектр элемента.

Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, B — под-C^*-алгебра, $x \in B$. Тогда:*

(i) $\operatorname{Sp}'_A x = \operatorname{Sp}'_B x$,

(ii) *если A обладает единичным элементом, принадлежащим B, то $\operatorname{Sp}_A x = \operatorname{Sp}_B x$.*

Присоединяя единичный элемент, видим, что (i) следует из (ii). Докажем (ii). Если x эрмитов, то $\operatorname{Sp}_B x \subset \boldsymbol{R}$ (1.3.9), поэтому $\operatorname{Sp}_B x = \operatorname{Sp}_A x$ (B2). В общем случае, если $x \in B$ обратим в A, то xx^* обратим в A, поэтому и в B согласно предыдущему; поэтому x обратим справа в B; точно так же получаем, что x обратим слева в B, поэтому обратим в B. Применяя этот результат к $x - \lambda \cdot 1$, где $\lambda \in \boldsymbol{C}$, получаем (ii).

C^*-алгебры называются в [10] вполне регулярными кольцами; многие авторы называют их B^*-алгебрами.

Библиография: [10], [107], [109], [110], [170].

1.4. Коммутативные C^*-алгебры.

1.4.1. Теория этих алгебр завершается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра, S — ее спектр (локально компактное пространство), B — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на S, стремящихся к нулю на бесконечности.*

(i) *Всякий характер A эрмитов.*

(ii) *Преобразование Гельфанда есть изоморфизм C^*-алгебры A на C^*-алгебру B.*

Пусть χ — характер A. Если y — эрмитов элемент A, то $\chi(y) \in \operatorname{Sp}' y \subset \boldsymbol{R}$ (1.3.9). Если x — любой элемент A, то $x = x_1 + ix_2$, где x_1, x_2 — эрмитовы; тогда

$$\chi(x^*) = \chi(x_1 - ix_2) = \chi(x_1) - i\chi(x_2) = \overline{\chi(x)},$$

что доказывает (i).

Иначе говоря, если $\mathcal{F}$ — преобразование Гельфанда, то $\mathcal{F}(x^*) = \overline{\mathcal{F}(x)}$ для каждого $x \in A$. С другой стороны, $\mathcal{F}(A)$

отделяет точки S, и для каждой точки S существует функция из $\mathcal{F}(A)$, которая не равна нулю в этой точке (В3). Тогда, по теореме Стоуна — Вейерштрасса, $\mathcal{F}(A)$ плотна в B. Для завершения доказательства достаточно показать, что $\mathcal{F}$ изометрично. Но $\|\mathcal{F}(y)\| = \|y\|$ для эрмитового y [1.3.7, формула (1)], откуда для любого $x \in A$ имеем

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|\mathcal{F}(x^*x)\| = \|\overline{\mathcal{F}}(x)\mathcal{F}(x)\| = \|\mathcal{F}x\|^2.$$

1.4.2. Сохраним предыдущие обозначения. Если $f \in B$, то символ $g(f)$ имеет смысл для любой комплексной функции g, непрерывной на $f(S) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}' f$, равной нулю в нуле, и представляет собой элемент B. Следовательно, если $x \in A$, то можно определить $h(x) \in A$ для комплексной h, непрерывной на $\mathrm{Sp}' x$ и равной нулю в 0. Мы увидим в 1.5, что можно определить такое «функциональное исчисление» для нормальных элементов любой C^*-алгебры (не обязательно коммутативной). В дальнейшем оно будет очень удобным инструментом.

1.4.3. Предложение. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра с единичным элементом, S — ее спектр, $x \in A$. Предположим, что под-C^*-алгебра A, порожденная* 1 *и x, равна A. Тогда $\chi \to \chi(x)$ есть гомеоморфизм S на $\mathrm{Sp}_A x$.*

Это отображение непрерывно, и его образ есть $\mathrm{Sp}_A x$ (В3). С другой стороны, пусть χ, χ' таковы, что $\chi(x) = \chi'(x)$. Так как χ и χ' непрерывны и эрмитовы, то множество A' элементов $y \in A$ таких, что $\chi(y) = \chi'(y)$, есть под-C^*-алгебра в A, содержащая 1 и x. Поэтому $A' = A$ и $\chi' = \chi$. Рассматриваемое отображение инъективно, поэтому оно есть гомеоморфизм, так как S — компакт.

Библиография: [1], [10], [14], [110].

1.5. Функциональное исчисление в C^*-алгебрах.

1.5.1. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, x — нормальный элемент A, $S = \mathrm{Sp}_A x$, A' — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на S. Существует единственный морфизм φ из A' в A такой, что $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\iota) = x$, где ι обозначает функцию $z \to z$ на S. Это отображение изометрично. Его образ есть под-C^*-алгебра в A, порожденная* 1 *и x и поэтому состоящая из нормальных элементов.*

Полиномы от z и $\bar{z}$ всюду плотны в A', и всякий морфизм A' в A непрерывен (1.3.7), откуда следует единственность φ. Пусть B — коммутативная под-C^*-алгебра A, порожденная 1 и x, T — ее спектр, C — коммутативная C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на T, $\mathcal{F}_B$ — преобразование Гельфанда относительно B, которое есть изоморфизм B на C (1.4.1). Предложение 1.4.3 определяет гомеоморфизм T на $\mathrm{Sp}_B x = S$ (1.3.10), и тем самым — изоморфизм ψ: $A' \to C$, который переводит ι в $\mathcal{F}_B x$, ибо для каждого $\chi \in T$ имеем $(\mathcal{F}_B x)(\chi) = \chi(x) = \iota(\chi(x))$. Рассмотрим тогда изоморфизм — композицию

$$A' \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\mathcal{F}_B^{-1}} B.$$

Объединяя его с каноническим инъективным отображением B в A, получаем морфизм A' в A, имеющий требуемые в теореме свойства.

1.5.2. Определение. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом. Если x — нормальный элемент A и если f — непрерывная комплексная функция на $\mathrm{Sp}_A x$, то элемент $\varphi(f)$ из теоремы* 1.5.1 *обозначается $f(x)$.*

Тот факт, что φ есть изометрический изоморфизм, выражается следующими формулами, где f, g обозначают непрерывные комплексные функции на $\mathrm{Sp}_A x$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \tag{1}$$

$$(fg)(x) = f(x) g(x), \tag{2}$$

$$\bar{f}(x) = f(x)^*, \tag{3}$$

$$\| f(x) \| = \| f \|. \tag{4}$$

Если f есть ограничение полинома $z \to P(z, \bar{z})$ от z и $\bar{z}$ на $\mathrm{Sp}_A x$, то $f(x) = P(x, x^*)$, где символ $P(x, x^*)$ имеет обычный алгебраический смысл (напомним, что $xx^* = x^*x$).

В вышеприведенных обозначениях имеем

$$\mathrm{Sp}_A f(x) = \mathrm{Sp}_B f(x) = \mathrm{Sp}_{A'} f = f(S),$$

иначе говоря:

$$\mathrm{Sp}_A f(x) = f(\mathrm{Sp}_A x). \tag{5}$$

1.5.3. Предложение. *Пусть A и B — две C^*-алгебры с единичным элементом, φ — морфизм A в B, переводящий* 1 *в* 1, *x — нормальный элемент A, так что $\varphi(x)$ нормален в B. Пусть f — непрерывная комплексная функция на $\mathrm{Sp}_A x$. Если обозначить ограничение f на $\mathrm{Sp}_B \varphi(x)$ снова через f, то $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$.*

Пусть C — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $\mathrm{Sp}_A x$. Отображения $f \to \varphi(f(x))$ и $f \to f(\varphi(x))$ — морфизмы C в B, принимающие одинаковые значения, если f есть одна из функций $z \to 1$, $z \to z$, $z \to \bar{z}$. Так как под-C^*-алгебра C, порожденная этими функциями, равна C, то рассматриваемые морфизмы равны.

1.5.4. Следствие. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра с единичным элементом, x — элемент A, $\mathcal{F}$ — преобразование Гельфанда относительно A, f — непрерывная комплексная функция на $\mathrm{Sp}_A x$. Имеем $\mathcal{F}(f(x)) = f \circ \mathcal{F}(x)$.*

Это следует, например, из 1.5.3, примененного к $\varphi = \mathcal{F}$.

1.5.5. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, x — нормальный элемент A, C — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $\operatorname{Sp} x$, f — элемент C, C' — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $\operatorname{Sp} f(x) = f(\operatorname{Sp} x)$ и g — элемент C'. Тогда $g \circ f \in C$ и $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Отображение $g \to (g \circ f)(x)$ есть морфизм C' в A, который преобразует 1 в 1 и функцию $z \to z$ в $f(x)$. В силу теоремы единственности из 1.5.1 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

1.5.6. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, $x \in A$ — нормальный элемент, $S = \operatorname{Sp}'(x)$, A' — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на S, равных нулю в 0. Существует, и притом единственный, морфизм φ из A' в A такой, что $\varphi(\iota) = x$, где ι обозначает функцию $z \to z$ на S. Этот морфизм изометричен. Его образ есть под-C^*-алгебра A, порожденная x, состоящая, следовательно, из нормальных элементов.*

Так как полиномы от z и $\bar{z}$ без свободного члена всюду плотны в A', то единственность φ очевидна. Существование получаем из теоремы 1.5.1, присоединяя к A единичный элемент.

1.5.7. Посредством присоединения единичного элемента все результаты этого пункта переносятся, с очевидными изменениями, на случай C^*-алгебр без единичного элемента. Мы будем ссылаться на эти результаты и не предполагая существования единичного элемента.

В частности, пусть x — эрмитов элемент C^*-алгебры A. Его спектр веществен. Рассмотрим функции вещественного переменного

$$t \to f_1(t) = \sup(t, 0), \qquad t \to f_2(t) = \sup(-t, 0),$$
$$t \to f_3(t) = |t|.$$

Положим $x^+ = f_1(x)$, $x^- = f_2(x)$, $|x| = f_3(x)$. Это — эрмитовы элементы A (а также под-C^*-алгебры A, порожденной x), так как $\bar{f}_1 = f_1$, $\bar{f}_2 = f_2$, $\bar{f}_3 = f_3$. Так как f_1, f_2, f_3 имеют неотрицательные значения, то

$$\operatorname{Sp}(x^+) \geqslant 0, \qquad \operatorname{Sp}(x^-) \geqslant 0, \qquad \operatorname{Sp}(|x|) \geqslant 0. \tag{1}$$

Так как

$$f_1(t) - f_2(t) = t, \qquad f_1(t) + f_2(t) = f_3(t) \quad \text{и} \quad f_1(t) f_2(t) = 0,$$

то

$$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad x^+x^- = x^-x^+ = 0. \tag{2}$$

Норма $|x|$ равна норме x, нормы x^+ и x^- мажорируются нормой x. Заметим для п. 1.6.4, что x^+ и x^- являются квадратами двух эрмитовых элементов с нулевым произведением: достаточно рассмотреть функции $\sqrt{f_1}$ и $\sqrt{f_2}$.

1.5.8. Пусть A — C^*-алгебра. Для всякого целого $n>0$ имеем $A=A^n$ (множество линейных комбинаций произведений n элементов из A). Достаточно доказать, что любой эрмитов элемент x из A есть произведение n элементов A. Но если $f_1, \ldots, f_n$ — непрерывные вещественные функции вещественного переменного такие, что

$$f_1(t)f_2(t)\ldots f_n(t)=t, \qquad f_1(0)=\ldots=f_n(0)=0,$$

то

$$x=f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x).$$

Библиография: [1], [10], [110].

1.6. Положительные элементы в C^*-алгебрах.

1.6.1. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, x — эрмитов элемент из A. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathrm{Sp}'_A x \geqslant 0$;

(ii) *x имеет вид yy^* с $y \in A$;*

(iii) *x имеет вид h^2 с эрмитовым h в A.*

Кроме того, множество P элементов, которые удовлетворяют этим условиям, есть замкнутый выпуклый конус такой, что $P \cap (-P)=\{0\}$.

Для доказательства обозначим через P множество эрмитовых элементов A, удовлетворяющих условию (i).

(i) $\Rightarrow$ (iii): если $\mathrm{Sp}'_A x \geqslant 0$, то можно построить $h=x^{1/2}$, который является эрмитовым элементом в A, и отсюда имеем $x=h^2$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): если $x=h^2$ с h эрмитовым, то $\mathrm{Sp}'_A(x)=(\mathrm{Sp}'_A h)^2 \geqslant 0$, потому что $\mathrm{Sp}'_A h$ веществен.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): очевидно.

Чтобы доказать импликацию (ii) $\Rightarrow$ (iii) и закончить доказательство предложения, нам понадобятся следующие леммы.

1.6.2. Лемма. *Пусть A имеет единичный элемент. Если $x \in A$ — эрмитов и если $\|1-x\| \leqslant 1$, то $x \in P$. Если $x \in P$ и $\|x\| \leqslant 1$, то $\|1-x\| \leqslant 1$.*

Рассматривая под-C^*-алгебру A, порожденную x, мы приходим к случаю, когда A коммутативна; затем, благодаря 1.4.1, к случаю, когда A есть C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на компактном пространстве. Тогда лемма очевидна.

1.6.3. Лемма. *Предположим, что A имеет единичный элемент. Пусть x — эрмитов элемент из A. Для того чтобы $x \in P$, необходимо и достаточно, чтобы $\|(\|x\|\cdot 1)-x\| \leqslant \|x\|$.*

Можно предположить, что $x \neq 0$, следовательно, что $\|x\|=1$ (из подобия). Тогда лемма 1.6.3 сразу следует из леммы 1.6.2.

1.6.4. Вернемся к ситуации, изложенной в 1.6.1. Чтобы доказать, что P есть замкнутый выпуклый конус такой, что

$P \cap (-P) = \{0\}$, можно предположить благодаря 1.3.8, что A имеет единичный элемент. Из леммы 1.6.3 следует замкнутость P. Ясно, что из $x \in P$ и $\lambda \geqslant 0$ следует $\lambda x \in P$. Пусть x, $y \in P$, покажем, что $x+y \in P$. Можно предположить, что $\|x\| \leqslant 1$ и $\|y\| \leqslant 1$. Тогда $\|1-x\| \leqslant 1$ и $\|1-y\| \leqslant 1$ (1.6.2), поэтому

$$\left\|1-\frac{1}{2}(x+y)\right\| = \frac{1}{2}\|1-x+1-y\| \leqslant \frac{1}{2}(\|1-x\|+\|1-y\|) \leqslant 1,$$

следовательно, $(1/2)\,(x+y) \in P$ (1.6.2) и $x+y \in P$. Если $x \in P \cap (-P)$, то $\operatorname{Sp} x = \{0\}$, $\rho(x) = 0$; поэтому $x = 0$ [1.3.7, формула (1)].

Наконец, не предполагая, что A обладает единичным элементом, докажем импликацию (ii)$\Rightarrow$(iii) из 1.6.1. Пусть $y \in A$, $(yy^*)^+ = u^2$, $(yy^*)^- = v^2$, где u, v — такие эрмитовы элементы A, что $uv = 0$ (1.5.7). Тогда

$$(vy)(vy)^* = v(yy^*)v = vu^2v - v^4 = -v^4 \in -P,$$

потому что (iii)$\Rightarrow$(i). Пусть $vy = s + it$ с эрмитовыми s, t. Имеем

$$(vy)^*(vy) = -(vy)(vy)^* + (s+it)(s-it) + \\ + (s-it)(s+it) = -(vy)(vy)^* + 2s^2 + 2t^2 \in P,$$

так как $-(vy)(vy)^* \in P$, $s^2 \in P$, $t^2 \in P$ и P — выпуклый конус.

Поэтому $(vy)(vy)^* \in P$, так как в любой алгебре спектр произведения не зависит от порядка сомножителей (B26). Тогда $(vy)(vy)^* \in P \cap (-P) = \{0\}$. Таким образом, $v^4 = 0$, поэтому $v = 0$ и $yy^* = u^2$. Предложение 1.6.1 доказано.

1.6.5. Определение. *Пусть A — C^*-алгебра. Говорят, что элемент $x \in A$ положителен, и пишут $x \geqslant 0$, если он эрмитов и выполнены три эквивалентных условия из предложения* 1.6.1. *Обозначим через A^+ множество эрмитовых элементов A.*

Если B — под-C^*-алгебра A и $x \in B$, то условие $x \geqslant 0$ имеет, вследствие 1.3.10, один и тот же смысл и по отношению к A, и по отношению к B.

Так как A^+ — выпуклый конус и $A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$, то отношение $x - y \geqslant 0$ есть отношение порядка в A, согласованное со структурой вещественного векторного пространства в A; обозначим это отношение $x \geqslant y$ или $y \leqslant x$. Если z — эрмитов элемент A, то $z^+ \geqslant 0$, $z^- \geqslant 0$, $|z| \geqslant 0$, вследствие формулы (1) из 1.5.7; говорят, что z^+ (соотв. z^-) есть *положительная* (соотв. *отрицательная*) *часть* z. Согласно формуле (2) из 1.5.7 всякий эрмитов элемент A есть разность двух элементов из A^+.

1.6.6. Пусть A — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на локально компактном пространстве T, стремящихся к нулю на бесконечности, и $f \in A$. Отношение $f \geqslant 0$ на A имеет обычный смысл вследствие условия (i) предложения 1.6.1 и того факта, что $\mathrm{Sp}'_A f = f(T) \cup \{0\}$.

1.6.7. Пусть H — гильбертово пространство, A — C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)$ и x — элемент A. Покажем, что условие $x \geqslant 0$ эквивалентно условию $(x\xi \mid \xi) \geqslant 0$ для каждого $\xi \in H$ (иначе говоря, обычному определению положительных операторов). Если $x = y^*y$ с $y \in A$, то $(x\xi \mid \xi) = (y^*y\xi \mid \xi) = \| y\xi \|^2 \geqslant 0$ для всех $\xi \in H$. Обратно, предположим, что $(x\xi \mid \xi) \geqslant 0$ для каждого $\xi \in H$. Для всех $\eta \in H$ имеем

$$0 \leqslant (x(x^-\eta) \mid x^-\eta) = ((x^+ - x^-)(x^-\eta) \| x^-\eta) = \\ = -(x^-x^-\eta \mid x^-\eta) = -((x^-)^3\eta \mid \eta).$$

Так как $(x^-)^3 \geqslant 0$, то также $((x^-)^3\eta \mid \eta) \geqslant 0$, поэтому $((x^-)^3\eta \mid \eta) = 0$, следовательно, $(x^-)^3 = 0$, $x^- = 0$ и, наконец, $x = x^+ \geqslant 0$.

1.6.8. Пусть A — C^*-алгебра, a, b, x — элементы A. Если $a \leqslant b$, то $x^*ax \leqslant x^*bx$. Действительно, существует $y \in A$ такой, что $b - a = y^*y$, откуда

$$x^*bx - x^*ax = x^*(y^*y)x = (yx)^*(yx) \geqslant 0.$$

Предположим, что A обладает единичным элементом, и пусть b — такой элемент A, что $b \geqslant 1$ (так что b обратим). Применяя предыдущее рассуждение к $x = b^{-1/2}$, видим, что $1 \geqslant b^{-1}$. Вообще, пусть a и b — обратимые элементы A^+ такие, что $0 \leqslant a \leqslant b$; тогда $a^{-1} \geqslant b^{-1}$; действительно, по предыдущему, имеем последовательно

$$1 \leqslant a^{-1/2}ba^{-1/2}, \qquad 1 \geqslant a^{1/2}b^{-1}a^{1/2}, \qquad a^{-1} \geqslant b^{-1}.$$

1.6.9. Пусть A — C^*-алгебра, и $x, y \in A^+$ таковы, что $y \leqslant x$. Тогда $\| y \| \leqslant \| x \|$. Действительно, можно предположить, что A имеет единичный элемент. Имеем $x \leqslant \| x \| \cdot 1$, например, вследствие 1.4.1. Тогда $0 \leqslant y \leqslant \| x \| \cdot 1$, откуда $\| y \| \leqslant \| x \|$ снова вследствие 1.4.1.

1.6.10. Пусть A и B — две C^*-алгебры, φ — морфизм A в B. Ясно, что $\varphi(A^+) \subset \varphi(A) \cap B^+$. Обратно, пусть $y \in \varphi(A) \cap B^+$; существует такой $x \in A$, что $y = \varphi(x)$, и мы имеем $y = (y^*y)^{1/2} = \varphi((x^*x)^{1/2})$, поэтому $y \in \varphi(A^+)$. Следовательно, $\varphi(A^+) = \varphi(A) \cap B^+$.

Библиография: [10], [73], [110], [170], [179], [181].

1.7. Аппроксимативные единицы в C^*-алгебрах.

1.7.1. Пусть A — C^*-алгебра. Аппроксимативную единицу (u_λ) в A (B29) назовем *возрастающей*, если $u_\lambda \geqslant 0$ для всех λ и $u_\lambda \leqslant u_\mu$ при $\lambda \leqslant \mu$.

1.7.2. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал A, всюду плотный в A. Существует возрастающая аппроксимативная единица в A, состоящая из эле-*

ментов $\mathfrak{m}$. Если A сепарабельна, то можно, кроме того, потребовать, чтобы аппроксимативная единица была занумерована индексами $\{1, 2, \ldots\}$.

Пусть $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента. Пусть Λ — множество конечных частей $\mathfrak{m}$, упорядоченное по включению. Для $\lambda = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Lambda$ положим

$$v_n = x_1^* x_1 + \ldots + x_n^* x_n \in \mathfrak{m} \quad \text{и} \quad u_\lambda = v_\lambda \left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1}$$

(элемент u_λ вычисляется в $\tilde{A}$, но на самом деле $u_\lambda \in \mathfrak{m}$). Так как функция вещественного переменного $t \to t((1/n) + t)^{-1}$ при $t \geqslant 0$ заключена между 0 и 1, то $0 \leqslant u_\lambda \leqslant 1$. С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{n} [(u_\lambda - 1) x_i][(u_\lambda - 1) x_i]^* = (u_\lambda - 1) v_\lambda (u_\lambda - 1) = \\ = \frac{1}{n^2} v_\lambda \left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-2}.$$

Но функция вещественного переменного $t \to t((1/n) + t)^{-2}$ не превосходит $n/4$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} [(u_\lambda - 1) x_i][(u_\lambda - 1) x_i]^* \leqslant \frac{1}{4n}.$$

Для $i = 1, 2, \ldots, n$ отсюда следует, что

$$[(u_\lambda - 1) x_i][(u_\lambda - 1) x_i]^* \leqslant \frac{1}{4n},$$

откуда $\| (u_\lambda - 1) x_i \|^2 \leqslant (1/4n)$ (1.6.9). Поэтому $\| (u_\lambda - 1) x \| \to 0$ для каждого $x \in \mathfrak{m}$ и, вследствие этого, для каждого $x \in A$, так как $\bar{\mathfrak{m}} = A$ и $\| u_\lambda \| \leqslant 1$; поэтому

$$\| x u_\lambda - x \| = \| u_\lambda x^* - x^* \| \to 0.$$

Таким образом, (u_λ) есть аппроксимативная единица. Пусть λ, $\mu \in \Lambda$ и $\lambda \leqslant \mu$. Тогда $\lambda = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mu = \{x_1, \ldots, x_p\}$ и $p \geqslant n$, поэтому $v_\lambda \leqslant v_\mu$. Тогда $((1/n) + v_\lambda)^{-1} \geqslant ((1/n) + v_\mu)^{-1}$ вследствие 1.6.8. Для всякого вещественного числа $t \geqslant 0$ имеем

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} \geqslant \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + t\right)^{-1},$$

поэтому

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + v_\mu\right)^{-1} \geqslant \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + v_\mu\right)^{-1};$$

из этих неравенств следует, что

$$1-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+v_\lambda\right)^{-1}\leqslant 1-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+v_\mu\right)^{-1}\leqslant 1-\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}+v_\mu\right)^{-1},$$

т. е. $u_\lambda\leqslant u_\mu$. Аппроксимативная единица (u_λ) — возрастающая.

Предположим, что A сепарабельна. Существует последовательность $(y_1, y_2, \ldots)$, всюду плотная в m. Положим $u_n = u_{\{y_1, \ldots, y_n\}}$. Предыдущее рассуждение показывает, что для любого i $\|u_n y_i - y_i\|\to 0$ при $n\to\infty$. Так как $\|u_n\|\leqslant 1$, то $u_n x\to x$ для любого $x\in A$, и доказательство завершается, как выше.

1.7.3. Пусть A — C^*-алгебра, I — правый идеал в A. В $I\cap A^+$ существует такое семейство (u_λ) с направленным множеством индексов, что:

1° $\|u_\lambda\|\leqslant 1$;

2° $\lambda\leqslant\mu$ влечет $u_\lambda\leqslant u_\mu$;

3° Для всякого $x\in\bar{I}$ имеем $\|u_\lambda x - x\|\to 0$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.7.2.

Библиография: [49], [117].

1.8. Фактор C^*-алгебры.

1.8.1. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, B — инволютивная нормированная алгебра, φ — инъективный морфизм A в B. Тогда $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ для всякого $x\in A$.*

Пусть $x\in A$. Если мы покажем, что $\|\varphi(x^*x)\|\geqslant\|x^*x\|$, то отсюда получим

$$\|x\|^2=\|x^*x\|\leqslant\|\varphi(x^*x)\|=\|\varphi(x)^*\varphi(x)\|\leqslant\|\varphi(x)\|^2,$$

отсюда следует лемма. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что x эрмитов. Заменив φ его ограничением на под-C^*-алгебру A, порожденную x, можно предполагать, что A коммутативна. Заменив B на $\varphi(A)$, можем предполагать, что B коммутативна; заменим B его пополнением. Кроме того, можно присоединить к A и B единичные элементы. Таким образом, задача свелась к случаю, когда A и B коммутативны, полны, с единичными элементами. Пусть тогда S и T — спектры A и B, которые являются компактными пространствами. Для всякого $\chi\in T$ суперпозиция $\chi\circ\varphi$ есть характер A, т. е. элеменент S, который мы обозначим через $\varphi'(\chi)$; если $x\in A$, то $\varphi'(\chi)(x) = \chi(\varphi(x))$ есть непрерывная функция от χ, поэтому φ' есть непрерывное отображение T в S и $\varphi'(T)$ есть компактная часть S. Если $\varphi'(T)\neq S$, то существуют непрерывные комплексные функции f, g на S такие, что $fg=0$, $f\neq 0$, $g=1$ на $\varphi'(T)$. Согласно 1.4.1 f и g суть преобразования Гельфанда элементов x, y из

A таких, что $xy=0$, $x \neq 0$, $\chi(\varphi(y))=1$ для любого $\chi \in T$. Тогда $\varphi(y)$ обратим в B (B3), $\varphi(x)\varphi(y)=0$, $\varphi(x)\neq 0$, что невозможно, поэтому $\varphi'(T)=S$. Но тогда для каждого $x \in A$

$$\|x\| = \sup_{\zeta \in S} |\zeta(x)| = \sup_{\chi \in T} |\varphi'(\chi)(x)| = \sup_{\chi \in T} |\chi(\varphi(x))| \leqslant \|\varphi(x)\|.$$

1.8.2. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра. I — замкнутый двусторонний идеал в A. Тогда I самосопряжен и A/I, снабженная естественной структурой инволютивной алгебры и фактор-нормой, есть C^*-алгебра.*

Пусть (u_λ) — семейство, обладающее свойствами 1.7.3. Если $x \in I$, то

$$\|x^*u_\lambda - x^*\| = \|u_\lambda x - x\| \to 0$$

и $x^*u_\lambda \in I$, поэтому $x^* \in \bar{I} = I$ и $I = I^*$.

Мы знаем, что A/I есть инволютивная алгебра и что аксиомы банаховой алгебры выполняются. Обозначим через $x \to \dot{x}$ каноническое отображение A на A/I. Чтобы доказать, что A/I есть C^*-алгебра, достаточно показать, что $\|\dot{x}\|^2 \leqslant \|\dot{x}\dot{x}^*\|$ (1.3.4). Имеем

$$\|\dot{x}\| = \lim \|x - u_\lambda x\|. \tag{1}$$

Действительно, если $y \in I$, то $u_\lambda y - y \to 0$, поэтому

$$\overline{\lim}\|x - u_\lambda x\| = \overline{\lim}\|x - u_\lambda x + y - u_\lambda y\| =$$
$$= \overline{\lim}\|(1 - u_\lambda)(x+y)\| \leqslant \|x+y\|$$

(мы рассуждаем в $\tilde{A}$). Поэтому

$$\|\dot{x}\| \geqslant \overline{\lim}\|x - u_\lambda x\| \geqslant \underline{\lim}\|x - u_\lambda x\| \geqslant \inf_{y \in I}\|x+y\| = \|\dot{x}\|,$$

что доказывает (1). Отсюда для любого $z \in I$ имеем

$$\|\dot{x}\|^2 = \lim\|x - u_\lambda x\|^2 = \lim\|(x - u_\lambda x)(x - u_\lambda x)^*\| =$$
$$= \lim\|xx^* - u_\lambda xx^* - xx^*u_\lambda + u_\lambda xx^*u_\lambda\| =$$
$$= \lim\|xx^* + z - u_\lambda z - u_\lambda xx^* - xx^*u_\lambda - zu_\lambda + u_\lambda zu_\lambda + u_\lambda xx^*u_\lambda\| =$$
$$= \lim\|(1 - u_\lambda)(xx^* + z)(1 - u_\lambda)\| \leqslant \|xx^* + z\|,$$

поэтому $\|\dot{x}\|^2 \leqslant \|\dot{x}\dot{x}^*\|$.

1.8.3. Следствие. *Пусть A и B — C^*-алгебры, φ — морфизм A в B, I — ядро φ. Рассмотрим каноническое разложение φ:*

$$A \to A/I \xrightarrow{\psi} \varphi(A) \to B.$$

Тогда I замкнут в A, $\varphi(A)$ замкнут в B и ψ — изоморфизм (изометрический) C^*-алгебры A/I на C^*-алгебру $\varphi(A)$.

Так как φ непрерывен (1.3.7), то I замкнут, и A/I есть C^*-алгебра (1.8.2). Морфизм $A/I \to B$, получаемый из φ переходом к фактору, инъективен и изометричен (1.3.7 и 1.8.1). Поэтому $\varphi(A)$ полон и вследствие этого замкнут в B.

1.8.4. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, B — под-C^*-алгебра A, I — замкнутый двусторонний идеал в A. Тогда $B+I$ есть под-C^*-алгебра A и C^*-алгебры $(B+I)/I$ и $B/(B\cap I)$ канонически изоморфны.*

Пусть φ — канонический морфизм $A\to A/I$. Пусть ψ — ограничение φ на B. Тогда $\psi(B)=(B+I)/I$ замкнут в A/I (1.8.3), поэтому $B+I$ замкнут в A. Рассмотрим каноническое разложение ψ:

$$B\to B/(B\cap I)\to\psi(B)\to A/I.$$

Вследствие 1.8.3 морфизм $B/(B\cap I)\to\psi(B)=(B+I)/I$ есть изоморфизм C^*-алгебр.

1.8.5. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, J — замкнутый двусторонний идеал I. Тогда J — замкнутый двусторонний идеал A.*

Так как $J=J^3$ (1.5.7), то $AJA=AJ^3A\subset IJI\subset J$.

Библиография: [1], [10], [67], [110], [118].

Доказательства 1.8.2 и 1.7.3 были мне устно сообщены Ф. Комбом.

1.9. Дополнения.

1.9.1. Пусть A — C^*-алгебра. Сохраним норму и все операции в A, кроме $(\lambda, x)\to\lambda x$, которое заменим на $(\lambda, x)\to\bar{\lambda}x$. Получим C^*-алгебру $\bar{A}$, называемую *сопряженной к* A.

1.9.2. Пусть A — C^*-алгебра. Если $x\in A$ нормален, то $\|x\|=\rho(x)$ (использовать 1.4.1) [110].

1.9.3. Пусть A — C^*-алгебра.

a) Если любая максимальная коммутативная под-C^*-алгебра A имеет единичный элемент, то A имеет единичный элемент.

b) Если любая максимальная коммутативная под-C^*-алгебра A конечномерна, то A конечномерна [101].

1.9.4. Пусть A — C^*-алгебра. Если $x^2\geqslant y^2$ для любых $x\in A^+$, $y\in A^+$ таких, что $x\geqslant y$, то A коммутативна [102].

***1.9.5.** Пусть A — банахова алгебра с единичным элементом, снабженная такой инволюцией, что $\|x^*x\|=\|x^*\|\cdot\|x\|$ для любого $x\in A$. Тогда A есть C^*-алгебра [27], [105].

1.9.6. Проблема: пусть A — C^*-алгебра размерности >1 с единичным элементом, единственные замкнутые двусторонние идеалы которой суть 0 и A; имеет ли A проекторы, отличные от 0 и 1 [72]?

1.9.7. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, x — элемент из A, необратимый слева. Тогда x^*x необратим в под-

C^*-алгебре B, порожденной 1 и x^*x, поэтому существуют y_1, y_2, ..., $\in B$ такие, что $\|y_n\|=1$, $\|y_nx^*x\|\to 0$ (использовать 1.4.1).

Следовательно, если $x\in A$ необратим, то x — топологический делитель нуля [110].

1.9.8. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, N — множество нормальных элементов A, $x\in N$, V — окрестность нуля в $\mathbf{C}$. Существует окрестность U точки x в N такая, что для любого $y\in U$ имеем $\operatorname{Sp} y\subset \operatorname{Sp} x+V$, $\operatorname{Sp} x\subset \operatorname{Sp} y+V$ [110].

***1.9.9.** Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, H — гильбертово пространство, φ — линейное отображение A в $\mathfrak{B}(H)$ такое, что $\varphi(A^+)\in\mathfrak{B}(H)^+$. Тогда для каждого эрмитова элемента x в A имеем $\varphi(x^2)\geqslant\varphi(x)^2$ [59].

***1.9.10.** Пусть A и B — C^*-алгебры с единичными элементами.

a) Пусть ρ: $A\to B$ — биективное линейное отображение такое, что $\rho(x^*)=\rho(x)^*$ и $\rho(x^n)=\rho(x)^n$ для эрмитовых x и целых $n>0$. Тогда $\rho(A^+)=B^+$, ρ изометрично, ρ переводит перестановочные элементы в перестановочные, $\rho(1)=1$.

b) Пусть σ: $A\to B$ — изометричное биективное линейное отображение. Тогда σ — произведение отображения ρ, обладающего свойствами из a) и умножения слева на элемент $\sigma(1)$ в B.

c) Пусть τ: $A\to B$ — изометричное линейное отображение такое, что $\tau(1)=1$. Тогда $\tau(x^*)=\tau(x)^*$ для любого $x\in A$ [16], [58].

***1.9.11.** Пусть A — C^*-алгебра.

a) Всякое дифференцирование A непрерывно.

b) Пусть D — дифференцирование A, x — нормальный элемент A. Если $x(Dx)=(Dx)x$, то $Dx=0$. В частности, всякое дифференцирование коммутативной C^*-алгебры нулевое. Отсюда следует, что коммутативный замкнутый двусторонний идеал в C^*-алгебре централен.

c) Пусть D — дифференцирование A, x — нормальный элемент A такой, что $Dx=0$. Тогда $Dx^*=0$ [72], [113], [114].

d) Пусть D — дифференцирование A, I — замкнутый двусторонний идеал в A. Имеем $D(I)\subset I$ (использовать 1.5.8).

e) Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство, A — C^*-алгебра компактных операторов в H, x — элемент из $\mathfrak{B}(H)$, не принадлежащий $A+\mathbf{C}\cdot 1$. Дифференцирование $y\to xy-yx$ C^*-алгебры A не является внутренним.

1.9.12. Пусть A — C^*-алгебра.

a) Пусть I, J — замкнутые двусторонние идеалы в A. Произведение идеалов IJ равно $I\cap J$ (если $x\in(I\cap J)^+$, то $x^{1/2}\in(I\cap J)^+$) [187].

Имеем $(I+J)^+=I^++J^+$ [291], [363].

b) Если $I\cap J=0$, то каноническое отображение $I+J\to I\times J$ есть изоморфизм C^*-алгебр.

c) Пусть (I_α) — семейство замкнутых двусторонних идеалов A с пересечением I. Пусть ω_α (соотв. ω) — канонический морфизм A на A/I_α (соотв. A/I). Для любого $x \in A$ имеем $\|\omega(x)\| = \sup\limits_\alpha \|\omega_\alpha(x)\|$ [163].

1.9.13. Пусть A — C^*-алгебра. Назовем *C^*-полунормой* на A полунорму N такую, что

$$N(x) \leqslant \|x\|, \quad N(xy) \leqslant N(x)N(y), \quad N(x^*x) = N(x)^2$$

для любых x, $y \in A$. Множество $\mathfrak{N}(A)$ C^*-полунорм на A компактно в топологии простой сходимости. Если I есть замкнутый двусторонний идеал A и $x \in A$, обозначим через $N_I(x)$ норму канонического образа x в A/I. Тогда $I \to N_I$ — биективное отображение множества $\mathcal{J}(A)$ замкнутых двусторонних идеалов A на $\mathfrak{N}(A)$. Если I, $J \in \mathcal{J}(A)$, то $N_{I \cap J} = \sup(N_I, N_J)$ [использовать 1.9.12b]. C^*-полунорма N называется *экстремальной*, если ее нельзя представить как верхнюю грань двух C^*-полунорм, отличных от N. Для того чтобы C^*-полунорма N_I была ненулевой экстремальной, необходимо и достаточно, чтобы I был простым. [В любой алгебре R двусторонний идеал J называется *простым*, если $J \neq R$ и если соотношение $J'J'' \subset J$ (J', J'' — двусторонние идеалы R) влечет $J' \subset J$ или $J'' \subset J$.] Если A сепарабельна, то множество E экстремальных C^*-полунорм имеет тип G_δ в $\mathfrak{N}(A)$. [Множество $(N, N') \in \mathfrak{N}(A) \times \mathfrak{N}(A)$ таких, что $N \leqslant N'$ или $N' \leqslant N$, компактно. Дополнение его есть счетное объединение компактных множеств; его образ в $\mathfrak{N}(A)$ при непрерывном отображении $(N, N') \to \sup(N, N')$ есть дополнение E.] [163], [186].

1.9.14. Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — семейство C^*-алгебр. Пусть A — множество $x = (x_i) \in \prod\limits_{i \in I} A_i$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\|x_i\| < \varepsilon$, за исключением, быть может, конечного числа индексов i. Если положить $\|x\| = \sup \|x_i\|$, то A естественным образом становится C^*-алгеброй, называемой *ограниченным произведением* A_i.

1.9.15. Радикал R C^*-алгебры есть нуль. [Если $x \in R$, то $1 + \lambda x^*x$ обратим в $\tilde{A}$ при любом $\lambda \in \boldsymbol{C}$, поэтому $\mathrm{Sp}'(x^*x) = 0$ и $x = 0$.] [116].

§ 2. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Одним из наиболее важных понятий этой книги является понятие представления. Если дана инволютивная банахова алгебра A, трудно непосредственно установить существование представлений A. Но мы определим соответствие между представлениями A и положительными формами на A; в частности, между неприводимыми представлениями и чистыми положительными формами. Классические методы функционального анализа (теоремы Хана — Банаха, Крейна—Мильмана) позволят доказать существование положительных форм, а также чистых положительных форм. Такова основная идея этого параграфа.

В формулировках утверждений делаются разные предположения относительно рассматриваемых инволютивных алгебр. При первом чтении можно считать, что всюду рассматриваются C^*-алгебры.

2.1. Положительные формы.

2.1.1. Определение. *Пусть A — инволютивная алгебра. Линейная форма f на A называется положительной, если $f(x^*x) \geqslant 0$ для любого $x \in A$. Если A — инволютивная нормированная алгебра, то состоянием A называется положительная непрерывная линейная форма f на A с $\|f\| = 1$.*

Пусть A — инволютивная алгебра, f и g — линейные формы на A. Говорят, что f *мажорирует* g, и пишут $f \geqslant g$ или $g \leqslant f$, если разность $f - g$ положительна. Это отношение определяет в пространстве, сопряженном к A, отношение предпорядка, согласованное со структурой вещественного векторного пространства. Если A — C^*-алгебра, то это отношение есть отношение порядка, ибо, если $f \geqslant 0$ и $f \leqslant 0$, то f обращается в нуль на A^+, поэтому и на множестве эрмитовых элементов A (1.6.5); поэтому $f = 0$.

Пусть Ω — локально компактное пространство, A — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на Ω, стремящихся к нулю на бесконечности. Непрерывная линейная форма на A есть не что иное, как ограниченная мера μ на Ω. Утверждение, что эта форма положительна, означает, что мера μ положительна.

2.1.2. Пусть A — инволютивная алгебра, f — положительная форма на A. Для $x, y \in A$ положим $(x \mid y) = f(y^*x)$. Это скалярное произведение линейно по x, антилинейно по y и $(x \mid x) \geqslant 0$ для любого x. Таким образом, получаем на A структуру предгильбертова пространства.

Отсюда следует, в частности, что

$$f(y^*x) = \overline{f(x^*y)} \qquad (x \in A,\ y \in A), \tag{1}$$

$$|f(y^*x)|^2 \leqslant f(x^*x) f(y^*y) \qquad (x \in A,\ y \in A). \tag{2}$$

Если A имеет единичный элемент, то из (1) и (2) получаем при $y = 1$, что

$$f(x^*) = \overline{f(x)}, \tag{3}$$

$$|f(x)|^2 \leqslant f(1) f(x^*x). \tag{4}$$

Пусть H — отделимое предгильбертово пространство, канонически определяемое предгильбертовым пространством A: имеем $H = A/N$, где N — множество $x \in A$ таких, что $f(x^*x) = 0$. Вследствие (2) N есть также множество $x \in A$ таких, что $f(yx) = 0$ для любого $y \in A$. Поэтому N — левый идеал в A.

[Полагая $(x \mid y) = f(xy^*)$, мы получили бы на A другую структуру предгильбертова пространства с аналогичными свойствами.]

2.1.3. Лемма. *Пусть A — банахова алгебра с единичным элементом, x' — такой элемент A, что $\|x'\| \leqslant 1$, и $x = 1 + x'$. Ряд*

$$1 + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)x'^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)x'^n + \ldots$$

сходится к такому элементу $y \in A$, что $y^2 = x$. Если A снабжена изометрической инволюцией и x эрмитов, то y эрмитов.

Ряд

$$1 + \frac{1}{2}\|x'\| + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2} - 1\right|\|x'\|^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2} - 1\right|\ldots\left|\frac{1}{2} - n + 1\right|\|x'\|^n + \ldots$$

сходится, откуда следует существование y. Если вычислить y^2, то получим ряд, целый по x', коэффициенты которого известны по классическому случаю $A = \boldsymbol{C}$: поэтому $y^2 = 1 + x' = x$. Если A снабжена изометрической инволюцией и x эрмитов, то y представляется в виде предела эрмитовых элементов, и так как инволюция непрерывна, то y эрмитов.

2.1.4. Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, имеющая единичный элемент 1, и пусть $\|1\| = 1$. Если f — положительная линейная форма на A, то f непрерывна и $\|f\| = f(1)$.*

Если $x \in A$ эрмитов и $\|x\| \leqslant 1$, то $1 - x$ представим в виде y^*y (лемма 2.1.3), поэтому $f(1 - x) \geqslant 0$ и $f(x) \leqslant f(1)$. Если $x' \in A$ и $\|x'\| \leqslant 1$, то $\|x'^*x'\| \leqslant 1$; следовательно, по формуле (4) из 2.1.2

$$|f(x')|^2 \leqslant f(1)\,f(x'^*x') \leqslant f(1)^2.$$

Это доказывает, что f непрерывна и $\|f\| \leqslant f(1)$. Ясно, что

$$f(1) \leqslant \|f\|, \quad \text{т. е.} \quad \|f\| = f(1).$$

2.1.5. Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу* (B29), *$\tilde{A}$ — инволютивная алгебра, полученная из A присоединением* *единичного элемента, f — непрерывная положительная линейная форма на A. Тогда:*

(i) $f(x^*)=\overline{f(x)}$ *для любого* $x \in A$,

$$|f(x)|^2 \leqslant \|f\| f(x^*x) \quad \textit{для любого} \quad x \in A.$$

(ii) $|f(y^*xy)| \leqslant \|x\| f(y^*y)$ *для любых* $x, y \in A$.

(iii) $\|f\| = \sup\limits_{x \in A,\, \|x\| \leqslant 1} f(x^*x)$.

(iv) *Если* $(x_i)_{i \in I}$ *— такая сеть элементов из* A [1]), *что* $\|x_i\| \leqslant 1$ *и* $f(x_i) \to \|f\|$, *то* $f(x_i^*x_i) \to \|f\|$.

(v) *Если* $(u_j)_{j \in J}$ *— аппроксимативная единица из* A, *то* $f(u_j) \to \|f\|$, $f(u_j^*u_j) \to \|f\|$.

(vi) f *однозначно продолжается до такой положительной формы* $\tilde{f}$ *на* $\tilde{A}$, *что* $\tilde{f}(1)=\|f\|$. *Любая положительная форма на* A, *продолжающая* f, *мажорирует* $\tilde{f}$.

(vii) *В обозначениях пункта* (iv) *сеть* $x_i \to 1$ *в предгильбертовой структуре, определяемой* $\tilde{f}$ *на* $\tilde{A}$, *так что* A *всюду плотна в* $\tilde{A}$ *в этой структуре.*

Для всякого $x \in A$ имеем

$$f(x^*)=\lim f(x^*u_j)=\lim \overline{f(u_j^*x)}=\lim \overline{f((x^*u_j)^*)}=\overline{f(x^{**})}=\overline{f(x)},$$
$$|f(x)|^2=\lim |f(xu_j)|^2 \leqslant f(x^*x) \lim f(u_j^*u_j) \leqslant \|f\| f(x^*x).$$

Это доказывает (i), и ясно, что (i)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(iii). Докажем **(vi)**. Единственность $\tilde{f}$ очевидна. Докажем существование $\tilde{f}$. Для любого элемента $(\lambda, x)=\lambda+x$ из $\tilde{A}$ ($\lambda \in \boldsymbol{C}$, $x \in A$) положим $\tilde{f}(\lambda+x)=\lambda\|f\|+f(x)$. Тогда $\tilde{f}$ — линейная форма на $\tilde{A}$, продолжающая f, и ввиду (i)

$$\begin{aligned}\tilde{f}((\lambda+x)^*(\lambda+x)) &= f(x^*x+\bar{\lambda}x+\lambda x^*)+|\lambda|^2\|f\|= \\ &= f(x^*x)+2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}f(x))+|\lambda|^2\|f\| \geqslant \\ &\geqslant f(x^*x)-2|\lambda|\|f\|^{1/2} f(x^*x)^{1/2}+|\lambda|^2\|f\|=\left[f(x^*x)^{1/2}-|\lambda|\|f\|^{1/2}\right]^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{f}$ положительна. Очевидно, что $\tilde{f}(1)=\|f\|$. Пусть g — положительная форма на $\tilde{A}$, продолжающая f. Можно снабдить $\tilde{A}$ структурой инволютивной банаховой алгебры, продолжающей структуру на A и такой, что $\|1\|=1$. Вследствие 2.1.4 имеем $g(1)=\|g\| \geqslant \|f\|$, откуда

$$\begin{aligned}g((\lambda+x)^*(\lambda+x)) &= f(x^*x+\bar{\lambda}x+\lambda x^*)+|\lambda|^2 g(1) \geqslant \\ &\geqslant f(x^*x+\bar{\lambda}x+\lambda x^*)+|\lambda|^2\|f\|=\tilde{f}((\lambda+x)^*(\lambda+x)),\end{aligned}$$

[1]) *Сетью* в A называется отображение некоторого направленного множества в A.

поэтому $g \geqslant f$ и (vi) доказано. Если $y \in A$, то форма $x \to \tilde{f}(y^*xy)$ на $\tilde{A}$ положительна, потому что $\tilde{f}(y^*(x^*x)y) = \tilde{f}((xy)^*xy) \geqslant 0$ вследствие 2.1.4, ее норма равна $f(y^*y)$, откуда (ii).

В обозначениях пункта (iv) имеем

$$\tilde{f}((x_i - 1)^*(x_i - 1)) = f(x_i^*x_i) - \overline{f(x_i)} - f(x_i) + \|f\| \to \\ \to \|f\| - \|f\| - \|f\| + \|f\| = 0,$$

откуда следует (vii).

Обозначим $\| \quad \|'$ полунорму предгильбертова пространства $\tilde{A}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно (vii) существует такой $x \in A$, что $\|x\| \leqslant 1$ и $\|x - 1\|' < \varepsilon$. Кроме того, существует такой индекс $j_0 \in J$, что при $j \geqslant j_0$ имеем $\|u_jx - x\| \leqslant \varepsilon$, откуда

$$\|u_jx - x\|' = f((u_jx - x)^*(u_jx - x))^{1/2} \leqslant \|f\|^{1/2}\|u_jx - x\| \leqslant \varepsilon\|f\|^{1/2}.$$

Наконец, из (ii), примененного к f, получаем

$$\|u_jx - u_j\|' = \tilde{f}((x - 1)^* u_j^*u_j(x - 1))^{1/2} \leqslant \|u_j^*u_j\|^{1/2}\|x - 1\|' \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, при $j \geqslant j_0$ получаем $\|u_j - 1\|' \leqslant \varepsilon(2 + \|f\|^{1/2})$. Отсюда следует, что $f(u_j) = (u_j \mid 1)$ стремится к $(1 \mid 1) = \tilde{f}(1) = \|f\|$, поэтому, вследствие (iv), $f(u_j^*u_j)$ стремится к $\|f\|$. Этим завершается доказательство.

2.1.6. В обозначениях п. 2.1.5 форма $\tilde{f}$ называется *каноническим продолжением* f на $\tilde{A}$.

Следствие. *Пусть f и g — положительные непрерывные формы на A, $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ — их канонические продолжения на $\tilde{A}$. Тогда*

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|, \qquad (f + g)^\sim = \tilde{f} + \tilde{g}.$$

Первая формула следует из 2.1.5 (v), а вторая — из первой.

Следовательно, множество состояний A есть выпуклая часть пространства, сопряженного к A.

2.1.7. Сохраним обозначения 2.1.5. Пусть Q — множество непрерывных положительных форм на A, $\tilde{Q}$ — множество таких положительных форм g на $\tilde{A}$, что $g(1) = \|g \mid A\|$. Тогда отображение $f \to \tilde{f}$ есть биекция Q на $\tilde{Q}$, сохраняющая структуры порядка и сложения. Если положительная форма на $\tilde{A}$ мажорируется элементом из $\tilde{Q}$, то она содержится в $\tilde{Q}$; действительно, пусть $g = g_1 + g_2$, где $g \in \tilde{Q}$ и g_1, g_2 — положительные формы на $\tilde{A}$; тогда

$$g_1 + g_2 = g = \tilde{f} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$$

и

$$g_1(1) \geqslant \tilde{f}_1(1), \qquad g_2(1) \geqslant \tilde{f}_2(1),$$

откуда
$$g_1(1)=\tilde{f}_1(1), \qquad g_2(1)=\tilde{f}_2(1),$$
таким образом, $g_1 \in \tilde{Q}$, $g_2 \in \tilde{Q}$.

2.1.8. Пусть A — C^*-алгебра, f — положительная форма на A; тогда f непрерывна. В самом деле, пусть $(x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность таких элементов из A^+, что $\|x_i\| \leqslant 1$; покажем, что числа $f(x_i)$ ограничены. Для любой последовательности $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ неотрицательных чисел такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < +\infty$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ сходится к элементу x из A. Для любого целого $n \geqslant 1$ имеем (в силу 1.6.1) $\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i x_i \geqslant 0$, поэтому
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant f(x).$$
Таким образом, $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f(x_i) < +\infty$. Из произвольности последовательности (λ_i) следует, что $f(x_i)$ ограничены. Поэтому
$$M = \sup_{x \in A^+,\ \|x\| \leqslant 1} f(x) < +\infty.$$
Если x эрмитов с нормой $\leqslant 1$, то
$$|f(x)| \leqslant |f(x^+)| + |f(x^-)| \leqslant 2M.$$
Если x — любой элемент с нормой $\leqslant 1$, то
$$|f(x)| \leqslant \left|f\left(\frac{1}{2}(x+x^*)\right)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2i}(x-x^*)\right)\right| \leqslant 4M.$$
Поэтому f непрерывна.

В дальнейшем мы будем постоянно говорить о положительных формах на C^*-алгебрах. Читатель не должен забывать, что эти формы автоматически непрерывны.

2.1.9. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, f — непрерывная линейная форма на A. Для того чтобы f была положительной, необходимо и достаточно, чтобы $\|f\| = f(1)$.*

Если $f \geqslant 0$, имеем $\|f\| = f(1)$ (2.1.4). Предположим, что $\|f\| = f(1)$. Пусть $x \in A^+$; предположим, что $f(x)$ отрицательна. Можно считать, что $f(1) = 1$. Существует замкнутый диск $|z - z_0| \leqslant \rho$ в $\boldsymbol{C}$, содержащий $\operatorname{Sp} x$, но не содержащий $f(x)$. Тогда спектр нормального элемента $x - z_0$ содержится в диске

$|z|\leqslant\rho$, откуда $\|x-z_0\|\leqslant\rho$. Поэтому

$$|f(x)-z_0|=|f(x)-z_0 f(1)|=|f(x-z_0)|\leqslant\|f\|\cdot\|x-z_0\|\leqslant\rho,$$

что невозможно. (Другое доказательство основано на B28.)

Термин «состояние» заимствован из физики.

Библиография: [1], [2], [7], [10], [16], [30], [110], [117]. Результат 2.1.8 обобщен на инволютивные банаховы алгебры, допускающие аппроксимативную единицу, в [199].

2.2. Представления.

2.2.1. Определение. *Пусть A — инволютивная алгебра, H — гильбертово пространство. Представлением A в H называется морфизм инволютивной алгебры A в инволютивную алгебру $\mathfrak{B}(H)$.*

Иначе говоря, представление A в H есть такое отображение π из A в $\mathfrak{B}(H)$, что

$$\pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y),\qquad \pi(\lambda x)=\lambda\pi(x),$$
$$\pi(xy)=\pi(x)\pi(y),\qquad \pi(x^*)=\pi(x^*)$$

для $x,\ y\in A,\ \lambda\in\boldsymbol{C}$.

Гильбертова размерность H называется *размерностью* π и обозначается $\dim\pi$. Пространство H называется *пространством представления* π и обозначается H_π.

Говорят, что два представления π и π' инволютивной алгебры A в H и H' эквивалентны, и пишут $\pi\simeq\pi'$, если существует изоморфизм U гильбертова пространства H на гильбертово пространство H', переводящий $\pi(x)$ в $\pi'(x)$ для любого $x\in A$. Отсюда возникает понятие *класса представлений*. (Для удобства языка часто не различают представления и классы представлений.)

2.2.2. Всякий линейный непрерывный оператор T: $H\to H'$ такой, что $T\pi(x)=\pi'(x)T$ для любого $x\in A$, называется оператором, *сплетающим* π и π'. Оператор U из предыдущего определения является сплетающим оператором. Множество операторов, сплетающих π и π', есть векторное пространство, размерность которого называют *числом сплетения* π и π'. Оно равно числу сплетения π' и π. Действительно, пусть T: $H\to H'$ — оператор, сплетающий π и π'. Тогда T^*: $H'\to H$ является оператором, сплетающим π' и π, так как

$$T^*\pi'(x)=(\pi'(x^*)T)^*=(T\pi(x^*))^*=\pi(x)T^*.$$

Отсюда получаем, что

$$T^*T\pi(x)=T^*\pi'(x)T=\pi(x)T^*T.$$

Поэтому $|T| = (T^*T)^{1/2}$ перестановочен с $\pi(A)$. Пусть $T = U|T|$ — полярное разложение T. Тогда для любого $x \in A$

$$U\pi(x)|T| = U|T|\pi(x) = T\pi(x) = \pi'(x)T = \pi'(x)U|T|. \quad (1)$$

Если $\operatorname{Ker} T = 0$, то $|T|(H)$ всюду плотно в H и из (1) следует

$$U\pi(x) = \pi'(x)U. \quad (2)$$

Если, кроме того, $\overline{T(H)} = H'$, т. е. если $\operatorname{Ker} T^* = 0$, то U является изоморфизмом H на H' и (2) доказывает, что π и π' эквивалентны.

2.2.3. Пусть $(\pi_i)_{i \in I}$ — семейство представлений A в гильбертовых пространствах H_i. Пусть H — гильбертова сумма H_i. Если для всякого $x \in A$ числа $\|\pi_i(x)\|$ ограничены (согласно 1.3.7 это условие выполнено, если A — инволютивная банахова алгебра), то можно образовать непрерывный линейный оператор $\pi(x)$ в H, который индуцирует $\pi_i(x)$ в каждом H_i. Тогда $x \to \pi(x)$ есть представление A в H, называемое *гильбертовой суммой* π_i и обозначаемое $\bigoplus_{i \in I} \pi_i$ или $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \ldots \oplus \pi_n$ в случае конечного семейства представлений $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$. Если $(\pi_i)_{i \in I}$ — семейство представлений A, совпадающих с представлением π, и если $\operatorname{Card} I = c$, то представление $\oplus \pi_i$ обозначается через $c\pi$. Всякое представление, эквивалентное представлению этого типа, называется кратным π.

2.2.4. Пусть π — представление A в H. Если замкнутое векторное подпространство K в H инвариантно относительно $\pi(A)$, то сужения $\pi(x)$ на K определяют подпредставление π' инволютивной алгебры A в K, обозначаемое π_K или π_E, если $E = P_K$. Тогда $H \ominus K$ также инвариантно относительно $\pi(A)$, так как если $\xi \in K$ и $\eta \in H \ominus K$, то для любого $x \in A$ $\pi(x^*)\xi \in K$; поэтому

$$(\pi(x)\eta \mid \xi) = (\eta \mid \pi(x)^*\xi) = (\eta \mid \pi(x^*)\xi) = 0,$$

откуда $\pi(x)\eta \in H \ominus K$. Следовательно, P_K перестановочен с $\pi(A)$. Если π'' — подпредставление π, определяемое $H \ominus K$, то $\pi \simeq \pi' \oplus \pi''$.

Пусть ρ, ρ' — два представления A. Если ρ' эквивалентно подпредставлению ρ, то говорят, что ρ' содержится в ρ, или что ρ содержит ρ', и пишут $\rho' \leqslant \rho$ или $\rho \geqslant \rho'$.

2.2.5. Пусть π — представление A в H и $\xi \in H$. Замыкание $\pi(A)\xi$ есть замкнутое векторное подпространство H, инвариантное относительно $\pi(A)$. Если это подпространство есть H, то говорят, что ξ есть *тотализирующий* (или *циклический*) вектор для π.

2.2.6. Предложение. *Пусть π — представление A в H. Пусть K — замкнутое векторное подпространство H, порожденное векторами $\pi(x)\xi$ ($x \in A$, $\xi \in H$). Пусть K' — замкнутое* *векторное подпространство H, образованное теми $\xi \in H$, которые переводятся в нуль всеми $\pi(x)$. Тогда K и K' инвариантны относительно $\pi(A)$ и $\pi(A)'$ [$\pi(A)'$ — коммутант $\pi(A)$ в $\mathfrak{B}(H)$], ортогональны и сумма их равна H.*

Очевидно, что K и K' инвариантны относительно $\pi(A)$. Оператор, перестановочный с $\pi(x)$, сохраняет ядро и образ $\pi(x)$, следовательно, K и K' инвариантны относительно $\pi(A)'$. Так как $\pi(A)(K) \subset K$, то $\pi(A)(H \ominus K) \subset H \ominus K$; но $\pi(A)(H) \subset K$, поэтому $\pi(A)(H \ominus K) = 0$, откуда $H \ominus K \subset K'$. Если $\xi \in K'$, $x \in A$ и $\eta \in H$, то

$$(\xi \mid \pi(x)\eta) = (\pi(x^*)\xi \mid \eta) = 0,$$

т. е. $\xi \in H \ominus K$. Это доказывает, что $K' = H \ominus K$.

K называется *существенным подпространством* π. π называется *невырожденным*, если $K = H$. Предыдущее рассуждение показывает, что любое представление A есть однозначно определенная гильбертова сумма нулевого представления и невырожденного представления.

2.2.7. Ясно, что гильбертова сумма невырожденных представлений невырождена и представление, допускающее тотализирующий вектор, невырождено.

Обратно:

П р е д л о ж е н и е. *Любое невырожденное представление A есть гильбертова сумма представлений, допускающих тотализирующий вектор.*

Пусть π — невырожденное представление A в H с $H \neq 0$. Достаточно доказать, что существует подпредставление π в ненулевом подпространстве, допускающее тотализирующий вектор (так как затем можно применить лемму Цорна). Пусть ξ — ненулевой элемент H. Замыкание K множества $\pi(A)\xi$ — ненулевое, инвариантное относительно π подпространство H. Пусть $L = H \ominus K$. Пусть $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1 \in K$, $\xi_2 \in L$. Если $x \in A$, то $\pi(x)\xi_1 \in K$, $\pi(x)\xi_2 \in L$, $\pi(x)\xi_1 + \pi(x)\xi_2 = \pi(x)\xi \in K$, поэтому $\pi(x)\xi_2 = 0$; отсюда $\pi(x)\xi = \pi(x)\xi_1$. Таким образом, K есть замыкание $\pi(A)\xi_1$.

2.2.8. Пусть π — представление A в H, $\overline{H}$ — гильбертово пространство, сопряженное к H ($\overline{H} = H$, но при переходе от H к $\overline{H}$ умножение на $\lambda \in \boldsymbol{C}$ заменяется умножением на $\bar{\lambda}$, а скалярные произведения заменяются на их комплексно сопряженные). Пусть A^0 — инволютивная алгебра, противоположная A. Легко проверить, что отображение $x \to \pi(x^*)$, обозначаемое $\overline{\pi^0}$, есть представление A^0 в $\overline{H}$.

2.2.9. Пусть $\tilde{A}$ — инволютивная алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента, π — представление A в H. Тогда π продолжается единственным образом до такого представления $\tilde{\pi}$ инволютивной алгебры $\tilde{A}$ в H, что $\pi(1)=1$. Это продолжение называется *каноническим*.

2.2.10. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, π — представление A в H. Напомним (1.3.7), что $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ для любого $x \in A$. Если A допускает аппроксимативную единицу и если π невырождено, то $\pi(u_i)$ сильно стремится к 1. Действительно, для любого $y \in A$ и любого $\xi \in H$ вектор $\pi(u_i)(\pi(y)\xi) = \pi(u_i y)\xi$ сильно стремится к $\pi(y)\xi$, так как

$$\|\pi(u_i y) - \pi(y)\| \leqslant \|u_i y - y\| \to 0,$$

но $\pi(y)\xi$ образуют множество, тотальное в H, и, с другой стороны, $\|\pi(u_i)\| \leqslant \|u_i\| \leqslant 1$, поэтому $\pi(u_i)\eta$ сильно стремится к η для всякого $\eta \in H$.

Библиография: [1], [10], [110].

2.3. Топологически неприводимые представления.

2.3.1. Предложение. *Пусть A — инволютивная алгебра, H — гильбертово пространство, π — представление A в H. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *единственными замкнутыми векторными подпространствами H, инвариантными относительно $\pi(A)$, являются 0 и H;*

(ii) *коммутант $\pi(A)$ в $\mathfrak{B}(H)$ сводится к скалярам;*

(iii) *либо любой ненулевой вектор H является тотализирующим для π, либо π — нулевое представление размерности 1.*

(i)$\Rightarrow$(iii): предположим, что выполнено условие (i). Пусть $\xi \in H$, $\xi \neq 0$. Если $\pi(A)\xi$ не всюду плотно в H, то $\pi(A)\xi = 0$ вследствие (i). Тогда $\boldsymbol{C}\xi$ инвариантно относительно $\pi(A)$, поэтому $H = \boldsymbol{C}\xi$ и π — нулевое представление размерности 1.

(iii)$\Rightarrow$(i): предположим, что выполнено условие (iii). Пусть $K \neq 0$ — замкнутое векторное подпространство H, инвариантное относительно $\pi(A)$. Надо показать, что $K = H$. Это очевидно, если $\dim \pi = 1$. Предположим, что любой ненулевой вектор в H является тотализирующим для π. Пусть $\xi \in K$, $\xi \neq 0$. Тогда $\pi(A)\xi \subset K$ и $\overline{\pi(A)\xi} = H$, поэтому $K = H$.

(ii)$\Rightarrow$(i): предположим, что выполнено условие (ii). Пусть K — замкнутое векторное подпространство, инвариантное относительно $\pi(A)$. Тогда P_K перестановочен с $\pi(A)$ (2.2.4), поэтому P_K есть скалярный оператор и $P_K = 0$ или 1, т. е. $K = 0$ или H.

(i)$\Rightarrow$(ii): предположим, что выполнено условие (i). Пусть T — элемент из $\mathfrak{B}(H)$, перестановочный с $\pi(A)$; докажем, что T — скаляр. Так как $T + T^*$ и $T - T^*$ коммутируют с $\pi(A)$, то можно ограничиться случаем, когда T эрмитов. Тогда спектральные проекторы T перестановочны с $\pi(A)$, поэтому все они равны 0 или 1 вследствие (i), поэтому T — скаляр.

2.3.2. Определение. *Пусть A — инволютивная алгебра, H — гильбертово пространство, π — представление A в H. Говорят, что π топологически неприводимо, если $H \neq 0$ и π удовлетворяет эквивалентным условиям* 2.3.1.

Такое представление — либо нулевое размерности 1, либо ненулевое и невырожденное. Обозначим через $\tilde{A}$ множество классов эквивалентности ненулевых топологически неприводимых представлений A.

Напомним, что неприводимость π в алгебраическом смысле означает, что единственными векторными подпространствами H, инвариантными относительно $\pi(A)$, являются $\{0\}$ и H. Если $\dim \pi = +\infty$, то это условие гораздо сильнее, чем топологическая неприводимость. Мы увидим, однако (2.8.4), что если A — C^*-алгебра, то оба понятия эквивалентны.

Конечномерное представление π инволютивной алгебры A есть гильбертова сумма топлогически неприводимых представлений (2.3.5). Мы увидим (8.5.2), что этот результат распространяется отчасти на бесконечномерные представления, но в гораздо более тонкой форме. Это — одна из причин, по которой мы будем особенно интересоваться топологически неприводимыми представлениями. Если дана инволютивная алгебра A, то основная задача теории — перечислить все ее топологически неприводимые представления (с точностью до эквивалентности). Заметим, что может случиться, что не существует никакого ненулевого топологически неприводимого представления A (и даже никакого ненулевого представления); мы увидим (2.7.3), что любая C^*-алгебра имеет «достаточно много» топологически неприводимых представлений.

2.3.3. Пусть A — сепарабельная инволютивная нормированная алгебра, π — топологически неприводимое представление A в гильбертовом пространстве H. Тогда H сепарабельно: это очевидно, если π — нулевое представление размерности 1; в противном случае, пусть ξ — ненулевой вектор из H; если (x_n) — последовательность, всюду плотная в A, то $\pi(x_n)\xi$ всюду плотна в H. Такое же рассуждение показывает, что для всякой инволютивной нормированной алгебры B размерность топологически неприводимых представлений B не больше фиксированного кардинального числа.

2.3.4. Пусть A — инволютивная алгебра, π и π' — топологически неприводимые представления A, n — их число сплетения. Если $n = 0$, то π и π' неэквивалентны. Если $n > 0$, то пусть T: $H_\pi \to H_{\pi'}$ — ненулевой сплетающий оператор. По 2.2.2, T^*T и TT^* — скалярны ($\neq 0$) и π, π' эквивалентны.

2.3.5. Пусть A — инволютивная алгебра. Изучам конечномерные представления A. Излагаемое ниже можно рассматривать как частный случай дальнейших теорем, а также как частный случай теорем из чистой алгебры, но для того, чтобы облегчить задачу читателя, предпочтительнее дать сейчас прямой анализ.

Пусть π — конечномерное представление A. Тогда

$$\pi = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_n,$$

где π_i неприводимы. Это очевидно, если $\dim \pi = 0$ (с $n = 0$). Предположим, что $\dim \pi = q$ и что наше предложение доказано при $\dim \pi < q$. Если π неприводимо, то предложение снова очевидно. В противном случае $\pi = \pi' \oplus \pi''$, причем $\dim \pi' < q$, $\dim \pi'' < q$, и достаточно применить предположение индукции. Разложение $\pi = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_n$ не единственно (например, представление $\lambda' \to \lambda \cdot 1$ инволютивной алгебры $\boldsymbol{C}$ в $\boldsymbol{C}^n$ допускает при $n > 1$ бесконечное множество разложений на одномерные представления). Тем не менее мы получим некоторую теорему единственности. Пусть ρ_1, ρ_2 — два неприводимых подпредставления π, P_1 и P_2 — проекторы H_π на H_{ρ_1} и H_{ρ_2}. Они коммутируют с $\pi(A)$. Поэтому ограничение P_2 на H_{ρ_1} есть оператор, сплетающий ρ_1 и ρ_2. Следовательно, если H_{ρ_1} и H_{ρ_2} не ортогональны, то $\rho_1 \simeq \rho_2$ (2.3.4). Это доказывает, что любое неприводимое подпредставление π эквивалентно одному из π_i. Итак, перегруппировав π_i, получаем, что $\pi = \nu_1 \oplus \ldots \oplus \nu_m$, где каждое ν_i есть кратное $p_i \nu'_i$ неприводимого представления ν'_i, и ν'_i попарно неэквивалентны. Если ρ — неприводимое подпредставление π, то предыдущее рассуждение показывает, что H_ρ ортогонально всем H_{ν_i}, кроме одного. Поэтому H_ρ содержится в одном из H_{ν_i}. Это доказывает, что каждое пространство H_{ν_i} определяется однозначно: H_{ν_i} — это подпространство H_π, порожденное пространствами подпредставлений π, эквивалентных ν'_i.

Таким образом, в разложении $\pi = p_1 \nu'_1 \oplus \ldots \oplus p_m \nu'_m$ представления π (где $\nu'_1, \ldots, \nu'_m$ неприводимы и неэквивалентны) целые числа p_i и классы представлений ν'_i определяются единственным образом, как и пространства представлений $p_i \nu'_i$.

Библиография: [10], [110].

2.4. Положительные формы и представления.

2.4.1. Предложение. *Пусть A — инволютивная алгебра.*

(i) *Если π — представление A в H и $\xi \in H$, то $x \to (\pi(x)\xi \mid \xi)$ — положительная форма на A.*

(ii) *Пусть π и π' — представления A в H и H'; пусть ξ (соотв. ξ') — тотализирующий вектор для π (соотв. π'). Если $(\pi(x)\xi \mid \xi) = (\pi'(x)\xi' \mid \xi')$ для всякого $x \in A$, то существует единственный изоморфизм H на H', переводящий π в π' и ξ в ξ'.*

Имеем

$$(\pi(x^*x)\xi\,|\,\xi)=(\pi(x)^*\pi(x)\xi\,|\,\xi)=\|\pi(x)\xi\|^2\geqslant 0,$$

откуда следует (i). Пусть выполнены условия (ii). Для любых x, $y\in A$ имеем

$$(\pi(x)\xi\,|\,\pi(y)\xi)=(\pi(y^*x)\xi\,|\,\xi)=(\pi'(y^*x)\xi'\,|\,\xi')=(\pi'(x)\xi'\,|\,\pi'(y)\xi').$$

Так как $\pi(x)\xi$ [соотв. $\pi'(x)\xi'$] всюду плотны в H (соотв. H'), то отсюда следует существование такого изоморфизма U из H на H', что $U(\pi(x)\xi)=\pi'(x)\xi'$ для любого $x\in A$. Покажем, что U переводит π в π', т. е. $U\pi(x)=\pi'(x)U$ для любого $x\in A$; для всякого $y\in A$ имеем

$$(U\pi(x))(\pi(y)\xi)=U(\pi(xy)\xi)=\pi'(xy)\xi'=$$
$$=\pi'(x)(\pi'(y)\xi')=(\pi'(x)U)(\pi(y)\xi).$$

Так как $\pi(y)\xi$ всюду плотны в H, то $U\pi(x)=\pi'(x)U$. С другой стороны, для всякого $x\in A$

$$(\xi'\,|\,\pi'(x)\xi')=(\xi\,|\,\pi(x)\xi)=(U\xi\,|\,U\pi(x)\xi)=(U\xi,\ \pi'(x)\xi'),$$

откуда $\xi'=U\xi$. Наконец, единственность U очевидна, так как значения U на всех векторах $\pi(A)\xi$ заданы.

2.4.2. Сохраним предыдущие обозначения. Форма $x\to\to(\pi(x)\xi\,|\,\xi)$ на A называется формой, *определяемой* π *и* ξ. Для фиксированного π и переменного ξ получаем формы, *связанные с* π. Если S — множество представлений A, то формами, связанными с S, называются формы, связанные с всевозможными элементами S.

Пусть H — гильбертово пространство, B — инволютивная подалгебра $\mathfrak{B}(H)$, ξ — элемент H. Обозначим ω_ξ положительную форму на B, определяемую тождественным представлением B и вектором ξ, т. е. форму $x\to(x\xi\,|\,\xi)$. Положительная форма на B называется *векторной*, если она совпадает с ω_ξ для некоторого ξ из H.

2.4.3. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, π — невырожденное представление A в H, ξ — элемент H, f — положительная форма, определяемая π и ξ. Тогда $\|f\|=(\xi\,|\,\xi)$. В самом деле, по 2.1.5

$$\|f\|=\lim f(u_i)=\lim(\pi(u_i)\xi\,|\,\xi),$$

и $\pi(u_i)$ сильно стремится к 1 (2.2.10). Отсюда следует, что если $\tilde{A}$ — инволютивная алгебра, получаемая из A присоединением единичного элемента, $\tilde{f}$ и $\tilde{\pi}$ — канонические продолжения f и π на $\tilde{A}$, то

$$\tilde{f}(x)=(\tilde{\pi}(x)\xi\,|\,\xi)\quad\text{для любого}\quad x\in\tilde{A}.$$

В частности, если π — тождественное представление, которое предполагается невырожденным, под-C^*-алгебры A в $\mathfrak{B}(H)$, не содержащей оператора 1, то каноническое продолжение $\omega_\xi | A$ на $\tilde{A} = A + \boldsymbol{C} \cdot 1$ есть $\omega_\xi | \tilde{A}$.

2.4.4. Предложение. *Пусть A — инволютивная алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, $\tilde{A}$ — инволютивная алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента, f — положительная непрерывная форма на A, $\tilde{f}$ — ее каноническое продолжение на $\tilde{A}$, N — левый идеал в $\tilde{A}$, образованный такими элементами $x \in \tilde{A}$, что $\tilde{f}(x^*x) = 0$, A'_f — отделимое предгильбертово пространство $\tilde{A}/N$, A_f — гильбертово пространство — пополнение A'_f. Для любого $x \in \tilde{A}$ определим $\pi'(x)$ — оператор в $\tilde{A}/N$, возникающий при переходе к фактору из оператора левого умножения на x в $\tilde{A}$. Пусть ξ — канонический образ 1 в A'_f.*

(i) *Любой $\pi'(x)$ продолжается единственным образом до непрерывного линейного оператора $\pi(x)$ в A_f.*

(ii) *Отображение $x \to \pi(x)$ $(x \in A)$ есть представление A в A_f.*

(iii) *ξ — тотализирующий вектор для $\pi(A)$.*

(iv) *$f(x) = (\pi(x)\xi | \xi)$ для любого $x \in A$.*

По 2.1.5 (ii), имеем для любых $x, y \in \tilde{A}$

$$(\pi'(x)\pi'(y)\xi | \pi'(x)\pi'(y)\xi) = \tilde{f}(y^*x^*xy) \leqslant$$
$$\leqslant \| x^*x \| \tilde{f}(y^*y) = \| x^*x \| (\pi'(y)\xi | \pi'(y)\xi),$$

откуда следует (i). Ясно, что π', а поэтому и π, являются представлениями по отношению к структуре алгебры. Для $x, y, z \in \tilde{A}$ имеем

$$(\pi(x)\pi(y)\xi | \pi(z)\xi) = \tilde{f}(z^*(xy)) = \tilde{f}((x^*z)^*y) = (\pi(y)\xi | \pi(x^*)\pi(z)\xi),$$

откуда $\pi(x)^* = \pi(x^*)$, это доказывает (ii). Множество $\pi(A)\xi$ есть канонический образ A в A'_f и поэтому всюду плотно в A_f по 2.1.5 (vii); это доказывает (iii). Наконец, для любого $x \in \tilde{A}$ имеем

$$(\pi(x)\xi | \xi) = \tilde{f}(1^*x1) = \tilde{f}(x).$$

Говорят, что представление π и вектор ξ *определяются формой* f. Их обозначают π_f и ξ_f.

2.4.5. Сохраним предыдущие обозначения. Пусть M — левый идеал в A, образованный такими элементами $x \in A$, что $f(x^*x) = 0$. Канонический образ A в A_f отождествляется с A/M и, сверх того, всюду плотен в A_f. Таким образом, A_f можно определить как пополнение отделимого предгильбертова пространства A/M; $\pi(x)$ для $x \in A$ можно определить как продолжение по непрерывности оператора левого умножения на x в A/M. Это избавляет нас от введения $\tilde{A}$ и $\tilde{f}$. Но с этой точки зрения определение ξ было бы не таким легким.

2.4.6. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, f — непрерывная положительная форма на A, π и ξ — представление и вектор, определяемые f. Тогда положительная форма, определяемая π и ξ, есть f согласно 2.4.4 (iv).

Обратно, возьмем π — представление A в гильбертовом пространстве — и вектор ξ, тотализирующий для π. Пусть f — положительная форма, определяемая π и ξ; она непрерывна, так как π непрерывно. Пусть π' и ξ' — представление и вектор, определяемые f. Имеем

$$(\pi(x)\xi \mid \xi) = f(x) = (\pi'(x)\xi' \mid \xi') \quad \text{для любого} \quad x \in A$$

и ξ' — тотализирующий для π'. Тогда, по 2.4.1 (ii), существует единственный изоморфизм H_π на $H_{\pi'}$, переводящий π в π' и ξ в ξ'. В частности, пусть π — ненулевое топологически неприводимое представление A. Любой ненулевой вектор в H_π — тотализирующий для π, поэтому π определяется любой ненулевой формой, связанной с π.

2.4.7. Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, π — представление A. Для всякого $x \in A$ имеем $\|\pi(x)\|^2 = \sup f(x^*x)$, где f пробегает множество положительных форм, связанных с π, таких, что $\|f\| \leqslant 1$.*

Благодаря 2.2.6 достаточно рассмотреть случай невырожденного π. По 2.4.3, положительные формы с нормой $\leqslant 1$, связанные с π, имеют вид $\omega_\xi \circ \pi$, где $\xi \in H_\pi$, $\|\xi\| \leqslant 1$. Но

$$\|\pi(x)\|^2 = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} (\pi(x)\xi \mid \pi(x)\xi) = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} (\omega_\xi \circ \pi)(x^*x).$$

2.4.8. Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, f — непрерывная положительная форма на A, π и ξ — представление и вектор, определяемые f.*

(i) *Если $x_0 \in A$, то форма $x \to f(x_0^* x x_0)$ связана с π.*

(ii) *Если f' — положительная форма, связанная с π, то f' есть предел по норме форм $x \to f(x_0^* x x_0)$, где $x_0 \in A$.*

Если $x_0 \in A$, то $f(x_0^* x x_0) = (\pi(x_0^* x x_0)\xi \mid \xi) = (\pi(x)\pi(x_0)\xi \mid \pi(x_0)\xi)$, откуда следует (i).

Пусть $\xi' \in H_\pi$ и $f' = \omega_{\xi'} \circ \pi$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $x_0 \in A$, что $\|\pi(x_0)\xi - \xi'\| \leqslant \varepsilon$.

Тогда для любого $x \in A$

$$
\begin{aligned}
&| f'(x) - f(x_0^* x x_0) | = \\
&= | (\pi(x)\xi' \mid \xi') - (\pi(x)\pi(x_0)\xi \mid \pi(x_0)\xi) | \leqslant \| \pi(x)\xi' \| \cdot \| \xi' - \pi(x_0)\xi \| + \\
&\quad + \| \pi(x)\xi' - \pi(x)\pi(x_0)\xi \| \cdot \| \pi(x_0)\xi \| \leqslant \| x \| \| \xi' \| \varepsilon + \\
&\qquad + \| x \| \cdot \varepsilon (\| \xi' \| + \varepsilon) = \| x \| (2\varepsilon \| \xi' \| + \varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

и $2\varepsilon \| \xi' \| + \varepsilon^2$ сколь угодно мало.

2.4.9. Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал в A, B — C^*-алгебра A/I, ω: $A \to B$ — канонический морфизм. Если f — положительная форма на A, такая, что $f(I) = 0$, то f определяет при переходе к фактору положительную форму g на B. Для любого $x \in A$ имеем

$$(\pi_g(\omega(x))\xi_g \mid \xi_g) = g(\omega(x)) = f(x),$$

следовательно, $\pi_g \circ \omega$ и ξ_g совпадают соответственно с π_f и ξ_f (2.4.1).

Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, f — положительная форма на A, I — замкнутый двусторонний идеал A. Для того чтобы $f(I) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\pi_f(I) = 0$.*

Имеем $\operatorname{Ker} \pi_f \subset \operatorname{Ker} f$, поэтому, если $\pi_f(I) = 0$, то $f(I) = 0$. Если $f(I) = 0$, то $\pi_f \simeq \pi_g \circ \omega$ в предыдущих обозначениях, поэтому $\pi_f(I) = 0$.

2.4.10. Следствие. *$\operatorname{Ker} \pi_f$ есть наибольший замкнутый двусторонний идеал A, содержащийся в $\operatorname{Ker} f$.*

2.4.11. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, f и g — две положительные формы на A. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\operatorname{Ker} \pi_f \subset \operatorname{Ker} \pi_g$.

(ii) *g обращается в нуль на $\operatorname{Ker} \pi_f$.*

Библиография: [1], [2], [7], [10], [30], [110], [117].

2.5. Чистые формы и неприводимые представления.

Мы связали представления с положительными формами. Когда эта процедура дает топологически неприводимые представления? Сейчас мы ответим на этот вопрос.

2.5.1. Предложение. *Пусть A — инволютивная алгебра, π — представление A в H, ξ — элемент H, f — положительная форма на A, определяемая π и ξ.*

(i) *Если T — эрмитов оператор в H, перестановочный с $\pi(x)$ и такой, что $0 \leqslant T \leqslant 1$, то форма $x \to (\pi(x)T\xi \mid T\xi) = (\pi(x)\xi \mid T^2\xi)$ на A есть положительная форма f_T, мажорируемая f.*

(ii) *Если ξ — тотализирующий для π, то отображение $T \to f_T$ инъективно.*

(iii) *Если A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, то все положительные непрерывные формы, мажорируемые f, имеют вид f_T.*

Так как $f_T = \omega_{T\xi} \circ \pi$, то $f_T \geqslant 0$. Если $x \in A$, то

$$f_T(x^*x) = (\pi(x^*x)T\xi \mid T\xi) = \|\pi(x)T\xi\|^2 = \\ = \|T\pi(x)\xi\|^2 \leqslant \|\pi(x)\xi\|^2 = f(x^*x),$$

поэтому $f_T \leqslant f$. Это доказывает (i). Если $f_T = f_{T'}$, то

$$(\pi(x)\xi \mid T^2\xi) = \left(\pi(x)\xi \mid T'^2\xi\right)$$

для любого $x \in A$, поэтому $T^2\xi = T'^2\xi$, если ξ — тотализирующий для $\pi(A)$. Так как в этом случае ξ — отделяющий вектор для коммутанта $\pi(A)$ (A 14), то $T^2 = T'^2$, поэтому $T = T'$, так как $T \geqslant 0$, $T' \geqslant 0$. Это доказывает (ii).

Пусть g — положительная форма на A, мажорируемая f. Для x, $y \in A$ имеем

$$|g(y^*x)|^2 \leqslant g(x^*x)\,g(y^*y) \leqslant f(x^*x)\,f(y^*y) = \|\pi(x)\xi\|^2 \cdot \|\pi(y)\xi\|^2.$$

Следовательно, полагая

$$((\pi(x)\xi \mid \pi(y)\xi)) = g(y^*x),$$

однозначно определяем полуторалинейную непрерывную форму на векторном подпространстве $\pi(A)\xi \subset H$, очевидно, положительную и эрмитову. Тогда существует такой эрмитов оператор T_0 в $X = \overline{\pi(A)\xi}$, что $0 \leqslant T_0 \leqslant 1$ и

$$g(y^*x) = (\pi(x)\xi \mid T_0\pi(y)\xi).$$

Для x, y, $z \in A$ имеем

$$(\pi(y)\xi \mid T_0\pi(z)\pi(x)\xi) = g((zx)^*y) = g(x^*(z^*y)) = \\ = (\pi(z^*y)\xi \mid T_0\pi(x)\xi) = (\pi(z)^*\pi(y)\xi \mid T_0\pi(x)\xi) = \\ = (\pi(y)\xi \mid \pi(z)T_0\pi(x)\xi),$$

откуда $T_0\pi(z) = \pi(z)T_0$ на X. Кроме того, X инвариантно относительно $\pi(A)$; поэтому P_X перестановочен с $\pi(A)$. Поэтому T_0P_X — эрмитов оператор в H, заключенный между 0 и 1, перестановочный с $\pi(z)$ $(z \in A)$. Пусть T — положительный квадратный корень из T_0P_X, перестановочный с $\pi(z)$. Тогда $0 \leqslant T \leqslant 1$ и

$$g(y^*x) = (\pi(x)\xi \mid T^2\pi(y)\xi) = (\pi(x)T\xi \mid \pi(y)T\xi) = \\ = (\pi(y^*x)T\xi \mid T\xi) = f_T(y^*x).$$

Предположим, наконец, что A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу (u_i), и g

непрерывна. Имеем

$$g(y^*) = \lim g(y^* u_i), \qquad f_T(y^*) = \lim f_T(y^* u_i),$$

поэтому $g = f_T$.

2.5.2. Определение. *Пусть A — инволютивная нормированная алгебра, f — непрерывная положительная форма на A. Говорят, что f чистая, если $f \neq 0$ и если все положительные непрерывные формы на A, мажорируемые f, имеют вид λf $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Обозначим через $P(A)$ множество чистых состояний A.*

Пусть Ω — локально компактное пространство. Пусть A — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на Ω, стремящихся к нулю на бесконечности. Чистые положительные формы на A можно отождествить с положительными мерами на Ω, носитель которых состоит из одной точки, иначе говоря, с мерами $f \to \lambda f(\omega)$ $(\lambda > 0$, ω — фиксированная точка в $\Omega)$. Отсюда следует, что чистые состояния коммутативной C^*-алгебры суть характеры этой алгебры.

2.5.3. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, $\tilde{A}$ — инволютивная банахова алгебра, получаемая из A присоединением единичного элемента, f — непрерывная положительная форма на A, $\tilde{f}$ — ее каноническое продолжение на $\tilde{A}$. Для того чтобы f была чистой, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{f}$ была чистой. В самом деле, с одной стороны, условия $f = 0$ и $\tilde{f} = 0$ эквивалентны. С другой стороны, если g пробегает множество непрерывных положительных форм на A, мажорируемых f, то $\tilde{g}$ пробегает множество непрерывных положительных форм на $\tilde{A}$, мажорируемых $\tilde{f}$ (2.1.7). Наконец, для того чтобы g имела вид λf, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{g} = \lambda \tilde{f}$.

2.5.4. Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, f — непрерывная положительная форма на A, π — представление A, определяемое f. Для того чтобы π было ненулевым топологически неприводимым представлением, необходимо и достаточно, чтобы f была чистой.*

Пусть ξ — вектор в H_π, определяемый f.

Предположим, что f чистая. Пусть E — проектор в H_π, перестановочный с $\pi(A)$. Форма $x \to (\pi(x) E\xi \mid E\xi)$ на A есть непрерывная положительная форма, мажорируемая f (2.5.1), поэтому она равна λf с $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Следовательно,

$$(\pi(x) E\xi \mid E\xi) = (\pi(x) \lambda^{1/2}\xi \mid \lambda^{1/2}\xi) \quad \text{для любого} \quad x \in A.$$

Вследствие 2.5.1 (ii) имеем $E=\lambda^{1/2}1$, т. е. $E=0$ или 1. С другой стороны, существует такой $x\in A$, что $f(x)\neq 0$, поэтому $(\pi(x)\xi\,|\,\xi)\neq 0$. Это доказывает, что π — ненулевое топологически неприводимое представление.

Предположим, что π топологически неприводимо и ненулевое. Существует такой $x\in A$, что $(\pi(x)\xi\,|\,\xi)\neq 0$, поэтому $f\neq 0$. Пусть g — непрерывная положительная форма на A, мажорируемая f. Согласно 2.5.1 (iii) существует такой эрмитов оператор $T\in\pi(A)'$, что $0\leqslant T\leqslant 1$ и $g(x)=(\pi(x)T\xi\,|\,T\xi)$ для любого $x\in A$. Так как π топологически неприводимо, то $T=\mu I$, где $0\leqslant\mu\leqslant 1$, откуда $g=\mu^2 f$. Поэтому f чистая. Это доказывает предложение.

Предложение 2.5.4 определяет каноническое отображение

$$P(A)\to\hat{A}.$$

Согласно 2.4.6 и 2.5.4 это отображение сюръективно. Если $\pi\in\hat{A}$, то его прообраз в $P(A)$ есть множество состояний, связанных с π (см. по этому поводу 2.5.7).

2.5.5. Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, B — множество непрерывных положительных форм на A с нормой $\leqslant 1$.*

(i) *B выпукло и компактно в слабой топологии $\sigma(A', A)$, где A' — сопряженное к A пространство.*

(ii) *Крайние точки B суть 0 и чистые состояния.*

(iii) *B — слабо замкнутая выпуклая оболочка множества чистых состояний и 0.*

B — слабо замкнутая выпуклая часть единичного шара в A', и этот шар слабо компактен, откуда следует (i).

Покажем, что 0 есть крайняя точка B. Если $f\in B$ и $-f\in B$, то $f(x^*x)=0$ для любого $x\in A$, поэтому $|f(x)|^2\leqslant\|f\|f(x^*x)=0$ (2.1.5), т. е. $f=0$.

Пусть f — чистое состояние. Предположим, что $f=\lambda f_1+(1-\lambda)f_2$ при $0<\lambda<1$, $f_1\in B$, $f_2\in B$. Тогда λf_1 мажорируется f, т. е. $\lambda f_1=\mu f$ при $0\leqslant\mu\leqslant 1$. Так как

$$1=\|f\|=\lambda\|f_1\|+(1-\lambda)\|f_2\|$$

и $\|f_1\|\leqslant 1$, $\|f_2\|\leqslant 1$, то необходимо $\|f_1\|=\|f_2\|=1$, поэтому $\lambda=\mu$ и $f_1=f$, $f_2=f$. Это доказывает, что f — крайняя точка B.

Пусть, обратно, f — крайняя точка B, отличная от 0. Ясно, что $\|f\|=1$. Пусть $f=f_1+f_2$, где f_1, f_2 — ненулевые непрерывные положительные формы. Положим $\|f_1\|=\lambda$, тогда $\|f_2\|=1-\lambda$. Пусть $g_1=\lambda^{-1}f_1$, $g_2=(1-\lambda)^{-1}f_2$. Тогда $f=\lambda g_1+(1-\lambda)g_2$, $g_1\in B$, $g_2\in B$. Так как f — крайняя, то $f=g_1=g_2$. Поэтому $f_1=\lambda f$, $f_2=(1-\lambda)f$, так что f — чистое состояние. Это доказывает (ii).

Наконец, (iii) следует из (i), (ii) и теоремы Крейна — Мильмана.

2.5.6. Сохраним предыдущие обозначения и предположим, сверх того, что A имеет единичный элемент. Тогда B — множество таких положительных форм f на A, что $f(1) \leqslant 1$, а множество $E(A)$ состояний A есть множество таких положительных форм f на A, что $f(1) = 1$. Отсюда следует, что $E(A)$ выпукло и слабо компактно и множество всех крайних точек $E(A)$ есть множество крайних точек B, принадлежащих $E(A)$, т. е. $P(A)$. Итак, $E(A)$ — замкнутая выпуклая оболочка $P(A)$.

2.5.7. Предложение. *Пусть A — инволютивная алгебра, π — ненулевое топологически неприводимое представление A, ξ_1 и ξ_2 — векторы из H_π, f_1 и f_2 — положительные формы, определяемые (π, ξ_1) и (π, ξ_2). Для того чтобы $f_1 = f_2$, необходимо и достаточно, чтобы существовало комплексное число λ с модулем 1 такое, что $\xi_2 = \lambda\xi_1$.*

Если $\xi_2 = \lambda\xi_1$ с $|\lambda| = 1$, то очевидно, что $f_1 = f_2$. Предположим, что $f_1 = f_2$. Так как ξ_1 и ξ_2 — тотализирующие векторы для π (2.3.1), то существует такой автоморфизм U пространства H, перестановочный с $\pi(x)$, что $U\xi_1 = \xi_2$ [2.4.1 (ii)]. Но U есть скалярный оператор умножения на λ (2.3.1), откуда $\xi_2 = \lambda\xi_1$ и $|\lambda| = 1$.

В частности, каноническое отображение $P(A) \to \hat{A}$ биективно тогда и только тогда, когда любое топологически неприводимое представление A одномерно. Если A — C^*-алгебра, то из теоремы 2.7.3 следует, что это условие выполнено тогда и только тогда, когда A коммутативна.

Библиография: [1], [2], [7], [10], [30], [110], [117].

2.6. Существование представлений C^*-алгебр.

2.6.1. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра. Существует изометрическое представление A в гильбертовом пространстве.*

Пусть A_h — вещественное банахово пространство эрмитовых элементов A. Пусть x — ненулевой элемент A. Тогда $-x^*x \notin A^+$ (1.6.1), и A^+ — замкнутый выпуклый конус (1.6.1), поэтому существует непрерывная линейная форма f_x на A_h такая, что $f_x(y) \geqslant 0$ для $y \in A^+$ и $f_x(-x^*x) < 0$ (B5). Отождествим f_x с эрмитовой формой на A. Тогда f_x — положительная форма на A и $f_x(x^*x) > 0$, поэтому для представления π_x, определяемого f_x по 2.4.4, имеем $\pi_x(x) \neq 0$. Пусть π — гильбертова сумма представлений π_x для $x \in A$, $x \neq 0$. Тогда π инъективно, поэтому изометрично (1.3.7 и 1.8.1). Это доказывает теорему.

Таким образом, как и было сказано выше, замкнутые инволютивные подалгебры алгебры $\mathfrak{B}(H)$ (H — гильбертово пространство) дают самые общие примеры C^*-алгебр.

2.6.2. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра и $x \in A$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $x \geqslant 0$.

(ii) *Для любого представления π C^*-алгебры A оператор $\pi(x)$ положителен.*

(iii) *Для любой положительной формы f на A имеем $f(x) \geqslant 0$.*

(i)$\Rightarrow$(iii): очевидно.

(iii)$\Rightarrow$(ii): пусть π — представление A и $\xi \in H_\pi$; форма $y \to (\pi(y)\xi \mid \xi)$ на A положительна; поэтому, если выполнено (iii), то $(\pi(x)\xi \mid \xi) \geqslant 0$; поэтому оператор $\pi(x) \geqslant 0$.

(ii)$\Rightarrow$(i): пусть π — изометрическое представление A (2.6.1); если оператор $\pi(x) \geqslant 0$, то $\pi(x)$ положителен относительно $\pi(A)$ (1.6.5); поэтому x положителен относительно A.

2.6.3. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, A_h — множество эрмитовых элементов A, B — множество положительных форм на A с нормой $\leqslant 1$, $P \subset B$ — множество чистых состояний A. Снабдим B и P слабой топологией. Пусть $C(B)$, $C(P)$ — множества непрерывных вещественных функций на B и P. Пусть $x \in A_h$; обозначим F_x непрерывную вещественную функцию $f \to \langle f, x \rangle$ на B; пусть G_x — ее ограничение на P. Отображение $x \to F_x$ (соотв. $x \to G_x$) есть изометрический изоморфизм упорядоченного банахова пространства A_h на векторное подпространство упорядоченного банахова пространства $C(B)$ [соотв. $C(P)$].*

Ясно, что эти отображения линейны и

$$x \geqslant 0 \Rightarrow F_x \geqslant 0 \Rightarrow G_x \geqslant 0.$$

Обратно, предположим, что $G_x \geqslant 0$, иначе говоря, $f(x) \geqslant 0$ для любого $f \in P$. Вследствие 2.5.5 имеем $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in B$, поэтому $x \geqslant 0$ (2.6.2). С другой стороны, предположим, что A реализована в гильбертовом пространстве H (2.6.1), и пусть $x \in A_h$ — такой, что $\|x\| = 1$. Существуют такие $\xi \in H$ с нормой 1, что $|(x\xi \mid \xi)|$ сколь угодно близко к 1, значит, такие $g \in B$, что $|f(x)|$ сколь угодно близко к 1, стало быть такие $g \in P$, что $|f(x)|$ сколь угодно близко к 1. Поэтому $1 \leqslant \|G_x\| \leqslant \|F_x\| \leqslant 1$. Отсюда получаем наше следствие.

Если A коммутативна, то отображение $x \to G_x$ — не что иное, как гельфандовский изоморфизм (суженный на A_h). Другое обобщение гельфандовского изоморфизма на некоммутативный случай, более удовлетворительное в некоторых отношениях, будет изучено позже (10.5.4).

2.6.4. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, g — эрмитова непрерывная линейная форма на A. Существуют такие положительные формы f, f' на A, что $g = f - f'$, $\|g\| = \|f\| + \|f'\|$.*

Сохраним обозначения 2.6.3 и отождествим A_h с векторным подпространством $C(B)$. По теореме Хана — Банаха g продолжается до линейной формы μ на $C(B)$ такой, что $\|\mu\| = \|g\|$

(см. 1.2.6). Мера μ на B представима в виде $\mu = \mu^+ - \mu^-$, где μ^+, μ^- — такие положительные меры, что $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$. Пусть $f = \mu^+ | A_h$, $f' = \mu^- | A_h$. Тогда $g = f - f'$ и

$$\|g\| \leqslant \|f\| + \|f'\| \leqslant \|\mu^+\| + \|\mu^-\| = \|\mu\| = \|g\|,$$

откуда

$$\|g\| = \|f\| + \|f'\|.$$

Мы увидим позже, что разложение 2.6.4 единственно.

Библиография: [1], [2], [7], [10], [35], [63], [110], [117], [130].

2.7. Обертывающая C^*-алгебра инволютивной банаховой алгебры.

2.7.1. Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу. Пусть R — множество представлений A, R' — множество топологически неприводимых представлений A, B — множество непрерывных положительных форм на A с нормой $\leqslant 1$, P — множество чистых состояний A. Для любого $x \in A$ имеем*

$$\sup_{\pi \in R} \|\pi(x)\| = \sup_{\pi \in R'} \|\pi(x)\| = \sup_{f \in B} f(x^*x)^{1/2} = \sup_{f \in P} f(x^*x)^{1/2}. \qquad (1)$$

Обозначим через $\|x\|'$ общее значение этих четырех выражений. Тогда $\|x\|' \leqslant \|x\|$. Отображение $x \to \|x\|'$ есть полунорма на A, обладающая свойством

$$\|xy\|' \leqslant \|x\|' \|y\|', \qquad \|x^*\|' = \|x\|', \qquad \|x^*x\|' = \|x\|'^2$$

для любых x, $y \in A$.

Обозначим через a, b, c, d четыре числа, последовательно рассматриваемые в (1).

$d \leqslant b$: пусть $f \in P$; тогда f связано с представлением $\pi \in R'$ (1.5.4) и $f(x^*x) \leqslant \|\pi(x)\|^2$ (2.4.7);

$b \leqslant a$: очевидно;

$a \leqslant c$: следует из 2.4.7;

$c \leqslant d$: пусть $f \in B$; вследствие 2.5.5 $f(x^*x)$ принадлежит замкнутому интервалу, порожденному 0 и числами $g(x^*x)$, где $g \in P$; поэтому $f(x^*x) \leqslant \sup_{g \in P} g(x^*x)$.

Вследствие 1.3.7 имеем $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ для всех $\pi \in R$, поэтому $\|x\|' \leqslant \|x\|$. С другой стороны, любая функция $x \to \|\pi(x)\|$ есть полунорма на A, поэтому $x \to \|x\|'$ есть полунорма на A. Имеем

$$\|\pi(x^*)\| = \|\pi(x)\| \quad \text{и} \quad \|\pi(x^*x)\| = \|\pi(x)\|^2$$

для любых $\pi \in R$, поэтому

$$\|x^*\|' = \|x\|' \quad \text{и} \quad \|x^*x\|' = \|x\|'^2.$$

Наконец, если $x, y \in A$, то для любого $\pi \in R$

$$\|\pi(xy)\| \leqslant \|\pi(x)\| \cdot \|\pi(y)\| \leqslant \|x\|' \cdot \|y\|',$$

поэтому

$$\|xy\|' \leqslant \|x\|' \|y\|'.$$

2.7.2. Пусть I — множество таких $x \in A$, что $\|x\|' = 0$. Это — замкнутый самосопряженный двусторонний идеал в A. Отображение $x \to \|x\|'$ определяет при переходе к фактору норму на A/I. Снабженная этой нормой A/I удовлетворяет всем аксиомам C^*-алгебр кроме, быть может, аксиомы полноты. Пополнение B инволютивной нормированной алгебры A/I есть C^*-алгебра, называемая *обертывающей C^*-алгеброй* алгебры A. Каноническое отображение A в B есть морфизм инволютивных алгебр, не увеличивающий нормы, и его образ всюду плотен в B.

2.7.3. Если A — C^*-алгебра, то $\|x\|' = \|x\|$ по 2.6.1, и A отождествляется со своей обертывающей алгеброй. В этом случае предложение 2.7.1 дает обещанное ранее существование «достаточно многих» топологически неприводимых представлений, и значительно усиливает теорему 2.6.1.

Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра. Существует семейство (π_i) топологически неприводимых представлений A таких, что $\|x\| = \sup_i \|\pi_i(x)\|$ для всех $x \in A$.*

2.7.4. Предложение. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, B — обертывающая C^*-алгебра A, τ — каноническое отображение A в B.*

(i) *Если π — представление A, то существует единственное представление ρ C^*-алгебры B такое, что $\pi = \rho \circ \tau$; $\rho(B)$ есть C^*-алгебра, порожденная $\pi(A)$.*

(ii) *Отображение $\pi \to \rho$ есть биекция множества представлений A на множество представлений B.*

(iii) *Для того чтобы ρ было невырожденным (соотв. топологически неприводимым), необходимо и достаточно, чтобы π было невырожденным (соотв. топологически неприводимым).*

Пусть π — представление A. В обозначениях 2.7.2 π обращается в нуль на I и определяет при переходе к фактору представление π' инволютивной алгебры A/I такое, что $\|\pi'(z)\| \leqslant \|z\|$ для любого $z \in A/I$ ($\| \quad \|$ означает норму в B). Поэтому π' продолжается до такого представления ρ C^*-алгебры B, что $\pi = \rho \circ \tau$. Утверждение единственности в (i) следует из того, что $\tau(A)$ всюду плотно в B. Отсюда следует также, что $\pi(A)$ всюду плотно в $\rho(B)$ в смысле нормы оператора. Так как $\rho(B)$ — C^*-алгебра (1.8.3), то $\rho(B)$ есть C^*-алгебра, порожденная $\pi(A)$. Утверждения (ii) и (iii) очевидны.

Предложение 2.7.4 показывает, что B есть решение некоторой универсальной задачи. Оно показывает также, что в большинстве вопросов о представлениях инволютивных банаховых алгебр, допускающих аппроксимативную единицу, можно ограничиться случаем C^*-алгебр.

2.7.5. Предложение. *Сохраним обозначения A, B, τ из* 2.7.4.

(i) *Пусть f — непрерывная положительная форма на A. Существует единственная положительная форма g на B такая, что $f = g \circ \tau$. Имеем $\| g \| = \| f \|$.*

(ii) *Отображение $f \to g$ есть биекция множества непрерывных положительных форм на A на множество положительных форм на B.*

(iii) *Пусть M — ограниченное множество непрерывных положительных форм на A. Отображение $f \to g$, суженное на M, взаимно непрерывно в слабых топологиях $\sigma(A', A)$, $\sigma(B', B)$ (A', B' обозначают пространства, сопряженные к A и B).*

Пусть f — непрерывная положительная форма на A. Вследствие 2.1.5 (i) имеем для любого $x \in A$

$$| f(x) | \leqslant \| f \|^{1/2} f(x^*x)^{1/2} \leqslant \| f \|^{1/2} \| f \|^{1/2} \| x \|',$$

откуда следует существование такой непрерывной линейной формы g на B, что $f = g \circ \tau$ и $\| g \| \leqslant \| f \|$. Если $y \in B$, то существует такая последовательность (x_n) в A, что $\tau(x_n) \to y$, откуда

$$g(y^*y) = \lim f(x_n^* x_n) \geqslant 0,$$

поэтому g положительна. Если $x \in A$ и $\| x \| \leqslant 1$, имеем

$$| f(x) | = | g(\tau(x)) | \leqslant \| g \| \cdot \| \tau(x) \| \leqslant \| g \| \cdot \| x \| \leqslant \| g \|,$$

поэтому $\| f \| \leqslant \| g \|$.

Единственность g следует из того, что $\tau(A)$ всюду плотно в B. Таким образом, (i) доказано, а (ii) очевидно. Пусть $M \subset A'$ — множество непрерывных положительных форм на A и $N \subset B'$ — его образ при отображении $f \to g$. Ясно, что отображение $f \to g$ множества M на N взаимно непрерывно в слабых топологиях $\sigma(A', A)$, $\sigma(B', \tau(A))$. Если M ограничено, то N ограничено вследствие (i), поэтому, так как $\tau(A)$ всюду плотно в B, топологии $\sigma(B', \tau(A))$ и $\sigma(B', B)$ совпадают на N.

2.7.6. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу. Пусть Q — множество непрерывных положительных форм на A. Пусть $f \in Q$ и π_f — представление, определенное f. Тогда представление $\pi = \bigoplus_{f \in Q} \pi_f$ называется *универсальным представлением* A. Оно невырождено. Вследствие (2.2.7) и (2.4.6) любое невырожденное представление A есть гильбертова сумма представлений π_f, поэтому $\| x \|' = \| \pi(x) \|$ для любого $x \in A$. Следовательно, если

B—обертывающая C^*-алгебра A, то представление B, соответствующее π, есть изоморфизм B на $\overline{\pi(A)}$.

Библиография: [2], [7], [10], [30], [110], [117], [161].

2.8. Теорема транзитивности.

2.8.1. Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — ортонормированная система в H, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — векторы в H с нормой $\leqslant r$. Существует такой $b \in \mathfrak{B}(H)$ с нормой $\leqslant (2n)^{1/2} r$, что $b\xi_1 = \zeta_1, \ldots, b\xi_n = \zeta_n$. Если существует такой эрмитов элемент h в $\mathfrak{B}(H)$, что $h\xi_1 = \zeta_1, \ldots, h\xi_n = \zeta_n$, то b можно также выбрать эрмитовым.*

Пусть K — векторное подпространство H, порожденное $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Определим b так, чтобы b сохранял K и обращался в нуль на $H \ominus K$. Это позволяет ограничиться случаем $K = H$. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_m)$ — ортонормированный базис в H. Пусть b — оператор в H, матрица которого относительно $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ имеет следующий вид:

a) n первых столбцов суть координаты $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ относительно ξ_i;

b) если h существует, то n первых строк сопряжены n первым столбцам (это возможно, так как существование h означает, что квадратная матрица, составленная из n первых строк и n первых столбцов, эрмитова);

c) элементы, не определенные до сих пор, — нули.

Имеем

$$b\xi_1 = \zeta_1, \ldots, b\xi_n = \zeta_n$$

и

$$\| b \|^2 \leqslant \operatorname{Tr}(b^*b) \leqslant 2(\| \zeta_1 \|^2 + \ldots + \| \zeta_n \|^2) \leqslant 2nr^2.$$

Если h существует, то b — эрмитов по построению.

2.8.2. Лемма. *Пусть $H_1, \ldots, H_p$ — гильбертовы пространства, $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_p$, A — C^*-алгебра операторов в H, сильно всюду плотная в алгебре фон Неймана $\mathfrak{B}(H_1) \times \mathfrak{B}(H_2) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p)$. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — ортонормированная система в H и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — векторы в H с нормой $\leqslant r$. Предположим, что для $i = 1, \ldots, n$ векторы ξ_i и η_i лежат в одном и том же подпространстве $H_{j(i)}$. Существует такой $b \in A$ с нормой $\leqslant 3rn^{1/2}$, что $b\xi_1 = \eta_1, \ldots, b\xi_n = \eta_n$. Если существует эрмитов $h \in \mathfrak{B}(H)$ такой, что $h\xi_1 = \eta_1, \ldots, h\xi_n = \eta_n$, то b можно также выбрать эрмитовым в A.*

По теореме плотности Капланского единичный шар A (соотв. эрмитова часть A) сильно плотен в единичном шаре $\mathfrak{B}(H_1) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p)$ [соотв. в эрмитовой части $\mathfrak{B}(H_1) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p)$]. Это означает, что существует, во-первых, элемент

$y_0 \in \mathfrak{B}(H_1) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p)$ такой, что

$$y_0\xi_1 = \eta_1, \ \ldots, \ y_0\xi_n = \eta_n, \qquad \| y_0 \| \leqslant (2n)^{1/2} r$$

(вследствие 2.8.1, примененного последовательно к $H_1, \ldots, H_p$), и, во-вторых, $x_0 \in A$ такой, что

$$\| x_0\xi_1 - y_0\xi_1 \| \leqslant \frac{1}{2} r, \ \ldots, \ \| x_0\xi_n - y_0\xi_n \| \leqslant \frac{1}{2} r, \quad \| x_0 \| \leqslant (2n)^{1/2} r.$$

Далее, существует $y_1 \in \mathfrak{B}(H_1) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p)$ такой, что

$$y_1\xi_1 = \eta_1 - x_0\xi_1, \ \ldots, \ y_1\xi_n = \eta_n - x_0\xi_n, \qquad \| y_1 \| \leqslant \frac{1}{2} (2n)^{1/2} r,$$

согласно 2.8.1, и поэтому существует $x_1 \in A$ такой, что

$$\| x_1\xi_1 - y_1\xi_1 \| \leqslant \frac{1}{4} r, \ \ldots, \ \| x_1\xi_n - y_1\xi_n \| \leqslant \frac{1}{4} r, \quad \| x_1 \| \leqslant \frac{1}{2} (2n)^{1/2} r.$$

По индукции построим такие элементы $y_k \in \mathfrak{B}(H_1) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p)$ и $x_k \in A$, что

$$y_k\xi_i = \eta_i - x_0\xi_i - \ \ldots \ - x_{k-1}\xi_i, \qquad \| y_k \| \leqslant \frac{1}{2^k} (2n)^{1/2} r,$$

$$\| x_k\xi_i - y_k\xi_i \| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} r, \qquad \| x_k \| \leqslant \frac{1}{2^k} (2n)^{1/2} r.$$

(Если h существует, то y_k и x_k можно выбирать эрмитовыми.) Тогда ряд $x_0 + x_1 + \ldots$ сходится по норме к такому $b \in A$, что

$$b\xi_1 = \eta_1, \ \ldots, \ b\xi_n = \eta_n,$$

$$\| b \| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ \ldots\right)(2n)^{1/2} r \leqslant 3rn^{1/2}.$$

2.8.3. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра, $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента, $\pi_1, \ldots, \pi_p$ — представления A в гильбертовых пространствах $H_1, \ldots, H_p$, $\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_p$ — канонические продолжения $\pi_1, \ldots, \pi_p$ на $\tilde{A}$. Предположим, что π_j — попарно неэквивалентные ненулевые топологически неприводимые представления.*

(i) *Пусть $T_1 \in \mathfrak{B}(H_1), \ldots, T_p \in \mathfrak{B}(H_p)$, $K_1, \ldots, K_p$ — конечномерные векторные подпространства $H_1, \ldots, H_p$. Существует такой $x \in A$, что*

$$\pi_j(x) \mid K_j = T_j \mid K_j \quad \textit{для} \quad j = 1, \ldots, p.$$

(ii) *Пусть $T_1 \in \mathfrak{B}(H_1), \ldots, T_p \in \mathfrak{B}(H_p)$ — эрмитовы операторы, $K_1, \ldots, K_p$ — конечномерные векторные подпространства $H_1, \ldots, H_p$. Существует такой эрмитов элемент x в $\tilde{A}$, что*

$$\pi_j(x) \mid K_j = T_j \mid K_j \quad \textit{для} \quad j = 1, \ldots, p.$$

(iii) *Пусть* $T_1 \in \mathfrak{B}(H_1), \ldots, T_p \in \mathfrak{B}(H_p)$ — *унитарные операторы,* $K_1, \ldots, K_p$ — *конечномерные векторные подпространства* $H_1, \ldots, H_p$. *Существует такой унитарный элемент* x *в* $\tilde{A}$, *что*

$$\tilde{\pi}_j(x) \mid K_j = T_j \mid K_j \quad \textit{для} \quad j = 1, \ldots, p.$$

Пусть $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_p$, $\pi = \pi_1 \oplus \ldots \oplus \pi_p$. Вследствие 1.8.3 $\pi(A)$ есть под-C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)$, перестановочная с проекторами $E_j = P_{H_j}$. Пусть B — алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$. Имеем

$$\pi(A) \subset \mathfrak{B}(H_1) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p), \text{ поэтому } B \subset \mathfrak{B}(H_1) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p).$$

Так как каждое π_j невырождено, то π невырождено, поэтому $\pi(A)$ сильно всюду плотно в B. Так как π_j топологически неприводимо, то E_j — минимальный проектор в $\pi(A)' = B'$, и алгебра фон Неймана, индуцированная B в H_j, есть $\mathfrak{B}(H_j)$. Пусть $F_j \in B \cap B'$ — центральный носитель E_j (A10). Пусть j и k — два различных индекса. Если F_j и F_k не ортогональны, то существуют ненулевые проекторы E'_j, E'_k в B', мажорируемые соответственно проекторами E_j, E_k и эквивалентные относительно B' (A44); так как E_j, E_k — минимальные проекторы в B', то $E'_j = E_j$, $E'_k = E_k$; следовательно, существует частично изометрический оператор в B', начальным и конечным проекторами которого являются E_j и E_k; но тогда π_j и π_k эквивалентны, что невозможно. Поэтому F_j попарно ортогональны. Но $F_j \geqslant E_j$ для всех j, поэтому $E_j = F_j \in B$. Так как $B_{E_j} = \mathfrak{B}(H_j)$, то получаем $B \supset \mathfrak{B}(H_1) \times \ldots \times \mathfrak{B}(H_p)$ и, наконец, $B = \mathfrak{B}(H_1) \times \ldots$ $\ldots \times \mathfrak{B}(H_p)$.

Пусть $T_1 \in \mathfrak{B}(H_1), \ldots, T_p \in \mathfrak{B}(H_p)$, $K_1, \ldots, K_p$ — конечномерные векторные подпространства $H_1, \ldots, H_p$. Вследствие 2.8.2 существует такой $x \in A$, что $\pi_j(x) \mid K_j = T_j \mid K_j$ при $j = 1, \ldots, p$. Если T_j эрмитовы, то можно выбрать x так, чтобы $\pi(x)$ был эрмитов (2.8.2); так как $\pi(x) = \pi\left(\frac{1}{2}(x + x^*)\right)$, то сам x может быть выбран эрмитовым. Предположим, что T_j унитарны. Для $j = 1, \ldots, p$ существует конечномерное векторное подпространство $K'_j \supset K_j$ в H_j и унитарный оператор $T'_j \in \mathfrak{B}(H_j)$, сохраняющий K'_j и такой, что $T'_j \mid K_j = T_j \mid K_j$; кроме того, существует эрмитов оператор $T''_j \in \mathfrak{B}(H_j)$, сохраняющий K'_j и такой, что $\exp(iT''_j) \mid K'_j = T'_j \mid K'_j$. По предыдущему, существует эрмитов элемент y в A такой, что $\pi(y) \mid K'_j = T''_j \mid K'_j$ для всех j. Тогда $x = \exp(iy)$ есть унитарный элемент в $\tilde{A}$ и $\tilde{\pi}_j(x) \mid K_j = T_j \mid K_j$ для всех j.

2.8.4. Следствие. *Любое топологически неприводимое представление C^*-алгебры алгебраически неприводимо.*

Достаточно применить теорему 2.8.3 при $p=1$ и $\dim K_1 = 1$.

Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о неприводимых представлениях C^*-алгебр без уточнений.

2.8.5. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, f — чистая положительная форма на A и N — левый идеал, образованный такими $x \in A$, что $f(x^*x)=0$. Тогда A/N, снабженное скалярным произведением, получаемым из $f(y^*x)$, полно и поэтому является пространством представления, определенного f.*

Действительно, пусть π — это представление; оно топологически неприводимо (2.5.4). По построению π, A/N есть векторное подпространство H_π, инвариантное относительно π. Но $A/N \neq 0$, поэтому $A/N = H_\pi$ (2.8.4).

2.8.6. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента, f_1 и f_2 — чистые состояния A. Для того чтобы f_1, f_2 определяли эквивалентные представления π_1, π_2, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой унитарный элемент u в $\tilde{A}$, что $f_2(x)=f_1(u^*xu)$ для любого $x \in A$.*

Пусть ξ_1 — вектор в H_{π_1}, определенный f_1. Состояния A, определяемые представлениями, эквивалентными π_1, суть состояния, связанные с π_1 (2.4.6), т. е. имеющие вид $x \to (\pi_1(x)\xi \mid \xi)$, где ξ — единичный вектор в H_{π_1} (2.4.3). Но единичные векторы в H_{π_1} суть векторы $\tilde{\pi}_1(u)\xi_1$, где u — унитарный элемент $\tilde{A}$ (2.8.3), а $\tilde{\pi}_1$ обозначает каноническое продолжение π_1 на $\tilde{A}$. Наконец,

$$(\pi_1(x)\tilde{\pi}_1(u)\xi_1 \mid \tilde{\pi}_1(u)\xi_1) = (\pi_1(u^*xu)\xi_1 \mid \xi_1) = f_1(u^*xu).$$

Библиография: [27], [62], [110].

2.9. Идеалы в C^*-алгебрах.

2.9.1. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, f — положительная форма на A, M — ее ядро, N — множество таких $x \in A$, что $f(x^*x)=0$. Тогда $M \supset N + N^*$, и если f чистая, то $M = N + N^*$.*

Так как $|f(x)|^2 \leqslant \|f\| f(x^*x)$, то $N \subset M$, поэтому $N^* \subset M^* = M$; поэтому $N + N^* \subset M$. Предположим теперь, что f чистая. Пусть $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента, $\tilde{f}$ — каноническое продолжение f на A. Пусть π и ξ — неприводимое представление и вектор, определяемые f. Пусть $b \in M$ и η — канонический образ b в H_π. По построению π и ξ, имеем $(\eta \mid \xi) = \tilde{f}(1^* \cdot b) = 0$. Поэтому существует эрмитов оператор в H_π, который аннулирует ξ и сохраняет η. Вследствие 2.8.3 существует эрмитов элемент a в A такой, что $\pi(a)\xi=0$ и $\pi(a)\eta=\eta$, иначе говоря, такой, что $a\in N$ и $b-ab\in N$. Тогда

$$b^*=(b-ab)^*+b^*a\in N^*+N.$$

Поэтому $M=M^*\subset N^*+N$.

2.9.2. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, L — замкнутый левый идеал A и $x\in A^+$. Если для любого $\varepsilon>0$ существует такой положительный элемент u_ε в L, что $x\leqslant u_\varepsilon+\varepsilon$, то $x\in L$.*

Пусть $t_\varepsilon=u_\varepsilon^{1/2}$. Этот элемент является пределом полиномов от u_ε без свободных членов и поэтому принадлежит L. Имеем

$$\left\|x^{1/2}\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}t_\varepsilon-x^{1/2}\right\|^2=\left\|x^{1/2}\sqrt{\varepsilon}\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}\right\|^2=$$
$$=\varepsilon\left\|\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{*-1}(x^{1/2})^*x^{1/2}\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}\right\|=$$
$$=\varepsilon\left\|\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}x\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}\right\|,$$

и так как $0\leqslant x\leqslant t_\varepsilon^2+\varepsilon$, то (1.6.8)

$$0\leqslant\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}x\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}\leqslant\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}(t_\varepsilon^2+\varepsilon)\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant(t_\varepsilon^2+\varepsilon)\left(t_\varepsilon^2+2\sqrt{\varepsilon}\,t_\varepsilon+\varepsilon\right)^{-1}\leqslant 1,$$

поэтому

$$\left\|x^{1/2}\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}t_\varepsilon-x^{1/2}\right\|^2\leqslant\varepsilon.$$

Но $x^{1/2}\left(t_\varepsilon+\sqrt{\varepsilon}\right)^{-1}t_\varepsilon\in L$, поэтому $x^{1/2}\in L$, так как L замкнут; поэтому $x\in L$.

2.9.3. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, L — замкнутый левый идеал в A. Тогда L есть замкнутый левый идеал, порожденный $L\cap A^+$.*

Это сразу следует из 1.7.3.

2.9.4. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, L и L' — такие замкнутые левые идеалы A, что $L\subset L'$. Предположим, что любая положительная форма на A, нулевая на L, является нулевой на L'. Тогда $L=L'$.*

Можно предположить, что A содержит единичный элемент. Пусть $a\in L'\cap A^+$ и $\varepsilon>0$. Множество S_ε таких положительных форм на A, что $f(1)=\|f\|=1$ и $f(a)\geqslant\varepsilon$, слабо компактно. Если $f\in S_\varepsilon$, то f — ненулевая на L', поэтому и на L, т. е. существует такой $x_f\in L$, что $f(x_f)\neq 0$; поэтому существует такая слабая окрестность U_f элемента f в S_ε, что $g(x_f)\neq 0$ для $g\in U_f$. Используя компактность S_ε, видим, что существует конечное открытое покрытие $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ множества S_ε и элементы $a_1, \ldots, a_m$ в L такие, что

$$0 < |f(a_i)|^2 \leqslant f(a_i^* a_i) \quad \text{для} \quad f \in U_i.$$

Следовательно, $f(a_1^* a_1 + \ldots + a_m^* a_m) > 0$ для всех $f \in S_\varepsilon$. Умножая a_i на достаточно большие числа, получаем, что $f(a_1^* a_1 + \ldots + a_m^* a_m) \geqslant f(a)$ для всех $f \in S_\varepsilon$. Следовательно, $f(a_1^* a_1 + \ldots + a_m^* a_m + \varepsilon - a) \geqslant 0$ для любой положительной формы f, так что $a \leqslant a_1^* a_1 + \ldots + a_m^* a_m + \varepsilon$ (2.6.2). Следовательно, $a \in L$ (2.9.2). Таким образом, L и L' содержат одни и те же положительные элементы и поэтому равны (2.9.3).

2.9.5. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра.*

(i) *Пусть f — положительная форма на A и N_f — левый идеал, образованный такими $x \in A$, что $f(x^*x) = 0$. Для того чтобы N_f был регулярным максимальным идеалом, необходимо и достаточно, чтобы f была чистой.*

(ii) *Отображение $f \to N_f$ определяет биекцию множества чистых состояний на множество регулярных максимальных левых идеалов.*

(iii) *Любой замкнутый левый идеал в A есть пересечение содержащих его регулярных максимальных левых идеалов.*

a) Пусть f — чистая положительная форма на A. Вследствие 2.8.4 и 2.8.5 каноническое представление π C^*-алгебры A в A/N_f есть ненулевое алгебраически неприводимое представление. Существует такой $\xi = H_\pi = A/N_f$, что N_f есть множество $x \in A$, для которых $\pi(x)\xi = 0$. Поэтому N_f — регулярный максимальный левый идеал в A.

b) Пусть L — замкнутый левый идеал в A. Пусть S — множество положительных форм на A с нормой $\leqslant 1$, которые равны нулю на L. Если $f \in S$, то $N_f \supset L$ [так как $x^*x \in L$ для любого $x \in L$, то $f(x^*x) = 0$]. Вследствие 2.9.4 имеем $L = \bigcap_{f \in S} N_f$. С другой стороны, S выпукло и слабо компактно, поэтому является слабо замкнутой выпуклой оболочкой множества S' ее крайних точек. Следовательно, если $x \in A$ и $f(x^*x) = 0$ для любой $f \in S'$, то $f(x^*x) = 0$ для всех $f \in S$. Это доказывает, что $\bigcap_{f \in S} N_f = \bigcap_{f \in S'} N_f$. Наконец, если $f \in S$ представимо в виде $f = f_1 + f_2$ (f_1, f_2 — положительные формы), то для любого $x \in L$

$$0 \leqslant f_1(x^*x) + f_2(x^*x) = f(x^*x) = 0,$$

поэтому $f_1(x^*x) = f_2(x^*x) = 0$, $f_1(x) = f_2(x) = 0$, и $f_1 \in S$, $f_2 \in S$. Это доказывает, что ненулевые элементы из S' суть чистые формы. Тогда, вследствие а), равенство $L = \bigcap_{f \in S'} N_f$ доказывает (iii).

c) В то же время мы видим, что если L — максимальный регулярный, поэтому замкнутый (В1) идеал в A, то L имеет вид N_f для чистой f. Поэтому отображение, рассматриваемое в (ii), сюръективно. Если f и f' — два чистых состояния таких, что $N_f = N_{f'}$, то предложение 2.9.1 показывает, что f и f' имеют общее ядро, поэтому $f = \lambda f'$ для $\lambda \geqslant 0$. Так как $\|f\| = \|f'\| = 1$, то $f = f'$, что завершает доказательство (ii).

d) Наконец, пусть f — такая положительная форма, что N_f — регулярный максимальный идеал. Тогда $N_f = N_{f'}$, где f' чистая. Ядро f', равное $N_{f'} + N_{f'}^* = N_f + N_f^*$, содержится в ядре f (2.9.1). Поэтому f и f' пропорциональны, так что f — чистая. Это вместе с а) доказывает (i).

2.9.6. Напомним, что два представления π_1, π_2 некоторой алгебры в векторных пространствах E_1, E_2 называются *алгебраически эквивалентными*, если существует изоморфизм E_1 на E_2, переводящий π_1 в π_2.

Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра.*

(i) *Любое алгебраически неприводимое представление алгебры A (без инволюции) в комплексном векторном пространстве алгебраически эквивалентно представлению C^*-алгебры A (в гильбертовом пространстве).*

(ii) *Пусть π, π' — два неприводимых представления C^*-алгебры A в гильбертовых пространствах H, H'. Если π и π' алгебраически эквивалентны, то π и π' эквивалентны в смысле* 2.2.1.

Пусть π — ненулевое алгебраически неприводимое представление A в комплексном векторном пространстве. Существует регулярный максимальный левый идеал L в A такой, что π отождествимо с регулярным представлением A в A/L. Кроме того, существует (2.9.5) такая чистая положительная форма f на A, что $L = N_f$. Тогда A/L можно снабдить такой структурой гильбертова пространства, что π станет представлением C^*-алгебры A в этом гильбертовом пространстве. Отсюда следует (i).

Пусть π, π' — ненулевые неприводимые представления C^*-алгебры A в гильбертовых пространствах H, H'. Пусть ξ (соотв. ξ') — единичный вектор в H (соотв. H') и L (соотв. L') — множество таких $x \in A$, что $\pi(x)\xi = 0$ (соотв. $\pi'(x)\xi' = 0$). Положим

$$f(x) = (\pi(x)\xi \mid \xi), \quad f'(x) = (\pi'(x)\xi' \mid \xi').$$

Тогда L (соотв. L') — множество таких $x \in A$, что $f(x^*x) = 0$ (соотв. $f'(x^*x) = 0$). Если π и π' алгебраически эквивалентны, то можно выбрать ξ и ξ' так, что $L = L'$. Тогда $f = f'$ (2.9.5), поэтому $\pi \simeq \pi'$ (2.4.1). Отсюда следует (ii).

Следовательно, в дальнейшем можно говорить о классах (эквивалентности) неприводимых представлений C^*-алгебр, не уточняя, имеется ли в виду чисто алгебраическая эквивалентность или унитарная эквивалентность.

2.9.7. Напомним, что *примитивным двусторонним идеалом* алгебры A называется ядро ненулевого алгебраически неприводимого представления A в векторном пространстве. Обозначим через $\mathrm{Prim}(A)$ множество примитивных двусторонних идеалов A.

Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра.*

(i) *Двусторонние примитивные идеалы A суть ядра ненулевых топологически неприводимых представлений в гильбертовом пространстве.*

(ii) *Любой замкнутый двусторонний идеал A есть пересечение содержащих его примитивных двусторонних идеалов.*

(i) следует из 2.8.4 и 2.9.6 (i).

Пусть I—замкнутый двусторонний идеал A. Тогда A/I—C^*-алгебра (1.8.2). Следовательно, существует семейство (π_i) неприводимых представлений A, обращающихся в нуль на I и таких, что пересечение ядер $\operatorname{Ker}\pi_i$ есть I (2.7.3). Но $\operatorname{Ker}\pi_i$ примитивны для любого i.

Теорема 2.9.7 определяет каноническое отображение

$$\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A),$$

которое сюръективно. Мы увидим (4.3.7), что во многих случаях это отображение биективно.

Библиография: [62], [67], [110], [118], [170].

2.10. Продолжение представлений C^*-алгебр.

2.10.1. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, B — такое самосопряженное векторное подпространство A, что $1 \in B$. Пусть F — множество таких линейных форм g на B, что $g(x^*) = \overline{g(x)}$ для $x \in B$, $g(x) \geqslant 0$ для $x \in B \cap A^+$, и $g(1) = 1$.*

(i) *Любой элемент F продолжается до состояния A.*

(ii) *Любая крайняя точка F продолжается до чистого состояния A.*

(iii) *Пусть g — крайняя точка F. Если существует единственное чистое состояние f C^*-алгебры A, продолжающее g, то f — единственное состояние A, продолжающее g, и для любого эрмитова элемента $x \in A$ имеем*

$$f(x) = \sup_{y=y^* \in B,\ y \leqslant x} g(y).$$

Пусть A_h (соотв. B_h) — множество эрмитовых элементов A (соотв. B). Пусть $g \in F$, g' — сужение g на B_h; g' вещественна и $\geqslant 0$ на $B \cap A^+$. Элемент $1 \in B_h$ является внутренней точкой конуса A^+. Поэтому (В6) g' продолжается до вещественной линейной формы f' на A_h, которая $\geqslant 0$ на A^+. Кроме того, f' продолжается до эрмитовой линейной формы f на A и f — состояние A. Формы g и $f|B$ совпадают на B_h, поэтому на $B_h + iB_h = B$. Это доказывает (i).

Пусть g — крайняя точка F. Пусть K — множество состояний A, продолжающих g. Согласно (i) K непусто, и очевидно, что K выпукло и слабо компактно. Возьмем тогда в качестве f крайнюю точку K. Покажем, что f — чистое состояние. Предположим, что f_1, f_2 — такие состояния A, что $f = (1/2)(f_1 + f_2)$; тогда $g = (1/2)((f_1|B) + (f_2|B))$; так как g — крайняя в F, то $f_1|B = f_2|B = g$; поэтому $f_1, f_2 \in K$; так как f — крайняя в K, то $f = f_1 = f_2$. Это доказывает (ii).

Пусть g — крайняя точка F; предположим, что существует единственное чистое состояние f C^*-алгебры A, продолжающее g. По предыдущему, K содержит единственную крайнюю точку f, поэтому $K = \{f\}$. Пусть $x \in A_h$, $x \notin B$; положим

$$\alpha = \sup_{y \in B_h,\ y \leqslant x} g(y).$$

Существует единственная линейная форма g_1 на $B + \boldsymbol{C}x$, продолжающая g и такая, что $g_1(x) = \alpha$; ясно, что $g_1(y^*) = \overline{g_1(y)}$ при $y \in B + \boldsymbol{C}x$; если $y + \lambda x \geqslant 0$ ($y \in B_h$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$), то $g_1(y + \lambda x) \geqslant 0$. [Это очевидно при $\lambda = 0$; если $\lambda > 0$, то $-\lambda^{-1}y \leqslant x$, поэтому $g(-\lambda^{-1}y) \leqslant \alpha$, $\lambda\alpha + g(y) \geqslant 0$; если $\lambda < 0$, то $-\lambda^{-1}y \geqslant x$, поэтому $g(-\lambda^{-1}y) \geqslant \alpha$, $\lambda\alpha + g(y) \geqslant 0$.] Согласно предыдущему, g_1 продолжается до состояния A, которое необходимо совпадает с f. Поэтому $f(x) = g_1(x) = \alpha$.

2.10.2. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, B — под-C^*-алгебра A, ρ — представление B в гильбертовом пространстве K. Существуют: гильбертово пространство H, содержащее K как подпространство (норма H индуцирует норму K), и представление π C^*-алгебры A в H такое, что $\rho(x) = \pi(x)|K$ для любого $x \in B$. Если ρ неприводимо, то π можно выбрать неприводимым.*

Пусть $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента. Пусть $\tilde{B} = B + \boldsymbol{C}1$; $\tilde{B}$ — под-C^*-алгебра $\tilde{A}$. Представление ρ однозначно продолжается до представления $\tilde{\rho}$ C^*-алгебры $\tilde{B}$ такого, что $\tilde{\rho}(1) = 1$, неприводимого тогда и только тогда, когда ρ неприводимо. Таким образом, можно ограничиться случаем, когда A имеет единичный элемент и $1 \in B$. С другой стороны, вследствие 2.2.6 и 2.2.7 можно предположить, что ρ допускает тотализирующий единичный вектор ξ. Положим $g(x) = (\rho(x)\xi \mid \xi)$ для $x \in B$. Тогда g — состояние B, чистое, если ρ неприводимо. Пусть f — состояние A, продолжающее g, чистое, если ρ неприводимо (2.10.1). Пусть $\pi = \pi_f$, $\eta = \xi_f$. Пусть $H_0 = \overline{\pi(B)\eta} \subset H_\pi$. Для любого $x \in B$ введем $\pi'(x)$ — сужение $\pi(x)$ на H_0. Тогда π' — представление B в H_0, η — тотализирующий для π', и для любого $x \in B$ имеем

$$(\pi'(x)\eta \mid \eta) = f(x) = g(x) = (\rho(x)\xi \mid \xi).$$

Поэтому существует изоморфизм K на H_0, переводящий ξ в η и ρ в π' (2.4.1). Таким образом, можно отождествить K с H_0 и ρ с π'. Наконец, если ρ неприводимо, то f — чистое состояние по построению, поэтому π неприводимо.

2.10.3. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, π — представление A в H, H' — замкнутое векторное подпространство H, инвариантное относительно $\pi(I)$; для любого $x \in I$ введем $\rho(x) = \pi(x) \mid H'$. Предположим, что представление ρ идеала I в H' невырождено.*

(i) *H' инвариантно относительно $\pi(A)$; пусть π' — подпредставление π, определенное H'.*

(ii) *$\pi'(I)$ сильно всюду плотно в $\pi'(A)$.*

Пусть (u_λ) — аппроксимативная единица C^*-алгебры I. Так как ρ невырождено, то $\rho(u_\lambda)$ сильно стремится к I (2.2.10). Если $x \in A$, то $xu_\lambda \in I$, поэтому для любого $\xi \in H'$

$$\pi(x)\rho(u_\lambda)\xi = \pi(x)\pi(u_\lambda)\xi = \pi(xu_\lambda)\xi = \rho(xu_\lambda)\xi \in H';$$

поэтому предел $\pi(x)\xi \in H'$. Это доказывает (i). Кроме того, видим, что $\pi'(x)$ есть сильный предел $\pi'(xu_\lambda)$, откуда (ii).

2.10.4. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, ρ — невырожденное представление I в H.*

(i) *Существует единственное представление π C^*-алгебры A в H, продолжающее ρ.*

(ii) *$\rho(I)$ сильно всюду плотно в $\pi(A)$.*

Существует (2.10.2) гильбертово пространство $H' \supset H$ и представление π_1 C^*-алгебры A в H' такое, что для любого $x \in I$ имеем $\rho(x) = \pi_1(x) \mid H$. Вследствие 2.10.3 H инвариантно относительно $\pi_1(A)$. Взяв в качестве π подпредставление π_1, определенное H, получаем утверждение существования в (i), а (ii) следует из 2.10.3 (ii). Наконец, пусть ν — другое представление A в H, продолжающее ρ. Пусть (u_λ) — аппроксимативная единица I. Для любого $x \in A$ сеть $\rho(xu_\lambda)$ сильно сходится к $\pi(x)$ и к $\nu(x)$, откуда $\pi(x) = \nu(x)$.

Библиография: [10], [23], [117], [169].

2.11. Переход к идеалу, к фактор-алгебре.

Пусть A — C^*-алгебра. Как мы сейчас увидим, замкнутый двусторонний идеал A определяет разложение множеств $P(A)$, $\hat{A}$, $\operatorname{Prim}(A)$.

2.11.1. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, π — представление A в гильбертовом пространстве H, K — существенное подпространство $\pi|I$, B — сильное замыкание $\pi(A)$.*

(i) $P_K \in B \cap B'$.

(ii) *Подпредставление π, определенное $H \ominus K$, обращается в нуль на I.*

(iii) *Пусть π' — подпредставление π, определенное K; тогда $\pi'(I)$ сильно всюду плотно в $\pi'(A)$.*

Оператор P_K лежит в сильном замыкании $\pi(I)$, поэтому $P_K \in B$. Вследствие 2.10.3 K инвариантно относительно $\pi(A)$, т. е. $P_K \in B'$. Утверждение (ii) очевидно, а (iii) следует из 2.10.3.

2.11.2. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A и $\hat{A}_I$ (соотв. $\hat{A}^I$) — множество таких $\pi \in \hat{A}$, что $\pi(I) = 0$ [соотв. $\pi(I) \neq 0$].*

(i) *Для любого $\pi \in \hat{A}_I$ введем π' — представление A/I, получаемое из π переходом к фактору. Тогда $\pi \to \pi'$ — биекция $\hat{A}_I$ на $(A/I)^\wedge$.*

(ii) *Отображение $\pi \to \pi|I$ есть биекция $\hat{A}^I$ на $\hat{I}$.*

Утверждение (i) очевидно. Докажем (ii). Пусть $\pi \in \hat{A}_I$. Воспользуемся обозначениями 2.11.1. Тогда $K \neq \{0\}$, поэтому $K = H$ ввиду неприводимости π. Тогда 2.11.1 (iii) доказывает неприводимость $\pi|I$ (см. также 2.11.3). Отображение $\pi \to \pi|I$ множества $\hat{A}^I$ в $\hat{I}$ биективно вследствие 2.10.4.

2.11.3. Лемма. *Пусть A — алгебра над коммутативным телом, π — неприводимое представление A в векторном пространстве E.*

(i) *Пусть I — двусторонний идеал A. Если $\pi(I) \neq 0$, то $\pi|I$ неприводимо.*

(ii) *Пусть I_1, I_2 — такие двусторонние идеалы A, что $\pi(I_1) \neq 0$, $\pi(I_2) \neq 0$. Тогда $\pi(I_1 \cdot I_2) \neq 0$.*

Множество элементов E, аннулируемых $\pi(I)$, инвариантно относительно $\pi(A)$ и отлично от E, поэтому оно нулевое. Следовательно, если ξ — ненулевой элемент E, то $\pi(I)\xi \neq 0$. Так как $\pi(I)\xi$ инвариантно относительно $\pi(A)$, то $\pi(I)\xi = E$, что доказывает (i). С другой стороны, предыдущее показывает, что $\pi(I_2)E = E$, $\pi(I_1)\pi(I_2)E = E$, поэтому $\pi(I_1 \cdot I_2) \neq 0$.

2.11.4. Лемма. *Пусть I_1, I_2 — двусторонние идеалы алгебры A, I — примитивный идеал A. Если $I \supset I_1 \cdot I_2$ (в частности, если $I \supset I_1 \cap I_2$), то либо $I \supset I_1$, либо $I \supset I_2$.*

Предположим, что $I \not\supset I_1$ и $I \not\supset I_2$. Вследствие 2.11.3 (ii), примененного к неприводимому представлению π алгебры A с ядром I, имеем $\pi(I_1 \cdot I_2) \neq 0$, поэтому $I \not\supset I_1 \cdot I_2$.

2.11.5. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, $\mathrm{Prim}_I(A)$ [соотв. $\mathrm{Prim}^I(A)$] — множество примитивных двусторонних идеалов A, содержащих I (соотв. не содержащих I).*

(i) *Отображение $J \to J/I$ есть биекция $\mathrm{Prim}_I(A)$ на $\mathrm{Prim}(A/I)$.*

(ii) *Отображение $J \to J \cap I$ есть биекция $\mathrm{Prim}^I(A)$ на $\mathrm{Prim}(I)$.*

Утверждение (i) очевидно. Докажем (ii). Если $J \in \mathrm{Prim}^I(A)$, то J — ядро неприводимого представления π C^*-алгебры A такого, что $\pi(I) \neq 0$, поэтому $\pi | I \in \hat{I}$ (2.11.2) и $J \cap I = \mathrm{Ker}(\pi | I) \in \mathrm{Prim}(I)$. Если $J' \in \mathrm{Prim}(I)$, то существует такое $\pi' \in \hat{I}$, что $J' = \mathrm{Ker}\,\pi'$; кроме того, существует такое $\pi \in \hat{A}$, что $\pi' = \pi | I$ (2.10.4), откуда $J' = (\mathrm{Ker}\,\pi) \cap I$ и отображение, рассматриваемое в (ii), сюръективно. Пусть $J_1, J_2 \in \mathrm{Prim}^I(A)$; предположим, что $J_1 \cap I = J_2 \cap I$; тогда $J_2 \supset J_1 \cap I$ и $J_2 \not\supset I$, поэтому $J_2 \supset J_1$ (2.11.4), и аналогично $J_1 \supset J_2$, поэтому $J_1 = J_2$: отображение, рассматриваемое в (ii), инъективно.

2.11.6. Прежде чем установить результат, аналогичный предложениям 2.11.2 и 2.11.5, для чистых состояний, установим некоторые свойства, относящиеся к произвольным положительным формам.

Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, ω: $A \to A/I$ — канонический морфизм. Так как $\omega(A^+) = (A/I)^+$, то отображение $k \to k \circ \omega$ есть биекция множества положительных форм на A/I на множество положительных форм на A, равных нулю на I. Из общих свойств банаховых пространств следует, что эта биекция сохраняет нормы и взаимно непрерывна в слабых топологиях.

2.11.7. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, f — положительная форма на A.*

(i) *Существует единственное разложение $f = f_1 + f_2$, где f_1, f_2 — такие положительные формы на A, что $\| f_1 \| = \| f_1 | I \|$ и $f_2(I) = 0$.*

(ii) *Пару (π_f, ξ_f) можно отождествить с $(\pi_{f_1} \oplus \pi_{f_2}, \xi_{f_1} + \xi_{f_2})$; π_{f_2} обращается в нуль на I, а $\pi_{f_1} | I$ невырождено.*

Положим $\pi_f = \pi$. Пусть K_1 — существенное подпространство $\pi | I$, $K_2 = H_\pi \ominus K_1$, $\xi_1 = P_{K_1}\xi_f$, $\xi_2 = P_{K_2}\xi_f$, π_1 и π_2 — подпредставления π, определенные K_1 и K_2 [2.11.1 (i)]. Тогда ξ_i — тотализирующий для π_i, поэтому, если $f_i = \omega_{\xi_i} \circ \pi_i$, то (π_i, ξ_i) можно отождествить с (π_{f_i}, ξ_{f_i}) (2.4.6). Имеем $\pi_2(I) = 0$, поэтому $f_2(I) = 0$. Представления π_1 и $\pi_1 | I$ невырождены, поэтому

$$\| f_1 | I \| = \| \xi_1 \|^2 = \| f_1 \|$$

вследствие 2.4.3. Из равенства $\xi_f = \xi_1 + \xi_2$ следует, что $f = f_1 + f_2$. В частности, $f_2 = 0$, если $\| f \| = \| f \mid I \|$.

Осталось доказать утверждение единственности в (i). Пусть f'_1, f'_2 — такие положительные формы на A, что $f = f'_1 + f'_2$, $\| f'_1 \| = \| f'_1 \mid I \|$, $f'_2(I) = 0$. Предыдущее рассуждение, примененное к f'_1 вместо f, доказывает, что $\pi_{f'_1} \mid I$ невырождено; поэтому если (u_λ) — аппроксимативная единица в I, то $f'_1(x) = \lim f'_1(xu_\lambda)$ для любого $x \in A$; но f_1 и f'_1 совпадают на I, так как $f_2(I) = f'_2(I) = 0$; поэтому $f'_1 = f_1$, $f'_2 = f_2$.

2.11.8. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, $P_I(A)$ (соотв. $P^I(A)$) — множество чистых состояний A, нулевых на I (соотв. ненулевых на I).*

(i) *Для любого $f \in P_I(A)$ введем f' — положительную форму на A/I, получаемую из f переходом к фактору. Тогда $f \to f'$ — биекция $P_I(A)$ на $P(A/I)$.*

(ii) *Отображение $f \to f \mid I$ — биекция $P^I(A)$ на $P(I)$.*

Пусть $f \in P_I(A)$. Обозначим через ω канонический морфизм A на A/I. Если f' мажорирует положительную форму g' на A/I, то f мажорирует $g = g' \circ \omega$, поэтому $g = \lambda f$ с $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $g' = \lambda f'$, так что $f' \in P(A/I)$. Ясно, что отображение $f \to f'$ инъективно. Покажем, что оно сюръективно. Пусть $h \in P(A/I)$ и $f = h \circ \omega$. Если f мажорирует g, то g обращается в нуль на I^+, поэтому на I; т. е. g имеет вид $k \circ \omega$, где k — положительная форма, мажорируемая h; поэтому $k = \lambda h$ с $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, откуда $g = \lambda f$ и $f \in P_I(A)$; так как $h = f'$, то доказана сюръективность отображения $f \to f'$.

Пусть $f \in P^I(A)$. В разложении $f = f_1 + f_2$ из 2.11.7 формы f_1 и f_2 пропорциональны f. Но f_2 обращается в нуль на I, а f — ненулевая на I, поэтому $f_2 = 0$ и $f = f_1$. Поэтому $\| f \mid I \| = \| f \| = 1$, так что $f \mid I$ — состояние I. Вследствие 2.10.3 и 2.11.7 (ii) представление $\pi_{f \mid I}$ неприводимо, поэтому $f \mid I \in P(I)$. Пусть $f, f' \in P^I(A)$; если $f \mid I = f' \mid I$, то существует изоморфизм H_{π_f} на $H_{\pi_{f'}}$, который переводит $\xi_{f \mid I}$ (т. е. ξ_f) в $\xi_{f' \mid I}$ (т. е. $\xi_{f'}$) и $\pi_{f \mid I}$ в $\pi_{f' \mid I}$, поэтому π_f в $\pi_{f'}$ (2.10.4) и $f = f'$; отображение $f \to f \mid I$ в (ii) инъективно. Наконец, если $g \in P(I)$, то неприводимое представление π_g идеала I продолжается до неприводимого представления π C^*-алгебры A (2.10.4); так как $\| \xi_g \| = 1$, то $f = \omega_{\xi_g} \circ \pi$ есть чистое состояние A, продолжающее g; поэтому $f \in P^I(A)$ и $f \mid I = g$; этим доказано, что отображение $f \to f \mid I$ в (ii) сюръективно.

2.11.9. Шесть биекций предложений 2.11.2, 2.11.5 и 2.11.8 называются *каноническими*.

В итоге получаем диаграмму канонических отображений:

$$\begin{array}{ccccc} P(A/I) & \to & P(A) & \leftarrow & P(I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (A/I)^{\wedge} & \to & \hat{A} & \leftarrow & \hat{I} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Prim}(A/I) & \to & \mathrm{Prim}(A) & \leftarrow & \mathrm{Prim}(I) \end{array}$$

Вертикальные стрелки представляют сюръективные отображения. На каждой строке две горизонтальные стрелки представляют инъективные отображения на дополнительные части среднего множества. Легко проверить, что эта диаграмма коммутативна.

Библиография: [37], [70], [118], [187].

2.12. Дополнения.

2.12.1. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, f и g — такие чистые состояния A, что $\|f-g\|<2$. Тогда $\pi_f \simeq \pi_g$ [27].

2.12.2. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, $E(A)$ — множество состояний A и $f \in E(A)$. Следующие условия эквивалентны:

(i) Для любой окрестности U элемента f в $E(A)$ существует $\delta>0$ и такой $a \in A$, что $0 \leqslant a \leqslant 1$, $f(a)=1$ и $g(a)<1-\delta$ для $g \in E(A)-U$;

(ii) Для любого замкнутого множества S типа G_δ [1]) в $E(A)$, содержащего f, существует такой $a \in A$, что $\|a\|=|f(a)|$ и S содержит множество $g \in E(A)$, для которых $\|a\|=|g(a)|$;

(iii) f — чистое состояние [24].

2.12.3. Пусть A — C^*-алгебра, K_n — множество таких состояний f C^*-алгебры A, что $\dim \pi_f = n\ (<+\infty)$. Тогда $P(A) \cap K_n$ — открытая часть K_n [30].

2.12.4. Пусть A — алгебра фон Неймана, $\mathfrak{Z}$ — ее центр, Ω — спектр $\mathfrak{Z}$. Для любого $\omega \in \Omega$ введем I_ω — замкнутый по норме двусторонний идеал A, порожденный $\operatorname{Ker}\omega$. Для любого $T \in A$ введем T_ω — канонический образ T в A/I_ω.

a) Если f — чистое состояние A, то $f|\mathfrak{Z}$ есть некоторый элемент ω множества Ω, и f обращается в нуль на I_ω.

b) Для любого $T \in A$ функция $\omega \to \|T_\omega\|$ непрерывна на Ω.

c) Произведение двух ненулевых двусторонних идеалов C^*-алгебры A/I_ω есть ненулевой идеал [23].

2.12.5. Пусть A — инволютивная банахова алгебра с единичным элементом. Предположим, что для любой эрмитовой

---

[1]) *Множеством типа* G_δ называется пересечение счетного числа открытых множеств.

непрерывной линейной формы f на A существуют такие положительные формы g, h, что $f=g-h$, $\|f\|=\|g\|+\|h\|$. Тогда A — C^*-алгебра [35].

***2.12.6.** Пусть A_1 и A_2 — C^*-алгебры с единичным элементом, $\overline{P(A_i)}$ — слабое замыкание $P(A_i)$ в пространстве, сопряженном A_i. Пусть $\mathfrak{B}_i$ — множество функций $f \to f(x)$ на $\overline{P(A_i)}$ $(x \in A_i)$. Если существует гомеоморфизм $\overline{P(A_1)}$ на $\overline{P(A_2)}$, переводящий $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{B}_2$, то существует такая изометрическая линейная биекция ρ: $A_1 \to A_2$, что $\rho(x^*)=\rho(x)^*$ для любого $x \in A_1$, и $\rho(x^n)=\rho(x)^n$ для любого эрмитова x в A_1 (ср. 1.9.10) [59].

2.12.7. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, $\overline{P(A)}$ — слабое замыкание $P(A)$ в пространстве, сопряженном A, $\mathfrak{B}$ — множество функций $f \to f(x)$ на $\overline{P(A)}$ $(x \in A)$. Если произведение любых двух элементов $\mathfrak{B}$ принадлежит $\mathfrak{B}$, то A коммутативна [59].

2.12.8. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, f — состояние A, N — множество таких $x \in A$, что $f(x^*x)=0$. Если $\operatorname{Ker} f=N+N^*$, то f — чистая [62].

***2.12.9.** Для того чтобы C^*-алгебра с единичным элементом была изоморфна алгебре фон Неймана, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

(i) любое ограниченное сверху возрастающее семейство эрмитовых элементов A имеет верхнюю грань;

(ii) для любого ненулевого $x \in A^+$ существует состояние f C^*-алгебры A, ненулевое на x и такое, что для любого возрастающего семейства (y_i) в A^+ с верхней гранью $y \in A^+$ имеем $f(y)=\sup f(y_i)$ [61], [131], [132].

***2.12.10.** Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, X — компактное пространство $\overline{P(A)}$. Для любого $x \in A$ введем φ_x — функцию $f \to f(x)$ на $\overline{P(A)}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество φ_x для $x \in A$. Любое состояние g C^*-алгебры A переводится с помощью отображения $x \to \varphi_x$ в положительную линейную форму на $\mathfrak{B}$; эта форма продолжается, вообще говоря, бесконечным числом способов до положительной меры на X; множество частей X меры нуль относительно всех этих мер обозначим N_g.

Пусть теперь π — представление A; обозначим через N_π пересечение $N_{h \circ \pi}$, где h пробегает множество нормальных состояний слабого замыкания $\pi(A)$.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — под-C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)$, содержащая 1, B — слабое замыкание A, π — представление A в сепарабельном гильбертовом пространстве. Для того чтобы π продолжалось до ультраслабо непрерывного представления B в H_π, необходимо и достаточно, чтобы $N_\pi \supset N_\iota$, где ι — тождественное представление A [63].

2.12.11. Пусть A — C^*-алгебра, G — топологическая группа. Пусть любому $g \in G$ поставлен в соответствие автоморфизм ζ_g C^*-алгебры A. Предположим, что $g \to \zeta_g$ есть представление G, и для любого $x \in A$ функция $\zeta_g(x)$ непрерывна по g. Состояние f C^*-алгебры A называется *стационарным относительно* ζ, если $f(\zeta_g(x)) = f(x)$ для любых $x \in A$ и $g \in G$. Предположим, что это условие выполнено. Существует единственное непрерывное унитарное представление ρ группы G в H_{π_f} такое, что:

1° $\pi_f(\zeta_g(x)) = \rho(g)\pi_f(x)\rho(g)^{-1}$ для любых $x \in A$ и $g \in G$;

2° если η обозначает каноническое отображение A в H_{π_f}, то $\eta(\zeta_g(x)) = \rho(g)\eta(x)$ для любых $x \in A$ и $g \in G$ [121].

2.12.12. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, x — нормальный элемент A, $\lambda \in \operatorname{Sp} x$. Существует неприводимое представление π C^*-алгебры A и ненулевой вектор $\xi \in H_\pi$ такие, что $\pi(x)\xi = \lambda\xi$ (применить 2.10.2 к под-C^*-алгебре $B \subset A$, порожденной 1 и x, и характеру B, равному λ в x) [117].

2.12.13. Пусть A — C^*-алгебра без единичного элемента. Тогда 0 лежит в слабом замыкании $P(A)$. [Пусть $x_1, \ldots, x_n \in A^+$ и $\varepsilon > 0$; нужно построить $f \in P(A)$ такой, что $f(x_1), \ldots, f(x_n) \leqslant \varepsilon$; заменяя $x_1, \ldots, x_n$ на $x_1 + \ldots + x_n$, можно считать, что $n = 1$; используя 2.5.5, достаточно построить состояние g C^*-алгебры A такое, что $g(x_1) \leqslant \varepsilon$; реализуя A в гильбертовом пространстве H с помощью невырожденного представления, получаем, что x_1 необратим в $A + \boldsymbol{C} \cdot 1$, поэтому необратим в $\mathfrak{B}(H)$; существует единичный вектор $\xi \in H$ такой, что $(x_1\xi \mid \xi) \leqslant \varepsilon$; можно взять $g = \omega_\xi$.] Это сообщено мне Дж. Глиммом.

2.12.14. Пусть A — C^*-алгебра, I и J — замкнутые двусторонние идеалы A, h — состояние A, нулевое на $I \cap J$. Тогда $h = \lambda f + \mu g$, где $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$ и f (соотв. g) — состояние A, нулевое на I (соотв. J). (Можно ограничиться случаем, когда $I \cap J = 0$. Тогда существенные подпространства $\pi_h \mid I$ и $\pi_h \mid J$ ортогональны. Применить 2.11.7.) [118].

2.12.15. Пусть A и B — C^*-алгебры, π, π' — инъективные представления A, ρ, ρ' — инъективные представления B. Пусть D (соотв. D') — C^*-алгебра операторов в $H_\pi \otimes H_\rho$ (соотв. $H_{\pi'} \otimes H_{\rho'}$), порожденная $\pi(x) \otimes \rho(y)$ (соотв. $\pi'(x) \otimes \rho'(y)$), где $x \in A$, $y \in B$. Существует единственный изоморфизм D на D', переводящий $\pi(x) \otimes \rho(y)$ в $\pi'(x) \otimes \rho'(y)$ для любых $x \in A$, $y \in B$. Поэтому D, рассматриваемая как абстрактная C^*-алгебра, зависит только от A и B; она называется *тензорным C^*-произведением* A и B [19], [150], [151], [152].

***2.12.16.** а) Пусть A и B — C^*-алгебры, μ — линейное отображение A в B. Говорят, что μ положительно, если $\mu(A^+) \subset B^+$.

Пусть $A^{(n)}$ — C^*-алгебра матриц порядка n с элементами из A. Применяя μ к каждому элементу такой матрицы, получаем отображение $\mu^{(n)}$ C^*-алгебры $A^{(n)}$ в $B^{(n)}$. Говорят, что μ вполне положительно, если $\mu^{(n)}$ положительно для любого n. Вообще, условие полной положительности сильнее условия положительности. Эти понятия эквивалентны, если A коммутативна.

b) Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, H — гильбертово пространство, μ — такое линейное отображение A в $\mathfrak{B}(H)$, что $\mu(1)=1$. Для того чтобы существовало гильбертово пространство K, содержащее H как подпространство, и такой морфизм ρ C^*-алгебры A в $\mathfrak{B}(K)$, что $\mu(x)=P_H\rho(x)|H$ для любого $x\in A$, необходимо и достаточно, чтобы μ было вполне положительно [124].

2.12.17. Пусть A — C^*-алгебра, A' — банахово пространство, сопряженное A, A_h и A'_h — эрмитовы части A и A', которые суть упорядоченные векторные пространства. Следующие условия эквивалентны:

1° A_h — решетка [1];

2° A'_h — решетка;

3° A — коммутативна [172].

2.12.18. Пусть A — C^*-алгебра, f — чистое состояние A, N_f — множество $x\in A$ таких, что $f(x^*x)=0$, так что A/N_f, снабженное скалярным произведением, определяемым $f(y^*x)$, есть гильбертово пространство. Норма в этом пространстве совпадает с нормой банахова фактор-пространства A/N_f [136].

***2.12.19.** Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, f — положительная форма на A.

a) Пусть E_f — множество линейных форм на A вида $x\to f(x_0xx_0^*)$, где $x_0\in A$. Пусть F_f — замыкание E_f в сопряженном к A пространстве A', снабженном топологией, определяемой нормой. Тогда, если g — положительная форма на A, то следующие условия эквивалентны: (i) $g\in F_f$; (ii) $\pi_g\leqslant\pi_f$; (iii) существует такой ξ в пространстве π_f, что $g(x)=(\pi_f(x)\xi|\xi)$ для любого $x\in A$.

b) Если f чистая, то $F_f=E_f$.

c) Пусть E'_f — множество положительных форм на A, мажорируемых кратными λf формы f (где $\lambda\geqslant 0$). Пусть F'_f — замыкание E'_f в A', снабженном топологией, определяемой нормой. Тогда F'_f есть множество форм

$$x\to(\pi_f(x)\eta|\eta) \quad \text{на} \quad A, \quad \text{где} \quad \eta\in\overline{\pi_f(A)'\xi_f} \text{ [64].}$$

---

[1]) Упорядоченное векторное пространство называется *решеткой*, или *пространством Рисса*, если любая пара элементов имеет верхнюю и нижнюю грань.

2.12.20. Пусть A — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимативную единицу, f — непрерывная положительная форма на A. Обозначим $L^2(f)$ множество $g \in A'$, для которых

$$\sup_{x \in A,\ f(x^*x) \neq 0} |g(x)|\, f(x^*x)^{-1/2} < +\infty.$$

Пусть H_f — пространство π_f, η_f — каноническое отображение A в H_f. Тогда η_f определяет сопряженное отображение ζ_f пространства H_f в A', обладающее свойством $\langle \zeta_f(\xi), x\rangle = \langle \eta_f(x) | \xi\rangle$ для любых $\xi \in H_f$ и $x \in A$. Отображение ζ_f есть антилинейная биекция H_f на $L^2(f)$, переводящая ξ_f в f. Для любого $x \in A$ введем непрерывный линейный оператор $\pi'(x)$ в A', сопряженный оператору левого умножения на x в A. Тогда ζ_f переводит $\pi_f(x)$ в $\pi'(x^*)| L^2(f)$. Наконец, ζ_f — изометрия, если снабдить $L^2(f)$ нормой

$$\|g\|_{L^2(f)} = \sup_{x \in A,\ f(x^*x) \neq 0} |g(x)|\, f(x^*x)^{-1/2} \qquad [143].$$

2.12.21. Если A — C^*-алгебра, в которой 0 есть единственный нильпотентный элемент, то A коммутативна. [Пусть $x, y \in A$, где $x = x^*$, пусть f и g — непрерывные функции на $\mathrm{Sp}'\, x$ и $fg = 0$; тогда $(f(x)\, y g(x))^2 = 0$, поэтому $f(x)\, y g(x) = 0$ и $f(\pi(x))\, T g(\pi(x)) = 0$ для любого неприводимого представления π C^*-алгебры A и любого $T \in \mathfrak{B}(H_\pi)$; поэтому $\pi(A)$ скалярна.] (И. Капланский, не опубликовано; сообщено Р. В. Кадисоном.)

§ 3. СПЕКТР C^*-АЛГЕБРЫ

Двумя нашими главными целями будут теперь следующие:

1° разложение представления на неприводимые представления;

2° изучение структуры C^*-алгебр.

Для этих двух проблем важно обобщить на любые C^*-алгебры понятие спектра коммутативной C^*-алгебры. В § 2 мы ввели множества $P(A)$, $\hat{A}$, $\mathrm{Prim}(A)$. Для коммутативной A эти множества сводятся к множеству характеров A: это ясно для $\hat{A}$, мы заметили это для $P(A)$ (2.5.2), а для $\mathrm{Prim}(A)$ это следует из того, что характеры коммутативной C^*-алгебры находятся в биективном соответствии с их ядрами. До сих пор только $P(A)$ снабжено топологией, а именно, слабой топологией (топология, определенная нормой в пространстве, сопряженном к A, менее полезна). К сожалению, это пространство слишком велико (как правило, оно не является конечномерным, если A — C^*-алгебра группы Ли), и не локально компактно. В этом параграфе мы определим топологии на $\hat{A}$ и на $\operatorname{Prim}(A)$. В «хороших» случаях эти два пространства гомеоморфны. [В «плохих» случаях $\operatorname{Prim}(A)$ может сводиться к одной точке, а $\hat{A}$ быть очень сложным, отражая таким образом сложность A; из этих соображений, вообще говоря, малоубедительных, мы отдаем предпочтение $\hat{A}$ перед $\operatorname{Prim}(A)$.] Эти пространства почти локально компактны. Они, вообще говоря, неотделимы, но мы увидим, что это неудобство не слишком велико. Кроме того, в примерах эта неотделимость хорошо соответствует некоторым особенностям структуры изучаемых алгебр.

3.1. Топология Джекобсона.

3.1.1. Пусть A — алгебра над коммутативным телом. Для каждой части T из $\operatorname{Prim}(A)$ введем $I(T)$ — пересечение элементов T. Это множество — двусторонний идеал в A. Пусть $\overline{T}$ — множество примитивных идеалов A, содержащих $I(T)$.

Лемма.

(i) $\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(ii) $T\subset\overline{T}$ *для* $T\subset\operatorname{Prim}(A)$;

(iii) $\overline{\overline{T}}=\overline{T}$ *для* $T\subset\operatorname{Prim}(A)$;

(iv) $\overline{T_1\cup T_2}=\overline{T}_1\cup\overline{T}_2$ *для* $T_1,\ T_2\subset\operatorname{Prim}(A)$.

(i) и (ii) очевидны. Ясно, что $I(\overline{T})=I(T)$, откуда $\overline{\overline{T}}=\overline{T}$. Пусть $I_1=I(T_1)$, $I_2=I(T_2)$. Имеем $I(T_1\cup T_2)=I_1\cap I_2$. Поэтому $\overline{T_1\cup T_2}$ есть множество примитивных идеалов A, содержащих $I_1\cap I_2$, иначе говоря (2.11.4) — множество примитивных идеалов A, содержащих I_1 или I_2. Отсюда следует (iv).

Следовательно, в $\operatorname{Prim}(A)$ существует единственная топология такая, что для всякого $T\subset\operatorname{Prim}(A)$ множество $\overline{T}$ есть замыкание T в этой топологии. Эта топология называется *топологией Джекобсона на* $\operatorname{Prim}(A)$.

3.1.2. Предложение. *Пусть A — алгебра. Пусть T — подмножество* $\operatorname{Prim}(A)$. *Для того чтобы T было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством примитивных идеалов, содержащих некоторую часть A.*

Если T замкнуто, то $T=\overline{T}$, поэтому T есть множество примитивных идеалов A, содержащих $I(T)$. Пусть $M\subset A$. Если T — множество примитивных идеалов A, содержащих M, то $I(T)\supset M$, поэтому $\overline{T}\subset T$ и $\overline{T}=T$.

3.1.3. Напомним, что топологическое пространство называется T_0-*пространством*, если для любых двух точек этого пространства одна из этих двух точек имеет окрестность, не содержащую другой.

Предложение. *Пространство* $\mathrm{Prim}(A)$ *есть* T_0-*пространство.*

Пусть I_1, I_2 — две различные точки $\mathrm{Prim}(A)$. Имеем, например, $I_1 \not\subset I_2$. Тогда множество идеалов $I \in \mathrm{Prim}(A)$, которые содержат I_1, есть замкнутая часть T (3.1.2) такая, что $I_1 \in T$, $I_2 \notin T$.

3.1.4. Предложение. *Пусть* $I \in \mathrm{Prim}(A)$. *Для того чтобы* $\{I\}$ *было замкнуто в* $\mathrm{Prim}(A)$, *необходимо и достаточно, чтобы* I *был максимальным примитивным идеалом.*

Действительно, замыкание $\{I\}$ состоит из примитивных идеалов A, содержащих I.

3.1.5. Пусть A — алгебра, $\hat{A}$ — множество классов ненулевых неприводимых представлений A. Отображение $\pi \to \mathrm{Ker}\,\pi$ есть каноническое сюръективное отображение $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$.

Определение. *Спектром* A *называется множество* $\hat{A}$, *снабженное топологией — прообразом топологии Джекобсона при каноническом отображении* $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$.

3.1.6. Предложение. *Следующие три условия эквивалентны:*

(i) $\hat{A}$ *есть* T_0-*пространство.*

(ii) *Два неприводимых представления* A *с одним и тем же ядром эквивалентны.*

(iii) *Каноническое отображение* $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ *есть гомеоморфизм.*

(ii)$\Rightarrow$(iii): очевидно; (iii)$\Rightarrow$(i): следует из 3.1.3; (i)$\Rightarrow$(ii): пусть π_1, π_2 — два представления с одинаковым ядром, принадлежащие $\hat{A}$: всякая открытая часть $\hat{A}$, содержащая π_1, содержит также π_2, поэтому $\pi_1 = \pi_2$, если A есть T_0-пространство.

3.1.7. Лемма. *Предположим, что* A *содержит единичный элемент. Пусть* I — *максимальный двусторонний идеал* A. *Тогда* I — *примитивный идеал.*

Пусть M — максимальный левый идеал, содержащий I. Пусть π — каноническое представление A в A/M; оно неприводимо. Так как $IA \subset I \subset M$, то ядро I' представления π содержит I и не содержит 1, поэтому $I' = I$ и I примитивен.

3.1.8. Предложение. *Если* A *обладает единичным элементом, то* $\mathrm{Prim}(A)$ *и* $\hat{A}$ *суть квазикомпакты (иначе говоря, справедлива аксиома Бореля — Лебега, но отделимость не обязательна).*

Достаточно показать это для $\mathrm{Prim}(A)$. Пусть (T_i) — семейство замкнутых частей $\mathrm{Prim}(A)$ с пустым пересечением. Если $\sum I(T_i) \neq A$, то идеал $\sum I(T_i)$ содержится в максимальном двустороннем идеале I; согласно 3.1.7 идеал I примитивен; однако $I \in T_i$ для всякого i, так как каждое T_i замкнуто;

получили противоречие. Следовательно, $\sum I(T_i) = A$. Поэтому существуют такие $x_1 \in I(T_{i_1}), \ldots, x_n \in I(T_{i_n})$, что $1 = x_1 + \ldots + x_n$, т. е. $I(T_{i_1}) + \ldots + I(T_{i_n}) = A$, откуда $T_{i_1} \cap \ldots \cap T_{i_n} = \varnothing$.

3.1.9. Пусть A — алгебра, φ — автоморфизм A. Для всякого неприводимого представления π алгебры A представление $\pi \circ \varphi^{-1}$ есть неприводимое представление A, ядро которого и класс (эквивалентности) зависят только от ядра и класса π. Отсюда — биекции $\operatorname{Prim}(\varphi)$: $\operatorname{Prim}(A) \to \operatorname{Prim}(A)$ и $\hat{\varphi}$: $\hat{A} \to \hat{A}$, которые, очевидно, являются гомеоморфизмами.

Если φ_1, φ_2 — два автоморфизма A, то

$$\operatorname{Prim}(\varphi_1\varphi_2) = \operatorname{Prim}(\varphi_1)\operatorname{Prim}(\varphi_2), \quad (\varphi_1\varphi_2)^\wedge = \hat{\varphi}_1\hat{\varphi}_2.$$

Многие авторы говорят «двойственный объект» вместо «спектр», но это вызывает путаницу с двойственным к векторному пространству A или к банахову пространству A.

Библиография: [37].

3.2. Спектр идеала, фактор-алгебры.

Мы ограничимся случаем C^*-алгебр, хотя нижеследующее предложение может быть распространено на общий случай.

3.2.1. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A. Канонические биекции* (см. 2.11.2 и 2.11.5)

$$\operatorname{Prim}_I(A) \to \operatorname{Prim}(A/I), \qquad \hat{A}_I \to (A/I)^\wedge,$$
$$\operatorname{Prim}^I(A) \to \operatorname{Prim}(I), \qquad \hat{A}^I \to \hat{I}$$

суть гомеоморфизмы. Множества $\operatorname{Prim}_I(A)$, $\hat{A}_I$ *замкнуты в* $\operatorname{Prim}(A)$, $\hat{A}$. *Множества* $\operatorname{Prim}^I(A)$, $\hat{A}^I$ *открыты в* $\operatorname{Prim}(A)$, $\hat{A}$.

Согласно 3.1.2 $\operatorname{Prim}_I(A)$ замкнуто в $\operatorname{Prim}(A)$, поэтому $\operatorname{Prim}^I(A)$ открыто; $\hat{A}_I$ замкнуто и $\hat{A}^I$ открыто в $\hat{A}$. Тот факт, что биекция $\operatorname{Prim}_I(A) \to \operatorname{Prim}(A/I)$ есть гомеоморфизм, следует из определения топологии Джекобсона; поэтому биекция $\hat{A}_I \to (A/I)^\wedge$ есть гомеоморфизм. Чтобы доказать, что биекция $\operatorname{Prim}^I(A) \to \operatorname{Prim}(I)$ есть гомеоморфизм, нужно доказать следующее: если (J_λ) есть семейство элементов $\operatorname{Prim}^I(A)$ и J — элемент $\operatorname{Prim}^I(A)$, то

$$J \supset \bigcap J_\lambda \Leftrightarrow J \cap I \supset \bigcap (J_\lambda \cap I).$$

Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Предположим, что $J \cap I \supset \bigcap (J_\lambda \cap I)$. Тогда $J \supset (\bigcap J_\lambda) \cap I$ и $J \not\supset I$, поэтому $J \supset \bigcap J_\lambda$, (2.11.4), откуда следует эквивалентность. Тот факт, что биекция $\hat{A}^I \to \hat{I}$ есть гомеоморфизм, следует отсюда сразу.

3.2.2. Пусть A — C^*-алгебра. Если I — замкнутый двусторонний идеал A, отождествим $(A/I)^\wedge$ с замкнутой частью $\hat{A}$

и $\hat{I}$ — с дополнительной открытой частью благодаря предложению 3.2.1.

Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра. Тогда $I \to \hat{I}$ есть биекция множества замкнутых двусторонних идеалов A на множество открытых частей $\hat{A}$. Имеем $I_1 \subset I_2 \Leftrightarrow \hat{I}_1 \subset \hat{I}_2$.*

Пусть U — открытая часть $\hat{A}$ и $F = \hat{A} - U$. Так как всякий примитивный идеал A замкнут (2.9.7), то пересечение ядер $\pi \in F$ есть замкнутый двусторонний идеал I в A. Так как F замкнуто в $\hat{A}$, то каждое неприводимое представление A, ядро которого содержит I, есть элемент F. Поэтому $\hat{I} = \hat{A} - F = U$. Поэтому отображение, указанное в предложении, сюръективно. Пусть I_1 и I_2 — два замкнутых двусторонних идеала в A. Если $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$, то примитивные идеалы A, содержащие I_1, являются также примитивными идеалами A, содержащими I_2. Однако каждый замкнутый двусторонний идеал A есть пересечение примитивных идеалов, содержащих его (2.9.7). Поэтому $I_1 = I_2$, и отображение $I \to \hat{I}$ инъективно. Утверждение $I_1 \subset I_2 \Leftrightarrow \hat{I}_1 \subset \hat{I}_2$ очевидно.

3.2.3. Напомним, что в C^*-алгебре сумма двух замкнутых двусторонних идеалов есть замкнутый двусторонний идеал (1.8.4).

Предложение. *Пусть A—C^*-алгебра, I и J—два замкнутых двусторонних идеала A. Имеем $(I+J)^\wedge = \hat{I} + \hat{J}$ и $(I \cap J)^\wedge = \hat{I} \cap \hat{J}$. В частности, для того чтобы $I \cap J = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{I} \cap \hat{J} = \varnothing$.*

Это следует из предложения 3.2.2, так как $I + J$ и $I \cap J$ суть верхняя и нижняя грани $\{I, J\}$ в упорядоченном множестве замкнутых двусторонних идеалов A.

3.2.4. Пусть A — C^*-алгебра, B—C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента. Тогда A есть замкнутый двусторонний идеал коразмерности 1 в B, а именно, ядро представления ω размерности 1 C^*-алгебры B, определенного формулой

$$\omega(\lambda \cdot 1 + x) = \lambda \quad (\lambda \in \boldsymbol{C},\ x \in A).$$

Единственный примитивный идеал B, содержащий A, есть сама алгебра A. Единственное неприводимое представление B с ядром A есть ω. Поэтому $\{A\}$ замкнуто в $\mathrm{Prim}(B)$, $\{\omega\}$ замкнуто в $\hat{B}$. Согласно 3.2.1 пространства $\mathrm{Prim}(A)$ и $\hat{A}$ отождествляются с $\mathrm{Prim}\{B\} - \{A\}$ и $\hat{B} - \{\omega\}$.

Предположим, что A содержит единичный элемент e. Для всякого $\pi \in \hat{B} - \{\omega\}$ $\pi(e)$ есть ненулевой идемпотент, перестановочный с $\pi(A)$, поэтому $\pi(e) = 1$ и $\pi(e-1) = 0$. Отсюда для каждого $I \in \mathrm{Prim}(B) - \{A\}$ имеем $e - 1 \in I$, тогда как $e - 1 \notin A$. Таким образом, A не является точкой прикосновения $\mathrm{Prim}\, B - \{A\}$ в $\mathrm{Prim}(B)$. Иначе говоря, $\{A\}$ не только замкнуто, но и открыто в $\mathrm{Prim}(B)$, поэтому $\{\omega\}$ не только замкнуто, но и открыто в $\hat{B}$.

Обратно, предположим, что $\{\omega\}$ открыто в $\hat{B}$. Согласно 3.2.2 и 3.2.3 B есть прямая сумма двух замкнутых двусторонних идеалов, один из которых есть A. Так как B имеет единичный элемент, то и A тоже.

Библиография: [70].

3.3. Норма и топология.

3.3.1. Лемма. *Пусть A—C^*-алгебра, a—эрмитов элемент A и L — замкнутое множество вещественных чисел.*

(i) *Множество Z' таких элементов $\pi \in \hat{A}$, что $\mathrm{Sp}'\pi(a) \subset \{0\} \cup L$, замкнуто в $\hat{A}$.*

(ii) *Если A обладает единичным элементом, то множество Z таких элементов $\pi \in \hat{A}$, что $\mathrm{Sp}\,\pi(a) \subset L$, замкнуто в $\hat{A}$.*

Пусть $\rho \in \bar{Z}'$. Предположим, что $\mathrm{Sp}'\rho(a)$ содержит точку $\alpha \notin \{0\} \cup L$. Пусть f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная функция, не равная нулю в α и обращающаяся в нуль на $\{0\} \cup L$. Тогда $\pi(f(a)) = f(\pi(a))$ есть нуль для $\pi \in Z'$ и не нуль для $\pi = \rho$, что противоречит предположению $\rho \in \bar{Z}'$. Отсюда следует (i). Аналогично доказывается (ii).

3.3.2. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра и $x \in A$. Функция $\pi \to \|\pi(x)\|$ полунепрерывна снизу на $\hat{A}$.*

Можно ограничиться случаем, когда A обладает единичным элементом. С другой стороны, так как $\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x^*x)\|$, то можно предположить, что $x \in A^+$. Пусть $k \geqslant 0$ и Z — множество таких $\pi \in \hat{A}$, что $\|\pi(x)\| \leqslant k$. Множество Z есть также множество таких $\pi \in \hat{A}$, что $\mathrm{Sp}\,\pi(x) \subset [0, k]$. Согласно 3.3.1, Z замкнуто, откуда следует предложение.

3.3.3. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, (x_i) — семейство элементов, всюду плотное в A, и Z_i — множество таких $\pi \in \hat{A}$, что $\|\pi(x_i)\| > 1$. Тогда Z_i образуют базу топологии в $\hat{A}$.*

Пусть U — открытая часть $\hat{A}$ и $\pi \in U$. Пусть $I \subset A$ — пересечение ядер представлений, принадлежащих $\hat{A} - U$. Существует такой $x \in I$, что $\|\pi(x)\| = 2$. Для $\rho \in \hat{A} - U$ имеем $\rho(x) = 0$. Пусть i — такой индекс, что $\|x - x_i\| < 1$. Тогда $\|\pi(x_i)\| > 1$ и $\|\rho(x_i)\| < 1$ для $\rho \in \hat{A} - U$. Поэтому $\pi \in Z_i \subset U$. Так как Z_i открыто (3.3.2), то это доказывает лемму.

3.3.4. Предложение. *Если A сепарабельна, то топология в $\hat{A}$ допускает счетную базу.*

Это сразу следует из 3.3.3.

3.3.5. Лемма. *Пусть A — инволютивная алгебра с единичным элементом, x — эрмитов элемент A и $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Для того* *чтобы $\lambda \in \mathrm{Sp}_A x$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой примитивный идеал I в A, что $\lambda \in \mathrm{Sp}_{A/I} \dot{x}$ ($\dot{x}$ обозначает канонический образ x в A/I).*

Если $x-\lambda$ обратим в A, то $\dot{x}-\lambda$ обратим в A/I для любого примитивного идеала I. Предположим, что $x-\lambda$ необратим. Тогда $x-\lambda$ необратим слева (потому что эрмитов элемент, обратимый слева, обратим справа), поэтому содержится в максимальном левом идеале L. Ядро I канонического представления A в A/L есть примитивный идеал A, и образ $x-\lambda$ в A/I необратим.

3.3.6. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра. Для каждого $x \in A$ функция $\pi \to \|\pi(x)\|$ на $\hat{A}$ достигает своей верхней грани $\|x\|$.*

Заменяя x на x^*x, мы сводим лемму к случаю, когда $x \in A^+$. Можно также предположить, что A содержит единичный элемент. Тогда $\|x\| \in \mathrm{Sp}_A x$. Поэтому (3.3.5) существует такой $\pi \in \hat{A}$, что $\|x\|$ принадлежит спектру оператора $\pi(x)$, откуда $\|x\| \leqslant \|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$.

3.3.7. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, x — элемент A и $\alpha > 0$. Множество Z таких элементов $\pi \in \hat{A}$, что $\|\pi(x)\| \geqslant \alpha$, квазикомпактно.*

Пусть (Z_i) — упорядоченное по убыванию семейство непустых частей Z, относительно замкнутых в Z. Для всякого i введем J_i — пересечение ядер элементов Z_i. Канонический образ x по модулю J_i имеет норму $\geqslant \alpha$. J_i образуют семейство, упорядоченное по возрастанию; пусть J — замыкание их объединения, которое является замкнутым двусторонним идеалом в A. Определение нормы в факторе нормированного пространства показывает, что канонический образ x по модулю J имеет норму $\geqslant \alpha$. Согласно 3.3.6 существует такое $\pi \in \hat{A}$, ядро которого содержит J, что $\|\pi(x)\| \geqslant \alpha$. Имеем $\pi \in Z$, и π есть точка прикосновения Z_i для каждого i; поэтому $\pi \in \bigcap Z_i$, что доказывает предложение.

3.3.8. Напомним, что топологическое пространство называется *локально квазикомпактным*, если каждая точка допускает фундаментальную систему квазикомпактных окрестностей.

Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра. Ее спектр $\hat{A}$ локально квазикомпактен.*

Пусть $\pi \in \hat{A}$ и U — открытая окрестность π в $\hat{A}$. Так как $\hat{A} - U$ замкнуто, то существует такой $x \in A$, что $\pi(x) \neq 0$ и $\rho(x) = 0$ для $\rho \in \hat{A} - U$. Пусть V (соотв. W) — множество таких $\rho \in \hat{A}$, что

$$\|\rho(x)\| > \frac{1}{2}\|\pi(x)\| \quad \left(\text{соотв. } \|\rho(x)\| \geqslant \frac{1}{2}\|\pi(x)\|\right).$$

Согласно 3.3.2 V есть открытая окрестность π. Поэтому W — окрестность π, содержащаяся в U, и W квазикомпактна согласно 3.3.7.

3.3.9. Следствие. *Пусть A — такая C^*-алгебра, что $\hat{A}$ отделим. Для всякого $x \in A$ функция $\pi \to \| \pi(x) \|$ непрерывна на $\hat{A}$.*

Если $\hat{A}$ отделим, то множество Z из 3.3.7 замкнуто, поэтому функция $\pi \to \| \pi(x) \|$ полунепрерывна сверху. Применяем 3.3.2.

Библиография: [70], [110], [161], [162], [163].

3.4. Второе определение топологии на спектре.

3.4.1. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, A_h — множество эрмитовых элементов A, $E(A)$ — множество состояний A, Q — часть $E(A)$. Предположим, что если для $x \in A_h$ имеем $f(x) \geqslant 0$ для всех $f \in Q$, то $x \in A^+$. При этих условиях:*

(i) *слабое замыкание Q содержит $P(A)$;*

(ii) *слабо замкнутая выпуклая оболочка Q есть $E(A)$.*

Пусть Q^0 — поляра множества Q в A_h. Если $x \in A_h$, имеем

$$x \in Q^0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 1 \text{ для всех } f \in Q \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(1-x) \geqslant 0 \text{ для всех } f \in Q \Leftrightarrow 1 - x \in A^+ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) \leqslant 1 \text{ для всех } f \in E(A).$$

Слабо замкнутая выпуклая оболочка Q, очевидно, содержится в $E(A)$; она равна биполяре Q, поэтому содержит $E(A)$ согласно предыдущему. Это доказывает (ii); из (ii) следует согласно (B4), что $\bar{Q}$ содержит множество крайних точек $E(A)$, т. е. $P(A)$ (2.5.6).

3.4.2. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, $(\pi_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство представлений A в пространствах H_ι.*

(i) *Каждое состояние A, нулевое на $\bigcap \operatorname{Ker} \pi_\iota$ есть слабый предел состояний вида $\omega_{\xi_1} \circ \pi_{\iota_1} + \ldots + \omega_{\xi_n} \circ \pi_{\iota_n}$, где $\iota_1, \ldots, \iota_n \in I$, $\xi_1 \in H_{\iota_1}, \ldots, \xi_n \in H_{\iota_n}$.*

(ii) *Каждое чистое состояние A, нулевое на $\bigcap \operatorname{Ker} \pi_\iota$, есть слабый предел состояний вида $\omega_\xi \circ \pi_\iota$, где $\iota \in I$, $\xi \in H_\iota$.*

Согласно 2.2.6 можно предположить, что каждое π_ι невырождено. Пусть $H = \bigoplus H_\iota$. Переходя к фактору по $\bigcap \operatorname{Ker} \pi_\iota$, можно предположить, что $\bigcap \operatorname{Ker} \pi_\iota = 0$. Тогда представление $\rho = \bigoplus \pi_\iota$ инъективно и мы отождествим A с под-C^*-алгеброй $\rho(A)$ C^*-алгебры $\mathfrak{B}(H)$; тогда тождественное представление A невырождено. Согласно 2.4.3 можно заменить A на $A + \boldsymbol{C} \cdot 1$. Пусть Q — множество состояний A вида $\omega_\xi \circ \pi_\iota$ ($\iota \in I$, $\xi \in H_\iota$, $\| \xi \| = 1$). Если x—такой эрмитов элемент A, что $\omega_\xi(\pi_\iota(x)) \geqslant 0$ для всех $\iota \in I$ и каждого единичного вектора ξ из H_ι, то $\pi_\iota(x) \geqslant 0$ для каждого ι, поэтому $x \geqslant 0$. Теперь достаточно применить 3.4.1.

3.4.3. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, f — состояние A. Состояния A, нулевые на* $\operatorname{Ker}\pi_f$, *суть слабые пределы состояний вида $x \to \sum f(y_i^* x y_i)$, где $y_1, \ldots, y_n \in A$. Чистые состояния A, нулевые на* $\operatorname{Ker}\pi_f$, *суть слабые пределы состояний вида $x \to f(y^* x y)$, где $y \in A$.*

Это следует из 3.4.2 и 2.4.8 (ii).

3.4.4. Теорема. *Пусть A—C^*-алгебра, π—представление A и S — множество представлений A. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *ядро π содержит пересечение ядер элементов S;*

(ii) *каждая положительная форма на A, связанная с π, есть слабый предел линейных комбинаций положительных форм, связанных с S;*

(iii) *каждое состояние A, связанное с π, есть слабый предел состояний сумм положительных форм, связанных с S.*

(iii) $\Rightarrow$ (ii): очевидно.

(ii) $\Rightarrow$ (i): предположим, что условие (ii) выполнено. Если $a \in \bigcap_{\rho \in S} \operatorname{Ker}\rho$, то каждая положительная форма, связанная с S, обращается в нуль на a^*a, следовательно, каждая положительная форма, связанная с π, обращается в нуль на a^*a, откуда $\pi(a) = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): если $\operatorname{Ker}\pi \supset \bigcap_{\rho \in S} \operatorname{Ker}\rho$, то каждое состояние A, связанное с π, обращается в нуль на $\bigcap_{\rho \in S} \operatorname{Ker}\rho$, и здесь мы применяем 3.4.2 (i).

3.4.5. Ясно, что если π содержится в одном из элементов S, то условия теоремы 3.4.4 выполнены. Обратное, вообще говоря, неверно, даже если S сводится к одному элементу. Введем следующее определение.

Определение. *Если π и S удовлетворяют эквивалентным условиям* (i), (ii), (iii) *теоремы* 3.4.4, *то говорят, что π слабо содержится в S.*

Если S и T — два множества представлений A, говорят, что T слабо содержится в S, если каждый элемент T слабо содержится в S.

3.4.6. Определение. *Пусть A — C^*-алгебра, π — представление A. Назовем* **носителем** *π множество тех $\rho \in \hat{A}$, которые слабо содержатся в π.*

Используя условие (i) из 3.4.4, видим, что этот носитель S есть замкнутая часть $\hat{A}$. Так как $\operatorname{Ker}\pi$ есть пересечение примитивных идеалов, содержащих его, то π слабо содержится в S.

3.4.7. Пусть A — C^*-алгебра, π — представление A, S — множество представлений A, $\tilde{A}$—C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента, $\tilde{\pi}$ — каноническое продолжение π на $\tilde{A}$, $\tilde{S}$ — множество канонических продолжений на $\tilde{A}$ элементов из S. Если $\tilde{\pi}$ слабо содержится в $\tilde{S}$, то ясно, что π слабо содержится в S [условие (i) теоремы 3.4.4]. Обратное верно, если π невырождено. В самом деле, пусть $x \in A$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$ таковы, что $\rho(x) = \lambda \cdot 1$ для каждого $\rho \in S$; тогда $\rho(xy - \lambda y) = 0$ для каждого $y \in A$ и каждого $\rho \in S$, поэтому $\pi(xy - \lambda y) = 0$ для каждого $y \in A$, отсюда $(\pi(x) - \lambda \cdot 1)\pi(y) = 0$ для каждого $y \in A$, тогда $\pi(x) = \lambda \cdot 1$, так как π невырождено.

3.4.8. Пусть A — C^*-алгебра. С каждым множеством S представлений A связано множество $Q(S)$ положительных форм на A, которые суть слабые пределы сумм положительных форм, связанных с S. Ясно, что $Q(S)$ есть слабо замкнутый выпуклый конус в пространстве, сопряженном к A. Для того чтобы T слабо содержалось в S, необходимо и достаточно, чтобы $Q(T) \subset Q(S)$.

3.4.9. Предложение. *Примем обозначения теоремы* **3.4.4.** *Если π допускает тотализирующий вектор, условия теоремы* 3.4.4 *эквивалентны также следующему*:

(ii′) *Положительная форма $x \to f(x) = (\pi(x)\xi \mid \xi)$ на A есть слабый предел линейных комбинаций положительных форм, связанных с S.*

Ясно, что (ii) влечет (ii′). Предположим, что условие (ii′) выполнено, и покажем, что условие (ii) выполнено. Согласно 2.4.8 (ii) достаточно показать, что для каждого $y \in A$ форма $x \to g(x) = f(y^*xy)$ есть слабый предел линейных комбинаций положительных форм, связанных с S. Однако f есть слабый предел форм f_i — линейных комбинаций положительных форм, связанных с S. Поэтому g есть слабый предел форм $x \to g_i(x) = f_i(y^*xy)$ и каждая g_i есть, согласно 2.4.8 (i), линейная комбинация положительных форм, связанных с S.

3.4.10. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра, $\pi \in \hat{A}$ и $S \subset \hat{A}$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\pi \in \bar{S}$;

(ii) *π слабо содержится в S*;

(iii) *Одна из ненулевых положительных форм, связанных с π, есть слабый предел положительных форм, связанных с S*;

(iv) *Каждое состояние, связанное с π, есть слабый предел состояний, связанных с S.*

(i)$\Leftrightarrow$(ii): немедленное следствие условия (i) теоремы **3.4.4.**

(iv)$\Rightarrow$(iii): очевидно.

(iii)$\Rightarrow$(ii): следует из 3.4.9.

(ii)$\Rightarrow$(iv): следует из 3.4.2 (ii).

3.4.11. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра. Каноническое отображение $P(A) \to \hat{A}$ непрерывно и открыто.*

Пусть S — часть $\hat{A}$, Q—ее прообраз в $P(A)$, f—точка $P(A)$, π — ее образ в A. Для того чтобы π было точкой прикосновения S, необходимо и достаточно, чтобы f было точкой прикосновения Q (3.4.10). Следовательно, для того чтобы S было замкнуто в $\hat{A}$, необходимо и достаточно, чтобы Q было замкнуто в $P(A)$. Это сразу доказывает, что каноническое отображение $P(A) \to \hat{A}$ непрерывно. Пусть U—открытая часть $P(A)$, V — ее образ в $\hat{A}$. Покажем, что V открыто.

Пусть $\rho \in V$; пусть g—точка в U, образ которой в $\hat{A}$ есть ρ; тогда g не является точкой прикосновения $P(A)—U$; a fortiori g не является точкой прикосновения полного прообраза $\hat{A} — V$ в $P(A)$; следовательно, ρ не является точкой прикосновения $\hat{A}—V$; следовательно V открыто. Это доказывает, что каноническое отображение $P(A) \to \hat{A}$ открыто.

3.4.12. Таким образом, упомянутое выше второе определение топологии в $\hat{A}$ таково: это фактор-топология топологии в $P(A)$ при каноническом отображении $P(A) \to \hat{A}$. Ясно, что для коммутативной алгебры A топологическое пространство $\hat{A}$ есть обычный спектр A.

3.4.13. Следствие. *Пусть A—C^*-алгебра. Пространство $\hat{A}$ есть бэровское пространство.*

Пусть $(V_1, V_2, \ldots)$ — убывающая последовательность всюду плотных открытых частей $\hat{A}$. Пусть U_n — прообраз V_n в $P(A)$. Согласно 3.4.11 U_n есть всюду плотная открытая часть $P(A)$. Так как $P(A)$ есть бэровское пространство (B14), то $\bigcap U_n$ всюду плотно в $P(A)$. Согласно 3.4.11 $\bigcap V_n$ — образ $\bigcap U_n$ в $\hat{A}$—всюду плотно в $\hat{A}$.

Библиография: [16], [26], [44], [70], [134], [161].

3.5. Третье определение топологии на спектре.

3.5.1. Для каждого кардинального n назовем *стандартным* гильбертовым пространством размерности n гильбертово пространство таких наборов (ξ_i) комплексных чисел, что $\sum|\xi_i|^2 < +\infty$, занумерованных индексами из множества мощности n (например, наименьшим отрезком порядковых чисел мощности n). Этот выбор, впрочем, не важен для последующего: он предназначен только для закрепления понятий.

Пусть n — кардинальное число, H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n, A — C^*-алгебра, $\mathrm{Rep}_n(A)$ — множество представлений A в H_n, $\mathrm{Irr}_n(A)$ — множество ненулевых неприводимых представлений A в H_n. Имеется очевидное каноническое отображение $\mathrm{Irr}_n(A)$ в $\hat{A}$, ставящее в соответствие каждому элементу $\mathrm{Irr}_n(A)$ его класс эквивалентности.

Канонический образ $\mathrm{Irr}_n(A)$ в $\hat{A}$ есть множество $\hat{A}_n$ ненулевых неприводимых представлений размерности n.

3.5.2. Мы снабдим $\mathrm{Rep}_n(A)$ топологией простой слабой сходимости на A. Тогда $\pi_\lambda \to \pi$ (где π_λ, $\pi \in \mathrm{Rep}_n(A)$) означает, что $(\pi_\lambda(a)\xi \mid \eta) \to (\pi(a)\xi \mid \eta)$, где $a \in A$, $\xi \in H_n$, $\eta \in H_n$. Эта топология тождественна с топологией простой сильной сходимости; действительно, если $\pi_\lambda \to \pi$ в предыдущем смысле, то для каждого $a \in A$ и всякого $\xi \in H_n$ имеем

$$\begin{aligned}\|\pi_\lambda(a)\xi - \pi(a)\xi\|^2 &= \\ &= (\pi_\lambda(a)\xi \mid \pi_\lambda(a)\xi) - 2\,\mathrm{Re}\,(\pi_\lambda(a)\xi \mid \pi(a)\xi) + (\pi(a)\xi \mid \pi(a)\xi) = \\ &= (\pi_\lambda(a^*a)\xi \mid \xi) - 2\,\mathrm{Re}\,(\pi_\lambda(a)\xi \mid \pi(a)\xi) + (\pi(a^*a)\xi \mid \xi) \to \\ &\to (\pi(a^*a)\xi \mid \xi) - 2\,\mathrm{Re}\,(\pi(a)\xi \mid \pi(a)\xi) + (\pi(a^*a)\xi \mid \xi) = 0.\end{aligned}$$

3.5.3. Пусть π_λ, $\pi \in \mathrm{Rep}_n(A)$, и предположим, что π допускает тотализирующий вектор ξ. Для того чтобы $\pi_\lambda \to \pi$, достаточно, чтобы $\pi_\lambda(a)\xi \to \pi(a)\xi$ для каждого $a \in A$; действительно, имеем тогда для любых a, $b \in A$

$$\begin{aligned}\|\pi_\lambda(a)\pi(b)\xi - \pi(a)\pi(b)\xi\| &\leqslant \\ &\leqslant \|\pi_\lambda(a)\pi(b)\xi - \pi_\lambda(a)\pi_\lambda(b)\xi\| + \|\pi_\lambda(a)\pi_\lambda(b)\xi - \pi(a)\pi(b)\xi\| \leqslant \\ &\leqslant \|a\| \cdot \|\pi(b)\xi - \pi_\lambda(b)\xi\| + \|\pi_\lambda(ab)\xi - \pi(ab)\xi\| \to 0.\end{aligned}$$

Так как $\pi(b)\xi$ всюду плотно в H_n и $\|\pi_\lambda(a)\| \leqslant \|a\|$, заключаем, что $\pi_\lambda(a)\eta \to \pi(a)\eta$ для каждого $\eta \in H_n$.

3.5.4. Пусть π_λ, $\pi \in \mathrm{Rep}_n(A)$ и A' — подмножество, всюду плотное в A. Для того чтобы $\pi_\lambda \to \pi$, достаточно, чтобы $(\pi_\lambda(a)\xi \mid \eta) \to (\pi(a)\xi \mid \eta)$ для любых $a \in A'$, $\xi \in H_n$, $\eta \in H_n$; это сразу следует из неравенства $\|\pi_\lambda(a) - \pi_\lambda(a')\| \leqslant \|a - a'\|$.

3.5.5. В $\mathrm{Rep}_n(A)$ эквивалентность представлений есть *открытое* отношение эквивалентности. Действительно, пусть G — группа унитарных операторов в H_n. Для $U \in G$ и $\pi \in \mathrm{Rep}_n(A)$ введем $U\pi \in \mathrm{Rep}_n(A)$ — представление, определяемое формулой $(U\pi)(x) = U\pi(x)U^{-1}$ для любого $x \in A$. Сразу видно, что каждое отображение $\pi \to U\pi$ есть гомеоморфизм $\mathrm{Rep}_n(A)$ на $\mathrm{Rep}_n(A)$. Поэтому насыщение открытой части Ω в $\mathrm{Rep}_n(A)$, которое есть объединение $U\Omega$ для $U \in G$, открыто в $\mathrm{Rep}_n(A)$.

3.5.6. Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — векторы H и $\varepsilon > 0$. Существует $\varepsilon' > 0$, обладающее следующим свойством:*

если $\eta_1, \ldots, \eta_n \in H$ таковы, что $|(\eta_i \mid \eta_j) - (\xi_i \mid \xi_j)| \leqslant \varepsilon'$ для любых i и j, то существует такой унитарный оператор U в H, что $\|U\eta_i - \xi_i\| \leqslant \varepsilon$ для каждого i.

Достаточно показать следующее: пусть $(\eta_1^p;\ \eta_2^p, \ldots, \eta_n^p)$, где $p = 1, 2, \ldots$ — последовательность систем векторов таких, что

$(\eta_i^p \mid \eta_j^p) \to (\xi_i \mid \xi_j)$ для любых i и j. Тогда, обозначая через G унитарную группу H, имеем

$$\inf_{U \in G} (\| U\eta_1^p - \xi_1 \| + \ldots + \| U\eta_n^p - \xi_n \|) \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Это очевидно для $n=0$. Предположим, что это установлено для любых наборов из $n-1$ векторов.

Пусть H' — векторное подпространство H, порожденное $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, и $H'' = H \ominus H'$. Согласно предположению индукции, существуют $U_1, U_2, \ldots \in G$ такие, что

$$\| U_p\eta_1^p - \xi_1 \| + \ldots + \| U_p\eta_{n-1}^p - \xi_{n-1} \| \to 0.$$

Пусть

$$\xi_n' = P_{H'}\xi_n, \qquad \xi_n' = P_{H'}\xi_n, \qquad \eta_n'^p = P_{H'}U_p\eta_n^p, \qquad \eta_n''^p = P_{H''}U_p\eta_n^p.$$

Для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ имеем

$$\begin{aligned} |(\xi_n' - \eta_n'^p \mid \xi_i)| &= |(\xi_n - U_p\eta_n^p \mid \xi_i)| \leqslant \\ &\leqslant |(\xi_n \mid \xi_i) - (U_p\eta_n^p \mid U_p\eta_i^p)| + |(U_p\eta_n^p \mid U_p\eta_i^p) - (U_p\eta_n^p \mid \xi_i)| \leqslant \\ &\leqslant |(\xi_n \mid \xi_i) - (\eta_n^p \mid \eta_i^p)| + \| \eta_n^p \| \cdot \| U_p\xi_i^p - \xi_i \| \to 0, \end{aligned}$$

поэтому $\eta_n'^p \to \xi_n'$ в конечномерном пространстве H'. В то же время

$$\| U_p\eta_n^p \|^2 = \| \eta_n^p \|^2 \to \| \xi_n \|^2, \quad \text{поэтому} \quad \| \eta_n''^p \|^2 \to \| \xi_n'' \|^2.$$

Тогда существует такой унитарный оператор V_p в H, индуцирующий тождественный оператор в H', что $V_p\eta_n''^p \to \xi_n''$. Для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ имеем

$$\| P_{H''}U_p\eta_i^p \| \to \| P_{H''}\xi_i \| = 0, \quad \text{поэтому} \quad \| V_pU_p\eta_i^p - U_p\eta_i^p \| \to 0.$$

Следовательно,

$$\| V_pU_p\eta_1^p - \xi_1 \| + \ldots + \| V_pU_p\eta_{n-1}^p - \xi_{n-1} \| \to 0.$$

С другой стороны,

$$\| V_pU_p\eta_n^p - \xi_n \|^2 = \| \eta_n'^p - \xi_n' \|^2 + \| V_p\eta_n''^p - \xi_n'' \|^2 \to 0.$$

Поэтому

$$\inf_{U \in G} \sum_{i=1}^{n} \| U\eta_i^p - \xi_i \| \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

3.5.7. Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, A — C^*-алгебра, π_0 — ненулевое неприводимое представление A в замкнутом векторном подпространстве H_0 пространства H,*

S — множество элементов $\hat{A}$, размерность которых $\leqslant \dim H$. Пусть $a_1, \ldots, a_p \in A$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H_0$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau_0 \in S$ — класс π_0. Существует окрестность V точки τ_0 в S, обладающая следующим свойством: если $\tau \in V$, то существует такое представление π C^*-алгебры A в замкнутом векторном подпространстве H, что:

1° *класс эквивалентности π есть τ;*

2° $\|\pi(a_i) P_{H_\pi}\xi_j - \pi_0(a_i)\xi_j\| \leqslant \varepsilon$ *для любых i, j;*

3° *если* $\dim\tau = \dim H$, *то* $H_\pi = H$.

Можно ограничиться случаем, когда A содержит единичный элемент, $a_1 = 1$, $\|a_i\| \leqslant 1$ и $\xi_1 \neq 0$.

1° Предположим сначала $n = 1$. Пусть $\varepsilon_1 > 0$. Существует окрестность W точки τ_0 в $\hat{A}$, обладающая следующим свойством: если $\tau \in W$, то существуют представление ρ класса τ алгебры A и $\xi \in H_\rho$ такие, что

$$|(\rho(a_i^* a_j)\xi \mid \xi) - (\pi_0(a_i^* a_j)\xi_1 \mid \xi_1)| \leqslant \varepsilon_1 \tag{1}$$

для любых i и j (это следует из теоремы 3.4.11). Если $\tau \in V = W \cap S$, то можно предположить, что H_ρ есть замкнутое векторное подпространство H, совпадающее с H, если $\dim\tau = \dim H$. Для $x \in A$ продолжим $\rho(x)$ до оператора $\rho'(x) \in \mathfrak{B}(H)$ нулем на $H \ominus H_\rho$. Неравенство (1) переписывается в виде

$$|(\rho(a_j)\xi \mid \rho(a_i)\xi) - (\pi_0(a_j)\xi_1 \mid \pi_0(a_i)\xi_1)| \leqslant \varepsilon_1.$$

Если выбрать ε_1 надлежащим образом, то отсюда следует, по 3.5.6, существование такого унитарного оператора U в H, что

$$\|U\rho(a_i)\xi - \pi_0(a_i)\xi_1\| \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{для любого } i.$$

В частности, для $i = 1$ получаем $\|U\xi - \xi_1\| < \varepsilon/2$. Поэтому

$$\begin{aligned}\|U\rho'(a_i)U^{-1}\xi_1 - \pi_0(a_i)\xi_1\| &\leqslant \\ \leqslant \|U\rho'(a_i)U^{-1}\xi_1 - U\rho(a_i)\xi\| &+ \|U\rho(a_i)\xi - \pi_0(a_j)\xi_1\| \leqslant \\ &\leqslant \|a_i\|\|U^{-1}\xi_1 - \xi\| + \|U\rho(a_i)\xi - \pi_0(a_i)\xi_1\| \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

для каждого i. Можно взять тогда в качестве π представление $x \to U\rho(x)U^{-1}$.

2° Пусть теперь n любое. Существуют такие $b_1, \ldots, b_n \in A$, что $\|\xi_j - \pi_0(b_j)\xi_1\| \leqslant \varepsilon/4$. Согласно 1° существует окрестность V точки τ_0 в S, обладающая следующим свойством: если $\tau \in V$, то существует такое представление π класса τ C^*-алгебры A в замкнутом векторном подпространстве H (равном H, если $\dim\tau = \dim H$), что

$$\|\pi(a_i b_j) P_{H_\pi}\xi_1 - \pi_0(a_i b_j)\xi_1\| \leqslant \varepsilon/4,$$

$$\|\pi(b_j) P_{H_\pi}\xi_1 - \pi_0(b_j)\xi_1\| \leqslant \varepsilon/4$$

для любых i и j. Тогда

$$\|\pi(a_i) P_{H_\pi}\xi_j - \pi_0(a_i)\xi_j\| \leqslant \|\pi(a_i) P_{H_\pi}(\xi_j - \pi_0(b_j)\xi_1)\| + \\ + \|\pi(a_i) P_{H_\pi}\pi_0(b_j)\xi_1 - \pi(a_i)\pi(b_j) P_{H_\pi}\xi_1\| + \\ + \|\pi(a_i b_j) P_{H_\pi}\xi_1 - \pi_0(a_i b_j)\xi_1\| + \|\pi_0(a_i)\pi_0(b_j)\xi_1 - \pi_0(a_i)\xi_j\| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\|a_i\| + \frac{\varepsilon}{4}\|a_i\| + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\|a_i\| \leqslant \varepsilon.$$

3.5.8. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра, n — кардинальное число. Каноническое отображение* $\operatorname{Irr}_n(A)$ *на* $\hat{A}_n$ *непрерывно и открыто.*

Пусть Q — часть $\operatorname{Irr}_n(A)$, π_0 — точка $\operatorname{Irr}_n(A)$, S и τ_0 — их образы в $\hat{A}_n$. Если π_0 есть точка прикосновения Q, то каждая положительная форма, связанная с π_0, есть слабый предел положительных форм, связанных с Q, поэтому τ_0 есть точка прикосновения S. Это доказывает, что отображение $\operatorname{Irr}_n(A) \to \hat{A}$ непрерывно. С другой стороны, каждая окрестность π_0 в $\operatorname{Irr}_n(A)$ содержит окрестность, построенную следующим образом: пусть $a_1, \ldots, a_p \in A$, $\xi_1, \ldots, \xi_m \in H_n$ и $\varepsilon > 0$; возьмем множество таких $\pi \in \operatorname{Irr}_n(A)$, что $\|\pi(a_i)\xi_j - \pi_0(a_i)\xi_j\| \leqslant \varepsilon$ для всех i и j. Согласно 3.5.7 образ такой окрестности в $\hat{A}_n$ есть окрестность τ_0 в $\hat{A}_n$. Это доказывает, что отображение $\operatorname{Irr}_n(A) \to \hat{A}_n$ открыто.

Итак, топология $\hat{A}_n$ есть фактор-топология топологии $\operatorname{Irr}_n(A)$ при каноническом отображении $\operatorname{Irr}_n(A) \to \hat{A}_n$.

3.5.9. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра и $x \in A^+$. Для любого $\pi \in \hat{A}$ след $\operatorname{Tr}\pi(x)$ есть неотрицательное число, конечное или бесконечное. Функция $\pi \to \operatorname{Tr}\pi(x)$ полунепрерывна снизу на $\hat{A}$.*

Пусть H — такое гильбертово пространство, что всякое неприводимое представление A может быть реализовано в замкнутом векторном подпространстве H (2.3.3). Пусть $\pi_0 \in A$ реализовано в замкнутом векторном подпространстве H_0 в H. Пусть $\alpha < \operatorname{Tr}\pi_0(x)$ и $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — такая ортонормированная система в H_0, что

$$\sum_{j=1}^{n} (\pi_0(x)\xi_j \mid \xi_j) - \alpha = \beta > 0.$$

Согласно 3.5.7 существует такая окрестность V точки π_0 в $\hat{A}$, что всякое $\pi \in V$ реализуется в замкнутом векторном подпространстве H так, что

$$\|\pi(x) P_{H_\pi}\xi_j - \pi_0(x)\xi_j\| \leqslant \beta/n \text{ для любого } j.$$

Тогда

$$\operatorname{Tr}\pi(x) \geqslant \sum_{j=1}^{n} (\pi(x) P_{H_\pi}\xi_j \mid \xi_j) \geqslant \sum_{j=1}^{n} (\pi_0(x)\xi_j \mid \xi_j) - n\frac{\beta}{n} = \alpha.$$

Библиография: [47], [161], [162].

3.6. Конечномерные представления.

3.6.1. Пусть k — коммутативное тело, n — целое > 0, $\mathfrak{M}_n(k)$ — алгебра матриц над k с n строками и n столбцами. Эта алгебра имеет размерность n^2. Поэтому если r — целое $> n^2$, то

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \ldots X_{\sigma(r)} = 0 \tag{1}$$

для любых $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{M}_n(k)$ ($\mathfrak{S}_r$ обозначает симметрическую группу для $\{1, 2, \ldots, r\}$, ε_σ — сигнатуру перестановки σ). Пусть $r(n)$ — наименьшее целое r такое, что в $\mathfrak{M}_n(k)$ выполняется тождество (1).

3.6.2. Лемма. *Имеем* $r(n) \geqslant r(n-1)+2$.

Пусть $t = r(n-1)-1$. Пусть $X_1, \ldots, X_t \in \mathfrak{M}_{n-1}(k)$ таковы, что $Y = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(t)} \neq 0$. Положим $Y = (y_{ij})$; существуют такие h и l, что $y_{hl} \neq 0$. Пусть X'_i (соотв. Y') — матрица, получаемая из X_i (соотв. Y) присоединением n-й строки и n-го столбца нулей. Пусть X'_{t+1} (соотв. X'_{t+2}) — матрица из $\mathfrak{M}_n(k)$, все элементы которой суть нули, кроме элемента в l-й строке и n-м столбце (соотв. элемента в n-й строке и n-м столбце), который равен 1. В сумме

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{t+2}} \varepsilon_\tau X'_{\tau(1)} X'_{\tau(2)} \ldots X'_{\tau(t+2)} \tag{1}$$

все члены, в которых X'_{t+2} не находится на последнем месте, суть нули (ибо $X'_{t+2}X'_j = 0$ для $j < t+2$);, что касается тех, которые оканчиваются на X'_{t+2}, то они равны нулю, если X'_{t+1} не предшествует X'_{t+2} (ибо $X'_j X'_{t+2} = 0$ для $j < t+1$). Сумма (1) равна поэтому $Y' X'_{t+1} X'_{t+2} = Y' X'_{t+1}$, а эта матрица — ненулевая, так как $y_{nl} \neq 0$. Поэтому $r(n) > t+2 = r(n-1)+1$.

3.6.3. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, n — целое > 0, ${}_n\hat{A}$ — множество таких $\pi \in A$, что* $\dim \pi \leqslant n$, *$\hat{A}_n$ — множество таких $\pi \in \hat{A}$, что* $\dim \pi = n$.

(i) *${}_n\hat{A}$ замкнуто в $\hat{A}$, $\hat{A}_n$ открыто в ${}_n\hat{A}$.*

(ii) *Пусть I_n — пересечение ядер $\pi \in {}_n\hat{A}$. Тогда ${}_n\hat{A}$ канонически гомеоморфно спектру A/I_n и $\hat{A}_n$ канонически гомеоморфно спектру I_{n-1}/I_n.*

Пусть $t = r(n)$ и $x_1, \ldots, x_t \in A$. Элемент $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_t} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(t)}$ принадлежит ядру всех представлений из ${}_n\hat{A}$, поэтому лежит в I_n. Пусть $\pi \in \hat{A}$таково, что $\operatorname{Ker} \pi \supset I_n$. Имеем

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_t} \varepsilon_\sigma \pi(x_{\sigma(1)}) \ldots \pi(x_{\sigma(t)}) = \pi\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_t} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(t)}\right) = 0$$

для любых $x_1, \ldots, x_t \in A$. Так как $\pi(A)$ сильно всюду плотно в $\mathfrak{B}(H_\pi)$, то отсюда заключаем, что $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_t} \varepsilon_\sigma u_{\sigma(1)} \ldots u_{\sigma(t)} = 0$ для любых $u_1, \ldots, u_t \in \mathfrak{B}(H_\pi)$. Согласно 3.6.2, H_π не содержит никакого векторного подпространства конечной размерности $> n$; следовательно, $\dim H_\pi \leqslant n$, поэтому $\pi \in {}_n\hat{A}$. Итак, ${}_n\hat{A}$ замкнуто в $\hat{A}$. Поэтому $\hat{A}_n = {}_n\hat{A} - {}_{n-1}\hat{A}$ открыто в ${}_n\hat{A}$. Утверждение (ii) следует из (i) и 3.2.1.

3.6.4. Предложение. (i) *Топология $\hat{A}_n$ локально компактна.*

(ii) *Эта топология есть слабейшая из топологий, в которых все функции $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ непрерывны на $\hat{A}_n$ $(x \in A)$.*

Пусть H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n. Для всякого $x \in A$ отображение $\pi \to \pi(x)$ непрерывно на $\operatorname{Irr}_n(A)$; так как $n < +\infty$, получаем отсюда, что функция $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ непрерывна на $\operatorname{Irr}_n(A)$; так как она принимает одно и то же значение для двух эквивалентных представлений, то она определяет, при переходе к фактору, непрерывную функцию φ_x на $\hat{A}_n$ (3.5.8). С другой стороны, если π и π' — два неэквивалентных неприводимых представления A в H_n, то существует такой $x \in A$, что $\operatorname{Tr} \pi(x) \neq \operatorname{Tr} \pi'(x)$ (2.8.3 или B27). Поэтому функции φ_x отделяют точки $\hat{A}_n$. Во-первых, это доказывает, что топология $\hat{A}_n$ отделима. С другой стороны, $\hat{A}_n$ отождествляется со спектром некоторой C^*-алгебры [3.6.3 (ii)], поэтому локально компактно (3.3.8). Пусть $Z = \hat{A}_n \cup \{\omega\}$ — александровская компактификация $\hat{A}_n$. Согласно 3.3.7 функции φ_x продолжаются до непрерывных функций ψ_x на Z, принимающих значение 0 в ω. Функции ψ_x отделяют точки Z; действительно, согласно предыдущему, достаточно доказать, что для всякого $\pi \in \hat{A}_n$ существует $x \in A$ такой, что $\psi_x(\pi) \neq 0$; однако, если $y \in A$ таков, что $\pi(y) \neq 0$, имеем

$$\psi_{y^*y}(\pi) = \operatorname{Tr} \pi(y^*y) = \operatorname{Tr} \pi(y)^* \pi(y) > 0.$$

Итак, топология, определенная на Z функциями ψ_x, отделима и слабее топологии Z, поэтому эти топологии совпадают. Это доказывает (ii).

Библиография: [68], [70], [161].

3.7. Дополнения о пространствах $\operatorname{Rep}_n(A)$.

3.7.1. Предложение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, n — кардинальное число $\leqslant \aleph_0$. Топологическое пространство $\operatorname{Rep}_n(A)$ — польское.*

Стандартное гильбертово пространство H_n размерности n сепарабельно. Пусть $\mathfrak{B}_s(H_n)$ — множество $\mathfrak{B}(H_n)$, снабженное сильной топологией. Оно квазиполно (B11). Пусть $\mathfrak{B}_s(A, \mathfrak{B}_s(H_n))$ — пространство непрерывных линейных отображений A в $\mathfrak{B}_s(H_n)$, снабженное топологией простой сходимости. Всякая эквинепрерывная и замкнутая часть $\mathfrak{B}_s(A, \mathfrak{B}_s(H_n))$ есть полное равномерное подпространство $\mathfrak{B}_s(A, \mathfrak{B}_s(H_n))$ (B12). В частности, множество таких линейных отображений π C^*-алгебры A в $\mathfrak{B}_s(H_n)$, что $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ для любого $x \in A$, есть полное равномерное подпространство B в $\mathfrak{B}_s(A, \mathfrak{B}_s(H_n))$. Пусть $(x_i)_{i \in I}$ — такая тотальная последовательность в A, что $\|x_i\| \leqslant 1$ для всякого i. Пусть $(\xi_j)_{j \in J}$ — такая тотальная последовательность в H_n, что $\|\xi_j\| \leqslant 1$ для всякого j. Равномерная структура B допускает в качестве фундаментальной системы окружений множество окружений, определяемых неравенствами

$$\|\pi(x_i)\xi_j - \pi'(x_i)\xi_j\| \leqslant \frac{1}{k} \qquad (i \in I,\ j \in J,\ k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, эта равномерная структура метризуема. Отображение

$$\pi \to (\pi(x_i)\xi_j)_{i \in I,\ j \in J}$$

пространства B на подпространство $H_n^{I \times J}$ взаимно непрерывно, поэтому B сепарабельно. Короче, B, наделенное топологией простой сильной сходимости, есть польское пространство. Наконец, $\operatorname{Rep}_n(A)$ есть множество таких $\pi \in B$, что $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$, $\pi(x^*) = \pi(x)^*$ для любых x, $y \in A$. Второе условие равносильно условию $(\pi(x^*)\xi \mid \eta) = (\xi \mid \pi(x)\eta)$ для любых $x \in A$, $\xi \in H_n$, $\eta \in H_n$. Поэтому $\operatorname{Rep}_n(A)$ есть замкнутое подпространство B и, вследствие этого, польское пространство.

3.7.2. Лемма. *Пусть E, F — два комплексных банаховых пространства, F сепарабельно, M — топологическое пространство, $m \to U(m)$ — непрерывное отображение M в $\mathfrak{B}_s(E, F)$ (множество непрерывных линейных отображений E в F, снабженное топологией простой сходимости). Пусть n — целое. Множество таких $m \in M$, что $\operatorname{codim} \overline{U_m(E)} \leqslant n$, есть G_δ в M.*

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — элементы F. Пусть R — множество систем $r=(r_1, \ldots, r_k)$ комплексных чисел таких, что $1/2 \leqslant |r_1|^2 + \ldots + |r_k|^2 \leqslant 1$. Для любых $r \in R$, $e \in E$ и любого целого $p>0$ множество $M(r, e, p)$ таких элементов $m \in M$, что

$$\|r_1 f_1 + \ldots + r_k f_k - U_m(e)\| < \frac{1}{p},$$

открыто в M. Но $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависимы по модулю $\overline{U_m(E)}$ тогда и только тогда, когда для всякого p существуют такие $r \in R$ и $e \in E$, что

$$\|r_1 f_1 + \ldots + r_k f_k - U_m(e)\| < \frac{1}{p},$$

иначе говоря, тогда и только тогда, когда

$$m \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{r \in R,\, e \in E} M(r, e, p).$$

[Действительно, если это выполнено, то можно предположить, что при $p \to +\infty$ набор $(r_1, \ldots, r_k)$ стремится к некоторому пределу; тогда $U_m(e)$ имеет предел, который является элементом $\overline{U_m(e)}$ и ненулевой линейной комбинацией $f_1, \ldots, f_k$. Обратно, если $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависимы по модулю $\overline{U_m(e)}$, то для всякого p существуют такие $r=(r_1, \ldots, r_k) \in R$ и $e \in E$, что

$$\|r_1 f_1 + \ldots + r_k f_k - U_m(e)\| < \frac{1}{p},$$

откуда следует наше утверждение.]

Итак, множество таких $m \in M$, что $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависимы по модулю $\overline{U_m(E)}$, есть G_δ в M. Пусть тогда $(g_1, g_2, \ldots)$ — последовательность элементов F, плотная в F. Имеем $\operatorname{codim} \overline{U_m(E)} \leqslant n$ тогда и только тогда, когда $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_{n+1}}$ линейно зависимы по модулю $U_m(E)$ для любых индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$. Так как семейство систем $(i_1, i_2, \ldots, i_{n+1})$ счетно, то множество из леммы 3.7.2 представляется как счетное пересечение G_δ, следовательно, само есть G_δ.

3.7.3. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, n — кардинальное число $\leqslant \aleph_0$, M — топологическое пространство, $m \to \pi_m$ и $m \to \pi'_m$ — два непрерывных отображения M в $\mathrm{Rep}_n(A)$, p — целое $\geqslant 0$. Множество таких $m \in M$, что число сплетения π_m и π'_m не больше p, есть G_δ в M.*

Пусть H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n, K — единичный шар в H_n, B — единичный шар в A. Обозначим через V банахово пространство таких наборов

$(\mu_{ijk})_{i\in I, j\in J, k\in J}$ комплексных чисел, что

$$\|(\mu_{ijk})\| = \sum_{i\in I, j\in J, k\in J} |\mu_{ijk}| < +\infty.$$

Сопряженное к нему есть банахово пространство X таких наборов $(\lambda_{ijk})_{i\in I, j\in J, k\in J}$ комплексных чисел, что $\|(\lambda_{ijk})\| = \sup|\lambda_{ijk}| < +\infty$. Мы обозначим через P преддвойственное пространство алгебры фон Неймана $\mathfrak{B}(H_n)$ (А23). Оно сепарабельно.

Для любого $m \in M$ введем V_m — непрерывное линейное отображение $\mathfrak{B}(H_n)$ в X, определяемое формулой

$$V_m(T) = (((\pi_m(i)T - T\pi'_m(i))j \mid k))_{i\in I, j\in J, k\in J}.$$

Тогда число сплетения π_m и π'_m есть размерность $\operatorname{Ker} V_m$. Для $T \in \mathfrak{B}(H_n)$ и $(\mu_{ijk}) \in V$ имеем, вводя обозначения x_i, ξ_j, вместо i, j

$$\langle(\mu_{ijk}), V_m(T)\rangle = \sum_{i,j,k} \mu_{ijk}((\pi_m(x_i)T - T\pi'_m(x_i))\xi_j \mid \xi_k) =$$
$$= \sum_{i,j,k} \mu_{ijk}((T\xi_j \mid \pi_m(x_i^*)\xi_k) - (T\pi'_m(x_i)\xi_j \mid \xi_k)).$$

Если даны два вектора η и ζ из H_n, обозначим через $\varphi(\eta;\zeta)$ элемент P, определяемый формулой $\langle\varphi(\eta,\zeta), T\rangle = (T\eta \mid \zeta)$; имеем $\|\varphi(\eta,\zeta)\| = \|\eta\|\|\zeta\|$. Тогда:

$$\langle(\mu_{ijk}), V_m(T)\rangle = \left\langle \sum_{i,j,k} \mu_{ijk}(\varphi(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - \varphi(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k)), T\right\rangle.$$

Поэтому V_m есть линейное отображение, сопряженное непрерывному линейному отображению U_m из Y_m в P, определенному формулой

$$U_m((\mu_{ijk})) = \sum_{i,j,k} \mu_{ijk}(\varphi(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - \varphi(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k)), \qquad (1)$$

и число сплетения π_m и π'_m есть $\operatorname{codim} \overline{U_m(Y)}$. Для доказательства 3.7.3 достаточно, в силу 3.7.2, доказать непрерывность отображения $m \to U_m$ пространства M в $\mathfrak{B}(Y, P)$, наделенное топологией простой сходимости. Итак, покажем, что для фиксированного $(\mu_{ijk}) \in Y$ элемент (1) из P зависит непрерывно от m (в смысле нормы в P). Так как

$$\|\mu_{ijk}(\varphi(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k) - \varphi(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k))\| \leqslant 2|\mu_{ijk}|,$$

то достаточно доказать, что каждое выражение $\varphi(\xi_j, \pi_m(x_i^*)\xi_k)$, $\varphi(\pi'_m(x_i)\xi_j, \xi_k)$ непрерывно зависит от m. Но отображения $m \to \pi_m(x_i^*)\xi_j$ и $m \to \pi'_m(x_i)\xi_j$ пространства M в H_m непрерывны, по определению топологии в $\operatorname{Rep}_n(A)$ и отображение $(\eta,\zeta) \to \varphi(\eta,\zeta)$ из $H_n \times H_n$ в P непрерывно согласно равенству $\|\varphi(\eta,\zeta)\| \leqslant \|\eta\|\cdot\|\zeta\|$.

3.7.4. Предложение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, n — кардинальное число $\leqslant \aleph_0$. Топологическое пространство* $\mathrm{Irr}_n(A)$ — *польское.*

Применим 3.7.3 к $M = \mathrm{Rep}_n(A)$, $\pi_\rho = \pi'_\rho = \rho$ для любого $\rho \in \mathrm{Rep}_n(A)$ и $p = 1$. Множество, полученное таким образом в $M = \mathrm{Rep}_n(A)$ при $n > 0$, есть множество $\mathrm{Irr}_n(A)$, увеличенное, быть может, на нулевое представление (если $n = 1$). Поэтому $\mathrm{Irr}_n(A)$ есть G_δ в пространстве $\mathrm{Rep}_n(A)$, которое является польским (3.7.1). Следовательно, $\mathrm{Irr}_n(A)$ — польское (B15).

3.7.5. Применим 3.7.3 к $M = \mathrm{Rep}(A)$, $\pi_\rho = \rho$, полагая π'_ρ нулевым представлением A в H_n, и $p = 0$. Получаем множество невырожденных представлений A в H_n. Если A — сепарабельная C^*-алгебра, видим, что это множество есть G_δ в $\mathrm{Rep}_n(A)$ и, вследствие этого, польское пространство.

Библиография: [45], [81].

3.8. Борелевская структура Макки.

3.8.1. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Для любого кардинального числа $n \leqslant \aleph_0$ снабдим $\mathrm{Rep}_n(A)$ и $\mathrm{Irr}_n(A)$ борелевскими структурами (B19), подчиненными их топологии. Это — слабейшая борелевская структура, в которой функции $\pi \to (\pi(x)\xi \mid \eta)$ ($x \in A$, ξ и η — в типичном гильбертовом пространстве размерности n)—борелевские. Пусть $\mathrm{Rep}(A)$ [соотв. $\mathrm{Irr}(A)$]— объединение $\mathrm{Rep}_n(A)$ [соотв. $\mathrm{Irr}_n(A)$] для $n = 1, 2, \ldots, \aleph_0$, снабженное борелевской структурой—суммой структур в $\mathrm{Rep}_n(A)$ [соотв. $\mathrm{Irr}_n(A)$]. Борелевское пространство $\mathrm{Irr}(A)$ есть борелевское подмножество $\mathrm{Rep}(A)$, согласно доказательству 3.7.4, и структура, индуцированная на $\mathrm{Irr}(A)$ борелевской структурой $\mathrm{Rep}(A)$, есть борелевская структура $\mathrm{Irr}(A)$. Согласно 3.7.1 и 3.7.4 борелевские пространства $\mathrm{Rep}(A)$ и $\mathrm{Irr}(A)$ стандартны (B20).

3.8.2. Если A сепарабельна, то каноническое отображение $\mathrm{Irr}(A) \to \hat{A}$, которое каждому элементу $\mathrm{Irr}(A)$ ставит в соответствие его класс эквивалентности, сюръективно (2.3.3).

Определение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Назовем борелевской структурой Макки на $\hat{A}$ фактор-структуру борелевской структуры в* $\mathrm{Irr}(A)$ *при каноническом отображении* $\mathrm{Irr}(A) \to \hat{A}$.

Эта борелевская структура, вообще говоря, не стандартна (см. 4.6.1).

3.8.3. Предложение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Борелевская структура Макки на A тоньше, чем борелевская структура, подчиненная топологии $\hat{A}$.*

Пусть Ω — открытая часть $\hat{A}$. Для любого $n = 1, 2, \ldots, \aleph_0$ прообраз Ω в $\mathrm{Irr}_n(A)$ открыт (3.5.8), поэтому борелевский.

Следовательно, прообраз Ω в $\mathrm{Irr}(A)$ является борелевским, и Ω — борелевское в структуре Макки. Отсюда следует, что каждая часть $\hat{A}$, борелевская в топологии $\hat{A}$, является борелевской по отношению к структуре Макки.

3.8.4. Предложение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Каждая точка $\hat{A}$ есть борелевское множество в структуре Макки.*

Пусть $\pi_0 \in \mathrm{Irr}_n(A)$, τ_0 — ее образ в $\hat{A}$. Множество $\pi \in \mathrm{Irr}_n(A)$ таких, что число сплетения π_0 и $\pi \leqslant 0$, есть G_δ в $\mathrm{Irr}_n(A)$ (3.7.3). Следовательно, согласно 2.3.4, множество $\pi \in \mathrm{Irr}_n(A)$, неэквивалентных π_0, есть G_δ в $\mathrm{Irr}_n(A)$. Поэтому класс эквивалентности π_0 в $\mathrm{Irr}_n(A)$ есть борелевское множество и $\{\tau_0\}$ — борелевское в $\hat{A}$ по отношению к структуре Макки.

Библиография: [83], [162].

3.9. Дополнения.

3.9.1. Пусть A — C^*-алгебра.

a) Если идеал 0 примитивен, то существует точка, всюду плотная в $\hat{A}$. В частности, две непустые открытые части $\hat{A}$ пересекаются.

b) Если идеал 0 не примитивен и A сепарабельна, то в $\hat{A}$ существуют две непустые дизъюнктные открытые части. (Использовать 3.3.2 и 3.4.13.)

c) Если A сепарабельна и если I — замкнутый двусторонний идеал A, то I примитивен тогда и только тогда, когда I — простой (1.9.13). Проблема: можно ли опустить предположение сепарабельности в b и c?

*d) Существуют такие сепарабельные C^*-алгебры A, что 0 есть примитивный идеал и в $\hat{A}$ любая непустая открытая часть неотделима [44].

3.9.2. Пусть A — C^*-алгебра.

a) Пусть $\mathfrak{N}(A)$ — компактное пространство C^*-полунорм (1.9.13). Пусть Φ — каноническое отображение $I \to N_I$ (1.9.13). Снабдим $\mathrm{Prim}(A)$ борелевской структурой, подчиненной его топологии. Тогда Φ есть борелевский изоморфизм $\mathrm{Prim}(A)$ на часть $\mathfrak{N}(A)$.

b) Если A сепарабельна, то $\mathrm{Prim}(A)$ есть стандартное борелевское пространство (использовать 1.9.13 и 3.9.1).

c) Если A сепарабельна, то борелевская структура $\mathrm{Prim}(A)$ есть фактор-структура структуры в $\mathrm{Rep}(A)$ при каноническом отображении $\mathrm{Rep}(A) \to \mathrm{Prim}(A)$. (Использовать b) и B22.) Поэтому можно говорить о борелевской структуре $\mathrm{Prim}(A)$ без уточнений [186].

3.9.3. *Пусть X — локально квазикомпактное пространство.* Пусть $\mathscr{F}(X)$ — множество замкнутых частей X. Для всякой квазикомпактной части C в X и всякого конечного множества O непустых открытых частей X введем $U(C, O)$ — множество таких $Y \in \mathcal{F}(X)$, что $Y \cap C = \varnothing$, $Y \cap B \neq \varnothing$ для всякого $B \in O$. Тогда множество всех $U(C, O)$ есть база топологии на $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{F}(X)$ становится таким образом компактным пространством.

Пусть тогда A — C^*-алгебра. Для всякого $F \in \mathcal{F}(\hat{A})$ введем N_F — функцию $x \to \sup_{\pi \in F} \|\pi(x)\|$ на $\hat{A}$. Это — C^*-полунорма на $\hat{A}$ (1.9.13). Отображение $F \to N_F$ есть гомеоморфизм $\mathcal{F}(\hat{A})$ на компактное пространство $\mathfrak{N}(A)$ из 1.9.13 [163].

3.9.4. Пусть X — топологическое пространство. Точка в X называется *отделимой в* X, если для каждой точки b' из X, не являющейся точкой прикосновения b, точки b и b' имеют непересекающиеся окрестности. Пусть A — C^*-алгебра.

a) Для того чтобы $\pi_0 \in \hat{A}$ была отделима в $\hat{A}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in A$ функция $\pi \to \|\pi(x)\|$ на $\hat{A}$ была непрерывна в π_0.

b) Если A сепарабельна, то множество отделимых точек в $\hat{A}$ есть G_δ, всюду плотное в $\hat{A}$ (использовать a) и B18) [47].

***3.9.5.** Пусть A — C^*-алгебра, $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента 1. Для всякого представления π C^*-алгебры A введем $\tilde{\pi}$ — каноническое продолжение π на $\tilde{A}$. Пусть I — замкнутый двусторонний идеал A; введем I_1 — множество таких $x + \lambda \cdot 1$, где $x \in A$, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, что $xy + \lambda y \in I$ для всякого $y \in A$. Тогда I_1 — замкнутый двусторонний идеал в $\tilde{A}$, обладающий свойством $A \cap I_1 = I$. Если $I = \operatorname{Ker} \pi$ и если π невырождено, то $I_1 = \operatorname{Ker} \tilde{\pi}$. Пусть, с другой стороны, (π_α) — семейство невырожденных представлений A; для того чтобы π слабо содержалось в множестве π_α, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{\pi}$ слабо содержалось в множестве $\tilde{\pi}_\alpha$ [161].

***3.9.6.** Пусть A — C^*-алгебра, n — целое > 0, $(\pi_l)_{l \in I}$ — сеть элементов $\hat{A}$ размерности n. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_r$ — точки $\hat{A}$. Предположим, что $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ есть множество пределов всех подсетей (π_l). Тогда существуют: направленное подмножество J в I и такие целые $m_1, \ldots, m_r > 0$, что $\sum_{k=1}^{r} m_k \dim \beta_k \leqslant n$ и $\lim_J \operatorname{Tr} \pi_l(x) = \sum_{k=1}^{r} m_k \operatorname{Tr} \beta_k(x)$ для всех $x \in A$ [161].

3.9.7. Пусть B — C^*-алгебра, A — такая под-C^*-алгебра B, что для всякого $\pi \in \hat{B}$ ограничение $\pi | A$ неприводимо. Отношение $\pi_1 | A \simeq \pi_2 | A$ в $\hat{B}$ есть отношение эквивалентности R. Тогда пространство $\hat{A}$ канонически отождествляется с $\hat{B}/R$ [163].

3.9.8. Пусть A — C^*-алгебра, H — гильбертово пространство, $\operatorname{Rep}(A, H)$ — множество представлений A в H. Для $\pi \in \operatorname{Rep}(A, H)$, $\varepsilon > 0$, $a_1, \ldots, a_p \in A$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в существенном подпространстве π введем $V(\varepsilon, a_1, \ldots, a_p, \xi_1, \ldots, \xi_p, \pi)$ — множество таких $\pi' \in \operatorname{Rep}(A, H)$, что $\|\pi'(a_i)\xi_j - \pi(a_i)\xi_j\| \leqslant \varepsilon$ для всех i и всех j. Пусть τ — топология в $\operatorname{Rep}(A, H)$, в которой $V(\varepsilon, a_1, \ldots a_p, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi)$ образуют фундаментальную систему окрестностей π. Эта топология неотделима, но индуцирует отделимую топологию на множестве невырожденных представлений A в H. Скажем, что $\pi \in \operatorname{Rep}(A, H)$ и $\pi' \in \operatorname{Rep}(A, H)$ почти эквивалентны, если существует частично изометрический оператор U, имеющий в качестве начального и конечного подпространств существенные подпространства π и π', и такой, что $U\pi(x) = \pi'(x)U$ для любого $x \in A$. Пусть Q — фактор-пространство $\operatorname{Rep}(A, H)$ по этому отношению эквивалентности. Множество Q канонически отождествляется с множеством классов невырожденных представлений A, размерность которых $\leqslant \dim H$. Пусть $\pi \in Q$, $S \subset Q$. Для того чтобы π слабо содержалось в S, необходимо и достаточно, чтобы π было точкой прикосновения гильбертовых сумм конечного числа элементов из S. Если $\dim H$ была взята достаточно большой, имеем $\hat{A} \subset Q$; топология, индуцированная на $\hat{A}$ топологией на Q, есть топология, изучавшаяся в этом параграфе [165].

3.9.9. Пусть A — C^*-алгебра, G — топологическая группа. Пусть ω — гомоморфизм G в группу автоморфизмов A, непрерывный в топологии простой сходимости. Для всякого $\pi \in \hat{A}$ и всякого $s \in G$ введем $s\pi \in \hat{A}$ — представление $x \to \pi(\omega(s)^{-1}x)$ C^*-алгебры A. Тогда $\pi \to s\pi$ есть гомеоморфизм $\hat{A}$ на $\hat{A}$ и отображение $(s, \pi) \to s\pi$ из $G \times \hat{A}$ в $\hat{A}$ непрерывно [25].

3.9.10. Пусть $H = L^2([0, 1])$, A — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $[0, 1]$. Для всякого $f \in A$ введем $\pi(f)$ — оператор умножения на f в H. Тогда π есть представление A в H, всякий характер A слабо содержится в π, никакой характер A не содержится в π.

3.9.11. Пусть A — такая C^*-алгебра, что $\operatorname{Prim}(A)$ отделимо. Для всякого $x \in A$ функция $\pi \to \|\pi(x)\|$ непрерывна на $\hat{A}$ [70].

3.9.12. Пусть A — C^*-алгебра, Z — ее центр; предположим, что если два примитивных идеала I и J удовлетворяют условию $I \cap Z = J \cap Z$, то $I = J$. Тогда $I \to I \cap Z$ есть гомеоморфизм $\operatorname{Prim}(A)$ на $\operatorname{Prim}(Z)$ [67].

3.9.13. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, B — под-C^*-алгебра A. Имеем $\aleph_0 \cdot \operatorname{Card} \hat{A} \geqslant \operatorname{Card} \hat{B}$. (Для всякого $\pi \in \hat{A}$

введем E_π — множество $\rho \in \hat{B}$, которые содержатся в $\pi | B$. Тогда E_π счетно и $\bigcup_{\pi \in \hat{A}} E_\pi = \hat{B}$.)

3.9.14. Пусть A — алгебра над коммутативным телом, $\mathrm{Prim}(A)$ — множество примитивных идеалов A, снабженное топологией Джекобсона, $\hat{A}$ — множество классов эквивалентности неприводимых представлений A, снабженное топологией — прообразом топологии в $\mathrm{Prim}(A)$ при каноническом отображении $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$. Пусть I — двусторонний идеал A. Тогда в обозначениях 3.2.1 существуют канонические гомеоморфизмы

$$\mathrm{Prim}_I(A) \to \mathrm{Prim}(A/I), \quad \hat{A}_I \to (A/I)\hat{}\,,$$
$$\mathrm{Prim}^I(A) \to \mathrm{Prim}(I), \quad \hat{A}^I \to \hat{I} \text{ [70].}$$

3.9.15. Проблема: пусть даны две C^*-алгебры A, A'; классифицировать C^*-алгебры B, обладающие следующим свойством:

1° B допускает замкнутый двусторонний идеал I, изоморфный A;

2° B/I изоморфно A';

3° $\hat{I}$ всюду плотно в $\hat{B}$ [264], [307].

§ 4. CCR-C^*-АЛГЕБРЫ

Две проблемы, упомянутые в начале § 3, далеки от общего решения.

С другой стороны, для некоторых специальных классов C^*-алгебр мы приближаемся к удовлетворительному ответу. Это — классы C^*-алгебр, которые мы сейчас введем.

4.1. Алгебра компактных операторов.

4.1.1. Пусть H — гильбертово пространство. Компактные операторы в H образуют самосопряженный двусторонний идеал в $\mathfrak{B}(H)$, и предел в смысле нормы компактных операторов компактен. Поэтому множество компактных операторов в H есть C^*-алгебра, которую мы обозначим $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$.

Известно, что в изучении конечномерных алгебр над комплексным полем основную роль играют алгебры $\mathfrak{B}(H)$ (H — конечномерное векторное пространство). В изучении C^*-алгебр эту роль играют не алгебры $\mathfrak{B}(H)$ (H — гильбертово пространство), а алгебры $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$. [Заметим, что $\mathfrak{B}(H) = \mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$, если H конечномерно.]

C^*-алгебра A называется *элементарной*, если существует такое гильбертово пространство H, что C^*-алгебры A и $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$ изоморфны.

4.1.2. Предложение. *Пусть H — гильбертово пространство, $A = \mathfrak{BC}(H)$, T — векторное пространство операторов со следом в H. Для всякого $t \in T$ введем f_t — линейную форму $x \to \mathrm{Tr}(tx)$ на A. Тогда $t \to f_t$ — линейная биекция T на сопряженное к банахову пространству A. Для того чтобы f_t была эрмитовой (соотв. положительной), необходимо и достаточно, чтобы t был эрмитовым (соотв. положительным).*

Имеем $|\mathrm{Tr}(tx)| \leqslant (\mathrm{Tr}|t|) \cdot \|x\|$ (A 32), следовательно, f_t есть непрерывная линейная форма на A. Отображение $t \to f_t$, очевидно, линейно. Если $f_t = 0$, имеем $0 = f_t(t^*) = \mathrm{Tr}(tt^*)$, следовательно, $t = 0$, и отображение $t \to f_t$ инъективно. Пусть f — непрерывная линейная форма на A, покажем, что существует такой $t \in T$, что $f = f_t$. Достаточно сделать это в предположении, что f эрмитова. Пусть $A^0 \subset A$ — множество операторов Гильберта — Шмидта; оно естественным образом снабжено структурой гильбертова пространства, и каноническое инъективное отображение A^0 в A непрерывно. Поэтому сужение f' формы f на A^0 есть непрерывная линейная форма на гильбертовом пространстве A^0. Поэтому существует такой $t_0 \in A^0$, что

$$f'(x) = (x \mid t_0) = \mathrm{Tr}(xt_0^*) \quad \text{для каждого} \quad x \in A^0.$$

Имеем для каждого $x \in A^0$

$$\mathrm{Tr}(xt_0) = \overline{\mathrm{Tr}(t_0^* x^*)} = \overline{\mathrm{Tr}(x^* t_0^*)} = \overline{f'(x^*)} = f'(x) = \mathrm{Tr}(xt_0^*),$$

поэтому $t_0 = t_0^*$.

Осуществим спектральное разложение t_0: существуют такие проекторы e_i ранга 1 в H, попарно ортогональные, и такие вещественные числа λ_i, что

$$\sum \lambda_i^2 < +\infty \quad \text{и} \quad t_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots$$

Положим $\varepsilon_i = 1$, если $\lambda_i \geqslant 0$; $\varepsilon_i = -1$, если $\lambda_i < 0$; имеем

$$|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| = \mathrm{Tr}((\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n e_n) t_0) = f(\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n e_n) \leqslant$$
$$\leqslant \|f\| \|\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n e_n\| = \|f\|, \quad \text{поэтому} \quad \sum |\lambda_i| < +\infty.$$

Таким образом, $t_0 \in T$. Формы f и f_{t_0} совпадают на A^0, по построению t_0, следовательно, $f = f_{t_0}$, так как A^0 всюду плотно в A. Это завершает доказательство того, что $t \to f_t$ есть биекция T на сопряженное к банахову пространству A.

Для $t \in T$ и $x \in A$ имеем

$$f_{t^*}(x) = \mathrm{Tr}(t^* x) = \overline{\mathrm{Tr}(tx^*)} = \overline{f_t(x^*)},$$

поэтому

$$f_{t^*} = (f_t)^*. \tag{1}$$

Это доказывает, что f_t эрмитов, если и только если t эрмитов.

Если $t \geqslant 0$, то $t^{1/2}$ есть оператор Гильберта — Шмидта, и для каждого $x \in A$ имеем

$$f_t(x^*x) = \mathrm{Tr}\,(t^{1/2}x^*xt^{1/2}) = \mathrm{Tr}\,((xt^{1/2})^*(xt^{1/2})) \geqslant 0, \quad \text{поэтому} \quad f_t \geqslant 0.$$

Наконец, пусть $t \in T$ такой, что $f_t \geqslant 0$. Пусть ε — единичный вектор, e — ортогональный проектор на $\mathbf{C}\varepsilon$; имеем

$$0 \leqslant f_t(e) = \mathrm{Tr}\,(te) = \mathrm{Tr}\,(ete) = (t\varepsilon \mid \varepsilon).$$

Это доказывает, что $t \geqslant 0$.

4.1.3. Следствие. *Положительные формы на A суть формы*

$$x \to \lambda_1(x\xi_1 \mid \xi_1) + \lambda_2(x\xi_2 \mid \xi_2) + \ldots,$$

где $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — ортонормальная система в H, $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum \lambda_i < +\infty$.

Положительные операторы со следом в H суть операторы вида $\lambda_1 P_{\mathbf{C}\xi_1} + \lambda_2 P_{\mathbf{C}\xi_2} + \ldots$, где $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — ортонормальная система в H, $\lambda_i \geqslant 0$ и $\sum \lambda_i < +\infty$. Так как

$$\mathrm{Tr}\,(P_{\mathbf{C}\xi_i}x) = \mathrm{Tr}\,(P_{\mathbf{C}\xi_i}xP_{\mathbf{C}\xi_i}) = (x\xi_i \mid \xi_i),$$

то следствие получается сразу из 4.1.2.

4.1.4. Следствие. *Чистые положительные формы на A суть формы $x \to (x\xi \mid \xi)$, где ξ — ненулевой вектор в H.*

Так как тождественное отображение A неприводимо (если $H \neq 0$), то формы $x \to (x\xi \mid \xi)$, где ξ — вектор, $\neq 0$ в H, являются чистыми (2.5.4). Обратно, если f — чистая положительная форма на A, то все положительные формы, мажорируемые f, пропорциональны f, следовательно, f — вида $x \to (x\xi \mid \xi)$ согласно 4.1.3.

4.1.5. Следствие. *Всякое ненулевое неприводимое представление A эквивалентно тождественному представлению.*

Это вытекает из 2.5.4, 4.1.4 и 2.4.1 (ii).

4.1.6. Следствие. *Пусть $B \neq 0$ — под-C^*-алгебра A; предположим, что тождественное представление B неприводимо. Тогда $B = A$.*

Коммутант B в $\mathfrak{B}(H)$ сводится к скалярам. Так как $B \neq 0$, видим (A12), что B ультрасильно плотно в $\mathfrak{B}(H)$ и тем более в A. В обозначениях 4.1.3 форма

$$x \to \sum \lambda_i (x\xi_i \mid \xi_i) = \sum \omega_{\lambda_i^{1/2}\xi_i}(x)$$

ультрасильно непрерывна на A; поэтому всякая непрерывная линейная форма на A ультрасильно непрерывна на A. Тогда из предыдущего следует, что всякая непрерывная линейная форма на A, которая есть нуль на B, есть тождественный нуль. Теорема Хана — Банаха показывает тогда, что $B = A$.

4.1.7. Следствие. *Единственные замкнутые двусторонние идеалы A суть 0 и A.*

Согласно 4.1.5 единственный примитивный идеал A есть 0. Однако всякий замкнутый двусторонний идеал A есть пересечение примитивных идеалов [2.9.7 (ii)].

4.1.8. Следствие. *Пусть H и H' — два гильбертовых пространства, φ — изоморфизм C^*-алгебры $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$ на C^*-алгебру $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H')$.*

(i) *Существует изоморфизм U пространства H на H', который определяет φ.*

(ii) *Пусть U' — изоморфизм U на H'. Для того чтобы U' определял φ, необходимо и достаточно, чтобы $U'=\lambda U$, где λ — комплексное число с модулем 1.*

Так как φ есть ненулевое неприводимое представление $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$ (если H, $H'\neq 0$), то (i) вытекает из 4.1.5. Для того чтобы U' определял φ, необходимо и достаточно, чтобы $U'^{-1}U$ определял тождественный автоморфизм $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$, иначе говоря, был перестановочен с $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$, т. е. был скаляром; отсюда следует (ii).

4.1.9. Сохраним обозначения 4.1.8. Видим, что φ преобразует множество элементов Гильберта — Шмидта (соотв. множество элементов конечного ранга, ранга 1, ...) из $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$ в множество элементов Гильберта — Шмидта (соотв. множество элементов конечного ранга, ранга 1, ...) из $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H')$. Поэтому, если дана элементарная C^*-алгебра A, то можно говорить об элементах Гильберта — Шмидта, ... в A, независимо от реализации A как алгебры компактных операторов.

Гильбертова размерность a пространства H также связана внутренним образом с C^*-алгеброй $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$; такая C^*-алгебра называется *C^*-алгеброй ранга a^2*. Если a конечно, то мы получаем обычное понятие ранга алгебры. Заметим, что для бесконечного a имеем $a^2=a$.

4.1.10. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, π — неприводимое представление A. Если $\pi(A)\cap\mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)\neq 0$, то $\pi(A)\supset\mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)$ и всякое неприводимое представление A с тем же ядром, что и π, эквивалентно π.*

Пусть $A'=\pi^{-1}(\mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi))$. Тогда A' — замкнутый двусторонний идеал A. Имеем $\pi(A')\neq 0$, поэтому $\pi(A')$ неприводимо в H_π [2.11.2 (ii)]. Поэтому $\pi(A')=\mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)$ (4.1.6). Всякое представление A с тем же ядром, что и π, есть композиция π и инъективного представления $\pi(A)$. Вследствие этого, для доказательства второго утверждения 4.1.10, нам достаточно установить следующий факт: пусть H — гильбертово пространство и B — под-C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)$, содержащая $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$; тогда всякое инъективное неприводимое представление ρ C^*-алгебры B эквивалентно тождественному представлению. Так как $\rho\,|\,\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$

эквивалентно тождественному представлению $\mathfrak{BC}(H)$ (4.1.5), то можно предположить, что $H_\rho = H$ и что $\rho\,|\,\mathfrak{BC}(H)$ есть тождественное отображение $\mathfrak{BC}(H)$. Тогда 2.10.4 (i) показывает, что ρ есть тождественное отображение B.

4.1.11. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, π — ненулевое неприводимое представление A. Предположим, что $\pi(A) \subset \mathfrak{BC}(H_\pi)$, тогда:*

(i) $\pi(A) = \mathfrak{BC}(H_\pi)$.

(ii) *Ядро π есть максимальный замкнутый двусторонний идеал A.*

(i) следует из 4.1.10, (ii) следует из (i) и 4.1.7.

Библиография: [7], [8], [10], [67], [70], [110].

4.2. CCR-C^*-алгебры.

4.2.1. Определение. *C^*-алгебра A называется* CCR-*алгеброй, если для всякого неприводимого представления π C^*-алгебры A и всякого $x \in A$ оператор $\pi(x)$ компактен.*

4.2.2. Пусть H — гильбертово пространство. C^*-алгебра $\mathfrak{BC}(H)$ есть CCR-алгебра (4.1.5), и идеал 0 этой алгебры примитивен (если $H \neq 0$). Обратно, если A есть CCR-C^*-алгебра, в которой идеал 0 примитивен, то A элементарна согласно 4.1.11 (i).

Всякая коммутативная C^*-алгебра есть CCR-алгебра. Мы рассмотрим ниже (10.4.5, 13.11.2, 15.5.6) другие примеры CCR-C^*-алгебр.

4.2.3. Пусть A — CCR-C^*-алгебра. Каждый примитивный идеал A есть максимальный замкнутый двусторонний идеал A [4.1.11 (ii)]. Если π есть ненулевое неприводимое представление A, имеем $\pi(A) = \mathfrak{BC}(H_\pi)$ [4.1.11 (i)].

4.2.4. Предложение. *Пусть A — CCR-C^*-алгебра. Каждая под-C^*-алгебра A и каждая фактор-C^*-алгебра A — CCR-алгебры.*

Это очевидно для фактор-C^*-алгебры A/I C^*-алгебры A, так как каждое неприводимое представление A/I отождествляется с неприводимым представлением A. Теперь пусть B — под-C^*-алгебра A. Пусть π — неприводимое представление B. Существует гильбертово пространство $K \supset H_\pi$ и неприводимое представление ρ A в K такие, что $\pi(x) = \rho(x)\,|\,H_\pi$ для каждого $x \in B$ (2.10.2). Так как A — CCR-алгебра, то операторы $\rho(x)$ компактны, следовательно, операторы $\pi(x)$ компактны. Следовательно, B — CCR-алгебра.

4.2.5. Предложение. *Пусть A — CCR-C^*-алгебра, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — попарно неэквивалентные элементы $\widehat{A}$ и $T_1, \ldots, T_n$ — компактные операторы в $H_{\pi_1}, \ldots, H_{\pi_n}$. Существует такой $x \in A$, что $\pi_1(x) = T_1, \ldots, \pi_n(x) = T_n$.*

Это очевидно для $n=1$; предположим, что утверждение справедливо для $n-1$. Существуют такие x, $y \in A$, что $\pi_1(x)=T_1, \ldots, \pi_{n-1}(x)=T_{n-1}$, $\pi_n(y)=T_n$. Пусть $I_k=\operatorname{Ker}\pi_k$. Вследствие 4.1.10 и 4.2.3 имеем $I_n \not\supset I_k$ для $k=1, \ldots, n-1$; поэтому $I_n \not\supset I = I_1 \cap \ldots \cap I_{n-1}$ (2.11.4). Существуют такие $x' \in I$, $y' \in I_n$ такие, что $x+x'=y+y'=z$. Имеем $\pi_k(z)=T_k$ для $k=1, \ldots, n$.

4.2.6. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра. Пусть I — множество таких $x \in A$, что для всякого неприводимого представления π C^*-алгебры A оператор $\pi(x)$ компактен. Тогда I — наибольший замкнутый двусторонний* CCR-*идеал A.*

Ясно, что I есть замкнутый двусторонний идеал A. Пусть ρ — неприводимое представление I. Существует неприводимое представление π C^*-алгебры A в H_ρ, продолжающее ρ (2.10.4). Тогда $\rho(x)=\pi(x)$ компактен для каждого $x \in I$, поэтому I — CCR-алгебра. Наконец, пусть J — замкнутый двусторонний CCR-идеал A. Покажем, что $J \subset I$; иначе говоря, что для каждого неприводимого представления σ C^*-алгебры A и каждого $x \in J$ оператор $\sigma(x)$ компактен. Это ясно, если $\sigma(J)=0$. В противном случае $\sigma|J$ неприводимо [2.11.2 (ii)] и $\sigma(x)$ компактен, поскольку J — CCR-алгебра.

CCR-C^*-алгебры были введены в 1951 году Капланским (CCR — completely continuous representations, вполне непрерывные представления, «вполне непрерывный» — синоним для «компактный»). Капланский и Глимм ввели также обозначения GCR и NGCR для вводимых в 4.3 C^*-алгебр.

Библиография: [70]. Доказательство 4.2.5 сообщено мне Дж. Томияма.

4.3. GCR-C^*-алгебры.

4.3.1. Определение. *C^*-алгебра A называется* GCR-*алгеброй, если всякая ненулевая фактор-C^*-алгебра A обладает ненулевым замкнутым двусторонним* CCR-*идеалом.*

Это — C^*-алгебры, наиболее важные для дальнейшего. Каждая CCR-C^*-алгебра есть GCR-алгебра (4.2.4), но обратное неверно.

Определение. *C^*-алгебра называется* NGCR-*алгеброй, если она не содержит никакого ненулевого замкнутого двустороннего* CCR-*идеала.*

Согласно 1.8.5 такая C^*-алгебра не содержит никакого ненулевого замкнутого двустороннего GCR-идеала.

За примерами GCR- или NGCR-C^*-алгебр отсылаем к дополнениям (n° 4, 5, 9, 10, 13, 17).

4.3.2. Определение. *Пусть A — C^*-алгебра. Назовем композиционным рядом A возрастающее семейство $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ замкнутых двусторонних идеалов A, занумерованное порядковыми* *числами, заключенными между* 0 *и некоторым порядковым числом* α, *обладающее следующими свойствами*:

(i) $I_0 = 0$, $I_\alpha = A$;

(ii) *если* $\rho \leqslant \alpha$ — *предельное порядковое число, то* I_ρ *есть замыкание* $\bigcup_{\rho' < \rho} I_{\rho'}$.

4.3.3. Предложение. *Пусть* A — C^*-*алгебра. Существует порядковое число* α *и возрастающее семейство* $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ *замкнутых двусторонних идеалов* A, *обладающее следующими свойствами*:

(i) $I_0 = 0$, A/I_α — NGCR-*алгебра*;

(ii) *если* $\rho \leqslant \alpha$ — *предельное порядковое число, то* I_ρ *есть замыкание* $\bigcup_{\rho' < \rho} I_{\rho'}$;

(iii) *если* $\rho < \alpha$, *то* $I_{\rho+1}/I_\rho$ *есть наибольший двусторонний* CCR-*идеал* A/I_ρ *и не есть нуль.*

Кроме того, α *и семейство* (I_ρ) *определяются единственным образом предыдущими условиями.*

I_ρ строятся трансфинитной индукцией: если ρ — предельное порядковое число, то условие (ii) предписывает построение I_ρ; в противном случае имеем $\rho = \rho' + 1$, и условие (iii) предписывает построение I_ρ, кроме случая, когда A/I_ρ — NGCR-алгебра, тогда построение заканчивается на $\alpha = \rho'$.

4.3.4. Предложение. *Пусть* A — C^*-*алгебра. Следующие условия эквивалентны*:

(i) A — GCR-*алгебра*;

(ii) A *обладает таким композиционным рядом* $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \beta}$, *что все* $J_{\rho+1}/J_\rho$ — GCR-*алгебры*;

(iii) A *обладает композиционным рядом* $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ *таким, что все* $I_{\rho+1}/I_\rho$ — CCR-*алгебры.*

(i)$\Rightarrow$(iii): предположим, что A — GCR-алгебра. В обозначениях 4.3.3 $A/I_\alpha \neq 0$ невозможно, поэтому $I_\alpha = A$ и $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ есть композиционный ряд A, обладающий требуемыми свойствами.

(iii)$\Rightarrow$(ii): очевидно;

(ii)$\Rightarrow$(i): предположим, что существует такой композиционный ряд $(J_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \beta}$, что $J_{\rho+1}/J_\rho$ — GCR-алгебры. Пусть $J \neq A$ — замкнутый двусторонний идеал A. Нужно показать, что A/J обладает ненулевым двусторонним CCR-идеалом. Существует наименьшее порядковое число $\rho \leqslant \alpha$ такое, что $J_\rho \not\subset J$. Если $\rho' < \rho$, имеем $J_{\rho'} \subset J$; поэтому замыкание $\bigcup_{\rho' < \rho} J_{\rho'}$ содержится в J; поэтому ρ — не предельное порядковое число. Пусть $\rho = \rho' + 1$.

Пусть $I = J_\rho \cap J$. Тогда J_ρ/I отождествляется с замкнутым двусторонним идеалом A/J (1.8.4). Кроме того, J_ρ/I есть ненулевой фактор GCR-C^*-алгебры $J_{\rho'+1}/J_{\rho'}$, поэтому J_ρ/I обладает ненулевым двусторонним CCR-идеалом. Этот идеал есть также двусторонний идеал A/J согласно 1.8.5.

4.3.5. Предложение. *Пусть A — GCR-C^*-алгебра. Каждая под-C^*-алгебра A и каждая фактор-C^*-алгебра A суть GCR-алгебры.*

Это очевидно для фактор-C^*-алгебр. Пусть теперь B — под-C^*-алгебра A. Пусть $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ — такой композиционный ряд A, что $I_{\rho+1}/I_\rho$ — CCR-алгебры (4.3.4). Тогда $(I_{\rho+1} \cap B)/(I_\rho \cap B)$ отождествляется с под-C^*-алгеброй $I_{\rho+1}/I_\rho$ (1.8.4) и поэтому является CCR-алгеброй (4.2.4). Покажем, чтобы закончить доказательство согласно 4.3.4, что $(I_\rho \cap B)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ есть композиционный ряд B. Достаточно показать, что если ρ — предельное порядковое число и $x \in I_\rho \cap B$, то x есть предел точек из $\bigcup_{\rho' < \rho} I_{\rho'} \cap B$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое $\rho' < \rho$, что расстояние x от I_ρ меньше ε. Так как $B/(I_{\rho'} \cap B)$ отождествляется с $(B + I_{\rho'})/I_{\rho'}$, то существует точка $I_{\rho'} \cap B$, расстояние которой до x меньше ε, отсюда следует наше утверждение.

4.3.6. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра. Идеал I_α из 4.3.3 есть наибольший двусторонний GCR-идеал A и наименьший замкнутый двусторонний идеал, для которого соответствующая фактор-C^*-алгебра A есть NGCR-алгебра.*

Идеал I_α есть GCR-алгебра согласно 4.3.4. Пусть I — двусторонний GCR-идеал A. Тогда $I/(I \cap I_\alpha)$ отождествляется с двусторонним GCR-идеалом в A/I_α. Так как A/I_α — NGCR-алгебра, то $I/(I \cap I_\alpha) = 0$, поэтому $I \subset I_\alpha$. Наконец, пусть J — замкнутый двусторонний идеал A, для которого A/J — NGCR-алгебра. Тогда $I_\alpha/(J \cap I_\alpha)$ отождествляется с двусторонним GCR-идеалом в A/J, поэтому $I_\alpha/(J \cap I_\alpha) = 0$ и $J \supset I_\alpha$.

Предложение 4.3.6 сводит до некоторой степени изучение произвольных C^*-алгебр к изучению GCR-алгебр, с одной стороны, и NGCR-алгебр, с другой. Мы не слишком много знаем о NGCR-C^*-алгебрах. Напротив, мы имеем довольно подробные сведения о GCR-C^*-алгебрах.

4.3.7. Теорема. *Пусть A — GCR-C^*-алгебра. Тогда:*

(i) *для всякого ненулевого неприводимого представления π C^*-алгебры A множество $\pi(A)$ содержит все компактные операторы в H_π;*

(ii) *если π_1, π_2 — два неприводимых представления A с одним и тем же ядром, то π_1 и π_2 эквивалентны.*

Пусть π — ненулевое неприводимое представление A. Тогда $A/\mathrm{Ker}\,\pi$ содержит двусторонний CCR-идеал $I/\mathrm{Ker}\,\pi$, не равный нулю. Ограничение π на I неприводимо [2.11.2(ii)] и ненулевое, следовательно, $\pi(I) = \mathcal{LC}(H_\pi)$, поскольку $I/\mathrm{Ker}\,\pi$ — CCR-алгебра (4.2.3). Это доказывает (i); (ii) следует из (i) и 4.1.10.

Теорема 4.3.7 допускает обращение (9.1).

4.3.8. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ — композиционный ряд A. Если $I_{\rho+1}/I_\rho$ не равны нулю, то семейство (I_ρ) не более чем счетно, ибо для каждого порядкового числа $\rho < \alpha$ можно выбрать $x_\rho \in I_{\rho+1}$, расстояние которого от $I_\rho \geqslant 1$. Тогда расстояния между различными x_ρ не меньше 1, поэтому семейство x_ρ не более чем счетно.

4.3.9. Пусть A — C^*-алгебра, $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, полученная из A присоединением единичного элемента. Если A — GCR-алгебра, то $\tilde{A}$ — GCR-алгебра (4.3.4). Если $\tilde{A}$ — GCR-алгебра, то $\tilde{A}$ — GCR-алгебра (4.3.5). Если $\tilde{A}$ — NGCR-алгебра, то A, очевидно, NGCR-алгебра. Предположим, что A—NGCR-алгебра. Если A обладает единичным элементом, то $\tilde{A}$ обладает идеалом коразмерности 1, поэтому не является NGCR-алгеброй. Но если A не имеет единичного элемента, то $\tilde{A}$ — NGCR-алгебра; так как если $\tilde{A}$ допускает ненулевой двусторонний CCR-идеал I, то $I \cap A = 0$, поэтому I — идеал, дополнительный к A в $\tilde{A}$, поэтому A — фактор C^*-алгебры $\tilde{A}$ и A содержит единичный элемент.

Библиография: [24], [44], [70], [162].

4.4. Спектр GCR-C^*-алгебры.

4.4.1. Если A есть GCR-C^*-алгебра, то теорема 4.3.7 показывает, что каноническое отображение $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ есть гомеоморфизм. Поэтому $\hat{A}$ есть T_0-пространство (3.1.3). Если, сверх того, A — CCR-алгебра, то все примитивные идеалы A являются максимальными (4.2.3), поэтому точки $\hat{A}$ замкнуты (3.1.4).

4.4.2. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, π_0 — точка $\hat{A}$, x — такой элемент A^+, что функция $\pi \to \mathrm{Tr}\,\pi(x)$ на $\hat{A}$ конечна и непрерывна в π_0.*

(i) *Если $y \in A^+$ мажорируется элементом x, то функция $\pi \to \mathrm{Tr}\,\pi(y)$ на $\hat{A}$ непрерывна в π_0.*

(ii) *Если $\pi_0(x) \neq 0$, то существует такой $z \in A^+$, что $\pi(z)$ есть проектор ранга 1 для всех π из некоторой окрестности π_0.*

Пусть $y' = x - y \in A^+$. Функции $\pi \to \mathrm{Tr}\,\pi(y)$, $\pi \to \mathrm{Tr}\,\pi(y')$ полунепрерывны снизу (3.5.9), и их сумма конечна и непрерывна в π_0, поэтому они непрерывны в π_0.

Чтобы доказать (ii), можно предположить, что $\|\pi_0(x)\|=1$. Пусть K — собственное подпространство размерности 1 в $\pi_0(x)$, соответствующее собственному значению 1. Неприводимая алгебра $\pi_0(A)$ содержит ненулевой компактный оператор $\pi_0(x)$, поэтому содержит $\mathfrak{B}C(H_{\pi_0})$ (4.1.10); следовательно, существует такой $z_1 \in A^+$, что $\pi_0(z_1)=P_K$. Пусть $z_2=f(z_1)$, где $f(t)=t$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $f(t)=1$ для $t \geqslant 1$; тогда $\|z_2\| \leqslant 1$ и $\pi_0(z_2)= =f(P_K)=P_K$. Пусть $z_3=x^{1/2}z_2x^{1/2} \leqslant x$; имеем

$$\pi_0(z_3)=\pi_0(x)^{1/2}P_K\pi_0(x)^{1/2}=P_K.$$

Согласно (i) имеем $\operatorname{Tr}\pi(z_3) \leqslant 5/4$ в окрестности π_0; с другой стороны, $\|\pi(z_3)\| \geqslant 3/4$ в окрестности π_0 (3.3.2); поэтому в окрестности V точки π_0 наибольшее собственное значение $\pi(z_3) \geqslant 3/4$ и имеет кратность 1, а следующие $\leqslant 5/4-3/4=1/2$. Пусть g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная функция $\geqslant 0$, равная 0 для $t \leqslant 1/2$ и равная 1 для $t \geqslant 3/4$; пусть $z=g(z_3) \in A^+$; тогда $\pi(z)= =g(\pi(z_3))$ — проектор ранга 1 для $\pi \in V$.

4.4.3. Лемма. *Пусть A — CCR-C^*-алгебра. Пусть I — множество таких $x \in A$, что для каждого $\pi \in \hat{A}$ оператор $\pi(x)$ имеет конечный ранг. Тогда I — самосопряженный двусторонний идеал, всюду плотный в A.*

Ясно, что I есть самосопряженный двусторонний идеал A. Для $n=1, 2, \ldots$ введем f_n: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — непрерывную функцию, равную нулю в окрестности нуля (меняющейся с n), такую, что $f_n(t)$ равномерно стремится к t при $n \to +\infty$. Для каждого эрмитова элемента A имеем $f_n(x) \to x$ при $n \to \infty$. С другой стороны, для каждого $\pi \in \hat{A}$ оператор $\pi(x)$ компактен, поэтому его собственные значения (считаемые каждое с его кратностью) стремятся к нулю; следовательно, $\pi(f_n(x))=f_n(\pi(x))$ имеет только конечное число собственных значений $\neq 0$, с конечными кратностями; поэтому $\pi(f_n(x))$ имеет конечный ранг. Таким образом, $\bar{I}=A$.

4.4.4. Лемма. *Пусть A—ненулевая GCR-C^*-алгебра. Тогда A обладает ненулевым замкнутым двусторонним идеалом I, имеющим следующее свойство: каковы бы ни были различные точки π_1 и π_2 в открытой части $\hat{I}$ в $\hat{A}$, существует такой $x \in I^+$, что:*

a) $\pi(x)$ *имеет ранг* $\leqslant 1$ *для каждого* $\pi \in \hat{I}$;

b) *функция* $\pi \to \operatorname{Tr}\pi(x)$ *непрерывна на* $\hat{I}$;

c) $\operatorname{Tr}\pi_1(x)=1$, $\operatorname{Tr}\pi_2(x)=0$.

Можно предположить, что A — CCR-алгебра. Согласно 4.4.3 существует такой ненулевой x_1 в A^+, что $\pi(x_1)$ имеет конечный ранг для каждого $\pi \in \hat{A}$; поэтому функция $\pi \to f(\pi)=\operatorname{Tr}\pi(x_1)$

на $\hat{A}$ всюду конечна. Эта функция полунепрерывна снизу и не равна тождественно нулю, поэтому остается $\geqslant \alpha > 0$ в некоторой непустой открытой части U в $\hat{A}$. Так как U есть пространство Бэра (3.2.2 и 3.4.13), то f имеет точку непрерывности π_0 в U (B18). Согласно 4.4.2 (ii) существует $x_2 \in A^+$ и открытая окрестность V точки π_0 такие, что $\pi(x_2)$ есть проектор ранга 1 для каждого $\pi \in V$. Пусть I — такой замкнутый двусторонний идеал A, что $\hat{I} = V$. Пусть π_1, π_2 — две различные точки V. Существует такой $x_3 \in I^+$, что $\pi_1(x_3) = \pi_1(x_2)$, $\pi_2(x_3) = 0$ (4.2.4 и 4.2.5). Пусть $x = x_2^{1/2} x_3 x_2^{1/2} \in I^+$. Имеем $x \leqslant \| x_3 \| x_2$, поэтому $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ непрерывно на V [4.4.2 (i)]. С другой стороны,

$$\operatorname{Tr} \pi_1(x) = \operatorname{Tr} \pi_1(x_2)^2 = 1, \qquad \operatorname{Tr} \pi_2(x) = 0.$$

Наконец, для каждого $\pi \in V$ ранг $\pi(x)$ мажорируется рангом $\pi(x_2)$, поэтому мажорируется единицей.

4.4.5. Теорема. *Пусть A — GCR-C^*-алгебра. В $\hat{A}$ существует всюду плотная локально компактная открытая часть.*

В обозначениях 4.4.4 точки $\hat{I}$ отделяются непрерывными вещественными функциями, поэтому $\hat{I}$ отделимо. Множество отделимых частей $\hat{A}$, очевидно, индуктивно по отношению к включению. Пусть $S \subset \hat{A}$ — максимальная отделимая открытая часть. Предположим, что существует открытая часть U в $\hat{A}$, непустая и дизъюнктная с S. Тогда U отождествляется со спектром ненулевого замкнутого двустороннего идеала A, который есть GCR-C^*-алгебра. Согласно началу доказательства, U содержит отделимую непустую открытую часть S'. Ясно, что $S \cup S'$ отделимо и открыто в $\hat{A}$, что противоречит максимальности S. Следовательно, $\bar{S} = \hat{A}$. Согласно 3.3.8 S локально компактно.

Библиография: [49], [70].

4.5. C^*-алгебры с непрерывным следом.

4.5.1. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, $\mathfrak{P}$ — часть A^+ такая, что:*

a) $\mathfrak{P} + \mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$;

b) *если $x \in A$ таков, что $xx^* \in \mathfrak{P}$, то $x^*x \in \mathfrak{P}$;*

c) *всякий элемент из A^+, мажорируемый элементом из $\mathfrak{P}$, принадлежит $\mathfrak{P}$.*

(i) *Множество $\mathfrak{N}$ таких $x \in A$, что $xx^* \in \mathfrak{P}$, есть самосопряженный двусторонний идеал A.*

(ii) *Двусторонний идеал* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^2$ *есть множество линейных комбинаций элементов из* $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M} \cap A^+$. *Его замыкание совпадает с замыканием* $\mathfrak{N}$ *в* A.

(iii) $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{P}$.

Ясно, что $x \in \mathfrak{N}$ влечет $x^* \in \mathfrak{M}$. Предположим, что $x, y \in \mathfrak{M}$. Имеем

$$2xx^* + 2yy - (x+y)(x+y)^* = \\ = xx^* + yy^* - xy^* - yx^* = (x-y)(x-y)^* \geqslant 0,$$

поэтому

$$(x+y)(x+y)^* \leqslant 2xx^* + 2yy^* \in \mathfrak{P},$$

следовательно, $(x+y)(x+y)^* \in \mathfrak{P}$ и $x+y \in \mathfrak{N}$. Если $x \in \mathfrak{N}$ и $z \in A$, имеем

$$xzz^*x^* \leqslant \| zz^* \| xx^* \in \mathfrak{P},$$

поэтому $(xz)(xz)^* \in \mathfrak{P}$ и $xz \in \mathfrak{N}$. Итак, $\mathfrak{N}$ есть правый идеал в A, а тогда и двусторонний идеал, так как $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^*$. Отсюда следует (i).

Всякий элемент $\mathfrak{N}$ есть линейная комбинация произведений двух элементов из $\overline{\mathfrak{N}}$ (1.5.8), поэтому является пределом элементов $\mathfrak{M}$, отсюда $\overline{\mathfrak{N}} = \overline{\mathfrak{M}}$. Пусть $x \in \mathfrak{M}$. Имеем $x = \sum a_j b_j^*$, где $a_j, b_j \in \mathfrak{N}$. Тогда

$$4x = \sum (a_j + b_j)(a_j + b_j)^* - \sum (a_j - b_j)(a_j - b_j)^* + \\ + i \sum (a_j + ib_j)(a_j + ib_j)^* - i \sum (a_j - ib_j)(a_j - ib_j)^*$$

и

$$(a_j + b_j)(a_j + b_j)^*, \ \ldots, \ (a_j - ib_j)(a_j - ib_j)^* \in \mathfrak{M} \cap A^+.$$

Отсюда следует (ii).

Если элемент x в предыдущем равенстве эрмитов, то

$$4x = \sum (a_j + b_j)(a_j + b_j)^* - \sum (a_j - b_j)(a_j - b_j)^* \leqslant \\ \leqslant \sum (a_j + b_j)(a_j + b_j)^* \in \mathfrak{P}.$$

Если $x \geqslant 0$, то выводим отсюда, что $x \in \mathfrak{P}$. Поэтому $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{P}$. Обратно, пусть $x \in \mathfrak{P}$; имеем $x^{1/2} \in \mathfrak{P}$, поэтому $x = x^{1/2}x^{1/2} \in \mathfrak{M}^+$. Отсюда следует (iii).

4.5.2. Пусть A — C^*-алгебра. Пусть $\mathfrak{P}$ — множество таких $x \in A^+$, что функция $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ конечна и непрерывна на $\hat{A}$. Ясно, что $\mathfrak{P} + \mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$. Если $x \in A$таково, что $xx^* \in \mathfrak{P}$, то $x^*x \in \mathfrak{P}$, так как $\operatorname{Tr} \pi(x^*x) = \operatorname{Tr} \pi(xx^*)$ для каждого $\pi \in \hat{A}$. Если $x \in \mathfrak{P}$ и если $y \in A^+$ мажорируется элементом x, то $y \in \mathfrak{P}$ согласно 4.4.2 (i). Тогда лемма 4.5.1 показывает, что $\mathfrak{P}$ есть положительная часть самосопряженного двустороннего идеала $\mathfrak{M}$

в A, множества линейных комбинаций элементов из $\mathfrak{P}$. Если $x \in \mathfrak{M}$, то оператор $\pi(x)$ есть оператор со следом для каждого $\pi \in \hat{A}$ и функция $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ непрерывна на $\hat{A}$. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(A)$.

Определение. *C^*-алгебра A называется C^*-алгеброй с непрерывным следом, если идеал $\mathfrak{M}(A)$ всюду плотен в A.*

Так как $\overline{\mathfrak{M}(A)}$ есть пересечение примитивных идеалов A, содержащих $\mathfrak{M}(A)$, то условие $\overline{\mathfrak{M}(A)} = A$ равносильно условию, что для каждого $\pi \in A$ существует $x \in \mathfrak{M}(A)$ такой, что $\pi(x) \neq 0$.

Согласно 4.5.1 (ii) это равносильно также условию, что множество таких $x \in A$, что функция $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x) \pi(x)^*$ конечна и непрерывна на $\hat{A}$ [это множество образует самосопряженный двусторонний идеал $\mathfrak{N}$ такой, что $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{M}(A)$], всюду плотно в A.

Мы дадим ниже (10.5.8 и 10.9.4) примеры C^*-алгебр с непрерывным следом.

4.5.3. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра с непрерывным следом. Тогда:*

(i) *A — CCR-алгебра.*

(ii) *$\hat{A}$ отделимо.*

(iii) *Для каждого $\pi_0 \in \hat{A}$ существует такой $y \in A^+$, что $\pi(y)$ — проектор ранга 1 для каждого π из окрестности π_0.*

Пусть $\pi \in \hat{A}$. Для каждого $x \in \mathfrak{M}(A)$ оператор $\pi(x)$ имеет след. Поэтому для каждого $x \in \overline{\mathfrak{M}(A)} = A$ оператор $\pi(x)$ есть предел по норме операторов со следом, поэтому компактен. Таким образом, A — CCR-алгебра. Условие (iii) следует из 4.4.2 (ii). Пусть π_1 и π_2 — две различные точки $\hat{A}$, I — ядро π_1, x — такой элемент $\mathfrak{M}(A)$, что $\pi_2(x) \neq 0$. Согласно 4.2.5, существует такой $x_1 \in I$, что $\pi_2(x_1) = \pi_2(x)^*$. Тогда $x_1 x \in \mathfrak{M}(A)$, поэтому функция $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x_1 x)$ конечна и непрерывна на $\hat{A}$; имеем

$$\operatorname{Tr} \pi_1(x_1 x) = \operatorname{Tr}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Tr} \pi_2(x_1 x) = \operatorname{Tr} \pi_2(x)^* \pi_2(x) \neq 0,$$

поэтому $\hat{A}$ отделима.

4.5.4. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, удовлетворяющая условиям* (ii) *и* (iii) *в 4.5.3. Тогда A есть C^*-алгебра с непрерывным следом.*

Пусть $\pi_0 \in \hat{A}$. Существует такая открытая окрестность V точки π_0 и элемент $y \in A^+$, что $\pi(y)$ — проектор ранга 1 для каждого $\pi \in V$. Так как $\hat{A}$ отделимо, то $\hat{A}$ локально компактно (3.3.8), и существует такая открытая окрестность W точки π_0, что $\overline{W} \subset V$. Пусть I — такой замкнутый двусторонний идеал A, что $\hat{I} = W$. Так как $\pi_0 \in W$, то $\pi_0 | A$ неприводимо, поэтому существует такой эрмитов элемент x в I, что $\pi_0(x)$

действует тождественно на подпространстве (размерности 1) $\pi_0(y)(H_{\pi_0})$ (2.8.3); заменяя x на x^+, можно предположить, что $x \in I^+$. Пусть $z = y^{1/2}xy^{1/2} \in I^+$. Функция $\pi \to f(\pi) = \operatorname{Tr} \pi(z)$ на $\widehat{A}$ есть нуль на $\widehat{A} - W$, поэтому непрерывна в каждой точке $\widehat{A} - V$; с другой стороны, $z \leqslant \|x\| y$; следовательно, f непрерывна в каждой точке V [4.4.2 (i)]. Поэтому $z \in \mathfrak{M}(A)^+$. Так как $\pi_0(z) = \pi_0(y) \neq 0$, то доказано, что A есть C^*-алгебра с непрерывным следом.

4.5.5. Теорема. *Пусть A — GCR-C^*-алгебра. Тогда A обладает композиционным рядом $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ таким, что факторы $I_{\rho+1}/I_\rho$ суть C^*-алгебры с непрерывным следом.*

Если $A \neq 0$, то A обладает замкнутым двусторонним идеалом $I_1 \neq 0$, который является C^*-алгеброй с непрерывным следом (4.4.4). Далее, если $I_1 \neq A$, то A/I_1 обладает замкнутым двусторонним идеалом $I_2/I_1 \neq 0$, который является C^*-алгеброй с непрерывным следом. Продолжая трансфинитно, получаем композиционный ряд (I_ρ).

Эта теорема сводит до некоторой степени изучение структуры GCR-C^*-алгебр к изучению структуры C^*-алгебр с непрерывным следом. Это изучение будет продолжено в дальнейшем (§ 10).

4.5.6. Если C^*-алгебра A имеет композиционный ряд $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$, то $\widehat{I}_\rho$ — возрастающие открытые части $\widehat{A}$, и для предельного порядкового числа ρ имеем $\widehat{I}_\rho = \bigcup_{\rho' < \rho} \widehat{I}_{\rho'}$: это сразу следует из 3.2.2. Поэтому $\widehat{A}$ есть объединение $\widehat{I}_{\rho+1} - \widehat{I}_\rho$. Если A — GCR-алгебра и если взять I_ρ такими, что $I_{\rho+1}/I_\rho$ — C^*-алгебры с непрерывным следом, то пространства $\widehat{I}_{\rho+1} - \widehat{I}_\rho$ локально компактны [4.5.3 (ii)]. Существование такого семейства открытых частей $\widehat{A}$ легко следует также из теоремы 4.4.5.

4.5.7. Пусть A — сепарабельная GCR-C^*-алгебра. Пусть $(I_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ — такой композиционный ряд A, что $I_{\rho+1}/I_\rho$ суть ненулевые C^*-алгебры с непрерывным следом. Тогда семейство (I_ρ) не более чем счетно (4.3.8). Поэтому $\widehat{A}$ есть объединение не более чем счетного семейства частей $\widehat{I}_{\rho+1} - \widehat{I}_\rho$. Каждая из этих частей есть пересечение открытой части и замкнутой части $\widehat{A}$. Кроме того, каждое пространство $\widehat{I}_{\rho+1} - \widehat{I}_\rho$ локально компактно со счетной базой, так как $\widehat{I}_{\rho+1} - \widehat{I}_\rho = (I_{\rho+1}/I_\rho)^\wedge$, а $I_{\rho+1}/I_\rho$ — сепарабельная C^*-алгебра (3.3.4).

Библиография: [49], [163].

4.6. Борелевская структура на спектре GCR-C^*-алгебры.

4.6.1. Предложение. *Пусть A — сепарабельная* GCR-C^*-*алгебра. Борелевская структура Макки на $\hat{A}$ есть борелевская структура, подчиненная его топологии, и она превращает $\hat{A}$ в стандартное борелевское пространство.*

Пусть S_1 — борелевская структура Макки на $\hat{A}$ и S_2 — борелевская структура, подчиненная его топологии. Пусть $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ — соответствующие борелевские пространства. Согласно 4.5.7, $\hat{A}_2$ есть объединение последовательности (X_n) непересекающихся борелевских частей, каждая из которых, снабженная структурой, индуцированной S_2, есть стандартное борелевское пространство. Поэтому $\hat{A}_2$, которое есть сумма борелевских пространств X_n, стандартно. С другой стороны, S_1 тоньше чем S_2 (3.8.3). Так как $\hat{A}_1$ есть фактор стандартного борелевского пространства $\mathrm{Irr}(A)$ (3.8.1), то $S_1 = S_2$ (В 22).

Следовательно, если A — сепарабельная GCR-C^*-алгебра, то можно говорить о борелевском пространстве $\hat{A}$, не опасаясь неясности.

4.6.2. Предложение. *Пусть A — сепарабельная* GCR-C^*-*алгебра. Существует такое борелевское отображение $\zeta \to \pi(\zeta)$ $\hat{A}$ в* $\mathrm{Irr}(A)$, *что для каждого $\zeta \in \hat{A}$ $\pi(\zeta)$ находится в классе эквивалентности ζ.*

Пусть $\hat{A}_p$ — канонический образ $\mathrm{Irr}_p(\hat{A})$ в $\hat{A}$. Топологическое пространство $\mathrm{Irr}_p(A)$ — польское (3.7.4), и каноническое отображение $\mathrm{Irr}_p(A) \to \hat{A}_p$ непрерывно и открыто (3.5.8). С другой стороны, $\hat{A}$ есть объединение последовательности (X_n) непересекающихся частей, каждая из которых есть пересечение открытой части и замкнутой части $\hat{A}$ и притом отделима (4.5.7). Пусть $\mathrm{Irr}_{p,n}(A)$ — прообраз X_n в $\mathrm{Irr}_p(A)$. Тогда $\mathrm{Irr}_{p,n}(A)$ есть в $\mathrm{Irr}_n(A)$ пересечение открытой части и замкнутой части, поэтому есть G_δ; поэтому $\mathrm{Irr}_{p,n}(A)$ есть польское пространство (B15). Насыщение в $\mathrm{Irr}_p(A)$ открытой части открыто, так как эквивалентность в $\mathrm{Rep}_n(A)$ определена группой гомеоморфизмов (3.5.5). Наконец, так как X_n отделимо, то классы эквивалентности замкнуты в $\mathrm{Irr}_{p,n}(A)$. Поэтому (B17) существует борелевское подмножество $B_{p,n}$ в $\mathrm{Irr}_{p,n}(A)$, которое пересекается с каждым классом эквивалентности $\mathrm{Irr}_{p,n}(A)$ в одной и только в одной точке. Объединение B всех $B_{p,n}$ есть борелевское подмножество $\mathrm{Irr}(A)$, которое пересекается с каждым классом эквивалентности в одной и только в одной точке. Пусть π — такое отображение $\hat{A}$ в $\mathrm{Irr}(A)$, что $\pi(\zeta)$ есть единственный представитель ζ, принадлежащий B. Пусть ψ — каноническое отображение $\mathrm{Irr}(A) \to \hat{A}$. Так как $\psi | B$ есть борелевская биекция стандартного борелевского пространства B на стандартное борелевское пространство $\hat{A}$ (4.6.1), то $\psi|B$ есть борелевский изоморфизм B на $\hat{A}$ (B21). Следовательно, π есть борелевское отображение $\hat{A}$ в $\mathrm{Irr}(A)$.

Библиография: [45], [48], [162].

4.7. Дополнения.

4.7.1. Пусть H — гильбертово пространство, t — оператор со следом в H, f_t — линейная форма $x \to \mathrm{Tr}(tx)$ на $\mathfrak{BC}(H)$. Имеем $\|f_t\| = \mathrm{Tr}|t|$.

***4.7.2.** Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, π — неприводимое представление A. Если $\pi(A) \cap \mathfrak{BC}(H_\pi) = 0$, то существует семейство попарно неэквивалентных неприводимых представлений A с тем же ядром, что и π, имеющее мощность континуума [204].

4.7.3. Если сепарабельная C^*-алгебра A такова, что $\hat{A}$ сводится к одной точке, то A изоморфна $\mathfrak{BC}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H (использовать 4.7.2) [8], [111]. Проблема: можно ли опустить предположение сепарабельности?

4.7.4. a) Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A. Если I и A/I — NGCR-алгебры, то A — NGCR-алгебра.

b) Под-C^*-алгебра NGCR-C^*-алгебры, вообще говоря, не является NGCR-алгеброй (она может быть коммутативной!). Но замкнутый двусторонний идеал A — NGCR-алгебра.

c) Фактор-C^*-алгебры NGCR-C^*-алгебры, вообще говоря не являются NGCR-алгебрами. [Согласно 4.3.9, достаточно построить NGCR-C^*-алгебру без единичного элемента. Например, если B — NGCR-C^*-алгебра, то можно образовать ограниченное произведение последовательности $(B, B, B, \ldots)$.] [24].

***4.7.5.** Существуют NGCR-C^*-алгебры A, обладающие таким семейством (π_i) конечномерных неприводимых представлений, что $\bigcap \mathrm{Ker}\, \pi_i = 0$ [21].

4.7.6. Пусть $H_1, H_2, \ldots$ гильбертовы пространства размерности $1, 2, \ldots$ Тогда C^*-алгебра — произведение $\mathfrak{B}(H_i)$ не является ни GCR-, ни NGCR-алгеброй [70].

4.7.7. a) Пусть $p_1 < p_2 < \ldots$ — последовательность целых чисел таких, что p_i делит p_{i+1}. Пусть H — гильбертово пространство бесконечной размерности. Существует последовательность под-C^*-алгебр $A_1, A_2, \ldots$ в $\mathfrak{B}(H)$ таких, что:

(i) A_i есть фактор типа I_{p_i};

(ii) $A_i \subset A_{i+1}$.

Пусть A — замыкание $\bigcup A_i$. Тогда A есть сепарабельная NGCR-C^*-алгебра с единичным элементом, единственные замкнутые двусторонние идеалы которой суть 0 и A. Задание p_i определяет C^*-алгебру A с точностью до изоморфизма.

b) Существуют последовательности (p_i), (p'_i), приводящие к неизоморфным C^*-алгебрам [22].

4.7.8. Пусть A—GCR-C^*-алгебра, I — наибольший замкнутый двусторонний CCR-идеал A. Тогда $\hat{I}$ всюду плотно в $\hat{A}$ (использовать 1.9.12b). Каждое $\pi \in \hat{I}$ имеет ядром минимальный примитивный идеал A. Проблема: является ли минимальный примитивный идеал A ядром некоторого $\pi \in \hat{I}$ [44]?

***4.7.9.** Существуют такие сепарабельные CCR-C^*-алгебры, что множество неотделимых точек в $\hat{A}$ (3.9.4) всюду плотно в $\hat{A}$. Существуют такие CCR-C^*-алгебры, что $\hat{A}$ не имеет никаких отделимых точек [47]. Проблема: если A — GCR-алгебра, содержится ли множество отделимых точек $\hat{A}$ в отделимой открытой части $\hat{A}$?

4.7.10. Пусть A — сепарабельная CCR-C^*-алгебра, X — квазикомпактная часть $\hat{A}$. Тогда X есть G_δ в $\hat{A}$. [Пусть $(U_1, U_2, \ldots)$ — база топологии $\hat{A}$; для каждого $\pi \in \hat{A} - X$ существует конечное покрытие X конечным числом U_i таких, что U_i не содержит π.] Напротив, если A — сепарабельная GCR-алгебра, то квазикомпактная часть $\hat{A}$ не обязательно является борелевской в $\hat{A}$.

***4.7.11.** Пусть A — C^*-алгебра. Множество I таких $x \in A$, что ранг $\pi(x)$ конечен и ограничен, когда π пробегает $\hat{A}$, есть самосопряженный двусторонний идеал A. Предположим, что I всюду плотно в A. Пусть (π_i) — сеть элементов $\hat{A}$. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_r \in \hat{A}$ такие, что для каждого $x \in I$ имеем $\lim \operatorname{Tr} \pi_i(x) = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{Tr} \rho_k(x)$. Тогда $\{\rho_1, \ldots, \rho_r\}$ есть множество пределов (π_i) в $\hat{A}$ [161]. C^*-алгебра A — GCR-алгебра, и $\hat{A}$ имеет такое открытое покрытие (U_i), что для каждого i каждая сеть элементов $\hat{A}$ имеет не более конечного числа различных пределов в U_i (Фелл, не опубликовано).

4.7.12. a) Для каждой C^*-алгебры A положим $J(A) = \overline{\mathfrak{M}(A)}$ (4.5.2). Существуют: порядковое число α и возрастающее семейство $(J_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ замкнутых двусторонних идеалов A, обладающих следующими свойствами: (a) $J_0 = 0$, $J(A/J_\alpha) = 0$; (b) если $\rho \leqslant \alpha$ — предельное число, то J_ρ есть замыкание $\bigcup_{\rho' < \rho} J_{\rho'}$; (c) если $\rho < \alpha$, то $J_{\rho+1}/J_\rho = J(A/J_\rho) \neq 0$. Кроме того, α и семейство (J_ρ) определяются однозначно предыдущими условиями. Положим $J_\alpha = K(A)$.

b) Для того, чтобы $K(A) = A$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого замкнутого двустороннего идеала I в A, отличного от A, было $J(A/I) \neq 0$. Тогда A называется C^*-алгеброй с обобщенным непрерывным следом.

c) Предположим, что A — с обобщенным непрерывным следом. Для каждого $\rho < \alpha$, $\hat{J}_{\rho+1} - \hat{J}_\rho$ есть открытая часть, всюду плотная в $\hat{A} - \hat{J}_\rho$, и каждая точка $\hat{J}_{\rho+1} - \hat{J}_\rho$ допускает в $\hat{A} - \hat{J}_\rho$ фундаментальную систему замкнутых окрестностей. Алгебра A есть CCR-алгебра (использовать 4.7.15), но CCR-алгебра не всегда является C^*-алгеброй с обобщенным непрерывным следом (4.7.9).

d) Пусть A — GCR-C^*-алгебра, α — порядковое число, $(V_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ — возрастающее семейство открытых частей $\hat{A}$, обладающих следующими свойствами:

1° $V_0 = \varnothing$, $V_\alpha = \hat{A}$;

2° если $\rho \leqslant \alpha$ — предельное порядковое число, $V_\rho = \bigcup_{\rho' < \rho} V_{\rho'}$;

3° каждая точка $V_{\rho+1} - V_\rho$ имеет в $\hat{A} - V_\rho$ фундаментальную систему замкнутых окрестностей.

Тогда A есть C^*-алгебра с обобщенным непрерывным следом. В частности, если $\hat{A}$ отделимо, то A — с обобщенным непрерывным следом [49].

4.7.13. Пусть A — C^*-алгебра с непрерывным следом, x — такой элемент A, что ранг $\pi(x)$ конечен и ограничен, когда π пробегает $\hat{A}$. Тогда $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ непрерывно на $\hat{A}$ [163].

4.7.14. a) Если A есть CCR-C^*-алгебра, то C^*-алгебра $\tilde{A}$, получаемая из A присоединением единичного элемента, не всегда CCR. [Пример: $A = \mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$, где H — гильбертово пространство бесконечной размерности; в этом примере спектр $\tilde{A}$ состоит из двух точек π_1, π_2, замкнутые множества суть $\varnothing$, $\{\pi_1\}$, $\{\pi_1, \pi_2\}$.]

b) Если CCR-C^*-алгебра допускает единичный элемент, то все ее неприводимые представления конечномерны [70].

4.7.15. Пусть A — GCR-C^*-алгебра. Для того чтобы она была CCR-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $\hat{A}$ была замкнута (использовать 4.3.7 (i)) [24].

***4.7.16.** Пусть A — C^*-алгебра.

a) Для того чтобы любой слабый предел чистых состояний был пропорционален чистому состоянию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) A — CCR-алгебра;

(ii) $\hat{A}$ отделимо;

(iii) $A/J(A)$ (4.7.12) коммутативна [24].

b) Предположим, что A обладает единичным элементом и не имеет ненулевых неприводимых представлений размерности 1. Для того чтобы $P(A)$ было слабо замкнуто в пространстве, сопряженном к A, необходимо и достаточно, чтобы A была произведением конечного числа C^*-алгебр $A_1, \ldots, A_n$, обладающих следующим свойством: для каждого $\pi \in \hat{A}_i$ $\dim \pi$ конечна и не зависит от π [149].

4.7.17. Пусть α — порядковое число. Пусть E — множество таких отображений f: $[0, \alpha] \to \boldsymbol{N}$, что $f(\rho) = 0$, кроме, быть может, конечного набора порядковых чисел ρ. Пусть H — гильбертово пространство l^2_E, имеющее канонический ортонормированный базис $(\varepsilon_f)_{f \in E}$. Для $S \subset [0, \alpha]$ введем $E(S)$ — множество $f \in E$, равных нулю на S. Пусть $\rho \leqslant \alpha$. Отождествим E с $E([0, \rho)) \times \times E([\rho, \alpha])$. Для $g \in E([0, \rho))$ введем H_g — гильбертово подпространство H с ортонормированным базисом $(\varepsilon_{(g, h)})_{h \in E([\rho, \alpha])}$; для $g, g' \in E([0, \rho))$ введем $U_{g, g'}$ — изоморфизм H_g на $H_{g'}$, переводящий $\varepsilon_{(g, h)}$ в $\varepsilon_{(g', h)}$ для любого $h \in E([\rho, \alpha])$. Пусть B_ρ — множество таких $x \in \mathfrak{B}(H)$, что:

1° для любого $g \in E([0, \rho))$ имеем $x(H_g) \subset H_g$;

2° операторы $x \mid H_g$ компактны и переходят друг в друга при преобразованиях $U_{g, g'}$.

Пусть C_ρ — замыкание по норме $\sum\limits_{\sigma < \rho} B_\sigma$. Все C_ρ — GCR-алгебры. Для C_α ряд идеалов из 4.3.3 есть $(C_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$.

4.7.18. Пусть H — гильбертово пространство, A — коммутативная алгебра фон Неймана в H без минимальных проекторов. Тогда $B = \mathfrak{B}\mathscr{C}(H) + A$ — GCR-алгебра, но не CCR-алгебра.

4.7.19. Пусть A — C^*-алгебра комплексных матриц с двумя строками и двумя столбцами. Пусть B — C^*-алгебра последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ элементов из A таких, что x_n стремится к диагональной матрице $\begin{pmatrix} \lambda(x) & 0 \\ 0 & \mu(x) \end{pmatrix}$ при $n \to \infty$. Тогда $\hat{A}$ есть множество отображений $x \to x_n$, $x \to \lambda(x)$, $x \to \mu(x)$. Топологическое пространство $\hat{A}$ неотделимо. Алгебра A — с обобщенным непрерывным следом (4.7.12) [67].

4.7.20. Пусть A — C^*-алгебра. Для каждой части M C^*-алгебры A обозначим через $R(M)$ [соотв. $L(M)$] множество таких $x \in A$, что $Mx = 0$ (соотв. $xM = 0$). Следующие условия эквивалентны:

(i) [соотв. (i′)]: для каждого левого (соотв. правого) замкнутого идеала I в A имеем $L(R(I)) = I$ [соотв. $R(L(I)) = I$];

(ii) [соотв. (ii′)]: сумма минимальных левых (соотв. правых) идеалов всюду плотна в A;

(iii) A изоморфна под-C^*-алгебре алгебры $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$;

(iv) существует семейство (A_i) элементарных C^*-алгебр такое, что A изоморфна ограниченному произведению A_i;

(v) [соотв. (v′)]. Для каждого $x \in A$ умножение слева (соотв. справа) на x в A есть слабо компактный оператор;

(vi) спектр каждой максимальной коммутативной под-C^*-алгебры A дискретен;

(vii) для каждого эрмитова x в A каждая точка $\mathrm{Sp}'x$, отличная от 0, является изолированной в $\mathrm{Sp}'x$.

Такая C^*-алгебра называется *дуальной*. Дуальная C^*-алгебра является CCR-алгеброй [70], [103], [104].

4.7.21. Пусть A — C^*-алгебра. Для того чтобы все операторы умножения слева и справа в A на элементы A были компактны, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое семейство (A_i) конечномерных C^*-алгебр, что A изоморфна ограниченному произведению A_i [67].

4.7.22. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство бесконечной размерности.

a) Единственные замкнутые двусторонние идеалы $\mathfrak{B}(H)$ суть 0, $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$, $\mathfrak{B}(H)$.

b) C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)/\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$ — NGCR-алгебра, несепарабельная, не изоморфная алгебре фон Неймана; она обладает семейством из $\mathfrak{c}$ попарно ортогональных проекторов ($\mathfrak{c}$ обозначает мощность континуума).

c) Каждое представление $\mathfrak{B}(H)$ записывается в виде $\pi \oplus (\bigoplus \pi_i)$, где π обозначается в нуль на $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$ и где каждое π_i эквивалентно тождественному представлению $\mathfrak{B}(H)$. Кроме того, или $H_\pi = 0$, или H_π не сепарабельно. Поэтому не существует под-C^*-алгебры $\mathfrak{B}(H)$, дополнительной к $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$. (В действительности, не существует замкнутого векторного подпространства $\mathfrak{B}(H)$, дополнительного к $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$.)

d) Кардинальное число $\mathfrak{B}(H)^\wedge$ есть $2^\mathfrak{c}$ [использовать 2.10.1, 2.8.6 и коммутативную под-C^*-алгебру A в $\mathfrak{B}(H)$ с $\mathrm{Card}(\hat{A}) = 2^\mathfrak{c}$] [7], [66], [71], [139], [160], [168].

4.7.23. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, обладающая минимальными правыми идеалами и наименьшим ненулевым замкнутым двусторонним идеалом. Для каждой части P C^*-алгебры A введем P' — множество $x \in A$ таких, что $xP = 0$. Пусть $\mathscr{P}$ — множество всех P', где P пробегает множество частей A. Предположим, что если $J_1, J_2 \in \mathscr{P}$ таковы, что $J_1 J_2^* = 0$, то $J_1 + J_2 \in \mathscr{P}$. При этих условиях A изоморфна некоторой C^*-алгебре $\mathfrak{B}(H)$ [18].

4.7.24. Проблема: пусть A — C^*-алгебра с непрерывным следом. Является ли множество таких $x \in A$, что $\pi(x)$ имеют ограниченный ранг на $\hat{A}$ и обращаются в нуль вне компактной части $\hat{A}$, наименьшим самосопряженным двусторонним идеалом $\mathfrak{M}$ в A, для которого $\mathfrak{M}=A$?

4.7.25. Проблема: построить CCR-C^*-алгебру A, не допускающую такого конечного композиционного ряда (I_ρ), что $(I_{\rho+1}/I_\rho)^\wedge$ отделимы.

§ 5. ТИП ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Во всем этом параграфе A обозначает инволютивную алгебру.

5.1. Сравнение представлений и сравнение проекторов.

5.1.1. Если дано семейство (π_i) представлений A, то всегда можно рассматривать π_i как подпредставления некоторого представления ρ инволютивной алгебры A (например, $\rho=\bigoplus \pi_i$). Пусть E_i — проектор из $\rho(A)'$, соответствующий π_i. Как мы сейчас увидим, соотношения между π_i часто могут быть выражены в виде соотношений между проекторами E_i в алгебре фон Неймана $\rho(A)'$.

5.1.2. Предложение. *Пусть ρ — представление A, $\mathscr{B}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(A)$, π и π' — два подпредставления ρ, соответствующие двум проекторам E, E' в $\mathscr{B}'$. Пусть T — непрерывное линейное отображение $E(H_\rho)$ в $E'(H_\rho)$. Для того чтобы T было сплетающим оператором для π и π', необходимо и достаточно, чтобы $T\cdot E\in\mathscr{B}'$.*

Предположим, что T — сплетающий оператор для π и π'. Пусть $x\in A$ и $\xi\in H_\rho$. Покажем, что $TE\rho(x)\xi=\rho(x)TE\xi$, откуда будет следовать $TE\in\mathscr{B}'$. Если $\xi\in E(H_\rho)$, то $\rho(x)\xi\in E(H_\rho)$, поэтому

$$TE\rho(x)\xi=T\rho(x)\xi=T\pi(x)\xi=\pi'(x)T\xi=\rho(x)T\xi=\rho(x)TE\xi.$$

Если $\xi\in(I-E)(H_\rho)$, то $\rho(x)\xi\in(I-E)(H_\rho)$; следовательно, $E\rho(x)\xi=E\xi=0$, поэтому $TE\rho(x)=0=\rho(x)TE\xi$. Обратно, если $TE\in\mathscr{B}'$, то для каждого $x\in A$ и каждого $\xi\in E(H_\pi)$

$$T\pi(x)\xi=TE\rho(x)\xi=\rho(x)TE\xi=\pi'(x)T\xi,$$

поэтому T — сплетающий оператор для π и π'.

5.1.3. Следствие. *Сохраним обозначения ρ, $\mathscr{B}$, π, π', E, E' в* 5.1.2. *Для того чтобы $\pi\simeq\pi'$, необходимо и достаточно, чтобы $E\sim E'$ по отношению к алгебре фон Неймана $\mathscr{B}'$* (A41).

Действительно, $\pi\simeq\pi'$ означает, что существует сплетающий оператор для π и π', который является изоморфизмом $E(H_\rho)$ на $E'(H_\rho)$, поэтому (5.1.2) существует частично изометрический оператор в $\mathscr{B}'$, начальный и конечный проекторы которого суть E и E'.

5.1.4. Следствие. *Сохраним обозначения* ρ, $\mathscr{B}$, π, π', E, E' *в* 5.1.2. *Для того чтобы* $\pi \leqslant \pi'$, *необходимо и достаточно, чтобы* $E \prec E'$ *по отношению к алгебре фон Неймана* $\mathscr{B}'$ (A41).

Действительно, $\pi \leqslant \pi'$ означает, что существует проектор $E'_1 \in \mathscr{B}'$, мажорируемый E', такой, что π эквивалентно подпредставлению ρ, определяемому E'_1, иначе говоря (5.1.3), такой, что $E \sim E'_1$ по отношению к $\mathscr{B}'$.

5.1.5. Следствие. *Пусть* π *и* π' — *два представления* A. *Если* $\pi \leqslant \pi_1$ *и* $\pi_1 \leqslant \pi$, *то* $\pi \simeq \pi_1$.

Это следует из 5.1.1, 5.1.3, 5.1.4 и A42.

Библиография: [81], [82].

5.2. Дизъюнктность.

5.2.1. Предложение. *Пусть* π *и* π_1—*два представления* A. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Единственный сплетающий оператор для* π *и* π_1 *есть* 0.

(ii) *Если* τ (*соотв.* τ_1) *есть подпредставление* π (*соотв.* π_1) *в ненулевом подпространстве, то* τ *и* τ_1 *неэквивалентны.*

Предположим, кроме того, что π *и* π_1 *суть подпредставления представления* ρ *инволютивной алгебры* A. *Пусть* $\mathscr{B}$ — *алгебра фон Неймана, порожденная* $\rho(A)$, E *и* E_1—*проекторы в* $\mathscr{B}'$, *соответствующие* π *и* π_1. *Тогда условия* (i) *и* (ii) *эквивалентны также следующему:*

(iii) *Центральные носители* E *и* E_1 *в* $\mathscr{B}'$ *ортогональны.*

Мы можем сразу предположить, что π и π_1 — подпредстания ρ (5.1.1). Докажем, что (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i).

(i)$\Rightarrow$(ii): если π и π_1 обладают эквивалентными подпредставлениями σ и σ_1 в ненулевых подпространствах, то существует ненулевой сплетающий оператор для π и π_1, а именно, частично изометрический оператор с начальным и конечным подпространствами H_σ и H_{σ_1}.

(ii)$\Rightarrow$(iii): если центральные носители E и E_1 не ортогональны, то существуют ненулевые проекторы F, $F_1 \in \mathscr{B}'$, эквивалентные по отношению к $\mathscr{B}'$, с $F \leqslant E$, $F_1 \leqslant E_1$ (A44). Соответствующие подпредставления π и π_1 эквивалентны (5.1.3.)

(iii)$\Rightarrow$(i): предположим, что центральные носители G, G_1 для проекторов E, E_1 ортогональны. Пусть T — сплетающий оператор π и π_1. Тогда $S = TE \in \mathscr{B}'$ (5.1.2). Проекторы на $H_\rho \ominus \operatorname{Ker} S$ и на $S(H_\rho)$ принадлежат $\mathscr{B}'$ и эквивалентны по отношению к $\mathscr{B}'$ (A45), поэтому имеют общий центральный носитель (A43). Итак, проектор на $H_\rho \ominus \operatorname{Ker} S$ мажорируется E, поэтому и G; и проектор на $\overline{S(H_\rho)}$ мажорируется E_1, поэтому и G_1.

Так как $GG_1 = 0$, видим, что $S(H_\rho) = 0$, $S = 0$, $T = 0$.

5.2.2. Определение. *Если два представления π и π_1 инволютивной алгебры A удовлетворяют эквивалентным условиям* 5.2.1, *то говорят, что π и π_1 дизъюнктны.*

Тогда пишут $\pi \mathring{\smile} \pi_1$. Это отношение симметрично. Если π и π_1 топологически неприводимы, то сказать, что π и π_1 дизъюнктны, означает, что они неэквивалентны (2.3.4). Если π и π_1 — конечномерные представления, то сказать, что π и π_1 дизъюнктны, означает, что никакое неприводимое представление не участвует одновременно в разложении π и π_1 на неприводимые представления. [Это следует из условия (ii) 5.2.1.]

5.2.3. Предложение. *Пусть π—представление A, $(\pi_i)_{i \in I}$—семейство представлений A. Если для каждого $i \in I$ π и π_i дизъюнктны, то π и $\bigoplus \pi_i$ дизъюнктны.*

Действительно, пусть H_i—пространство π_i, H—гильбертова сумма H_i, P_i — проектор H на H_i. Пусть T — оператор, сплетающий π и $\bigoplus \pi_i$. Для каждого i оператор $P_i T$ сплетает π и π_i, поэтому равен нулю. Следовательно, $T = 0$; таким образом, π и $\bigoplus \pi_i$ дизъюнктны.

5.2.4. Предложение. *Пусть ρ—представление A, $\mathscr{B}$—алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(A)$, E—проектор в $\mathscr{B}'$. Пусть π, π_1—подпредставления ρ, соответствующие E, $1-E$. Для того чтобы π и π_1 были дизъюнктны, необходимо и достаточно, чтобы E принадлежал центру $\mathscr{B}$.*

Пусть G, G_1—центральные носители E, $1-E$. Имеем $G \geqslant E$, $G_1 \geqslant 1 - E$. Следовательно:

$$\pi \mathring{\smile} \pi_1 \Leftrightarrow GG_1 = 0 \Leftrightarrow G = E \text{ и } G_1 = I - E \Leftrightarrow E \text{ в центре } \mathscr{B}.$$

5.2.5. Следствие. *Пусть ρ—представление A и $\mathscr{B}$—алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(A)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *невозможно записать ρ как прямую сумму двух дизъюнктных подпредставлений в ненулевых подпространствах;*

(ii) *$\mathscr{B}$ есть фактор;*

(iii) *$\mathscr{B}' = \rho(A)'$ есть фактор.*

Вследствие 5.2.4 условие (i) равносильно тому, что общий центр $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$ содержит только проекторы 0 и 1, т. е. центр сводится к скалярам.

5.2.6. Определение. *Представление A, удовлетворяющее условиям* 5.2.5, *называется фактор-представлением.*

Вследствие 2.2.6 такое представление либо нулевое, либо невырождено.

Если ρ топологически неприводимо, то ясно, что ρ—фактор-представление. Обратное неверно: например, гильбертова сумма эквивалентных неприводимых представлений есть фактор-представление (5.3.4); кстати, в случае конечномерных представлений это самый общий пример фактор-представления [это следует из условия (i) 5.2.5].

5.2.7. Предложение. *Пусть ρ — представление A, $\mathscr{B}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(A)$, $\mathfrak{C}$ — центр $\mathscr{B}$, E — ненулевой проектор в $\mathscr{B}'$, π — соответствующее подпредставление ρ, F — центральный носитель E. Для того чтобы π было фактор-представлением, необходимо и достаточно, чтобы F был минимальным проектором в $\mathfrak{C}$.*

Алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$, есть алгебра фон Неймана, индуцированная $\mathscr{B}_E$ ($A15$), поэтому она изоморфна $\mathscr{B}_F$ ($A20$), и центр $\mathscr{B}_F$ есть $\mathfrak{C}_F$ ($A15$). Поэтому для того, чтобы π было фактор-представлением, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{C}_F$ сводился к скалярам, иначе говоря ($A34$), чтобы F был минимальным проектором в $\mathfrak{C}$.

5.2.8. Пусть ρ — представление A, $\mathscr{B}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(A)$, $\mathfrak{C}$ — центр $\mathscr{B}$. Задача разложения ρ в гильбертову сумму топологически неприводимых представлений сводится к тому, чтобы записать единичный оператор в H_ρ как сумму попарно ортогональных минимальных проекторов в $\mathscr{B}'$. Задача разложения ρ в гильбертову сумму попарно дизъюнктных фактор-представлений сводится к тому, чтобы записать 1 как сумму попарно ортогональных минимальных проекторов в $\mathfrak{C}$ вследствие (5.2.4) и (5.2.7). Вторая проблема, касающаяся $\mathfrak{C}$, в принципе решается легче, чем первая, касающаяся $\mathscr{B}'$.

Пусть (F_i) — семейство минимальных проекторов (попарно различных, следовательно, попарно ортогональных) в $\mathfrak{C}$. Если $I = \sum F_i$, имеем разложение ρ в прямую сумму попарно дизъюнктных фактор-представлений. Проблема, состоящая в записи ρ как прямой суммы топологически неприводимых представлений, сводится таким образом к случаю, когда ρ есть фактор-представление. Мы увидим (5.4.11), что в важном частном случае представлений типа I эта задача также решается совсем легко. (В случае представлений не типа I задача, к которой сводится исходная, напротив, очень трудна.)

Однако, вообще говоря, имеем $F = \sum F_i \neq 1$. Предыдущее разложение действует тогда только в подпредставлении ρ, и, к несчастью, может случиться, что $F = 0$. Мы получим позднее удовлетворительную теорию, заменяющую разложение ρ в прямую сумму попарно дизъюнктных фактор-представлений разложением в прямой интеграл.

5.2.9. Предложение. *Пусть π и π_1 — фактор-представления A. Имеет место одно из соотношений $\pi \between \pi_1$, $\pi \leqslant \pi_1$, $\pi_1 \leqslant \pi$.*

Можно рассматривать π и π_1 как подпредставления некоторого представления ρ инволютивной алгебры A. Пусть $\mathscr{B}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(A)$, E и E_1—проекторы $\mathscr{B}'$, соответствующие π и π_1, F и F_1 — их центральные носители. Это либо нулевые проекторы, либо минимальные проекторы $\mathscr{B}\cap\mathscr{B}'$ (5.2.7), поэтому F и F_1 либо ортогональны (в случае, когда $\pi\,\delta\,\pi_1$), либо равны. В последнем случае, по отношению к фактору $\mathscr{B}'_F$, либо $E\prec E_1$, либо $E_1\prec E$ (A46), поэтому $\pi\leqslant\pi_1$ или $\pi_1\leqslant\pi$ (5.1.4).

Библиография: [81], [82].

5.3. Квазиэквивалентность.

5.3.1. Предложение. *Пусть π и π_1 — два представления A, $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}_1$ — алгебры фон Неймана, порожденные $\pi(A)$ и $\pi_1(A)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Каждое подпредставление π в ненулевом подпространстве не дизъюнктно с π_1; каждое подпредставление π_1 в ненулевом подпространстве не дизъюнктно с π.*

(ii) *существует такой изоморфизм Φ алгебры фон Неймана $\mathscr{B}$ на $\mathscr{B}_1$, что $\pi_1(x)=\Phi(\pi(x))$ для каждого $x\in A$.*

(iii) *существуют: π_2, кратное π, и в $\pi_2(A)'$ такой проектор с центральным носителем 1, что соответствующее подпредставление π_2 эквивалентно π_1.*

(iv) *существуют эквивилентные кратные π и π_1.*

Предположим, кроме того, что π и π_1 суть подпредставления представления ρ инволютивной алгебры A. Пусть $\mathscr{C}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(A)$, E и E_1 — проекторы в $\mathscr{C}'$, соответствующие π и π_1. Тогда условия (i)—(iv) *эквивалентны еще и следующему условию:*

(v) *Центральные носители F, F' проекторов E, E' равны.*

(ii) $\Rightarrow$ (iii): согласно (A22) Φ есть композиция размножения Ψ алгебры фон Неймана $\mathscr{B}$ на алгебру фон Неймана $\mathscr{B}_2$, индукции Ψ' алгебры фон Неймана $\mathscr{B}_2$ на $\mathscr{B}_1$, определенной проектором $E\in\mathscr{B}'_2$ с центральным носителем 1, и пространственного изоморфизма Ψ''. Положим $\pi_2(x)=\Psi(\pi(x))$ для каждого $x\in A$. Тогда π_2 есть представление A, кратное π. С другой стороны,

$$\Psi''^{-1}(\pi_1(x))=\Psi''^{-1}(\Phi(\pi(x)))=\Psi'(\pi_2(x))$$

является оператором, индуцированным $\pi_2(x)$ в $E(H_{\pi_2})$, поэтому π_1 эквивалентно подпредставлению π_2, определяемому E.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): предположим, что условие (iii) выполнено. Пусть $\mathscr{B}_2$—алгебра фон Неймана, порожденная $\pi_2(A)$. Очевидно, существует изоморфизм $\mathscr{B}$ на $\mathscr{B}_2$, переводящий $\pi(x)$ в $\pi_2(x)$ для каждого $x\in A$. С другой стороны, если $E\in\mathscr{B}'_2$ — проектор с центральным носителем 1, то индукция $\mathscr{B}_2$ на $(\mathscr{B}_2)_E$ — изоморфизм (A20). Поэтому существует изоморфизм $\mathscr{B}_2$ на $\mathscr{B}_1$, переводящий $\pi_2(x)$ в $\pi_1(x)$ для каждого $x\in A$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): предположим, что условие (iii) выполнено; существует такое кардинальное число n, что $\pi_1 \leqslant n\pi$, и можно предположить, что n бесконечно. Так как (iii)$\Leftrightarrow$(ii), то условие (iii) симметрично относительно π и π_1, поэтому существует также такое бесконечное кардинальное число n_1, что $\pi \leqslant n_1\pi_1$. Пусть $p = \sup(n, n_1)$. Имеем

$$p\pi \leqslant pn_1\pi_1 = p\pi_1 \leqslant pn\pi = p\pi, \quad \text{поэтому} \quad p\pi_1 \simeq p\pi \qquad (5.1.5)$$

(iv)$\Rightarrow$(i): предположим, что $p\pi \simeq p\pi_1$. Пусть τ—подпредставление π в ненулевом подпространстве. Тогда τ не дизъюнктно с $p\pi \simeq p\pi_1$, поэтому τ не дизъюнктно с π_1 (5.2.3). Аналогично, подпредставление π_1 в ненулевом подпространстве не дизъюнктно с π.

Предположим теперь, что π и π_1 — подпредставления ρ.

(i)$\Rightarrow$(v): если $F \neq F_1$, то существует ненулевой проектор G в центре $\mathscr{C}$, мажорируемый F и ортогональный к F_1 (при необходимости можно менять местами F и F_1). Имеем $GE \neq 0$ (так как в противном случае центральный носитель E был бы ортогонален G), и GE ортогонален F_1, поэтому центральный носитель GE ортогонален F. Поэтому существует подпредставление π в ненулевом подпространстве, дизъюнктное с π_1.

(v)$\Rightarrow$(ii): отображение $S \to S_E$ (соотв. $T \to T_{E_1}$) $\mathscr{C}_F$ на $\mathscr{C}_E$ (соотв. $\mathscr{C}_{F_1}$ на $\mathscr{C}_{E_1}$) есть изоморфизм (A20). Следовательно, если $F = F_1$, то существует изоморфизм $\mathscr{C}_E = \mathscr{B}$ на $\mathscr{C}_{E_1} = \mathscr{B}_1$, который переводит $\rho(x)_E = \pi(x)$ в $\rho(x)_{E_1} = \pi_1(x)$ для каждого $x \in A$.

5.3.2. Определение. *Если выполнены эквивалентные условия* 5.3.1, *то говорят, что π и π_1 квазиэквивалентны. В этом случае пишут $\pi \approx \pi_1$.*

Из условия (ii) 5.3.1 ясно, что это—отношение эквивалентности. Если π и π_1 конечномерны, то $\pi \approx \pi_1$ означает, что в разложение π и π_1 на неприводимые компоненты входят одни и те же неприводимые представления, но, быть может, с разными кратностями [это следует из условия (i) 5.3.1].

5.3.3. Предложение. (i) *Если $\pi \simeq \pi_1$, имеем $\pi \approx \pi_1$.*

(ii) *Если π и π_1 топологически неприводимы и если $\pi \approx \pi_1$, имеем $\pi \simeq \pi_1$.*

(i) очевидно. Если π и π_1 топологически неприводимы и квазиэквивалентны, то π и π_1 не дизъюнктны [условие (i) 5.3.1], поэтому эквивалентны [условие (ii) 5.2.1].

5.3.4. Предложение. *Пусть π и π_1 — два квазиэквивалентных представления A. Если π — фактор-представление, то и π_1 — фактор-представление.*

Это следует сразу из условия (ii) 5.3.1 и условия (ii) 5.2.5.

В множестве неприводимых представлений квазиэквивалентность совпадает с эквивалентностью (5.3.3). В множестве фактор-представлений квазиэквивалентность есть, по-видимому, «хорошее» отношение эквивалентности.

5.3.5. Предложение. *Пусть π — фактор-представление A. Каждое подпредставление π в ненулевом пространстве квазиэквивалентно π.*

Так как единственный ненулевой проектор в центре $\pi(A)'$ есть 1, то это следует из условия (iii) 5.3.1.

5.3.6. Следствие. *Два фактор-представления A либо квазиэквивалентны, либо дизъюнктны.*

Это следует из 5.2.9 и 5.3.5.

5.3.7. Следствие. *Пусть A — сепарабельная инволютивная банахова алгебра. Каждое фактор-представление A квазиэквивалентно фактор-представлению в сепарабельном пространстве.*

Пусть π — фактор-представление A, ξ — ненулевой вектор в H_π. Тогда замыкание K множества $\pi(A)\xi$ сепарабельно и инвариантно относительно $\pi(A)$. Подпредставление π, определяемое K, квазиэквивалентно π (5.3.5).

5.3.8. Пусть π, π_1 — два квазиэквивалентных представления A в сепарабельном пространстве. Имеем $\aleph_0\pi \approx \aleph_0\pi_1$: достаточно пересмотреть доказательство 5.3.1, (ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv), и использовать (A22).

Обычное обозначение квазиэквивалентности: $\pi \sim \pi_1$. Так как знак $\sim$ используется для обозначения эквивалентности проекторов, мы предпочли ему другой.

Библиография: [81], [82].

5.4. Представления типа I.

5.4.1. Предложение. *Пусть π — представление A. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$, имеет тип I.*

(ii) *Алгебра фон Неймана $\pi(A)'$ имеет тип I.*

(iii) *π квазиэквивалентно такому представлению π_1, что $\pi_1(A)'$ коммутативна.*

(iii)$\Rightarrow$(i): предположим, что условие (iii) выполнено. Так как $\pi_1(A)'$ коммутативна, то $\pi_1(A)$ порождает алгебру фон Неймана типа I (A35), поэтому $\pi(A)$ порождает алгебру фон Неймана типа I [условие (ii) 5.3.1].

(i)$\Rightarrow$(ii): следствие (A52).

(ii)$\Rightarrow$(iii): предположим, что условие (ii) выполнено. Тогда существует такой проектор $E \in \pi(A)'$ с центральным носителем 1, что $\pi(A)'_E$ коммутативна (A35). Подпредставление π_1 представления π, определяемое E, квазиэквивалентно π [условие (iii) 5.3.1], и $\pi_1(A)' = \pi(A)'_E$ коммутативна.

5.4.2. Определение. *Если представление π удовлетворяет эквивалентным условиям 5.4.1, говорят, что π — типа I.*

Всякое конечномерное представление — типа I. Действительно, в конечномерном гильбертовом пространстве каждая алгебра фон Неймана — типа I.

5.4.3. Всякое представление, квазиэквивалентное представлению типа I, имеет тип I. Каждое подпредставление представления типа I имеет тип I (так как всякая алгебра фон Неймана, индуцированная алгеброй фон Неймана типа I, имеет тип I (A53)). Всякая прямая сумма ρ представлений π_i типа I имеет тип I; действительно, пусть $\mathscr{B}$—алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(A)$, $E_i \in \mathscr{B}'$—проектор, соответствующий π_i, F_i — его центральный носитель; тогда $\mathscr{B}_{E_i}$ имеет тип I, поэтому $\mathscr{B}_{F_i}$, изоморфная $\mathscr{B}_{E_i}$ (A21), имеет тип I, поэтому наибольший проектор F в $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}'$ такой, что $\mathscr{B}_F$ имеет тип I (A39), равен 1, так как $\sup F_i = 1$.

5.4.4. Пусть π—представление A. Следующие условия эквивалентны:

(i) $\pi(A)'$ коммутативна.

(ii) Для каждого разложения $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$, π_1 и π_2 дизъюнктны.

Вследствие 5.2.4 условие (ii) означает, что каждый проектор $\pi(A)'$ принадлежит центру $\pi(A)'$, следовательно, что $\pi(A)'$ коммутативно.

5.4.5. Определение. *Если π удовлетворяет эквивалентным условиям* 5.4.4, *то говорят, что π «без кратности», или что оно имеет простой спектр.*

Пусть π—конечномерное представление, $\pi = p_1\pi_1 \oplus \ldots \oplus p_n\pi_n$—разложение π на кратные неэквивалентных неприводимых представлений $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Для того чтобы π было без кратности, необходимо и достаточно, чтобы $p_1 = \ldots = p_n = 1$ [вследствие условия (ii) 5.4.4].

5.4.6. Представление без кратности имеет тип I. Представление π типа I квазиэквивалентно представлению π' без кратности [условие (iii) 5.4.1]; кроме того, π' определяется π с точностью до эквивалентности; действительно, имеем следующий результат, обобщающий 5.3.3 (ii):

Предложение. *Пусть π, ρ — два представления A без кратности. Если $\pi \approx \rho$, то $\pi \simeq \rho$.*

Пусть $(E_i, F_i)_{i \in I}$—максимальное семейство среди семейств, обладающих следующими свойствами:

1° $E_i \in \pi(A)'$, $F_i \in \rho(A)'$;

2° E_i—попарно ортогональные ненулевые проекторы, F_i—попарно ортогональные ненулевые проекторы;

3° подпредставление π, определенное E_i, эквивалентно подпредставлению ρ, определенному F_i.

Пусть $E = \sum E_i$, $F = \sum F_i$. Тогда подпредставление π_1 представления π, определенное E, эквивалентно подпредставлению ρ_1 представления ρ, определенному F. Предположим, что $E \neq 1$. Так как $\pi \approx \rho$, то существует ненулевой проектор $E' \in \pi(A)'$, мажорируемый $1-E$, и ненулевой проектор $F' \in \rho(A)'$ такие, что подпредставления π', ρ' представлений π и ρ, определенные E' и F', эквивалентны [условие (i) 5.3.1]. Так как $\rho(A)'$ коммутативна, то $F' = F_1' + F_2'$, F_1' и F_2' — такие проекторы в $\rho(A)'$, что $F_1' \leqslant F$, $F_2' \leqslant 1 - F$. Поэтому существуют такие проекторы E_1', E_2' в $\pi(A)'$, что $E' = E_1' + E_2'$ и что подпредставления π и ρ, определенные E_j' и F_j', эквивалентны ($j = 1, 2$). Максимальность семейства (E_i, F_i) влечет $F_2' = E_2' = 0$. Тогда $F' \leqslant F$, поэтому π' эквивалентно подпредставлению ρ_1, поэтому и подпредставлению π_1. Но это противоречит условию (ii) 5.4.4. Поэтому $E = 1$, и аналогично $F = 1$. Следовательно, $\pi \simeq \rho$.

5.4.7. Предложение. *Пусть π — представление A и n — кардинальное число. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\pi(A)'$ *есть алгебра фон Неймана типа* I_n (A47);

(ii) π *есть прямая сумма n эквивалентных представлений без кратности.*

Предположим, что условие (ii) выполнено: существует такое представление A без кратности ρ, что $\pi = n\rho$. Тогда H_π отождествляется с гильбертовым пространством $H_\rho \otimes K$ (K — гильбертово пространство размерности n), причем $\pi(x)$ отождествляется с $\rho(x) \otimes 1$ для каждого $x \in A$ (A17). Тогда $\pi(A)' = \rho(A)' \otimes \mathfrak{B}(K)$ (A18) и $\rho(A)'$ коммутативно, следовательно, $\pi(A)'$ — типа I_n (A47). Обратное доказывается аналогично.

5.4.8. Определение. *Если π удовлетворяет эквивалентным условиям* 5.4.7, *говорят, что π — кратности n.*

Представление кратности n имеет тип I. Представление без кратности есть не что иное, как представление кратности 1. Целое n в 5.4.7 определяется представлением π однозначно (A47). С другой стороны, если $\pi \simeq n\pi'$ с π' без кратности, то класс эквивалентности π' определяется π; действительно, если $\pi \simeq n\pi_1'$ с π_1' без кратности, то $\pi' \approx \pi_1'$ [условие (iv) 5.3.1], поэтому $\pi' \simeq \pi_1'$ (5.4.6).

Пусть π — конечномерное представление, $\pi = p_1\pi_1 \oplus \ldots \oplus p_r\pi_r$ — разложение π на кратные неэквивалентных неприводимых представлений $\pi_1, \ldots, \pi_r$. Для того чтобы π было кратности n, необходимо и достаточно, чтобы $p_1 = \ldots = p_r = n$ [вследствие условия (ii) 5.4.7].

5.4.9. Предложение. *Пусть π — представление типа* I. *Существует семейство $(E_j)_{j \in J}$ попарно ортогональных ненулевых проекторов в $\pi(A)'$ с суммой* 1 *таких, что:*

a) *подпредставления* π_j *представления* π, *определенные* E_j, *попарно дизъюнктны*; b) π_j *имеет кратность* n_j; c) n_j *попарно различны.*

Семейство $(E_j)_{j \in J}$ *единственно с точностью до биективного отображения множеств индексов.* E_j *принадлежит центру* $\pi(A)'$.

Пусть $\mathfrak{C}$ — центр $\pi(A)'$. Ввиду (5.2.4) предложение означает, что существует семейство $(E_j)_{j \in J}$ ненулевых попарно ортогональных проекторов в $\mathfrak{C}$ с суммой 1 таких, что алгебры фон Неймана $\pi(A)'_{E_j}$ суть типа I_{n_j} с попарно различными n_j и что это семейство (E_j) единственно с точностью до биективного отображения индексов. Так как $\pi(A)$ — типа I [условие (ii) (5.4.1)], то это следует из A50.

Предыдущее полностью сводит изучение представлений типа I к представлениям без кратности.

5.4.10. Сохраним обозначения (5.4.9). Пусть U — такой унитарный оператор в H_π, что $U\pi(A)U^{-1} = \pi(A)$. Тогда $U\mathfrak{C}U^{-1} = \mathfrak{C}$, следовательно, $E'_j = UE_jU'$ суть ненулевые попарно ортогональные проекторы в $\mathfrak{C}$ с суммой 1 такие, что $\pi(A)'_{E'_j}$ имеет тип I_{n_j}. Следовательно, $E'_j = E_j$. Иначе говоря, U коммутирует с E_j.

5.4.11. П р е д л о ж е н и е. *Пусть* π — *представление* A. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) π — *фактор-представление типа* I;

(ii) π *квазиэквивалентно топологически неприводимому представлению*;

(iii) π *имеет вид* $n\pi'$ *с топологически неприводимым* π'.

Тогда π *имеет кратность* n.

(iii)$\Rightarrow$(ii): следует из условия (iv) (5.3.1).

(ii)$\Rightarrow$(i): следует из (5.3.4) и условия (iii) (5.4.1).

(i)$\Rightarrow$(iii): если π — фактор-представление типа I, (5.4.9) показывает, что π имеет кратность n для некоторого кардинального числа n. Поэтому $\pi = n\rho$, где ρ — без кратности [условие (ii) (5.4.7)], и ρ — фактор-представление, так как оно квазиэквивалентно π. Тогда $\rho(A)'$ — коммутативный фактор, поэтому $\rho(A)'$ сводится к скалярам, так что ρ топологически неприводимо.

5.4.12. Пусть π — представление A, $\mathfrak{C}$ — центр $\pi(A)'$. Мы видели, что π есть прямая сумма попарно дизъюнктных фактор-представлений тогда и только тогда, когда оператор 1 есть сумма минимальных проекторов $\mathfrak{C}$. Хотя эта ситуация далека от общей ситуации, неплохо интерпретировать в этом случае определения 5.4.2, 5.4.5 и 5.4.8.

Предложение. *Пусть* (π_i) — *семейство попарно дизъюнктных фактор-представлений* A *и* $\pi = \bigoplus \pi_i$.

(i) π — *типа* I *тогда и только тогда, когда каждое* π_i — *типа* I.

(ii) π — *кратности* n *тогда и только тогда, когда каждое* π_i — *кратности* n.

(iii) π — *без кратности тогда и только тогда, когда каждое* π_i *топологически неприводимо.*

(i) следует из 5.4.3; (ii) следует из того, что произведение алгебр фон Неймана $\mathfrak{B}_i$ имеет тип I_n тогда и только тогда, когда каждая $\mathfrak{B}_i$ имеет тип I_n (A50); (iii) есть частный случай (ii).

5.4.13. Мы видели (2.3.5), что конечномерное представление есть прямая сумма неприводимых представлений. Справедливо более общее утверждение:

Предложение. *Пусть* π — *такое представление* A, *что* $\pi(x)$ *компактен для всякого* $x \in A$.

(i) *Представление* π *есть прямая сумма семейства* $(\pi_i)_{i \in I}$ *неприводимых представлений.*

(ii) *Пусть* $i \in I$ *таков, что* $\pi_i(A) \neq 0$. *Существует не более чем конечное число таких индексов* $j \in I$, *что* $\pi_j \simeq \pi_i$.

Покажем, что если $H_\pi \neq 0$, то π обладает неприводимым подпредставлением. Можно предположить, что $\pi \neq 0$. Пусть $\mathscr{B}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$, $\mathfrak{C}$ — ее центр. Существует такой эрмитов элемент x в A, что $\pi(x) \neq 0$. Так как $\pi(x)$ компактен, $\pi(x)$ обладает собственным значением $\neq 0$ и соответствующий спектральный проектор E — ненулевой, конечного ранга. Имеем $E \in \mathscr{B}$. Пусть F — проектор минимального ранга среди ненулевых проекторов $\mathscr{B}$, мажорируемых E. Тогда F — минимальный проектор $\mathscr{B}$. Его центральный носитель F' есть минимальный проектор $\mathfrak{C}$. Тогда индуцированная алгебра фон Неймана, $\mathscr{B}_{F'}$, есть фактор, обладающий минимальным проектором, поэтому фактор типа I (A36). Таким образом, π обладает фактор-подпредставлением типа I в ненулевом пространстве и, вследствие этого (5.4.11), неприводимым подпредставлением в ненулевом пространстве.

Пусть тогда $(E_i)_{i \in I}$ — максимальное семейство попарно ортогональных ненулевых проекторов в $\pi(A)'$ таких, что соответствующие подпредставления π неприводимы. Пусть $\sum E_i \neq 1$, π' — подпредставление π, соответствующее $1 - \sum E_i$. Для каждого $x \in A$ оператор $\pi'(x)$ компактен. Тогда предыдущий результат, примененный к π', противоречит максимальности (E_i). Поэтому $\sum E_i = 1$, что доказывает (i). Если $x \in A$ и $i \in I$ таковы, что $\pi_i(x) \neq 0$, и если существует бесконечно много таких индексов $j \in I$, что $\pi_j \simeq \pi_i$, то ясно, что $\pi(x)$ не компактен. Это доказывает (ii).

Библиография: [70], [81], [82].

5.5. Инволютивные алгебры типа I.

5.5.1. Мы видели, что разложение представлений осуществляется наиболее простым образом в случае представлений типа I. Поэтому представляет интерес следующее понятие:

Определение. *Инволютивная алгебра называется алгеброй типа* I, *если все ее представления — типа* I.

Для алгебр типа I вместо понятия фактор-представления можно рассматривать только понятие топологически неприводимого представления (5.4.11). К несчастью, существуют C^*-алгебры, которые не являются алгебрами типа I, и для них рассмотрение фактор-представлений приводит иногда к более простым теоремам, чем изучение топологически неприводимых представлений.

5.5.2. Теорема. *Каждая* GCR-C^*-*алгебра имеет тип I.*

Пусть A — ненулевая GCR-C^*-алгебра. Вследствие 4.4.4 существует такой ненулевой $x \in A^+$, что $\pi(x)$ есть нуль или имеет ранг 1 для каждого $\pi \in \hat{A}$. Тогда $\pi(xAx) = \pi(x)\pi(A)\pi(x)$ коммутативна для каждого $\pi \in \hat{A}$, поэтому xAx коммутативна.

Пусть тогда π — представление A. Пусть (E_i) — максимальное семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов из центра $\pi(A)'$ таких, что сответствующие подпредставления π суть типа I. Вследствие 5.4.3 достаточно доказать, что $\sum E_i = 1$. Предположим, что $E = 1 - \sum E_i \neq 0$, и пусть ρ — подпредставление π, определенное E. Если имеем $\rho(A) = 0$, то можно присоединить E к семейству (E_i) в противоречие с максимальностью последнего. Поэтому $\rho(A) \neq 0$. С другой стороны, $\rho(A)$ — GCR-алгебра (4.3.5). Согласно началу доказательства существует такой $x \in A^+$, что $\rho(x)$ — не нуль и $\rho(x)\rho(A)\rho(x)$ коммутативна. Если $\mathscr{C}$ обозначает алгебру фон Неймана, порожденную $\rho(A)$, то $\rho(x)\mathscr{C}\rho(x)$ коммутативна. Пусть $\rho(x) = \int_0^{+\infty} \lambda\, de_\lambda$ — спектральное разложение $\rho(x)$. Имеем $e_\lambda \in \mathscr{C}$ для каждого λ, поэтому $y_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \lambda^{-1}\, de_\lambda \in \mathscr{C}$ для $\varepsilon > 0$. Если ε выбрано достаточно малым, то $\rho(x)\, y_\varepsilon = y_\varepsilon \rho(x)$ — ненулевой проектор F в $\mathscr{C}$. Имеем $F\mathscr{C}F \subset \rho(x)\mathscr{C}\rho(x)$, поэтому $F\mathscr{C}F$ коммутативна. Пусть $G \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ — центральный носитель F. Алгебра фон Неймана $\mathscr{C}_G$ имеет тип I (A35). Тогда проектор в H_π, равный нулю на

$(I-E)(H_\pi)$ и совпадающий с G на $E(H_\pi)$, есть ненулевой элемент центра $\pi(A')$, ортогональный E_i и соответствующее подпредставление π имеет тип I. Это противоречит максимальности (E_i). Поэтому $\sum E_i = 1$ и π — типа I.

Мы получим ниже (9.1) обратную теорему к 5.5.2.

5.5.3. Следствие. *Пусть A — GCR-C^*-алгебра. Каждое фактор-представление A квазиэквивалентно неприводимому представлению.*

Это следует из 5.5.2 и 5.4.11.

Библиография: [69], [70].

5.6. Представления типов II и III.

5.6.1. Наряду с алгебрами фон Неймана типа I существуют более сложные алгебры фон Неймана, типа II или типа III. Представление π инволютивной алгебры A называется *представлением типа* II (соотв. *типа* III), если алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$, имеет тип II (соотв. III). Это равносильно тому, что $\pi(A)'$ есть алгебра фон Неймана типа II (соотв. III) (A52).

5.6.2. Каждое представление, квазиэквивалентное представлению типа II (соотв. III), имеет тип II (соотв. III). Каждое подпредставление представления типа II (соотв. III) имеет тип II (соотв. III). Прямая сумма представлений типа II (соотв. III) имеет тип II (соотв. III). Это показывается теми же рассуждениями, что и для представлений типа I.

5.6.3. Представление в ненулевом пространстве не может иметь одновременно двух различных типов (A38). Отсюда следует, что два представления различных типов дизъюнктны.

5.6.4. Предложение. *Пусть π — представление A. Существуют проекторы E_{I}, E_{II}, E_{III}, определяемые единственным образом следующими условиями:*

1° E_{I}, E_{II}, E_{III} *попарно ортогональны и дают в сумме* 1;

2° *подпредставления π, определенные E_{I}, E_{II}, E_{III}, суть соответственно типов* I, II, III.

Эти проекторы принадлежат центру $\pi(A)'$.

Это следует из соответствующего свойства алгебр фон Неймана (A39).

Итак, изучение произвольных представлений A сводится к изучению представлений типа I, представлений типа II и представлений типа III. Это, однако, не очень упрощает дело.

5.6.5. Предложение. *Пусть π — представление A. Для того чтобы π было прямой суммой представления типа* II *и представления типа* III, *необходимо и достаточно, чтобы каждое подпредставление π было прямой суммой двух эквивалентных представлений.*

Для того чтобы π было прямой суммой представления типа II и представления типа III, необходимо и достаточно, чтобы проектор E_{I} в 5.6.4 равнялся нулю, иначе говоря, чтобы алгебра фон Неймана $\pi(A)'$ была непрерывной (A39). Для этого необходимо и достаточно, чтобы каждый проектор из $\pi(A)'$ был суммой двух ортогональных и эквивалентных проекторов из $\pi(A)'$ (A48). Тогда достаточно применить 5.1.3.

5.6.6. Пусть π — представление A типа I, C — класс квазиэквивалентности π. Различные классы эквивалентности, содержащиеся в C, различаются при помощи кратности (5.4.9). Для представлений не типа I имеется аналогичная теория, но более сложная, которую мы не изучаем. Имеем, однако, следующий простой результат:

Предложение. *Пусть π_1, π_2 — два представления A типа* III *в сепарабельных пространствах. Тогда $\pi_1 \approx \pi_2$ влечет $\pi_1 \simeq \pi_2$.*

Действительно, пусть $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ — алгебры фон Неймана, порожденные $\pi_1(A)$ и $\pi_2(A)$. Если $\pi_1 \approx \pi_2$, то существует изоморфизм Φ алгебры фон Неймана $\mathscr{B}_1$ на $\mathscr{B}_2$, который переводит $\pi_1(x)$ в $\pi_2(x)$ для каждого $x \in A$. Но $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — типа III и действуют в сепарабельных пространствах. Следовательно, Φ определяется изоморфизмом H_{π_1} на H_{π_2} (A51).

5.6.7. Классификация алгебр фон Неймана включает еще определение алгебр фон Неймана типа II_1, типа II_∞, полуконечных и т. д. Говорят, что представление π инволютивной алгебры A имеет тип II_1, тип II_∞, конечного типа и т. д., если A порождает алгебру фон Неймана типа II_1, типа II_∞, конечного типа и т. д.

Библиография: [81], [82].

5.7. Дополнения.

5.7.1. C^*-алгебра A конечной размерности есть произведение конечного числа C^*-алгебр $\mathfrak{B}(H_i)$ (H_i — конечномерные гильбертовы пространства). (Неприводимые представления A конечномерны, и A обладает инъективным конечномерным представлением, прямой суммой попарно дизъюнктных неприводимых представлений.)

5.7.2. Пусть A — инволютивная алгебра, π и ρ — представления A. Существуют: проектор E в центре $\pi(A)'$ и проектор F в центре $\rho(A)'$ такие, что $\pi_E \approx \rho_F$, $\pi_{1-E} \overset{\lrcorner}{\circ} \rho$, $\pi \overset{\lrcorner}{\circ} \rho_{1-E}$ [82].

5.7.3. Пусть A — инволютивная алгебра, π — фактор-представление A в сепарабельном пространстве. Существует функция m, которая сопоставляет каждому представлению ρ в сепарабельном пространстве, квазиэквивалентному π, число $m(\rho) \in [0, +\infty]$, со следующими свойствами:

(i) $m(\rho_1) = m(\rho_2)$ равносильно $\rho_1 \simeq \rho_2$;

(ii) для каждой последовательности $\rho_1, \rho_2, \ldots$ представлений в сепарабельных пространствах, квазиэквивалентных π, имеем $m(\bigoplus \rho_i) = \sum m(\rho_i)$.

Кроме того, функция m единственна с точностью до умножения на положительную постоянную [82].

5.7.4. Пусть A — C^*-алгебра, J — замкнутый двусторонний идеал A. Для того чтобы A была типа I, необходимо и достаточно, чтобы J и A/J были типа I (использовать 2.11.2) [19].

5.7.5. Пусть $\mathfrak{A}$ — непрерывная алгебра фон Неймана, B — C^*-алгебра, слабо всюду плотная в $\mathfrak{A}$. Тогда B — NGCR-алгебра (использовать 2.11.1 и 5.5.2). Алгебра фон Неймана типа I может содержать слабо всюду плотную NGCR-под-C^*-алгебру (рассмотреть неприводимое представление фактора типа II_1) [23].

5.7.6. Пусть A — C^*-алгебра, π — представление A.

a) Говорят, что π *однородно*, если для каждого проектора $E \in \pi(A)'$ подпредставление π_E имеет то же ядро, что и π. Имеем тогда $\|\pi(x)E\| = \|\pi(x)\|$ для каждого $x \in A$.

b) Фактор-представление однородно. Обратное неверно.

c) Для каждого замкнутого двустороннего идеала I в A введем $Q(I)$ — проектор в H_π на существенное подпространство сужения $\pi|I$. Операторы $Q(I)$ для меняющихся I порождают подалгебру фон Неймана $\mathscr{B}$ центра $\pi(A)'$, называемую *центральным идеалом*, связанным с π. Для того чтобы π было однородно, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{B}$ сводилась к скалярам.

d) Ядро однородного представления — простой идеал [186].

*e) Для каждой открытой части U в $\hat{A}$ введем $I(U)$ — замкнутый двусторонний идеал A со спектром U и положим $Q'(U) = Q(I(U))$. Тогда $U \to Q'(U)$ продолжается до такого отображения Q'' множества борелевских частей $\hat{A}$ в $\mathscr{B}$, что $Q''(X_1 \cup X_2 \cup \ldots) = \sum Q''(X_i)$, если $X_1, X_2, \ldots$, суть попарно непересекающиеся борелевские части $\hat{A}$ [25].

***5.7.7.** Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом. Используем обозначения 2.12.19. Пусть f, g — положительные формы на A; будем писать $g \prec f$, если $F_g \subset F_f$, или, что то же самое, если $g \in F_f$. Отношение $F_g = F_f$ есть отношение эквивалентности, отсюда понятие *класса положительных форм*.

a) π_f — фактор-представление тогда и только тогда, когда отношение $\prec$ вполне предупорядочивает F_f. Тогда говорят, что f *примарна*.

b) Предположим, что f примарна. Для того чтобы π_f было типа I, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое чистое состояние g, что $g \prec f$. Для того чтобы π_f было типа III, необходимо и достаточно, чтобы класс f был минимален и максимален в множестве классов примарных положительных форм и чтобы f не был морфизмом A в $\boldsymbol{C}$ [64].

§ 6. СЛЕДЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть A — C^*-алгебра. В § 2 мы связали с каждой положительной формой f на A представление π_f. Все представления получаются таким образом, или по крайней мере те из них, которые имеют тотализирующий вектор (напомним, что всякое невырожденное представление есть сумма представлений, имеющих тотализирующий вектор). Но отображение $f \to \pi_f$, вообще говоря, не инъективно. Нам хотелось бы теперь параметризовать представления биективно. Пусть π и π' — два конечномерных представления A. Если $\operatorname{Tr} \pi(x) = \operatorname{Tr} \pi'(x)$ для каждого $x \in A$, то, как известно, π и π' эквивалентны. Мы частично обобщим этот факт. В действительности мы сможем параметризовать только представления, допускающие след, или, точнее, их классы квазиэквивалентности.

6.1. Следы.

6.1.1. Определение. *Пусть A — C^*-алгебра. Назовем следом на A^+ функцию f: $A^+ \to [0, +\infty]$, удовлетворяющую следующим аксиомам*:

(i) *Если $x, y \in A^+$, имеем $f(x+y) = f(x) + f(y)$.*

(ii) *Если $x \in A^+$ и если λ — неотрицательное число, имеем $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$ (с условием $0 \cdot (+\infty) = 0$).*

(iii) *Если $z \in A$, имеем $f(zz^*) = f(z^*z)$.*

Говорят, что *след f конечен*, если $f(x) < +\infty$ для каждого $x \in A^+$.

Говорят, что *след f полуконечен*, если для каждого $x \in A^+$ $f(x)$ — верхняя грань чисел $f(y)$ для таких $y \in A^+$, что $y \leqslant x$ и $f(y) < +\infty$. [В определении полуконечных следов, очевидно, достаточно рассматривать такие x, что $f(x) = +\infty$.]

Нас будут интересовать почти исключительно полунепрерывные снизу следы на A^+.

Если A — алгебра фон Неймана, то мы получаем уже известные определения (см. A28).

6.1.2. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, f — след на A^+.*

(i) *Пусть $\mathfrak{N}$ — множество таких $x \in A$, что $f(xx^*) < +\infty$. Тогда $\mathfrak{N}$ — самосопряженный двусторонний идеал в A; двусто-*

ронний идеал $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^2$ *есть множество линейных комбинаций элементов из* $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M} \cap A^+$, *и* $\mathfrak{M}^+$ — *множество таких* $x \in A^+$, *что* $f(x) < +\infty$. *Идеалы* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$ *имеют одно и то же замыкание в* A.

(ii) *На* $\mathfrak{M}$ *существует единственная линейная форма* f', *совпадающая с* f *на* $\mathfrak{M}^+$.

(iii) *Имеем*

$f'(x^*) = \overline{f'(x)}$ *для каждого* $x \in \mathfrak{M}$;
$f'(zx) = f'(xz)$ *для любых* $x \in \mathfrak{M}$, $z \in A$;
$f'(uv) = f'(vu)$ *для любых* $u, v \in \mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{P}$ — множество таких $x \in A^+$, что $f(x) < +\infty$. Применяя к $\mathfrak{P}$ лемму 4.5.1, получаем (i). Утверждение (ii) следует сразу из (i). Форма f' вещественна на эрмитовых элементах $\mathfrak{M}$, поэтому $f'(x^*) = \overline{f'(x)}$ для каждого $x \in \mathfrak{M}$. Если $u \in \mathfrak{N}$, имеем $uu^* \in \mathfrak{M}$ и $u^*u \in \mathfrak{M}$, поэтому

$$f'(uu^*) = f(uu^*) = f(u^*u) = f'(u^*u),$$

применяя это к $u+v$, $u-v$, $u+iv$, $u-iv$, получаем, что $f'(uv^*) = f'(v^*u)$ для $u, v \in \mathfrak{N}$. Наконец, пусть $z \in A$ и $x \in \mathfrak{M}$. Имеем $x = \sum u_j v_j$ с $u_j, v_j \in \mathfrak{N}$, поэтому

$$f'\left(z\left(\sum u_j v_j\right)\right) = \sum f'((zu_j)v_j) = \sum f'(v_j(zu_j)) =$$
$$= \sum f'((v_j z)u_j) = \sum f'(u_j(v_j z)) = f'\left(\left(\sum u_j v_j\right)z\right).$$

Отсюда следует предложение.

Идеал $\mathfrak{M}$ будем коротко называть *идеалом определения* f и обозначать $\mathfrak{M}_f$.

6.1.3. Если $\overline{\mathfrak{M}_f} = A$ и если f полунепрерывен снизу, то f полуконечен. Действительно, пусть (u_λ) — аппроксимативная единица A, фильтрованная по возрастанию, образованная элементами $\mathfrak{M}_f$ (1.7.2). Пусть $x \in A^+$, тогда элементы $x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}$ образуют фильтрованное по возрастанию семейство элементов A^+, мажорируемых x (1.6.8) и стремящихся к x; поэтому

$$\underline{\lim}\, f(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \geqslant f(x),$$

следовательно, $f(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \to f(x)$, так как $f(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \leqslant f(x)$. Однако

$$x^{1/2}u_\lambda x^{1/2} \in \mathfrak{M}_f^+, \quad \text{поэтому} \quad f(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) < +\infty,$$

откуда следует утверждение.

6.1.4. Пусть A и B — две C^*-алгебры, ρ — отображение A в B, f — след на B^+. Тогда $(f \circ \rho) \mid A^+$ есть след на A^+. Если f полунепрерывен снизу, то $(f \circ \rho) \mid A^+$ полунепрерывен снизу.

Если f конечен, $(f \circ \rho) \mid A^+$ конечен. Если f полуконечен, то $(f \circ \rho) \mid A^+$, вообще говоря, не полуконечен. Однако если A—замкнутый двусторонний идеал в B и если ρ — каноническое вложение A в B, то $(f \circ \rho) \mid A^+ = f \mid A^+$ полуконечен, так как если $x \in A^+$ и если $y \in B^+$ мажорируется x, то $y \in A^+$, что можно увидеть, рассматривая каноническое отображение B на B/A.

6.1.5. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, π — представление A, $\mathfrak{U}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$, t — нормальный след на $\mathfrak{U}^+$, $\mathfrak{M}$ — такой самосопряженный двусторонний идеал A, что $\pi(\mathfrak{M})$ содержится в $\mathfrak{M}_t$ и сильно всюду плотно в $\mathfrak{U}$. Тогда $f = (t \circ \pi) \mid A^+$ полуконечен, полунепрерывен снизу, и если (u_λ)— фильтрованная по возрастанию аппроксимативная единица в $\mathfrak{M}$, то $f(x) = \lim f(x^{1/2} u_\lambda x^{1/2})$ для каждого $x \in A^+$.*

Так как $\pi(\mathfrak{M})$ сильно всюду плотно в $\mathfrak{U}$, то $\pi \mid \overline{\mathfrak{M}}$ невырождено, поэтому $\pi(u_\lambda)$ стремится сильно к 1 (2.2.10). Пусть $x \in A^+$. Элементы $\pi(x)^{1/2} \pi(u_\lambda) \pi(x)^{1/2}$ образуют фильтрованное по возрастанию семейство в $\mathfrak{U}^+$, которое сильно стремится к $\pi(x)$. Так как t нормален, то

$$t\left(\pi(x)^{1/2} \pi(u_\lambda) \pi(x)^{1/2}\right) \to t(\pi(x)),$$

иначе говоря, $f(x^{1/2} u_\lambda x^{1/2}) \to f(x)$. Можно взять u_λ в $\mathfrak{M}$ (1.7.2), тогда

$$\pi(x^{1/2} u_\lambda x^{1/2}) \in \pi(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}_t, \quad \text{поэтому} \quad f(x^{1/2} u_\lambda x^{1/2}) < +\infty,$$

и f полуконечен. Так как t полунепрерывен снизу в слабой топологии и тем более в топологии, индуцированной нормой, то f полунепрерывен снизу.

Библиография: [49].

6.2. Бигледы.

6.2.1. Определение. *Пусть A — C^*-алгебра. Назовем бигледом на A функцию $s \colon \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \to \mathbf{C}$, где $\mathfrak{N}$ — самосопряженный двусторонний идеал A, удовлетворяющую следующим аксиомам:*

(i) *$s(x, y)$ линеен по x, антилинеен по y, $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ и $s(x, x) \geqslant 0$ (иначе говоря, s есть полуторалинейная положительная эрмитова форма);*

(ii) *$s(y, x) = s(x^*, y^*)$ для $x, y \in \mathfrak{N}$;*

(iii) *$s(zx, y) = s(x, z^* y)$ для $x, y \in \mathfrak{N}$, $z \in A$;*

(iv) *для каждого $z \in A$ отображение $x \to zx$ из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$ непрерывно в предгильбертовой структуре, определяемой s;*

(v) *элементы xy (где $x \in \mathfrak{N}$, $y \in \mathfrak{N}$) всюду плотны в $\mathfrak{N}$ по отношению к предгильбертовой структуре, определяемой s.*

Идеал $\mathfrak{N}$ называется *идеалом определения* s и обозначается $\mathfrak{N}_s$.

Легко вывести из аксиом, что $s(xz, y) = s(x, yz^*)$ для $x, y \in \mathfrak{M}$, $z \in A$ и что, для каждого $z \in A$, отображение $x \to xz$ из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$ непрерывно в предгильбертовой структуре, определяемой s.

6.2.2. Пусть N_s — множество таких $x \in \mathfrak{N}_s$, что $s(x, x) = 0$. Это векторное подпространство $\mathfrak{N}_s$ вследствие (i), самосопряженное вследствие (ii); это — левый идеал A вследствие (iv), поэтому двусторонний идеал A. Пусть Λ_s — каноническое отображение $\mathfrak{N}_s$ на $\mathfrak{N}_s/N_s$. Форма s определяет при переходе к фактору структуру отделимого предгильбертова пространства на $\mathfrak{N}_s/N_s$; обозначим через H_s гильбертово пространство — пополнение $\mathfrak{N}_s/N_s$ и через $(\,|\,)$ скалярное произведение в H_s. Вследствие (ii) отображение $x \to x^*$ определяет при переходе к фактору изометрическое отображение $\mathfrak{N}_s/N_s$ на себя; продолжая его по непрерывности, получаем отображение J_s: $H_s \to H_s$, полулинейное и такое, что $J_s^2 = 1$ и $(J_s a \mid J_s b) = (b \mid a)$ для любых $a, b \in H_s$. Пусть $z \in A$. Отображения $x \to zx$, $x \to xz$ в $\mathfrak{N}_s$ переносятся на фактор $\mathfrak{N}_s/N_s$ и продолжаются по непрерывности до непрерывных линейных операторов $\lambda_s(z)$, $\rho_s(z)$ в H_s. Легко видеть, что λ_s есть представление A в H_s; например, вследствие (iii), для $x, y \in \mathfrak{N}_s$ имеем

$$(\lambda_s(z^*)\Lambda_s x \mid \Lambda_s y) = (\Lambda_s(z^* x) \mid \Lambda_s y) = \\ = s(z^* x, y) = s(x, zy) = (\Lambda_s x \mid \Lambda_s(zy)) = \\ = (\Lambda_s x \mid \lambda_s(z)\Lambda_s y) = (\lambda_s(z)^* \Lambda_s x \mid \Lambda_s y),$$

откуда $\lambda_s(z^*) = \lambda_s(z)^*$. Точно так же ρ есть представление в H_s C^*-алгебры A^0, противоположной A. Представления λ_s, ρ_s невырождены в силу (v). Имеем для $x \in \mathfrak{N}_s$ и $z \in A$

$$\rho_s(z^*)\Lambda_s x = \Lambda_s(xz^*) = \Lambda_s(zx^*)^* = J_s\lambda_s(z) J_s\Lambda_s(x),$$

откуда

$$\rho_s(z^*) = J_s\lambda_s(z) J_s.$$

Так как J_s есть изоморфизм H_s на сопряженное гильбертово пространство, то представления $\overline{\lambda_s^0}$ (2.2.8) и ρ_s эквивалентны.

6.2.3. Из аксиом (i) — (v) вытекает, что инволютивная алгебра $\mathfrak{N}_s/N_s$, снабженная скалярным произведением $(\,|\,)$, есть гильбертова алгебра (A54). Алгебры фон Неймана $\mathfrak{U}_s$, $\mathfrak{W}_s$, связанные слева и справа с $\mathfrak{N}_s/N_s$, суть алгебры фон Неймана, порожденные $\lambda_s(\mathfrak{N}_s)$, $\rho_s(\mathfrak{N}_s)$; каждая из них есть коммутант другой (A54). Алгебры фон Неймана, порожденные $\lambda_s(A)$ и $\rho_s(A)$, apriori больше предыдущих; но так как очевидно, что они коммутируют, то они в действительности равны соответственно $\mathfrak{U}_s$, $\mathfrak{W}_s$.

6.2.4. Гильбертова алгебра $\mathfrak{N}_s/N_s$ определяет на $\mathfrak{U}_s$ естественный след, который обозначается t_s (A60). Этот след нормален. Для каждого $x \in \mathfrak{N}_s$ имеем $t_s(\lambda_s(x)\lambda_s(x)^*) = (\Lambda_s x \mid \Lambda_s x)$ (A60), поэтому

$$t_s(\lambda_s(xx^*)) = s(x, x) < +\infty. \tag{1}$$

Если обозначить через t'_s линейное продолжение $t_s \mid \mathfrak{M}^+_{t_s}$ на $\mathfrak{M}_{t_s}$, то для всех $x, y \in \mathfrak{N}_s$

$$t'_s(\lambda_s(x)\lambda_s(y)^*) = (\Lambda_s x \mid \Lambda_s y) \qquad \text{(A60)},$$

поэтому

$$t'_s(\lambda_s(xy^*)) = s(x, y). \tag{2}$$

Можно так же определить след на $\mathfrak{W}^+_s$ и получить тогда t_s с помощью J_s, но нам это не понадобится.

Библиография: [21], [32].

6.3. Максимальные биследы.

6.3.1. Лемма. *Сохраним предыдущие обозначения. Пусть $\mathfrak{Q} = \mathfrak{M}_{t_s}$, $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^{1/2}$ (A9). Если для $x, y \in \lambda_s^{-1}(\mathfrak{Q}')$ положим $\tilde{s}(x, y) = t'_s(\lambda_s(xy^*))$, то $\tilde{s}$ есть бислед, продолжающий s, и предгильбертово пространство $\mathfrak{N}_s$ всюду плотно в предгильбертовом пространстве $\mathfrak{N}_{\tilde{s}}$.*

Если $x \in \mathfrak{N}_s$, имеем $\lambda_s(xx^*) \in \mathfrak{M}_{t_s}$, поэтому $\lambda_s(x) \in \mathfrak{Q}'$ и $x \in \lambda_s^{-1}(\mathfrak{Q}')$. Это соотношение и формула (2) 6.2.4 доказывают, что $\tilde{s}$ продолжает s. Так как $\mathfrak{Q}'$ — совершенная гильбертова алгебра, соответствующая гильбертовой алгебре $\lambda_s(\mathfrak{N}_s)$ [(A60) и (A61)], то образ $\lambda_s^{-1}(\mathfrak{Q}')$ при отображении λ_s есть гильбертова алгебра, в которой $\lambda_s(\mathfrak{N}_s)$ всюду плотна. Отсюда следует, что $\tilde{s}$ — бислед и что предгильбертово пространство $\mathfrak{N}_s$ всюду плотно в предгильбертовом пространстве $\mathfrak{N}_{\tilde{s}}$.

6.3.2. Лемма. *Пусть s' — бислед, продолжающий s. Имеем*

$$\mathfrak{N}_s \subset \mathfrak{N}_{s'} \subset \mathfrak{N}_{\tilde{s}'} \subset \mathfrak{N}_{\tilde{s}} \quad \text{и} \quad \tilde{s}'(x, x) \geqslant \tilde{s}(x, x)$$

для каждого $x \in \mathfrak{N}_{\tilde{s}'}$.

Имеем, очевидно, $N_s = N_{s'} \cap \mathfrak{N}_s$, откуда получаем линейное отображение $\mathfrak{N}_s/N_s \to \mathfrak{N}_{s'}/N_{s'}$, которое изометрично. Это отображение продолжается до линейного изометричного отображения $T\colon H_s \to H_{s'}$. Пусть $K = T(H_s)$. Так как $\mathfrak{N}_s$ — двусторонний идеал A, то K инвариантно относительно операторов $\lambda_{s'}(z)$, $\rho_{s'}(z)$ для любого $z \in A$, поэтому ортогональный проектор $H_{s'}$ на K принадлежит центру $\mathfrak{U}_{s'}$. С другой стороны, если отождествить H_s с K при помощи T, то $\lambda_{s'}(z)$ индуцирует $\lambda_s(z)$ в H_s.

Пусть $B' \subset H_{s'}$ — гильбертова алгебра элементов, ограниченных по отношению к гильбертовой алгебре $\mathfrak{N}_{s'}/N_{s'}$; пусть B — ортогональная проекция B' на H_s. Тогда алгебра фон Неймана, связанная слева с B, есть алгебра фон Неймана, индуцированная $\mathfrak{U}_s$ в H_s, и естественный след, определяемый B, есть след, индуцированный $t_{s'}$ (A65). Но $\mathfrak{N}_s/N_s$ содержится в B' и всюду плотен в H_s, поэтому содержится в B и всюду плотен в B; $\mathfrak{N}_s/N_s$ определяет те же алгебры фон Неймана, что и B, и тот же естественный след. Иначе говоря, $\mathfrak{U}_s$ и t_s суть соответственно алгебра фон Неймана, индуцируемая $\mathfrak{U}_{s'}$ в H_s, и след, индуцированный $t_{s'}$ на $\mathfrak{U}_s^+$. Пусть тогда $x \in \mathfrak{N}_{\tilde{s}'}$. Имеем, согласно предыдущему,

$$t_s(\lambda_s(xx^*)) \leqslant t_{s'}(\lambda_{s'}(xx^*)) < +\infty,$$

поэтому $x \in \mathfrak{N}_{\tilde{s}}$ и $\tilde{s}(x, x) \leqslant \tilde{s}'(x, x)$.

6.3.3. Определение. *Бислед называется максимальным, если не существует никакого бислед, который его строго продолжает.*

6.3.4. Предложение. *Пусть s — бислед.*

(i) *Для того чтобы s был максимален, необходимо и достаточно, чтобы $s = \tilde{s}$;*

(ii) *$\tilde{s}$ — максимален.*

Если s' — бислед, продолжающий $\tilde{s}$, то s' продолжает s, и $\mathfrak{N}_{s'} \subset \mathfrak{N}_{\tilde{s}}$ (6.3.2), поэтому $s' = \tilde{s}$, следовательно, $\tilde{s}$ максимален. В частности, если $s = \tilde{s}$, то s максимален. Обратное очевидно.

6.3.5. Определение. *Пусть s — бислед. Говорят, что $\tilde{s}$ — каноническое максимальное продолжение s.*

Вообще говоря, s обладает другими максимальными продолжениями, кроме $\tilde{s}$: достаточно рассмотреть случай, когда A есть произведение $\overline{\mathfrak{N}_s}$ и другой C^*-алгебры.

6.3.6. Пусть s — бислед. Снабдим $\mathfrak{N}_s$ нормой, индуцированной нормой в A. Отображение $x \to \Lambda_s x$ из $\mathfrak{N}_s$ в H_s, вообще говоря, не непрерывно. Но отображение

$$(x, y) \to \Lambda_s(xy) = \lambda_s(x)\Lambda_s(y) = \rho_s(y)\Lambda_s x$$

из $\mathfrak{N}_s \times \mathfrak{N}_s$ в H_s раздельно непрерывно, так как представления λ_s, ρ_s C^*-алгебры A непрерывны. Отсюда и из аксиомы (v) о бислeдах следует, что если $E \subset \mathfrak{N}_s$ всюду плотно в $\mathfrak{N}_s$ в смысле нормы в A, то $\Lambda_s(xy)$ $(x, y \in E)$ всюду плотны в H_s. В частности, если A сепарабельно, то H_s сепарабельно.

Библиография: [21], [32].

6.4. Соотношения между следами и бислeдами.

6.4.1. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, f — след на A^+, полунепрерывный снизу. Введем обозначения 6.1.2. Для $x, y \in \mathfrak{M}$ положим $s(x, y) = f'(xy^*) = f'(y^*x)$. Тогда s — бислед в A.*

Ясно, что s полуторалинеен. Для x, $y \in \mathfrak{N}$ и $z \in A$ имеем, принимая во внимание 6.1.2 (iii),

$$s(y, x) = f'(yx^*) = \overline{f'(xy^*)} = \overline{s(x, y)},$$
$$s(x, x) = f'(xx^*) \geqslant 0,$$
$$s(x^*, y^*) = f'(x^*y) = s(y, x),$$
$$s(zx, y) = f'(y^*(zx)) = f'((z^*y)^* x) = s(x, z^*y),$$
$$s(zx, zx) = f'(x^*z^*zx) = f(x^*z^*zx) \leqslant \| z^*z \| f(x^*x) = \| z^*z \| s(x, x).$$

Следовательно, аксиомы (i)—(iv) проверены. Пусть теперь (u_λ) — фильтрованная по возрастанию аппроксимативная единица в C^*-алгебре $\overline{\mathfrak{N}}$. Тогда для любого $x \in \mathfrak{N}$ имеем

$$s(u_\lambda x - x, u_\lambda x - x) = s(u_\lambda x, u_\lambda x) - s(u_\lambda x, x) - \\ - s(x, u_\lambda x) + s(x, x) \leqslant \| u_\lambda^* u_\lambda \| s(x, x) - f'(x^*u_\lambda x) - \\ - f'(x^*u_\lambda x) + s(x, x) \leqslant 2[f(x^*x) - f(x^*u_\lambda x)].$$

Однако $x^*u_\lambda x$ образуют фильтрованное по возрастанию семейство элементов A^+, стремящееся к x^*x, поэтому $f(x^*u_\lambda x) \to f(x^*x)$, так как f полунепрерывен снизу. Итак, x есть предел $u_\lambda x$ в предгильбертовой структуре, определенной s. Но при этом можно взять u_λ в $\mathfrak{N}$ вследствие 1.7.2.

Говорят, что s есть *бислед, связанный с* f.

6.4.2. Теперь пусть A — C^*-алгебра, s — бислед в A. Для каждого $x \in A^+$ положим $f(x) = t_s(\lambda_s(x))$. Имеем $\lambda_s(\mathfrak{N}_s^2) \subset \mathfrak{M}_{t_s}$ и $\lambda_s(\mathfrak{N}_s^2)$ сильно всюду плотно в $\mathfrak{U}_s$. Поэтому f — полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+ (6.1.5), который называется *связанным с* s.

6.4.3. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, s — бислед на A, f — связанный с ним след. Бислед s', связанный с f, есть каноническое максимальное продолжение s.*

Пусть $\mathfrak{Q} = \mathfrak{M}_{t_s}$ и $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^{1/2}$. Для каждого $x \in A$ имеем

$$x \in \mathfrak{N}_{s'} \Leftrightarrow f(xx^*) < +\infty \Leftrightarrow t_s(\lambda_s(xx^*)) < +\infty \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_s(x) \in \mathfrak{Q}' \Leftrightarrow x \in \lambda_s^{-1}(\mathfrak{Q}').$$

Поэтому $\mathfrak{N}_{s'} = \mathfrak{N}_{\tilde{s}}$ и для $x \in \mathfrak{N}_{s'}$

$$s'(x, x) = f(xx^*) = t_s(\lambda_s(xx^*)) = \tilde{s}(x, x).$$

6.4.4. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, f — след на A^+, полунепрерывный снизу и полуконечный, s — бислед, связанный с f. Тогда s максимален и след, связанный с s, есть f.*

Пусть f' — след, связанный с s, и s' — бислед, связанный с f'. Вследствие 6.4.3 s' есть каноническое максимальное продолжение s. Для $y \in \mathfrak{N}_s$ имеем

$$f'(yy^*) = s'(y, y) = s(y, y) = f(yy^*).$$

Следовательно, если $x \in A^+$ таков, что $f(x) < +\infty$, то $f'(x) = f(x)$. Пусть $x \in A^+$ таков, что $f(x) = +\infty$. Для каждого конечного вещественного числа α существует такой $x_1 \in A^+$, что $x_1 \leqslant x$ и $\alpha \leqslant f(x_1) < +\infty$, так как f полуконечен. Тогда

$$f'(x) \geqslant f'(x_1) = f(x_1) \geqslant \alpha, \quad \text{поэтому} \quad f'(x) = +\infty.$$

Это показывает, что $f' = f$. Поэтому $s' = s$, так что s максимален.

6.4.5. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра. Пусть E — множество полунепрерывных снизу полуконечных следов на A^+. Пусть E' — множество максимальных биследов на A. Отображения: след $\to$ связанный с ним бислед, бислед $\to$ связанный с ним след, определяют взаимно обратные биективные отображения $E \to E'$, $E' \to E$.*

Это следует из 6.4.1, 6.4.3, 6.4.4.

Пусть f — полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+, s — связанный с ним максимальный бислед. Положим $N_s = N_f$, $\mathfrak{N}_s = \mathfrak{N}_f$, ..., $t_s = t_f$ и, обратно, $\mathfrak{M}_f = \mathfrak{M}_s$. Напомним, что $\overline{\mathfrak{M}}_f = \overline{\mathfrak{N}}_f$ [6.1.2 (i)].

Библиография: [49].

6.5. Сумма двух следов.

6.5.1. Пусть A — C^*-алгебра, f и f' — два следа на A^+. Ясно, что $f + f'$ есть след. Если f и f' полунепрерывны снизу, то $f + f'$ полунепрерывен снизу. Предположим, что f и f' полуконечны, и покажем, что $f + f'$ полуконечен. Пусть $x \in A^+$ таков, что $(f + f')(x) = +\infty$, и пусть α — конечное вещественное число; пусть, например, $f(x) = +\infty$; существует такой $y \in A^+$, что $y \leqslant x$ и $\alpha \leqslant f(y) < +\infty$; если $f'(y) < +\infty$, то $\alpha \leqslant (f + f')(y) < +\infty$; если $f'(y) = +\infty$, то существует такой $z \in A^+$, что $z \leqslant y$ и $\alpha \leqslant f'(z) < +\infty$, откуда $z \leqslant x$ и $\alpha \leqslant (f + f')(z) < +\infty$; в обоих случаях видим, что $f + f'$ полуконечен.

6.5.2. Множество следов на A^+, очевидно, упорядочено отношением $f \leqslant f'$, т. е. отношением

$$f(x) \leqslant f'(x) \quad \text{для каждого} \quad x \in A^+.$$

Предположим, что f и f' полунепрерывны снизу и полуконечны, и пусть s, s' — связанные с ними биследы; тогда отношение $f \leqslant f'$ равносильно отношению

$$\mathfrak{N}_{s'} \subset \mathfrak{N}_s \quad \text{и} \quad s(x, x) \leqslant s'(x, x) \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathfrak{N}_{s'}.$$

6.5.3. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, s и s' — два максимальных биследа в A. Предположим, что существует инволютивная подалгебра B в A, всюду плотная в A, содержащаяся в $\mathfrak{N}_s$ и $\mathfrak{N}_{s'}$ и такая, что s и s' совпадают на $B \times B$. Тогда $s = s'$.*

Вследствие 6.3.6 B всюду плотно в $\mathfrak{N}_s$ (соотв. $\mathfrak{N}_{s'}$) в предгильбертовой структуре $\mathfrak{N}_s$ (соотв. $\mathfrak{N}_{s'}$). Так как s и s' совпадают на $B \times B$, то существует изоморфизм Θ из H_s на $H_{s'}$, который для каждого $x \in B$ переводит $\Lambda_s x$ в $\Lambda_{s'} x$. Для $x, y \in B$ имеем

$$\Theta\lambda_s(x)\Lambda_s y = \Theta\Lambda_s(xy) = \Lambda_{s'}(xy) = \lambda_{s'}(x)\Lambda_{s'}y = \lambda_{s'}(x)\Theta\Lambda_s y;$$

поэтому Θ преобразует $\lambda_s(x)$ в $\lambda_{s'}(x)$ для каждого $x \in B$ и, вследствие этого, для каждого $x \in A$. С другой стороны, так как Θ определяет изоморфизм гильбертовой алгебры $\Lambda_s(B)$ (всюду плотной в $\mathfrak{N}_s/N_s$) на гильбертову алгебру $\Lambda_{s'}(B)$ (всюду плотную в $\mathfrak{N}_{s'}/N_{s'}$), то Θ переводит $\mathfrak{U}_s$ в $\mathfrak{U}_{s'}$ и t_s в $t_{s'}$. Пусть f, f' — следы, связанные с s, s'. Для всех $s \in A^+$ имеем

$$f(x) = t_s(\lambda_s(x)) = t_{s'}(\lambda_{s'}(x)) = f'(x).$$

Так как s и s' максимальны, то $s = s'$ (6.4.3).

6.5.4. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, f и f' — два полунепрерывных снизу полуконечных следа на A^+, s и s' — связанные с ними биследы. Предположим, что $f' \leqslant f$ на $(\overline{\mathfrak{N}}_s)^+$. Тогда:*

(i) *Существует и притом единственный $T \in \mathfrak{B}(H_s)$ такой, что $s'(x, y) = (T\Lambda_s x \mid \Lambda_s y)$ для $x, y \in \mathfrak{N}_s$.*

(ii) *Имеем $0 \leqslant T \leqslant 1$ и $T \in \mathfrak{U}_s \cap \mathfrak{W}_s$.*

(iii) *Если положим $f_1(x) = t_s(T\lambda_s(x))$ для каждого $x \in A^+$, то f_1 есть полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+, мажорируемый f' и совпадающий с f' на $(\overline{\mathfrak{N}}_s)^+$.*

Для $x \in \mathfrak{N}_s$ имеем $s'(x, x) \leqslant s(x, x)$; поэтому для $x, y \in \mathfrak{N}_s$ число $s'(x, y)$ зависит только от $\Lambda_s x$ и $\Lambda_s y$ и есть непрерывная функция $\Lambda_s x$, $\Lambda_s y$ в предгильбертовой структуре H_s. Отсюда следует существование оператора $T \in \mathfrak{B}(H_s)$, удовлетворяющего (i). Единственность T следует из того, что $\Lambda_s(\mathfrak{N}_s)$ всюду плотно в H_s. Имеем $0 \leqslant s'(x, x) \leqslant s(x, x)$ для каждого $x \in \mathfrak{N}_s$, поэтому

$$0 \leqslant (T\Lambda_s x \mid \Lambda_s y) \leqslant (\Lambda_s x \mid \Lambda_s y), \quad \text{следовательно} \quad 0 \leqslant T \leqslant 1.$$

Если $z \in A$, $x \in \mathfrak{N}_s$, $y \in \mathfrak{N}_s$, то

$$(T\lambda_s(z)\Lambda_s x \mid \Lambda_s y) = (T\Lambda_s(zx) \mid \Lambda_s y) = s'(zx, y) = s'(x, z^*y) =$$
$$= (T\Lambda_s x \mid \Lambda_s(z^*y)) = (T\Lambda_s x \mid \lambda_s(z^*)\Lambda_s y) = (\lambda_s(z)T\Lambda_s x\Lambda_s y),$$

поэтому $T\lambda_s(z) = \lambda_s(z)T$.

Аналогично можно видеть, что $T\rho_s(z) = \rho_s(z)T$, откуда $T \in \mathfrak{U}_s \cap \mathfrak{B}_s$.

Функция $S \to t_s(TS)$ на $\mathfrak{U}_s^+$ есть нормальный след t; имеем $\lambda_s(\mathfrak{M}_s) \subset \mathfrak{M}_t$ [так как при $x \in \mathfrak{M}_s^+$ имеем $t_s(\lambda_s(x)) < +\infty$, поэтому $t(\lambda_s(x)) \leqslant \| T \| t_s(\lambda_s(x)) < +\infty$], и $\lambda_s(\mathfrak{M}_s)$ сильно всюду плотно в $\mathfrak{U}_s$; следовательно, f_1 суть полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+ (6.1.5). Для $x \in \mathfrak{N}_s$ имеем $f_1(xx^*) = t_s(T\lambda_s(x)\lambda_s(x^*))$; так как $T \in \mathfrak{U}_s$, то $T\Lambda_s x$ — ограниченный элемент по отношению к гильбертовой алгебре $\Lambda_s(\mathfrak{N}_s)$ (A59) и

$$t_s(T\lambda_s(x)\lambda_s(x^*)) = (T\Lambda_s x \mid \Lambda_s x) = s'(x, x) = f'(xx^*).$$

Тогда $f_1 | (\overline{\mathfrak{N}}_s)^+$ и $f' | (\overline{\mathfrak{N}}_s)^+$ суть полунепрерывные снизу полуконечные следы на $(\overline{\mathfrak{N}}_s)^+$ (6.1.4), конечные и совпадающие на $(\mathfrak{N}_s^2)^+$ вследствие предыдущего, поэтому равные (6.5.3). С другой стороны, пусть (u_λ) — фильтрованная по возрастанию аппроксимативная единица в $\overline{\mathfrak{N}}_s$; вследствие 6.1.5 имеем для каждого $x \in A^+$

$$f_1(x) = \lim f_1(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) = \lim f'(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \leqslant f'(x),$$

так как $x^{1/2}u_\lambda x^{1/2} \in (\overline{\mathfrak{N}}_s)^+$ и $x^{1/2}u_\lambda x^{1/2} \leqslant x$.

6.5.5. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, f и f' — два полунепрерывных снизу полуконечных следа на A^+. Для того чтобы $f' \leqslant f$, необходимо и достаточно, чтобы существовал полунепрерывный снизу полуконечный след f'' на A^+ такой, что $f = f' + f''$.*

Условие, очевидно, достаточно. Предположим, что $f' \leqslant f$. Используем лемму 6.5.4 и ее обозначения. Положим $f''(x) = t_s((1 - T)\lambda_s(x))$ для каждого $x \in A^+$. Вследствие 6.1.5 f'' есть полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+. Для каждого $x \in A^+$ имеем

$$f_1(x) + f''(x) = t_s(T\lambda_s(x)) + t_s((1 - T)\lambda_s(x)) = t_s(\lambda_s(x)) = f(x).$$

Учитывая 6.5.4, видим, что $f' + f''$ совпадает на $(\overline{\mathfrak{N}}_s)^+$ с f. Если $x \in A^+$ и $x \notin (\overline{\mathfrak{N}}_s)^+$, имеем

$$f'(x) + f''(x) \geqslant f_1(x) + f''(x) = f(x) = +\infty;$$

Итак,

$$f'(x) + f''(x) = f(x).$$

6.5.6. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, f и f' — два полунепрерывных снизу следа на A^+ таких, что $f' \leqslant f$. Предположим, что $\mathfrak{M}_f$ всюду плотно в A, так что f и f' полу-*

конечны (6.1.3). *Существует полунепрерывный снизу след* f'' *на* A^+ *и притом единственный, такой, что* $f = f' + f''$.

Существование f'' следует из 6.5.5. Пусть $f = f' + f''$, $f = f' + f''_1$ — два разложения f. Для $x \in \mathfrak{M}_f^+$ числа $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f''_1(x)$ конечны, поэтому $f''(x) = f''_1(x)$. Поэтому $f'' = f''_1$ вследствие 6.5.3.

6.5.7. Единственность f'' не имеет места, если $\overline{\mathfrak{M}}_f \neq A$, даже если f полуконечен (6.9.3).

Библиография: [21], [49].

6.6. Следы и представления.

6.6.1. Определение. *Пусть* A — C^*-*алгебра. Назовем представлением со следом* C^*-*алгебры* A *пару* (π, t), *обладающую следующими свойствами*:

(i) π — *невырожденное представление* A *в гильбертовом пространстве*;

(ii) t — *точный нормальный след на* $\mathfrak{U}^+$ [$\mathfrak{U}$ *обозначает алгебру фон Неймана, порожденную* $\pi(A)$];

(iii) $\pi(A) \cap \mathfrak{N}_t$ *порождает алгебру фон Неймана* $\mathfrak{U}$.

Из этих условий следует полуконечность t, поэтому и полуконечность $\mathfrak{U}$. Таким образом, π есть гильбертова сумма представления типа I и представления типа II.

6.6.2. Пусть (π, t), (π', t') — два представления A со следом, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$ — алгебры фон Неймана, порожденные $\pi(A)$ и $\pi'(A)$. Говорят, что (π, t) и (π', t') квазиэквивалентны (соотв. эквивалентны), если существует изоморфизм (соотв. пространственный изоморфизм) $\mathfrak{U}$ на $\mathfrak{U}'$, который преобразует π в π' и t в t'. Тогда π и π' квазиэквивалентны (соотв. эквивалентны).

6.6.3. Пусть A — C^*-алгебра, (π, t) — представление A со следом. Тогда $f = (t \circ \pi) \mid A^+$ — полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+ (6.1.5). Мы скажем, что f и соответствующий максимальный бислед связаны с (π, t). Если заменить (π, t) на квазиэквивалентное представление со следом, то f не изменится.

6.6.4. Обратно, пусть f — полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+, s — соответствующий бислед. Тогда (λ_s, t_s) — представление A со следом, которое будет называться *связанным с* f, или с s. Если λ_s — типа I, или типа II, ..., то говорят, что f и s — типа I, или типа II, ...

6.6.5. Предложение. (i) *Пусть* f — *полунепрерывный снизу полуконечный след на* A^+, (π, t) — *представление со следом, связанное с* f. *Тогда след, связанный с* (π, t), *есть* f.

(ii) *Пусть* (π, t) — *представление* A *со следом,* f — *след, связанный с* (π, t). *Тогда представление со следом, связанное с* f, *квазиэквивалентно* (π, t).

Пусть f, π, t — такие же, как в (i), s — бислед, связанный с f, f' — след, связанный с (π, t). Тогда $f' = (t_s \circ \lambda_s) \mid A^+$, следовательно, $f' = f$ вследствие 6.4.4.

Пусть (π, t) — представление A со следом, $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$. Напомним следующие факты, не имеющие отношения к π: $\mathfrak{N}_t$, снабженное скалярным произведением $(S, T) \to t'(ST^*)$, есть совершенная гильбертова алгебра (через t' обозначено линейное продолжение $t \mid \mathfrak{M}_t^+$ на $\mathfrak{M}_t$); λ_t — изоморфизм алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$ на алгебру фон Неймана $\mathfrak{U}_t$ в H_t; λ_t преобразует t в естественный след Θ, определенный на $\mathfrak{U}_t^+$ гильбертовой алгеброй $\mathfrak{N}_t$ (A61). Пусть теперь s — бислед в A, связанный с (π, t); имеем $\mathfrak{N}_s = \pi^{-1}(\mathfrak{N}_t)$ и для $x, y \in \mathfrak{N}_s$

$$s(x, y) = t(\pi(xy^*)).$$

Поэтому $\pi \mid \mathfrak{N}_s$ определяет, при переходе к фактору, изоморфизм Φ гильбертовой алгебры $\mathfrak{N}_s / N_s$ на гильбертову алгебру $\pi(\mathfrak{N}_s) \subset \mathfrak{N}_t$. Так как $\pi(\mathfrak{N}_s)$ порождает алгебру фон Неймана $\mathfrak{A}$, по определению представлений со следом, то $\lambda_t(\pi(\mathfrak{N}_s))$ порождает алгебру фон Неймана $\mathfrak{U}_t$, поэтому (A55), $\pi(\mathfrak{N}_s)$ всюду плотно в совершенной гильбертовой алгебре $\mathfrak{N}_t$. Поэтому Φ продолжается до изоморфизма (также обозначаемого Φ) H_s на H_t. Легко видеть, что для каждого $z \in A$ Φ преобразует $\lambda_s(z)$ в $\lambda_t(\pi(z))$. С другой стороны, Φ преобразует t_s в Θ. Итак, (λ_s, t_s) есть представление со следом, связанное с s (или с f). Понятно, что оно эквивалентно $(\lambda_t \circ \pi, \Theta)$. Так как λ_t — изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{U}_t$, который переводит t в Θ, то (λ_s, t_s) квазиэквивалентно (π, t).

6.6.6. Следствие. *Существует каноническое биективное отображение множества полунепрерывных снизу полуконечных следов на A^+ на множество классов квазиэквивалентности представлений A со следом.*

6.6.7. На самом деле мы интересуемся представлениями алгебры A, а не представлениями со следом. Введем поэтому следующее определение:

Определение. *Пусть A — C^*-алгебра, π — представление A, $\mathfrak{U}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$. Говорят, что π допускает след, если существует такой след t на $\mathfrak{U}^+$, что (π, t) есть представление со следом.*

Представление, квазиэквивалентное представлению, допускающему след, допускает след.

Мы сейчас изучим случай, в котором почти нет разницы между понятиями представления со следом и представления, допускающего след.

Библиография: [21], [32], [49].

6.7. Характеры и фактор-представления, допускающие след.

6.7.1. Определение. *Пусть A — C^*-алгебра. Назовем характером A полунепрерывный снизу полуконечный ненулевой след f на A^+, удовлетворяющий следующему условию: каждый полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+, мажорируемый f, пропорционален f на $(\overline{\mathfrak{M}}_f)^+$.*

6.7.2. Напомним, что если $\mathcal{F}$ есть полуконечный фактор, то существуют точные нормальные полуконечные следы t на $\mathcal{F}^+$, и все эти следы пропорциональны. Поэтому идеал $\mathfrak{N}_t$ в $\mathcal{F}$ определяется единственным образом; его элементы называются *операторами Гильберта — Шмидта по отношению к* $\mathcal{F}$ (A32).

Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, π — ненулевое фактор-представление A, $\mathcal{F}$ — фактор, порожденный $\pi(A)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *π допускает след;*

(ii) *$\mathcal{F}$ полуконечен и $\pi(A)$ содержит ненулевой оператор Гильберта — Шмидта по отношению к $\mathcal{F}$.*

Утверждение (i)$\Rightarrow$(ii) очевидно. Предположим, что (ii) выполнено. Пусть t — полуконечный точный нормальный след на $\mathcal{F}^+$. По предположению, $\mathfrak{N} = \pi(A) \cap \mathfrak{N}_t$ есть ненулевой двусторонний идеал $\pi(A)$. Поэтому B — слабое замыкание $\mathfrak{N}$ — есть ненулевой слабо замкнутый двусторонний идеал в слабом замыкании $\pi(A)$, т. е. в $\mathcal{F}$. Так как $\mathcal{F}$ — фактор, то $B = \mathcal{F}$ (A9).

6.7.3. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра, f — полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+, (π, t) — представление со следом, связанное с f. Для того чтобы π было ненулевым фактор-представлением, необходимо и достаточно, чтобы f был характером.*

Предположим, что π — ненулевое фактор-представление. Тогда f — ненулевой. Пусть f' — полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+, мажорируемый f на $(\overline{\mathfrak{M}}_f)^+$. Применим лемму 6.5.4. В обозначениях этой леммы T — скаляр, так как π — фактор. Вследствие 6.5.4 (iii) f' пропорционален f на $(\overline{\mathfrak{M}}_f)^+$.

Предположим, что f — характер. Тогда π — ненулевое. Пусть T — такой элемент $\mathfrak{U}_f \cap \mathfrak{W}_f$, что $0 \leqslant T \leqslant 1$. Если положим $f'(x) = t(T\pi(x))$ для $x \in A^+$, то f', вследствие 6.1.5, есть полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+; ясно, что f' мажорируется f. Поэтому существует такое $\lambda \in [0, 1]$, что $f' = \lambda f$ на $(\overline{\mathfrak{M}}_f)^+$. Для каждого $x \in \mathfrak{N}_f$ имеем

$$(T\Lambda_f x \mid \Lambda_f x) = t(T\pi(x)\pi(x^*)) = f'(xx^*) =$$
$$= \lambda f(xx^*) = \lambda(\Lambda_f x \mid \Lambda_f x), \quad \text{откуда} \quad T = \lambda.$$

Это доказывает, что $\mathfrak{U}_f$ — фактор.

6.7.4. Следствие. *Существует каноническое биективное соответствие между:*

a) *множеством классов квазиэквивалентности ненулевых фактор-представлений A, допускающих след;*

b) *Множеством характеров A, определенных с точностью до положительного множителя.*

Для каждого характера f C^*-алгебры A представление λ_f есть ненулевое фактор-представление, допускающее след (6.7.3). Каждое ненулевое фактор-представление со следом получается таким образом с точностью до квазиэквивалентности [(6.6.5) и (6.7.3)]. Наконец, пусть f, f' — два таких характера A, что λ_f, $\lambda_{f'}$ квазиэквивалентны; существует изоморфизм Φ из $\mathfrak{U}_f$ на $\mathfrak{U}_{f'}$, который переводит λ_f в $\lambda_{f'}$; так как $\mathfrak{U}_f$ и $\mathfrak{U}_{f'}$ суть факторы, то Φ переводит t_f в $\alpha t_{f'}$, где $\alpha \in [0, +\infty]$. Тогда для каждого $x \in A^+$ имеем

$$f(x) = t_f(\lambda_f(x)) = \alpha t_{f'}(\lambda_{f'}(x)) = \alpha f'(x).$$

Благодаря этому результату можно говорить о характере ненулевого фактор-представления, допускающего след. Этот характер определен с точностью до положительного множителя.

6.7.5. Пусть A — C^*-алгебра, π — ненулевое неприводимое представление (следовательно, фактор-представление) A. Для того чтобы π имело след, необходимо и достаточно, чтобы $\pi(A) \supset \mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)$; действительно, это условие очевидным образом достаточно, и оно необходимо вследствие 4.1.10. [Можно нормировать характер π, рассматривая обычный след на $\mathfrak{B}(H_\pi)^+$.] В частности, каждое неприводимое представление GCR-C^*-алгебры имеет след (4.3.7), поэтому каждое фактор-представление GCR-C^*-алгебры имеет след (5.5.3).

6.7.6. Пусть A — GCR-C^*-алгебра, π — ненулевое неприводимое представление A. Для каждого $x \in A^+$ положим $f_\pi(x) = \operatorname{Tr} \pi(x)$. Тогда f_π есть характер A [(6.7.3) и (6.7.5)]. Если π' — другое неприводимое представление A и если $f_\pi = f_{\pi'}$, то π и π' квазиэквивалентны (6.6.6), поэтому эквивалентны (5.3.3). Наконец, если g — характер A, то λ_g — ненулевое фактор-представление (6.7.3), поэтому λ_g квазиэквивалентно некоторому ненулевому неприводимому представлению π (5.5.3) и g пропорционален f_π (6.7.4).

6.7.7. Сохраним обозначения 6.7.6; пусть $f = f_\pi$. Так как $\pi(A) \supset \mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)$, то Λ_f определяет, при переходе к фактору, изоморфизм $\mathfrak{N}_f/N_f$ на гильбертову алгебру B операторов Гильберта — Шмидта в H_π. Отождествим $\mathfrak{N}_f/N_f$ с B при помощи этого изоморфизма. Тогда для каждого $x \in A$ $\lambda_f(x)$ есть оператор умножения слева на $\pi(x)$ в B, $\bar{\rho}_f^0(x)$ есть оператор умножения справа на $\pi(x)^*$ в сопряженном к B пространстве. Если теперь канонически отождествить B с $H_\pi \otimes \overline{H}_\pi$, то $\lambda_f(x)$ становится оператором $\pi(x) \otimes 1$ и $\bar{\rho}_f^0(x)$ становится оператором $1 \otimes \pi(x)$. Поэтому $\mathfrak{U}_f$ отождествляется с $\mathfrak{B}(H_\pi) \otimes \boldsymbol{C}$, $\mathfrak{W}_f$ отождествляется с $\boldsymbol{C} \otimes \mathfrak{B}(H_\pi)$ и J_f отождествляется с канонической инволюцией в $H_\pi \otimes \overline{H}_\pi$. Наконец, $t_f(T \otimes 1) = \operatorname{Tr} T$ для каждого $T \in \mathfrak{B}(H_\pi)$.

6.7.8. Пусть A — коммутативная C^*-алгебра. Вследствие 6.7.6 характеры A в смысле 6.7.1 суть функции вида $x \to \alpha g(x)$ на A^+, где $\alpha > 0$ и g — характер A в классическом смысле. Поэтому имеется некоторое противоречие в терминологии.

6.7.9. Читатель заметит аналогию между построением этого параграфа и параграфа 2; соответствие устанавливается следующим образом:

§ 2	§ 6
Положительные формы	Полунепрерывные снизу полуконечные следы
Чистые положительные формы	Характеры
Представления	Представления, допускающие след
Неприводимые представления	Фактор-представления, допускающие след

К сожалению, аналогия прекращается в существенной точке. Тогда как в параграфе 2 мы могли доказать существование чистых положительных форм благодаря теореме Крейна—Мильмана, существование характеров не всегда имеет место (ср. 6.9.2, 6.9.10 и 9.5.7). Вопрос имеет решение только для GCR-C^*-алгебр, так как тогда неприводимые представления (существование которых доказано) автоматически имеют след.

С другой стороны, теории параграфов 2 и 6 имеют общий частный случай, который мы сейчас изучим.

Библиография: [21], [32].

6.8. Конечные следы.

6.8.1. Пусть A — C^*-алгебра, g — линейная форма на A. Говорят, что g *центральна*, если $g(xy) = g(yx)$ для любых x, $y \in A$. Предположим, что g положительна и центральна. Тогда f — сужение g на A^+ — есть, очевидно, конечный след. Обратно, пусть f — конечный след на A^+. Применим предложение 6.1.2 и его обозначения. Имеем $\mathfrak{M} = A$ (1.5.8), поэтому f' есть линейная форма на A, продолжающая f, и следовательно, положительная и центральная [6.1.2 (iii)]. Таким образом, установлено биективное соответствие между центральными положительными формами g на A и конечными следами f

на A^+; иногда будем отождествлять f и g. Вследствие 2.1.8 конечные следы автоматически непрерывны.

6.8.2. Пусть f — полунепрерывный снизу след на A^+, s — связанный с ним бислед. Имеем $\mathfrak{M}_f = \mathfrak{N}_s^2 \subset \mathfrak{N}_s$. Вследствие 1.5.8 условия $\mathfrak{M}_f = A$ и $\mathfrak{N}_s = A$ эквивалентны. Условие $\mathfrak{M}_f = A$, очевидно, означает, что f конечен.

6.8.3. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, f — положительная центральная форма на A и $g = f \mid A^+$.*

(i) *Имеем* $\pi_f = \lambda_g$.

(ii) *След t_g на $\mathfrak{U}_g^+$ конечен; пусть t'_g — его линейное продолжение на $\mathfrak{U}_g$; имеем $t'_g(\pi_f(z)) = (\pi_f(z)\xi_f \mid \xi_f)$ для каждого $z \in A$.*

(iii) *$\mathfrak{U}_g$ и $\mathfrak{V}_g$ суть конечные алгебры фон Неймана.*

(iv) *$\lambda_g(z)\xi_f = \rho_g(z)\xi_f = \Lambda_g z$ для каждого $z \in A$ и $J_g\xi_f = \xi_f$.*

(v) *Элемент ξ_f — отделяющий и тотализирующий для $\mathfrak{U}_g$ и $\mathfrak{V}_g$.*

Пусть s — бислед, связанный с g. Пространство $H(\pi_f)$ есть гильбертово пространство, получаемое отделением и пополнением A, если снабдить A скалярным произведением $f(y^*x) = f(xy^*) = s(x, y)$. Видим, что $H(\pi_f) = H_s = H_f$. Оба представления π_f и λ_g получаются из левого регулярного представления A, поэтому $\pi_f = \lambda_g$. Для $x, y \in A$ имеем, обозначая через t'_g линейное продолжение t_g на $\mathfrak{M}_{t_g}$,

$$t'_g(\lambda_g(x)\lambda_g(y)^*) = s(x, y) = f(xy^*) = (\pi_f(xy^*)\xi_f \mid \xi_f) = \\ = (\pi_f(x)\pi_f(y)^*\xi_f \mid \xi_f). \quad (1)$$

Отсюда выводим сначала, переходя к слабому пределу, что

$$(ST\xi_f \mid \xi_f) = (TS\xi_f \mid \xi_f) \quad \text{для любых} \quad S, T \in \mathfrak{U}_g.$$

Поэтому $S \to (S\xi_f \mid \xi_f)$ есть конечный нормальный след на $\mathfrak{U}_g^+$. С другой стороны, (1) доказывает, что $t'_g(\pi_f(z)) = (\pi_f(z)\xi_f \mid \xi_f)$ для каждого $z \in A$. Пусть $\tilde{A}$ — C^*-алгебра, получаемая из A присоединением единичного элемента 1; пусть $\tilde{f}$ — каноническое продолжение f на $\tilde{A}$ и $\tilde{g} = \tilde{f} \mid \tilde{A}^+$. Пространство $H(\pi_f)$ есть также гильбертово пространство, получаемое отделением и пополнением $\tilde{A}$, если снабдить $\tilde{A}$ скалярным произведением $\tilde{f}(y^*x) = \tilde{f}(xy^*)$, и ξ_f есть канонический образ 1. Пусть $z \in A$. Так как инволюция и операторы умножения слева и справа на z непрерывны в предгильбертовом пространстве $\tilde{A}$, то

$$\lambda_g(z)\xi_f = \Lambda_{\tilde{g}}(z \cdot 1) = \Lambda_g(z),$$
$$\rho_g(z)\xi_f = \Lambda_{\tilde{g}}(1 \cdot z) = \Lambda_g(z)$$

и
$$J_g\xi_f = \Lambda_g 1^* = \Lambda_g 1 = \xi_f.$$

Отсюда получаем, что ξ_f — тотализирующий вектор для $\mathfrak{U}_g$ и $\mathfrak{W}_g$, поэтому отделяющий для $\mathfrak{U}'_g = \mathfrak{W}_g$ и $\mathfrak{W}'_g = \mathfrak{U}_g$. Нормальный след $S \to (S\xi_f | \xi_f)$ на $\mathfrak{U}_g^+$ является поэтому точным и совпадает на $\pi_f(A^+)$ с точным нормальным следом t_g, поэтому эти два следа равны (A29). Поэтому t_g есть конечный след, и алгебры фон Неймана $\mathfrak{U}_g$, $\mathfrak{W}_g$ конечны.

6.8.4. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, f — полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+. Для того чтобы t_f был конечен на $\mathfrak{U}_f^+$, необходимо и достаточно, чтобы f был конечен.*

Необходимость очевидна, так как $f(x) = t_f(\lambda_f(x))$ для каждого $x \in A^+$. Достаточность следует из 6.8.3.

6.8.5. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, f — характер A. Для того чтобы f был конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы он был конечен.*

Это — частный случай 6.8.4.

6.8.6. Следствие. *Существует каноническое биективное соответствие между:*

a) *множеством классов квазиэквивалентности ненулевых фактор-представлений A конечного типа;*

b) *множеством конечных характеров A с нормой* 1.

Это следует из 6.7.4 и 6.8.5.

Следовательно, можно нормировать характер ненулевого фактор-представления конечного типа так, чтобы он имел норму 1. Однако это нормирование, вообще говоря, противоречит нормированию в 6.7.5.

6.8.7. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, C — множество центральных положительных форм на A с нормой $\leqslant 1$. Тогда:*

(i) *C выпукло и компактно в слабой топологии пространства, сопряженного к A.*

(ii) *Крайние точки C суть 0 и конечные характеры с нормой* 1.

(iii) *C есть слабо замкнутая выпуклая оболочка 0 и множества конечных характеров с нормой* 1.

(i) очевидно, (iii) следует из (i), (ii) и теоремы Крейна — Мильмана. С другой стороны, вследствие 6.7.1, конечный характер A есть такой ненулевой конечный след f на A^+, что каждый конечный след, мажорируемый f, пропорционален f. Теперь доказательство (ii) в точности совпадает с соответствующим доказательством в 2.5.5.

Библиография: [21], [32], [96].

6.9. Дополнения.

6.9.1. Пусть A — C^*-алгебра, f — полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+, s — связанный с f бислед. Мы сейчас увидим, что задание замкнутого двустороннего идеала J в A определяет некоторое разложение f.

a) Пусть $f' = f \mid J^+$, s' — бислед в J, связанный с f'. Тогда s — бислед в A. Пусть s_1 — его каноническое максимальное продолжение, f_1 — связанный с s_1 след на A^+.

b) Имеем $H_{f_1} = H_{f'} \subset H_f$, $\mathfrak{U}_{f_1} = \mathfrak{U}_{f'}$, $t_{f_1} = t_{f'}$. Для каждого $x \in A$ оператор $\lambda_{f_1}(x)$ есть сужение $\lambda_f(x)$ на $H_{f'}$. Если $x \in A^+$, то $f_1(x) = t_f(P\lambda_f(x))$, где P обозначает ортогональный проектор H_f на $H_{f'}$.

c) Пусть (u_i) — фильтрованная по возрастанию аппроксимативная единица в $\mathfrak{M}_{f'}$. Если $x \in A^+$, то $f_1(x) = \lim f'(x^{1/2}u_ix^{1/2})$.

d) Для каждого $x \in A^+$ положим $g(x) = t_f((1 - P)\pi_f(x))$. Тогда g есть полунепрерывный снизу полуконечный след на A^+, равный нулю на J^+, и $f = f_1 + g$ [49].

6.9.2. Пусть H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, A — C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)/\mathfrak{B}C(H)$, t — такой след на A^+, что $\mathfrak{M}_t \neq 0$. Имеем $t = 0$. [Каждый двусторонний идеал A равен A, следовательно, $\mathfrak{M}_t = A$. Пусть e_1, e_2 — два ортогональных проектора бесконечного ранга, сумма которых равна 1 в H; пусть f_1, f_2 — их канонические образы в A; имеем $t(f_1) = t(1)$, $t(f_2) = t(1)$, поэтому $t(1) = 2t(1)$, $t(1) = 0$.] [24].

6.9.3. Пусть A — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $[0, 1]$. Для $x \in A^+$ положим $f(x) = \int_0^1 x(t)t^{-1}\,dt$. Тогда f — полунепрерывный снизу полуконечный след, но $\overline{\mathfrak{M}}_f \neq A$. Если для $x \in A^+$ положим $f'(x) = x(0)$, то f' — непрерывный конечный след и $f + f' = f$ [49].

***6.9.4.** Пусть A — C^*-алгебра. Два неприводимых представления A, допускающие след, с одним и тем же ядром эквивалентны (6.7.5), но два фактор-представления A, допускающие след, с одним и тем же ядром могут быть дизъюнктны [21].

6.9.5. Возьмем снова C^*-алгебру B из 4.7.18. Тождественное представление B неприводимо; пусть f — его характер. Пусть f' — характер, получаемый композицией канонического отображения $B \to B/\mathfrak{B}C(H)$ и характера коммутативной C^*-алгебры $B/\mathfrak{B}C(H)$. Тогда f мажорирует f', но не пропорционален ему.

6.9.6. Пусть A — C^*-алгебра, f — характер A. Для того чтобы существовало такое семейство (f_i) чистых положительных форм на A, что $f = \Sigma f_i$, необходимо и достаточно, чтобы f был типа I [321].

6.9.7. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра.

a) Множество E таких $\pi \in \mathrm{Rep}(A)$, что π — неприводимое представление, допускающее след, есть борелевская часть $\mathrm{Rep}(A)$.

b) Пусть E', E'' — канонические образы E в $\widehat{A}$ и $\mathrm{Prim}(A)$. Тогда E' — борелевское в структуре Макки и E'' борелевское в $\mathrm{Prim}(A)$ (ср. 3.9.2). Множество E' — наибольшая часть $\widehat{A}$, обладающая свойством: сужение $\widehat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$ на E' инъективно (4.7.2). Учитывая 3.9.2, видим, что E' — стандартная борелевская часть $\widehat{A}$, на которой борелевская структура Макки есть борелевская структура, подчиненная топологии [21].

6.9.8. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Множество таких $\pi \in \mathrm{Rep}(A)$, что $\pi(A) = \mathfrak{B}C(H_\pi)$, есть борелевская часть $\mathrm{Rep}(A)$ (Гишарде, не опубликовано).

6.9.9. Каждое представление GCR-C^*-алгебры имеет след (использовать доказательство 5.5.2).

6.9.10. Пусть E_1 класс сепарабельных C^*-алгебр, все представления которых имеют тип I. Пусть E_1' — класс сепарабельных C^*-алгебр, имеющих достаточно много представлений типа I [т. е. таких, что для каждого ненулевого x из алгебры существует такое представление π типа I, что $\pi(x) \neq 0$]. Заменяя «типа I» последовательно на «полуконечного типа», «конечного типа», «имеющее след», получим классы E_2, E_2', E_3, E_3', E_4, E_4' C^* — алгебр. Что можно сказать об этих классах?

Класс E_1 хорошо изучен (см. 9.1). Имеем $E_1 = E_2 = E_4$ вследствие 6.9.9, 9.1, 9.5.4. Класс E_1' (и a fortiori E_2') есть класс всех сепарабельных C^*-алгебр, так как каждое неприводимое представление имеет тип I. Далее, $E_3 \subset E_2 = E_1$ есть класс сепарабельных C^*-алгебр, все неприводимые представления которых конечномерны. Классы E_3', E_4' отличны от класса всех сепарабельных C^*-алгебр, но мало изучены [205].

§ 7. КВАЗИСПЕКТР

Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. В § 3 мы определили борелевскую структуру Макки на множестве неприводимых представлений A (или, точнее, на множестве их классов эквивалентности). Мы теперь определим борелевскую структуру на множестве фактор-представлений A (или, точнее, на множестве их классов квазиэквивалентности). Это будет использовано в § 8.

7.1. Пространство фактор-представлений.

7.1.1. Пусть n — кардинальное число $\leqslant \aleph_0$. Пусть H_n — типичное гильбертово пространство размерности n (3.5.1). Для каждого $b \geqslant 0$ обозначим через $\mathfrak{B}_b(H_n)$ замкнутый шар с центром 0 и радиусом b в $\mathfrak{B}(H_n)$.

Лемма. *Пусть d — расстояние в $\mathfrak{B}_1(H_n)$, согласованное со слабой топологией* (B9), *S — элемент $\mathfrak{B}_1(H_n)$, a и b — числа $\geqslant 0$ и $x_1, \ldots, x_m \in A$. Пусть Y — множество $\pi \in \mathrm{Rep}_n(A)$, имеющих следующее свойство:*

существуют такие $T_1, \ldots, T_m \in \mathfrak{B}_b(H_n) \cap \pi(A)'$, что

$$\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m \in \mathfrak{B}_1(H_n)$$

и

$$d(\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m, S) \leqslant a.$$

Тогда Y замкнуто в $\mathrm{Rep}_n(A)$.

Пусть (π^i) — сеть элементов Y и π — такой элемент $\mathrm{Rep}_n(A)$, что $\pi^i \to \pi$ в $\mathrm{Rep}_n(A)$. Покажем, что $\pi \in Y$. Для каждого i существуют такие

$$T_1^i, \ldots, T_m^i \in \mathfrak{B}_b(H_n) \cap \pi^i(A)',$$

что

$$\pi^i(x_1)T_1^i + \ldots + \pi^i(x_m)T_m^i \in \mathfrak{B}_1(H_n)$$

и

$$d\left(\pi^i(x_1)T_1^i + \ldots + \pi^i(x_m)T_m^i, S\right) \leqslant a.$$

Так как $\mathfrak{B}_1(H_n)$ слабо компактен, то можно предположить, уменьшая семейство (π^i), что $T_1^i, \ldots, T_m^i$ слабо сходятся к $T_1, \ldots, T_m \in \mathfrak{B}_b(H_n)$. Пусть $x \in A$ и $\varphi, \psi \in H_n$. Имеем (3.5.2)

$$\left(T_1^i\pi^i(x)\varphi \mid \psi\right) = \left(\pi^i(x)\varphi \mid T_1^{i*}\psi\right) \to \left(\pi(x)\varphi \mid T_1^*\varphi\right) = (T_1\pi(x)\varphi \mid \psi)$$

и

$$\left(\pi^i(x)T_1^i\varphi \mid \psi\right) = \left(T_1^i\varphi \mid \pi^i(x^*)\psi\right) \to (T_1\varphi \mid \pi(x^*)\psi) = (\pi(x)T_1\varphi \mid \psi).$$

Поэтому

$$(T_1\pi(x)\varphi \mid \psi) = (\pi(x)T_1\varphi \mid \psi), \quad \text{следовательно,} \quad T_1 \in \pi(A)',$$

и так же $T_2, \ldots, T_m \in \pi(A)'$. С другой стороны, имеем

$$\left(\left(\pi^i(x_1)T_1^i + \ldots + \pi^i(x_m)T_m^i\right)\varphi \mid \psi\right) \to$$
$$\to ((\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m)\varphi \mid \psi),$$

так что

$$\pi^i(x_1)T_1^i + \ldots + \pi^i(x_m)T_m^i$$

стремится слабо к

$$\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m,$$

откуда

$$\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m \in \mathfrak{B}_1(H_n)$$

и

$$d(\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m, S) \leqslant a.$$

Итак, $\pi \in Y$,

7.1.2. Лемма. *Пусть d — расстояние в $\mathfrak{B}_1(H_n)$, согласованное со слабой топологией, $(x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность, всюду плотная в A, и $(S_1, S_2, \ldots)$ — последовательность, слабо всюду плотная в $\mathfrak{B}_1(H_n)$* (B9). *Пусть k, m, p — целые. Пусть $Y_{k,m,p}$ — множество $\pi \in \operatorname{Rep}_n(A)$, обладающих следующими свойствами: существуют такие $T_1, T_2, \ldots, T_m$ в $\mathfrak{B}_m(H_n) \cap \pi(A)'$, что*

$$\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m \in \mathfrak{B}_1(H_n)$$

и

$$d(\pi_1(x)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m, S_k) \leqslant \frac{1}{p}.$$

Тогда:

(i) $Y_{k,m,p}$ *замкнуто в* $\operatorname{Rep}_n(A)$,

(ii) $Y = \bigcap_{k,p} \bigcup_m Y_{k,m,p}$ *есть множество ненулевых фактор-представлений* $\pi \in \operatorname{Rep}_n(A)$.

Утверждение (i) следует из 7.1.1.

Для каждого $\pi \in \operatorname{Rep}_n(A)$ введем $N(\pi)$ — множество линейных комбинаций операторов вида RR', где $R \in \pi(A)$, $R' \in \pi(A)'$. Пусть $\mathfrak{N}(\pi)$ — слабое замыкание $N(\pi)$. Тогда π есть ненулевое фактор-представление в том и только в том случае, когда $\mathfrak{N}(\pi) = \mathfrak{B}(H_\pi)$.

Предположим сначала, что $\pi \in Y$. Покажем, что для каждого k оператор $S_k \in \mathfrak{N}(\pi)$, и это влечет $\mathfrak{N}(\pi) = \mathfrak{B}(H_n)$. Пусть p — целое > 0. Существует такое m, что $\pi \in Y_{k,m,p}$. Поэтому существуют такие $T_1, \ldots, T_m \in \mathfrak{B}_m(H_n) \cap \pi(A)'$, что

$$\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m \in \mathfrak{B}_1(H_n)$$

и

$$d(\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m, S_k) \leqslant 1/p.$$

Так как $\pi(x_1)T_1 + \ldots + \pi(x_m)T_m \in N(\pi)$, то

$$d(N(\pi) \cap \mathfrak{B}_1(H_n), S_k) \leqslant 1/p.$$

Так как p произвольно, то доказано, что $S_k \in \mathfrak{N}(\pi)$. Поэтому π — ненулевое фактор-представление.

Обратно, предположим, что $\pi \in \operatorname{Rep}_n(A)$ и что $\mathfrak{N}(\pi) = \mathfrak{B}(H_n)$.

Пусть k и p — целые > 0. Докажем, что существует такое m, что $\pi \in Y_{k,m,p}$; это завершит доказательство. Вследствие A13 существует такой $P \in N(\pi)$, что $\|P\| < 1$ и $d(P, S_k) = 1/p$. Имеем

$$P = \pi(y_1)T_1 + \ldots + \pi(y_q)T_q$$

с

$$y_1, \ldots, y_q \in A \quad \text{и} \quad T_1, \ldots, T_q \in \pi(A)'.$$

Сверх того, существуют $x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}$, достаточно близкие к $y_1, \ldots, y_q$, для которых

$$\|\pi(x_{i_1})T_1 + \ldots + \pi(x_{i_q})T_q\| \leqslant 1$$

и
$$d\left(\pi\left(x_{i_1}\right)T_1 + \ldots + \pi\left(x_{i_q}\right)T_q,\ S_k\right) \leqslant 1/p.$$

Если взять $m \geqslant i_1, \ldots, i_q, \|T_1\|, \ldots, \|T_q\|$, то $\pi \in Y_{k,m,p}$.

7.1.3. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Обозначим через $\mathrm{Fac}_n(A)$ множество ненулевых фактор-представлений A в H_n и через $\mathrm{Fac}(A)$ — объединение $\mathrm{Fac}_n(A)$ для $n = 1, 2, \ldots, \aleph_0$.

7.1.4. Теорема. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Множество $\mathrm{Fac}(A)$ — борелевское в $\mathrm{Rep}(A)$.*

Это сразу следует из 7.1.2.

Итак, $\mathrm{Fac}(A)$, снабженное борелевской структурой, индуцированной борелевской структурой в $\mathrm{Rep}(A)$, есть стандартное борелевское пространство, так как $\mathrm{Rep}(A)$ стандартно (3.8.1).

Библиография: [185].

7.2. Определение квазиспектра.

7.2.1. Обозначим через $\widehat{A}$ множество классов квазиэквивалентности ненулевых фактор-представлений A. Если A сепарабельна, то всякое фактор-представление квазиэквивалентно фактор-представлению в сепарабельном пространстве (5.3.7), поэтому очевидное каноническое отображение $\mathrm{Fac}(A) \to \widehat{A}$ сюръективно.

7.2.2. Определение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Назовем борелевской структурой Макки на $\widehat{A}$ фактор-структуру борелевской структуры в $\mathrm{Fac}(A)$ при каноническом отображении $\mathrm{Fac}(A) \to \widehat{A}$. Борелевское пространство $\widehat{A}$ называется квазиспектром A.*

7.2.3. Предложение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Пусть B — борелевская часть $\mathrm{Fac}(A)$, которая пересекает каждый класс квазиэквивалентности не более чем в одной точке. Пусть ψ — каноническое отображение $\mathrm{Fac}(A) \to \widehat{A}$. Тогда $\psi(B)$ — борелевское множество в $\widehat{A}$ и $\psi \mid B$ — изоморфизм борелевского пространства B на борелевское пространство $\psi(B)$.*

Пусть $\mathscr{E}(\pi, \pi')$ — число сплетения двух представлений π, π' C^*-алгебры A. Вследствие 3.7.3 множество таких пар $(\pi, \pi') \in (\mathrm{Fac}\,A) \times (\mathrm{Fac}\,A)$, что $\mathscr{E}(\pi, \pi') \leqslant 0$, борелево в $(\mathrm{Fac}\,A) \times (\mathrm{Fac}\,A)$. Его дополнение R есть множество таких пар $(\pi, \pi') \in (\mathrm{Fac}\,A) \times (\mathrm{Fac}\,A)$, что $\pi \approx \pi'$ (5.3.6). Видим, что $S = R \cap (\mathrm{Fac}\,A \times B)$ — борелевское множество в $(\mathrm{Fac}\,A) \times (\mathrm{Fac}\,A)$. Пусть p — проекция на первый сомножитель: $(\mathrm{Fac}\,A) \times (\mathrm{Fac}\,A) \to \mathrm{Fac}\,A$. Если $(\pi, \pi') \in S$ и $(\pi_1, \pi_1') \in S$ таковы, что $p(\pi, \pi') = p(\pi_1, \pi_1')$, то $\pi' \approx \pi = \pi_1 \approx \pi_1'$, поэтому $\pi' = \pi_1'$ вследствие предположения относительно B. Поэтому $p \mid S$ инъективно. Следовательно, $p(S)$ — борелевская часть $\mathrm{Fac}\,A$ (B21). Но $p(S)$ есть насыщение B в $\mathrm{Fac}\,A$ по отношению к квазиэквивалентности. Поэтому

$\psi(B)$ — борелевское множество в $\widehat{A}$. Отображение $\psi|B$ из B на $\psi(B)$ есть борелевское биективное отображение. Чтобы показать, что это — борелевский изоморфизм, достаточно показать, что образ $\psi(B')$ каждой борелевской части B' множества B — борелевский. Однако это следует из предыдущих рассуждений, примененных к B' вместо B.

7.2.4. Следствие. *Каждая точка в $\widehat{A}$ — борелевское множество в $\widehat{A}$.*

Квазиспектр назывался до сих пор *квазидуальным объектом*.

Библиография: [185].

7.3. Соотношения между спектром и квазиспектром.

7.3.1. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Для $p = 1, 2, \ldots, \aleph_0$ введем $\operatorname{Fac} I_p(A)$ — множество таких представлений $\pi \in \operatorname{Fac}(A)$, что $\pi(A)'$ есть фактор типа I_p. Имеем $\operatorname{Fac} I_1(A) = \operatorname{Irr}(A)$. Пусть $\operatorname{Fac} I(A)$ — объединение $\operatorname{Fac} I_p(A)$. Тогда $\operatorname{Fac} I(A)$ — множество таких $\pi \in \operatorname{Fac}(A)$, что $\pi(A)'$ — типа I, т. е. множество $\pi \in \operatorname{Fac}(A)$, имеющих тип I. Множества $\operatorname{Fac} I_p(A)$ содержат вместе с представлением все эквивалентные ему, но не все квазиэквивалентные. Напротив, $\operatorname{Fac} I(A)$ содержит вместе с представлением все квазиэквивалентные ему. Для того чтобы представление из $\operatorname{Rep}(A)$ принадлежало $\operatorname{Fac} I_p(A)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было эквивалентно представлению вида $p\pi$, где $\pi \in \operatorname{Irr}(A)$ (5.4.11). Все множества $\operatorname{Fac} I_p(A)$ имеют поэтому тот же канонический образ в $\widehat{A}$, что и $\operatorname{Irr}(A)$; мы обозначим этот образ через $\widehat{A}_I$; это — множество классов квазиэквивалентности фактор-представлений типа I.

7.3.2. Напомним, что на множестве унитарных операторов в гильбертовом пространстве слабая и сильная топологии совпадают и согласованы со структурой группы. Более того:

Лемма. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{G}$ — группа унитарных операторов в H. В сильной топологии (или слабой) $\mathfrak{G}$ — польская группа.*

Действительно, единичный шар $\mathfrak{B}_1(H)$ в $\mathfrak{B}(H)$ — метризуемый компакт в слабой топологии, следовательно, полное метризуемое пространство. Достаточно показать, что $\mathfrak{G}$ есть G_δ в $\mathfrak{B}_1(H)$. Но если (ξ_i) — последовательность, всюду плотная в единичной сфере H, то $\mathfrak{G}$ есть множество таких $T \in \mathfrak{B}_1(H)$, что $\|T\xi_i\| > 1 - 1/j$, $\|T^*\xi_i\| > 1 - 1/j$, каковы бы ни были целые i и j. Каждое из этих неравенств определяет слабо открытую часть $\mathfrak{B}(H)$ (так как для каждого $\xi \in H$ отображение $T \to \|T\xi\|$ полунепрерывно снизу в слабой топологии и $T \to T^*$ есть гомеоморфизм в слабой топологии).

7.3.3. Лемма. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, p — кардинальное число $\leqslant \aleph_0$, B — борелевская часть $\operatorname{Irr}(A)$, содержа-*

щая вместе с представлением все ему эквивалентные. Пусть C — множество элементов $\mathrm{Fac}\, I_p(A)$, *квазиэквивалентных какому-либо элементу из B. Тогда C — борелевское в* $\mathrm{Rep}(A)$.

Пусть H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n. Множества $B \cap \mathrm{Rep}_n(A)$ содержат вместе с каждым представлением все эквивалентные ему и являются борелевскими. Достаточно доказать утверждение для всех этих множеств. Иначе говоря, мы предполагаем в дальнейшем, что элементы B действуют в одном и том же H_n. Тогда элементы C действуют в H_{np}. Мы проведем доказательство для $n = p = \aleph_0$ (другие случаи изучаются аналогичным образом, но несколько проще). Положим тогда $H = H_n = H_{np}$.

Пусть $(K_1, K_2, \ldots)$ — бесконечная последовательность бесконечномерных замкнутых попарно ортогональных векторных подпространств H, прямая сумма которых равна H. Пусть J — изоморфизм H на K_n. Для каждого $T \in \mathfrak{B}(H)$ операторы $J_n T J_n^{-1}$ определяют по линейности и непрерывности оператор $T^{\sim}$ в H и $T \to T^{\sim}$ есть изоморфизм $\mathfrak{B}(H)$ на фактор $\mathcal{F}$ типа I_∞ — множество непрерывных линейных операторов в H, оставляющих инвариантными K_n и таких, что части, индуцированные этими операторами в K_n, переводятся друг в друга изоморфизмами $J_{n'} J_n^{-1}$. Коммутант $\mathcal{F}'$ фактора $\mathcal{F}$ есть также фактор типа I_∞. Пусть π — представление A в H. Обозначим через $\pi^{\sim}$ представление $x \to \pi(x)^{\sim}$ в H. Если $\pi \in \mathrm{Irr}(A)$, то $\pi^{\sim}$ порождает фактор $\mathcal{F}$. Отображение $\pi \sim \pi^{\sim}$, очевидно, инъективно. Для каждого ξ, принадлежащего к одному из K_i, и каждого $x \in A$ отображение $\pi \sim \pi^{\sim}(x)\xi$ непрерывно. Поэтому отображение $\pi \to \pi^{\sim}$ — борелевское. Вследствие B21 множество $B^{\sim}$ — образ B при отображении $\pi \to \pi^{\sim}$ — есть борелевская часть $\mathrm{Rep}(A)$, содержащаяся в $\mathrm{Fac}\, I_\infty(A)$.

Множество C из условия задачи есть объединение $UB^{\sim}U^{-1}$, где U пробегает группу $\mathfrak{G}$ унитарных операторов в H (5.3.3 и 5.4.11). Иначе говоря, C есть образ $\mathfrak{G} \times B^{\sim}$ при отображении

$$\Theta\colon (U, \sigma) \to U\sigma U^{-1} \quad \text{из} \quad \mathfrak{G} \times B^{\sim} \quad \text{в } \mathrm{Rep}(A).$$

Для каждого $x \in A$ и каждого $\xi \times B^{\sim}$ отображение $(U, \sigma) \to \to U\sigma(x)U^{-1}\xi$ из $\mathfrak{G} \times \mathrm{Rep}_\infty(A)$ в H непрерывно ($\mathfrak{G}$ снабжено сильной топологией). поэтому отображение Θ борелевское. Покажем, что для элемента U из $\mathfrak{G}$ следующие условия эквивалентны (в которых $B \neq \varnothing$ — случай, которым, очевидно, можно ограничиться):

(1) $U\mathcal{F}U^{-1} = \mathcal{F}$;

(2) U имеет вид VW, где V, W унитарны, $V \in \mathcal{F}$, $W \in \mathcal{F}'$;

(3) $UB^{\sim}U^{-1}=B^{\sim}$;

(4) Существуют такие $\pi_1, \pi_2 \in B^{\sim}$, что $U\pi_1U^{-1}=\pi_2$.

(4)$\Rightarrow$(1): пусть $\pi_1, \pi_2 \in B^{\sim}$ с $U\pi_1U^{-1}=\pi_2$. Тогда $U\pi_1(A)U^{-1}=$ $=\pi_2(A)$, поэтому для слабых замыканий $U\mathcal{F}U^{-1}=\mathcal{F}$.

(1)$\Rightarrow$(2): если $U\mathcal{F}U^{-1}=\mathcal{F}$, то U определяет автоморфизм $\mathcal{F}$. Однако каждый автоморфизм фактора типа I определяется унитарным оператором из этого фактора (A37). Поэтому существует такой унитарный оператор V в $\mathcal{F}$, что $W=V^{-1}U$ определяет тождественный автоморфизм $\mathcal{F}$, иначе говоря, принадлежит $\mathcal{F}'$, причем $U=VW$.

(2)$\Rightarrow$(3): пусть $U=VW$ с унитарными $V, W, V\in\mathcal{F}, W\in\mathcal{F}'$. Пусть $\pi\in B$. Имеем $W\pi(x)^{\sim}W=\pi(x)^{\sim}$ для каждого $x\in A$. С другой стороны, V имеет вид $T^{\sim}$ для некоторого унитарного оператора T в H. Тогда

$$V\pi(x)^{\sim}V^{-1}=\left(T\pi(x)T^{-1}\right)^{\sim},$$

поэтому

$$U\pi^{\sim}U^{-1}=\left(T\pi T^{-1}\right)^{\sim}.$$

Однако $T\pi T^{-1}\in B$, так как B вместе с представлением содержит все эквивалентные ему. Поэтому $U\pi^{\sim}U^{-1}\in B^{\sim}$ и окончательно $UB^{\sim}U^{-1}=B^{\sim}$.

(3)$\Rightarrow$(4): очевидно.

Условия (1)—(4) определяют подгруппу $\mathfrak{G}'$ в $\mathfrak{G}$. Из условия (1) ясно, что $\mathfrak{G}'$ замкнуто в $\mathfrak{G}$. Вследствие 7.3.2 и B17 существует борелевское подмножество Σ в $\mathfrak{G}$, которое пересекает каждый левый класс $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{G}'$ в одной и только одной точке. Покажем, что $\Theta(\mathfrak{G}\times B^{\sim})=\Theta(\Sigma\times B^{\sim})$. Ясно, что $(\mathfrak{G}\times B^{\sim})\supset\Theta(\Sigma\times B^{\sim})$. Обратно, пусть $U\in\mathfrak{G}$, $\sigma\in B^{\sim}$. Имеем $U=U_1U_2$ с $U_1\in\Sigma$, $U_2\in\mathfrak{G}'$. Тогда $\Theta(U, \sigma)=U_1\left(U_2\sigma U_2^{-1}\right)U_1^{-1}\in$ $\in U_1B^{\sim}U_1^{-1}\subset\Theta(\Sigma, B^{\sim})$ вследствие условия (3), откуда следует обещанное равенство. Покажем, что сужение Θ на $\Sigma\times B^{\sim}$ инъективно. Пусть $\pi_1, \pi_2\in B^{\sim}$ и $V_1, V_2\in\Sigma$ таковы, что $V_1\pi_1V_1^{-1}=V_2\pi_2V_2^{-1}$; тогда $V_2^{-1}V_1$ удовлетворяет условию (4), поэтому V_1 и V_2 принадлежат одному и тому же левому классу по $\mathfrak{G}'$; $V_1=V_2$ и $\pi_1=\pi_2$. Тогда $C=\Theta(\Sigma\times B^{\sim})$ — борелевское множество в $\mathrm{Rep}(A)$ (B21).

7.3.4. Предложение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Каждое множество* $\mathrm{Fac}\,I_p(A)$ *— борелевское в* $\mathrm{Rep}(A)$.

Это следует из 7.3.3, примененного к $B=\mathrm{Irr}(A)$.

7.3.5. Снабдим множества $\mathrm{Fac}\,I_p(A)$ и $\mathrm{Fac}\,I(A)=\bigcup\limits_p\mathrm{Fac}\,I_p(A)$ борелевской структурой, индуцированной борелевской структурой в $\operatorname{Rep}(A)$ [или $\operatorname{Fac}(A)$]. Борелевские пространства, получаемые таким образом, стандартны.

7.3.6. Отношение эквивалентности, индуцируемое квазиэквивалентностью на $\operatorname{Irr}(A)$, есть не что иное, как эквивалентность представлений (5.3.3). Поэтому каноническое вложение i множества $\operatorname{Irr}(A)$ в $\operatorname{Fac} I(A)$ определяет, при переходе к фактору, биективное отображение Φ множества $\hat{A}$ на $\widehat{A}_I$ (7.3.1).

Теорема. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Тогда:*

(i) *$\widehat{A}_I$ есть борелевская часть $\widehat{A}$.*

(ii) *Биективное отображение Φ есть изоморфизм $\hat{A}$ на $\widehat{A}_I$ в борелевской структуре Макки.*

Утверждение (i) следует из 7.3.4. Докажем (ii). Пусть

$$q\colon \operatorname{Irr}(A) \to \hat{A} \quad \text{и} \quad p\colon \operatorname{Fac} I(A) \to \widehat{A}_I$$

— канонические отображения. Пусть S — борелевская часть $\widehat{A}_I$. Тогда $p^{-1}S$ есть борелевская часть $\operatorname{Fac} I(A)$, содержащая вместе с представлением все квазиэквивалентные ему.

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Irr}(A) & \xrightarrow{i} & \operatorname{Fac} I(A) \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \hat{A} & \xrightarrow{\Phi} & \widehat{A}_I \end{array}$$

Следовательно, $i^{-1}(p^{-1}(S)) = q^{-1}(\Phi^{-1}(S))$ есть борелевская часть $\operatorname{Irr}(A)$, содержащая вместе с представлением все эквивалентные ему. Следовательно, $\Phi^{-1}(S)$ — борелевское в $\hat{A}$. Обратно, пусть T — борелевская часть $\hat{A}$. Тогда $q^{-1}(T)$ есть борелевская часть $\operatorname{Irr}(A)$, содержащая вместе с представлением все эквивалентные ему. Множество $p^{-1}(\Phi(T))$ содержит все представления, квазиэквивалентные представлениям из $i(q^{-1}(T))$. Применяя 7.3.3 к $B = q^{-1}(T)$, видим, что $p^{-1}(\Phi(T))$ — борелевское в $\operatorname{Fac} I(A)$. Поэтому $\Phi(T)$ — борелевское в $\widehat{A}_I$. Теорема доказана.

Мы будем отождествлять в дальнейшем борелевское пространство $\hat{A}$ и борелевскую часть $\widehat{A}_I$ в $\widehat{A}$.

7.3.7. В частности, если A есть сепарабельная GCR-C^*-алгебра, то борелевские пространства $\hat{A}$ и $\widehat{A}_I$ тождественны (5.5.3).

Библиография: [48]:

7.4. Конечная часть квазиспектра.

7.4.1. Мы не очень хорошо знаем, какой топологией удобно наделять $\widehat{A}$. Но мы определим часть $\widehat{A}_f$ множества $\widehat{A}$, на которой существует удовлетворительная топология.

Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n, $\operatorname{Fac} f_n(A)$ — множество ненулевых фактор-представлений A конечного типа в H_n и $\mathrm{Facf}(A)$ — объединение $\mathrm{Facf}_n(A)$ для $n = 1, 2, \ldots, \aleph_0$. [Имеем при этом $\mathrm{Facf}_n(A) = \mathrm{Fac}_n(A)$ для $n < \aleph_0$.] Обозначим через $\widehat{A}_f$ канонический образ $\mathrm{Facf}(A)$ в $\widehat{A}$, иначе говоря, множество классов квазиэквивалентности ненулевых фактор-представлений A конечного типа.

7.4.2. Пусть, с другой стороны, C — выпуклое множество центральных положительных форм на A с нормой $\leqslant 1$. Тогда C, снабженное слабой топологией, есть метризуемое компактное пространство. Множество D крайних точек C, отличных от 0, есть G_δ в пространстве C (B13), поэтому есть польское пространство в слабой топологии. Кроме того, D есть множество конечных характеров A с нормой 1 (6.8.7). Вследствие 6.8.6 отображение: $g \to$ класс квазиэквивалентности λ_g есть биективное отображение D на $\widehat{A}_f$. Снабдим $\widehat{A}_f$ топологией, наводимой слабой топологией на D при этом биективном отображении. Таким образом $\widehat{A}_f$ становится польским пространством.

7.4.3. Предложение. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Тогда*:

(i) *$\widehat{A}_f$ есть борелевская часть $\widehat{A}$.*

(ii) *Борелевская структура, индуцируемая на $\widehat{A}_f$ борелевской структурой $\widehat{A}$, есть борелевская структура, подчиненная топологии $\widehat{A}_f$.*

(iii) *Борелевское пространство $\widehat{A}_f$ стандартно.*

Пусть построено борелевское отображение Ω из D в $\mathrm{Rep}(A)$ такое, что для каждого $g \in D$ $\Omega(g)$ есть фактор-представление конечного типа с характером g. Для $g, g' \in D$ $(g \neq g')$ представления $\Omega(g)$, $\Omega(g')$ не будут тогда квазиэквивалентны. Так как D и $\mathrm{Rep}(A)$ суть стандартные борелевские пространства, то $\Omega(D)$ — борелевская часть $\mathrm{Rep}(A)$, пересекающая каждый класс квазиэквивалентности не более чем в одной точке, и Ω — борелевский изоморфизм D на $\Omega(D)$ (B21). Вследствие 7.2.3, если ψ обозначает каноническое отображение $\mathrm{Fac}(A)$ на $\widehat{A}$, то $\psi(\Omega(D))$ — борелевская часть $\widehat{A}$ и $\psi|\Omega(D)$ — борелевский изоморфизм $\Omega(D)$ на $\psi(\Omega(D))$. Однако $\psi(\Omega(D)) = \widehat{A}_f$ вследствие 6.8.6. Тогда предложение 7.4.3 будет доказано.

Пусть $(x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность, всюду плотная в A. Используем снова обозначения 6.2.2. Для каждого $g \in D$ векторы $\Lambda_g x_n$ всюду плотны в H_g, так как g непрерывен. Функции

$$g \to (\Lambda_g x_n \mid \Lambda_g x_p) = g(x_n x_p^*)$$

непрерывны на D. Поэтому (A98) на поле $g \to H_g$ существует и притом единственная структура борелевского поля такая, что векторные поля $g \to \Lambda_g x_n$ — борелевские. Пусть D_p — множество таких $g \in D$, что $\dim H_g = p$ ($p = 1, 2, \ldots, \aleph_0$); это — борелевская часть D (A96). Достаточно построить Ω для каждого D_p. Однако существует изоморфизм $g \to V(g)$ для $g \to H_g$ ($g \in D_p$) на постоянное поле, определенное стандартным гильбертовым пространством H_p (A96). Тогда достаточно положить

$$\Omega(g)(x) = V(g)\lambda_g(x)V(g)^{-1}$$

для каждого $x \in A$. Так как $g \to \lambda_g(x)$ — борелевское поле операторов, то отображение $g \to \Omega(g)(x)$ борелевское, поэтому Ω есть борелевское отображение D в $\mathrm{Rep}(A)$.

7.4.4. Из 7.4.3 следует, что $\mathrm{Fac}\,\mathfrak{f}(A)$ и $\mathrm{Fac}\,\mathfrak{f}_n(A)$ — борелевские части $\mathrm{Fac}(A)$.

Библиография: [21].

7.5. Дополнения.

7.5.1. Пусть A — C^*-алгебра, I — замкнутый двусторонний идеал A, ω — канонический морфизм A на A/I. Пусть E — множество $\rho \in \widehat{A}$, равных нулю на I. Тогда $\pi \to \pi \circ \omega$ определяет биективное отображение $(A/I)^\frown$ на E, $\pi \to \pi | I$ определяет биективное отображение $\widehat{A} - E$ на $\widehat{I}$ (использовать 2.11.1). Если A сепарабельна, то E — борелевская часть $\widehat{A}$ и предыдущие биективные отображения суть борелевские изоморфизмы (использовать существование аппроксимативной единицы в I). В частности, A отождествляется с борелевским пространством — суммой стандартного борелевского пространства и пространства $\widehat{B}$, где B — сепарабельная NGCR-C^*-алгебра [50].

7.5.2. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Пусть M — множество однородных (5.7.6) $\pi \in \mathrm{Rep}(A)$. Тогда M — борелевская часть $\mathrm{Rep}(A)$ [186].

7.5.3. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. На $\widehat{A} \cap \widehat{A}_f$ топологии, индуцированные топологией $\widehat{A}$ и топологией $\widehat{A}_f$, не обязательно совпадают (для примера можно взять A из 4.7.19).

7.5.4. Проблемы: пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Является ли множество таких $\pi \in \mathrm{Fac}\,A$, что π допускает след (соотв. типа II), борелевской частью $\mathrm{Rep}(A)$? Является ли множество E элементов $\widehat{A}$, допускающих след, стандартным борелевским пространством (ср. 6.9.7)? Существует ли, за неимением разумной топологии на $\widehat{A}$, разумная топология на E [21]?

§ 8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДЕЗИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Мы имеем теперь достаточно технических средств, чтобы непосредственно приступить к решению одной из двух проблем, указанных в начале § 3 — разложению представления на неприводимые представления. Как мы уже говорили, речь идет не о разложении в прямую сумму неприводимых представлений, но о более тонком разложении (которое мы называем дезинтегрированием). Можно предвидеть это на следующем простом примере. Пусть A — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $[0, 1]$; для каждого $f \in A$ введем $\pi(f)$ — оператор умножения на f в гильбертовом пространстве $H = L^2([0, 1])$. Тогда π — представление A в H. Неприводимые представления A суть характеры $f \to f(t_0)$ (где $t_0 \in [0, 1]$). Разложение в прямую сумму неприводимых представлений сводится к нахождению ортонормальной базы в H, каждый элемент которой — общий собственный вектор для всех $\pi(f)$. Однако никакой вектор (кроме 0) не является общим собственным вектором для всех $\pi(f)$.

Между тем, говоря нестрого, можно рассматривать функции Дирака в различных точках $[0, 1]$ как попарно ортогональные общие собственные векторы $\pi(f)$ и каждый элемент H может быть записан как интегральная линейная комбинация этих функций Дирака.

Во всем параграфе A обозначает сепарабельную C^*-алгебру.

8.1. Интегрирование представлений.

8.1.1. Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера (B30) на Z, $\zeta \to H(\zeta)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z (A69). Пусть для каждого $\zeta \in Z$ задано представление $\pi(\zeta)$ алгебры A в $H(\zeta)$: говорят, что $\zeta \to \pi(\zeta)$ есть поле представлений A.

Определение. *Поле представлений $\zeta \to \pi(\zeta)$ называется измеримым, если для каждого $x \in A$ поле операторов $\zeta \to \pi(\zeta)(x)$ измеримо* (A77).

8.1.2. Имеем $\|\pi(\zeta)(x)\| \leqslant \|x\|$ для каждого $x \in A$ и каждого $\zeta \in Z$. Поэтому, если поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ измеримо, то для каждого $x \in A$ можно образовать непрерывный оператор $\pi(x) = \int_Z^{\oplus} \pi(\zeta)(x)\, d\mu(\zeta)$ в гильбертовом пространстве $H = \int_Z^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$.

Предложение. *Отображение $x \to \pi(x)$ есть представление A в H.*

Имеем для $x, y \in A$

$$\pi(x+y) = \int_Z^{\oplus} \pi(\zeta)(x+y)\,d\mu(\zeta) = \int_Z^{\oplus} (\pi(\zeta)(x) + \pi(\zeta)(y))\,d\mu(\zeta) =$$
$$= \int_Z^{\oplus} \pi(\zeta)(x)\,d\mu(\zeta) + \int_Z^{\oplus} \pi(\zeta)\,d\mu(\zeta) = \pi(x) + \pi(y).$$

Так же видим, что

$$\pi(\lambda x) = \lambda\pi(x), \quad \pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad \pi(x^*) = \pi(x)^*.$$

8.1.3. Определение. *В предыдущих обозначениях* π *называется прямым интегралом* $\pi(\zeta)$ *и обозначается* $\pi = \int_Z^{\oplus} \pi(\zeta)\,d\mu(\zeta)$.

8.1.4. Каждый оператор $\pi(x)$ разложим, поэтому перестановочен с алгеброй $\mathfrak{z}$ диагональных операторов. Иначе говоря, $\mathfrak{Z} \subset \pi(A)'$.

8.1.5. Пусть K — существенное подпространство π (2.2.6). Тогда P_K перестановочно с $\pi(A)'$ и с $\mathfrak{Z}$; поэтому существует такое измеримое поле проекторов $\zeta \to E(\zeta) \in \mathfrak{B}(H(\zeta))$, что $P_H = \int_Z^{\oplus} E(\zeta)\,d\mu(\zeta)$. Пусть $(u_1, u_2, \ldots)$ — аппроксимативная единица A (1.7.2). Имеем $\pi(u_n) \to P_K$ сильно; следовательно, выбирая при необходимости подпоследовательиость (u_n), имеем $\pi(\zeta)(u_n) \to E(\zeta)$ почти всюду (A79). Поэтому почти всюду $E(\zeta)(H(\zeta))$ есть существенное подпространство $\pi(\zeta)$. В частности, для того чтобы π было невырождено, необходимо и достаточно, чтобы почти все $\pi(\zeta)$ были невырождены.

8.1.6. Предложение. *Пусть* $\zeta \to \pi(\zeta)$, $\zeta \to \pi'(\zeta)$ — *два измеримых поля представлений* A [*по отношению к одному и тому же измеримому полю* $\zeta \to H(\zeta)$]. *Пусть*

$$\pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\,d\mu(\zeta), \quad \pi' = \int^{\oplus} \pi'(\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Для того чтобы $\pi = \pi'$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\pi(\zeta) = \pi'(\zeta)$ *почти всюду.*

Условие, очевидно, достаточно. Предположим, что $\pi = \pi'$. Пусть (x_i) — последовательность, всюду плотная в A. Имеем $\pi(\zeta)(x_i) = \pi'(\zeta)(x_i)$ вне множества N_i меры нуль. Тогда $N = \bigcup N_i$ имеет меру нуль, и для $\zeta \notin N$ имеем $\pi(\zeta)(x_i) = \pi'(\zeta)(x_i)$ для каждого i, поэтому $\pi(\zeta) = \pi'(\zeta)$.

Из 8.1.6 следует, что $\pi(\zeta)$ определяется π с точностью до множества меры нуль.

8.1.7. Предложение. *Пусть $\zeta \to \pi(\zeta)$ — измеримое поле представлений A в $H(\zeta)$. Пусть*

$$H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad \pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta).$$

Предположим, что существует такое представление π_0 в гильбертовом пространстве H_0, что $\pi(\zeta) \simeq \pi_0$ для каждого ζ. Предположим, что μ стандартна. Тогда существует изоморфизм H на $L^2_C(Z, \mu) \otimes H_0$, который переводит $\pi(x)$ в $1 \otimes \pi_0(x)$ для каждого $x \in A$. Представление π кратно π_0.

Это — частный случай A83.

8.1.8. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_\infty$ — стандартные гильбертовы пространства размерности $1, 2, \ldots, \aleph_0$.

Предложение. *Предположим, что Z — объединение попарно дизъюнктных борелевских множеств $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\infty$ и что $\zeta \to H(\zeta)$ сводится на Z_n к постоянному полю $\zeta \to H_n$. Пусть $\zeta \to \pi(\zeta)$ — поле представлений A в $H(\zeta)$. Для того чтобы $\zeta \to \pi(\zeta)$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы $\zeta \to \pi(\zeta)$ было почти всюду равно борелевскому отображению Z в $\mathrm{Rep}(A)$.*

Условие, очевидно, достаточно. С другой стороны, пусть (ξ_l) — ортонормальная база в H_n. Пусть (x_i) — последовательность, всюду плотная в A. Если поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ измеримо, то функции $\zeta \to (\pi(\zeta)(x_i)\xi_l \mid \xi_k)$ измеримы на Z_n, поэтому почти всюду равны борелевским функциям. Следовательно, изменяя $\zeta \to \pi(\zeta)$ на части Z_n меры нуль, можно сделать так, чтобы отображения $\zeta \to (\pi(\zeta)(x_i)\xi_l \mid \xi_k)$ все были борелевскими. Тогда для каждого $x \in A$ и всех $\xi, \eta \in H_n$ отображение $\zeta \to (\pi(\zeta)(x)\xi \mid \eta)$ борелевское; поэтому $\zeta \to \pi(\zeta)$ — борелевское отображение Z_n в $\mathrm{Rep}_n(A)$.

Библиография: [10], [12], [30], [80], [83], [87], [88], [93], [120], [141], [186].

8.2. Эквивалентность двух интегралов представлений.

8.2.1. Предложение. *Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $\zeta \to H(\zeta)$ — измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $\zeta \to \pi(\zeta)$ — измеримое поле представлений A в $H(\zeta)$,*

$$H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad \pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

$\mathfrak{Z}$ — алгебра диагональных операторов в H. Пусть $\tilde{\mu}$ — положительная мера на Z, эквивалентная μ,

$$\tilde{H} = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\tilde{\mu}(\zeta), \quad \tilde{\pi} = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\tilde{\mu}(\zeta),$$

$\tilde{\mathfrak{Z}}$ — алгебра диагональных операторов в $\tilde{H}$. Канонический изоморфизм H на $\tilde{H}$ (A75) *преобразует π в $\tilde{\pi}$ и $\mathfrak{Z}$ в $\tilde{\mathfrak{Z}}$.*

Пусть $\rho(\zeta) = d\tilde{\mu}(\zeta)/d\mu(\zeta)$. Канонический изоморфизм U из H в $\tilde{H}$ есть изоморфизм, который переводит

$$x = \int^{\oplus} x(\zeta)\, d\mu(\zeta) \in H \quad \text{в} \quad Ux = \int^{\oplus} \rho^{-1/2}(\zeta)\, x(\zeta)\, d\tilde{\mu}(\zeta).$$

Ясно, что U переводит $\mathfrak{Z}$ в $\tilde{\mathfrak{Z}}$. Пусть $a \in A$. Имеем

$$\tilde{\pi}(a)Ux = \int^{\oplus} \pi(\zeta)(a)\, \rho^{-1/2}(\zeta)\, x(\zeta)\, d\tilde{\mu}(\zeta) =$$

$$= U \int^{\oplus} \pi(\zeta)(a)\, x(\zeta)\, d\mu(\zeta) = U\pi(a)\, x,$$

поэтому U преобразует π в $\tilde{\pi}$.

8.2.2. Предложение. *Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $\zeta \to H(\zeta)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $\zeta \to \pi(\zeta)$ — μ-измеримое поле представлений A в $H(\zeta)$,*

$$H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad \pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

$\mathfrak{Z}$ — алгебра диагональных операторов в H. Определим аналогичным образом

$$Z_1,\ \mu_1,\ \zeta_1 \to H_1(\zeta_1),\quad \zeta_1 \to \pi_1(\zeta_1),\quad H_1,\ \pi_1,\ \mathfrak{Z}_1.$$

Предположим, что существует:

1° *N — борелевская часть Z μ-меры нуль, N_1 — борелевская часть Z_1 μ_1-меры нуль;*

2° *борелевский изоморфизм η множества $Z - N$ на $Z_1 - N_1$, преобразующий μ в μ_1;*

3° *η-изоморфизм $\zeta \to V(\zeta)$ поля $\zeta \to H(\zeta)$ $(\zeta \in Z - N)$ на поле $\zeta_1 \to H_1(\zeta_1)$ $(\zeta_1 \in Z_1 - N_1)$* (A70, A74) *такой, что $V(\zeta)$ преобразует $\pi(\zeta)$ в $\pi_1(\eta(\zeta))$ для каждого ζ.*

Тогда $V = \int^{\oplus} V(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ преобразует $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}$ и π в π_1.

Обозначим через $1_{H(\zeta)}$, $1_{H_1(\zeta_1)}$ единичные операторы в $H(\zeta)$ и $H_1(\zeta_1)$. Если $f \in L^\infty(Z, \mu)$ и если f_1 — функция на $Z_1 - N_1$, получаемая из $f \mid Z - N$ при помощи η, то V преобразует $\int^{\oplus} f(\zeta)\, 1_{H(\zeta)}\, d\mu(\zeta)$ в $\int^{\oplus} f_1(\zeta_1)\, 1_{H_1(\zeta_1)} d\mu_1(\zeta_1)$, поэтому V преобразует $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}_1$. С другой стороны, пусть $a \in A$ и $x = \int^{\oplus} x(\zeta)\, d\mu(\zeta) \in H$.

Имеем

$$V\pi(a)x = V\left(\int^{\oplus} \pi(\zeta)(a)x(\zeta)\,d\mu(\zeta)\right) =$$
$$= \int^{\oplus} V(\eta^{-1}(\zeta_1))\,\pi(\eta^{-1}(\zeta_1))(a)\,x(\eta^{-1}(\zeta_1))\,d\mu_1(\zeta_1) =$$
$$= \int^{\oplus} \pi_1(\zeta_1)(a)\,V(\eta^{-1}(\zeta_1))\,x(\eta^{-1}(\zeta_1))\,d\mu_1(\zeta_1) = \pi_1(a)\,Vx,$$

поэтому V преобразует π в π_1.

8.2.3. Предложение. *Сохраним обозначения Z, μ, $H(\zeta)$, $\pi(\zeta)$, H, π, $\mathfrak{Z}$, Z_1, ..., $\mathfrak{Z}_1$ 8.2.2. Предположим, что существуют N, N_1, η со свойствами 1° и 2° 8.2.2. Предположим, кроме того, что для каждого $\zeta \in Z - N$ представления $\pi(\zeta)$ и $\pi_1(\eta(\zeta))$ эквивалентны. Если, кроме того, μ стандартна, то существует изоморфизм Vиз H в H_1, преобразующий $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}_1$ и π в π_1.*

Вследствие A82 существует такой η-изоморфизм $\zeta \to V(\zeta)$ поля $\zeta \to H(\zeta)$ $(\zeta \in Z - N)$ на поле $\zeta_1 \to H_1(\zeta_1)$ $(\zeta_1 \in Z_1 - N_1)$, что $V(\zeta)$ переводит $\pi(\zeta)(x)$ в $\pi_1(\eta(\zeta))(x)$ для всех $\zeta \in Z$ и всех $x \in D$ (где D — счетное плотное подмножество в A), следовательно, преобразует $\pi(\zeta)$ в $\pi_1(\eta(\zeta))$ для каждого ζ. Тогда 8.2.3 следует из 8.2.2.

8.2.4. Предложения 8.2.1 и 8.2.2 допускают обращение.

Предложение. *Сохраним обозначения Z, μ, $H(\zeta)$, $\pi(\zeta)$, H, π, $\mathfrak{Z}$, Z_1, ..., $\mathfrak{Z}_1$ 8.2.2. Предположим, что существует изоморфизм U из H на H_1, преобразующий $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}_1$ и π в π_1. Если μ и μ_1 стандартны, то существуют:*

1° *борелевское множество N в Z μ-меры нуль и борелевское множество N_1 в Z_1 μ_1-меры нуль;*

2° *борелевский изоморфизм η из $Z - N$ на $Z_1 - N_1$, переводящий μ в меру $\tilde{\mu}_1$, эквивалентную μ_1;*

3° *такой η-изоморфизм $\zeta \to V(\zeta)$ поля $\zeta \to H(\zeta)$ $(\zeta \in Z - N)$ на поле $\zeta_1 \to H_1(\zeta_1)$ $(\zeta_1 \in Z_1 - N_1)$, что $V(\zeta)$ преобразует $\pi(\zeta)$ в $\pi_1(\eta(\zeta))$ для каждого $\zeta \in Z - N$, причем U есть композиция $\int^{\oplus} V(\zeta)\,d\mu(\zeta)$ и канонического изоморфизма $\int^{\oplus} H_1(\zeta_1)\,d\tilde{\mu}_1(\zeta)$ на H_1.*

Так как U преобразует $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}_1$, то существуют N, N_1, η, $\tilde{\mu}_1$, $\zeta \to V(\zeta)$ со всеми свойствами 8.2.4, кроме того факта, что $V(\zeta)$ преобразует $\pi(\zeta)$ в $\pi_1(\eta(\zeta))$ для $\zeta \in Z - N$ (A85). Так как U есть композиция $\int^{\oplus} V(\zeta)\,d\mu(\zeta)$ и канонического изоморфизма $\int^{\oplus} H_1(\zeta)\,d\tilde{\mu}_1(\zeta)$ на H_1, то U преобразует π в $\int^{\oplus} \pi_1'(\zeta_1)\,d\mu_1(\zeta_1)$, где $\pi_1'(\zeta_1)$ есть результат преобразования $\pi(\eta^{-1}(\zeta_1))$ с помощью

$V(\eta^{-1}(\zeta_1))$ (8.2.1 и 8.2.2). Так как U преобразует π в π_1, имеем $\pi_1(\zeta_1)=\pi_1'(\zeta_1)$ почти всюду (8.1.6). Присоединяя к N надлежащее множество меры нуль, получаем, что $V(\zeta)$ преобразует $\pi(\zeta)$ в $\pi_1(\eta(\zeta))$ для $\zeta\in Z-N$.

Библиография: [10], [12], [30], [80], [83], [87], [88], [93], [120], [141].

8.3. Дезинтегрирование представлений.

8.3.1. Лемма. *Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $\zeta\to H(\zeta)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $H=\int^{\oplus} H(\zeta)\,d\mu(\zeta)$, π — представление A в H. Предположим, что каждый оператор $\pi(x)$ $(x\in A)$ разложим.*

Тогда для каждого $\zeta\in Z$ существует такое представление $\pi(\zeta)$ C^*-алгебры A в $H(\zeta)$, что $\pi=\int^{\oplus}\pi(\zeta)\,d\mu(\zeta)$.

Пусть $(x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность различных точек A, всюду плотная в A. Можно предположить, расширяя, если нужно, эту последовательность, что множество x_i есть инволютивная подалгебра B C^*-алгебры A над полем рациональных комплексных чисел. Выберем произвольно для каждого i такое измеримое поле $\zeta\to T_i(\zeta)$, что

$$\pi(x_i)=\int^{\oplus} T_i(\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Пусть N_i — множество меры нуль таких $\zeta\in Z$, что $\|T_i(\zeta)\|>\|\pi(x_i)\|$. Объединение N множеств N_i имеет меру нуль. С другой стороны, между x_i существует счетное множество соотношений вида $x_k=\lambda_1x_i+\lambda_2x_j$ (λ_1, λ_2 — комплексные рациональные) вида $x_k=x_ix_j$ и вида $x_j=x_i^*$. Эти отношения влекут для почти всех ζ

$$T_k(\zeta)=\lambda_1T_i(\zeta)+\lambda_2T_j(\zeta),\qquad T_k(\zeta)=T_i(\zeta)\,T_j(\zeta),$$
$$T_j(\zeta)=T_i(\zeta)^*.$$

Следовательно, существует такое множество N меры нуль в Z, что для $\zeta\notin N'$ отображение $x_i\to T_i(\zeta)$ есть морфизм B в $\mathfrak{B}(H(\zeta))$ (рассматриваемых как инволютивные алгебры над полем комплексных рациональных чисел). Заменим $T_i(\zeta)$ на 0 для $\zeta\in N\cup N'$. Тогда для каждого $\zeta\in Z$ имеем $\|T_i(\zeta)\|\leqslant\|\pi(x_i)\|\leqslant\|x_i\|$ для любого i и отображение $x_i\to T_i(\zeta)$ есть морфизм B в $\mathfrak{B}(H(\zeta))$. Этот морфизм продолжается единственным образом до представления $\pi(\zeta)$ C^*-алгебры A в $H(\zeta)$. Пусть $x\in A$, положим

$\pi(x)=\int^{\oplus} T(\zeta)\,d\mu(\zeta)$. Существует последовательность (x_{n_i}) элементов B, стремящаяся к x. Имеем

$$\|T(\zeta)-\pi(\zeta)(x_{n_i})\|\leqslant\|x-x_n\|$$

почти всюду; поэтому почти всюду $\pi(\zeta)\,(x_{n_i})$ стремится к $T(\zeta)$. Следовательно, $T(\zeta)=\pi(\zeta)(x)$ почти всюду, так что $\pi(x)=$ $=\int^{\oplus}\pi(\zeta)(x)\,d\mu(\zeta)$.

8.3.2. Теорема. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, π — представление A в H, $\mathfrak{Z}$ — коммутативная подалгебра фон Неймана в $\pi(A)'$. Существует стандартное борелевское пространство Z, ограниченная положительная мера μ на Z, измеримое поле $\zeta\to H(\zeta)$ гильбертовых пространств на Z, измеримое поле $\zeta\to\pi(\zeta)$ представлений A в $H(\zeta)$ и изоморфизм H на $\int^{\oplus} H(\zeta)\,d\mu(\zeta)$, который переводит $\mathfrak{Z}$ в алгебру диагональных операторов и π в $\int^{\oplus}\pi(\zeta)\,d\mu(\zeta)$.*

Существует (A84) стандартное борелевское пространство Z, ограниченная положительная мера μ на Z, измеримое поле $\zeta\to H(\zeta)$ гильбертовых пространств на Z и изоморфизм H на $\int^{\oplus} H(\zeta)\,d\mu(\zeta)$, который преобразует $\mathfrak{Z}$ в алгебру диагональных операторов. Так как $\mathfrak{Z}\subset\pi(A)'$, то каждый оператор $\pi(x)$ $(x\in A)$ разложим. Тогда достаточно применить 8.3.1.

Библиография: [10], [12], [30], [80], [83], [87], [88], [93], [120], [141].

8.4. Центральное дезинтегрирование.

8.4.1. Лемма. *Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $\zeta\to H(\zeta)$ — измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $\zeta\to\pi(\zeta)$ — измеримое поле представлений A в $H(\zeta)$, $\mathfrak{A}(\zeta)$ — сильное замыкание $\pi(\zeta)(A)$,*

$$H=\int^{\oplus} H(\zeta)\,d\mu(\zeta),\qquad \pi=\int^{\oplus}\pi(\zeta)\,d\mu(\zeta),$$

$\mathfrak{Z}$ — алгебра диагональных операторов, $\mathfrak{A}$ — сильное замыкание $\pi(A)$. Предположим, что $\mathfrak{Z}\subset\mathfrak{A}$. Тогда:

(i) $\mathfrak{A}=\int^{\oplus}\mathfrak{A}(\zeta)\,d\mu(\zeta)$.

(ii) *Если $\mathfrak{Z}$ есть центр $\mathfrak{A}$, то $\pi(\zeta)$ почти всюду является фактор-представлением.*

(iii) *Если μ стандартна, то существует такая часть N меры нуль в Z, что для ζ, $\zeta' \in Z - N$ $(\zeta \neq \zeta')$ имеем $\pi(\zeta) \mathring{|} \pi(\zeta')$.*

Так как $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}$, то π невырождено, поэтому $\pi(\zeta)$ невырождено почти всюду (8.1.5) и $\mathfrak{A}$ [соотв. $\mathfrak{A}(\zeta)$] есть также алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(A)$ [соотв. $\pi(\zeta)(A)$]. Заметим, что $\mathfrak{Z} \subset \pi(A)' = \mathfrak{A}'$, следовательно, $\mathfrak{Z}$ содержится в центре $\mathfrak{A}$.

Пусть (x_i) — последовательность, всюду плотная в A. Тогда $\mathfrak{A}(\zeta)$ есть алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(\zeta)(x_i)$. С другой стороны, $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как алгебру фон Неймана, порожденную $\pi(x_i)$ и $\mathfrak{Z}$. Однако $\pi(x_i) = \int^{\oplus} \pi(\zeta)(x_i)\, d\mu(\zeta)$. Поэтому $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ вследствие A88. Если $\mathfrak{Z}$ есть центр $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}(\zeta)$ — почти всюду фактор (A89) и $\pi(\zeta)$ почти всюду есть фактор-представление.

Пусть $T = \int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta) \in \mathfrak{A}$. Так как T — сильный предел элементов $\pi(A)$, то существует такая часть $N(T)$ меры нуль в Z и такая последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ в A, что для $\zeta \in Z - N(T)$ $\pi(\zeta)(x_i)$ сильно стремится к $T(\zeta)$ (A13 и A79). Пусть тогда ζ, $\zeta' \in Z - N(T)$ и R — оператор, сплетающий $\pi(\zeta)$ в $\pi(\zeta')$. Равенство

$$R\pi(\zeta)(x_i) = \pi(\zeta')(x_i) R,$$

выполненное для каждого i, влечет $RT(\zeta) = T(\zeta')R$.

Установив это, предположим, что Z стандартно, и пусть $(Y_1, Y_2, \ldots)$ — последовательность борелевских частей Z, отделяющая точки Z. Пусть φ_i — характеристическая функция Y_i; она определяет элемент E_i в $\mathfrak{Z}$. Объединение N множеств $N(E_i)$ имеет меру нуль. Пусть ζ, $\zeta' \in Z - N$ таковы, что $\zeta \neq \zeta'$. Пусть R — оператор, сплетающий $\pi(\zeta)$ и $\pi(\zeta')$. Вследствие того, что мы видели выше, имеем для каждого i:

$$RE_i(\zeta) = E_i(\zeta')R, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_i(\zeta)R = \varphi_i(\zeta')R.$$

Однако существует такое i, что $\varphi_i(\zeta) = 1$, $\varphi_i(\zeta') = 0$, откуда $R = 0$. Поэтому $\pi(\zeta) \mathring{|} \pi(\zeta')$. Это доказывает (iii).

8.4.2. Теорема. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, π — невырожденное представление в H, $\mathfrak{Z}$ — центр алгебры фон Неймана, порожденной $\pi(A)$. Тогда:*

(i) *Существуют: стандартная мера μ на $\widehat{A}$, μ — измеримое поле $\zeta \to H(\zeta)$ гильбертовых пространств на $\widehat{A}$, μ — измеримое поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ ненулевых фактор-представлений A в $H(\zeta)$, такое, что $\pi(\zeta) \in \zeta$, и изоморфизм W пространства H на $\int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$,* *который преобразует* $\mathfrak{Z}$ *в алгебру диагональных операторов и* π *в* $\int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$.

(ii) *Пусть* μ_1, $\zeta \to H_1(\zeta)$, $\zeta \to \pi_1(\zeta)$, W_1 *имеют те же свойства. Тогда* μ *и* μ_1 *эквивалентны. После изменения* $H_1(\zeta)$ *и* $\pi_1(\zeta)$ *на множестве меры нуль существует такой изоморфизм* $\zeta \to V(\zeta)$ *поля* $\zeta \to H(\zeta)$ *на* $\zeta \to H_1(\zeta)$, *что* $V(\zeta)$ *преобразует* $\pi(\zeta)$ *в* $\pi_1(\zeta)$ *для каждого* ζ.

Применим к π и $\mathfrak{Z}$ теорему 8.3.2 и ее обозначения Z, μ, $\zeta \to H(\zeta)$, $\zeta \to \pi(\zeta)$; существует изоморфизм H на $\int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, который преобразует $\mathfrak{Z}$ в алгебру диагональных операторов и π в $\int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Так как π невырождено, то $\mathfrak{Z}$ содержится в сильном замыкании $\pi(A)$. Вследствие 8.4.1 почти все $\pi(\zeta)$ суть попарно дизъюнктные фактор-представления. Вследствие 8.1.5 почти все $\pi(\zeta)$ — ненулевые. Поэтому после изменения $H(\zeta)$ и $\pi(\zeta)$ на множестве меры нуль можно предположить, что $\pi(\zeta)$ — попарно дизъюнктные ненулевые фактор-представления. Сверх того, с помощью изоморфизмов в $H(\zeta)$ можно считать, что $\zeta \to \pi(\zeta)$ есть борелевское отображение Z в $\mathrm{Fac}(A)$ (8.1.8). Так как $\pi(\zeta)$ попарно дизъюнктны, то это отображение инъективно; следовательно (B21), это — борелевский изоморфизм Θ пространства Z на борелевскую часть B в $\mathrm{Fac}(A)$, которая пересекается с каждым классом квазиэквивалентности не более чем в одной точке. Пусть ψ — сужение на B канонического отображения $\mathrm{Fac}(A) - \widehat{A}$; это — борелевский изоморфизм B на борелевскую часть C в $\widehat{A}$ (7.2.3). Тогда $\psi \circ \Theta$ есть борелевский изоморфизм Z на C. Следовательно, можно заменить Z на C и предположить, что класс квазиэквивалентности $\pi(\zeta)$ есть ζ для каждого $\zeta \in C$. Отсюда следует (i), если продолжить μ на $\widehat{A}$, полагая $\mu(\widehat{A} - C) = 0$.

Введем обозначения μ_1, $\zeta \to H_1(\zeta)$, $\zeta \to \pi_1(\zeta)$, W_1 из (ii). Используем 8.2.4, взяв $Z = Z_1 = \widehat{A}$, откуда получим N, N_1, $\tilde{\mu}_1$, η и $V(\zeta)$. Для $\zeta \in Z - N$ $V(\zeta)$ преобразует $\pi(\zeta)$ в $\pi_1(\eta(\zeta))$. Поэтому классы квазиэквивалентности ζ и $\eta(\zeta)$ представлений $\pi(\zeta)$ и $\pi_1(\eta(\zeta))$ совпадают. Таким образом, η есть тождественное отображение на $Z - N$. Поэтому μ и μ_1 эквивалентны, и (ii) доказано.

8.4.3. Следовательно, класс меры μ на $\widehat{A}$ определяется представлением π однозначно.

Определение. *Говорят, что этот класс мер связан с* π.

Дезинтегрирование

$$\pi \simeq \int_{\widehat{A}}^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$$

из теоремы 8.4.2 называется, нестрого говоря, центральным дезинтегрированием π.

8.4.4. Предложение. *Пусть π, ρ — два невырожденных представления A в сепарабельных гильбертовых пространствах. Для того чтобы $\pi \approx \rho$, необходимо и достаточно, чтобы классы мер на $\widehat{A}$, связанные с π и ρ, совпадали.*

Предположим, что классы мер на $\widehat{A}$, связанные с π и ρ, совпадают. Пусть Y (соотв. $\mathfrak{Z}$) — центр алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$ (соот. $\mathfrak{B}$), порожденной $\pi(A)$ [соотв. $\rho(A)$]. Существуют: стандартная мера μ на $\widehat{A}$, измеримое поле $\zeta \to H(\zeta)$ (соотв. $\zeta \to K(\zeta)$) гильбертовых пространств на $\widehat{A}$, измеримое поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ (соотв. $\zeta \to \rho(\zeta)$) фактор-представлений A в $H(\zeta)$ [соотв. $K(\zeta)$] такие, что: $\pi(\zeta) \in \zeta$ [соотв. $\rho(\zeta) \in \zeta$], $\pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ $\left[\text{соотв. } \rho = \int^{\oplus} \rho(\zeta)\, d\mu(\zeta)\right]$, Y (соотв. $\mathfrak{Z}$) становится алгеброй диагональных операторов (все это с точностью до изоморфизма). Так как $\pi(\zeta) \approx \rho(\zeta)$ для каждого ζ, то существует такой изоморфизм $\Phi(\zeta)$ алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}(\zeta)$, порожденной $\pi(\zeta)(A)$, на алгебру фон Неймана $\mathfrak{B}(\zeta)$, порожденную $\rho(\zeta)(A)$, что

$$\Phi(\zeta)(\pi(\zeta)(x)) = \rho(\zeta)(x) \quad \text{для каждого} \quad x \in A.$$

Имеем

$$\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad \mathfrak{B} = \int^{\oplus} \mathfrak{B}(\zeta)\, d\mu(\zeta) \quad (8.4.1).$$

Покажем, что $\zeta \to \Phi(\zeta)$ есть измеримое поле изоморфизмов (A91). Пусть $T = \int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta) \in \mathfrak{A}$. Существует такая последовательность (x_i) в A, что $\pi(x_i)$ сильно стремится к T. Переходя к подпоследовательности, можно предположить, что $\pi(\zeta)(x_i)$ сильно стремится к $T(\zeta)$ почти всюду. Тогда $\Phi(\zeta)(\pi(\zeta)(x))$ сильно стремится к $\Phi(\zeta)(T(\zeta))$ (A1 и A27). Так как поля $\zeta \to \Phi(\zeta)(\pi(\zeta)(x_i)) = \rho(\zeta)(x_i)$ измеримы, видим, что поле $\zeta \to \Phi(\zeta)(T(\zeta))$ измеримо, что доказывает наше утверждение. Тогда $\Phi = \int^{\oplus} \Phi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ (A91), который для каждого $x \in A$ переводит

$$\pi(x) = \int^{\oplus} \pi(\zeta)(x)\, d\mu(\zeta) \quad \text{в} \quad \int^{\oplus} \rho(\zeta)(x)\, d\mu(\zeta) = \rho(x).$$

Поэтому $\pi \approx \rho$.

Предположим, что $\pi \approx \rho$. Ясно, что если $\pi \approx \int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ и если n — кардинальное число $\leqslant \aleph_0$, имеем $n\pi \simeq \int^{\oplus} n\pi(\zeta) d\mu(\zeta)$. Поэтому классы мер, связанные с π и $n\pi$, совпадают. Но $\aleph_0\pi \simeq \aleph_0\rho$ (5.3.8), поэтому классы мер, связанные с π и ρ, совпадают.

8.4.5. Предложение. *Пусть π, ρ — два невырожденных представления A в сепарабельном гильбертовом пространстве. Пусть C и D — классы мер на $\widehat{A}$, связанные с π и ρ. Для того чтобы ρ было квазиэквивалентно подпредставлению π, необходимо и достаточно, чтобы D было классом с базисом C.*

Предположим, что ρ квазиэквивалентно подпредставлению ρ' представления π. Пусть $E \in \pi(A)'$ — проектор, соответствующий ρ', $\mathfrak{Z}$ — центр $\pi(A)'$, $E_1 \in \mathfrak{Z}$ — центральный носитель E, ρ_1 — подпредставление π, соответствующее E_1. Имеем $\rho \simeq \rho' \approx \rho_1$ [условие (v) 5.3.1], поэтому D есть также класс мер, связанный с ρ_1 (8.4.4). Но если $\pi = \int^{\oplus}_{\widehat{A}} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — центральное дезинтегрирование π, то $\mu \in C$. Пусть Y — μ-измеримая часть $\widehat{A}$, характеристическая функция которой φ_Y соответствует E_1. Имеем

$$\rho_1 = \int^{\oplus}_{\widehat{A}} \pi(\zeta)\, d(\varphi_Y \cdot \mu)(\zeta),$$

поэтому D есть класс меры $\varphi_Y \cdot \mu$ и D — с базисом C.

Предположим, что D — класс с базисом C. Пусть $\mu \in C$. Существует такая μ-измеримая часть Y в $\widehat{A}$, что $\varphi_Y \cdot \mu \in D$, где φ_Y обозначает характеристическую функцию Y. Пусть $\pi = \int^{\oplus}_{\widehat{A}} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — центральное дезинтегрирование π. Пусть E_1 — диагональный проектор, соответствующий φ_Y и ρ_1 — подпредставление π, соответствующее E_1. Класс мер, связанный с ρ_1, есть класс $\varphi_Y \cdot \mu$, поэтому он совпадает с D и $\rho \approx \rho_1$ (8.4.4).

8.4.6. Вторая часть предыдущего доказательства показывает, что если класс мер C на $\widehat{A}$ связан с представлением A

(в сепарабельном гильбертовом пространстве), то каждый класс мер, подчиненный C, также связан с представлением A.

8.4.7. Предложение. *Пусть π, ρ, C, D такие же как в 8.4.5. Для того чтобы π и ρ были дизъюнктны, необходимо и достаточно, чтобы C и D были независимы.*

Действительно, сказать, что π и ρ не дизъюнктны — означает, что существует ненулевое представление, квазиэквивалентное подпредставлению π и подпредставлению ρ. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовал ненулевой класс мер, подчиненных C и D (8.4.5 и 8.4.6), иначе говоря, чтобы C и D были не независимы.

8.4.8. Предложение. *Пусть π — невырожденное представление A в сепарабельном гильбертовом пространстве, $\pi = \int_{\widehat{A}}^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — его центральное разложение. Для того, чтобы π было типа* I, *необходимо и достаточно, чтобы почти все $\pi(\zeta)$ были типа* I, *иначе говоря, чтобы μ было сосредоточено на $\widehat{A}$.*

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(\zeta)$ — алгебры фон Неймана, порожденные $\pi(A)$, $\pi(\zeta)(A)$. Имеем $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ [8.4.1 (i)], поэтому $\mathfrak{A}$ — типа I тогда и только тогда, когда почти все $\mathfrak{A}(\zeta)$ суть типа I (A90).

Библиография: [11], [20], [185].

8.5. Дезинтегрирование на неприводимые представления.

8.5.1. Лемма. *Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $\zeta \to H(\zeta)$ — измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $\zeta \to \pi(\zeta)$ — измеримое поле представлений A в $H(\zeta)$,*

$$H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta), \qquad \pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

$\mathfrak{Z}$ — алгебра диагональных операторов. Следующие два условия эквивалентны:

(i) *$\mathfrak{Z}$ есть максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в $\pi(A)'$;*

(ii) *почти все $\pi(\zeta)$ неприводимы.*

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}(\zeta)$ — алгебры фон Неймана, порожденные $\pi(A)$, $\pi(\zeta)(A)$. Пусть x_i — последовательность, всюду плотная в A. Тогда $\pi(x_i)$ порождают алгебру фон Неймана $\mathfrak{A}$, $\pi(\zeta)(x_i)$ порождают алгебру фон Неймана $\mathfrak{A}(\zeta)$ и $\pi(x_i) = \int^{\oplus} \pi(\zeta)(x_i)\, d\mu(\zeta)$. Поэтому (A86) для того, чтобы $\mathfrak{Z}$ была максимальной коммутативной подалгеброй $\pi(A)' = \mathfrak{A}'$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}(\zeta)=\mathfrak{B}(H(\zeta))$ почти всюду, т. е. чтобы $\pi(\zeta)$ было неприводимо почти всюду.

8.5.2. Теорема. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, π — представление A в H и $\mathfrak{Z}$ — максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в $\pi(A)'$. Существуют: стандартное борелевское пространство Z, ограниченная положительная мера μ на Z, измеримое поле $\zeta\to H(\zeta)$ гильбертовых пространств на Z, измеримое поле $\zeta\to\pi(\zeta)$ неприводимых представлений A в $H(\zeta)$ и изоморфизм H на $\int^{\oplus} H(\zeta)\,d\mu(\zeta)$, который преобразует $\mathfrak{Z}$ в алгебру диагональных операторов и π в $\int^{\oplus}\pi(\zeta)\,d\mu(\zeta)$.*

Это следует из 8.3.2 и 8.5.1.

8.5.3. Напомним, что если π и $\mathfrak{Z}$ даны, то дезинтегрирование π, даваемое теоремой 8.5.2, имеет некоторую однозначность (8.2.4). Но если при данном π меняется $\mathfrak{Z}$, то это дезинтегрирование может полностью измениться настолько, что никакое неприводимое представление не будет принимать участия в обоих разложениях одновременно (ср. 18.9.8). (В этом отношении центральное дезинтегрирование обладает более удовлетворительными свойствами.) Однако это специфическое обстоятельство исключается в случае GCR-C^*-алгебр.

Библиография: [10], [12], [30], [80], [81], [83], [87], [88], [93], [120], [141].

8.6. Случай GCR-C^*-алгебр.

8.6.1. Пусть A — сепарабельная GCR-C^*-алгебра. Тогда $\hat{A}=\hat{A}$ — стандартное борелевское пространство (4.6.1 и 7.3.7). Пусть $\hat{A}_n$ ($n=1, 2, \ldots, \infty$) — множество элементов $\hat{A}$ размерности $1, 2, \ldots, \infty$; это — борелевская часть $\hat{A}$ [3.6.3 (i)]. Пусть H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n. Существует, и притом единственное, борелевское поле $\zeta\to H(\zeta)$ гильбертовых пространств на $\hat{A}$ (A96), которое сводится на $\hat{A}_n$ к постоянному полю, определяемому H_n. Мы назовем его *каноническим полем.* Для каждой положительной меры μ на $\hat{A}$ каноническое поле $\zeta\to H(\zeta)$ автоматически снабжается структурой μ-измеримого поля (A97).

8.6.2. Лемма. *Сохраним предыдущие обозначения.*

(i) *Существует такое поле $\zeta\to\pi(\zeta)$ ($\zeta\in\hat{A}$) представлений A в $H(\zeta)$, что $\pi(\zeta)$ принадлежит классу эквивалентности ζ для каждого $\zeta\in\hat{A}$ и измеримо для каждой положительной меры на $\hat{A}$.*

(ii) *Пусть $\zeta \to \pi_1(\zeta)$ — другое поле представлений, имеющее свойства* (i). *Для каждой положительной меры μ на $\hat{A}$ имеем*

$$\int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta) \simeq \int^{\oplus} \pi_1(\zeta)\, d\mu(\zeta).$$

Существует такое борелевское отображение $\zeta \to \pi(\zeta)$ множества $\hat{A}$ в $\operatorname{Irr}(A)$, что для каждого $\zeta \in \hat{A}$ представление $\pi(\zeta)$ лежит в классе ζ (4.6.2). Для каждой положительной меры на Z поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ измеримо (8.1.8). Это доказывает (i). Утверждение (ii) следует из предложения 8.2.3, примененного к

$$Z = Z_1 = \hat{A}, \quad \mu = \mu_1, \quad H(\zeta) = H_1(\zeta), \quad N = N_1 = \varnothing,$$

η — тождественное отображение $\hat{A}$.

8.6.3. Лемма 8.6.2 (ii) показывает, что с каждой положительной мерой μ на $\hat{A}$ связан класс эквивалентности представлений A, определяемый μ (в сепарабельном пространстве; ср. A73).

Этот класс эквивалентности представлений обозначается $\int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta\, d\mu(\zeta)$.

8.6.4. Предложение. *Пусть A — сепарабельная GCR-C^*-алгебра, μ — положительная мера на $\hat{A}$. Пусть $\zeta \to \pi(\zeta)$ ($\zeta \in \hat{A}$) — μ-измеримое поле представлений A в пространствах $H(\zeta)$, введенное в* 8.6.1, *такое, что $\pi(\zeta)$ принадлежит классу ζ для каждого $\zeta \in \hat{A}$. Пусть $\pi = \int_{\hat{A}}^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ и $\mathfrak{Z}$ — алгебра диагональных операторов.*

Тогда $\pi(A)' = \mathfrak{Z}$.

Для каждой измеримой части Y в $\hat{A}$ обозначим через E_Y диагональный проектор, соответствующий характеристической функции Y. Каждая открытая часть $\hat{A}$ отождествляется со спектром $\hat{I}$ замкнутого двустороннего идеала I в A (3.2.2). Пусть $(x_1, x_2, \ldots)$ — аппроксимативная единица C^*-алгебры E (1.7.2). Если $\zeta \in \hat{A} - \hat{I}$, имеем $\pi(\zeta)(x_n) = 0$ для каждого n. Если $\zeta \in \hat{I}$, то $\pi(\zeta) \mid I$ — невырожденное представление I, поэтому $\pi(\zeta)(x_n)$ сильно стремится к 1 и $\pi(x_n)$ сильно стремится к $I_{\hat{I}}$ (A79). Итак, $E_{\hat{I}}$ принадлежит алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$, порожденной $\pi(A)$. Переходя к пределу, получаем, что $E_Y \in \mathfrak{A}$ для любой борелевской части Y в $\hat{A}$. Поэтому $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}$ и, вследствие этого, $\mathfrak{Z}' \supset \mathfrak{A}'$. Кроме того, вследствие 8.5.1, $\mathfrak{Z}$ — максимальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{A}'$, иначе говоря, $\mathfrak{Z}' \cap \mathfrak{A}' \supset \mathfrak{Z}$. Так как $\mathfrak{Z}' \supset \mathfrak{A}'$, получаем отсюда, что $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{Z}$. Но включение $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}'$ очевидно, поэтому $\mathfrak{A}' = \mathfrak{Z}$.

8.6.5. Теорема. *Пусть A — сепарабельная GCR-C^*-алгебра.*

(i) *Для каждой положительной меры μ на $\hat{A}$ представление $\int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu(\zeta)$ есть невырожденное представление без кратности и класс мер на $\hat{A} = \hat{A}$, связанный с этим представлением, есть класс меры μ.*

(ii) *Пусть μ и μ_1 — две положительные меры на $\hat{A}$. Для того чтобы*

$$\int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu(\zeta) = \int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu_1(\zeta),$$

необходимо и достаточно, чтобы μ и μ_1 были эквивалентны.

(iii) *Каждое невырожденное представление A без кратности в сепарабельном гильбертовом пространстве принадлежит классу $\int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu(\zeta)$ для некоторой ограниченной положительной меры μ на $\hat{A}$.*

Пусть $\pi = \int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu(\zeta)$. Вследствие 8.6.4 $\pi(A')$ коммутативна, поэтому π без кратности. Вследствие 8.1.5 π невырождено. Так как $\mathfrak{Z}$ — центр алгебры фон Неймана, порожденной $\pi(A)$ (8.6.4), то класс μ есть класс мер, связанный с π.

Если μ и μ_1 эквивалентны, имеем

$$\int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu(\zeta) = \int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu_1(\zeta)$$

вследствие 8.2.1. Если

$$\int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu(\zeta) = \int_{\hat{A}}^{\oplus} \zeta \, d\mu_1(\zeta),$$

μ и μ_1 эквивалентны вследствие 8.4.2 (ii).

Наконец, пусть π — невырожденное представление A без кратности в сепарабельном гильбертовом пространстве. Пусть μ — ограниченный элемент в классе мер, связанном с π, и

$\rho = \int\limits_{\widehat{A}}^{\oplus} \zeta\, d\mu(\zeta)$. Тогда, вследствие (i), ρ есть представление без кратности и класс мер, связанный с ρ, есть класс μ. Поэтому $\rho \approx \pi$ (8.4.4) и $\rho \simeq \pi$ (5.4.6).

8.6.6. Теорема. *Пусть A — сепарабельная* GCR-C^**-алгебра.*

(i) *Пусть π — невырожденное представление A в сепарабельном гильбертовом пространстве. Существуют положительные меры $\mu_2, \mu_2, \ldots, \mu_\infty$ на $\widehat{A}$, попарно независимые и такие, что*

$$\pi \simeq \int^{\oplus} \zeta\, d\mu_1(\zeta) \oplus 2 \int^{\oplus} \zeta\, d\mu_2(\zeta) \oplus \ldots \oplus \aleph_0 \int^{\oplus} \zeta\, d\mu_\infty(\zeta).$$

(ii) *Если $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_\infty$ обладают теми же свойствами, то μ_n и μ'_n эквивалентны для каждого n.*

(iii) *Класс мер на $\widehat{A} = \widehat{A}$, связанный с π, есть класс $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\infty$.*

Так как H_π сепарабельно, то $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \ldots \oplus \pi_\infty$, где π_n — кратности n (полагаем $\infty = \aleph_0$) и π_n попарно дизъюнктны (5.4.9 и 5.5.2). Поэтому $\pi \simeq \rho_1 \oplus 2\rho_2 \oplus \ldots \oplus \aleph_0 \rho_\infty$, где ρ_n попарно дизъюнктны и без кратности. Вследствие 8.6.5 имеем $\rho_n = \int^{\oplus} \zeta\, d\mu_n(\zeta)$, где μ_n — положительная мера на $\widehat{A}$. Так как ρ_n попарно дизъюнктны, то μ_n попарно независимы (8.4.7).

Пусть $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_\infty$ имеют свойства (i) и $\rho'_n = \int^{\oplus} \zeta\, d\mu'_n(\zeta)$. Тогда

$$\pi \simeq \rho'_1 \oplus 2\rho'_2 \oplus \ldots \oplus \aleph_0 \rho'_\infty$$

и ρ'_n попарно дизъюнктны (8.4.7). Вследствие 5.4.9 имеем $n\rho_n \approx n\rho'_n$. Поэтому μ_n и μ'_n эквивалентны для каждого n.

Пусть $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\infty$. Тогда $\pi \approx \int^{\oplus} \zeta\, d\mu(\zeta)$, поэтому класс мер на $\widehat{A}$, связанный с π, есть μ.

8.6.7. Мы видим, что, для того чтобы знать представление A с точностью до эквивалентности, нужно знать класс мер и некоторые «кратности». В случае центрального дезинтегрирования важен только класс мер. Это объясняется тем, что мы изучали представления с точностью до квазиэквивалентности и что в этом случае вопросы кратности не возникают (напомним, что представление квазиэквивалентно всем своим кратным).

8.6.8. Предложение. *Пусть A — сепарабельная* GCR-C^*-*алгебра. Пусть π — невырожденное представление A в сепара-*

бельном гильбертовом пространстве, μ *— элемент из класса мер, связанного с* π, S *— носитель* μ *(наименьшее замкнутое множество в* $\hat{A}$*, дополнение которого имеет* μ*-меру нуль). Пусть* $\rho \in \hat{A}$.

(i) *Для того чтобы* ρ *слабо содержалось в* π*, необходимо и достаточно, чтобы* $\rho \in S$.

(ii) *Для того чтобы* ρ *содержалось в* π*, необходимо и достаточно, чтобы* $\mu(\{\rho\}) > 0$.

Пусть $\pi = \int_{\hat{A}}^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, где $\pi(\zeta)$ имеет класс ζ.

Предположим, что $\rho \notin S$. Так как S замкнуто, то существует такой $x \in A$, что $\rho(x) \neq 0$ и $\sigma(x) = 0$ для $\sigma \in S$. Тогда $\pi(\zeta)(x) \neq 0$ для почти всех ζ, поэтому $\pi(x) = 0$ и U не содержится слабо в π.

Предположим, что $\rho \in S$. Пусть $x \in A$ таков, что $\pi(x) = 0$. Пусть U — открытая часть A, образованная такими $\zeta \in \hat{A}$, что $\pi(\zeta)(x) = 0$. Так как $\pi(\zeta)(x) = 0$ почти всюду, то U имеет меру нуль, поэтому не пересекается с S; следовательно, $\rho(x) = 0$ и ρ слабо содержится в π, что доказывает (i).

Пусть ε_ρ — мера Дирака для ρ. Утверждение, что $\mu(\{\rho\}) > 0$, означает, что множество μ-меры нуль имеет ε_ρ-меру нуль, иначе говоря, что ε_ρ подчинено μ, иначе говоря, что ρ квазиэквивалентно подпредставлению ρ' представления π (8.4.5). Но каждое представление, квазиэквивалентное неприводимому представлению, содержит его (5.2.1 и 5.3.1). Предыдущее условие означает поэтому также, что ρ эквивалентно подпредставлению π.

8.6.9. Сохраним обозначения 8.6.8. Мы видим, что носитель π (3.4.6) есть не что иное, как носитель μ. Говорят, что часть P в $\hat{A}$ несет π, если P несет μ, иначе говоря, если $\mu(\hat{A} - P) = 0$. Естественно, S несет π, но, вообще говоря, существуют строго меньшие S множества, которые несут π. Однако если $\rho \in \hat{A}$ таково, что $\mu(\{\rho\}) > 0$, то каждое множество, несущее π, необходимо содержит ρ.

Библиография: [20], [83], [165].

8.7. Интермедия.

Так как разложение представлений на неприводимые представления является одной из наших важнейших задач, то мы резюмируем полученные основные результаты.

Для конечномерных представлений имеем идеальную ситуацию: конечномерное представление разлагается в конечную сумму неприводимых представлений, и два таких разложения изоморфны.

Перейдем к бесконечномерным представлениям и ограничимся рассмотрением сепарабельных C^*-алгебр и представлений в сепарабельных пространствах. Самые простые примеры (а именно, примеры коммутативных алгебр) показывают, что нужно заменить понятие гильбертовой суммы понятием гильбертова интеграла. Это соответствует хорошо известному факту, что разложение эрмитова оператора бесконечной размерности требует введения «бесконечно малых» спектральных проекторов.

Если A — сепарабельная GCR-C^*-алгебра (случай, важный для приложений к теории групп), то имеется достаточно удовлетворительная теория. Множество $\hat{A}$ неприводимых представлений есть локально квазикомпактное пространство со счетной базой, которое почти локально компактно (это в точности так, если A — C^*-алгебра с непрерывным следом). Борелевская структура, определенная топологией, совпадающая со структурой Макки, стандартна. Каждое представление есть однозначно определенная сумма представлений кратности 1, 2, ..., ∞. Каждое представление кратности n есть сумма n эквивалентных представлений без кратности, класс которых однозначно определен. Каждое невырожденное представление π без кратности записывается как интеграл $\int_{\hat{A}} \zeta\, d\mu_\pi(\zeta)$, где класс μ_π вполне определяется представлением π. Отображение $\pi \to$ $\to$ класс μ_π определяет биекцию множества классов невырожденных представлений без кратности на множество классов мер на $\hat{A}$.

Если A — сепарабельная не GCR C^*-алгебра, то положение сложнее. Топологическое пространство $\hat{A}$, борелевская структура, подчиненная топологии, и борелевская структура Макки (на этот раз отличная от предыдущей) имеют патологические свойства (см. 9.5.6). Каждое представление может быть записано как интеграл неприводимых представлений, но нельзя утверждать единственность этой записи в виде интеграла. С другой стороны, так как существуют представления типов II и III (9.5.4), то нельзя свести задачу к представлениям без кратности. Введем квазиспектр $\widehat{A}$, который является не топологическим, а борелевским пространством (и который сводится к борелевскому пространству $\hat{A}$, если A — GCR-алгебра). Это борелевское пространство не менее патологично, чем $\hat{A}$, так как оно содержит $\hat{A}$ как борелевское подмножество. Но каждое представление π канонически записывается как интеграл на $\widehat{A}$

по отношению к некоторой стандартной мере, свойства которой отражают свойства π. Это определяет биективное соответствие между классами квазиэквивалентности представлений A и некоторыми классами (не всеми, к сожалению) стандартных мер на $\widehat{A}$. Повторим, что π допускает *каноническое* разложение на $\widehat{A}$, но не *единственное*, так как единственность не имеет места уже на $\widehat{A}$. Например, если π — фактор-представление, то его каноническое разложение есть $\pi=\pi$; но π записывается иногда несколькими способами в виде интеграла неприводимых представлений.

Остается посмотреть, не получим ли мы более удовлетворительной теории, если ограничимся представлениями, допускающими след. В этом направлении мы имеем лишь очень частные результаты.

8.8. Дезинтегрирование положительной формы и следа.

8.8.1. Теорема. *Пусть f — положительная форма на A, H — пространство π_f, Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $\zeta \to H(\zeta)$ — измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $\zeta \to \pi(\zeta)$ — измеримое поле неприводимых представлений A в $H(\zeta)$ таких, что*

$$H=\int^{\oplus} H(\zeta)\,d\mu(\zeta), \qquad \pi_f=\int^{\oplus} \pi(\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Пусть $\zeta \to \xi(\zeta)$ — такое поле векторов, что $\xi_f=\int^{\oplus} \xi(\zeta)\,d\mu(\zeta)$.

(i) *Для почти каждого ζ имеем $\xi(\zeta)\neq 0$;*

пусть $f(\zeta)$ — чистая положительная форма (для почти каждого ζ), определенная $\pi(\zeta)$ и $\xi(\zeta)$. Тогда:

(ii) *для каждого $x \in A$ функция $\zeta \to f(\zeta)(x)$ интегрируема и*

$$f(x)=\int f(\zeta)(x)\,d\mu(\zeta).$$

Пусть $Y \subset Z$ — измеримое множество таких $\zeta \in Z$, что $\xi(\zeta)\neq 0$. Пусть E_Y — соответствующий диагонализуемый проектор. Для каждого $x \in A$ имеем

$$E_Y\pi_f(x)\,\xi_f=\int^{\oplus} \varphi_Y(\zeta)\,\pi(\zeta)(x)\,\xi(\zeta)\,d\mu(\zeta),$$

где φ_Y обозначает характеристическую функцию Y. Так как $\varphi_Y(\zeta)=0$ влечет $\xi(\zeta)=0$, то видим, что $E_Y\pi_f(x)\xi_f=\pi_f(x)\xi_f$. Но ξ_f — тотализирующий для π_f, поэтому $E_Y=1$ и $\xi(\zeta)\neq 0$ почти всюду.

Имеем

$$f(\zeta)(x)=(\pi(\zeta)(x)\,\xi(\zeta)\mid\xi(\zeta)),$$

поэтому функция $\zeta \to f(\zeta)(x)$ интегрируема и ее интеграл равен

$$\int^{\oplus} (\pi(\zeta)(x)\xi(\zeta) \mid \xi(\zeta))\, d\mu(\zeta) = (\pi_f(x)\xi_f \mid \xi_f) = f(x).$$

8.8.2. Теорема. *Пусть f — полуконечный полунепрерывный снизу след на A^+, определяющий объекты H_f, J_f, λ_f, ρ_f, $\mathfrak{U}_f$, $\mathfrak{W}_f$, t_f. Тогда:*

(i) *Существуют:* 1° *стандартная положительная мера μ на $\widehat{A}$;* 2° *для каждого $\zeta \in \widehat{A}$ — характер $f(\zeta)$;* 3° *структура измеримого поля гильбертовых пространств в поле $\zeta \to H_{f(\zeta)}$ — со следующими свойствами:*

a) *H_f отождествляется с $\int^{\oplus} H_{f(\zeta)}\, d\mu(\zeta)$, поля*

$$\zeta \to J_{f(\zeta)}, \quad \zeta \to \lambda_{f(\zeta)}, \quad \zeta \to \rho_{f(\zeta)},$$
$$\zeta \to \mathfrak{U}_{f(\zeta)}, \quad \zeta \to \mathfrak{W}_{f(\zeta)}, \quad \zeta \to t_{f(\zeta)}$$

измеримы и

$$J_f = \int^{\oplus} J_{f(\zeta)}\, d\mu(\zeta), \qquad \lambda_f = \int^{\oplus} \lambda_{f(\zeta)}\, d\mu(\zeta), \qquad \rho_f = \int^{\oplus} \rho_{f(\zeta)}\, d\mu(\zeta),$$
$$\mathfrak{U}_f = \int^{\oplus} \mathfrak{U}_{f(\zeta)}\, d\mu(\zeta), \qquad \mathfrak{W}_f = \int^{\oplus} \mathfrak{W}_{f(\zeta)}\, d\mu(\zeta), \qquad t_f = \int^{\oplus} t_{f(\zeta)}\, d\mu(\zeta).$$

Алгебра $\mathfrak{U}_f \cap \mathfrak{W}_f$ есть алгебра диагонализуемых операторов.

b) *$\lambda_{f(\zeta)} \in \zeta$ и $\rho^0_{f(\zeta)} \in \zeta$ почти всюду.*

c) *Для каждого $x \in A^+$ функция $\zeta \to f(\zeta)(x)$ измерима и*

$$f(x) = \int f(\zeta)(x)\, d\mu(\zeta).$$

(ii) *Пусть даны мера μ', характеры $f'(\zeta)$ и структура измеримого поля гильбертовых пространств в поле $\zeta \to H_{f(\zeta)}$ с теми же свойствами, что и в (i). Тогда μ и μ' эквивалентны; пусть $\mu' = d\mu$, где $d(\zeta) > 0$ почти всюду. Имеем $f(\zeta) = d(\zeta) f'(\zeta)$ почти всюду. После изменения $f'(\zeta)$ на множестве меры нуль существует изоморфизм измеримого поля $\zeta \to H_{f(\zeta)}$ на измеримое поле $\zeta \to H_{f'(\zeta)}$, который переводит $J_{f(\zeta)}$ в $J_{f'(\zeta)}$, $\lambda_{f(\zeta)}$ в $\lambda_{f'(\zeta)}$, $\rho_{f(\zeta)}$ в $\rho_{f'(\zeta)}$, $\mathfrak{U}_{f(\zeta)}$ в $\mathfrak{U}_{f'(\zeta)}$, $\mathfrak{W}_{f(\zeta)}$ в $\mathfrak{W}_{f'(\zeta)}$, $t_{f(\zeta)}$ в $d(\zeta)t_{f'(\zeta)}$.*

Доказательство (i). Пусть B — гильбертова алгебра $\mathfrak{N}_f/N_f$, всюду плотная в H_f. Пусть B' — соответствующая совершенная гильбертова алгебра. Существуют (A84, A94 и A95):

1° стандартное борелевское пространство S;

2° положительная мера μ на S;

3° измеримое поле $\zeta \to H(\zeta)$ ненулевых гильбертовых пространств на S;

4° измеримое поле $\zeta \to B(\zeta)$ совершенных гильбертовых алгебр в $H(\zeta)$

такие, что H_f отождествляется с $\int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, $\mathfrak{U}_f \cap \mathfrak{W}_f$ — с алгеброй диагонализуемых операторов, B' с $\int^{\oplus} B(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, $\mathfrak{U}_f$ и $\mathfrak{W}_f$ с

$$\int^{\oplus} \mathfrak{U}(\zeta)\, d\mu(\zeta) \quad \text{и} \quad \int^{\oplus} \mathfrak{W}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$$

[через $\mathfrak{U}(\zeta)$ и $\mathfrak{W}(\zeta)$ обозначены алгебры фон Неймана, связанные слева и справа с $B(\zeta)$], J_f с $\int^{\oplus} J(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ [через $J(\zeta)$ обозначена инволюция, определенная $B(\zeta)$], t_f с $\int^{\oplus} t(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ [через $t(\zeta)$ обозначен естественный след на $\mathfrak{U}(\zeta)^+$, определенный $B(\zeta)$]. Так как алгебра диагонализуемых операторов есть общий центр $\mathfrak{U}_f$ и $\mathfrak{W}_f$, то $\mathfrak{U}(\zeta)$ и $\mathfrak{W}(\zeta)$ — факторы для почти всех ζ (A89).

Вследствие 8.3.1 существует измеримое поле $\zeta \to \lambda(\zeta)$ [соотв. $\zeta \to \rho(\zeta)$] представлений A (соотв. A^0) в $H(\zeta)$ таких, что

$$\lambda_f = \int^{\oplus} \lambda(\zeta)\, d\mu(\zeta), \qquad \rho_f = \int^{\oplus} \rho(\zeta)\, d\mu(\zeta).$$

Пусть x_i — последовательность, всюду плотная в A. Так как $\lambda_f(x_i)$ порождают алгебру фон Неймана $\mathfrak{U}_f$, то $\lambda(\zeta)(x_i)$ порождают для почти всех ζ алгебру фон Неймана $\mathfrak{U}(\zeta)$ (A88). Поэтому почти всюду $\mathfrak{U}(\zeta)$ есть алгебра фон Неймана, порожденная $\lambda(\zeta)(A)$. Точно так же почти всюду $\mathfrak{W}(\zeta)$ есть алгебра фон Неймана, порожденная $\rho(\zeta)A$.

Если $x \in A^+$, то функция $\zeta \to t(\zeta)(\lambda(\zeta)(x))$ измерима, и имеем (A92)

$$f(x) = t_f(\lambda_f(x)) = \int t(\zeta)(\lambda(\zeta)(x))\, d\mu(\zeta) = \int f(\zeta)(x)\, d\mu(\zeta),$$

полагая

$$f(\zeta)(x) = t(\zeta)(\lambda(\zeta)(x)) \quad \text{для каждого} \quad x \in A^+.$$

Пусть (y_i) — последовательность, всюду плотная в $\mathfrak{N}_f$ относительно предгильбертовой структуры (6.3.6). Так как $\lambda_f(y_i)$ порождают алгебру фон Неймана $\mathfrak{U}_f$, то $\lambda(\zeta)(y_i)$ порождают для почти каждого ζ алгебру фон Неймана $\mathfrak{U}(\zeta)$. С другой стороны,

$$\int f(\zeta)(y_i y_i^*)\, d\mu(\zeta) = f(y_i y_i^*) < +\infty,$$

поэтому $f(\zeta)(y_i y_i^*) < +\infty$ почти всюду. Поэтому $(\lambda(\zeta), t(\zeta))$ есть для почти каждого ζ ненулевое фактор-представление A со следом. Поэтому почти все $f(\zeta)$ суть характеры (6.7.3). Положим $\Lambda_f y_i = \int^{\oplus} y_i(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Имеем для любых i и j

$$\int^{\oplus} \lambda(\zeta)(y_i)\, y_j(\zeta)\, d\mu(\zeta) = \lambda_f(y_i)\, \Lambda_f y_j = \\ = (\Lambda_f y_i)(\Lambda_f y_j) = \int^{\oplus} y_i(\zeta)\, y_j(\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

поэтому

$$\lambda(\zeta)(y_i)\, y_j(\zeta) = y_i(\zeta)\, y_j(\zeta)$$

почти всюду. Следовательно, $\lambda(\zeta)(y_i)$ почти всюду является непрерывным оператором, продолжающим умножение слева на $y_i(\zeta)$, и аналогичный результат верен для $\rho(\zeta)(y_i)$. Вследствие этого для почти каждого ζ имеем при любом i

$$(y_i(\zeta) \mid y_i(\zeta)) = t(\zeta)(\lambda(\zeta)(y_i)\, \lambda(\zeta)(y_i^*)),$$

и это последнее выражение равно

$$t(\zeta)(\lambda(\zeta)(y_i y_i^*)) = f(\zeta)(y_i y_i^*).$$

Можно считать, что y_i выбраны так, что они образуют инволютивную алгебру над полем рациональных комплексных чисел; тогда из равенства $(y_i(\zeta) \mid y_i(\zeta)) = f(\zeta)(y_i y_i^*)$ следует, что $H(\zeta)$ отождествляется с замкнутым векторным подпространством $H_{f(\zeta)}$. Можно считать также, расширяя при необходимости семейство y_i, что произведение $y_i y_j$ есть y_k. Тогда подпространство $H(\zeta)$ в $H_{f(\zeta)}$ почти всюду является инвариантным относительно $\lambda_{f(\zeta)}$ и $\rho_{f(\zeta)}$; так как $f(\zeta)$ — характер, то $\lambda_{f(\zeta)}(A)$ и $\rho_{f(\zeta)}(A)$ порождают алгебру фон Неймана $\mathfrak{B}(H_{f(\zeta)})$, откуда $H(\zeta) = H_{f(\zeta)}$ (почти всюду). Имеем

$$J(\zeta)\, y_i(\zeta) = (J_f \Lambda_f y_i)(\zeta) = y_i^*(\zeta) = J_{f(\zeta)} y_i(\zeta)$$

почти всюду, поэтому $J(\zeta) = J_{f(\zeta)}$ почти всюду. Точно так же

$$\lambda(\zeta)(y_i)\, y_j(\zeta) = y_i(\zeta)\, y_j(\zeta) = \lambda_{f(\zeta)}(y_i)\, y_j(\zeta),$$

поэтому $\lambda(\zeta)$ и $\lambda_{f(\zeta)}$ совпадают на $\overline{\mathfrak{N}}_f$ (почти всюду) и, вследствие этого, совпадают на A, так как $\lambda(\zeta)$ и $\lambda_{f(\zeta)}$ — фактор-представления, ненулевые на $\overline{\mathfrak{N}}_f$ (2.10.4 и 2.11.1). Точно так же $\rho(\zeta)=\rho_{f(\zeta)}$. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{U}(\zeta)=\mathfrak{U}_{f(\zeta)}, \qquad \mathfrak{W}(\zeta)=\mathfrak{W}_{f(\zeta)}.$$

Наконец, для каждого $x \in A^+$ имеем

$$t(\zeta)(\lambda(\zeta)(x))=f(\zeta)(x)=t_{f(\zeta)}(\lambda_{f(\zeta)}(x))=t_{f(\zeta)}(\lambda(\zeta)(x))$$

почти всюду. Записывая это для $x=x_1$, $x=x_2$, ..., и применяя A29, выводим отсюда, что $t(\zeta)=t_{f(\zeta)}$ почти всюду.

После изменения $\lambda(\zeta)$ на множестве меры нуль $\lambda(\zeta)$ станут попарно дизъюнктны (8.4.1). В точности как в доказательстве 8.4.2, можно заменить S на стандартную борелевскую часть $\widehat{A}$ и сделать так, чтобы $\lambda_{f(\zeta)}=\lambda(\zeta)\in\zeta$ почти всюду. Тогда

$$\bar{\rho}^0_{f(\zeta)}\simeq\lambda_{f(\zeta)} \quad \text{влечет} \quad \bar{\rho}^0_{f(\zeta)}\in\zeta,$$

и все утверждения (i) доказаны.

Доказательство (ii). Тот факт, что μ и μ' эквивалентны, следует из 8.4.2 (ii). Пусть теперь $\mu'=d\cdot\mu$, где $d(\zeta)>0$ почти всюду. Для почти каждого ζ следы $f(\zeta)$ и $f'(\zeta)$ суть характеры двух квазиэквивалентных представлений, поэтому существует такое число $k(\zeta)>0$, что $f'(\zeta)=k(\zeta)f(\zeta)$. Каково бы ни было $x\in A^+$, имеем

$$\int f(\zeta)(x)\,d\mu(\zeta)=f(x)=\int f'(\zeta)(x)\,d\mu'(\zeta)=\int k(\zeta)f(\zeta)(x)\,d(\zeta)\,d\mu(\zeta),$$

откуда, для $x=y_iy_i^*$,

$$\int (y_i(\zeta)\,|\,y_i(\zeta))\,d\mu(\zeta)=\int (y_i(\zeta)\,|\,y_i(\zeta))\,k(\zeta)\,d(\zeta)\,d\mu(\zeta). \qquad (1)$$

Но равенства

$$y_1(\zeta)=y_2(\zeta)=\ldots=0$$

определяют часть μ-меры нуль в $\widehat{A}$. Так как функции

$$\zeta\to(y_i(\zeta)\,|\,y_i(\zeta))\,k(\zeta)\,d(\zeta)$$

μ-измеримы, то видим отсюда, что kd измеримо. Так как линейные комбинации функций $\zeta\to(y_i(\zeta)\,|\,y_i(\zeta))$ всюду плотны в $L^1(\mu)$, то равенство (1) доказывает далее, что $kd=1$ почти всюду. Тогда отображение $x\to d(\zeta)^{1/2}x$ из $\mathfrak{N}_{f(\zeta)}$ в себя почти всюду определяет изоморфизм $V(\zeta)$ пространства $H_{f(\zeta)}$ на $H_{f'(\zeta)}$, откуда следует изоморфизм поля $\zeta\to H_{f(\zeta)}$ на поле $\zeta\to H_{f'(\zeta)}$, который, очевидно, обладает свойствами (ii).

8.8.3. Сохраним обозначения 8.8.2. Пусть (z_i) — последовательность элементов $\mathfrak{M}_f^+$. Функции $\zeta\to f(\zeta)(z_i)$ μ-интегрируемы, поэтому конечны почти всюду. Следовательно, существует такая часть N меры нуль в $\hat{A}$, что $z_i \in \bigcap_{\zeta \in \hat{A}-N} \mathfrak{M}_{f(\zeta)}$ для каждого i.

В частности, после изменения $f(\zeta)$ на множестве меры нуль, $\mathfrak{M}_f \cap \left(\bigcap_{\zeta\in\hat{A}} \mathfrak{M}_{f(\zeta)}\right)$ всюду плотно в $\mathfrak{M}_f$ по норме A.

8.8.4. Мера μ и характеры $f(\zeta)$, построенные в 8.8.2, обладают следующим дополнительным свойством: пусть $x \in \mathfrak{N}_f$, h — ограниченная μ-измеримая функция на $\hat{A}$, Δ_h — диагонализуемый оператор, соответствующий h. Тогда

$$(\Delta_h\Lambda_f x \mid \Lambda_f x) = \int_{\hat{A}} h(\zeta) f(\zeta)(x^*x)\, d\mu(\zeta).$$

Действительно, положим $\Lambda_f x = \int^{\oplus} x(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Имеем

$$(\Delta_h\Lambda_f x \mid \Lambda_f x) = \int (h(\zeta)x(\zeta) \mid x(\zeta))\, d\mu(\zeta).$$

Но мы видели в ходе доказательства 8.8.2 (i), что

$$(x(\zeta) \mid x(\zeta)) = f(\zeta)(x^*x) \quad \text{почти всюду.}$$

8.8.5. Пусть A — сепарабельная GCR-C^*-алгебра. Пусть $\zeta \to K(\zeta)$ — каноническое поле гильбертовых пространств на $\hat{A}$ (8.6.1). Выберем такое поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ представлений A в $K(\zeta)$, что $\pi(\zeta)$ принадлежит классу ζ для каждого ζ и измеримо по каждой положительной мере на $\hat{A}$ (8.6.2). Для упрощения будем писать ζ вместо $\pi(\zeta)$. Пусть $\bar{K}(\zeta)$ — гильбертово пространство, сопряженное к $K(\zeta)$. Обозначим через $\zeta\otimes 1$ представление $x \to \zeta(x)\otimes 1$ C^*-алгебры A в $K(\zeta)\otimes\bar{K}(\zeta)$ и через $1\otimes\zeta$ представление $x\to 1\otimes\zeta(x)$ C^*-алгебры A в $\bar{K}(\zeta)\otimes K(\zeta)$. Пусть J_ζ — каноническая инволюция $K(\zeta)\otimes\bar{K}(\zeta)$, t_ζ — след $T\otimes 1 \to \operatorname{Tr} T$ на $(\mathfrak{B}(K(\zeta))\otimes \boldsymbol{C})^+$.

Теорема. *Пусть f — полунепрерывный снизу след на A^+ такой, что $\mathfrak{M}_f$ всюду плотно в A. Существует положительная мера μ на $\hat{A}$ и изоморфизм W из H_f на $\int^{\oplus}(K(\zeta)\otimes\bar{K}(\zeta))\, d\mu(\zeta)$ со следующими свойствами:*

(i) *W преобразует*

J_f в $\int^{\oplus} J_\zeta\, d\mu(\zeta)$, λ_f в $\int^{\oplus}(\zeta\otimes 1)\, d\mu(\zeta)$, $\bar{\rho}_f^0$ в $\int^{\oplus}(1\otimes\zeta)\, d\mu(\zeta)$, $\mathfrak{U}_f$ в $\int^{\oplus}(\mathfrak{B}(K(\zeta))\otimes\boldsymbol{C})\, d\mu(\zeta)$, $\mathfrak{W}_f$ в $\int^{\oplus}(\boldsymbol{C}\otimes\mathfrak{B}(\bar{K}(\zeta)))\, d\mu(\zeta)$, t_f в $\int^{\oplus} t_\zeta\, d\mu(\zeta)$ и $\mathfrak{U}_f\cap\mathfrak{W}_f$ в алгебру диагонализуемых операторов.

(ii) *Если* $x \in A^+$, *то функция* $\zeta \to \operatorname{Tr} \zeta(x)$ *на* $\hat{A}$ *полунепрерывна снизу, и имеем*

$$f(x) = \int \operatorname{Tr} \zeta(x)\, d\mu(\zeta).$$

Введем все обозначения 8.8.2. Так как A — GCR, то борелевское пространство $\widehat{A}$ отождествляется с борелевским пространством $\hat{A}$ (7.3.7). Для $x \in A^+$ и $\zeta \in \hat{A}$ положим $f'(\zeta)(x) = \operatorname{Tr} \zeta(x)$. Вследствие 8.8.2 (i) b), для почти каждого ζ существует такое число $k(\zeta) > 0$, что $f'(\zeta) = k(\zeta) f(\zeta)$. Для любого $x \in A^+$ функция $\zeta \to f(\zeta)(x)$ измерима [8.8.2 (i) c)] и функция $\zeta \to f'(\zeta)(x)$ полунепрерывна снизу (3.5.9). Для каждого $\zeta_0 \in \hat{A}$ существует такой $x \in \mathfrak{M}_f$, что $f'(\zeta)(xx^*)$ будет > 0 в ζ_0, поэтому в открытой окрестности V_{ζ_0} точки ζ_0; с другой стороны, функция $\zeta \to f(\zeta)(xx^*)$ интегрируема [8.8.2 (i) c)], поэтому конечна почти всюду; поэтому функция $\zeta \to k(\zeta)$ измерима в V_{ζ_0}; покрывая $\hat{A}$ последовательностью множеств V_{ζ_0} (3.3.4), видим, что функция k измерима. Заменяя μ на $k^{-1}\mu$, можем в дальнейшем предполагать, что $f'(\zeta) = f(\zeta)$ для всех ζ. Тогда существует изоморфизм $H_{f(\zeta)}$ на $K(\zeta) \otimes \overline{K}(\zeta)$, который переводит $\lambda_{f(\zeta)}$ в $\zeta \otimes 1$, $\bar{\rho}^0_{f(\zeta)}$ в $1 \otimes \zeta$, $\mathfrak{U}_{f(\zeta)}$ в $\mathfrak{B}(K(\zeta)) \otimes \boldsymbol{C}$, $\mathfrak{W}_{f(\zeta)}$ в $\boldsymbol{C} \otimes \mathfrak{B}(\overline{K}(\zeta))$, $J_{f(\zeta)}$ в J_ζ, $t_{f(\zeta)}$ в t_ζ (6.7.7).

Предыдущее рассуждение показывает тогда, что $\dim H_{f(\zeta)} = \dim K(\zeta) \otimes \overline{K}(\zeta)$ для каждого ζ, поэтому (см. A72) измеримые поля $\zeta \to H_{f(\zeta)}$ и $\zeta \to K(\zeta) \otimes \overline{K}(\zeta)$ изоморфны, и их можно отождествить. Пусть тогда $\mathscr{E}(\zeta)$ для каждого $\zeta \in \hat{A}$ есть множество автоморфизмов гильбертова пространства $K(\zeta) \otimes \overline{K}(\zeta)$, которые переводят $\lambda_{f(\zeta)}$ в $\zeta \otimes 1$, $\bar{\rho}^0_{f(\zeta)}$ в $1 \otimes \zeta$, $J_{f(\zeta)}$ в J_ζ (поэтому $\mathfrak{U}_{f(\zeta)}$ в $\mathfrak{B}(K(\zeta)) \otimes \boldsymbol{C}$, $\mathfrak{W}_{f(\zeta)}$ в $\boldsymbol{C} \otimes \mathfrak{B}(\overline{K}(\zeta))$, $t_{f(\zeta)}$ в t_ζ). Мы видели, что $\mathscr{E}(\zeta) \neq \varnothing$. Поэтому существует (A82) измеримое поле операторов $\zeta \to W(\zeta)$ таких, что $W(\zeta) \in \mathscr{E}(\zeta)$ для каждого ζ. Отождествление полей $\zeta \to H_{f(\zeta)}$ и $\zeta \to K(\zeta) \otimes \overline{K(\zeta)}$ может быть поэтому проведено так, чтобы

$$\lambda_{f(\zeta)} = \zeta \otimes 1, \quad \bar{\rho}^0_{f(\zeta)} = 1 \otimes \zeta, \quad J_{f(\zeta)} = J_\zeta.$$

Теперь теорема следует из 8.8.2 (i).

8.8.6. Теорема. *Сохраним предположения и обозначения* 8.8.5. *Пусть* μ' — *такая положительная мера на* $\hat{A}$, *что имеем для каждого* $x \in A^+$

$$f(x) = \int \operatorname{Tr} \zeta(x)\, d\mu'(\zeta).$$

Тогда $\mu = \mu'$.

Пусть G — открытая часть $\widehat{A}$, φ_G — ее характеристическая функция, I — замкнутый двусторонний идеал A такой, что $\widehat{I}=G$, $(u_1, u_2, \ldots)$ — возрастающая аппроксимативная единица в C^*-алгебре I (1.7.2). Пусть $x \in A^+$. Если $\zeta \in \widehat{A}-G$, то $\zeta(x^{1/2}u_nx^{1/2})=0$ для каждого n; если $\zeta \in G$, то

$$\zeta(x^{1/2}u_nx^{1/2})=\zeta(x)^{1/2}\zeta(u_n)\zeta(x)^{1/2}$$

сильно стремится, возрастая, к $\zeta(x)$, поэтому $\operatorname{Tr}\zeta(x^{1/2}u_nx^{1/2})$ стремится, возрастая, к $\operatorname{Tr}\zeta(x)$. Но

$$\int \operatorname{Tr}\zeta(x^{1/2}u_nx^{1/2})\,d\mu(\zeta)=f(x^{1/2}u_nx^{1/2})=\int \operatorname{Tr}\zeta(x^{1/2}u_nx^{1/2})\,d\mu'(\zeta)$$

имеет предел

$$\int \varphi_G(\zeta)\operatorname{Tr}\zeta(x)\,d\mu(\zeta)=\int \varphi_G(\zeta)\operatorname{Tr}\zeta(x)\,d\mu'(\zeta).$$

Если $x \in \mathfrak{M}_f^+$, то эта формула распространяется на случай, когда G есть замкнутая часть $\widehat{A}$, затем, переходя к пределу, на случай, когда G есть некоторая борелевская часть $\widehat{A}$. Следовательно, если $x \in \mathfrak{M}_f^+$, то меры $\operatorname{Tr}\zeta(x)\,d\mu(\zeta)$ и $\operatorname{Tr}\zeta(x)\,d\mu'(\zeta)$ равны. Пусть $(x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность, всюду плотная в $\mathfrak{M}_f^+$. Множество таких $\zeta \in \widehat{A}$, что $\operatorname{Tr}\zeta(x_i)=+\infty$ хотя бы для одного i, есть борелевская часть $\widehat{A}$ μ- и μ'-меры нуль. С другой стороны, для каждого $\zeta_0 \in \widehat{A}$ существует такое i, что $\operatorname{Tr}\zeta(x_i)$ будет >0 в ζ_0, поэтому и в окрестности ζ_0. Итак, $\mu=\mu'$ в окрестности ζ_0, и поэтому $\mu=\mu'$.

8.8.7. Сохраним предположения и обозначения 8.8.5. Пусть $x \in \mathfrak{N}_f$, h — ограниченная μ-измеримая функция на $\widehat{A}$, Δ_h — соответствующий диагонализуемый оператор. Вследствие 8.8.4 имеем

$$(\Delta_h\Lambda_f x \mid \Lambda_f x)=\int_{\widehat{A}} h(\zeta)\operatorname{Tr}(\zeta(x)^*\zeta(x))\,d\mu(\zeta).$$

Библиография: [10], [12], [21], [30], [31], [55], [86], [87], [88], [93], [120], [128], [141], [142], [143], [144], [158], [178].

8.9. Дополнения.

8.9.1. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, Z — стандартное борелевское пространство, μ-положительная мера на Z, $\zeta \to H(\zeta)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $\zeta \to \pi(\zeta)$ — μ-измеримое поле представлений A в $H(\zeta)$, $\pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\,d\mu(\zeta)$, $\mathfrak{Z}$ — алгебра диагонализуемых операторов. Для того чтобы $\pi(\zeta)$ было однородно почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{Z}$ содержала центральный идеал $\mathcal{Y}$, связанный с π (5.7.6). Для того чтобы $\pi(\zeta)$ было однородно с попарно различными ядрами (после выбрасывания множества меры нуль), необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{Z}=\mathcal{Y}$ [186].

8.9.2. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Если A не GCR-алгебра, то существуют стандартные меры на $\hat{A}$, класс которых не связан ни с каким представлением A в сепарабельном пространстве [185], [204].

***8.9.3.** Теоремы 8.8.5 и 8.8.6 могут быть обобщены на несепарабельные GCR-C^*-алгебры [49].

8.9.4. a) Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Каноническое борелевское поле гильбертовых пространств на $\hat{A}$ определяется как в 8.6.1. Для каждой стандартной положительной меры μ на $\hat{A}$ существует такое борелевское отображение $\zeta \to \pi(\zeta)$ пространства $\hat{A}$ в $\operatorname{Irr}(A)$, что $\pi(\zeta) \in \zeta$ почти всюду. Класс $\int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ зависит только от класса C меры μ; обозначим его $\mathcal{R}(C)$.

b) Для каждого класса представлений R типа I C^*-алгебры A обозначим через $\mathcal{C}(R)$ связанный с ним класс стандартных мер на $\hat{A}$. Если R — класс представлений A без кратности, имеем $R=\mathcal{R}(\mathcal{C}(R))$.

c) Если C — класс стандартных мер на $\hat{A}$ и если $\mathcal{R}(C)$ имеет тип I, то $\mathcal{R}(C)$ без кратности и $\mathcal{C}(\mathcal{R}(C))=C$.

*d) Если A не GCR-алгебра, то существуют два различных класса стандартных мер C, C' такие, что $\mathcal{R}(C)=\mathcal{R}(C')$ — фактор-представление типа II [54], [79], [83], [204].

Проблемы: Каковы классы тех стандартных мер C на $\hat{A}$, для которых $\mathcal{R}(C)$ — типа I? Каковы классы эквивалентности представлений вида $\mathcal{R}(C)$, где C — класс стандартных мер? Каждое ли представление квазиэквивалентно элементу из класса $\mathcal{R}(C)$, где C — класс стандартных мер?

8.9.5. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Определим каноническое борелевское поле гильбертовых пространств на $\widetilde{A}$ как равное каноническому полю на $\hat{A}$ и равное постоянному полю, определенному гильбертовым пространством размерности $\aleph_0$, на $\widetilde{A}-\hat{A}$. Если μ — стандартная положительная мера на $\widetilde{A}$, то существует такое борелевское отображение $\zeta \to \pi(\zeta)$ множества $\widetilde{A}$ в $\operatorname{Fac}(A)$, что $\pi(\zeta) \in \zeta$ почти всюду. Класс квазиэквивалентности $\int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ зависит только от класса C меры μ; обозначим его $\mathcal{R}'(C)$. Для каждого класса квазиэквивалентности R представлений A обозначим через $\mathscr{C}'(R)$ связанный с ним класс стандартных мер на $\widehat{A}$. Имеем $\mathscr{R}'(\mathscr{C}'(R))=R$. Если A не GCR-алгебра, то существует такой класс C стандартных мер на $\widehat{A}$, что $\mathscr{C}'(\mathscr{R}'(C))\neq C$ [83], [185], [186], [204].

8.9.6. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра, π — представление A в сепарабельном гильбертовом пространстве, $\pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\,d\mu(\zeta)$ — дезинтегрирование π на неприводимые представления. Если π — фактор-представление типа I, то почти все $\pi(\zeta)$ эквивалентны [82].

§ 9. C^*-АЛГЕБРЫ ТИПА I

9.1. Формулировка теоремы. Начало доказательства.

Теорема. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *A типа* I;

(ii) *каждое фактор-представление A — типа* I;

(iii) *A* — GCR-*алгебра*;

(iv) *если π — неприводимое представление A, то $\pi(A)$ содержит множество компактных операторов в H_π*;

(v) *если π_1 и π_2 — два неприводимых представления A с одним и тем же ядром, то π_1 и π_2 эквивалентны.*

(См. 9.5.9 для случая несепарабельной A.)

Схема доказательства следующая:

(iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(ii);

(iii)$\Rightarrow$(iv): см. 4.3.7;

(iv)$\Rightarrow$(v): см. 4.1.10;

(iii)$\Rightarrow$(i): см. 5.5.2;

(i) $\Rightarrow$(ii): очевидно;

(v) $\Rightarrow$(ii): предположим, что (v) выполнено. Пусть π — фактор-представление A, покажем, что π — типа I. Можно предположить, что $H_\pi=H$ сепарабельно (5.3.7). Применим теорему 8.5.2 и воспользуемся ее обозначениями. Для каждой μ-измеримой части Y в Z введем E_Y — соответствующий диагонализуемый проектор; он перестановочен с $\pi(A)$, поэтому определяет подпредставление π_Y представления π. Если $\mu(Y)\neq 0$, то $E_Y\neq 0$, поэтому $\pi_Y\approx\pi$ (5.3.5) и $\|\pi(x)\|=\|\pi_Y(x)\|=\|E_Y\pi(x)\|$ для каждого $x\in A$ [условие (ii) 5.3.1]. Для $n=1, 2, \dots$ введем $Y_{n,x}$ — множество $\zeta\in Z$ таких, что $\|\pi(\zeta)(x)\|\leqslant\|\pi(x)\|-1/n$. Имеем

$$\|E_{Y_{n,x}}\pi(x)\|\leqslant\|\pi(x)\|-\frac{1}{n} \quad \text{(A77)},$$

поэтому $Y_{n,x}$ имеет меру нуль по предыдущему. Это верно для каждого n, откуда заключаем, что $\|\pi(\zeta)(x)\|=\|\pi(x)\|$, кроме множества N_x меры нуль. Пусть D — счетное множество, всюду плотное в A. Тогда $N=\bigcup_{x\in D} N_x$ имеет меру нуль. Если $\zeta\notin N$, то $\|\pi(\zeta)(x)\|=\|\pi(x)\|$ для каждого $x\in D$, поэтому для каждого $x\in A$; следовательно, $\operatorname{Ker}\pi(\zeta)=\operatorname{Ker}\pi$. По предположению (v), почти все $\pi(\zeta)$ эквивалентны одному и тому же неприводимому представлению π_0. Поэтому π кратно π_0 (8.1.7) и, вследствие этого, имеет тип I (5.4.11).

Остается доказать (ii)$\Rightarrow$(iii), что нуждается в довольно значительной подготовке.

Библиография: [24], [44], [69], [70], [162].

9.2. Предварительные сведения о системах матричных единиц.

Мы рассмотрим эти предварительные сведения подробнее, чем это необходимо здесь, чтобы несколько прояснить последующее технически сложное доказательство.

9.2.1. Снабдим $\boldsymbol{C}^p$ канонической структурой гильбертова пространства размерности p:

$$((z_1, \ldots, z_p)\,|\,(z'_1, \ldots, z'_p))=z_1\bar{z}'_1+\ldots+z_p\bar{z}'_p.$$

Тогда алгебра $\boldsymbol{M}_p(\boldsymbol{C})$ комплексных матриц с p строками и p столбцами отождествляется с C^*-алгеброй $\mathfrak{B}(\boldsymbol{C}^p)$, которая проста и имеет размерность p^2. Пусть (e_{ij}) — канонический базис в $\boldsymbol{M}_p(\boldsymbol{C})$. Имеем $e_{kl}e_{ij}=\delta^l_i e_{kj}$, $e^*_{ij}=e_{ji}$ (δ^l_i — символ Кронекера).

9.2.2. Вообще, пусть A — C^*-алгебра и $(f_{ij})_{1\leqslant i,\, j\leqslant p}$ — семейство элементов A. Если $f_{kl}f_{ij}=\delta^l_i f_{kj}$ и $f^*_{ij}=f_{ji}$, то это семейство называется *системой матричных единиц порядка p*. Тогда линейные комбинации f_{ij} образуют под-C^*-алгебру B в A. Линейное отображение $\boldsymbol{M}_p(\boldsymbol{C})$ на B, которое переводит e_{ij} в f_{ij} для $1\leqslant i,\ j\leqslant p$, есть морфизм; так как $\boldsymbol{M}_p(\boldsymbol{C})$ проста, то этот морфизм есть изоморфизм, если $B\neq 0$.

Предположим, что A реализована как C^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве H. Так как $f_{ii}=f^*_{ii}=f^2_{ii}$, то f_{ii} — проекторы. Легко проверить, что f_{ij} — частично изометрический оператор с начальным проектором f_{jj} и конечным проектором f_{ii}. Положим $v_j=f_{j1}$ ($j=1, \ldots, p$). Имеем $f_{ij}=v_iv^*_j$; v_j — частично изометрические операторы, имеющие общий начальный проектор $v_1=f_{11}$; их конечные проекторы попарно ортогональны, иначе говоря, имеем $v^*_jv_i=0$ для $j\neq i$. Обратно, пусть $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ — частично изометрические элементы A, имеющие v_1 начальным проектором, такие, что $v_j^* v_i = 0$ для $i \neq j$. Легко проверить, что если положить $f_{ij} = v_i v_j^*$, то f_{ij} образуют систему матричных единиц порядка p. Геометрически это означает, что существуют попарно ортогональные замкнутые векторные подпространства $H_1, \ldots, H_p$ в H, v_j есть частично изометрический оператор, начальное пространство которого H_1 и конечное подпространство H_j, и v_1 — проектор на H_1.

9.2.3. Обозначим через $a_1, \ldots, a_n$ переменные, каждое из которых принимает значение 0 и значение 1. Пусть $(v(a_1, \ldots, a_n))_{a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}}$ — система частично изометрических элементов A, каждый из которых имеет $v(0_n)$ начальным проектором [0_n означает последовательность $(0, \ldots, 0)$, образованную n нулями], таких, что

$$v(b_1, \ldots, b_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ если } (b_1, \ldots, b_n) \neq (a_1, \ldots, a_n).$$

Тогда $v(b_1, \ldots, b_n) v(a_1, \ldots, a_n)^*$ образуют систему матричных единиц порядка 2^n. Если $H(a_1, \ldots, a_n)$—конечное подпространство $v(a_1, \ldots, a_n)$, то $H(a_1, \ldots, a_n)$ попарно ортогональны, $v(a_1, \ldots, a_n)$ имеет $H(0_n)$ начальным пространством и $v(0_n)$—проектор на $H(0_n)$.

9.2.4. Пусть

$$(v(a_1, \ldots, a_n))_{a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}} \quad \text{и} \quad (v(a_1, \ldots, a_{n+1}))_{a_1, \ldots, a_{n+1} \in \{0, 1\}} \text{ —}$$

две системы элементов A, обладающих вышеуказанными свойствами. Предположим, что:

1° проектор $v(0_n)$ есть сумма проектора $v(0_{n+1})$ и конечного проектора $v(0_n, 1)$;

2° $v(a_1, \ldots, a_{n+1}) = v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, a_{n+1})$.

Если $H(a_1, \ldots, a_n)$, $H(a_1, \ldots, a_{n+1})$—конечные подпространства для $v(a_1, \ldots, a_n)$; $v(a_1, \ldots, a_{n+1})$, то отсюда получаем, что $H(a_1, \ldots, a_n)$ — гильбертова сумма $H(a_1, \ldots, a_n, 0)$ и $H(a_1, \ldots, a_n, 1)$. Говорят, что система $v(a_1, \ldots, a_{n+1})$ получается раздвоением системы $v(a_1, \ldots, a_n)$.

9.2.5. Пусть $(v(a_1, \ldots, a_n))_{a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ — система элементов A, имеющая свойства 9.2.3, и каждая система получается раздвоением предыдущей. [Для $n = 0$ система сводится к единственному элементу $v(\varnothing)$.] Отметим следующие соотношения:

(i) если $j \leqslant k$ и $(a_1, \ldots, a_j) \neq (b_1, \ldots, b_j)$, $v(a_1, \ldots, a_j)^* \times \times v(b_1, \ldots, b_k) = 0$.

(ii) если $k \geqslant 1$, то $v(a_1, \ldots, a_k) = v(a_1, \ldots, a_{k-1}) v(0_{k-1}, a_k)$;

(iii) если $j < k$, то $v(a_1, \ldots, a_j)^* v(a_1, \ldots, a_j) v(0_{k-1}, a_k) = = v(0_{k-1}, a_k)$;

(iv) $v(0_k) \geqslant 0$.

Если $H(a_1, \ldots, a_n)$—конечное подпространство для $v(a_1, \ldots, a_n)$, то (i) означает, что $H(a_1, \ldots, a_j)$ и $H(b_1, \ldots, b_j)$ ортогональны при $j \leqslant k$ и $(a_1, \ldots, a_j) \neq (b_1, \ldots, b_j)$; (iii) означает, что $H(0_j)$ содержит $H(0_k)$ и $H(0_{k-1}, 1)$ для $j < k$.

9.2.6. Для произвольной C^*-алгебры неизвестно, как построить систему ненулевых элементов, обладающих всеми свойствами 9.2.5. Однако при некоторых достаточно широких предположениях (см. 9.3.7) мы успешно построим систему ненулевых элементов $(v(a_1, \ldots, a_n))_{a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, обладающих свойствами (i), (ii), (iii), (iv). Укажем теперь некоторые следствия свойств (i), (ii), (iii). Мы предположим, что A реализована как C^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве H. Положим

$$e(n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}} v(a_1, \ldots, a_n) v(a_1, \ldots, a_n)^*;$$

это — элемент A^+. Пусть

$$E(n) = \overline{e(n)(H)} = H \ominus \operatorname{Ker} e(n).$$

Вследствие (i) подпространства $v(a_1, \ldots, a_n)(H)$ (n — фиксировано) попарно ортогональны, поэтому $P_{E(n)}$ — сумма носителей $v(a_1, \ldots, a_n) v(a_1, \ldots, a_n)^*$.

9.2.7. $E(n)$ убывают. Действительно, если $\xi \in H$ таково, что $e(n)\xi = 0$, то

$$(v(a_1, \ldots, a_n) v(a_1, \ldots, a_n)^* \xi \mid \xi) = 0$$

для любых $a_1, \ldots, a_n$, поэтому $v(a_1, \ldots, a_n)^* \xi = 0$ для любых $a_1, \ldots, a_n$; следовательно, $v(a_1, \ldots, a_{n+1})^* \xi = 0$ вследствие (ii), и $e(n+1)\xi = 0$.

9.2.8. $v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^*$ оставляет $E(n+1)$ на месте. Действительно, пусть $\eta \in H$ и $\xi = v(c_1, \ldots, c_{n+1})\eta$. Имеем

$$\begin{aligned} v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^* \xi &= \\ = v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^* v(c_1, \ldots, c_n) v(0_n, c_{n+1})\eta &= \\ = \delta_{b_1}^{c_1} \ldots \delta_{b_n}^{c_n} v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, c_{n+1})\eta &= \\ &= \delta_{b_1}^{c_1} \ldots \delta_{b_n}^{c_n} v(a_1, \ldots, a_n, c_{n+1})\eta, \end{aligned}$$

что принадлежит E_{n+1} вследствие 9.2.6.

9.2.9. $v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^*$ индуцирует в E_{n+1} систему матричных единиц порядка 2^n (поэтому $e(n) \mid E(n+1)$ — проектор, поэтому $e(n)\,|\,E(n+1)=1$ ввиду 9.2.7). Действительно, учитывая формулу (1) в 9.2.8, имеем

$$v(a_1, \ldots, a_n)\,v(b_1, \ldots, b_n)^*\,v(a_1', \ldots, a_n')\,v(b_1', \ldots, b_n')^*\,\xi =$$
$$=\delta_{b_1'}^{c_1} \ldots \delta_{b_n'}^{c_n} v(a_1, \ldots, a_n)\,v(b_1, \ldots, b_n)^*\,v(a_1', \ldots, a_n')\,v(0_n, c_{n+1})\,\eta =$$
$$=\delta_{b_1'}^{c_1} \ldots \delta_{b_n'}^{c_n}\delta_{a_1'}^{b_1} \ldots \delta_{a_n'}^{b_n} v(a_1, \ldots, a_n)\,v(0_n, c_{n+1})\,\eta =$$
$$=\delta_{a_1'}^{b_1} \ldots \delta_{a_n'}^{b_n} v(a_1, \ldots, a_n)\,v(b_1', \ldots, b_n')^*\,\xi,$$

поэтому

$$v(a_1, \ldots, a_n)\,v(b_1, \ldots, b_n)^*\,|\,E(n+1)]\times$$
$$\times\left[v(a_1', \ldots, a_n')\,v(b_1', \ldots, b_n')^*\,|\,E(n+1)\right]=$$
$$=\delta_{a_1'}^{b_1} \ldots \delta_{a_n'}^{b_n} v(a_1, \ldots, a_n)\,v(b_1', \ldots, b_n')^*\,|\,E(n+1).$$

С другой стороны,

$$v(a_1, \ldots, a_n)\,v(b_1, \ldots, b_n)^* \quad \text{и} \quad v(b_1, \ldots, b_n)\,v(a_1, \ldots, a_n)^*$$

сопряжены друг другу и оставляют $E(n+1)$ на месте, поэтому их сужения на $E(n+1)$ сопряжены друг другу.

9.2.10. Имеем

$$v(a_1, \ldots, a_{n-1})\,v(b_1, \ldots, b_{n-1})^*\,|\,E(n+1)=$$
$$=[v(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)\,v(b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)^*+$$
$$+v(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)\,v(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1)^*]\,|\,E(n+1).$$

Действительно, учитывая формулу (1) из 9.2.8, получим

$$v(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)\,v(b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)^*\,\xi+$$
$$+v(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)\,v(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1)^*\,\xi=$$
$$=\delta_{b_1}^{c_1} \ldots \delta_{b_{n-1}}^{c_{n-1}}\delta_0^{c_0} v(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0, c_{n+1})\,\eta+$$
$$+\delta_{b_1}^{c_1} \ldots \delta_{b_{n-1}}^{c_{n-1}}\delta_1^{c_n} v(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1, c_{n+1})\,\eta=$$
$$=\delta_{b_1}^{c_1} \ldots \delta_{b_{n-1}}^{c_{n-1}} v(a_1, \ldots, a_{n-1}, c_n, c_{n+1})\,\eta$$

и

$$v(a_1, \ldots, a_{n-1})\,v(b_1, \ldots, b_{n-1})^*\,\xi=$$
$$=v(a_1, \ldots, a_{n-1})\,v(b_1, \ldots, b_{n-1})^*\times$$
$$\times v(c_1, \ldots, c_{n-1})\,v(0_{n-1}, c_n)\,v(0_n, c_{n+1})\,\eta=$$
$$=\delta_{b_1}^{c_1} \ldots \delta_{b_{n-1}}^{c_{n-1}} v(a_1, \ldots, a_{n-1})\,v(0_{n-1}, c_n)\,v(0_n, c_{n+1})\,\eta=$$
$$=\delta_{b_1}^{c_1} \ldots \delta_{b_{n-1}}^{c_{n-1}} v(a_1, \ldots, a_{n-1}, c_n, c_{n+1})\,\eta.$$

9.2.11. $v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^*$ оставляют на месте $E(r)$ для $r \geqslant n$ (обобщение 9.2.8). Действительно, известно, что это верно для $r - n = 1$. Предположим, что это установлено для $r - n = s \geqslant 1$, и исследуем случай $r = n + s + 1$ ($\geqslant n + 2$). По индуктивному предположению, $v(a_1, \ldots, a_{n+1}) v(b_1, \ldots, b_{n+1})^*$ оставляет $E(r)$ на месте. Вследствие 9.2.10 $v(a_1, \ldots, a_n) \times \times v(b_1, \ldots, b_n)^*$ действует в $E(n+2)$ как линейная комбинация операторов $v(a_1, \ldots, a_{n+1}) v(b_1, \ldots, b_{n+1})^*$, поэтому оставляют на месте $E(r) \subset E(n+2)$.

9.2.12. Пусть $M(n)$ — множество линейных комбинаций $v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^*$ и $N(n)$—множество линейных комбинаций элементов из $M(0) \cup M(1) \cup \ldots \cup M(n)$. Все элементы $N(n)$ оставляют на месте $E(n+1)$ (9.2.11). Пусть Φ_n — отображение $x \to x \mid E(n+1)$, где x пробегает $N(n)$. Вследствие 9.2.10 имеем

$$\Phi_n(N(n)) = \Phi_n(M(n)).$$

Предположим, с другой стороны, что $v(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ для любых $n, a_1, \ldots, a_n$. Так как

$$v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^* v(b_1, \ldots, b_{n+1}) = v(a_1, \ldots, a_n, b_{n+1})$$

[вследствие формулы (1) 9.2.8, примененной для $c_1 = b_1, \ldots \ldots, c_n = b_n$], видим, что

$$v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^* \mid E(n+1) \neq 0.$$

Учитывая 9.2.9, получаем, что существует изоморфизм Ψ_n инволютивной алгебры $\Phi_n(M(n))$ на $\boldsymbol{M}_{2^n}(\boldsymbol{C})$.

Для $x \in N(n)$ положим $f_n(x) = 2^{-n} \operatorname{Tr}(\Psi_n(\Phi_n(x)))$. Тогда f_n — линейная форма на $N(n)$. Имеем

$$f_n(x^*) = \overline{f_n(x)}, \quad f_n(x) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad x \geqslant 0,$$
$$f_n\left(v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^*\right) = 2^{-p} \delta_{a_1}^{b_1} \ldots \delta_{a_n}^{b_n},$$

и 9.2.10 последовательно доказывает, что

$$f_n\left(v(a_1, \ldots, a_p) v(b_1, \ldots, b_n)^*\right) = 2^{-p} \delta_{a_1}^{b_1} \ldots \delta_{a_p}^{b_p} \quad \text{для} \quad p \leqslant n.$$

Имеем $N(0) \subset N(1) \subset \ldots$, и вышеизложенное показывает, что формы f_n продолжают одна другую, поэтому они определяют линейную форму f на $N = \bigcup_{n \geqslant 0} N(n)$, которая обладает следующими свойствами:

1° $f(x^*) = \overline{f(x)}$;

2° $f(x) \geqslant 0$ для $x \geqslant 0$;

3° $f\left(v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^*\right) = 2^{-n} \delta_{a_1}^{b_1} \ldots \delta_{a_n}^{b_n}$ для любых $n, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

9.2.13. Пусть $(v(a_1, \ldots, a_n))_{a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\}}$ для $n = 0, 1, \ldots, r$ — система элементов A, удовлетворяющая условиям (i), (ii), (iii), (iv) 9.2.5. Пусть даны произвольные элементы $v(0_{r+1})$ и $v(0_r, 1)$ в A. Для $a_1, \ldots, a_{r+1} \in \{0, 1\}$ и $(a_1, \ldots, a_r) \neq 0_r$ положим

$$v(a_1, \ldots, a_{r+1}) = v(a_1, \ldots, a_r)\, v(0_r, a_{r+1}).$$

Таким образом, мы определили систему

$$(v(a_1, \ldots, a_{r+1}))_{a_1, \ldots, a_{r+1} \in \{0, 1\}}.$$

Проверим, выполняются ли условия (i), (ii), (iii), (iv). Необходимо, чтобы выполнялось

$$v(a_1, \ldots, a_r)^* v(a_1, \ldots, a_r)\, v(0_r, a_{r+1}) = v(0_r, a_{r+1}) \tag{1}$$

вследствие (iii), чтобы выполнялось

$$v(0_r, 1)^* v(0_{r+1}) = 0 \tag{2}$$

вследствие (i) и чтобы выполнялось

$$v(0_{r+1}) \geqslant 0 \tag{3}$$

вследствие (iv). Покажем, что соотношения (1), (2), (3) достаточны. Предположим, что они выполнены. Пусть $j < k \leqslant r + 1$, и докажем (iii). Если $k < r$, то (iii) верно по предположению. Если $k = r + 1$, $j = r$, то (iii) верно вследствие (1). Предположим, что $k = r + 1$ и $j < r$. Имеем, вследствие (1) и (3),

$$v(0_r, a_{r+1}) = v(0_r)^* v(0_r)\, v(0_r, a_{r+1}) = v(0_r)^2 v(0_r, a_{r+1}).$$

Используя (iii) для системы с не более чем r индексами, видим, что

$$\begin{aligned} v(a_1, \ldots, a_j)^* v(a_1, \ldots, a_j)\, v(0_r, a_{r+1}) &= \\ = v(a_1, \ldots, a_j)^* v(a_1, \ldots, a_j)\, v(0_r)^2 v(0_r, a_{r+1}) &= \\ = v(0_r)\, v(0_r)\, v(0_r, a_{r+1}) &= v(0_r, a_{r+1}). \end{aligned}$$

Докажем (ii). Достаточно сделать это для $k = r + 1$, иначе говоря, доказать, что

$$v(a_1, \ldots, a_{r+1}) = v(a_1, \ldots, a_r)\, v(0_r, a_{r+1}).$$

Однако это — в точности определение $v(a_1, \ldots, a_{r+1})$, если $(a_1, \ldots, a_r) \neq 0_r$. И уже упомянутое соотношение

$$v(0_r, a_{r+1}) = v(0_r)^2 v(0_r, a_{r+1})$$

влечет

$$v(0_r, a_{r+1}) = v(0_r)\, v(0_r, a_{r+1}),$$

так как $v(0_r) \geqslant 0$. Следовательно, (ii) доказано во всех случаях. Докажем (i). Достаточно исследовать случай $k = r + 1$. Если $j < r + 1$, имеем

$$\begin{aligned} v(a_1, \ldots, a_j)^* v(b_1, \ldots, b_{r+1}) &= \\ &= v(a_1, \ldots, a_j)^* v(b_1, \ldots, b_r)\, v(0_r, b_{r+1}), \end{aligned}$$

так как (ii) уже доказано, и достаточно применить (i) для систем с не более чем r индексами. Предположим, что $j=r+1$. Имеем, вследствие (ii),

$$v(a_1, \ldots, a_{r+1})^* v(b_1, \ldots, b_{r+1}) =$$
$$= v(0_r, a_{r+1})^* v(a_1, \ldots, a_r)^* v(b_1, \ldots, b_r) v(0_r, b_{r+1}) \quad (4)$$

Это произведение равно нулю, если $(a_1, \ldots, a_r) \neq (b_1, \ldots, b_r)$. Наконец, предположим, что

$$(a_1, \ldots, a_r) = (b_1, \ldots, b_r) \quad \text{и} \quad a_{r+1} \neq b_{r+1}.$$

Вследствие (4) и уже доказанного (iii)

$$v(a_1, \ldots, a_{r+1})^* v(b_1, \ldots, b_{r+1}) = v(0_r, a_{r+1})^* v(0_r, b_{r+1}),$$

и это — нуль вследствие (2).

Библиография: [24].

9.3. Некоторые леммы.

9.3.1. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, π — ненулевое неприводимое представление A, H' — конечномерное векторное подпространство H_π, L — множество состояний $x \to (\pi(x)\xi \mid \xi)$ на A, где ξ пробегает единичную сферу H', K — выпуклая слабо замкнутая оболочка L. Пусть K_1 — множество состояний A, которые принимают значение 1 для каждого $x \in A$ такого, что $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $\pi(x)$ единичен на H'. Тогда $K = K_1$.*

Ясно, что K_1 выпукло и слабо замкнуто и что $L \subset K_1$, поэтому $K \subset K_1$. Пусть l — крайняя точка K_1. Покажем, что $l \in K$. По теореме Крейна — Мильмана, это влечет $K_1 \subset K$.

Предположим, что $l = (1/2)(l_1 + l_2)$, l_1 и l_2 — состояния A. Если x — такой элемент A, что $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $\pi(x)$ единичен на H', имеем

$$l_1(x) \leqslant 1, \; l_2(x) \leqslant 1, \quad 1 = l(x) = \frac{1}{2}(l_1(x) + l_2(x)),$$

поэтому $l_1(x) = l_2(x) = 1$ и $l_1, l_2 \in K_1$; следовательно, $l_1 = l_2 = l$; короче, l — чистое состояние. Предположим, что π_l не эквивалентно π. Тогда существует такой эрмитов элемент y в A, что $\pi(y)$ сводится к единице на H' и $\pi_l(y)\xi_l = 0$ (2.8.3). Пусть f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — такая функция, что $f(t) = 0$, t или 1 соответственно, если $t \leqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $t \geqslant 1$. Заменяя y на $f(y)$, можно предположить, что $0 \leqslant y \leqslant 1$. Но тогда равенство $l(y) = (\pi_l(y)\xi_l \mid \xi_l) = 0$ показывает, что $l \notin K_1$, что противоречит предположению. Поэтому $\pi_l \simeq \pi$ и l — состояние, определяемое π и единичным вектором ξ из H_π. Пусть $\xi = \eta + \zeta$ с $\eta \in H'$, $\zeta \in H \ominus H'$. Существует такой эрмитов элемент x в A, что $\pi(x)$ сводится к единице на H' и $\pi(x)\zeta=0$ (2.8.3). Рассуждая, как и выше, можно предположить, что $0\leqslant x\leqslant 1$. Так как $l\in K_1$, то

$$1=l(x)=(\pi(x)\xi\,|\,\xi)=(\eta\,|\,\xi)=(\eta\,|\,\eta).$$

Но

$$1=\|\xi\|^2=\|\eta\|^2+\|\zeta\|^2,$$

откуда $\zeta=0$, $\xi=\eta\in H'$ и $\zeta\in K$.

9.3.2. Лемма. *Сохраним обозначения леммы* 9.3.1. *Пусть E — множество состояний A. Для каждого $\delta>0$ и для каждого $x\in A$ такого, что $0\leqslant x\leqslant 1$ и что $\pi(x)$ единичен на H', обозначим через $V_{x,\delta}$ множество таких $f\in E$, что $f(x)\geqslant 1-\delta$. Тогда $V_{x,\delta}$ образует фундаментальную систему окрестностей K в E в слабой топологии.*

Ясно, что $V_{x,\delta}$ — замкнутая окрестность K в E. С другой стороны, пересечение всех $V_{x,\delta}$ есть K вследствие 9.3.1. Так как E компактно, то достаточно доказать, что семейство $V_{x,\delta}$ направлено по убыванию. Итак, пусть x_1, $x_2\in A$ таковы, что $0\leqslant x_1$, $x_2\leqslant 1$ и что $\pi(x_1)$, $\pi(x_2)$ единичны на H'; пусть δ_1, $\delta_2>0$. Положим

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\in A,\quad \delta=\inf(\delta_1,\ \delta_2).$$

Имеем $0\leqslant x\leqslant 1$ и $\pi(x)$ единичен на H'. Если $f\in E$ такова, что $f(x)\geqslant 1-\delta/2$, то

$$f(x_1+x_2)\geqslant 2-\delta,\quad f(x_1)\leqslant 1,\quad f(x_2)\leqslant 1,$$

поэтому $f(x_1)$, $f(x_2)\geqslant 1-\delta$ и $f\in V_{x_1,\delta_1}\cap V_{x_2,\delta_2}$. Итак,

$$V_{x,\frac{\delta}{2}}\subset V_{x_1,\delta_1}\cap V_{x_2,\delta_2}.$$

9.3.3. Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, $T\in\mathfrak{B}(H)$, $\xi\in H$ и $\varepsilon>0$ таковы, что*

$$\|T\|\leqslant 1,\quad \|\xi\|\leqslant 1,\quad \mathrm{Re}(T\xi\,|\,\xi)\geqslant 1-\varepsilon/2.$$

Тогда $\|T\xi-\xi\|^2\leqslant\varepsilon$.

Действительно,

$$\|T\xi-\xi\|^2=(T\xi\,|\,T\xi)-2\,\mathrm{Re}(T\xi\,|\,\xi)+(\xi\,|\,\xi)\leqslant 1-2+\varepsilon+1=\varepsilon.$$

9.3.4. Лемма. *Пусть $\varepsilon>0$, n — целое >0. Существует число $\delta(\varepsilon,\ n)>0$, обладающее следующим свойством: если H — гильбертово пространство, $T_1,\ \ldots,\ T_n\in\mathfrak{B}(H)$ и $\xi\in H$ таковы, что $0\leqslant T_1,\ \ldots,\ T_n\leqslant 1$, $\|\xi\|\leqslant 1$ и*

$$\mathrm{Re}(T_nT_{n-1}\ \ldots\ T_1\xi\,|\,\xi)\geqslant 1-\delta(\varepsilon,\ n),$$

то $(T_i\xi\,|\,\xi)\geqslant 1-\varepsilon$ и $\|T_i\xi-\xi\|\leqslant\varepsilon$ для $i=1,\ \ldots,\ n$.

Положим

$$\delta(\varepsilon,\ 1)=\inf\left(1,\ \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\quad\text{и}\quad\delta(\varepsilon,\ n)=\frac{\delta(\varepsilon,\ n-1)^2}{16}.$$

Имеем

$$\delta(\varepsilon, n) \leqslant \frac{\delta(\varepsilon, n-1)}{2}, \quad \delta(\varepsilon, 1) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{и} \quad \delta(\varepsilon, 1) \leqslant \varepsilon.$$

Лемма верна для $n=1$ вследствие 9.3.3. Пусть $n \geqslant 2$, и предположим, что лемма верна для $n-1$ (для выбранных величин δ). Если

$$\operatorname{Re}(T_n T_{n-1} \ldots T_1 \xi \mid \xi) \geqslant 1 - \delta(\varepsilon, n),$$

имеем

$$1 - \delta(\varepsilon, n) \leqslant \operatorname{Re}(T_n \ldots T_1 \xi \mid \xi) \leqslant \\ \leqslant (T_n T_{n-1} \ldots T_1 \xi \mid T_{n-1} \ldots T_1 \xi)^{1/2} (T_n \xi \mid \xi)^{1/2} \leqslant (T_n \xi \mid \xi)^{1/2},$$

откуда $(T_n \xi \mid \xi) \geqslant 1 - 2\delta(\varepsilon, n) \geqslant 1 - \varepsilon$, и, учитывая 9.3.3,

$$\| T_n \xi - \xi \|^2 \leqslant 4\delta(\varepsilon, n) \leqslant \varepsilon^2.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}(T_{n-1} \ldots T_1 \xi \mid \xi) = \operatorname{Re}(T_n \ldots T_1 \xi \mid \xi) + \\ + \operatorname{Re}(T_{n-1} \ldots T_1 \xi \mid (1 - T_n)\xi) \geqslant \\ \geqslant \operatorname{Re}(T_n \ldots T_1 \xi \mid \xi) - \| \xi - T_n \xi \| \geqslant \\ \geqslant 1 - \delta(\varepsilon, n) - 2\delta(\varepsilon, n)^{1/2} \geqslant 1 - \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, n-1) - \frac{1}{2}\delta(\varepsilon, n-1).$$

По индуктивному предположению, $(T_i \xi \mid \xi) \geqslant 1 - \varepsilon$ и $\| T_i \xi - \xi \| < \varepsilon$ для $i = 1, \ldots, n$.

9.3.5. Для каждого $\varepsilon \in (0, 1]$ обозначим через f_ε функцию, равную 0 на $(-\infty, 1-\varepsilon]$ и 1 на $[1-\varepsilon/2, +\infty]$ и линейную на $[1-\varepsilon, 1-\varepsilon/2]$. Для $\varepsilon \in (0, 1/2]$ имеем $f_\varepsilon f_{2\varepsilon} = f_\varepsilon$.

Лемма. *Пусть A — NGCR-C^*-алгебра, d — такой элемент A^+, что $\| d \| = 1$ и $\tau \in [0, 1]$. Существуют такие w, w', $d' \in A$, что*

(i) $\| w \| = \| w' \| = \| d' \| = 1$, $w \geqslant 0$, $d' \geqslant 0$, $w'^* w = 0$;

(ii) $f_\tau(d) w = w$, $f_\tau(d) w' = w'$;

(iii) $w^2 d' = d'$, $w'^* w' d' = d'$.

Положим $\sigma = \tau/8$. Выберем такие $u \in A$, $c \in A$, что $\| u \| \leqslant 1$, $0 \leqslant c \leqslant 1$. Положим

$$d_0 = f_{2\sigma}(d) c f_{2\sigma}(d) \quad \text{и} \quad d_1 = f_{4\sigma}(d) - d_0.$$

Имеем $0 \leqslant d_0 \leqslant 1$, поэтому $-1 \leqslant d_1 \leqslant 1$. С другой стороны,

$$f_{4\sigma}(d) d_0 = d_0 = d_0 f_{4\sigma}(d),$$

поэтому d_0 и $f_{4\sigma}(d)$ порождают коммутативную под-C^*-алгебру B в A, содержащую d_1. Если ρ — некоторый характер B такой, что $\rho(d_0) \neq 0$, имеем

$$\rho(f_{4\sigma}(d)) = 1, \quad \text{поэтому} \quad \rho(d_1) = 1 - \rho(d_0);$$

кроме того, $0 \leqslant \rho(d_0) \leqslant 1$. Поэтому если g: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная функция, равная нулю на $[0, 1/2]$, то $g(\rho(d_0))\, g(\rho(d_1)) = 0$, иначе говоря, $\rho(g(d_0)\, g(d_1)) = 0$. Отсюда следует, что $g(d_0) \times g(d_1) = 0$.

Положим $v = f_\sigma(d_1)\, u f_\sigma(d_0)$. Имеем

$$\| v \| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad v^* v = f_\sigma(d_0)\, u^* f_\sigma(d_1)^2\, u f_\sigma(d_0).$$

Поэтому

$$f_{2\sigma}(d_0)\, v^* v = v^* v, \qquad v^* f_{2\sigma}(d_1) = v^*.$$

Поэтому

$$v^*(v^* v) = v^* f_{2\sigma}(d_1)\, f_{2\sigma}(d_0)\, v^* v = 0.$$

Кроме того, $f_{8\sigma}(d)\, d_0 = d_0$ и $f_{8\sigma}(d)\, d_1 = d_1$. Поэтому $f_{8\sigma}(d)\, p(d_0) = p(d_0)$, если p — многочлен без свободного члена, поэтому, если p — непрерывная функция, равная нулю в начале координат; точно так же $f_{8\sigma}(d)\, p(d_1) = p(d_1)$; поэтому $f_{8\sigma}(d)\, v = v$ и $f_{8\sigma}(d)\, v^* = v^*$.

Положим, наконец,

$$d' = f_{1/4}(v^* v), \quad w = f_{1/2}(v^* v)^{1/2}, \quad w' = v k(v^* v),$$

где k: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — функция, равная $\left(f_{1/2}(t)\, t^{-1}\right)^{1/2}$, если $t \neq 0$, и 0, если $t = 0$. Имеем $0 \leqslant d' \leqslant 1$, $0 \leqslant w \leqslant 1$. Так как $v^*(v^* v) = 0$, имеем $w'^* w = 0$. Так как $f_{8\sigma}(d)\, v = v$ и $f_{8\sigma}(d)\, v^* = v^*$, то

$$f_{8\sigma}(d)\, w = w, \qquad f_{8\sigma}(d)\, w' = w'.$$

С другой стороны,

$$w^2 = f_{1/2}(v^* v), \quad w'^* w' = k^2(v^* v)\, v^* v = f_{1/2}(v^* v),$$

поэтому

$$w^2 d' = f_{1/2}(v^* v)\, f_{1/4}(v^* v) = f_{1/4}(v^* v) = d'$$

и точно так же $w'^* w' d' = d'$; с другой стороны,

$$\| w' \| = \| w'^* w' \|^{1/2} \leqslant 1.$$

Докажем, что если выбрать подходящим образом c и u, то будем иметь $d' \geqslant 1$. Это, вместе с (iii), влечет

$$\| w \|, \; \| w' \| \geqslant 1, \quad \text{откуда} \quad \| w \| = \| w' \| = \| d' \| = 1,$$

и доказательство будет завершено. Имеем $f_\sigma(d) \neq 0$. Так как A — NGCR-C^*-алгебра, то существует такое неприводимое представление π C^*-алгебры A, что $\pi(f_\sigma(d))$ некомпактен. Поэтому можно найти два единичных ортогональных вектора ξ и η в множестве значений $\pi(f_\sigma(d))$. Существует такой эрмитов элемент c в A, что $\pi(c)\xi = \xi$, $\pi(c)\eta = 0$ (2.8.3), и, рассуждая как в 9.3.1, можно предположить, что $0 \leqslant c \leqslant 1$. Существует такой унитарный элемент u в A, что $\pi(u)\xi = \eta$ (2.8.3). Так как

$$f_{2\sigma}(d) f_\sigma(d) = f_\sigma(d)$$

и $\xi, \eta \in \pi(f_\sigma(d))(H_\pi)$, то

$$\pi(f_{2\sigma}(d))\xi = \xi, \quad \pi(f_{2\sigma}(d))\eta = \eta$$

и точно так же $\pi(f_{4\sigma}(d)\eta) = \eta$. Последовательно выводим

$$\pi(d_0)\xi = \xi, \quad \pi(d_0)\eta = 0, \quad \pi(d_1)\eta = \eta,$$

$$\pi(v^*v)\xi = f_\sigma(\pi(d_0))\pi(u)^{-1} f_\sigma(\pi(d_1))^2 \pi(u) f_\sigma(\pi(d_0))\xi =$$
$$= f_\sigma(\pi(d_0))\pi(u)^{-1} f_\sigma(\pi(d_1))^2 \pi(u)\xi = f_\sigma(\pi(d_0))\pi(u)^{-1} f_\sigma(\pi(d_1))^2 \eta =$$
$$= f_\sigma(\pi(d_0))\pi(u)^{-1}\eta = f_\sigma(\pi(d_0))\xi = \xi,$$
$$\pi(d')\xi = \xi, \quad \|\pi(d')\| \geqslant 1, \quad \|d'\| \geqslant 1.$$

9.3.6. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, $v_1, \ldots, v_p$, c — элементы с нормой 1 в A такие, что $c \geqslant 0$, $v_i^* v_i c = c$, $v_i^* v_j = 0$ для $i \neq j$. Пусть s — эрмитов элемент A и $\varepsilon > 0$. Существует эрмитов элемент t в A, являющийся линейной комбинацией $v_i v_j^*$, элемент b в A с $0 \leqslant b \leqslant 1$ и $\gamma > 0$ такие, что:*

(i) *если f — такое состояние A, что $f(b) \geqslant 1 - \gamma$, то $|f(s-t)| \leqslant \varepsilon$,*

(ii) $\left\| c \prod_{i=1}^{p} v_i^* b v_i \right\| = 1.$

Коммутативная под-C^*-алгебра A, порожденная 1 и c, обладает чистым состоянием, которое принимает в c значение 1. Это чистое состояние может быть продолжено до чистого состояния m на A (2.10.1). Положим

$$\alpha_{ij} = m(v_i^* s v_j) \quad \text{и} \quad t = \sum_{i,j} \alpha_{ij} v_i v_j^* \in A.$$

Имеем $\alpha_{ij} = \bar\alpha_{ji}$, поэтому t эрмитов. С другой стороны,

$$(\pi_m(c)\xi_m \mid \xi_m) = m(c) = 1 \geqslant \|\pi_m(c)\xi_m\| \cdot \|\xi_m\|,$$

поэтому $\pi_m(c)\xi_m = \xi_m$ и

$$\pi_m(v_i^* v_i)\xi_m = \pi_m(v_i^* v_i c)\xi_m = \pi_m(c)\xi_m = \xi_m.$$

Пусть H' — конечномерное векторное подпространство H_{π_m}, порожденное $\pi_m(v_i)\xi_m$. Имеем

$$(\pi_m(t)\pi_m(v_k)\xi_m \mid \pi_m(v_l)\xi_m) =$$
$$= \sum_{i,j} \alpha_{ij} (\pi_m(v_j^* v_k)\xi_m \mid \pi_m(v_i^* v_l)\xi_m) = \alpha_{lk}(\xi_m \mid \xi_m) = \alpha_{lk} =$$
$$= (\pi_m(v_l^* s v_k)\xi_m \mid \xi_m) = (\pi_m(s)\pi_m(v_k)\xi_m \mid \pi_m(v_l)\xi_m),$$

поэтому

$$P_{H'}\pi_m(t)P_{H'} = P_{H'}\pi_m(s)P_{H'}.$$

Пусть E — множество состояний A и W — множество таких $f \in E$, что $|f(s-t)| \leqslant \varepsilon$. Пусть K — слабо замкнутая выпуклая оболочка множества состояний A вида $x \to (\pi_m(x)\eta\,|\,\eta)$, где η пробегает единичную сферу в H'. Вследствие изложенного выше W — окрестность K в E в слабой топологии. Вследствие 9.3.2 существует такой $b \in A$, что $0 \leqslant b \leqslant 1$ и $\pi_m(b)$ сводится к единице на H' и такое $\gamma > 0$, что W содержит множество $f \in E$, для которых $f(b) \geqslant 1-\gamma$. С другой стороны, ясно, что

$$\left\| c\prod_{i=1}^{p} v_i^* b v_i \right\| \leqslant 1.$$

Наконец,

$$\pi_m(c)\prod_{i=1}^{p}\pi_m(v_i^*)\pi_m(b)\pi_m(v_i)\xi_m =$$

$$= \pi_m(c)\prod_{i=1}^{p}\pi_m(v_i^* v_i)\xi_m = \pi_m(c)\xi_m = \xi_m,$$

следовательно,

$$\left\| \pi_m\left(c\prod_{i=1}^{p} v_i^* b v_i\right)\right\| \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \left\| c\prod_{i=1}^{p} v_i^* b v_i \right\| \geqslant 1.$$

9.3.7. Лемма. *Пусть A — NGCR-C^*-алгебра с единичным элементом. Пусть $(s_0, s_1, \ldots)$ — последовательность эрмитовых элементов A. Существуют ненулевые элементы $v(a_1, \ldots, a_n)$ в единичном шаре $A (a_1, \ldots, a_n \in \{0, 1\},\ n = 0, 1, 2, \ldots)$, обладающие следующими свойствами:*

(i) *если $j \leqslant k$ и $(a_1, \ldots, a_j) \neq (b_1, \ldots, b_j)$, то $v(a_1, \ldots, a_j)^* \times \times v(b_1, \ldots, b_k) = 0$,*

(ii) *если $k \geqslant 1$, то $v(a_1, \ldots, a_k) = v(a_1, \ldots, a_{k-1})v(a_{k-1}, a_k)$;*

(iii) *если $j < k$, то $v(a_1, \ldots, a_j)^* v(a_1, \ldots, a_j) v(0_{k-1}, a_k) = = v(0_{k-1}, a_k)$,*

(iv) $v(\varnothing) = 1$, $v(0_k) \geqslant 0$;

(v) *если положим $e(j) = \sum_{a_1, \ldots, a_j \in \{0, 1\}} v(a_1, \ldots, a_j) v(a_1, \ldots, a_j)^*$,*

то для каждого $j \geqslant 0$ существует t_j — такая линейная комбинация $v(a_1, \ldots, a_j)v(b_1, \ldots, b_j)^*$, что

$$\| e(j+1)(s_j - t_j)e(j+1)\| \leqslant \frac{1}{j+1}.$$

Мы построим не только $v(a_1, \ldots, a_n)$, обладающие этими свойствами, но и такие $b(n) \in A^+$, что $\|b(n)\| = 1$, и

(vi) $v(a_1, \ldots, a_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) b(n) = b(n)$.

Для $n=0$ положим $v(\varnothing)=b(0)=1$. Предположим, что уже построены $v(a_1, \ldots, a_j)$ — ненулевые элементы единичного шара A и $b(j)$ в A^+ с нормой 1 для $j \leqslant n$, так, что свойства (i) — (vi) выполняются [свойство (v), разумеется, только для $j \leqslant n-1$].

Вследствие 9.3.6 существует эрмитов элемент t_n в A, являющийся линейной комбинацией $v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^*$, элемент b из A с $0 \leqslant b \leqslant 1$ и $\gamma > 0$ такие, что:

1° если f — такое состояние A, что $f(b) \geqslant 1-\gamma$, то имеем $|f(s_n - t_n)| \leqslant 1/(n+1)$;

2° $\|a\| = 1$, где положено

$$a = b(n) \prod_{a_1, \ldots, a_n} v(a_1, \ldots, a_n)^* b v(a_1, \ldots, a_n)$$

[$v(a_1, \ldots, a_n)$ расположены в произвольном порядке].

Применим 9.3.5 для $d = aa^*$ и пока произвольного τ из $(0, 1]$. Обозначим через $v(0_{n+1})$, $v(0_n, 1)$ и $b(n+1)$ элементы w, w', d', построенные в 9.3.5. Вследствие 9.3.5 (ii)

$$v(a_1, \ldots, a_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, a_{n+1}) =$$
$$= v(a_1, \ldots, a_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) f_\tau(aa^*) v(0, a_{n+1}).$$

Однако (vi) влечет

$$v(a_1, \ldots, a_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) aa^* = aa^*,$$

откуда

$$v(a_1, \ldots, a_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) f_\tau(aa^*) = f_\tau(aa^*),$$

поэтому

$$v(a_1, \ldots, a_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, a_{n+1}) =$$
$$= f_\tau(aa^*) v(0_n, a_{n+1}) = v(0_n, a_{n+1}),$$

где использовано и 9.3.5 (ii). С другой стороны, $v(0_n, 1)^* \times \times v(0_{n+1}) = 0$, вследствие 9.3.5 (i), и $v(0_{n+1}) \geqslant 0$. Вследствие 9.2.13, если положить $v(a_1, \ldots, a_{n+1}) = v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, a_{n+1})$ для $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0_n$, то условия (i), (ii), (iii), (iv) в 9.3.7 будут выполняться. С другой стороны, $b(n+1) \in A^+$ и $\|b(n+1)\| = 1$ [9.3.5 (i)]. Имеем

$$v(0_n, a_{n+1})^* v(0_n, a_{n+1}) b(n+1) = b(n+1)$$

вследствие 9.3.5 (iii) и для $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0_n$ имеем, учитывая условие (iii) 9.3.7 (уже установленное):

$$v(a_1, \ldots, a_{n+1})^* v(a_1, \ldots, a_{n+1}) b(n+1) =$$
$$= v(0, a_{n+1})^* v(a_1, \ldots, a_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, a_{n+1}) b(n+1) =$$
$$= v(0_n, a_{n+1})^* v(0_n, a_{n+1}) b(n+1) = b(n+1).$$

поэтому условие (vi) в 9.3.7 также выполнено, что означает, кроме того, что $v(a_1, \ldots, a_{n+1})$ — ненулевые.

Осталось доказать (v) для $j = n$. Предположим, что A реализована как C^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве H. Пусть $\xi \in H$ и $\eta = v(a_1, \ldots, a_{n+1})\xi$ — вектор с нормой 1. Имеем, вследствие (ii) и (iii),

$$v(a_1, \ldots, a_n)^* \eta = v(a_1, \ldots, a_n)^* v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, a_{n+1})\xi = \\ = v(0_n, a_{n+1})\xi,$$

и так как $t \geqslant f_\tau(t) - \tau/2$ для всех $\tau \geqslant 0$, то

$$(aa^* v(a_1, \ldots, a_n)^* \eta \mid v(a_1, \ldots, a_n)^* \eta) = \\ = (aa^* v(0_n, a_{n+1})\xi \mid v(0_n, a_{n+1})\xi) \geqslant \\ \geqslant (f_\tau(aa^*) v(0_n, a_{n+1})\xi \mid v(0_n, a_{n+1})\xi) - \tau/2;$$

учитывая 9.3.5 (ii), получаем отсюда

$$(v(0_n, a_{n+1})\xi \mid v(0_n, a_{n+1})\xi) - \frac{\tau}{2} \geqslant \\ \geqslant \| v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, a_{n+1})\xi \|^2 - \frac{\tau}{2} = \| \eta \|^2 - \frac{\tau}{2} = 1 - \frac{\tau}{2}.$$

Применим лемму 9.3.4 и предположим, что τ выбрано так, что

$$\frac{\tau}{2} \leqslant \delta\left(\frac{\gamma}{2^{2n+3}}, 2^{n+1} + 2\right).$$

Видим, что

$$(v(a_1, \ldots, a_n)^* bv(a_1, \ldots, a_n) v(a_1, \ldots, a_n)^* \eta \mid v(a_1, \ldots, a_n)^* \eta) \geqslant \\ \geqslant 1 - \frac{\gamma}{2^{2n+3}}.$$

Так как

$$v(a_1, \ldots, a_n) v(a_1, \ldots, a_n)^* \eta = v(a_1, \ldots, a_n) v(0_n, a_{n+1})\xi = \eta,$$

то можно переписать:

$$(b\eta \mid \eta) \geqslant 1 - \frac{\gamma}{2^{2n+3}}.$$

Пусть η' — вектор с нормой 1 в множестве значений $v(b_1, \ldots, b_{n+1})$; имеем также

$$(b\eta' \mid \eta') \geqslant 1 - \frac{\gamma}{2^{2n+3}};$$

если $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq (b_1, \ldots, b_{n+1})$, то η и η' ортогональны вследствие (i), поэтому

$$|(b\eta \mid \eta')|^2 = |((1-b)\eta \mid \eta')|^2 \leqslant \\ \leqslant ((1-b)\eta \mid \eta)((1-b)\eta' \mid \eta') \leqslant \left(\frac{\gamma}{2^{2n+3}}\right)^2.$$

Пусть тогда $\sigma \in e(n+1)(H)$ — вектор с нормой 1; по определению $e(n+1)$, имеем

$$\sigma = \sum_{a_1, \ldots, a_{n+1} \in \{0, 1\}} \sigma(a_1, \ldots, a_{n+1}),$$

где $\sigma(a_1, \ldots, a_{n+1})$ принадлежит множеству значений $v(a_1, \ldots, a_{n+1})$, откуда

$$(b\sigma | \sigma) \geqslant \sum_{a_1, \ldots, a_{n+1}} (b\sigma(a_1, \ldots, a_{n+1}) | \sigma(a_1, \ldots, a_{n+1})) -$$
$$- \sum_{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq (b_1, \ldots, b_{n+1})} |(b\sigma(a_1, \ldots, a_{n+1}) | \sigma(b_1, \ldots, b_{n+1}))| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{a_1, \ldots, a_{n+1}} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \| \sigma(a_1, \ldots, a_{n+1}) \|^2 -$$
$$- \sum_{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq (b_1, \ldots, b_{n+1})} \frac{\gamma}{2^{2n+3}} \| \sigma(a_1, \ldots, a_{n+1}) \| \times$$
$$\times \| \sigma(b_1, \ldots, b_{n+1}) \| \geqslant 1 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = 1 - \gamma.$$

Отсюда следует, что $|((s_n - t_n)\sigma | \sigma)| \leqslant 1/(n+1)$. Поэтому

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant e(n+1)(s_n - t_n)e(n+1) \leqslant \frac{1}{n+1},$$
$$\| e(n+1)(s_n - t_n)e(n+1) \| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Библиография: [24].

9.4. Конец доказательства теоремы 9.1.

Для доказательства (ii) $\Rightarrow$ (iii) в теореме 9.1 покажем теперь, что если A — сепарабельная C^*-алгебра, не GCR, то A имеет фактор-представления не типа I. Так как A имеет ненулевой NGCR-фактор (4.3.6), то утверждение вытекает из следующего более точного результата:

Предложение. *Пусть A — ненулевая сепарабельная NGCR-C^*-алгебра. Тогда A обладает фактор-представлением типа II.*

Вследствие 4.3.9 можно предположить, что A имеет единичный элемент. Пусть $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ — последовательность, всюду плотная в эрмитовой части A. Пусть $v(a_1, \ldots, a_n)$ — элементы, обладающие свойствами 9.3.7. Пусть $M(n)$ — множество линейных комбинаций $v(a_1, \ldots, a_n)v(b_1, \ldots, b_n)^*$, $N(n)$ — множество линейных комбинаций элементов из $M(0) \cup M(1) \cup \ldots \cup M(n)$ и

$$N = \bigcup_{n \geqslant 0} N(n).$$

Вследствие 9.2.12 существует такая линейная форма f на N, что $f(x^*)=\overline{f(x)}$, $f(x)\geqslant 0$ для $x\geqslant 0$ и

$$f(v(a_1,\ \ldots,\ a_n)\,v(b_1,\ \ldots,\ b_n)^*)=2^{-n}\delta_{a_1}^{b_1}\ldots\delta_{a_n}^{b_n},\quad \text{откуда } f(1)=1.$$

Вследствие 2.10.1 (i) существует состояние g на A, продолжающее f. Покажем, что π_g — фактор-представление типа II, иначе говоря, что алгебра фон Неймана $\mathscr{B}$, порожденная $\pi_g(A)$, есть фактор типа II.

Операторы $\pi_g(v(a_1,\ \ldots,\ a_n))$ обладают свойствами (i), (ii), (iii) 9.2.5. Положим $F(n)=\overline{\pi_g(e(n))(H)}$. Вследствие 9.2.7 $F(n)$ убывают. Ясно, что $F(n)$ инвариантно относительно любого оператора из $\pi_g(A)'$. Поэтому пересечение F всех подпространств $F(n)$ инвариантно относительно любого оператора из $\pi_g(A)'$, откуда $P_F\in\pi_g(A)''\in\mathscr{B}$. С другой стороны, F инвариантно относительно каждого оператора из $\pi_g(N)$ вследствие 9.2.11. Имеем для каждого n

$$\|\pi_g(e(n))\xi_g\|\cdot\|\xi_g\|\geqslant(\pi_g(e(n))\xi_g\,|\,\xi_g)=$$
$$=g(e(n))=f(e(n))=2^n\cdot 2^{-n}=1\geqslant\|\pi_g(e(n))\xi_g\|\cdot\|\xi_g\|,$$

поэтому $\pi_g(e(n))\xi_g=\xi_g$ и $\xi_g\in F(n)$. Поэтому $\xi_g\in F$. Но ξ_g — тотализирующий вектор для $\pi_g(A)$ и тем более для $\mathscr{B}$. Поэтому центральный носитель P_F в $\mathscr{B}$ равен 1, откуда $\mathscr{B}'$ изоморфно $\mathscr{B}'_F$ (A20). Достаточно доказать, что $\mathscr{B}'$ — типа II, т. е. что $\mathscr{B}_F$ — типа II (A52).

Вследствие 9.2.9 и 9.2.11 операторы $\pi_g(v(a_1,\ldots,a_n)\,v(b_1,\ldots,b_n)^*)$ индуцируют в F систему матричных единиц порядка 2^n. Так как $\pi_g(e(n))\xi_g=\xi_g$, то это — ненулевая система. Поэтому существует изоморфизм Ψ_n инволютивной алгебры

$$\pi_g(M(n))\,|\,F=\pi_g(N(n))\,|\,F$$

на $\boldsymbol{M}_{2^n}(\boldsymbol{C})$. Видим тогда, что $\mathscr{B}_F$ бесконечномерно как векторное пространство. Докажем:

1° что $(aa'\xi_g\,|\,\xi_g)=(a'a\xi_g\,|\,\xi_g)$ для любых $a,\ a'\in\mathscr{B}_F$;

2° что $\mathscr{B}_F$ — фактор.

Тогда этот фактор конечен (A33) и не может быть типа I_q, $q<+\infty$ (A49), поэтому типа II_1, и доказательство будет закончено.

Пусть s — эрмитов элемент A. Для каждого целого $n>0$ существует такое $j\geqslant 2n$, что $\|s-s_j\|<1/2n$, и, кроме того, такое $t_j\in M(j)$, что

$$\|e(j+1)(s_j-t_j)\,e(j+1)\|\leqslant\frac{1}{2n}.$$

Тогда

$$\| P_F \pi_g (s - t_j) P_F \| \leqslant \| \pi_g (e(j+1)(s - t_j) e(j+1)) \| \leqslant \frac{1}{n}.$$

Это показывает, что $\pi_g(N) P_F$ плотно в смысле нормы в $P_F \pi_g(A) P_F$.

Если $x \in \pi_g(N(n))$, то

$$(x\xi_g | \xi_g) = \mathrm{Tr}(\psi_n(x | F));$$

достаточно проверить это, если x имеет вид $\pi_g(v(a_1, \ldots, a_n) \times \times v(b_1, \ldots, b_n)^*)$, а тогда имеем

$$(x\xi_g | \xi_g) = g(v(a_1, \ldots, a_n) v(b_1, \ldots, b_n)^*) = 2^{-n} \delta_{a_1}^{b_1} \ldots \delta_{a_n}^{b_n}.$$

Отсюда выводим, что для $x, x' \in \pi_g(N(n))$

$$(xx'\xi_g | \xi_g) = (x'x\xi_g | \xi_g), \tag{1}$$

так как

$$\mathrm{Tr}(\psi_n(x | F) \psi_n(x' | F)) = \mathrm{Tr}(\psi_n(x' | F) \psi_n(x | F)).$$

Равенство (1), установленное для любых n, справедливо для $x, x' \in \pi_g(N)$, поэтому для $x, x' \in P_F \pi_g(A) P_F$, так как $\pi_g(N) P_F$ плотно в смысле нормы в $P_F \pi_g(A) P_F$; следовательно, и для $x, x' \in \mathcal{B}_F$, так как $P_F \pi_g(A) P_F$ сильно плотно в $P_F \mathcal{B} P_F$.

Наконец, пусть r — проектор, принадлежащий центру $\mathcal{B}_F$. Пусть $\eta = r(\xi_g)$, $\zeta = (1 - r)(\xi_g)$. Так как $a \to (a\xi_g | \xi_g)$ есть след на $\mathcal{B}_F$, то видим сразу, что $a \to (a\eta | \eta)$, $a \to (a\zeta | \zeta)$ — следы t_1, t_2 на $\mathcal{B}_F$. Так как $\pi_g(N(n)) | F$ изоморфно $M_{2^n}(\boldsymbol{C})$, то сужения t_1, t_2 на $\pi_g(N(n))_F$ [множество операторов, индуцируемых на F операторами из $\pi_g(N(n))$] пропорциональны. Так как t_1, t_2 слабо непрерывны, то t_1, t_2 пропорциональны. Имеем $\eta \neq 0$ или $\zeta \neq 0$. Если, например, $\eta \neq 0$, то $(r\eta | \eta) \neq 0$, но, с другой стороны, $(r\zeta | \zeta) = 0$, поэтому $t_2 = 0$ и

$$0 = t_2(1 - r) = ((1 - r)\zeta | \zeta) = \| \zeta \|^2 \quad \text{и} \quad \xi_g = r\xi_g.$$

Так как ξ_g — циклический вектор для $\mathcal{B}_F$, то выводим отсюда, что $r = 1$. Это доказывает, что $\mathcal{B}_F$ — фактор.

Библиография: [24].

9.5. Дополнения.

9.5.1. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Если для каждого примитивного идеала I в A фактор A/I — GCR-алгебра, то A — GCR-алгебра. (Применить 9.1.)

9.5.2. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Для того чтобы A была GCR-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{A}$ было T_0-пространством. (Применить 9.1.)

9.5.3. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Для того чтобы A была CCR-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $\hat{A}$ была замкнута. (Применить 9.5.2 и 4.7.15.)

***9.5.4.** Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

(i) A — NGCR-алгебра;

(ii) A обладает инъективным представлением типа II;

(iii) A обладает инъективным представлением типа III;

(iv) существует такое семейство (π_i) неприводимых представлений A, что $\bigoplus \pi_i$ инъективно и $\pi_i(A) \cap \mathcal{LC}(H_{\pi_i}) = 0$;

(v) существуют такие семейства $(\pi_i)_{i \in I}$ и $(\rho_i)_{i \in I}$ неприводимых представлений A, что $\bigoplus \pi_i$ и $\bigoplus \rho_i$ инъективны, $\operatorname{Ker} \pi_i = \operatorname{Ker} \rho_i$ (для каждого i) и ρ_i не эквивалентно π_i (для каждого i) [24].

***9.5.5.** a) Пусть G — группа с двумя элементами, X — компактная группа $G \times G \times G \times \ldots$, X' — всюду плотная в X подгруппа, образованная элементами $(g_1, g_2, \ldots) \in G \times G \times G \times \ldots$, все компоненты которых, кроме конечного числа, равны e. Пусть Y — борелевское фактор-пространство X/X'. Не существует последовательности борелевских частей Y, отделяющих точки Y.

b) Пусть A — сепарабельная не GCR C^*-алгебра. Существует борелевское вложение Y в $\hat{A}$ ($\hat{A}$ снабжено структурой Макки) [24].

9.5.6. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Следующие условия эквивалентны:

(i) A — GCR-алгебра; (ii) в борелевской структуре, подчиненной топологии, $\hat{A}$ стандартно;

(iii) в структуре Макки существует последовательность борелевских частей $\hat{A}$, отделяющая точки $\hat{A}$;

(iv) структура Макки в $\hat{A}$ совпадает с борелевской структурой, подчиненной топологии $\hat{A}$. [Имеем (i)$\Rightarrow$(ii) и (i)$\Rightarrow$(iv) вследствие 4.6.1, (ii)$\Rightarrow$(iii) вследствие 3.8.3, (iv)$\Rightarrow$(iii) вследствие 3.3.4 и 3.8.4, (iii)$\Rightarrow$(i) вследствие 9.5.5.] [24] и [45].

***9.5.7.** Пусть H, H' — два вещественных векторных пространства бесконечной размерности, B — билинейная форма на $H \times H'$, относительно которой H и H' находятся в двойственности. Пусть K — гильбертово пространство. Пусть $p(x)$ [соотв. $q(x')$] для каждого $x \in H$ (соотв. $x' \in H'$) — самосопряженный оператор (не обязательно ограниченный) в K. Предположим, что $p(x)$ попарно перестановочны, что $p(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ — наименьшее замкнутое продолжение $\lambda_1 p(x_1) + \lambda_2 p(x_2)$, и аналогичное свойство верно для q. Предположим, что

$$e^{ip(x)} e^{iq(x')} = e^{iB(x, x')} e^{iq(x')} e^{ip(x)} \quad \text{для} \quad x \in H, \ x' \in H'.$$

Если M, M' — векторные подпространства H, H', то пусть $\mathfrak{A}(M, M')$ — алгебра фон Неймана, порожденная $e^{ip(x)}$ и $e^{iq(x')}$ ($x \in M$, $x' \in M'$). Пусть A — C^*-алгебра, порожденная $\mathfrak{A}(M, M')$, когда M (соотв. M') пробегает множество конечномерных векторных подпространств H (соотв. H'). Тогда A, с точностью до изоморфизма, зависит только от (H, H', B). C^*-алгебра A — NGCR-алгебра, не имеет замкнутых двусторонних идеалов, кроме A и 0, и не имеет представлений, допускающих след. Если взять в качестве H сепарабельное гильбертово пространство, $H' = H$ и $B(x, x') = (x \mid x')$, то A обладает фактор-представлениями типа II_∞ и фактор-представлениями типа III. Неприводимые представления A могут быть построены в явном виде [24], [34], [122].

Это связано с физической задачей о представлениях коммутационных соотношений. Представление антикоммутационных соотношений [33] было истолковано Макки [84] как задача о представлениях групп.

9.5.8. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра. Если существует борелевская часть $\mathrm{Irr}(A)$, которая пересекается с каждым классом эквивалентности в одной и только одной точке, то A — GCR-алгебра (использовать 7.2.3 и 9.5.6) [83].

9.5.9. Пусть A — C^*-алгебра. Условия (i), (ii), (iii), (iv) из 9.1 эквивалентны между собой, но неизвестно, эквивалентны ли они условию (v) [255], [256], [290].

§ 10. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОЛЯ C^*-АЛГЕБР

Пусть A — C^*-алгебра, T — топологическое пространство, B — множество таких непрерывных отображений $f\colon T \to A$, что $\sup_{t \in T} \| f(t) \| < +\infty$. Если $f, g \in B$ и $\lambda \in \boldsymbol{C}$, определим $f + g$, λf, fg, $f^* \in B$ и $\| f \|$:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t),$$
$$(fg)(t) = f(t)\, g(t), \quad f^*(t) = f(t)^*$$

для каждого $t \in T$ и

$$\| f \| = \sup_{t \in T} \| f(t) \|.$$

Легко видеть, что B становится C^*-алгеброй.

Если T дискретно, то B — просто произведение C^*-алгебр $\prod_{t \in T} A_t$, где $A_t = A$ для каждого t. Мы уже вводили более общее понятие произведения $\prod_{t \in T} A_t$ C^*-алгебр, где T — множество и A_t — C^*-алгебра, меняющаяся с t. Мы ставим себе целью теперь определить способ построения C^*-алгебр, объединяющий предыдущие способы: T должно быть топологическим пространством, не обязательно дискретным, и A_t — меняться с t.

Основная польза этой конструкции в том, что довольно обширные классы C^*-алгебр могут быть получены таким образом из очень простых A_t. Это также дает нам весьма частное решение второй задачи, упомянутой в начале § 3.

10.1. Непрерывные поля банаховых пространств.

10.1.1. Пусть T — топологическое пространство, $(E(t))_{t \in T}$ — семейство комплексных банаховых пространств. Назовем *векторным полем* всякий элемент $\prod\limits_{t \in T} E(t)$, иначе говоря, всякую функцию x, определенную на T и такую, что $x(t) \in E(t)$ для каждого $t \in T$. Вообще, если $Y \subset T$, назовем векторным полем на Y элемент $\prod\limits_{t \in Y} E(t)$.

10.1.2. Определение. *Пусть T — топологическое пространство. Непрерывное поле $\mathscr{E}$ банаховых пространств на T — это семейство $(E(t))_{t \in T}$ банаховых пространств, снабженное таким множеством $\Gamma \subset \prod\limits_{t \in T} E(t)$ векторных полей, что*:

(i) Γ — *комплексное векторное подпространство* $\prod\limits_{t \in T} E(t)$;

(ii) *для каждого $t \in T$ множество $x(t)$, где $x \in \Gamma$, всюду плотно в $E(t)$*;

(iii) *для каждого $x \in \Gamma$ функция $t \to \| x(t) \|$ непрерывна*;

(iv) *Пусть $x \in \prod\limits_{t \in T} E(t)$ — векторное поле; если для каждого $t \in T$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такой $x' \in \Gamma$, что $\| x(t) - x'(t) \| \leqslant \varepsilon$ в окрестности t, то $x \in \Gamma$.*

Элементы Γ называются *непрерывными векторными полями из* $\mathscr{E}$.

Определение 10.1.2 аналогично определению измеримого поля.

10.1.3. Пусть

$$\mathscr{E} = ((E(t))_{t \in T}, \Gamma), \quad \mathscr{E}' = ((E'(t))_{t \in T}, \Gamma')$$

— два непрерывных поля банаховых пространств на T. Назовем *изоморфизмом* $\mathscr{E}$ *на* $\mathscr{E}'$ семейство $\varphi = (\varphi_t)_{t \in T}$ такое, что:

1° каждое φ_t есть изоморфизм (изометрический) $E(t)$ на $E'(t)$;

2° φ переводит Γ в Γ'.

10.1.4. Пример. Пусть E — банахово пространство, T — топологическое пространство, Γ — множество непрерывных отображений T в E. Для каждого $t \in T$ положим $E(t) = E$. Тогда $\mathscr{E} = ((E(t))_{t \in T}, \Gamma)$ — непрерывное поле банаховых пространств на T, называемое *постоянным полем* на T, определенным E. (В дальнейшем читателю полезно всегда иметь этот пример в виду.) Поле, изоморфное постоянному полю, называется *тривиальным*.

10.1.5. Пример. Предположим, что в определении 10.1.2 T дискретно. Тогда аксиомы (ii) и (iv) показывают, что Γ необходимо совпадает с $\prod_{t \in T} E(t)$.

10.1.6. Пусть T — топологическое пространство, $\mathscr{E} = ((E(t))_{t \in T}, \Gamma)$ — непрерывное поле банаховых пространств на T. Пусть $Y \subset T$ и $t_0 \in Y$. Векторное поле x на Y называется *непрерывным в* t_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $x' \in \Gamma$, что $\| x(t) - x'(t) \| \leqslant \varepsilon$ в окрестности t_0. Оно называется *непрерывным на* Y, если оно непрерывно в каждой точке Y. Для $Y = T$ это согласуется с уже принятым определением непрерывного векторного поля вследствие аксиомы (iv).

10.1.7. Пусть Γ_Y — множество непрерывных векторных полей на Y. Очевидно, что $((E(t))_{t \in Y}, \Gamma_Y)$ есть непрерывное поле банаховых пространств на Y, которое называется полем, *индуцированным* $\mathscr{E}$ *на* Y, и обозначается $\mathscr{E} | Y$.

10.1.8. Если каждая точка T обладает такой окрестностью V, что $\mathscr{E} | V$ тривиально, то говорят, что $\mathscr{E}$ *локально тривиально*.

10.1.9. Предложение. *Пусть* $((E(t))_{t \in T}, \Gamma)$ — *непрерывное поле банаховых пространств.*

(i) *Пусть* $t_0 \in T$ — *векторное поле на* T, *непрерывное в* t_0, *и* $f\colon T \to \mathbf{C}$ — *непрерывная в* t_0 *функция. Тогда векторное поле*

$$t \to (fx)(t) = f(t)\, x(t)$$

непрерывно в t_0.

(ii) *Если* $y \in \Gamma$ *и если* $g\colon T \to \mathbf{C}$ *непрерывна на* T, *то* $gy \in \Gamma$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое $x' \in \Gamma$, что $\| x(t) - x'(t) \| \leqslant \varepsilon$ в окрестности t_0. Имеем

$$| f(t) - f(t_0) | < \varepsilon, \quad | f(t) | \leqslant | f(t_0) | + 1, \quad \| x'(t) \| \leqslant \| x'(t_0) \| + 1$$

в окрестности t_0. Поэтому

$$\| f(t)\, x(t) - f(t_0)\, x'(t) \| \leqslant | f(t) | \cdot \| x(t) - x'(t) \| + \\ + | f(t) - f(t_0) | \cdot \| x'(t) \| \leqslant \varepsilon \left(| f(t_0) | + \| x'(t_0) \| + 2 \right)$$

в окрестности t_0. Это доказывает (i), и (ii) следует из (i).

10.1.10. Предложение. *Для каждого* $t_0 \in T$ *и каждого* $\xi \in E(t_0)$ *существует такое* $x \in \Gamma$, *что* $x(t_0) = \xi$.

По аксиоме (ii) 10.1.2, существует последовательность (ξ_n) ненулевых векторов в $E(t_0)$, обладающая следующими свойствами:

a) $\sum \| \xi_n \| < +\infty$;

b) $\sum \xi_n = \xi$;

c) для каждого n существует такое $x_n \in \Gamma$, что $x_n(t_0) = \xi_n$.

Пусть f_n — функция на T, равная 1, как только $\|x_n(t)\| \leqslant \|\xi_n\|$, и $\|\xi_n\|/\|x_n(t)\|$, как только $\|x_n(t)\| > \|\xi_n\|$. Эта функция непрерывна, следовательно, $y_n = f_n x_n \in \Gamma$ [10.1.9 (ii)]. Имеем $y_n(t_0) = \xi_n$, $\|y_n(t)\| \leqslant \|\xi_n\|$ для каждого $t \in T$, поэтому $\sum y_n(t)$ сходится для каждого t к элементу $x(t)$ из $E(t)$. Имеем $x(t_0) = \sum \xi_n = \xi$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число p, что $\left\| x(t) - \sum\limits_1^p y_n(t) \right\| \leqslant \varepsilon$ на всем T, откуда $x \in \Gamma$ согласно аксиомам (i) и (iv) из 10.1.2.

10.1.11. Лемма. *Пусть T — паракомпактное пространство, Y — замкнутая часть T, $((E(t)), \Gamma)$ — непрерывное поле пространств Банаха на T, x (соотв. y) — непрерывное векторное поле на T (соотв. Y), a — число > 0 такое, что $\|x(t) - y(t)\| \leqslant a$ на Y. Существует такое $x' \in \Gamma$, что $\|x'(t) - y'(t)\| \leqslant a/2$ на Y и $\|x'(t) - x(t)\| \leqslant 2a$ на T.*

Существует покрытие (V_i) множества Y открытыми частями T и, для каждого i, такое $x_i \in \Gamma$, что $\|x_i(t) - y(t)\| \leqslant a/2$ на V_i. Заменяя (V_i) более мелким покрытием, можно предполагать, что (V_i) локально конечно. Пусть η_i — семейство функций $\geqslant 0$, непрерывных в T, подчиненное покрытию (V_i) и такое, что $\sum \eta_i = 1$ на Y. Пусть $w = \sum \eta_i x_i$; оно непрерывно в каждой точке T и поэтому принадлежит Γ. Пусть $t \in Y$. В сумме $\sum \eta_i(t) x_i(t)$ можно учитывать только те индексы i, для которых $\eta_i(t) > 0$, и для этих индексов имеем

$$\|x_i(t) - y(t)\| \leqslant a/2, \quad \text{поэтому} \quad \left\| \sum \eta_i(t) x_i(t) - y(t) \right\| \leqslant a/2.$$

Вследствие этого $\|w(t) - x(t)\| \leqslant 2a$ в окрестности Z множества Y. Пусть f: $T \to [0, 1]$ — непрерывная функция, равная 1 на Y и 0 на $T - Z$. Положим $x' = fw + (1 - f)x$. На Y имеем

$$\|x'(t) - y(t)\| = \|w(t) - y(t)\| \leqslant a/2.$$

На T имеем

$$\|x'(t) - x(t)\| = |f(t)| \|w(t) - x(t)\| \leqslant 2a.$$

10.1.12. Предложение. *Пусть T — паракомпактное пространство, Y — замкнутая часть T, $\left((E(t))_{t \in T}, \Gamma\right)$ — непрерывное поле банаховых пространств, y — непрерывное векторное поле на Y. Существует поле $x \in \Gamma$, продолжающее y.*

Рассуждая, как в лемме 10.1.11, строим такое $x_0 \in \Gamma$, что $\|x_0(t) - y(t)\| \leqslant 1$ на Y. Затем, повторно применяя лемму 10.1.11, получим последовательность (x_n) элементов Γ таких, что

$$\|x_n(t) - y(t)\| \leqslant 2^{-n} \text{ на } Y \text{ и } \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leqslant 2^{-n+2} \text{ на } T;$$

x_n сходятся равномерно к $x \in \Gamma$. Имеем $x(t) = y(t)$ на Y.

10.1.13. Предложение. *Пусть T — вполне регулярное пространство, $(Y_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие T; положим $Y_{ij} = Y_i \cap Y_j$. Пусть для каждого $i \in I$ $\mathscr{E}_i = ((E_i(t)), \Gamma_i)$ — непрерывное поле банаховых пространств на Y_i. Для любых $i, j \in I$ введем g_{ij} — изоморфизм $\mathscr{E}_j | Y_{ij}$ на $\mathscr{E}_i | Y_{ij}$. Предположим, что для всех $i, j, k \in I$ имеем $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$. Тогда существует $\mathscr{E}$ — непрерывное поле банаховых пространств на T и притом единственное с точностью до изоморфизма, обладающее следующим свойством: для каждого $i \in I$ существует такой изоморфизм h_i из $\mathscr{E}_i$ на $\mathscr{E} | Y_i$, что $g_{ij} = h_i^{-1} h_j$ для всех $i, j \in I$.*

Единственность очевидна, докажем существование. Для каждого $t \in T$ введем $I(t) \neq \varnothing$ — множество таких $i \in I$, что $t \in Y_i$. Если $i, j \in I(t)$, то g_{ij} — изоморфизм $E_j(t)$ на $E_i(t)$, и $g_{ij}(t) g_{jk}(t) = g_{ik}(t)$, если $i, j, k \in I(t)$. Поэтому существует банахово пространство $E(t)$ и для каждого $i \in I(t)$ — такой изоморфизм $h_i(t)$ пространства $E_i(t)$ на $E(t)$, что

$$g_{ij}(t) = h_i(t)^{-1} h_j(t) \quad \text{для} \quad i, j \in I(t)$$

[можно, например, взять $E(t) = E_{i_0}(t)$, где $i_0 \in I(t)$, и $h_i(t) = g_{i_0 i}(t)$]. Существует и притом единственное множество Δ_i векторных полей, определенных на Y_i со значениями в $E(t)$ такое, что $(h_i(t))_{t \in Y_i}$ — изоморфизм $\mathscr{E}_i$ на $\mathscr{F}_i = \left((E(t))_{t \in Y_i}, \Delta_i\right)$. Имеем $\mathscr{F}_i | Y_{ij} = \mathscr{F}_j | Y_{ij}$ для любых $i, j \in I$.

Пусть тогда Γ — множество таких $x \in \prod_{t \in T} E(t)$, что $x | Y_i \in \Delta_i$ для каждого $i \in I$. Очевидно, что Γ удовлетворяет аксиомам (i), (iii), (iv) 10.1.2. Покажем, что Γ удовлетворяет аксиоме (ii). Пусть $t_0 \in T$ и $\xi \in E(t_0)$. Пусть $i \in I$ таково, что $t_0 \in Y_i$. Пусть $V \subset Y_i$ — замкнутая окрестность t_0 в T, η: $T \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная функция, равная 1 в t_0 и 0 в $T - V$. Пусть $y \in \Delta_i$ такой, что $y(t_0) = \xi$. Пусть x — элемент $\prod_{t \in T} E(t)$, равный 0 в $T - V$ и ηy в V. Имеем $x(t_0) = \xi$. Покажем, что $x \in \Gamma$. Пусть $j \in V$; покажем, что $x | Y_j \in \Delta_j$. Достаточно показать, что для каждого $t_1 \in Y_j$ x совпадает в окрестности t_1 с элементом Δ_j. Это очевидно, если $t_1 \notin V$. Предположим, что $t_1 \in V$. Тогда $t_1 \in Y_{ij}$. Так как $\mathscr{F}_i | Y_{ij} = \mathscr{F}_j | Y_{ij}$ и x совпадает в окрестности t_1 с элементом Δ_i, то наше утверждение доказано.

Следовательно, доказано, что $\mathscr{E} = ((E(t)), \Gamma)$ — непрерывное поле банаховых пространств на T. Легко видеть, что $\mathscr{E} | Y_i = \mathscr{F}_i$, откуда следует утверждение.

Говорят, что *$\mathscr{E}$ получается объединением $\mathscr{E}_i$ с помощью g_{ij}.*

Библиография: [10], [30], [52], [70], [141], [149], [163].

10.2. Тотальные подмножества.

10.2.1. Определение. *Пусть* $\mathscr{E} = ((E(t))_{t \in T}, \Gamma)$ — *непрерывное поле банаховых пространств на* T. *Пусть* $\Lambda \subset \Gamma$. *Говорят, что* Λ *тотально, если для каждого* $t \in T$ *множество* $x(t)$, *где* x *пробегает* Λ, *тотально в* $E(t)$. *Говорят, что* $\mathscr{E}$ *сепарабельно, если в* Γ *существует счетное тотальное подмножество.*

Если Λ — счетное тотальное подмножество Γ, то множество Λ' линейных комбинаций элементов Λ с рациональными комплексными коэффициентами также счетно и $\Lambda'(t)$ всюду плотно в $E(t)$ для каждого t.

10.2.2. Предложение. *Пусть* $((E(t)), \Gamma)$ — *непрерывное поле банаховых пространств на* T. *Пусть* $\Lambda \subset \Gamma$ — *тотальное подмножество и* $\overline{\Lambda}$ — *векторное подпространство* Γ, *порожденное* Λ. *Для векторного поля* $x \in \prod_{t \in T} E(t)$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $x \in \Gamma$.

(ii) *Для каждого* $t_0 \in T$ *и каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $x' \in \Gamma$, *что* $\| x(t) - x'(t) \| \leqslant \varepsilon$ *в окрестности* t_0.

(ii′) *Для каждого* $t_0 \in T$ *и каждого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $x' \in \overline{\Lambda}$, *что* $\| x(t) - x'(t) \| \leqslant \varepsilon$ *в окрестности* t_0.

(iii) *Для каждого* $x' \in \Gamma$ *функция* $t \to \| x(t) - x'(t) \|$ *непрерывна.*

(iii′) *Для каждого* $x' \in \overline{\Lambda}$ *функция* $t \to \| x(t) - x'(t) \|$ *непрерывна.*

(ii′)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iii′): очевидно.

(iii′)$\Rightarrow$(ii′): предположим, что выполнено условие (iii′). Пусть $t_0 \in T$ и $\varepsilon > 0$. Так как $\overline{\Lambda}(t_0)$ всюду плотно в $E(t_0)$, то существует такое $x' \in \overline{\Lambda}$, что $\| x(t_0) - x'(t_0) \| < \varepsilon$. Вследствие (iii′) имеем $\| x(t) - x'(t) \| < \varepsilon$ в окрестности t_0, откуда следует (ii′).

10.2.3. Предложение. *Пусть* T — *топологическое пространство,* $(E(t))_{t \in T}$ — *семейство банаховых пространств,* Λ — *подмножество* $\prod_{t \in T} E(t)$, *удовлетворяющее аксиомам* (i), (ii), (iii) 10.1.2 (*с* Γ, *замененным на* Λ). *Тогда существует* Γ — *подмножество* $\prod_{t \in T} E(t)$ — *и притом единственное, которое содержит* Λ *и удовлетворяет аксиомам* (i)—(iv) 10.1.2, *а именно* — Γ *есть множество векторных полей* x, *обладающих свойством* (ii′) 10.2.2.

Единственность следует из 10.2.2: если Γ существует, то его элементы характеризуются свойством (ii′). Обратно, множество векторных полей x, обладающих свойством (ii′), удовлетворяет, очевидно, аксиомам (i)—(iv) 10.1.2 и содержит Λ.

10.2.4. Предложение. *Пусть* $\mathscr{E}=(E(t), \Gamma)$, $\mathscr{E}'=((E'(t)), \Gamma')$ — *два непрерывных поля банаховых пространств на* T, Λ — *тотальное подмножество* Γ. *Пусть для каждого* $t\in T$ *определен* φ_t — *изоморфизм (изометрический)* $E(t)$ *на* $E'(t)$. *Для того чтобы* $\varphi=(\varphi_t)_{t\in T}$ *было изоморфизмом* $\mathscr{E}$ *на* $\mathscr{E}'$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi(\Lambda)\subset\Gamma'$.

Необходимость ясна. Предположим, что $\varphi(\Lambda)\subset\Gamma'$, и докажем, что φ изоморфизм. Можно предположить, что Λ — векторное подпространство Γ. Если $x\in\Gamma$, то x — предел элементов Λ в смысле локальной равномерной сходимости [10.2.2. (ii′)], поэтому $\varphi(x)$ — предел элементов Γ' в смысле локальной равномерной сходимости, поэтому $\varphi(x)\in\Gamma'$. Обратно, пусть $x'\in\Gamma'$, $x=\varphi^{-1}(x')$, $t_0\in T$ и $\varepsilon>0$. Существует такое $y\in\Gamma$, что $y(t_0)=x(t_0)$. Имеем

$$\varphi(y)\in\Gamma' \quad \text{и} \quad \varphi(y)(t_0)=\varphi_{t_0}(x(t_0))=x'(t_0),$$

откуда $\|\varphi(y)(t)-x'(t)\|\leqslant\varepsilon$ в окрестности t_0, откуда $\|y(t)-x(t)\|\leqslant\varepsilon$ в окрестности t_0. Следовательно, $x\in\Gamma$, так что $\varphi^{-1}(\Gamma')\subset\Gamma$.

10.2.5. Предложение. *Пусть* T — *локально компактное пространство,* $((E(t)), \Gamma)$ — *непрерывное поле банаховых пространств на* T, $x\in\Gamma$, K — *компактная часть* T, $\varepsilon>0$, Λ — *тотальная часть* Γ. *Существуют такие комплексные непрерывные функции с компактным носителем* $f_1, \ldots, f_n$ *на* T *и такие элементы* $x_1, \ldots, x_n$ *в* Λ, *что*

$$\|x(t)-f_1(t)x_1(t)-\ldots-f_n(t)x_n(t)\|\leqslant\varepsilon \quad \text{на} \quad K.$$

Пусть $\overline{\Lambda}$ — векторное подпространство Γ, порожденное Λ. Вследствие 10.2.2 (ii) существует такое покрытие (V_i) множества K относительно компактными открытыми частями T и такие $x'_i\in\overline{\Lambda}$, что $\|x(t)-x'_i(t)\|\leqslant\varepsilon$ в V_i. Так как K компактно, то можно предположить, что (V_i) есть конечное покрытие $(V_1, \ldots, V_p)$. Пусть $(\eta_1, \ldots, \eta_{p+1})$ — непрерывное разбиение единицы в T, подчиненное открытому покрытию $(V_1, \ldots, V_p, T-K)$ пространства T. Имеем

$$\|x(t)-\eta_1(t)x'_1(t)-\ldots-\eta_p(t)x'_p(t)\|\leqslant\varepsilon$$

на всем K. Выражая x'_i через линейные комбинации элементов Λ, получаем утверждение.

10.2.6. Пусть T — локально компактное пространство, $\mathscr{E}=((E(t)), \Gamma)$ — непрерывное поле банаховых пространств на T, T' — компактное пространство, получаемое из T присоединением несобственной точки ω. Положим $E'(t)=E(t)$ для $t\in T$;

$E'(\omega)=0$. Пусть Γ' — множество таких $x \in \prod_{t \in T'} E'(t)$, что $x \mid T \in \Gamma$ и $\|x(t)\| \to 0$ на бесконечности на T.

Предложение. $\mathscr{E}'=((E'(t))_{t \in T'}, \Gamma')$ *есть непрерывное поле банаховых пространств на* T', *и* $\mathscr{E}' \mid T=\mathscr{E}$.

Очевидно, что Γ' удовлетворяет аксиомам (i), (iii), (iv) 10.1.2. Пусть $t_0 \in T$ и $\xi \in E(t_0)$. Существует такое $x \in \Gamma$, что $x(t_0)=\xi$. Умножая x на функцию, равную 1 в t_0 и имеющую компактный носитель, можно предположить, что $\|x(t)\| \to 0$ на бесконечности на T, откуда также следует существование такого $x' \in \Gamma'$, что $x'(t_0)=\xi$. Пусть Γ_0 — множество сужений на T элементов из Γ', иначе говоря, множество элементов из Γ, которые стремятся к нулю на бесконечности; вследствие изложенного выше Γ_0 — тотальное подмножество Γ. Для каждого $t \in T$ введем φ_t — тождественное отображение $E(t)$; пусть $\varphi=(\varphi_t)_{t \in T}$. Для каждого $x \in \Gamma_0$ $\varphi(x)$ — непрерывное векторное поле относительно $\mathscr{E}' \mid T$. Следовательно, φ — изоморфизм $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}' \mid T$ (10.2.4).

10.2.7. Предложение. *Пусть T — сепарабельное метризуемое пространство, $\mathscr{E}=((E(t)), \Gamma)$ — локально тривиальное непрерывное поле банаховых пространств на T. Если каждое $E(t)$ сепарабельно, то $\mathscr{E}$ сепарабельно.*

Существует такое счетное открытое покрытие (U_n) пространства T, что каждое $\mathscr{E} \mid U_n$ тривиально, кроме того, такое открытое покрытие (V_n) пространства T, что $\overline{V}_n \subset U_n$ для каждого n. Для каждого n существует последовательность (x_{nm}) таких векторных полей, определенных, ограниченных и непрерывных на U_n, что для каждого $t \in U_n$ последовательность $x_{nm}(t)$ всюду плотна в $E(t)$ (действительно, $\mathscr{E} \mid U_n$ отождествляется с постоянным полем, определенным сепарабельным пространством). Пусть η_n: $T \to [0, 1]$ — непрерывная функция, равная 1 на V_n и нулю на $T-U_n$. Пусть y_{nm} — векторное поле на T, равное $\eta_n x_{nm}$ на U_n и 0 на $T-U_n$. Имеем $y_{nm} \in \Gamma$; действительно, если $t \in U_n$, то y_{nm} непрерывно в t; если $t \in T-U_n$ и если $\varepsilon>0$, то существует окрестность t, в которой $\|y_{nm}(t')\| \leqslant \varepsilon$. Пусть $t \in T$ и $\xi \in E(t)$. Существует такое n, что $t \in V_n$. Тогда ξ — предел векторов $x_{nm}(t)=y_{nm}(t)$. Следовательно, y_{nm} образуют тотальное подмножество Γ.

Библиография: [10], [30], [52], [70], [141], [149], [163].

10.3. Непрерывные поля C^*-алгебр.

10.3.1. Определение. *Пусть T — топологическое пространство. Непрерывное поле C^*-алгебр на T — это непрерывное поле $((A(t), \Theta)$ банаховых пространств на T, где каждое $A(t)$ снабжено умножением и инволюцией, превращающими его* *в C^*-алгебру, и Θ сохраняется при умножении и инволюции.*

Когда говорят об изоморфизмах непрерывных полей C^*-алгебр, то, разумеется, речь идет об изоморфизмах, согласованных со структурой инволютивных алгебр в слоях. То же относится к понятиям тривиальности и локальной тривиальности.

Назовем *непрерывным полем элементарных C^*-алгебр* такое непрерывное поле $((A(t)), \Theta)$ C^*-алгебр, что каждое $A(t)$ есть элементарная C^*-алгебра (4.1.1).

10.3.2. Предложение. *Пусть $\mathfrak{A} = ((A(t), \Theta)$ — непрерывное поле банаховых пространств на T, причем каждое $A(t)$ есть C^*-алгебра. Для того чтобы $\mathfrak{A}$ было непрерывным полем C^*-алгебр, достаточно, чтобы существовало тотальное подмножество Λ в Θ, инвариантное относительно умножения и инволюции.*

Действительно, пусть $\bar{\Lambda}$ — векторное подпространство Θ, порожденное Λ; оно инвариантно относительно умножения и инволюции. С другой стороны, каждый элемент Θ есть предел элементов $\bar{\Lambda}$ по отношению к локальной равномерной сходимости. Следовательно, если x, $y \in \Theta$, то векторное поле xy есть предел, в смысле локальной равномерной сходимости, элементов из $\bar{\Lambda}$, поэтому $xy \in \Theta$. Видно также, что $x^* \in \Theta$.

10.3.3. Предложение. *Пусть $((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле C^*-алгебр на T, x — такой элемент Θ, что $xx^* = x^*x$, и f: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ — такая непрерывная функция, что $f(0) = 0$. Тогда $t \to f(x(t))$ — элемент Θ.*

Пусть $t_0 \in T$. Существует окрестность V точки t_0 и такая постоянная $M > 0$, что $\|x(t)\| \leqslant M$ на V. Пусть (p_n) — последовательность многочленов без свободного члена от z и $\bar{z}$, которые равномерно стремятся к f на диске $|z| \leqslant M$. Тогда $p_n(x, x^*) \in \Theta$, и $p_n(x(t), x^*(t))$ стремится равномерно на V к $f(x(t))$. Отсюда следует предложение.

Поле $t \to f(x(t))$ обозначим $f(x)$.

10.3.4. Следствие. *Если $x \in \Theta$ и $x(t) \geqslant 0$ для каждого t, то поле $t \to x(t)^{1/2}$ есть некоторый элемент y семейства Θ, причем $y = y^*$, $y^2 = x$.*

10.3.5. Если каждая $A(t)$ имеет единичный элемент 1_t и если поле $t \to 1_t$ является элементом Θ, то в 10.3.3 предположение $f(0) = 0$ можно опустить.

10.3.6. Предложение. *Пусть $((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле C^*-алгебр на T, x — такой элемент Θ, что $xx^* = x^*x$, $t_0 \in T$, и U — окрестность $\mathrm{Sp}'\,x(t_0)$ в $\boldsymbol{C}$. Существует такая окрестность V точки t_0 в T, что $\mathrm{Sp}'\,x(t) \subset U$ для каждого $t \in V$.*

Пусть f: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ — непрерывная функция, равная нулю на $\mathrm{Sp}'\,x(t_0)$ и 1 на $\boldsymbol{C} - U$. Тогда $f(x)(t_0) = 0$, поэтому $\|f(x)(t)\| < 1$

в окрестности V точки t_0. Если $t \in V$, то $\mathrm{Sp}' x(t)$ не может пересекаться с $\boldsymbol{C} - U$.

Библиография: [10], [52], [70], [149], [163].

10.4. C^*-алгебра, определенная непрерывным полем C^*-алгебр.

10.4.1. Пусть T — локально компактное пространство, $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле C^*-алгебр на T, A — множество таких $x \in \Theta$, что $\|x(t)\|$ стремится к нулю на бесконечности на t. Тогда A — инволютивная подалгебра Θ. Для $x \in A$ положим

$$\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|.$$

Очевидно, что с этой нормой A есть C^*-алгебра, которая называется *C^*-алгеброй, определенной* $\mathfrak{A}$. Для каждого $t \in T$ соответствие $x \to x(t)$ есть морфизм A на $A(t)$.

10.4.2. Лемма. *Пусть I — замкнутый идеал A (левый или правый). Для каждого $t \in T$ введем $I(t)$ — множество $x(t)$, где x пробегает I. Тогда I — множество таких $x \in A$, что $x(t) \in I(t)$ для каждого $t \in T$.*

Проведем рассуждение для случая правого идеала. Если $x \in I$, то $x(t) \in I(t)$ для каждого t. Обратно, пусть $x \in A$ таков, что $x(t) \in I(t)$ для каждого t. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $\tau \in T$ существует такой $y_\tau \in I$, что $x(\tau) = y_\tau(\tau)$, и такой $z_\tau \in A$, что $\|y_\tau(\tau) - y_\tau(\tau) z_\tau(\tau)\| < \varepsilon$ (1.7.2), откуда $\|x(t) - y_\tau(t) z_\tau(t)\| \leqslant \varepsilon$ в окрестности τ. Пусть K — компактное множество таких $t \in T$, что $\|x(t)\| \geqslant \varepsilon$. Существует покрытие $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ множества K открытыми частями T и, для каждого i, такие $y_i \in I$ и $z_i \in A$, что $\|x(t) - y_i(t) z_i(t)\| \leqslant \varepsilon$ в U_i. Положим $U_0 = T - K$, $y_0 = z_0 = 0$. Пусть $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ — непрерывное разложение единицы, подчиненное покрытию $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ пространства T. Так как $f_i z_i \in A$ [10.1.9 (ii)], то $\sum f_i y_i z_i \in I$. Пусть $t \in T$. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_p$ — те индексы i, для которых $t \in u_i$. Имеем

$$\sum f_i(t) y_i(t) z_i(t) = f_{i_1}(t) y_{i_1}(t) z_{i_1}(t) + \ldots + f_{i_p}(t) y_{i_p}(t) z_{i_p}(t)$$

и

$$\|x(t) - y_{i_1}(t) z_{i_1}(t)\|, \ldots, \|x(t) - y_{i_p}(t) z_{i_p}(t)\| \leqslant \varepsilon;$$

так как $f_{i_1}(t) + \ldots + f_{i_p}(t) = 1$, видим, что

$$\left\|x(t) - \sum f_i(t) y_i(t) z_i(t)\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому $\left\|x - \sum f_i y_i z_i\right\| \leqslant \varepsilon$. Так как I замкнут, то $x \in I$.

10.4.3. Теорема. *Пусть T — локально компактное пространство, $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле C^*-алгебр на T, A — C^*-алгебра, определенная $\mathfrak{A}$. Для каждого $t \in T$ и каждого*

$\pi \in A(t)^\frown$ *введем* ρ_π — *неприводимое представление* $x \to \pi(x(t))$ C^*-*алгебры* A. *Тогда* $\pi \to \rho_\pi$ — *биекция объединения множеств* $A(t)^\frown$ *на* $\hat{A}$.

Пусть $\pi \in A(t)$, $\pi' \in A(t')^\frown$. Если $t \neq t'$, то существует комплексная непрерывная функция f на T такая, что $f(t) = 1$, $f(t') = 0$; пусть $x \in A$ таков, что $\pi(x(t)) \neq 0$, тогда

$$\rho_\pi(fx) = \pi(x(t)) \neq 0, \quad \rho_{\pi'}(fx) = \pi'(0) = 0,$$

поэтому ρ_π и $\rho_{\pi'}$ неэквивалентны. Отсюда следует, что отображение $\pi \to \rho_\pi$ инъективно. Пусть теперь $\rho \in \hat{A}$. Пусть I — ядро π. Пусть $I(t)$ — множество $x(t)$, где x пробегает I. Пусть Y — множество тех $t \in T$, для которых $I(t) \neq A(t)$. Имеем $Y \neq \varnothing$ вследствие 10.4.2. Предположим, что Y содержит две различные точки t_1 и t_2. Пусть U_1, U_2 — непересекающиеся окрестности t_1, t_2. Пусть K_i — замкнутый двусторонний идеал A, образованный теми $x \in A$, которые обращаются в нуль вне U_i. Имеем $I \supset 0 = K_1 \cdot K_2$, следовательно, например, $I \supset K_1$ (2.11.4). Поэтому $I(t_1) \supset K_1(t_1) = A(t_1)$, что абсурдно, так как $t_1 \in Y$. Поэтому Y образовано одной точкой $t_0 \in T$. Вследствие 10.4.2. I есть множество таких $x \in A$, что $x(t_0) \in I(t_0)$. Поэтому ρ есть композиция морфизма $x \to x(t_0)$ и представления (автоматически неприводимого) C^*-алгебры $A(t_0)$.

10.4.4. Следствие. *Пусть* T — *локально компактное пространство,* $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$ — *непрерывное поле ненулевых элементарных* C^*-*алгебр на* T, A — C^*-*алгебра, порожденная* $\mathfrak{A}$. *Для каждого* $t \in T$ *введем* ρ_t — *неприводимое представление* A, *составленное из морфизма* $t \to x(t)$ *и неприводимого представления, единственного с точностью до изоморфизма,* C^*-*алгебры* $A(t)$. *Тогда* $t \to \rho_t$ *есть гомеоморфизм* T *на* $\hat{A}$.

Это отображение биективно (10.4.3). Пусть теперь $Y \subset T$ и $t_0 \in T$. Пересечение ядер ρ_t $(t \in Y)$ есть множество I_Y элементов $x \in A$ таких, что $x(t) = 0$ на Y. Для того чтобы ρ_{t_0} было точкой прикосновения ρ_t $(t \in Y)$, необходимо и достаточно, чтобы $I_{\{t_0\}} \supset I_Y$. Если $t_0 \in \overline{Y}$, то ясно, что $I_{\{t_0\}} \supset I_Y$. Если $t_0 \notin \overline{Y}$, то существует комплексная непрерывная функция на T, равная 1 в t_0 и 0 на Y, поэтому существует $x \in A$, ненулевой в t_0 и равный нулю на Y, так что $I_{\{t_0\}} \not\supset I_Y$.

Отождествим T и $\hat{A}$ с помощью вышеописанного гомеоморфизма.

10.4.5. Следствие. *В обозначениях следствия* 10.4.4 A — CCR-C^*-*алгебра со спектром* T.

Действительно, для каждого $t \in T = \hat{A}$ C^*-алгебра $\rho_t(A)$ состоит из компактных операторов, так как $A(t)$ элементарна,

10.4.6. Предложение. *Пусть T — компактное пространство, $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле C^*-алгебр на T, $A = \Theta$ — C^*-алгебра, определенная $\mathfrak{A}$. Предположим, что каждая $A(t)$ имеет единичный элемент 1_t и что поле $t \to 1_t$ (обозначаемое 1) принадлежит A. Пусть B — под-C^*-алгебра A. Предположим, что для каждой пары (t_1, t_2) различных элементов T существует такое $x \in B$, что $x(t_1) = 1_{t_1}$, $x(t_2) = 0$ (и, если T сводится к одной точке, предположим, что $1 \in B$). Тогда для каждой комплексной непрерывной функции f на T поле $t \to f(t) 1_t$ принадлежит B.*

Пусть $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 \neq t_2$. Существует $x \in B$ с $x(t_1) = 1_{t_1}$, $x(t_2) = 0$. Заменяя x на xx^*, можно предположить, что $x \in B^+$. Пусть p: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная функция, равная 0 в окрестности 0 и 1 на $[1, +\infty)$. Положим $y = p(x)$. Тогда $y(t_1) = 1$ и $y(t)$ равно нулю в окрестности t_2. Пусть K — непустая компактная часть T, не содержащая t_1. Существуют открытые части $U_1, \ldots, U_n$ пространства T, покрывающие K и элементы $y_1, \ldots, y_n$ в B такие, что $y_i(t_1) = 1_{t_1}$, $y_i(t) = 0$ в U_i. Образуя произведение $y_1 \ldots y_n y_n^* \ldots y_1^*$, видим, что существует такой $z \in B^+$, что $z(t_1) = 1_{t_1}$, $z(t) = 0$ на K. Это заключение, очевидно, верно также, если $K = \varnothing$. В окрестности t_1 имеем $\| z(t) - 1_t \| \leqslant 1/2$, поэтому $z(t) \geqslant (1/2) 1_t$. Пусть тогда L — компактная часть T, не пересекающаяся с K. Существуют открытые части $V_1, \ldots, V_p$ пространства T, покрывающие L, и элементы $z_1, \ldots, z_p$ из B^+ такие, что $z_i(t) = 0$ на K, $z_i(t) \geqslant (1/2) 1_t$ на V_i. Тогда $u = 2(z_1 + \ldots + z_p) \in B^+$, $u(t) = 0$ на K, $u(t) \geqslant 1_t$ на L.

Пусть f — непрерывная вещественная функция на T и $\varepsilon > 0$. Пусть $(W_1, \ldots, W_q)$ — такое открытое покрытие T, что колебание f в каждом W_i не превосходит ε; пусть λ_i — значение f в W_i. Пусть $(W'_1, \ldots, W'_q)$ — такое открытое покрытие T, что $\overline{W}'_i \subset W_i$ для каждого i. Существует такое $v_i \in B^+$, что $v_i(t) \geqslant 1_t$ на $\overline{W}'_i$ и $v_i(t) = 0$ на $T - W_i$. Пусть $v = v_1 + \ldots + v_q$. Имеем $v(t) \geqslant 1_t$ для каждого t, следовательно, из функционального исчисления (10.3.3), существует такое $v' \in B^+$, что $(v'^2 v)(t) = 1$ для каждого t. Пусть $w_i = v' v_i v' \in B^+$, так что $\sum w_i = v' v v' = 1$. Пусть $t \in T$. Имеем, например,

$$t \in W_1, \ldots, W_m, \quad t \notin W_{m+1}, \ldots, W_q.$$

Тогда

$$f(t) \cdot 1_t - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i w_i(t) = f(t) \sum_{i=1}^{m} w_i(t) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i(t) = \sum_{i=1}^{m} [f(t) - \lambda_i] w_i(t),$$

откуда

$$-\varepsilon \cdot 1_t = -\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{m} w_i(t) \leqslant \sum_{i=1}^{m} [f(t) - \lambda_i] w_i(t) \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{m} w_i(t) = \varepsilon \cdot 1_t;$$

поэтому

$$\left\| f(t) \cdot 1_t - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i w_i(t) \right\| \leqslant \varepsilon \quad \text{для каждого} \quad t.$$

Ввиду произвольности ε поле $t \to f(t) \cdot 1_t$ — элемент $\overline{B}$, поэтому и B.

10.4.7. Предложение. *Пусть T — локально компактное пространство со счетной базой, $\mathfrak{A}$ — сепарабельное непрерывное поле C^*-алгебр на T, A — C^*-алгебра, определенная $\mathfrak{A}$. Тогда A сепарабельна.*

Благодаря 10.2.6 можно ограничиться случаем, когда T — компакт со счетной базой. Пусть $(f_1, f_2, \ldots)$ — всюду плотная последовательность в банаховом пространстве непрерывных комплексных функций на T. Положим $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$, и пусть $(x_1, x_2, \ldots)$ — тотальная последовательность элементов Θ. Произведения $f_i x_j$ — элементы A. Докажем, устанавливая тем самым предложение, что их линейные комбинации всюду плотны в A. Пусть $x \in A$ и $\varepsilon > 0$. Вследствие 10.2.5 существуют такие комплексные непрерывные функции $g_1, \ldots, g_p$ на T, что $\| x - g_1 x_1 - \ldots - g_p x_p \| \leqslant \varepsilon$. Выбирая подходящим образом индексы $i_1, \ldots, i_p$, получим

$$\| x - f_{i_1} x_1 - \ldots - f_{i_p} x_p \| \leqslant 2\varepsilon.$$

Библиография: [10], [70], [147], [149], [163].

10.5. Непрерывное поле C^*-алгебр, определенное некоторыми C^*-алгебрами.

10.5.1. Пусть A — C^*-алгебра, спектр которой предполагается отделимым. Тогда это — локально компактное пространство (3.3.8). Два неприводимых представления с одним и тем же ядром эквивалентны (3.1.6). Поэтому элементы T отождествляются с примитивными идеалами A. Для каждого $t \in T$ положим $A(t) = A/t$; это — ненулевая C^*-алгебра. Каждый $x \in A$ определяет векторное поле $t \to x'(t) \in A(t)$ на T, где $x'(t)$ — канонический образ x в $A(t)$. Пусть Λ — множество полей вида $t \to x'(t)$, где $x \in A$. Множество Λ есть инволютивная подалгебра в множестве всех векторных полей. Для каждого $x \in A$ функция $t \to \| x'(t) \|$ непрерывна (3.3.9). Для каждого $t \in T$ множество $x'(t)$, где x пробегает A, есть все $A(t)$. Вследствие этого (10.2.3) существует подмножество Γ в $\prod_{t \in T} A(t)$, и притом единственное, содержащее Λ и такое, что $\mathfrak{A} =$

$=((A(t))_{t\in T}, \Gamma)$ — непрерывное поле банаховых пространств; Γ — множество векторных полей, которые являются пределами элементов Λ по отношению к локальной равномерной сходимости. Вследствие 10.3.2 $\mathfrak{A}$ есть непрерывное поле C^*-алгебр. Скажем, что $\mathfrak{A}$ есть непрерывное поле C^*-алгебр, определенное C^*-алгеброй A. Если A — CCR-алгебра, то $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр. Если A сепарабельна, то $\mathfrak{A}$ сепарабельно.

10.5.2. Теорема. *Пусть T — локально компактное пространство, $\mathfrak{A}=((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле ненулевых элементарных C^*-алгебр на T, A — CCR-C^*-алгебра, определенная $\mathfrak{A}$, спектр которой есть T. Пусть $\mathfrak{A}'=((A'(t)), \Theta)$ — непрерывное поле ненулевых элементарных C^*-алгебр, определенное A. Для каждого $t\in T$ введем $\varphi(t)$ — канонический изоморфизм $A(t)$ на $A'(t)$. Тогда $(\varphi(t))_{t\in T}$ — изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$.*

Элементы A составляют тотальное семейство векторных полей, непрерывных относительно $\mathfrak{A}$, и их образы при $(\varphi(t))_{t\in T}$ суть элементы Θ' по определению $\mathfrak{A}'$. Тогда достаточно применить 10.2.4.

10.5.3. Следующая лемма будет позже сильно обобщена (11.5.3).

Лемма. *Пусть T — локально компактное пространство, $\mathfrak{A}=((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T, A — C^*-алгебра, определенная $\mathfrak{A}$, B — такая под-C^*-алгебра A, что для любых $t_1\in T$, $t_2\in T$, $\xi_1\in A(t_1)$, $\xi_2\in A(t_2)$ (с $\xi_1=\xi_2$, если $t_1=t_2$) существует $x\in B$ с $x(t_1)=\xi_1$, $x(t_2)=\xi_2$. Тогда $B=A$.*

Присоединяя к T бесконечно удаленную точку, можно ограничиться случаем, когда T компактно (10.2.6). Тогда $A=\Theta$ и B — тотальная часть Θ. Учитывая 10.2.5, достаточно доказать, что для каждого $x\in B$ и каждой непрерывной комплексной функции φ на T имеем $\varphi x\in B$.

Пусть $\varepsilon>0$. Построим элемент B, аппроксимирующий φx с точностью до $2\varepsilon[\sup|\varphi|^2]$, что завершит доказательство. Положим $y=x^*x$.

Пусть $t_0\in T$. Существуют такие числа α, β, что $0<\alpha<\beta<\varepsilon$ и что спектр $y(t_0)$ не пересекает $[\alpha, \beta]$ [так как $A(t_0)$ элементарна]. Пусть α', β' — такие числа, что $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$. Существует такая окрестность t_0, что для каждого t в этой окрестности $\mathrm{Sp}'y(t)$ не пересекается с $[\alpha', \beta']$ (10.3.6). Пусть p: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ — непрерывная функция $\geqslant 0$, равная 0 в $(-\infty, \alpha']$ и равная 1 в $[\beta', +\infty]$. Пусть $e=p(y)\in B^+$. Тогда для каждого $t\in T$ элемент $e(t)$ лежит в $A(t)^+$ и имеет конечный спектр; для каждого t в замкнутой окрестности U точки t_0 элемент $e(t)$ идемпотентен и $\|e(t)y(t)-y(t)\|\leqslant\varepsilon$.

Пусть $((A(t))_{t\in U}, \Delta)$ — непрерывное поле C^*-алгебр, индуцируемое полем $\mathfrak{A}$ на U. Для каждого $z \in \Delta$ следующие условия эквивалентны:

1° $z(t) \in A'(t) = e(t) A(t) e(t)$ для каждого $t \in U$;

2° существует такое $z' \in \Delta$, что $z(t) = e(t) z'(t) e(t)$ для каждого $t \in U$.

Пусть Δ' — множество $z \in \Delta$, удовлетворяющее этим условиям. Очевидно, что $\mathfrak{A}' = ((A'(t))_{t\in U}, \Delta')$ есть непрерывное поле C^*-алгебр на U; для каждого $t \in U$ элемент $e(t)$ — единичный элемент $A'(t)$. Пусть A' — C^*-алгебра, определяемая $\mathfrak{A}'$. Пусть B' — множество элементов Δ', которые являются сужениями элементов B на U. Отображение $x \to x\,|\,U$ есть морфизм C^*-алгебры $A = \Theta$ на C^*-алгебру Δ (10.1.12); образ B при этом морфизме есть под-C^*-алгебра Δ, поэтому B' есть под-C^*-алгебра A'. Вследствие предположения относительно B для каждых $t_1, t_2 \in U$, $\xi_1 \in A'(t_1)$, $\xi_2 \in A'(t_2)$ (с $\xi_1 = \xi_2$, если $t_1 = t_2$) существует такой $x_1 \in B$, что $x_1(t_1) = \xi_1$, $x_2(t_2) = \xi_2$; тогда сужение ex_1e на U есть элемент B', принимающий значения ξ_1, ξ_2 в t_1, t_2. Поэтому можно применить 10.4.6: для каждой комплексной непрерывной функции ψ на T поле ψe совпадает на U с некоторым элементом B.

Пусть V — замкнутая часть T, содержащаяся во внутренности $\mathring{U}$ множества U. Покажем, что существует такой $f \in B$, что $f(t) = e(t)$ на V, $f(t) = 0$ на $T - \mathring{U}$. Пусть $t_1 \in T - \mathring{U}$, $t_2 \in V$. Так как $e(t_1)$ имеет конечный спектр, то предположение относительно B показывает, что существует такой эрмитов элемент d в B, что $d(t_1)$ идемпотентен,

$$d(t_1)\, e(t_1) = e(t_1), \quad d(t_2) = 0.$$

Заменяя d на $q(d)$, где q — функция, равная 0 в окрестности нуля и равная 1 в 1, можно предположить, что $d(t)$ обращается в нуль в окрестности t_2. Покрывая V конечным числом таких окрестностей и перемножая соответствующие элементы d, получим такой $d' \in B$, что

$$d'(t_1)\, e(t_1) = e(t_1), \quad d'(t) = 0$$

на V. Тогда $d'' = e - d'e \in B$ совпадает с e на V и обращается в нуль в t_1. Из функционального исчисления получаем $d''' \in B$, который совпадает с e на V и обращается в нуль в окрестности t_1. Покрывая $T - \mathring{U}$ конечным числом таких окрестностей и перемножая соответствующие элементы d''', получим f.

Пусть Θ — непрерывная комплексная функция на T, равная нулю вне V. Мы знаем, что существует элемент B, принимающий значение $\Theta(t) e(t)$ на U. Умножая его на построенный выше элемент f, получим элемент B, принимающий значение $\Theta(t)e(t)$ всюду на T.

Итак, несколько изменяя наши обозначения, мы можем связать с каждым $t \in T$ элемент $e_t \in B^+$ и замкнутую окрестность U_t точки t, обладающие следующими свойствами:

1° $\|e_t(t')y(t') - y(t')\| \leqslant \varepsilon$ в U_t;

2° если Θ — непрерывная комплексная функция на T, носитель которой содержится в $\mathring{U}_t$, то $\Theta e_t \in B$.

Пусть теперь $(U_{t_1}, \ldots, U_{t_r})$ — конечное покрытие T. Пусть $(V_1, \ldots, V_r)$ — такое открытое покрытие T, что $\overline{V}_1 \subset \mathring{U}_{t_1}, \ldots$ $\ldots, \overline{V}_r \subset \mathring{U}_{t_r}$. Пусть $(\Theta_1, \ldots, \Theta_r)$ — непрерывное разложение единицы, подчиненное $(V_1, \ldots, V_r)$. Имеем $\varphi\Theta_i e_{t_i} \in B$. Пусть $z = \varphi x(\Theta_1 e_{t_1} + \ldots + \Theta_r e_{t_r}) \in B$. Тогда

$$(z - \varphi x)^*(z - \varphi x) = |\varphi|^2 \sum_{i,j} \Theta_i\Theta_j (e_{t_i} y e_{t_j} - e_{t_i} y - y e_{t_j} + y).$$

Так как

$$\|e_{t_i}(t')y(t') - y(t')\| \leqslant \varepsilon \quad \text{в} \quad U_{t_i},$$

то

$$\|(e_{t_i} y e_{t_j} - e_{t_i} y - y e_{t_j} + y)(t')\| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{в} \quad U_{t_i},$$

поэтому

$$\|z - \varphi x\|^2 \leqslant 2\varepsilon [\sup |\varphi|^2].$$

10.5.4. Теорема. *Пусть A — CCR-C^*-алгебра, спектр которой отделим. Пусть $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле ненулевых элементарных C^*-алгебр на T, определенное A. Пусть A' — C^*-алгебра, определенная $\mathfrak{A}$. Для каждого $x \in A$ введем x' — элемент Θ, определенный x. Тогда $x' \in A'$ и $x \to x'$ есть изоморфизм A на A'.*

Если $x \in A$, то функция $t \to \|x'(t)\|$ стремится к нулю на бесконечности на T (3.3.7), поэтому $x' \in A'$. Ясно, что $x \to x'$ есть морфизм π C^*-алгебры A в A'. Вследствие 2.7.3 этот морфизм изометричен. Если $t \in T$, то множество $x'(t)$, где $x \in A$, есть все $A(t)$, по определению $A(t)$. Если t_1, t_2 — две различные точки T и $\xi_1 \in A(t_1)$, $\xi_2 \in A(t_2)$, то существует такой $x \in A$, что $x'(t_1) = \xi_1$, $x'(t_2) = \xi_2$ (4.2.5). Следовательно, $\pi(A) = A'$ (10.5.3).

10.5.5. Теоремы 10.5.2 и 10.5.4 показывают, что существует каноническое биективное соответствие между CCR-C^*-алгебрами с отделимым спектром (рассматриваемыми с точностью до изоморфизма) и непрерывными полями ненулевых элементарных C^*-алгебр на локально компактном пространстве (рассматриваемыми с точностью до изоморфизма; в понятие изоморфизма, используемое здесь, входит возможный гомеоморфизм базисного пространства).

Пусть A — CCR-C^*-алгебра с отделимым спектром, $\mathfrak{A}$ — поле, определенное A. Если A сепарабельна, то $\hat{A}$ имеет счетную базу (3.3.4) и $\mathfrak{A}$ сепарабельно. Обратное верно вследствие 10.4.7.

10.5.6. Следствие. *Пусть A — CCR-C^*-алгебра такая, что $\hat{A}$ отделимо, x — элемент A, f — ограниченная непрерывная комплексная функция на $\hat{A}$. Существует такой $y \in A$, что $\pi(y) = f(\pi)\pi(x)$ для каждого $\pi \in \hat{A}$.*

В обозначениях 10.5.4 нужно заменить A на A', и следствие получается тогда из 10.1.9 (ii).

10.5.7. Определение. *Пусть T — топологическое пространство, $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T. Говорят, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию Фелла, если для каждого $t_0 \in T$ существует окрестность V точки t_0 и такое векторное поле p в $\mathfrak{A}$, определенное и непрерывное в V, что для каждого $t \in V$ элемент $p(t)$ есть проектор ранга 1* (см. 4.1.9).

Ясно, что локально тривиальное поле ненулевых элементарных C^*-алгебр удовлетворяет условию Фелла. Но обратное, вообще говоря, неверно.

10.5.8. Предложение. *Пусть A — CCR-C^*-алгебра с отделимым спектром, $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле ненулевых элементарных C^*-алгебр, определяемое A. Для того чтобы A была C^*-алгеброй с непрерывным следом, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ удовлетворяла условию Фелла.*

Если A — с непрерывным следом, то $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию Фелла [4.5.3 (iii)]. Предположим, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию Фелла. Пусть $\pi_0 \in \hat{A}$. Существует векторное поле p в $\mathfrak{A}$, определенное и непрерывное в компактной окрестности V точки π_0 и такое, что для каждого $t \in V$ элемент $p(t)$ есть проектор ранга 1. Пусть $f: T \to \boldsymbol{R}$ — непрерывная функция $\geqslant 0$, равная 1 в окрестности π_0 и 0 в окрестности $T - \overset{\circ}{V}$. Тогда векторное поле, равное 0 на $T - V$ и fp на V, непрерывно и стремится к нулю на бесконечности. Это поле задает элемент y в A^+ такой, что $\pi(y)$ — проектор ранга 1 в окрестности π_0. Следовательно, A — с непрерывным следом (4.5.4).

Библиография: [10], [52], [70], [147], [149], [163].

10.6. Замечания об элементарных C^*-алгебрах.

10.6.1. Пусть H — гильбертово пространство. Для $\xi, \eta \in H$ обозначим через $\Theta_{\xi, \eta}$ до конца параграфа оператор $\zeta \to (\zeta | \eta) \xi$ в H. Он имеет ранг $\leqslant 1$, и всякий оператор ранга $\leqslant 1$ имеет такой вид. Если $\xi', \eta' \in H$, то

$$\Theta_{\xi,\eta}\Theta_{\xi',\eta'}(\zeta)=\Theta_{\xi,\eta}((\zeta\mid\eta')\xi')=(\zeta\mid\eta')(\xi'\mid\eta)\xi=(\xi'\mid\eta)\Theta_{\xi,\eta'}(\zeta),$$

поэтому

$$\Theta_{\xi,\eta}\Theta_{\xi',\eta'}=(\xi'\mid\eta)\Theta_{\xi,\eta'}.$$

С другой стороны, если $\zeta' \in H$, то

$$(\Theta^*_{\xi,\eta}(\zeta)\mid\zeta')=(\zeta\mid\Theta_{\xi,\eta}(\zeta'))=(\zeta\mid(\zeta'\mid\eta)\xi)=$$
$$=(\zeta\mid\xi)(\eta\mid\zeta')=((\zeta\mid\xi)\eta\mid\zeta')=(\Theta_{\eta,\xi}(\zeta)\mid\zeta'),$$

поэтому

$$\Theta^*_{\xi,\eta}=\Theta_{\eta,\xi}.$$

Имеем $\Theta_{\xi,\xi}=\|\xi\|^2 P_{C\xi}$, поэтому каждый оператор конечного ранга в H есть линейная комбинация операторов $\Theta_{\xi,\eta}$ (а также операторов $\Theta_{\xi,\xi}$).

10.6.2. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{2n}$ — различные векторы H. Если ξ_1 стремится к $\eta_1, \ldots, \xi_{2n}$ к η_{2n}, то ясно, что $\Theta_{\xi_1,\xi_2}+\ldots+\Theta_{\xi_{2n-1},\xi_{2n}}$ стремится равномерно к $\Theta_{\eta_1,\eta_2}+\ldots+\Theta_{\eta_{2n-1},\eta_{2n}}$. Теперь лемма 3.5.6 доказывает, что если $(\xi_i\mid\xi_j)$ стремится к $(\eta_i\mid\eta_j)$ для любых i и j, то $\|\Theta_{\xi_1,\xi_2}+\ldots+\Theta_{\xi_{2n-1},\xi_{2n}}\|$ стремится к $\|\Theta_{\eta_1,\eta_2}+\ldots$ $\ldots+\Theta_{\eta_{2n-1},\eta_{2n}}\|$. Иначе говоря, $\|\Theta_{\xi_1,\xi_2}+\ldots+\Theta_{\xi_{2n-1},\xi_{2n}}\|$ — непрерывная функция скалярных произведений $(\xi_i\mid\xi_j)$.

10.6.3. Если H — гильбертово пространство, снабженное единичным вектором ξ, положим $\alpha(H, \xi)=(A, p)$, где A — элементарная C^*-алгебра $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H)$ и $p \in A$ — проектор на $\boldsymbol{C}\xi$.

Пусть точно так же $(A', p')=\alpha(H', \xi')$. Всякий изоморфизм U: $(H, \xi)\to(H', \xi')$ (иначе говоря, всякий изоморфизм H на H', переводящий ξ в ξ') определяет изоморфизм $\alpha(U)$: $(A, p)\to(A', p')$ (иначе говоря, изоморфизм A на A', переводящий p в p'). Если U_1, U_2 — два таких изоморфизма и если $\alpha(U_1)=\alpha(U_2)$, то $U_1=U_2$; действительно, U_1 и U_2 отличаются скалярным множителем вследствие 4.1.8, и этот множитель есть 1, так как $U_1\xi=\xi'=U_2\xi$.

10.6.4. Сохраним предыдущие обозначения H, ξ, A, p. Если $a \in Ap$, то $a^*a \in pAp$, поэтому a^*a оставляет $\boldsymbol{C}\xi$ на месте и равно нулю на $H \ominus \boldsymbol{C}\xi$, поэтому

$$\|a^*a\|=(a^*a\xi\mid\xi)=\|a\xi\|^2, \quad \text{откуда} \quad \|a\|=\|a\xi\|.$$

Отображение $a\to a\xi$ есть изометрический изоморфизм нормированного векторного пространства Ap на нормированное векторное пространство H.

Отсюда следует, что Ap можно рассматривать как гильбертово подпространство A, определенное однозначно, так как в гильбертовом пространстве скалярное произведение можно вычислить через нормы. Если $a, b \in Ap$, то $b^*a \in pAp$, поэтому $\mathrm{Tr}(b^*a) = (b^*a\xi \mid \xi) = (a\xi \mid b\xi)$; поэтому скалярное произведение в гильбертовом пространстве Ap задается формулой $(a \mid b) = \mathrm{Tr}(b^*a)$.

Заметим, с другой стороны, что ApA есть множество элементов A ранга $\leqslant 1$; это следует из формулы $\Theta_{\xi,\eta} = \Theta_{\xi,\zeta}\Theta_{\zeta,\zeta}\Theta_{\zeta,\eta}$ (где $\|\zeta\| = 1$).

10.6.5. Если A есть элементарная C^*-алгебра, снабженная проектором p ранга 1, то положим $\beta(A, p) = (K, \eta)$, где K — гильбертово пространство Ap (10.6.4) и η — единичный вектор p в K.

Пусть точно так же $(K', \eta') = \beta(A', p')$. Всякий изоморфизм $V: (A, p) \to (A', p')$ определяет изоморфизм $\beta(V)$: $(K, \eta) \to (K', \eta')$. Если V_1, V_2 — два таких изоморфизма и если $\beta(V_1) = \beta(V_2)$, имеем $V_1 = V_2$; действительно, V_1 и V_2 совпадают на Ap, поэтому и на $pA = (Ap)^*$ и на $ApA = (Ap)(pA)$, а тогда и на A вследствие 10.6.4.

10.6.6. Лемма. (i) *Пусть H — гильбертово пространство, ξ — единичный вектор H. Положим $\alpha(H, \xi) = (A, p)$, так что $\beta(\alpha(H, \xi)) = (Ap, p)$. Для каждого $a \in Ap$ положим $\varphi(a) = a\xi$. Тогда φ — изоморфизм гильбертова пространства Ap на гильбертово пространство H такой, что $\varphi(p) = \xi$.*

(ii) *Пусть A — элементарная C^*-алгебра, p — проектор в A ранга 1. Положим $\beta(A, p) = (H, \xi)$, $\alpha(H, \xi) = (A', p')$. Для каждого $a \in A$ введем $\psi(a)$ — линейное отображение $H = Ap$ на себя, определяемое формулой $\psi(a)y = ay$. Тогда ψ — изоморфизм C^*-алгебры A на C^*-алгебру A' такой, что $\psi(p) = p'$.*

(i) доказано в 10.6.4.

Примем обозначения (ii). Существует гильбертово пространство H_0 и единичный вектор ξ_0 в H_0, такие, что (A, p) отождествляется с $\alpha(H_0, \xi_0)$. Пусть φ_0 — изоморфизм (H, ξ) на (H_0, ξ_0), определенный в (i). Для каждого $a \in A$ и каждого $b \in H$ имеем

$$\varphi_0(\psi(a) \cdot b) = \varphi_0(ab) = (ab)(\xi_0) = a(\varphi_0(b)),$$

поэтому $\psi(a) = \varphi_0^{-1}a\varphi_0$, и ψ действительно является изоморфизмом A на A', переводящим $P_{C\xi_0} = p$ в $P_{C\xi} = p'$. Отсюда следует лемма.

Изоморфизмы φ и ψ будут называться *каноническими*.

10.6.7. Примем обозначения 10.6.6 (ii). Если $a, a' \in A$, то $ap \in H$, $a'^*p \in H$, поэтому можно образовать Θ_{ap, a'^*p}, который есть элемент A'. Имеем $\psi(apa') = \Theta_{ap, a'^*p}$. Действительно, для каждого $b \in A$ имеем

$$\psi(apa')(bp) = apa'bp = a[\mathrm{Tr}(pa'bp)]p,$$

и вследствие 10.6.4 это равно

$$(bp \mid a'^{*}p)\, ap = \Theta_{ap,\, a'^{*}p}(bp).$$

10.6.8. Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства, ξ, ξ_1 — единичные векторы H, H_1.

$$(A,\ p) = \alpha(H,\ \xi), \qquad (H',\ \xi') = \beta(A,\ p),$$
$$(A_1,\ p_1) = \alpha(H_1,\ \xi_1), \qquad (H'_1,\ \xi'_1) = \beta(A_1,\ p_1).$$

Пусть

$$\varphi\colon (H',\ \xi') \to (H,\ \xi) \quad \text{и} \quad \varphi_1\colon (H'_1,\ \xi'_1) \to (H_1,\ \xi_1)$$

— канонические изоморфизмы. Пусть U — изоморфизм $(H,\ \xi)$ на $(H_1,\ \xi_1)$. Тогда $U' = \beta(\alpha(U))$ есть изоморфизм $(H',\ \xi')$ на $(H'_1,\ \xi'_1)$. Имеем $U\varphi = \varphi_1 U'$. Действительно, пусть $a \in H' = Ap$. Тогда

$$(U\varphi)(a) = U(a\xi) = UaU^{-1}\xi_1 = (a(U)\,a)\,\xi_1 = \varphi_1(\alpha(U)(a)) = \varphi_1 U'(a).$$

Аналогичный результат получится, если взять $(A,\ p)$, $(A_1,\ p_1)$ и изоморфизм $(A,\ p)$ на $(A_1,\ p_1)$.

Библиография: [52].

10.7. Непрерывное поле элементарных C^*-алгебр, определенное непрерывным полем гильбертовых пространств.

10.7.1. Пусть T — топологическое пространство, $\mathscr{H} = ((H(t)),\ \Gamma)$ — непрерывное поле гильбертовых пространств на T. Если x, $y \in \Gamma$, то функция $t \to (x(t) \mid y(t))$ непрерывна вследствие равенства

$$4\,(x(t) \mid y(t)) = \| x(t) + y(t) \|^2 - \| x(t) - y(t) \|^2 + \\ + i \| x(t) + iy(t) \|^2 - i \| x(t) - iy(t) \|^2.$$

10.7.2. Для каждого $t \in T$ пусть $A(t) = \mathfrak{LC}(H(t))$. Для x, $y \in \Gamma$ определим $\Theta_{x,\,y} \in \prod\limits_{t \in T} A(t)$ по формуле $\Theta_{x,\,y}(t) = \Theta_{x(t),\,y(t)}$. Вследствие 10.6.1 имеем

$$\Theta^*_{x,\,y} = \Theta_{y,\,x}, \qquad \Theta_{x,\,y}\Theta_{x',\,y'} = \Theta_{z,\,y'}$$

с $z(t) = (x'(t) \mid y(t))\, x(t)$. Отсюда следует, что множество Λ полей

$$\Theta_{x_1,\,x_2} + \Theta_{x_3,\,x_4} + \ldots + \Theta_{x_{2n-1},\,x_{2n}},$$

где x_1, x_2, …, $x_{2n} \in \Gamma$, есть инволютивная подалгебра $\prod\limits_{t \in T} A(t)$. Вследствие 10.6.1 $\Lambda(t)$ есть множество операторов конечного ранга в $H(t)$, поэтому $\Lambda(t)$ всюду плотно в $A(t)$. Вследствие 10.6.2

$$\left\| \Theta_{x_1,\,x_2}(t) + \ldots + \Theta_{x_{2n-1},\,x_{2n}}(t) \right\|$$

есть непрерывная функция $(x_i(t)\,|\,x_j(t))$, поэтому непрерывная функция t. Тогда существует (10.2.3) множество $\Theta \subset \prod_{t \in T} A(t)$ и притом единственное, содержащее Λ и такое, что $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$ есть непрерывное поле банаховых пространств. Так как Λ — инволютивная алгебра, то $\mathfrak{A}$ также есть непрерывное поле элементарных C^*-алгебр (10.3.2), называемое *связанным с* $\mathscr{H}$. Обозначим его $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$. Благодаря 10.2.4 очевидно, что если $Y \subset T$, то $\mathfrak{A}(\mathscr{H}\,|\,Y) = \mathfrak{A}(\mathscr{H})\,|\,Y$.

10.7.3. Если $a \in \Theta$ и $x \in \Gamma$, то поле ax: $t \to a(t)\,x(t)$ есть элемент Γ. Действительно, так как каждый элемент Θ есть предел, в смысле локальной равномерной сходимости, элементов Λ (10.2.3), то достаточно проверить это для $a \in \Lambda$, поэтому для $a = \Theta_{y,z}$ $(y, z \in \Gamma)$; однако $\Theta_{y,z}x$ есть поле $t \to (x(t)\,|\,z(t))\,y(t)$.

10.7.4. Пусть (x_α) — такое семейство элементов Γ, что для каждого $t \in T$ векторы $x_\alpha(t)$ всюду плотны в $H(t)$; тогда для каждого $t \in T$ операторы $\Theta_{x_\alpha, x_\beta}(t)$ всюду плотны в множестве операторов ранга $\leqslant 1$ в $H(t)$, отсюда следует, что если $\mathscr{H}$ сепарабельно, то $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ сепарабельно.

10.7.5. Чтобы изучить соответствие между непрерывными полями гильбертовых пространств и непрерывными полями элементарных C^*-алгебр, удобно ввести следующие определения.

Пусть $\mathscr{H}$ — непрерывное поле гильбертовых пространств на T, снабженное таким непрерывным векторным полем x, что $\|x(t)\| = 1$ для каждого t. Положим $\alpha(\mathscr{H}, x) = (\mathfrak{A}, p)$, где $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathscr{H})$ и $p = \Theta_{x,x}$ (так что p есть непрерывное относительно $\mathfrak{A}$ поле проекторов ранга 1). Всякий изоморфизм φ: $(\mathscr{H}, x) \to (\mathscr{H}', x')$ определяет очевидным образом изоморфизм $\alpha(\varphi)$: $\alpha(\mathscr{H}, x) \to \alpha(\mathscr{H}', x')$. Из 10.6.3 следует, что $\alpha(\varphi_1) = \alpha(\varphi_2)$ влечет $\varphi_1 = \varphi_2$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T, снабженное непрерывным полем p проекторов ранга 1. Положим $\beta(\mathfrak{A}, p) = (\mathscr{H}, x)$, где $\mathscr{H}$ и x определяются следующим образом. Положим $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$. Пусть $H(t)$ — векторное подпространство $A(t)\,p(t)$ пространства $A(t)$; это — гильбертово пространство (10.6.4). Пусть Γ — множество таких $x \in \Theta$, что $\mathscr{H} = ((H(t)), \Gamma)$ для каждого $t \in T$. Ясно, что $\mathscr{H} = ((H(t)), \Gamma)$ удовлетворяет аксиомам (i), (iii), (iv) 10.1.2. С другой стороны, если $a \in \Theta$, то ap — элемент Γ, так что $\Gamma(t) = A(t)\,p(t) = H(t)$. Поэтому $\mathscr{H}$ — непрерывное поле гильбертовых пространств на T. С другой стороны, положим $x = p$, так что x — такой элемент Γ, что $\|x(t)\| = 1$ для каждого t. Если $\mathfrak{A}$ сепарабельно, то $\mathscr{H}$ сепарабельно: если $(a_1, a_2, \ldots)$ — такая последовательность элементов Θ, что $a_i(t)$ всюду плотны в $A(t)$ для каждого t, то $(a_1p, a_2p, \ldots)$ — такая последовательность элементов Γ, что $(a_ip)(t)$ всюду плотны в $H(t)$ для каждого t. Всякий изоморфизм φ: $(\mathfrak{A}, p) \to (\mathfrak{A}', p')$ определяет очевидным образом изоморфизм

$$\beta(\varphi): \beta(\mathfrak{A}, p) \to \beta(\mathfrak{A}', p').$$

Из 10.6.5 следует, что $\beta(\varphi_1) = \beta(\varphi_2)$ влечет $\varphi_1 = \varphi_2$.

10.7.6. Лемма. (i) *Пусть $\mathscr{H}$ — непрерывное поле гильбертовых пространств на T, снабженное непрерывным векторным полем x таким, что $\|x(t)\| = 1$ для каждого t. Пусть $(\mathscr{H}', x') = \beta(\alpha(\mathscr{H}, x))$. Положим $\mathscr{H} = ((H(t)), \Gamma)$, $\mathscr{H}' = ((H'(t)), \Gamma')$. Для каждого $t \in T$ пусть φ_t — канонический изоморфизм $H'(t)$ на $H(t)$ (10.6.6). Тогда $\varphi = (\varphi_t)_{t \in T}$ — такой изоморфизм $\mathscr{H}'$ на $\mathscr{H}$, что $\varphi(x') = x$.*

(ii) *Пусть $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T, снабженное непрерывным полем проекторов ранга 1. Пусть $(\mathfrak{A}', p') = \alpha(\beta(\mathfrak{A}, p))$. Положим $\mathfrak{A} = ((A(t)), \Theta)$, $\mathfrak{A}' = ((A'(t)), \Theta')$. Для каждого $t \in T$ пусть ψ_t — канонический изоморфизм $A(t)$ на $A'(t)$ (10.6.6). Тогда $\psi = (\psi_t)_{t \in T}$ — такой изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$, что $\psi(p) = p'$.*

Примем обозначения (i). Ясно, что $\varphi(x') = x$. Пусть $y \in \Gamma$ и $y' = \Theta_{y,x} \in \Gamma'$. Имеем

$$\varphi_t(y'(t)) = \Theta_{y,x}(t)\, x(t) = y(t).$$

Итак, $\varphi^{-1}(y) = y' \in \Gamma'$; это доказывает, что φ^{-1} — изоморфизм $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}'$ (10.2.4).

Примем обозначения (ii). Ясно, что $\psi(p) = p'$. Чтобы показать, что ψ — изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$, достаточно показать, что $\psi(a) \in \Theta'$ для каждого a вида $a'pa''$ $(a', a'' \in \Theta)$: действительно, поля такого вида составляют тотальное подмножество Θ (10.6.4). Но если $a = a'pa''$, то $\psi(a) = \Theta_{a'p,\, a''^*p} \in \Theta'$ вследствие 10.6.7.

10.7.7. Предложение. *Пусть T — топологическое пространство, $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *для каждого $t_0 \in T$ существует окрестность V точки t_0 и такое непрерывное поле $\mathscr{H}$ ненулевых гильбертовых пространств на V, что $\mathfrak{A} \mid V$ изоморфно $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$;*

(ii) *$\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию Фелла.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что (i) выполнено.

Пусть $t_0 \in T$. Пусть V_0 — окрестность t_0 и $\mathscr{H} = ((\mathscr{H}(t)), \Gamma)$ — непрерывное поле ненулевых гильбертовых пространств на V_0 такое, что $\mathfrak{A} \mid V_0$ изоморфно $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$. Пусть ξ — ненулевой элемент $H(t_0)$. Пусть x — такое непрерывное векторное поле в $\mathscr{H}$, что $x(t_0) = \xi$. Множество V таких $t \in V_0$, что $x(t) \neq 0$, есть окрестность t_0; положим $y(t) = \|x(t)\|^{-1} x(t)$ для $t \in V$. Поле векторов $\Theta_{y,y}$ в $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ определено и непрерывно на V, и $\Theta_{y,y}$ есть проектор ранга 1 для каждого $t \in V$. Поэтому существует такое векторное поле p в $\mathfrak{A}$, определенное и непрерывное на V, что $p(t)$ суть проекторы ранга 1.

(ii)$\Rightarrow$(i). Предположим, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию Фелла. Пусть $t_0 \in T$. Существует окрестность V точки t_0 и непрерывное поле p проекторов ранга 1 в $\mathfrak{A}$, определенное на V. Положим $\beta(\mathfrak{A} | V, p) = (\mathscr{H}, x)$. Тогда, вследствие 10.7.6, $\mathfrak{A} | V$ изоморфно $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$.

10.7.8. Предложение 10.7.7 есть строго локальный результат. Именно, если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию Фелла, то в общем случае не существует такого непрерывного поля $\mathscr{H}$ гильбертовых пространств на T, что $\mathfrak{A}$ изоморфна $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$. Существование $\mathscr{H}$ встречает когомологические препятствия, которые мы сейчас уточним.

10.7.9. Лемма. *Пусть $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ — два непрерывных поля ненулевых гильбертовых пространств на T, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — связанные с ними поля C^*-алгебр, f — изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$. Для каждого $t \in T$ существует окрестность V точки t и изоморфизм $\mathscr{H} | V$ на $\mathscr{H}' | V$, который определяет $f | V$.*

Существует окрестность V точки t и непрерывное поле p проекторов ранга 1 в $\mathfrak{A} | V$ (10.7.7). Тогда $p' = f(p)$ — непрерывное поле проекторов ранга 1 в $\mathfrak{A}' | V$. Пусть x — непрерывное векторное поле в $\mathscr{H}$ такое, что $x(t) = p(t)x(t) \neq 0$. Имеем $p(t')x(t') \neq 0$ в окрестности t. Заменяя x полем $t' \to \| p(t')x(t') \|^{-1} \times \times p(t')x(t')$, получаем в окрестности t такое непрерывное векторное поле y в $\mathscr{H}$, что $\| y(t') \| = 1$, и p — поле проекторов, определяемое y (в окрестности t). Точно так же существует такое непрерывное векторное поле y' в $\mathscr{H}'$ в окрестности t, что $\| y'(t') \| = 1$ и p' — поле проекторов, определяемое y' (в окрестности t). Так как доказываемый результат имеет локальную природу, то можно впредь предположить, что y, y', p, p' определены во всем T. Тогда $\beta(f)$ — изоморфизм $\beta(\mathfrak{A}, p) = \beta(\alpha(\mathscr{H}, y))$ на $\beta(\mathfrak{A}', p') = \beta(\alpha(\mathscr{H}', y'))$. Вследствие 10.7.6 и 10.6.8 существует изоморфизм g пары $(\mathscr{H}, y)$ на $(\mathscr{H}', y')$ такой, что $\beta(f) = \beta(\alpha(g))$. Следовательно, $f = \alpha(g)$ (10.7.5).

10.7.10. Лемма. *Пусть $\mathscr{H} = ((H(t)), \Gamma)$ — непрерывное поле гильбертовых пространств на T и $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathscr{H})$. Для того чтобы автоморфизм φ поля $\mathscr{H}$ определял тождественный автоморфизм $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид $(u(t) \cdot 1_t)_{t \in T}$, где 1_t обозначает тождественное отображение $H(t)$ и u — непрерывное отображение T в $\boldsymbol{U}$ (множество комплексных чисел с модулем 1).*

Условие, очевидно, достаточно. Обратно, если φ определяет тождественный автоморфизм $\mathfrak{A}$, то каждое φ_t есть гомотетия с коэффициентом $u(t) \in \boldsymbol{U}$ (4.1.8), и остается показать, что u — непрерывная функция. Для каждого $t_0 \in T$ существует такое непрерывное векторное поле x в $\mathscr{H}$, что $x(t) \neq 0$ в окрестности V точки t_0. На V имеем

$$u(t) = (\varphi_t x(t) \mid x(t)) \| x(t) \|^{-2},$$

поэтому u действительно непрерывно в t_0.

10.7.11. Лемма. *Пусть T — паракомпактное пространство, $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T, удовлетворяющих условию Фелла. Существуют:*

(i) *открытое покрытие $(T_i)_{i \in I}$ пространства T;*

(ii) *для любого $i \in I$ — непрерывное поле $\mathscr{H}_i$ гильбертовых пространств на T_i и изоморфизм h_i поля $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_i)$ на $\mathfrak{A} \mid T_i$;*

(iii) *для любых $i, j \in I$ — изоморфизм g_{ij} поля $\mathscr{H}_j \mid T_{ij}$ на $\mathscr{H}_i \mid T_{ij}$, который определяет изоморфизм $h_i^{-1} h_j$ поля $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_j \mid T_{ij})$ на $\mathfrak{A}(H_i \mid T_{ij})$.*

(Здесь положено $T_i \cap T_j = T_{ij}$, подобно этому $T_i \cap T_j \cap T_k = T_{ijk}$ и т. д.)

Существует открытое покрытие $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ пространства T и для каждого $\alpha \in A$ — непрерывное поле $\mathscr{K}_\alpha$ гильбертовых пространств на U_α и изоморфизм k_α поля $\mathfrak{A}(\mathscr{K}_\alpha)$ на $\mathfrak{A} \mid U_\alpha$ (10.7.7). Так как T паракомпактно, то (U_α) можно предполагать локально конечным. Существует такое открытое покрытие $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ пространства T, что $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого α. Фиксируем на время $\alpha \in A$ и $t \in V_\alpha$. Существует открытая окрестность $W \subset V_\alpha$ точки t и конечная часть A' в A такие, что $W \cap \overline{V}_\beta = \varnothing$ для $\beta \notin A'$. Пусть $\beta \in A'$. Существует открытая окрестность $W_\beta \subset W$ точки t и изоморфизм $\mathscr{K}_\beta \mid W_\beta \cap V_\beta$ на $\mathscr{K}_\alpha \mid W_\beta \cap V_\beta$, который определяет $k_\alpha^{-1} k_\beta$ на $W_\beta \cap V_\beta$; это очевидно, если $t \notin \overline{V}_\beta$; если же $t \in \overline{V}_\beta$, имеем $t \in U_\beta \cap U_\alpha$, и наше утверждение следует из 10.7.9. Наконец, так как A' конечно, то получаем открытую окрестность $W_{\alpha, t} \subset V_\alpha$ точки t и для каждого $\beta \in A$ — изоморфизм $\mathscr{K}_\beta \mid W_{\alpha, t} \cap V_\beta$ на $\mathscr{K}_\alpha \mid W_{\alpha, t} \cap V_\beta$, определяющий $k_\alpha^{-1} k_\beta$ на $W_{\alpha, t} \cap V_\beta$. Пусть теперь множество I из леммы есть множество $i = (\alpha, t)$, где $\alpha \in A$ и $t \in V_\alpha$; положим $T_i = W_{\alpha, t}$, $\mathscr{H}_i = \mathscr{K}_\alpha \mid W_{\alpha, t}$, $h_i = k_\alpha \mid W_{\alpha, t}$. Существование g_{ij} следует сразу из предыдущего построения.

Далее в этом параграфе мы используем понятие *пучка*. По этому вопросу читатель может консультироваться в книге: Р. Годеман, Алгебраическая топология и теория пучков, М., ИЛ, 1961.

10.7.12. Лемма. *Сохраним обозначения* 10.7.11.

(i) *Для всех $i, j, k \in I$ существует единственная непрерывная функция u_{ijk}: $T_{ijk} \to \boldsymbol{U}$ такая, что $g_{ij} g_{jk} = u_{ijk} g_{ik}$.*

(ii) u_{ijk} *определяют* 2-*коцикл покрытия* (T_i) *со значениями в пучке* $\mathcal{U}$ *ростков непрерывных отображений* T *в* $\boldsymbol{U}$.

(iii) *Образ* γ *этого коцикла в группе когомологий* $H^2(T, \mathcal{U})$ *зависит только от* $\mathfrak{A}$.

Если $i, j, k \in I$, то $g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1}$ определяет изоморфизм $h_i^{-1}h_jh_j^{-1}h_kh_k^{-1}h_i = 1$ поля $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_i \mid T_{ijk})$ на себя; поэтому (i) вытекает из 10.7.10.

Если $i, j, k, l \in I$, то на T_{ijkl} имеем

$$u_{jkl}u_{ikl}^{-1}u_{ijl} = (g_{jl}^{-1}g_{jk}g_{kl})(g_{kl}^{-1}g_{ik}^{-1}g_{il})(g_{il}^{-1}g_{ij}g_{jl}) =$$
$$= g_{jl}^{-1}(g_{jk}g_{ik}^{-1})\,g_{ij}g_{jl} = g_{jl}^{-1}(u_{ijk}g_{ij}^{-1})\,g_{ij}g_{jl} = u_{ijk},$$

откуда следует (ii).

Докажем (iii). Пусть $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{H}_\lambda$, h_λ, $g_{\lambda\mu}$ имеют свойства, аналогичные 10.7.11; $(u_{\lambda\mu\nu})$ — соответствующий коцикл. Для доказательства того, что (u_{ijk}) и $u_{\lambda\mu\nu}$ определяют один и тот же элемент $H^2(T, \mathcal{U})$, можно заменить (T_i) более мелким покрытием, тогда объекты $\mathcal{H}_i$, h_i, g_{ij} заменятся их сужениями на множества нового покрытия, и то же верно для (T_λ). Это позволяет предположить, рассуждая как в лемме 10.7.11, что для каждого $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$ существует изоморфизм $g_{i\lambda}$ поля $\mathcal{H}_\lambda \mid T_{i\lambda}$ на $\mathcal{H}_i \mid T_{i\lambda}$, определяющий изоморфизм $h_i^{-1}h_\lambda$ связанных с ними полей C^*-алгебр. Пусть A — объединение множеств I и Λ. Построенные выше объекты определяют покрытие $(T_a)_{a \in A}$ и объекты $\mathcal{H}_a$, $h_a\,(a \in A)$, $g_{ab}\,(a, b \in A)$,обладающие свойствами 10.7.11, поэтому определяют коцикл u_{abc} $(a, b, c \in A)$. Элемент $H^2(T, \mathcal{U})$, определяемый (u_{abc}), равен, с одной стороны, элементу, определенному (u_{ijk}), с другой стороны, элементу, определенному $(u_{\lambda\mu\nu})$. Отсюда вытекает лемма.

10.7.13. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок ростков непрерывных отображений T в $\boldsymbol{R}$. Отображение $t \to \exp(2\pi i t)$ из $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{U}$ определяет морфизм $\mathcal{R} \to \mathcal{U}$. Его ядро — постоянный пучок $\boldsymbol{Z}$. Так как каждая непрерывная функция $g\colon T \to \boldsymbol{U}$ локально имеет вид $\exp(2i\pi f)$, где f — непрерывное отображение T в $\boldsymbol{R}$, то имеем точную последовательность пучков

$$0 \to \boldsymbol{Z} \to \mathcal{R} \to \mathcal{U} \to 1,$$

откуда следует точная последовательность когомологий

$$\ldots \to H^n(T, \boldsymbol{Z}) \to H^n(T, \mathcal{R}) \to H^n(T, \mathcal{U}) \to H^{n+1}(T, \boldsymbol{Z}) \to \ldots$$

Но существование непрерывного разложения единицы на T доказывает, что $\mathcal{R}$ — тонкий пучок, откуда $H^n(T, \mathcal{R}) = 0$ для $n > 0$. Отсюда получаем, в частности, что канонический морфизм $H^2(T, \mathcal{U}) \to H^3(T, \boldsymbol{Z})$ есть изоморфизм.

10.7.14. Определение. *Пусть T — паракомпактное пространство, $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T, удовлетворяющее условию Фелла. Пусть γ — элемент $H^2(T, \mathcal{U})$, определенный в лемме* 10.7.12. *Его канонический образ в $H^3(T, \mathbf{Z})$ обозначим через* $\delta(\mathfrak{A})$.

10.7.15. Теорема. *Пусть T — паракомпактное пространство, $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T, удовлетворяющее условию Фелла. Для того чтобы существовало непрерывное поле $\mathcal{H}$ гильбертовых пространств на T такое, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$, необходимо и достаточно, чтобы* $\delta(\mathfrak{A}) = 0$.

Предположим, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$. По построению $\delta(\mathfrak{A})$, можно взять в качестве покрытия T покрытие, образованное единственным открытым множеством T. Каждый 2-коцикл по отношению к этому покрытию когомологичен 0, поэтому $\delta(\mathfrak{A}) = 0$.

Предположим, что $\delta(\mathfrak{A}) = 0$. Существуют T_i, $\mathcal{H}_i$, h_i, g_{ij}, u_{ijk} $(i, j, k \in I)$ со свойствами 10.7.11, 10.7.12 и непрерывные функции v_{ij}: $T_{ij} \to \boldsymbol{U}$ такие, что для любых $i, j, k \in I$ имеем $u_{ijk} = v_{jk} v_{ik}^{-1} v_{ij}$. Если положим $g'_{ij} = v_{ij}^{-1} g_{ij}$, то изоморфизмы g'_{ij}: $\mathcal{H}_j \mid T_{ij} \to \mathcal{H}_i \mid T_{ij}$ удовлетворяют соотношению

$$g'_{ij} g'_{jk} = v_{ij}^{-1} g_{ij} g_{jk} v_{jk}^{-1} = u_{ijk}^{-1} v_{ik}^{-1} u_{ijk} g_{ik} = g'_{ik}.$$

Тогда можно определить непрерывное поле $\mathcal{H}$ гильбертовых пространств на T, склеивая $\mathcal{H}_i$ с помощью g'_{ij} (10.1.13). Иначе говоря, можно предположить впредь, что $\mathcal{H}_i = \mathcal{H} \mid T_i$ и что все g'_{ij} — тождественные автоморфизмы. Тогда h_i: $\mathfrak{A}(\mathcal{H}) \mid T_i \to \mathfrak{A} \mid T_i$ и h_j: $\mathfrak{A}(\mathcal{H}) \mid T_j \to \mathfrak{A} \mid T_j$ совпадают на T_{ij}. Следовательно, h_i определяют изоморфизм $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ на $\mathfrak{A}$.

Библиография: [52], [163].

10.8. Локально тривиальные поля элементарных C^*-алгебр.

10.8.1. Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство бесконечной размерности. Существуют*:

a) *единичный вектор* $\xi \in H$;

b) *для каждого* $t \in [0, 1]$ — *замкнутое векторное подпространство H_t в H*;

c) *для каждого* $t \in (0, 1]$ — *изометричное линейное отображение U_t пространства H_t на H со следующими свойствами*:

(i) *проектор $P_t = P_{H_t}$ — сильно непрерывная функция* $t \in [0, 1]$; $H_1 = H$, $H_0 = \{0\}$;

(ii) *операторы* $U_t P_t$, U_t^{-1} — *сильно непрерывные функции* $t \in (0, 1]$; $U_1 = 1$;

(iii) $\| P_t \xi \|^2 = t$.

Предположим сначала, что $\dim H = \aleph_0$, тогда H отождествимо с $L^2([0, 1])$. Пусть H_t — множество таких $f \in L^2([0, 1])$, что $f(x) = 0$ для $x \geqslant t$. Для $t \in (0, 1]$ и $f \in H_t$ определим $U_t f \in H$ формулой $(U_t f)(x) = \sqrt{t}\, f(tx)$. Наконец, возьмем в качестве ξ постоянную функцию, равную 1. Свойства (i) и (iii) очевидны. Имеем для $f \in H_t$

$$\| U_t f \|^2 = \int_0^1 t\, | f(tx) |^2 dx = \int_0^t | f(x') |^2 dx' = \| f \|^2,$$

и ясно, что U_t — изометричное линейное отображение H_t на H; если $g \in H$, то для $0 \leqslant x \leqslant t$

$$(U_t^{-1} g)(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, g\left(\frac{x}{t}\right).$$

Пусть $f \in H$. Выражение

$$\| U_t P_t f - U_{t'} P_{t'} f \|^2 = \int_0^1 \left| \sqrt{t}\, f(tx) - \sqrt{t'}\, f(t'x) \right|^2 dx$$

стремится к нулю при $t' \to t$. С другой стороны,

$$\| U_t^{-1} f - U_{t'}^{-1} f \| = 2 \| f \|^2 - 2 \operatorname{Re} (U_t^{-1} f \mid U_{t'}^{-1} f) =$$

$$= 2 \| f \|^2 - 2 \operatorname{Re} \int_0^{\inf(t, t')} \frac{1}{\sqrt{t}}\, f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{\sqrt{t'}}\, \overline{f\left(\frac{x}{t'}\right)}\, dx,$$

например, для $t \leqslant t'$ имеем отсюда

$$\| U_t^{-1} f - U_{t'}^{-1} f \|^2 = 2 \| f \|^2 - 2 \operatorname{Re} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{t'}}\, f(x')\, \overline{f\left(x' \frac{t}{t'}\right)}\, dx',$$

и правая часть стремится к нулю при $t' \to t$. Отсюда следует (ii).

Если теперь $\dim H$ — какое-то бесконечное кардинальное число, то можно отождествить H с гильбертовым пространством $K \otimes K'$, где K и K' — гильбертовы пространства и $\dim K = \aleph_0$. В K существуют операторы P_t, U_t и вектор ξ со свойствами (i), (ii), (iii), и достаточно рассмотреть в H операторы $P_t \otimes 1$, $U_t \otimes 1$ и вектор $\xi \otimes \xi'$, где ξ' — единичный вектор в K'.

10.8.2. Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство бесконечной размерности, G — унитарная группа H, снабженная сильной топологией, S — единичная сфера в H, снабженная сильной топологией. Тогда G и S стягиваемы.*

Пусть H_t, P_t, U_t, ξ имеют свойства 10.8.1. Для $U \in G$ и $t \in (0, 1]$ положим

$$\Phi(U, t) = (1 - P_t) + U_t^{-1} U U_t P_t.$$

Оператор $\Phi(U, t)$ индуцирует тождественное отображение в $H \ominus H_t$ и унитарный оператор в H'_t, являющийся ограничением оператора $U_t^{-1} U U_t$. Поэтому $\Phi(U, t) \in G$ и $\Phi(U, 1) = U$. Положим $\Phi(U, 0) = 1$. Покажем, что отображение Φ произведения $G \times [0, 1]$ в G непрерывно. На $G \times (0, 1]$ это сразу следует из леммы 10.8.1. С другой стороны, предположим, что $(U', t') \in G \times (0, 1]$ стремится к $(U, 0) \in G \times [0, 1]$; тогда $P_{t'}$ стремится сильно к нулю и для каждого $f \in H$ имеем $\| U_{t'}^{-1} U U_{t'} P_{t'} f \| = \| P_{t'} f \| \to 0$, поэтому $\Phi(U', t')$ стремится сильно к $1 = \Phi(U, 0)$. Итак, G стягиваема.

Для $f \in S$ и $t \in (0, 1]$ положим

$$\Psi(f, t) = \sqrt{t}\, U_t^{-1} f + (1 - P_t)\xi.$$

Имеем

$$\| \Psi(f, t) \|^2 = t \| U_t^{-1} f \|^2 + \| (1 - P_t) \xi \|^2 = t + 1 - t = 1.$$

Поэтому $\Psi(f, t) \in S$ и $\Psi(f, 1) = f$. Положим $\Psi(f, 0) = \xi$. Отображение Ψ произведения $S \times [0, 1]$ в S непрерывно на $S \times (0, 1]$; с другой стороны, если $(f', t') \in S \times (0, 1]$ стремится к $(f, 0) \in S \times [0, 1]$, то $\| \sqrt{t}\, U_t^{-1} f' \| \to 0$, и $\Psi(f', t')$ стремится к $\xi = \Psi(f, 0)$. Итак, S стягиваема.

10.8.3. Непрерывное поле $((A(t)), \Theta)$ элементарных C^*-алгебр называется *полем ранга* a, если каждая $A(t)$ имеет ранг a (4.1.9).

10.8.4. Теорема. *Пусть T — паракомпактное пространство, a — бесконечное кардинальное число. Отображение $\mathfrak{A} \to \delta(\mathfrak{A})$ определяет биективное соответствие между $H^3(T, \mathbf{Z})$ и локально тривиальными непрерывными полями элементарных C^*-алгебр ранга a на T (рассматриваемыми с точностью до изоморфизма).*

Выберем гильбертово пространство H размерности a. Пусть G — его унитарная группа, $\mathcal{G}$ — пучок ростков непрерывных отображений T в G, $\mathcal{U}$ — пучок ростков непрерывных отображений T в $\boldsymbol{U}$.

1° Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ — непрерывные локально тривиальные поля элементарных C^*-алгебр на T ранга a. Предположим, что $\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}')$. Покажем, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ изоморфны. Существуют:

a) локально конечное открытое покрытие $(T_i)_{i \in I}$ пространства T;

b) для каждого $i \in I$ — непрерывные поля $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}'_i$ гильбертовых пространств на T_i и изоморфизмы h_i, h'_i: h_i: $\mathfrak{A}(\mathcal{H}_i) \to \mathfrak{A} \mid T_i$, h'_i: $\mathfrak{A}(\mathcal{H}'_i) \to \mathfrak{A}' \mid T$;

c) для любых $i, j \in I$ — изоморфизмы

$$g_{ij}\colon \mathscr{H}_j \,|\, T_{ij} \to \mathscr{H}_i \,|\, T_{ij},$$
$$g'_{ij}\colon \mathscr{H}'_j \,|\, T_{ij} \to \mathscr{H}'_i \,|\, T_{ij},$$

которые определяют изоморфизмы $h_i^{-1}h_j$, $h_i'^{-1}h'_j$. Если ввести u_{ijk}, $u'_{ijk}\colon T_{ijk} \to U$ с помощью формул

$$g_{ij}g_{jk} = u_{ijk}g_{ik}, \quad g'_{ij}g'_{jk} = u'_{ijk}g'_{ik},$$

то и (u_{ijk}), и (u'_{ijk}) определяют $\delta(\mathfrak{A})$. Поэтому, заменяя (T_i) более мелким покрытием, можно предполагать, что существует коцепь (v_{ij}) на (T_i) со значениями в $\mathscr{U}$ такая, что $u'_{ijk} = u_{ijk}v_{ij}v_{jk}v_{ik}^{-1}$. Заменяя g'_{ij} на $v_{ij}^{-1}g_{ij}$, можем ограничиться в дальнейшем случаем, когда $u_{ijk} = u'_{ijk}$.

Так как $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ локально тривиальны, то можно предполагать, заменяя снова (T_i) более мелким покрытием, что $\mathscr{H}_i = \mathscr{H}'_i$ есть постоянное поле на T_i, определяемое H. Тогда g_{ij}, g'_{ij} — суть непрерывные отображения T_{ij} в группу G, снабженную сильной топологией; следовательно, они определяют непрерывные сечения γ_{ij}, γ'_{ij} пучка $\mathscr{G}$ над T_{ij}. Пусть $(S_i)_{i \in I}$ — такое открытое покрытие T, что $\bar{S}_i \subset T_i$ для каждого $i \in I$. Пусть L — множество пар (J, β), где $J \subset I$, $\beta = (\beta_i)_{i \in J}$ и для каждого $i \in J$ дано β_i — такое непрерывное сечение $\mathscr{G}$ над $\bar{S}_i$, что $\gamma'_{ij} = \beta_i\gamma_{ij}\beta_j^{-1}$ на $\bar{S}_i \cap \bar{S}_j$ для $i, j \in J$. Множество L упорядочено по включению. Обозначим снова через (J, β) максимальный элемент L и докажем, что $J = I$. Предположим, что существует $i \in I - J$. Пусть $R = \bar{S}_i \cap \bigcup\limits_{j \in J} \bar{S}_j$ и $t \in R$. Если j_1, j_2 — два индекса из J такие, что $t \in \bar{S}_{j_1}$, $t \in \bar{S}_{j_2}$, то

$$\begin{aligned}\gamma'_{ij_2}(t)\,\beta_{j_2}(t)\,\gamma_{ij_2}(t)^{-1} &= \gamma'_{ij_2}(t)\,\beta_{j_2}(t)\,\gamma_{j_1j_2}(t)^{-1}\,\gamma_{ij_1}(t)^{-1}\,u_{ij_1j_2}(t) = \\ &= \gamma'_{ij_2}(t)\,\gamma'_{j_1j_2}(t)^{-1}\,\beta_{j_1}(t)\,\gamma_{ij_1}(t)^{-1}\,u_{ij_1j_2}(t) = \\ &= \gamma'_{ij_1}(t)\,u_{ij_1j_2}(t)^{-1}\,\beta_{j_1}(t)\,\gamma_{ij_1}(t)^{-1}\,u_{ij_1j_2}(t) = \gamma'_{ij_1}(t)\,\beta_{j_1}(t)\,\gamma_{ij_1}(t)^{-1}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что можно определить такое непрерывное сечение ζ пучка $\mathscr{G}$ над R, что $\gamma'_{ij} = \zeta\gamma_{ij}\beta_j^{-1}$ для всех $j \in J$. Так как G стягиваема (10.8.2), то $\mathscr{G}$ — мягкий, поэтому ζ продолжается до непрерывного сечения β_i пучка $\mathscr{G}$ над $\bar{S}_i$, что противоречит максимальности (J, β). Поэтому доказано, что $J = I$. Таким образом, каждый β_i определяет такой автоморфизм a_i поля $\mathfrak{A}(\mathscr{H}_i \,|\, S_i)$, что

$$h_i'^{-1}h_j = a_ih_i^{-1}h_ja_j^{-1} \quad \text{на} \quad S_{ij},$$

иначе говоря,

$$h_i' a_i h_i^{-1} = h_j' a_j h_j^{-1} \quad \text{на} \quad S_{ij}.$$

Итак, $h_i' a_i h_i^{-1}\colon \mathfrak{A} \mid S_i \to \mathfrak{A}' \mid S_i$ определяют изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$.

2° Пусть $(T_i)_{i \in I}$ — локально конечное открытое покрытие T, (u_{ijk}) — 2-коцикл со значениями в $\mathcal{U}$, отвечающий этому покрытию. Построим такое непрерывное поле $\mathfrak{A}$ элементарных C^*-алгебр на T, локально тривиальное ранга a, что $\delta(\mathfrak{A})$ — элемент $H^3(T, \mathbf{Z})$, определенный (u_{ijk}). Это завершит доказательство теоремы.

Пусть (T_i') — такое открытое покрытие, что $\overline{T}_i' \subset T_i$. Пусть L — множество пар (J, γ), где $J \subset I$, $\gamma = (\gamma_{ij})_{i, j \in J}$, и для любых $i, j \in J$ γ_{ij} — такое непрерывное сечение $\mathcal{G}$ над $\overline{T}_i' \cap \overline{T}_j'$, что $\gamma_{ij}\gamma_{jk} = \gamma_{ik}u_{ijk}$ для $i, j, k \in J$. Множество L упорядочено по включению. Обозначим снова через (J, γ) максимальный элемент L. Покажем, что $J = I$.

Предположим, что существует $i \in I - J$. Пусть M — множество пар (K, γ'), где $K \subset J$, $\gamma' = (\hat{\gamma}_{ij})_{j \in K}$ и где для каждого $j \in K$ $\hat{\gamma}_{ij}$ — такое непрерывное сечение $\mathcal{G}$ над $\overline{T}_i' \cap \overline{T}_j'$, что $\hat{\gamma}_{ij}\gamma_{jk} = \hat{\gamma}_{ik}u_{ijk}$ для $j, k \in K$. Обозначим еще через (K, γ') максимальный элемент M. Покажем, что $K = J$. Пусть $K \neq J$ и $j \in J - K$. Можно определить такое сечение β пучка $\mathcal{G}$ над $\overline{T}_j' \cap \overline{T}_i' \cap \bigcup_{k \in K} \overline{T}_k'$, что $\beta\gamma_{jk} = \hat{\gamma}_{ik}u_{ijk}$ для любых $k \in K$; действительно, если $k, l \in K$, определим β_k на $\overline{T}_i' \cap \overline{T}_j' \cap \overline{T}_k'$, β_l на $\overline{T}_i' \cap \overline{T}_j' \cap \overline{T}_l'$ с помощью

$$\beta_k\gamma_{jk} = \hat{\gamma}_{ik}u_{ijk}, \qquad \beta_l\gamma_{jl} = \hat{\gamma}_{il}u_{ijl};$$

получаем на $\overline{T}_i' \cap \overline{T}_j' \cap \overline{T}_k' \cap \overline{T}_l'$

$$\beta_l\gamma_{jk}\gamma_{kl}u_{jkl}^{-1} = \hat{\gamma}_{ik}\gamma_{kl}u_{ikl}^{-1}u_{ijl},$$

откуда

$$\beta_l = \hat{\gamma}_{ik}\gamma_{jk}^{-1}u_{ijl}u_{ikl}^{-1}u_{jkl} = \hat{\gamma}_{ik}\gamma_{ik}^{-1}u_{ijk} = \beta_k.$$

Так как $\mathcal{G}$ — мягкий, то можно продолжить β до непрерывного сечения $\mathcal{G}$ на $\overline{T}_i' \cap \overline{T}_j'$, что противоречит максимальности (K, γ'). Поэтому $K = J$. Поэтому существует семейство $(\hat{\gamma}_{ij})_{i \in J}$, где для каждого $j \in J$ $\hat{\gamma}_{ij}$ есть непрерывное сечение $\mathcal{G}$ над $\overline{T}_i' \cap \overline{T}_j'$ с $\hat{\gamma}_{ij}\gamma_{jk} = \hat{\gamma}_{ik}u_{ijk}$ для $j, k \in J$. Тогда γ_{ij} и $\hat{\gamma}_{ij}$ противоречат максимальности (J, γ). Поэтому $J = I$.

Пусть $\mathcal{H}_i$ — постоянное поле на T_i', определенное H, и $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}(\mathcal{H}_i)$. Для $i, j \in I$ γ_{ij} определяет изоморфизм f_{ij}

поля $\mathfrak{A}_j\,|\,T'_{ij}$ на $\mathfrak{A}_i\,|\,T'_{ij}$, и $f_{ij}f_{jk}=f_{ik}$. Поэтому существует непрерывное поле $\mathfrak{A}$ элементарных C^*-алгебр на T и для каждого $i\in I$ — такой изоморфизм h_i поля $\mathfrak{A}_i$ на $\mathfrak{A}\,|\,T'_i$, что $f_{ij}=h_i^{-1}h_j$ (10.1.13). Для вычисления $\delta(\mathfrak{A})$ можно использовать покрытие (T'_i), $\mathscr{H}_i$, h_i и сужения γ_{ij} на T'_{ij}. Видим теперь, что $\delta(\mathfrak{A})$ есть элемент $H^3(T, \boldsymbol{Z})$, определяемый (u_{ijk}).

10.8.5. Сейчас мы увидим, что предположение локальной тривиальности в теореме 10.8.4 иногда выполняется автоматически.

Лемма. *Пусть T — топологическое пространство, $\mathscr{H}=((H(t)), \Gamma)$ — сепарабельное непрерывное поле гильбертовых пространств на T, H_0 — гильбертово пространство размерности $\aleph_0$. Для каждого $t\in T$ существует замкнутое векторное подпространство $K(t)$ в H_0 и изоморфизм $U(t)$ гильбертова пространства $H(t)$ на гильбертово пространство $K(t)$ со следующими свойствами:*

a) *если Δ обозначает множество непрерывных отображений x: $T\to H_0$ таких, что $x(t)\in K(t)$ для каждого $t\in T$, то $((K(t)), \Delta)$ есть непрерывное поле $\mathscr{K}$ гильбертовых пространств на T;*

b) *$(U(t))_{t\in T}$ есть изоморфизм $\mathscr{H}$ на $\mathscr{K}$.*

Пусть $(x_1, x_2, \ldots)$ — тотальное подмножество Γ. Умножая x_i на подходящие непрерывные функции, можно предположить, что $\|x_i(t)\|\leqslant 1/i$ для всех i и всех t. Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ — ортонормированный базис H_0. Для каждого $t\in T$ существует такое непрерывное линейное отображение $S(t)$ пространства H_0 в $H(t)$, что $S(t)\varepsilon_i=x_i(t)$ для каждого i. Имеем

$$\|S(t)\|^2\leqslant \operatorname{Tr} S(t)^* S(t)\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2},$$

и $S(t)(H_0)$ всюду плотно в $H(t)$. Пусть $t\to x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(t)\varepsilon_i$ — непрерывное отображение T в H_0. Тогда $t\to S(t)x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(t)x_i(t)$ принадлежит Γ, так как λ_i — непрерывные функции и

$$\left\|\sum_{n+1}^{\infty}\lambda_i(t)x_i(t)\right\|\leqslant\sum_{n+1}^{\infty}|\lambda_i(t)|\cdot\|x_i(t)\|\leqslant\|x(t)\|\left(\sum_{n+1}^{\infty}i^{-2}\right)^{1/2}.$$

Покажем, что отображение $t\to S(t)^*S(t)x(t)$ T в H_0 непрерывно. Достаточно показать это, когда $x(t)=\varepsilon_i$ для каждого t.

Однако для каждогс $\varepsilon \in H_0$ имеем

$$\| S(t)^* S(t)\varepsilon_i - \varepsilon \|^2 = \| S(t)^* S(t)\varepsilon_i \| + \| \varepsilon \|^2 - 2\operatorname{Re}(S(t)^* S(t)\varepsilon_i \mid \varepsilon) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} |(S(t)^* S(t)\varepsilon_i \mid \varepsilon_j)|^2 + \| \varepsilon \|^2 - 2\operatorname{Re}(S(t)\varepsilon_i \mid S(t)\varepsilon) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} |(x_i(t) \mid x_j(t))|^2 + \| \varepsilon \|^2 - 2\operatorname{Re}(x_i(t) \mid S(t)\varepsilon).$$

Это — непрерывная функция t согласно изложенному выше, откуда следует, что $t \to S(t)^* S(t)\varepsilon_i$ — непрерывное отображение.

Пусть тогда $z \in \Gamma$. Для каждого $t_0 \in T$ и $\varepsilon > 0$ существует такое непрерывное отображение x: $T \to H_0$, что

$$\| S(t_0)x(t_0) - z(t_0) \| < \varepsilon,$$

откуда

$$\| S(t)^* S(t)x(t) - S(t)^* z(t) \| < \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} \right)^{1/2} \varepsilon$$

в окрестности t_0. Это доказывает, что отображение $t \to S(t)^* z(t)$ T в H_0 непрерывно. Пусть $K(t)$ — замыкание $S(t)^*(H(t))$ в H_0. Предыдущее рассуждение показывает, что множество Δ из леммы удовлетворяет аксиоме (ii) 10.1.2; аксиомы (i), (iii), (iv), очевидно, выполняются, и поэтому мы доказали, что $K(t)$ обладает свойством a). Отображение $t \to S(t)^* S(t)$ T в $\mathfrak{B}(H_0)$ сильно непрерывно, поэтому отображение $t \to (S(t)^* S(t))^{1/2} = |S(t)|$ также сильно непрерывно. Пусть $S(t) = V(t)\,|S(t)|$ — полярное разложение $S(t)$. Так как $|S(t)|(H_0)$ и $S(t)(H_0)$ всюду плотны в $K(t)$ и $H(t)$ соответственно, видим, что $(V(t))$ преобразует тотальное семейство в Δ в тотальное семейство в Γ. Но $V(t)\,|K(t)$ — изоморфизм $K(t)$ на $H(t)$, откуда следует b).

10.8.6. Напомним теперь результат Е. Майкла (Ann. of Math. t. **64** (1956), pp. 562—580, th. 1, 2). Пусть t — паракомпактное пространство конечной размерности (говорят, что T *размерности* $\leqslant n$, если для каждого конечного открытого покрытия T существует более мелкое конечное открытое покрытие порядка $\leqslant n$). Пусть A — замкнутая часть T, Y — полное метрическое пространство, φ — отображение T в множество замкнутых непустых частей Y. Предположим, что φ полунепрерывно снизу, т. е. что если $\varphi(t_0)$ пересекает Y' — открытую часть Y, то $\varphi(t)$ пересекает Y' для t, достаточно близких к t_0. Предположим, что для каждого $t \in T$ $\varphi(t)$ стягиваемо. Предположим наконец, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $t \in T$ и для каждого открытого шара β радиуса $\leqslant \varepsilon_0$ в Y пересечение $\varphi(t) \cap \beta$ стягиваемо. Тогда если f — непрерывное отображение A в Y, обладающее свойством $f(t) \in \varphi(t)$ для каждого

$t \in A$, то f продолжается до такого непрерывного отображения f' пространства T в Y, что $f'(t) \in \varphi(t)$ для всех $t \in T$.

10.8.7. Лемма. *Пусть T — конечномерное паракомпактное пространство, $\mathscr{H} = ((H(t)), \Gamma)$ — сепарабельное непрерывное поле гильбертовых пространств на T, где каждое $H(t)$ имеет размерность $\aleph_0$. Тогда $\mathscr{H}$ тривиально.*

Пусть H_0 — гильбертово пространство размерности $\aleph_0$. Вследствие 10.8.5 можно предположить, что каждое $H(t)$ есть замкнутое векторное подпространство H_0 и что Γ есть множество таких непрерывных отображений x пространства T в H_0, что $x(t) \in H(t)$ для каждого t. Пусть $(y_1, y_2, \ldots)$ — такая последовательность элементов Γ, что для каждого $t \in T$ последовательность $(y_i(t))$ всюду плотна в $H(t)$. Построим такую последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ элементов Γ, что для каждого $t \in T$ семейство $(x_i(t))$ есть ортонормированная база $H(t)$. Тогда, если $U(t)$ — изоморфизм $H(t)$ на H_0, который переводит $(x_i(t))$ в фиксированный ортонормированный базис H_0, то $(U(t))_{t \in T}$ — изоморфизм $\mathscr{H}$ на постоянное поле, определенное H_0 (10.2.4).

Предположим, что построены элементы $x_1, \ldots, x_n$ в Γ, обладающие следующими свойствами:

1° для каждого $t \in T$ набор $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — ортонормированная система;

2° существуют такие непрерывные комплексные функции $f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на T, что

$$\| y_i(t) - f_{i1}(t) x_1(t) - \ldots - f_{ii}(t) x_i(t) \| \leqslant \frac{1}{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Построим такой $x_{n+1} \in \Gamma$, что $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ обладает теми же свойствами, но с n замененным на $n+1$. Это позволит построить последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ по индукции. [Система $(x_1(t), x_2(t), \ldots)$ будет тотальной в $H(t)$, так как ее линейные комбинации позволяют аппроксимировать $y_i(t)$ с точностью до $1/i$ и $y_i(t)$ всюду плотны в $H(t)$.]

Пусть $K(t)$ — замкнутое векторное подпространство $H(t)$, ортогональное $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, и $\varphi(t)$ — единичная сфера $K(t)$. Так как $\dim K(t) = \aleph_0$, то $\varphi(t)$ стягиваема (10.8.2). С другой стороны, пересечение $\varphi(t)$ с любым открытым шаром радиуса < 1 в H_0 стягиваемо (так как гомеоморфно открытому шару в H_0 с помощью стереографической проекции). Покажем, что отображение $t \to \varphi(t)$ пространства T в множество непустых замкнутых частей H_0 полунепрерывно снизу. Пусть U — открытая часть H_0, пересекающая $\varphi(t_0)$. Пусть $\xi \in \varphi(t_0) \cap U$. Существует такой $x \in \Gamma$, что $x(t_0) = \xi$. Пусть x' — элемент Γ, определяемый равенством

$$x'(t) = x(t) - \sum_{i=1}^{n} (x(t) \mid x_i(t))\, x_i(t) \in K(t).$$

Имеем $x'(t_0)=\xi$, поэтому $x'(t)\neq 0$ для t, достаточно близких к t_0. Тогда

$$t\to x''(t)=x'(t)/\|x'(t)\|$$

есть непрерывное отображение окрестности V точки t_0 в H_0 такое, что $x''(t)\in\varphi(t)$ для $t\in V$ и $x''(t_0)=\xi$. Имеем $x''(t)\in U$ для t, достаточно близких к t_0, поэтому $\varphi(t)\cap U\neq\varnothing$ для t, достаточно близких к t_0. Поэтому можно применить 10.8.6.

Определим $z\in\Gamma$ равенством

$$y_{n+1}(t)=\sum_{i=1}^{n}(y_{n+1}(t)\mid x_i(t))+z(t).$$

Имеем $z(t)\in K(t)$ для каждого t. Пусть T' — замкнутое множество таких $t\in T$, что $\|z(t)\|\geqslant(2(n+1))^{-1}$. Вследствие 10.8.6 отображение $t\to z(t)/\|z(t)\|$ T' в H_0 продолжается до непрерывного отображения x_{n+1}: $T\to H_0$ такого, что $x_{n+1}(t)\in\varphi(t)$ для каждого $t\in T$. Пусть f: $T\to\mathbf{R}$ — непрерывная функция, равная $\|z(t)\|$ для каждого $t\in T'$ и $(2(n+1))^{-1}$ для $t\in T-T'$. Имеем

$$\left\|y_{n+1}(t)-\sum_{i=1}^{n}(y_{n+1}(t)\mid x_i(t))\,x_i(t)-f(t)x_{n+1}(t)\right\|=\|z(t)-f(t)x_{n+1}(t)\|;$$

эта величина равна нулю на T' и мажорируется числом $\dfrac{2}{2(n+1)}=\dfrac{1}{n+1}$ на $T-T'$.

10.8.8. Теорема. *Пусть T — паракомпактное пространство конечной размерности, $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T, сепарабельное, ранга $\aleph_0$, удовлетворяющее условию Фелла. Тогда $\mathfrak{A}$ локально тривиально.*

Пусть $t_0\in T$. Существует замкнутая окрестность V в T и такое поле p на V, непрерывное относительно $\mathfrak{A}$, что $p(t)$ всюду в V есть проектор ранга 1. Положим $\beta(\mathfrak{A}\mid V,p)=(\mathscr{H},x)$ и $\mathscr{H}=((H(t)),\Gamma)$. Тогда $\mathscr{H}$ сепарабельно (10.7.5), каждое $H(t)$ имеет размерность $\aleph_0$ и V — паракомпакт конечной размерности, поэтому $\mathscr{H}$ тривиально (10.8.7). Но $\mathfrak{A}\mid V$ изоморфно $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ (10.7.6), поэтому тривиально.

Библиография: [52].

10.9. Приложение к C^*-алгебрам с непрерывным следом.

10.9.1. Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра с непрерывным следом, $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на $\hat{A}$, определенное A. Оно удовлетворяет условию Фелла (10.5.8). С другой стороны, $\hat{A}$ локально компактно со счетной базой (3.3.4, 3.3.8 и 4.5.3), поэтому паракомпактно. Поэтому можно построить элемент $\delta(\mathfrak{A})$ в $H^3(\hat{A},\mathbf{Z})$ (10.7.14). Обозначим его $\delta(A)$.

10.9.2. Пусть T — локально компактное пространство, $\mathscr{H}$ — непрерывное поле ненулевых гильбертовых пространств на T. Тогда $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ удовлетворяет условию Фелла (10.7.7). Пусть A — C^*-алгебра, определяемая $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ (10.4.1). Тогда A имеет спектр T (10.4.4) и является C^*-алгеброй с непрерывным следом (10.5.2 и 10.5.8). Говорят, что A *определяется* $\mathscr{H}$.

10.9.3. Теорема. *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра с непрерывным следом. Для того чтобы A была изоморфна C^*-алгебре, определяемой непрерывным полем ненулевых гильбертовых пространств на $\hat{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\delta(A)=0$.*

Пусть $\mathscr{H}$ — такое непрерывное поле ненулевых гильбертовых пространств на $\hat{A}$, что A определяется $\mathscr{H}$. Тогда $\delta(A)=$ $=\delta(\mathfrak{A}(\mathscr{H}))$ (10.5.2), поэтому $\delta(A)=0$ (10.7.15).

Предположим, что $\delta(A)=0$. Пусть $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле C^*-алгебр, определяемое C^*-алгеброй A. Существует такое непрерывное поле $\mathscr{H}$ гильбертовых пространств на $\hat{A}$, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ (10.7.15). Тогда A изоморфна C^*-алгебре, определяемой $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$ (10.5.4).

10.9.4. Определение. *Пусть a — кардинальное число. C^*-алгебра A называется однородной степени a, если каждое неприводимое представление A имеет размерность a.*

10.9.5. Теорема. *Пусть T — локально компактное пространство конечной размерности со счетной базой.*

(i) *Пусть A — сепарабельная C^*-алгебра с непрерывным следом, однородная степени $\aleph_0$, со спектром T. Непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на T, определяемое A, локально тривиально.*

(ii) *Отображение $A \to \delta(A)$ определяет биекцию множества сепарабельных C^*-алгебр с непрерывным следом, однородных степени $\aleph_0$, со спектром T (рассматриваемых с точностью до изоморфизма) на $H^3(T, \mathbf{Z})$.*

Утверждение (i) следует из 10.8.8.

Пусть A, A' — две сепарабельные C^*-алгебры с непрерывным следом, однородные степени $\aleph_0$, со спектром T. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ — непрерывные поля C^*-алгебр на T, определяемые A, A'. Предположим, что $\delta(A)=\delta(A')$, т. е. $\delta(\mathfrak{A})=\delta(\mathfrak{A}')$. Поля $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ имеют ранг $\aleph_0$ и локально тривиальны вследствие (i). Тогда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ изоморфны (10.8.4), поэтому A и A' изоморфны.

Пусть $\delta \in H^3(T, \mathbf{Z})$. Существует локально тривиальное непрерывное поле $\mathfrak{A}$ элементарных C^*-алгебр ранга $\aleph_0$ на T такое, что $\delta(\mathfrak{A})=\delta$ (10.8.4). Это поле удовлетворяет условию Фелла, поэтому определяет C^*-алгебру A с непрерывным следом, со спектром T, однородную степени $\aleph_0$ (10.5.8). С другой стороны, $\mathfrak{A}$ сепарабельно (10.2.7), поэтому A сепарабельно

(10.4.7). Непрерывное поле C^*-алгебр, определяемое A, изоморфно $\mathfrak{A}$ (10.5.2), поэтому $\delta(A) = \delta$.

10.9.6. Следствие. *Пусть T — локально компактное пространство конечной размерности со счетной базой такое, что $H^3(T, \mathbf{Z}) = 0$. Пусть A_0 — элементарная C^*-алгебра ранга $\aleph_0$, A — C^*-алгебра непрерывных отображений $t \to x(t)$ пространства T в A_0, для которых $\|x(t)\|$ стремится к нулю на бесконечности. Тогда каждая сепарабельная C^*-алгебра с непрерывным следом, однородная степени $\aleph_0$, со спектром T, изоморфна A.*

Действительно, A сепарабельна (10.4.7), с непрерывным следом (10.5.8), со спектром T (10.4.4), однородная степени $\aleph_0$ (10.4.4). Теперь остается применить 10.9.5 (ii).

Библиография: [52], [163].

10.10. Дополнения.

10.10.1. Пусть $(A_l)_{l \in I}$ — семейство C^*-алгебр. Ограниченное произведение A_l есть C^*-алгебра, определенная непрерывным полем C^*-алгебр на дискретном пространстве I.

10.10.2. Пусть T — локально компактное пространство, B — C^*-алгебра, A — C^*-алгебра непрерывных отображений T в B, стремящихся к нулю на бесконечности. Тогда пространство $\hat{A}$ канонически отождествляется с пространством $T \times \hat{B}$. Вообще в ситуации 10.4.3 известно описание топологии $\hat{A}$ [163].

10.10.3. Пусть A — C^*-алгебра. Построим компактное пространство $\mathfrak{R}(A)$ и каноническое вложение $\operatorname{Prim}(A)$ в $\mathfrak{R}(A)$ (1.9.13). Отождествим множество $\operatorname{Prim}(A)$ с подмножеством $\mathfrak{R}(A)$ [вообще говоря, топология, индуцируемая в $\operatorname{Prim}(A)$ топологией $\mathfrak{R}(A)$, не является топологией Джекобсона в $\operatorname{Prim}(A)$, так как эта последняя не всегда отделима]. Замыкание T $\operatorname{Prim}(A)$ в $\mathfrak{R}(A)$ называется *регуляризованным спектром* A. Для каждого $t \in T$ введем $I(t)$ — замкнутый двусторонний идеал A, образованный теми $x \in A$, на которых обращается в нуль полунорма t; пусть $A(t) = A/I(t)$; пусть $x(t)$ — канонический образ $x \in A$ в $A(t)$. Множество Γ векторных полей $t \to x(t)$ $(x \in A)$ обладает следующими свойствами:

1° Γ — инволютивная алгебра векторных полей;

2° множество $x(t)$ для $x \in A$ есть все $A(t)$;

3° для каждого $x \in A$ функция $t \to \|x(t)\|$ непрерывна на T;

4° множество этих полей полно относительно равномерной сходимости.

Для того чтобы $((A(t)), \Gamma)$ было непрерывным полем C^*-алгебр, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Prim}(A)$ было отделимо в топологии Джекобсона [163].

10.10.4. Пусть $T = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$, снабженное обычной топологией. Для $t \in T$ пусть $A(t)$ — C^*-алгебра, определяемая так: если $t=\infty$, $A(t)=\boldsymbol{C}$; если $t\neq\infty$, $A(t)$ есть C^*-алгебра комплексных матриц с двумя строками и двумя столбцами. Пусть Θ — множество векторных полей $t\to x(t)\in A(t)$, обладающих следующими свойствами [положим $x(t)=(x_{ij}(t))_{i,j=1,2}$ для $t\neq\infty$]:

$$\lim_{n\to\infty} x_{12}(n)=\lim_{n\to\infty} x_{21}(n)=\lim_{n\to\infty} x_{22}(2n)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{11}(n)=\lim_{n\to\infty} x_{22}(2n+1)=x(\infty).$$

Тогда $\mathfrak{A}=((A(t))_{t\in T}, \Theta)$ есть непрерывное поле C^*-алгебр. Пусть $A=\Theta$ — C^*-алгебра, определяемая $\mathfrak{A}$. Имеем $\hat{A}=T$. Идеал $\mathfrak{M}(A)$ (4.5.2) есть множество таких $x\in A$, что $x(\infty)=0$; A — CCR-алгебра с обобщенным непрерывным следом (4.7.12) и A не является алгеброй с непрерывным следом; $\mathfrak{A}$ не удовлетворяет условию Фелла в точке ∞ [161].

10.10.5. Пусть $H=L^2_C([0, 1])$. Для каждой конечной последовательности $s=(s_1, \ldots, s_n)$, где $n=1, 2, \ldots, s_i=0$ или 1, положим

$$k_s=\sum_{i=1}^{n} s_i/2^i,$$

$$I_s=[k_s, k_s+2^{-n}].$$

Если s и t — две такие последовательности с n членами, обозначим через $Q_{s,t}$ оператор в H, переводящий $f\in H$ в $g\in H$, с $g(x)=0$ для $x\notin I_s$, $g(k_s+u)=f(k_t+u)$, если $0\leqslant u\leqslant 2^{-n}$.

Пусть $A(n)$ — C^*-алгебра операторов, порожденная $Q_{s,t}$ (s, t — последовательности с n членами). Тогда $A(n)$ изоморфна C^*-алгебре комплексных матриц с 2^n строками и 2^n столбцами. Имеем $A(n)\subset A(n+1)$. Пусть A — под-C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)$, порожденная всеми $A(n)$. Пусть $A(\infty)$ — коммутативная C^*-алгебра операторов умножения на непрерывные комплексные функции на $[0, 1]$. Имеем $A(\infty)\subset A$.

Пусть $T=\{0, 1, \ldots, \infty\}$, снабженное обычной топологией. Алгебры $A(t)$ определены выше для всех $t\in T$. Пусть Θ—множество таких непрерывных отображений x: $T\to A$, что $x(t)\in A(t)$ для всех $t\in T$. Тогда $\mathfrak{A}=((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле C^*-алгебр. Пусть $A=\Theta$ — C^*-алгебра, определенная $\mathfrak{A}$. Тогда элементы $\hat{A}$ суть π_n: $x\to x(n)$ $(n<\infty)$ и π_χ: $x\to\chi(x(\infty))$, где $\chi\in A(\infty)^\wedge$. C^*-алгебра A — CCR-алгебра с обобщенным непрерывным следом. Последовательность (π_n) $(n=1, 2, \ldots)$ сходится ко всем π_χ одновременно (Фелл, не опубликовано).

10.10.6. Пусть A — C^*-алгебра.

a) Для того чтобы $\mathrm{Prim}(A)$ было дискретным, необходимо и достаточно, чтобы A было ограниченным произведением семейства C^*-алгебр, ни одна из которых не имеет нетривиального замкнутого двустороннего идеала.

b) Для того чтобы A была дуальной, необходимо и достаточно, чтобы A была CCR-алгеброй с дискретным спектром [67].

10.10.7. Пусть A — CCR-C^*-алгебра (соотв. GCR-алгебра), T — компактное пространство, B — C^*-алгебра непрерывных отображений T в A. Тогда B — CCR-алгебра (соотв. GCR-алгебра). [Если A — CCR-алгебра, то применить 10.4.3. Если A — GCR-алгебра, то пусть (I_ρ) — композиционный ряд A такой, что $I_{\rho+1}/I_\rho$ — CCR-алгебры. Пусть J_ρ—множество непрерывных отображений T в I_ρ. Тогда J_ρ образуют композиционный ряд для B и $J_{\rho+1}/J_\rho$ изоморфна C^*-алгебре непрерывных отображений T в $I_{\rho+1}/I_\rho$.] [70.]

10.10.8. Пусть A — CCR-C^*-алгебра, U — отделимая всюду плотная открытая часть $\hat{A}$, I — такой замкнутый двусторонний идеал A, что $\hat{I}=U$. Пусть $\mathfrak{A}=((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на U, определяемое I. Для каждого $x\in A$ и каждого $t\in U$ введем $x(t)$ — канонический образ x в $A(t)$ [образ A в представлении t тот же, что у I, а именно, $\mathfrak{B}\mathscr{C}(H_t)$]. Для каждого $x\in A$ определим x'—поле $t\to x(t)$ на U. Тогда отображение $x\to x'$ инъективно. Поле x', вообще говоря, не есть элемент Θ, но для каждого $y\in I$ поля $x'y'$ и $y'x'$ лежат в Θ. Предположим, что A — с обобщенным непрерывным следом и что $I=J(A)$ (4.7.12). Тогда для каждого $x\in A$ имеем $x'\in\Theta$. [Для каждого $y\in I$ функция $t\to\|x(t)-y(t)\|$ непрерывна на U, так как точки U отделимы в $\hat{A}$ (3.9.4).]

***10.10.9.** Пусть S — двумерная сфера, T — компактное пространство $S\times S\times S\times\ldots$ На T существует непрерывное поле $\mathscr{H}=((H((t)), \Gamma)$ гильбертовых пространств размерности $\aleph_0$, которое не является локально тривиальным ни в одной точке T. Пусть A — C^*-алгебра с непрерывным следом, определяемая $\mathfrak{A}(\mathscr{H})$. Тогда A не имеет никакого замкнутого двустороннего идеала $I\neq 0$ такого, что I изоморфен C^*-алгебре непрерывных отображений $X\to A_0$, стремящихся к нулю на бесконечности (X — локально компактное пространство, A_0 — элементарная C^*-алгебра) [52].

10.10.10. Пусть T — топологическое пространство,

$$\mathfrak{A}_1=((A_1(t)), \Theta_1), \quad \mathfrak{A}_2=((A_2(t)), \Theta_2)$$

— два непрерывных поля элементарных C^*-алгебр на T, удовлетворяющих условию Фелла. Для каждого $t\in T$ введем

$A(t)$ — элементарную C^*-алгебру $A_1(t)\otimes A_2(t)$ (2.12.15). Пусть Γ — множество векторных полей вида

$$t\to a_1(t)\otimes a_2(t)+b_1(t)\otimes b_2(t)+\ \dots\ +k_1(t)\otimes k_2(t),$$

где $a_1, b_1, \dots, k_1\in\Theta_1$, $a_2, b_2, \dots, k_2\in\Theta_2$. Существует непрерывное поле $\mathfrak{A}=((A(t)), \Theta)$ элементарных C^*-алгебр на T и притом единственное такое, что $\Theta\supset\Gamma$. Положим $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$. Это поле удовлетворяет условию Фелла. Если T — паракомпакт, то

$$\delta(\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)=\delta(\mathfrak{A}_1)+\delta(\mathfrak{A}_2).$$

Если $\mathfrak{A}_1$ сепарабельно и если $\mathfrak{A}_2$ — локально тривиально бесконечного ранга, то $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ локально тривиально [51].

10.10.11. Проблема: пусть $((A(t)), \Theta)$ — непрерывное поле GCR-C^*-алгебр на T. Для каждого $t\in T$ пусть $B(t)$ — наибольший CCR-идеал в $A(t)$. Пусть Θ' — множество таких $x\in\Theta$, что $x(t)\in B(t)$ для каждого t. Является ли $((B(t)), \Theta')$ непрерывным полем C^*-алгебр?

10.10.12. Пусть A — C^*-алгебра, $x\in A$, f — ограниченная непрерывная комплексная функция на $\hat{A}$. Существует такой $y\in A$, что $\pi(y)=f(\pi)\pi(x)$ для каждого $\pi\in\hat{A}$ [346]. См. также [316].

§ 11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА C^*-АЛГЕБРЫ ТЕОРЕМЫ СТОУНА—ВЕЙЕРШТРАССА

Пусть A — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на локально компактном пространстве, стремящихся к нулю на бесконечности. Теорема Стоуна — Вейерштрасса дает условия, позволяющие утверждать, что под-C^*-алгебра B в A совпадает с A. Но C^*-алгебры типа A суть не что иное, как, с точностью до изоморфизма, коммутативные C^*-алгебры. Мы в этом параграфе распространим теорему Стоуна—Вейерштрасса на любые C^*-алгебры.

11.1. Случай GCR-C^*-алгебр.

11.1.1. Определение. *Пусть A — C^*-алгебра, B — под-C^*-алгебра A. Говорят, что B — массивная под-C^*-алгебра A, если выполнены следующие условия:*

(i) *Для любого неприводимого представления π C^*-алгебры A представление $\pi|B$ неприводимо.*

(ii) *Если π и π' — неэквивалентные неприводимые представления A, то $\pi|B$ и $\pi'|B'$ неэквивалентны.*

Отсюда следует, что если π—ненулевое неприводимое представление A, то $\pi|B$ ненулевое.

11.1.2. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, B — массивная под-C^*-алгебра A и π—неприводимое представление B. Существует такое неприводимое представление π' C^*-алгебры A в H_π, что $\pi = \pi' \mid B$.*

Существует гильбертово пространство $H' \supset H_\pi$ и неприводимое представление π' C^*-алгебры A в H' такое, что $\pi(x) = \pi'(x) \mid H$ для любого $x \in B$ (2.10.2). Тогда $\pi' \mid B$ неприводимо, так как B массивна, и H_π инвариантно относительно $\pi'(B)$, поэтому $H_\pi = H'$.

11.1.3. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, B — массивная под-C^*-алгебра A, I — замкнутый двусторонний идеал A. Тогда:*

(i) *$B/(B \cap I)$ — массивная под-C^*-алгебра A/I.*

(ii) *$B \cap I$ — массивная под-C^*-алгебра I.*

Утверждение (i) сразу следует из определений. Докажем (ii). Пусть π—неприводимое представление I, докажем, что $\pi \mid B \cap I$ неприводимо. Можно предполагать, что $\pi \neq 0$. Существует неприводимое представление ρ C^*-алгебры A в H_π, продолжающее π (2.10.4). Так как B массивна, то $\rho \mid B$ неприводимо. Так как $B \cap I$—замкнутый двусторонний идеал B, то $\pi \mid B \cap I$ нулевое или неприводимое (2.11.2). Если $\pi \mid B \cap I = 0$, то $\rho \mid B$ определяет неприводимое представление $B/(B \cap I)$, которое, согласно (i) и 11.1.2, продолжается до неприводимого представления A/I; иначе говоря, $\rho \mid B$ продолжается до неприводимого представления ρ' C^*-алгебры A, нулевого на I; так как B массивна, то ρ' эквивалентно ρ, поэтому $\pi = \rho \mid I = 0$, в противоречие с предположением. Следовательно, $\pi \mid B \cap I$ неприводимо. Теперь пусть π, π' — два неприводимых представления I, и предположим, что $\pi \mid B \cap I \simeq \pi' \mid B \cap I$. Пусть ρ, ρ' — представления A в H_π, $H_{\pi'}$, продолжающие π, π' (2.10.4). Если $\pi \mid B \cap I$ и $\pi' \mid B \cap I$—нулевые, то, как выше, получаем, что π и π' нулевые. В противном случае $\rho \mid B \simeq \rho' \mid B$ (2.11.2), поэтому $\rho \simeq \rho'$, так как B массивна, и $\pi \simeq \pi'$.

11.1.4. Лемма. *Пусть A — CCR-C^*-алгебра с отделимым спектром. B — массивная под-C^*-алгебра A. Имеем $B = A$.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — непрерывное поле элементарных C^*-алгебр на $\hat{A}$, определяемое A. Тогда A отождествляется с C^*-алгеброй, определяемой $\mathfrak{A}$ (10.5.4). Если $\pi \in \hat{A}$, имеем $\pi \mid B \in \hat{B}$, следовательно, $\pi(A) = \pi(B) = \mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)$. Если π, π' — неэквивалентные неприводимые представления A, то $\pi \mid B$ и $\pi' \mid B$ неэквивалентны; следовательно, если $T \in \mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)$ и $T' \in \mathfrak{B}\mathscr{C}(H_{\pi'})$, то существует такой $x \in B$, что $\pi(x) = T$, $\pi'(x) = T'$ (4.2.5). Тогда $B = A$ вследствие 10.5.3.

11.1.5. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, I — ее наибольший GCR-идеал, B — массивная подалгебра A. Имеем $B \supset I$.*

Существует композиционный ряд $(I_\rho)_{0\leqslant\rho\leqslant\alpha}$ идеала I такой, что $I_{\rho+1}/I_\rho$ — C^*-алгебры с непрерывным следом (4.5.5), следовательно, CCR-C^*-алгебры с отделимым спектром (4.5.3). Имеем $I_0 = 0 \subset B$. Предположим, что существует наименьшее порядковое число ρ, для которого $I_\rho \not\subset B$. Имеем $I_{\rho'} \subset B$ для $\rho' < \rho$, поэтому ρ — не предельное порядковое число. Пусть $\rho = \rho' + 1$. Вследствие 11.1.3 (i) $B/I_{\rho'}$ — массивная под-C^*-алгебра $A/I_{\rho'}$. Вследствие 11.1.3 (ii) $(B \cap I_\rho)/I_{\rho'}$ — массивная под-C^*-алгебра $I_\rho/I_{\rho'}$. Вследствие 11.1.4 $(B \cap I_\rho)/I_{\rho'} = I_\rho/I_{\rho'}$, откуда $B \supset I_\rho$, что противоречит предположению. Поэтому $I = I_\alpha \subset B$.

11.1.6. Предложение. *В GCR-C^*-алгебре A любая массивная под-C^*-алгебра равна A.*

Это — частный случай 11.1.5.

11.1.7. Пусть E, F — два векторных пространства в двойственности, $A \subset E$, $B \subset F$. Скажем, что A отделяет B, если для любой пары (x, y) различных точек B существует такой $a \in A$, что $\langle a, x\rangle \neq \langle a, y\rangle$.

Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, B — под-C^*-алгебра, отделяющая $P(A) \cup \{0\}$. Тогда B — массивная под-C^*-алгебра A.*

Пусть $\pi \in \hat{A}$. Предположим, что H_π — гильбертова сумма двух ненулевых подпространств H_1, H_2, инвариантных относительно $\pi \mid B$. Пусть $\xi_1 \in H_1$, $\xi_2 \in H_2$ — ненулевые и такие, что $\|\xi_1 + \xi_2\| = 1$. Тогда

$$x \to (\pi(x)(\xi_1 + \xi_2) \mid \xi_1 + \xi_2) \quad \text{и} \quad x \to (\pi(x)(\xi_1 - \xi_2) \mid \xi_1 - \xi_2)$$

суть чистые состояния f_1, f_2 на A. Если $x \in B$, то

$$f_1(x) = (\pi(x)\xi_1 \mid \xi_1) + (\pi(x)\xi_2 \mid \xi_2) =$$
$$= (\pi(x)\xi_1 \mid \xi_1) + (\pi(x)(-\xi_2) \mid (-\xi_2)) = f_2(x).$$

Так как B отделяет $P(A)$, имеем $f_1 = f_2$, поэтому $\xi_1 + \xi_2$ пропорционален $\xi_1 - \xi_2$ (2.5.7) и ξ_1 и ξ_2 пропорциональны, что невозможно. Следовательно, $\pi \mid B$ неприводимо.

Пусть π_1, π_2 — два неприводимых представления A; предположим, что существует изоморфизм U пространства H_{π_1} на H_{π_2}, переводящий $\pi_1 \mid B$ в $\pi_2 \mid B$. Пусть ξ_1 — единичный вектор в H_{π_1}, $\xi_2 = U(\xi_1)$, f_i — элемент $P(A) \cup \{0\}$, определенный π_i и ξ_i. Имеем $f_1(x) = f_2(x)$ для $x \in B$, поэтому $f_1 = f_2$. Итак, либо π_1 и π_2 — нулевые, либо π_1 и π_2 — оба ненулевые; в последнем случае ξ_i — тотализирующий для π_i, и равенство $f_1 = f_2$ влечет $\pi_1 \simeq \pi_2$ (2.4.1).

11.1.8. Теорема. *Пусть A — GCR-C^*-алгебра, B — под-C^*-алгебра A. Если B отделяет $P(A) \cup \{0\}$, то $B = A$.*

Это следует из 11.1.6 и 11.1.7.

Неизвестно, является ли существенным предположение, что A — GCR-алгебра. Для любых C^*-алгебр мы получим ниже (11.5.2) результат менее точный, чем 11.1.8.

Библиография: [23], [70].

Этот пункт является изложением неопубликованной работы Фелла.

11.2. Изобилие чистых состояний в некоторых C^*-алгебрах.

11.2.1. Лемма. Пусть *H — гильбертово пространство, $C = \mathfrak{LC}(H)$, A — под-C^*-алгебра $\mathfrak{L}(H)$, содержащая 1, f — состояние A, нулевое на $A \cap C$. Тогда:*

(i) *f — слабый предел векторных состояний A* (2.4.2).

(ii) *Если A неприводимо в H, то f — слабый предел чистых состояний A.*

(ii) сразу следует из (i); докажем (i).

Предположим сначала, что $A \supset C$. Тогда f определяет состояние f' на A/C, которое является слабым пределом выпуклых комбинаций чистых состояний (2.5.6). Поэтому f есть слабый предел состояний вида $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ и где $f_1, \ldots, f_n$ суть чистые состояния A, нулевые на C. Тогда достаточно изучить случай, когда само f имеет вид $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$ с предыдущими свойствами. Пусть $x_1, \ldots, x_s$ — такие эрмитовы элементы A, что $x_1 = 1$. Построим такие унитарные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в H, что $(x_i \xi_j | \xi_k) = 0$ для $j < k$ и $| f_j(x_i) - \omega_{\xi_j}(x_i)| \leqslant 1$ для любых i и j. Предположим, что ξ_j построены для $j < m$. Пусть K — векторное подпространство H, порожденное $x_i \xi_j$ $(1 \leqslant i \leqslant s,\ j < m)$, и $K' = H \ominus K$. Имеем $P_K \in C \subset A$, поэтому $P_{K'} A P_{K'}$ есть подалгебра A и $f_m | P_{K'} A P_{K'}$ есть состояние $P_{K'} A P_{K'}$, так как

$$f_m(P_{K'}) = f_m(P_{K'}) + f_m(P_K) = f_m(1) = 1,$$

Если $f_m | P_{K'} A P_{K'} = \lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2$, где $0 < \lambda < 1$ и где g_1, g_2 — состояния $P_{K'} A P_{K'}$, то обозначим через $\hat{g}_i$ состояние $x \to g_i(P_{K'} x P_{K'})$ на A; так как f_m обращается в нуль на C, то $f_m = \lambda \hat{g}_1 + (1 - \lambda) \hat{g}_2$, поэтому $\hat{g}_1 = \hat{g}_2$, так как f_m чистое; тогда $g_1 = g_2$; таким образом, $f_m | P_{K'} A P_{K'}$ есть чистое состояние $P_{K'} A P_{K'}$. Вследствие 3.4.1 $f_m | P_{K'} A P_{K'}$ есть слабый предел форм ω_{ζ_α}, где ζ_α суть единичные векторы в K'. Поэтому для $1 \leqslant i \leqslant s$

$$f_m(x_i) = f_m(P_{K'} x_i P_{K'})$$

есть предел

$$(P_{K'} x_i P_{K'} \zeta_\alpha | \zeta_\alpha) = (x_i \zeta_\alpha | \zeta_\alpha).$$

Следовательно, можно найти такое $\xi_m \in K'$, что

$$| f_m(x_i) - \omega_{\xi_m}(x_i)| \leqslant 1 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant s,$$

и построение ξ_i может быть проведено по индукции. Пусть тогда $\xi = \sqrt{\lambda_1}\xi_1 + \ldots + \sqrt{\lambda_n}\xi_n$. Так как $x_1 = 1$, то $(\xi_j, \xi_k) = 0$ при $j \neq k$, поэтому ξ единичен. Так как x_i эрмитовы, то $(x_i \xi_j \mid \xi_k) = 0$ для $j \neq k$ и

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x_i) - \omega_\xi(x_i)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x_i) - \sum_{j,\,k=1}^{n}\left(x_i \sqrt{\lambda_j}\xi_j \mid \sqrt{\lambda_k}\xi_k\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x_i) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_i\xi_j \mid \xi_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Это доказывает, что $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j$ — слабый предел векторных состояний A.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть A_1 — C^*-алгебра $A + C$. Тогда A_1/C отождествима с $A/A \cap C$, поэтому f определяет состояние A_1/C, иначе говоря, f продолжается до состояния f' на A_1, нулевого на C. По предыдущему, f' — слабый предел векторных состояний A_1, поэтому f — слабый предел векторных состояний A.

11.2.2. Пусть A — C^*-алгебра. Для любого представления Θ C^*-алгебры A обозначим впредь через C_Θ множество таких $x \in A$, что $\pi(x)$ компактен. Имеем $C_\Theta = \Theta^{-1}(\mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\Theta))$, поэтому C_Θ — замкнутый двусторонний идеал.

Лемма. *Пусть A — NGCR-C^*-алгебра с единичным элементом, $P'(A)$ — множество состояний, которые обращаются в нуль хотя бы на одном C_Θ ($\Theta \in \hat{A}$). Тогда $P(A)$ и $P'(A)$ имеют одинаковые слабые замыкания.*

Пусть x — такой эрмитов элемент A, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $f \in P'(A)$. Пусть $\Theta \in \hat{A}$ и π_Θ — представление A с ядром C_Θ. Любое состояние, связанное с π_Θ, есть элемент $P'(A)$, поэтому оно $\geqslant 0$ на x и $\pi_\Theta(x) \geqslant 0$. Но $\bigcap_{\Theta \in \hat{A}} C_\Theta = 0$, так как A — NGCR-C^*-алгебра (4.2.6). Тогда $\bigoplus_{\Theta \in \hat{A}} \pi_\Theta$ изометрично, так что $x \geqslant 0$. Вследствие 3.4.1 слабое замыкание $P'(A)$ содержит $P(A)$.

Если $g \in P'(A)$, то существует такое $\Theta \in \hat{A}$, что $g(C_\Theta) = 0$. Поэтому g определяет состояние g' на $\Theta(A)$, нулевое на $\Theta(A) \cap \mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\Theta)$. Вследствие 11.2.1. g' есть слабый предел чистых состояний $\Theta(A)$, тогда g есть слабый предел чистых состояний A. Таким образом, слабое замыкание $P(A)$ содержит $P'(A)$.

11.2.3. Пусть A — C^*-алгебра. До конца этого параграфа $\overline{P(A)}$ означает слабое замыкание $P(A)$ в пространстве, сопряженном к A, и $E(A)$ — множество состояний A.

Лемма. *Пусть A — NGCR-C^*-алгебра с единичным элементом и $f \in \overline{P(A)}$. Любое состояние A, нулевое на $\operatorname{Ker} \pi_f$, принадлежит $\overline{P(A)}$.*

Вследствие 3.4.3 достаточно проверить, что состояние

$$x \to \lambda_1 f(y_1^* x y_1) + \ldots + \lambda_n f(y_n^* x y_n)$$
$$\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0,\ y_1, \ldots, y_n \in A,\ \sum_i \lambda_i f(y_i^* y) = 1\right)$$

принадлежит $\overline{P(A)}$. Но f — слабый предел состояний $f_\alpha \in P'(A)$ (11.2.2) и состояние

$$x \to \lambda_1 f_\alpha(y_1^* x y_1) + \ldots + \lambda_n f_\alpha(y_n^* x y_n),$$

очевидно, принадлежит $P'(A)$, поэтому и $\overline{P(A)}$ (11.2.2).

11.2.4. Лемма. *Пусть A — NGCR-C^*-алгебра с единичным элементом. Предположим, что два ненулевых замкнутых двусторонних идеала A всегда имеют ненулевые пересечения. Тогда $E(A) = \overline{P(A)}$.*

Условие на идеалы A означает, что в $\hat{A}$ две непустые открытые части имеют непустое пересечение (3.2.2). Пусть R — отношение эквивалентности. определенное в $P(A)$ каноническим отображением $P(A) \to \hat{A}$. Если $f \in P(A)$, то элементы $P(A)$, сравнимые с f по модулю R, суть состояния вида $x \to f(u^* x u)$, где u принадлежат унитарной группе G C^*-алгебры A (2.8.6). Так как $\hat{A}$ — фактор-пространство $P(A)$ относительно R, то две непустые открытые части $P(A)$, насыщенные по отношению к R, имеют непустое пересечение. Пусть тогда $f_1, f_2 \in P(A)$, $\lambda \in [0, 1]$. По предыдущему, $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ есть слабый предел состояний

$$x \to \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(u^* x u), \tag{1}$$

где $f \in P(A)$ и $u \in G$. Но состояние (1) обращается в нуль на $\operatorname{Ker} \pi_f$, поэтому принадлежит $\overline{P(A)}$ (11.2.3). Следовательно, $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in \overline{P(A)}$. По индукции, любая выпуклая комбинация чистых состояний A принадлежит $\overline{P(A)}$. Таким образом, $E(A) \subset \overline{P(A)}$ (2.5.6).

Библиография: [23].

11.3. Формулировка теоремы.

11.3.1. Теорема. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, B — под-C^*-алгебра A, содержащая 1. Если B отделяет $\overline{P(A)}$, то $B = A$.*

Доказательство будет дано в 11.5.1.

11.3.2. Лемма. *Пусть A и B удовлетворяют условиям теоремы 11.3.1. Если B отделяет $E(A)$, то $B = A$.*

Пусть A_h (соотв. B_h) — множество эрмитовых элементов A (соотв. B). Предположим, что $A \neq B$, тогда $A_h \neq B_h$. По теореме Хана — Банаха существует такая ненулевая непрерывная эрмитова линейная форма f на A, что $f(B)=0$. Пусть $f=g-g'$, где g, g' — положительные формы на A (2.6.4). Имеем

$$0=f(1)=g(1)-g'(1), \quad \text{поэтому} \quad g(1)=g'(1)\neq 0.$$

Умножая f, g, g' на общий скаляр, можно предположить, что $g(1)=g'(1)=1$, поэтому g, $g'\in E(A)$. Тогда B не отделяет g, g' и тем не менее $g\neq g'$.

11.3.3. Вследствие 11.2.4 и 11.3.2 теорема 11.3.1 доказана, если A — NGCR-C^*-алгебра, в которой пересечение двух ненулевых замкнутых двусторонних идеалов ненулевое. Мы сведем общий случай к этому частному случаю.

Библиография: [23].

11.4. Некоторые леммы.

11.4.1. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, B — под-C^*-алгебра A, содержащая 1 и отделяющая $P(A)$. Пусть K_1, K_2 — два замкнутых двусторонних идеала A, $K=B\cap(K_1+K_2)$, $K'=(B\cap K_1)+(B\cap K_2)$. Имеем $K=K'$.*

Ясно, что $K\supset K'$. Пусть f — такое чистое состояние B, что $f(K')=0$. Покажем, что $f(K)=0$, что завершит доказательство (2.7.3).

Существует $f'\in P(A)$, продолжающий f [2.10.1 (ii)]; так как B отделяет $P(A)$, то это продолжение единственно. По 2.10.1 (iii), имеем для каждого эрмитова элемента x в A:

$$f'(x)=\sup_{y=y^*\in B,\ y\leqslant x} f(y). \tag{1}$$

Пусть $x\in K_1^+$. Если $y=y^*\in B$ и $y\leqslant x$, то, обозначая через φ канонический морфизм A на A/K_1, имеем $\varphi(y)\leqslant\varphi(x)=0$, поэтому $\varphi(y^+)=\varphi(y)^+=0$ и $y^+\in K_1$, откуда следует, что $f(y^+)=0$, $f(y)\leqslant 0$. Тогда (1) показывает, что $f'(x)=0$. Таким образом, f' обращается в нуль на K_1 и так же на K_2; таким образом, $f(K)=0$.

11.4.2. Лемма. *Пусть A и B удовлетворяют условиям леммы 11.4.1, π_1 и π_2 — такие представления A, что $\pi_1(A)=\pi_1(B)$, $\pi_2(A)=\pi_2(B)$. Тогда $(\pi_1\oplus\pi_2)(A)=(\pi_1\oplus\pi_2)(B)$.*

Пусть $K_i=\operatorname{Ker}\pi_i$. Тогда $A=B+K_1=B+K_2$, откуда, во-первых,

$$K_1\subset(B\cap(K_1+K_2))+K_2.$$

Согласно 11.4.1 имеем

$$K_1\subset(B\cap K_1)+(B\cap K_2)+K_2=(B\cap K_1)+K_2$$

Отсюда получаем

$$K_1 \subset (B \cap K_1) + (K_1 \cap K_2)$$

и, наконец,

$$A = B + K_1 = B + (K_1 \cap K_2),$$

что доказывает лемму.

11.4.3. Лемма. *Пусть A — NGCR-C^*-алгебра с единичным элементом, B — под-C^*-алгебра A, содержащая 1 и отделяющая $\overline{P(A)}$. Если $f_1, f_2 \in \overline{P(A)}$, то*

$$(\pi_{f_1} \oplus \pi_{f_2})(A) = (\pi_{f_1} \oplus \pi_{f_2})(B).$$

Если $f \in \overline{P(A)}$, то любое состояние A, нулевое на $\operatorname{Ker} \pi_f$, принадлежит $\overline{P(A)}$ (11.2.3), поэтому $\pi_f(B)$ отделяет состояния $\pi_f(A)$, поэтому $\pi_f(B) = \pi_f(A)$ (11.3.2). Теперь достаточно применить 11.4.2.

11.4.4. Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, $T \in \mathfrak{B}(H)$, $0 \leqslant T \leqslant 1$, $\varepsilon \in [0, 1]$, ξ — такой унитарный вектор в H, что $(T\xi \mid \xi) \geqslant 1 - \varepsilon$.*

(i) *Если $f: R \to R$ — такая неотрицательная борелевская функция, что $f \geqslant 1$ в $[1 - \varepsilon^{1/2}, 1]$, то $(f(T)\xi \mid \xi) \geqslant 1 - \varepsilon^{1/2}$.*

(ii) *Если $T' \in \mathfrak{B}(H)$, то $|(T'\xi \mid \xi) - (T'T\xi \mid \xi)| \leqslant 2\varepsilon^{1/2} \| T' \|$.*

(iii) *Имеем $T + 3\varepsilon^{1/2} \geqslant P_{C\xi}$.*

(iv) *Если S — такой эрмитов оператор в H, что $S \geqslant T$, и если $g: R \to R$ — такая неотрицательная борелевская функция, что $g \geqslant 1$ в $[\varepsilon, +\infty)$, то $(g(S)\xi \mid \xi) \geqslant 1 - 4\varepsilon^{1/2}$.*

Пусть $T = \int\limits_0^1 \lambda \, dE_\lambda$ — спектральное разложение T. Положим $1 - \varepsilon^{1/2} = \alpha$. Имеем

$$1 - \varepsilon^{1/2}(E_\alpha \xi \mid \xi) = (1 - \varepsilon^{1/2})(E_\alpha \xi \mid \xi) + ((1 - E_\alpha)\xi \mid \xi) \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_0^\alpha \lambda \, d(E_\lambda \xi \mid \xi) + \int\limits_\alpha^1 \lambda \, d(E_\lambda \xi \mid \xi) = (T\xi \mid \xi) \geqslant 1 - \varepsilon,$$

откуда $(E_\alpha \xi \mid \xi) \leqslant \varepsilon^{1/2}$ и

$$(f(T)\xi \mid \xi) \geqslant ((1 - E_\alpha)\xi \mid \xi) \geqslant 1 - \varepsilon^{1/2}.$$

Отсюда следует (i).

Если $T' \in \mathfrak{B}(H)$, то, вследствие 9.3.3, имеем

$$|(T'\xi \mid \xi) - (T'T\xi \mid \xi)| = |(T'(\xi - T\xi) \mid \xi)| \leqslant \| T' \| \| \xi - T\xi \| \leqslant (2\varepsilon)^{1/2} \| T' \|,$$

откуда следует (ii).

Пусть $\zeta \in H$ — единичный вектор. Имеем $\zeta = \lambda\zeta_1 + \mu\xi$, где λ, $\mu \in \boldsymbol{C}$ и ζ_1 — унитарный вектор в H, ортогональный ξ. Пусть P — ортогональный проектор на $\boldsymbol{C}\zeta_1 + \boldsymbol{C}\xi$ в H. Пусть $\begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & r \end{pmatrix}$ — матрица PTP в базисе (ζ_1, ξ). Имеем

$$r = (PTP\xi \mid \xi) = (T\xi \mid \xi) \in [1 - \varepsilon,\ 1].$$

Так как $0 \leqslant PTP \leqslant P$, то $p \in [0, 1]$ и $|q|^2 \leqslant (1-p)(1-r) \leqslant \varepsilon$. Поэтому

$$((T - P_{C\xi})\zeta \mid \zeta) = (p\lambda + q\mu)\bar{\lambda} + (\bar{q}\lambda + (r-1)\mu)\bar{\mu} \geqslant$$
$$\geqslant p|\lambda|^2 + (r-1)|\mu|^2 - 2|q\lambda\mu| \geqslant 0 - \varepsilon - 2\varepsilon^{1/2} \geqslant -3\varepsilon^{1/2},$$

откуда следует (iii).

Пусть $S = \int\limits_0^{+\infty} \lambda\, dF_\lambda$ — спектральное разложение S. Имеем $\xi = \rho\xi_1 + \sigma\xi_2$, где $\rho, \sigma \in \boldsymbol{C}$, ξ_1 и ξ_2 — единичные векторы в $(1 - F_\varepsilon)(H)$ и $F_\varepsilon(H)$ соответственно. Пусть Q — ортогональный проектор на $\boldsymbol{C}\xi_1 + \boldsymbol{C}\xi_2$ в H. Имеем

$$QSQ = \alpha_1 P_{C\xi_1} + \alpha_2 P_{C\xi_2} \quad \text{с} \quad \alpha_1 \geqslant \varepsilon \geqslant \alpha_2 \geqslant 0.$$

Поэтому, вследствие (iii),

$$4\varepsilon^{1/2} \geqslant \alpha_2 + 3\varepsilon^{1/2} = ((QSQ + 3\varepsilon^{1/2})\xi_2 \mid \xi_2) \geqslant$$
$$\geqslant ((QTQ + 3\varepsilon^{1/2})\xi_2 \mid \xi_2) \geqslant (P_{C\xi}\xi_2 \mid \xi_2) = ((\xi_2 \mid \xi)\xi \mid \xi_2) = |\sigma|^2.$$

Тогда

$$(g(S)\xi \mid \xi) \geqslant ((1 - F_\varepsilon)\xi \mid \xi) = |\rho|^2 = 1 - |\sigma|^2 \geqslant 1 - 4\varepsilon^{1/2}.$$

11.4.5. Лемма. *Пусть A и B — как в* 11.4.3, *K — замкнутый двусторонний идеал A, $f \in \overline{P(A)}$ и* $\varepsilon \in [0, 1/4)$. *Предположим, что существует $x \in K$ такой, что $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $f(x) \geqslant 1 - \varepsilon$. Тогда существует $y \in B \cap K$ такой, что $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $f(y) \geqslant 1 - \varepsilon^{1/2}$.*

Вследствие 11.4.3 существует такой $x' \in B$, что $\pi_f(x) = \pi_f(x')$; заменяя x' на $(1/2)(x' + x'^*)$, можно предполагать, что x' эрмитов.

Пусть $x' - x \leqslant 1/2$ и $p\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — функция, равная 0 на $(-\infty, 1/2]$, 1 на $[1 - \varepsilon^{1/2}, +\infty)$ и линейная в $[1/2, 1 - \varepsilon^{1/2}]$; пусть $y = p(x') \in B$; тогда $0 \leqslant y \leqslant 1$; с другой стороны, если ω — канонический морфизм A на A/K, то $\omega(x') = \omega(x' - x) \leqslant 1/2$, поэтому $\omega(y) = p(\omega(x')) = 0$ и $y \in K$; наконец,

$$\pi_f(y) = p(\pi_f(x')) = p(\pi_f(x)) \quad \text{и} \quad f(y) = (\pi_f(y)\xi_f \mid \xi_f) \geqslant 1 - \varepsilon^{1/2}$$

вследствие 11.4.4 (i).

Если $x'-x>1/2$, мы изменим x' так, чтобы свести задачу к предыдущему случаю. Если $g\in\overline{P(A)}$, то существует такой $t_g\in B$, что

$$\pi_f(t_g)=\pi_f((x'-x)^+)=0 \quad \text{и} \quad \pi_g(t_g)=\pi_g((x'-x)^+) \quad (11.4.3);$$

заменяя t_g на $(1/2)(t_g+t_g^*)^+$, можно предполагать, что $t_g\geqslant 0$. Пусть W_g — множество таких $h\in\overline{P(A)}$, что $h(t_g)>h(x'-x)-1/2$; это — окрестность g в $\overline{P(A)}$, так как

$$g(t_g)=g((x'-x)^+)\geqslant g(x'-x)>g(x'-x)-1/2.$$

Пусть $(W_{g_1},\ldots,W_{g_n})$ — покрытие множества $\overline{P(A)}$ (которое компактно), и пусть $x''=x'-\sum_{i=1}^{n}t_g\in B$; имеем $\pi_f(x')=\pi_f(x')=$ $=\pi_f(x)$. С другой стороны, если $h\in\overline{P(A)}$, то $h\in W_{g_i}$ для некоторого индекса i, тогда

$$h(x''-x)=h(x'-x)-h(t_{g_1})-\ldots-h(t_{g_n})\leqslant$$
$$\leqslant h(x'-x)-h(t_{g_i})<1/2,$$

поэтому $x''-x\leqslant 1/2$, и доказательство завершено.

11.4.6. Лемма. *Пусть A и B удовлетворяют условиям леммы* 11.4.3, *K — замкнутый двусторонний идеал A, $x_1,\ldots$ $\ldots,x_n$ — элементы K такие, что* $0\leqslant x_i\leqslant 1$; $\varepsilon\in(0,1/4)$. *Пусть Q — множество таких $f\in\overline{P(A)}$, что $f(x_i)\geqslant 1-\varepsilon$ по крайней мере для одного i. Существует такой $y\in B\cap K$, что $0\leqslant y\leqslant 1$ и $f(y)\geqslant 1-6\varepsilon^{1/4}$ для всех $f\in Q$.*

Пусть $f\in Q$. Существует такой индекс i_f, что $f(x_{i_f})\geqslant 1-\varepsilon$, поэтому существует такой $y_f\in B\cap K$, что $0\leqslant y_f\leqslant 1$, $f(y_f)\geqslant 1-\varepsilon^{1/2}$ (11.4.5). Пусть W_f — множество таких $g\in Q$, что $g(y_f)\geqslant 1-2\varepsilon^{1/2}$; это — окрестность f в Q; пусть $(W_{f_1},\ldots,W_{f_s})$ — конечное покрытие Q. Пусть $x=y_{f_1}+\ldots+y_{f_s}$. Пусть $p:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ — функция, равная 0 в $(-\infty,0]$, 1 в $[2\varepsilon^{1/2},+\infty)$ и линейная в $[0,2\varepsilon^{1/2}]$. Пусть $y=p(x)$. Тогда $y\in B\cap K$ и $0\leqslant y\leqslant 1$. Если $f\in Q$, то имеем, например, $f\in W_{f_1}$, поэтому $f(y_{f_1})\geqslant 1-2\varepsilon^{1/2}$ и $f(y)\geqslant$ $\geqslant 1-4(2\varepsilon^{1/2})^{1/2}\geqslant 1-6\varepsilon^{1/4}$ вследствие 11.4.4 (iv).

11.4.7. Лемма. *Пусть A и B удовлетворяют условиям леммы* 11.4.3, *K — замкнутый двусторонний идеал A, $f_1,\ldots$ $\ldots,f_n$ — такие состояния A, что каждое $f_i\,|\,K$ есть состояние K; $\varepsilon>0$. Существует такой $y\in B\cap K$, что $0\leqslant y\leqslant 1$ и $f_1(y)\geqslant$ $\geqslant 1-\varepsilon,\ldots,f_n(y)\geqslant 1-\varepsilon$.*

Можно предположить, что $(\varepsilon/12)^4\in(0,1/4)$. Для $1\leqslant i\leqslant n$ существует такой $x_i\in K$, что $0\leqslant x_i\leqslant 1$ и $f_i(x_i)>1-(\varepsilon/12)^5$.

Пусть Q — множество таких $f \in \overline{P(A)}$, что $f(x_i) \geqslant 1-(\varepsilon/12)^4$ по крайней мере для одного i. Существует такой $y \in B \cap K$, что $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $f(y) \geqslant 1-\varepsilon/2$ для всех $f \in Q$ (11.4.6). Существуют выпуклые комбинации $\lambda_{i1}^{\alpha} f_{i1}^{\alpha} + \ldots + \lambda_{ip}^{\alpha} f_{ip}^{\alpha}$ чистых состояний A, которые стремятся слабо к f_i. Пусть J_α — множество тех индексов $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, для которых $f_{ij}^{\alpha}(x_i) \geqslant 1-(\varepsilon/12)^4$; пусть $\beta_\alpha = \sum_{j \in J_\alpha} \lambda_{ij}^{\alpha}$; так как

$$(\lambda_{i1}^{\alpha} f_{i1}^{\alpha} + \ldots + \lambda_{ip}^{\alpha} f_{ip}^{\alpha})(x_i) \leqslant \beta_\alpha + \left(1-\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)^4\right)(1-\beta_\alpha),$$

то для достаточно больших α имеем

$$1-\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)^5 \leqslant \beta_\alpha + \left(1-\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)^4\right)(1-\beta_\alpha),$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{12}\right)^4 \beta_\alpha \geqslant \left(\frac{\varepsilon}{12}\right)^4 - \left(\frac{\varepsilon}{12}\right)^5,$$

$$\beta_\alpha \geqslant 1-\frac{\varepsilon}{12}.$$

Но для $j \in J_\alpha$ имеем $f_{ij}^{\alpha} \in Q$, поэтому $f_{ij}^{\alpha}(y) \geqslant 1-\varepsilon/2$. Следовательно, для достаточно больших α

$$\left(\sum_j \lambda_{ij}^{\alpha} f_{ij}^{\alpha}\right)(y) \geqslant \beta_\alpha\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{12}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant 1-\varepsilon$$

и, в пределе, $f_i(y) \geqslant 1-\varepsilon$.

Библиография: [23].

11.5. Доказательство теоремы.

11.5.1. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, B — ее под-C^*-алгебра, содержащая 1, отделяющая $\overline{P(A)}$. Предположим, что $B \neq A$. Мы хотим прийти к противоречию.

Пусть M — множество непрерывных эрмитовых линейных форм на A, которые обращаются в нуль на B и имеют норму $\leqslant 1$. Вследствие теоремы Хана — Банаха $M \neq 0$. С другой стороны, M выпукло и слабо компактно; вследствие теоремы Крейна — Мильмана M имеет по крайней мере одну крайнюю точку $m \neq 0$. Ясно, что $\| m \| = 1$. Пусть I — наибольший двусторонний идеал A, содержащийся в $\operatorname{Ker} m$; этот идеал замкнут. Имеем $B + I \subset \operatorname{Ker} m$, поэтому $(B+I)/I \neq A/I$. Любое состояние A/I, являющееся слабым пределом чистых состояний A/I, определяет состояние A, являющееся слабым пределом чистых состояний A. Поэтому $(B+I)/I$ отделяет $\overline{P(A/I)}$. Покажем, что A/I — NGCR-алгебра. Пусть J — замкнутый двусторонний идеал A, содержащий I и такой, что J/I — GCR-алгебра. Вследствие 11.1.5

и 11.1.7 имеем $J/I \subset (B+I)/I$, откуда $J \subset B+I \subset \operatorname{Ker} m$; откуда $J \subset I$ по определению I; поэтому $J/I = 0$, и мы доказали, что A/I — NGCR-алгебра. Это показывает тогда, что достаточно установить теорему 11.3.1 для NGCR-C^*-алгебр. Поэтому мы присоединим к другим нашим предположениям предположение, что A — NGCR-алгебра.

Покажем, что в A/I пересечение двух ненулевых замкнутых двусторонних идеалов — ненулевое. Благодаря 11.3.3 мы получим таким образом искомое противоречие.

Пусть K, L — два замкнутых двусторонних идеала A, не содержащихся в I; покажем, что $K \cap L \not\subset I$. Существуют две положительные формы f_1, f_2 на A такие, что $f_1 - f_2 = m$, $\|f_1\| + \|f_2\| = \|m\| = 1$ (2.6.4). С другой стороны, для $i = 1, 2$ существуют две положительные формы g_i, h_i на A такие, что $f_i = g_i + h_i$, $h_i(K) = 0$, $\|g_i \mid K\| = \|g_i\|$ (2.11.7). Пусть $x \in B$; для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой $y \in B \cap K$, что $|g_i(x) - g_i(xy)| \leqslant \varepsilon$ для $i = 1, 2$ [11.4.7 и 11.4.4 (ii)]. Так как $xy \in K \cap B$, то имеем

$$|g_1(x) - g_2(x)| \leqslant |g_1(xy) - g_2(xy)| + 2\varepsilon = \\ = |f_1(xy) - f_2(xy)| + 2\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Поэтому $(g_1 - g_2)(B) = 0$ и, вследствие этого, $(h_1 - h_2)(B) = 0$. С другой стороны,

$$1 = \|m\| = \|g_1 - g_2 + h_1 - h_2\| \leqslant \|g_1 - g_2\| + \|h_1 - h_2\| \leqslant \\ \leqslant \|g_1\| + \|h_1\| + \|g_2\| + \|h_2\| = \|f_1\| + \|f_2\| = 1,$$

следовательно, если положить $\lambda = \|g_1 - g_2\|$, $\mu = \|h_1 - h_2\|$, то имеем $\lambda + \mu = 1$. Так как $K \not\subset I$, то $K \not\subset \operatorname{Ker} m$, поэтому $g_1 - g_2$ не может быть пропорционален $h_1 - h_2$ (который обращается в нуль на K). Это доказывает, прежде всего, что $\lambda \neq 0$. Если $\mu \neq 0$, то равенство

$$m = \lambda(\lambda^{-1}(g_1 - g_2)) + \mu(\mu^{-1}(h_1 - h_2))$$

противоречит тому факту, что m — крайняя точка в M. Поэтому $\mu = 0$ и $m = g_1 - g_2$. Пусть $z \in L$ таково, что $m(z) \neq 0$. Существует такой $z' \in K$, что

$$|g_1(z) - g_1(zz')| \quad \text{и} \quad |g_2(z) - g_2(zz')|$$

произвольно малы [11.4.7 и 11.4.4 (ii)]; поэтому существует такой z', что

$$m(zz') = g_1(zz') - g(zz') \neq 0.$$

Но $zz' \in K \cap L$, поэтому $K \cap L \not\subset I$.

11.5.2. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, B — под-C^*-алгебра, отделяющая $\overline{P(A)} \cup \{0\}$. Имеем $B = A$.*

Пусть $\tilde{A}=A+\mathbf{C}e$ — C^*-алгебра, получаемая из A присоединением единичного элемента e. Пусть $\tilde{B}=B+\mathbf{C}e$. Пусть $f\in\overline{P(A^\sim)}$. Тогда f — слабый предел чистых состояний f_α C^*-алгебры $\tilde{A}$. Если $f\mid A$ — ненулевая, то можно предположить, что $f_\alpha\mid A$ — ненулевые; тогда это — чистые состояния A (2.11.8), поэтому в рассматриваемом случае $f\mid A\in\overline{P(A)}$. Следовательно, во всех случаях $f\mid A\in\overline{P(A)}\cup\{0\}$. Тогда если f и g — два различных элемента $\overline{P(A^\sim)}$, то $f\mid A$ и $g\mid A$ различны и принадлежат $\overline{P(A)}\cup\{0\}$; поэтому отделяются B. Таким образом, $\tilde{B}$ отделяет $P(\tilde{A})$. Теорема 11.3.1. показывает, что $\tilde{B}=\tilde{A}$, откуда $B=A$.

11.5.3. Следствие. *Пусть T — локально компактное пространство, $\mathfrak{A}=((A(t)),\Theta)$ — непрерывное поле C^*-алгебр на T, A — C^*-алгебра, определенная $\mathfrak{A}$, B — такая под-C^*-алгебра A, что для всех $t_1\in T$, $t_2\in T$, $\xi_1\in A(t_1)$, $\xi_2\in A(t_2)$ (с $\xi_1=\xi_2$, если $t_1=t_2$) существует $x\in B$ с $x(t_1)=\xi_1$, $x(t_2)=\xi_2$. Тогда $B=A$.*

Присоединяя к T бесконечно удаленную точку, можем предполагать, что T компактно (10.2.6).

Пусть $f\in\overline{P(A)}$. Тогда f — слабый предел чистых состояний f_α на A. Вследствие 10.4.3 существуют $t_\alpha\in T$ и чистые состояния g_α на $A(t_\alpha)$ такие, что $f_\alpha(x)=g_\alpha(x(t_\alpha))$ для всех $x\in T$. Можно предположить, что t_α стремятся к точке $t\in T$. Пусть $x\in A$ таков, что $x(t)=0$; имеем $\|x(t_\alpha)\|\to\|x(t)\|=0$, поэтому $g_\alpha(x(t_\alpha))\to 0$ и $f(x)=0$. Это доказывает, что существует такая положительная форма g на $A(t)$, что $f(x)=g(x(t))$ для всех $x\in A$.

Пусть теперь f_1, f_2 — две различные точки $\overline{P(A)}\cup\{0\}$; покажем, что B отделяет f_1 и f_2 (тогда 11.5.3 будет следствием 11.5.2). Пусть t_1, $t_2\in T$ и g_i — положительная форма на $A(t_i)$ такие, что $f_i(x)=g_i(x(t_i))$ для всех $x\in A$. По крайней мере одна из форм g_1, g_2 — ненулевая, например g_1. Если $t_1=t_2$, то $g_1\neq g_2$, поэтому существует такой $\xi\in A(t_1)$, что $g_1(\xi)\neq g_2(\xi)$, однако существует такой $x\in B$, что $x(t_1)=\xi$, и тогда $f_1(x)\neq f_2(x)$. Если $t_1=t_2$, то существует такой $y\in B$, что $y(t_2)=0$, $g_1(y(t_1))\neq 0$, откуда $f_1(y)\neq f_2(y)$.

Библиография: [23], [147], [163].

11.6. Дополнения.

***11.6.1.** Пусть H — гильбертово пространство, A — под-C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)$, содержащая 1 (соотв. не содержащая 1), V — слабое замыкание множества векторных состояний A. Тогда V есть множество состояний вида $a(\omega_\xi\mid A)+bg$, где a, $b\in[0,1]$, $a+b=1$ (соотв. $\leqslant 1$), ξ — единичный вектор в H, g — такое состояние A, что $g(A\cap\mathfrak{B}\mathscr{C}(H))=0$ [23], [24].

***11.6.2.** Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, K — наибольший двусторонний GCR-идеал, B — под-C^*-алгебра A, содержащая 1; S — множество таких чистых состояний A, что $f|K$ — (чистое) состояние K; T — множество состояний, являющихся слабыми пределами чистых состояний A, равных нулю на K. Если B отделяет $S \cup T$, то $B = A$ [23].

***11.6.3.** Пусть A — алгебра фон Неймана, B — NGCR-под-C^*-алгебра A, слабо плотная в A и содержащая центр $\mathfrak{Z}$ алгебры A. Тогда $\overline{P(B)}$ есть множество состояний f на B таких, что $f|\mathfrak{Z}$ есть характер $\mathfrak{Z}$. В частности, если F — непрерывный фактор, то $\overline{P(F)} = E(F)$ [23].

***11.6.4.** Пусть A — алгебра фон Неймана, $\mathfrak{Z}$ — ее центр. Тогда $\overline{P(A)}$ есть множество $ag + (1-a)h$, где $a \in [0, 1]$, $g, \in E(A)$, $(ag + (1-a)h)|\mathfrak{Z}$ есть характер $\mathfrak{Z}$, $ag(e) = a$ для некоторого абелева проектора e в A, $(1-a)h = 0$ для всех абелевых проекторов в A [23].

***11.6.5.** Пусть A—алгебра фон Неймана, B—под-C^*-алгебра A, содержащая 1 и слабо плотная в A. Тогда $\overline{P(B)}$ есть множество ограничений на B элементов $\overline{P(A)}$ [23].

11.6.6. Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом. Следующие условия эквивалентны: (i) $\overline{P(A)} = E(A)$;

(ii) A — NGCR-алгебра и нулевой идеал в A — простой. [Имеем (ii)$\Rightarrow$(i) вследствие 11.2.4. Пусть I и J — такие ненулевые замкнутые двусторонние идеалы A, что $I \cap J = 0$. Пусть f (соотв. g) — чистое состояние A, сужение которого на I (соотв. J) — ненулевое. Тогда сужение g (соотв. f) на I (соотв. J) нулевое и $(1/2)(f+g) \notin \overline{P(A)}$.] [149].

§ 12. ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА ФОН НЕЙМАНА C^*-АЛГЕБРЫ

12.1. Второе сопряженное к C^*-алгебре.

12.1.1. Предложение. *Пусть H — гильбертово пространство, A — под-C^*-алгебра $\mathfrak{B}(H)$, B — слабое замыкание A. Предположим, что $1 \in B$ и любая непрерывная по норме линейная форма f на A является ультрасильно непрерывной и поэтому имеет единственное ультрасильно непрерывное продолжение $\tilde{f}$ на B. Тогда:*

(i) *Отображение $f \to \tilde{f}$ есть изометрический изоморфизм банахова пространства A', сопряженного к A, на преддвойственное пространство для B.*

(ii) *Для любого $y \in B$ введем $\hat{y}$ — линейную форму $f \to \tilde{f}(y)$ на A'. Тогда $y \to \hat{y}$ есть изометрический изоморфизм B на банахово пространство A'', сопряженное к A'; ограничение этого изоморфизма на A есть каноническое вложение A в A''.*

Если $f \in A'$, то f', по предположению, принадлежит преддвойственному пространству для B. Пусть A_1, B_1 — единичные шары A и B. Так как A_1 ультрасильно всюду плотно в B_1 (A13), то $\sup_{y \in B_1} |f(y)| = \sup_{y \in A_1} |f(y)|$, т. е. $\|f\| = \|\tilde{f}\|$. С другой стороны, любой элемент пространства, преддвойственного для B, есть ультрасильно непрерывное продолжение своего ограничения на A. Это доказывает (i). Из (i) и (A23) следует, что $y \to \hat{y}$ есть изометрический изоморфизм B на A''; если $y \in A$, то $\hat{y}$ есть линейная форма $f \to f(y)$ на A', т. е. канонический образ элемента A в A''.

12.1.2. Следствие. *Пусть H — гильбертово пространство, A — C^*-алгебра компактных операторов в H. Тогда:*

(i) *Любая линейная форма $f \in A'$ ультрасильно непрерывна на A, поэтому имеет единственное ультрасильно непрерывное продолжение $\tilde{f}$ на $\mathfrak{B}(H)$.*

(ii) *Отображение $f \to \tilde{f}$ есть изометрический изоморфизм A' на пространство, преддвойственное для $\mathfrak{B}(H)$.*

(iii) *Для любого $y \in \mathfrak{B}(H)$ введем линейную форму $\hat{y}: f \to \tilde{f}(y)$ на A'. Тогда $y \to \hat{y}$ — изометрический изоморфизм $\mathfrak{B}(H)$ на A'', ограничение которого на A есть каноническое вложение A в A''.*

(i) следует из 2.6.4 и 4.1.3, а (ii), (iii) становятся тогда частными случаями 12.1.1.

12.1.3. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, π — универсальное представление A (2.7.6), B — слабое замыкание $\pi(A)$, которое является алгеброй фон Неймана в H_π. Тогда:*

(i) *Любая нормальная положительная форма на B есть форма ω_ξ, где $\xi \in H_\pi$. Любая ультрасильно непрерывная линейная форма на B слабо непрерывна.*

(ii) *Для любого $f \in A'$ существует единственная слабо непрерывная линейная форма $\tilde{f}$ на B такая, что $\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$ для всех $x \in A$.*

(iii) *Отображение $f \to \tilde{f}$ является изометрическим изоморфизмом пространства A', сопряженного к A, на преддвойственное пространство для B; оно переводит множество положительных форм на A в множество нормальных положительных форм на B. Имеем $(f^*)^\sim = (\tilde{f})^*$ для любой $f \in A'$.*

(iv) *Для любого $y \in B$ введем линейную форму $\hat{y}$: $f \to \tilde{f}(y)$ на A'. Тогда $y \to \hat{y}$ есть изометрический изоморфизм B на A'', композиция которого с π есть каноническое вложение A в A''.*

(v) *Этот изоморфизм взаимно непрерывен в слабой операторной топологии на B и топологии $\sigma(A'', A')$ на A''.*

Пусть f — нормальная положительная форма на B. Тогда $f|\pi(A)$ есть положительная форма на $\pi(A)$. По построению π, существует такой $\xi \in H_\pi$, что $f(\pi(x)) = (\pi(x)\xi \mid \xi)$ для всех $x \in A$. Равенство $f(y) = \omega_\xi(y)$, справедливое для $y \in \pi(A)$, остается справедливым по непрерывности для $y \in B$. Так как любая ультрасильно непрерывная линейная форма на B есть линейная комбинация нормальных положительных форм на B (A25), то (i) доказано.

Мы только что заметили, что любая положительная форма на $\pi(A)$ слабо непрерывна. Но тогда это справедливо для любой непрерывной линейной формы на $\pi(A)$, откуда следует (ii). Вследствие 12.1.1 отображение $f \to \tilde{f}$ есть изометрический изоморфизм A' на пространство, преддвойственное для B. Мы видели, что если $f \geqslant 0$, то $\tilde{f}$ есть форма ω_ξ и поэтому нормальна и положительна, и что таким образом получаются все нормальные положительные формы на B. Если $f \in A'$, то

$$(f^*)^\sim(\pi(x)) = f^*(x) = \overline{f(x^*)} = \overline{f^\sim(\pi(x)^*)} \quad \text{для} \quad x \in A,$$

поэтому, ввиду слабой непрерывности, $(f^*)^\sim(y) = \overline{f^\sim(y^*)}$ для $y \in B$, т. е. $(f^*)^\sim = (f^\sim)^*$. Таким образом, (iii) доказано, а (iv) есть следствие 12.1.1. Вследствие (i) и (iii) слабая операторная топология на B определена линейными формами $y \to \tilde{f}(y)$, где $f \in A'$; изоморфизм $y \to \hat{y}$ переводит эту топологию в $\sigma(A'', A')$, так как $\tilde{f}(y) = \hat{y}(f)$. Отсюда следует (v).

12.1.4. Определение. *B называется обертывающей алгеброй фон Неймана для A, а π — каноническим морфизмом A в B.*

Иногда мы будем отождествлять A с $\pi(A)$ и B с A''.

12.1.5. Пара (B, π) есть решение универсальной задачи. Действительно:

Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, B — обертывающая алгебра фон Неймана для A, π: $A \to B$ — канонический морфизм. Пусть ρ — представление A. Существует единственное нормальное представление $\tilde{\rho}$ алгебры фон Неймана B в H_ρ такое, что $\tilde{\rho}(\pi(x)) = \rho(x)$ для любого $x \in A$. Образ $\tilde{\rho}(B)$ есть слабое замыкание $\rho(A)$.*

Нормальное представление ультраслабо непрерывно (A27); так как $\pi(A)$ ультраслабо плотно в B, то это доказывает единственность ρ. Для доказательства существования ρ можно предположить, что ρ допускает тотализирующий вектор, так как любое невырожденное представление A есть гильбертова сумма представлений, допускающих тотализирующие векторы (2.2.7). Но тогда существует такая положительная форма f на A, что ρ отождествляется с π_f (2.4.6); по построению π, существует замкнутое векторное подпространство K в H_π, инвариантное относительно $\pi(A)$ и такое, что ρ отождествляется с подпредставлением $x \to \pi(x) | K$. Тогда в качестве $\tilde{\rho}$ можно взять представление $y \to y | K$ алгебры фон Неймана B в K. Наконец, образ B при нормальном представлении слабо замкнут (A27), откуда следует последнее утверждение предложения.

12.1.6. Напомним, что если E — банахово пространство и E', E'', ..., обозначают его последовательные сопряженные, то каноническое вложение E в E'' имеет в качестве сопряженного оператора проектор с нормой 1 пространства E''' на E', называемый *каноническим*. Ядро этого проектора есть множество непрерывных линейных форм на E'', равных нулю на E.

Пусть тогда A — алгебра фон Неймана, A' — ее сопряженное, A'' — ее второе сопряженное пространство, отождествленное с обертывающей алгеброй фон Неймана для A. Напомним, что A можно отождествить с сопряженным P' к пространству P, преддвойственному для A, и P — замкнутое векторное подпространство в A'.

Предложение. *Пусть ρ — нормальное представление A'' на A, продолжающее тождественное отображение A* (12.1.5). *Если отождествить A и A'' с P' и P''' соответственно, то ρ становится каноническим проектором P''' на P'. Ядро этого проектора есть слабо замкнутый двусторонний идеал A''.*

Канонический проектор π пространства P''' на P' непрерывен в топологиях

$$\sigma(P''', P'') = \sigma(A'', A') \text{ и } \sigma(P', P) = \sigma(A, P).$$

Согласно 12.1.3 (i) и (v) отображение ρ непрерывно в топологиях $\sigma(A'', A')$ и $\sigma(A, P)$. Но и π, и ρ сводятся на A к тождественному отображению и A плотно в A'' в топологии $\sigma(A'', A')$, поэтому $\pi = \rho$. Ядро ρ есть двусторонний идеал в A'', который ультраслабо замкнут, и потому слабо замкнут.

12.1.7. Следствие 12.1.3 сводит задачи о непрерывных линейных формах на C^*-алгебре к задачам об ультраслабо непрерывных линейных формах на алгебре фон Неймана. Но эти последние задачи являются в некоторых отношениях более общими, так как преддвойственное пространство к алгебре фон Неймана A не всегда является сопряженным пространством к под-C^*-алгебре A.

Библиография: [35], [130], [180].

12.2. Полярное разложение линейной формы.

12.2.1. Пусть A — C^*-алгебра, A' — ее сопряженное пространство, f — элемент A', x — элемент A. Обозначим через $x \cdot f$ и $f \cdot x$ линейные формы $y \to f(xy)$, $y \to f(yx)$ на A; они являются элементами A'. Имеем

$$\|x \cdot f\| \leqslant \|x\| \cdot \|f\|, \qquad \|f \cdot x\| \leqslant \|x\| \cdot \|f\|.$$

Операторы $f \to f \cdot x$ (соотв. $f \to xf$) определяют представления алгебры A (соотв. алгебры, противоположной A) в векторном (не гильбертовом) пространстве A'. Для $x, y \in A$ и $f \in A'$ имеем

$$(x \cdot f)^* y = \overline{(x \cdot f)(y^*)} = \overline{f(xy^*)} = f^*(yx^*) = (f^* \cdot x^*)(y),$$

поэтому $(x \cdot f)^* = f^* \cdot x^*$. Если A — алгебра фон Неймана и f ультраслабо непрерывен (соотв. слабо непрерывен), то это верно и для $x \cdot f$ и $f \cdot x$.

12.2.2. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, A_1 — шар $\|x\| \leqslant 1$ в A, t — крайняя точка A_1. Тогда t^*t — идемпотент.*

Имеем $0 \leqslant t^*t \leqslant 1$, $\|t^*t\| = 1$. Пусть B — коммутативная под-C^*-алгебра A, порожденная 1 и t^*t, Ω — ее спектр (компакт), B' — алгебра непрерывных комплексных функций на Ω, φ — гельфандовский изоморфизм B на B', $f = \varphi(t^*t)$. Имеем $0 \leqslant f \leqslant 1$ и f принимает значение 1. Предположим, что существует $\omega \in \Omega$ такая, что $0 < f(\omega) < 1$. Тогда существует такая функция $g\colon \Omega \to \boldsymbol{R}$ непрерывная, $\geqslant 0$, что

$$fg \neq 0, \qquad \sup f(1+g)^2 = \sup f(1-g)^2 = 1$$

(достаточно взять носитель g в достаточно малой окрестности ω и выбрать $|g|$ достаточно малым). Поэтому существует такой $u \in B^+$, что

$$\|t^*t(1+u)^2\| = \|t^*t(1-u)^2\| = 1.$$

Тогда $t(1+u) \in A_1$, $t(1-u) \in A_1$. Так как t — крайняя точка, то равенство $t = (1/2)(t(1+u) + t(1-u))$ означает, что $t = t(1+u) = t(1-u)$, откуда $tu = 0$, $fg = 0$, что невозможно. Поэтому f принимает только значения 0 и 1, так что t^*t — проектор.

12.2.3. Лемма. *Пусть A—алгебра фон Неймана, e—проектор в A, f — элемент пространства, преддвойственного для A. Тогда*:

(i) $\|f\|^2 \geqslant \|e \cdot f\|^2 + \|(1-e)f\|^2$.

(ii) *Если* $\|f\| = \|e \cdot f\|$, *то* $f = e \cdot f$.

Утверждение (ii) следует из (i). Докажем (i). Пусть H — гильбертово пространство, в котором действует A. Пусть P — преддвойственное для A, Q — преддвойственное для $\mathfrak{B}(H)$, L — ортогональное дополнение A в Q, $\varepsilon > 0$. Так как A замкнуто в $\mathfrak{B}(H)$ в топологии $\sigma(\mathfrak{B}(H), Q)$, то A ортогонально L в $\mathfrak{B}(H)$. Поэтому A канонически отождествляется с банаховым пространством, сопряженным к Q/L. Пусть $f \in P$. Тогда f имеет продолжение $f' \in Q$ по теореме Хана — Банаха. Элемент $f' + L$

в Q/L определяет линейную форму f на A. Поэтому $\|f\|$ равно норме $f'+L$ в Q/L, т. е. $\inf\limits_{g\in f'+L}\|f\|$. Поэтому существует форма $g\in Q$, продолжающая f и такая, что $\|g\|\leqslant\|f\|+\varepsilon$ (на самом деле см. 12.5.2). Если мы докажем, что $\|g\|^2\geqslant\|e\cdot g\|^2+\|(1-e)\cdot g\|^2$, то отсюда будет следовать неравенство $(\|f\|+\varepsilon)^2\geqslant\|e\cdot f\|^2+\|(1-e)\cdot f\|^2$, откуда, ввиду произвольности ε, будет следовать (i). Таким образом, мы свели задачу к случаю $A=\mathfrak{B}(H)$. Так как слабо непрерывные линейные формы на $\mathfrak{B}(H)$ всюду плотны в Q в смысле нормы, то можно считать, что f слабо непрерывна. Поэтому существуют две ортонормированные системы в H: $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_n')$ и такие числа $\lambda_1\geqslant 0, \ldots, \lambda_n\geqslant 0$, что

$$\|f\|=\lambda_1+\ldots+\lambda_n, \quad f(x)=\sum\lambda_i(x\varepsilon_i\,|\,\varepsilon_i')$$

для любого $x\in A$ (A24). Тогда

$$(e\cdot f)(x)=\sum\lambda_i(x\varepsilon_i\,|\,e\varepsilon_i'),$$
$$((1-e)\cdot f)(x)=\sum\lambda_i(x\varepsilon_i\,|\,(1-e)\varepsilon_i'),$$

откуда

$$\|e\cdot f\|^2+\|(1-e)\cdot f\|^2\leqslant\left(\sum\lambda_i\|e\varepsilon_i'\|\right)^2+$$
$$+\left(\sum\lambda_i\|(1-e)\cdot\varepsilon_i'\|\right)^2=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\left(\|e\varepsilon_i'\|^2+\|(1-e)\varepsilon_i'\|^2\right)+$$
$$+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j\left(\|e\varepsilon_i'\|\cdot\|e\varepsilon_j'\|+\|(1-e)\varepsilon_i'\|\cdot\|(1-e)\varepsilon_j'\|\right)\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j=\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)^2=\|f\|^2.$$

12.2.4. Теорема. *Пусть A — алгебра фон Неймана, f — элемент пространства, преддвойственного для A. Тогда:*

(i) *Существует пара (p, u) со следующими свойствами:*

a) *p — нормальная положительная форма на A и $\|p\|=\|f\|$;*

b) *u — частично изометрический элемент A, конечным проектором которого является носитель p* (A26);

c) *$f=u\cdot p$, $p=u^*\cdot f$.*

(ii) *Пусть p' — нормальная положительная форма на A, u' — частично изометрический элемент A, конечный проектор которого мажорируется носителем p', и пусть $f=u'\cdot p'$, $p'=u'^*\cdot f$. Тогда $p'=p$, $u'=u$.*

Можно предположить, что $\|f\|=1$. Пусть B — шар $\|x\|\leqslant 1$ в A, B' — множество таких $x\in B$, что $f(x)=1$. Так как B ультраслабо компактен, а f ультраслабо непрерывна, то существуют такие $x\in B$, что $|f(x)|=1$. Умножая x на подходящий скаляр, видим, что $B'\neq\varnothing$; с другой стороны,

B' выпукло и ультраслабо компактно. Поэтому в B' существует крайняя точка v. Эта точка является также крайней в B, так как если $v=(1/2)(s+t)$, где $s, t \in B$, то

$$|f(s)| \leqslant 1, \quad |f(t)| \leqslant 1$$

и

$$1 = f(v) = \frac{1}{2}(f(s)+f(t)), \quad \text{откуда} \quad f(s)=f(t)=1,$$

поэтому $s, t \in B'$ и $s=t=v$, так как v — крайняя в B'. Вследствие 12.2.2 оператор v^*v есть проектор, так что v — частично изометрический.

Положим $p = v \cdot f$. Имеем $\|p\| \leqslant \|v\| \cdot \|f\| = 1$. Так как $p(1) = f(v) = 1$, то p положительна (2.1.9) с нормой 1 и p нормальна, так как p ультраслабо непрерывна. Пусть e — носитель p. Имеем $p(v^*v) = f(vv^*v) = f(v) = 1$, поэтому $v^*v \geqslant e$. Положим $u = ev^*$. Тогда $uu^* = e(v^*v)e = e$, поэтому u — частично изометрический, с конечным проектором e. Для каждого $x \in A$ имеем

$$(u^* \cdot f)(x) = f(u^* \cdot x) = f(vex) = p(ex) = p(x),$$

поэтому $p = u^* \cdot f$. Положим $u^*u = e'$. Имеем $\|e' \cdot f\| \leqslant 1$ и

$$(e' \cdot f)(u^*) = f(u^*uu^*) = f(u^*) = f(ve) = p(e) = 1,$$

откуда $\|e' \cdot f\| = 1 = \|f\|$, откуда $e' \cdot f = f$ [12.2.3 (ii)]. Тогда для любого $x \in A$

$$(u \cdot p)(x) = p(ux) = f(u^*ux) = f(e'x) = (e' \cdot f)(x) = f(x),$$

поэтому $f = u \cdot p$ и (i) доказано.

12.2.5. Для доказательства (ii) установим сначала следующее предложение:

Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра с единичным элементом, f — непрерывная линейная форма на A, p — положительная форма на A, a — такой элемент A, что $\|a\| \leqslant 1$, $ap = f$, $\|p\| = \|f\|$. Если $b \in A$ удовлетворяет соотношениям $\|b\| \leqslant 1$, $b \cdot f \geqslant 0$ и $\|b \cdot f\| = \|f\|$, то $b \cdot f = p$.*

Можно предполагать, что $\|p\| = \|f\| = 1$. Имеем

$$(\xi_p \mid \pi_p(b^*a^*)\xi_p) = (\pi_p(ab)\xi_p \mid \xi_p) = p(ab) = \\ = f(b) = (b \cdot f)(1) = \|b \cdot f\| = 1.$$

Так как $\|b^* \cdot a^*\| \leqslant 1$, то обращение неравенства Коши—Буняковского — Шварца показывает, что $\pi_p(b^*a^*)\xi_p = \xi_p$. Поэтому для любого $x \in A$

$$(b \cdot f)(x) = f(bx) = p(abx) = (\pi_p(abx)\xi_p \mid \xi_p) = \\ = (\pi_p(x)\xi_p \mid \pi_p(b^*a^*)\xi_p) = (\pi_p(x)\xi_p \mid \xi_p) = p(x),$$

откуда $b \cdot f = p$.

12.2.6. Вернемся к доказательству 12.2.4. Пусть (p', u') — пара, обладающая свойствами (ii). Имеем $\|u'^*\| \leqslant 1$, $u'^* \cdot f \geqslant 0$ и $\|p'\| = \|u'^* \cdot f\| \leqslant \|f\| = \|u' \cdot p'\| \leqslant \|p'\|$, поэтому $\|u'^* \cdot f\| = \|f\|$. Тогда 12.2.5 (примененное к $a = u$, $b = u'^*$) дает $p = u'^* \cdot f = p'$. Покажем, что $u = u'$. Пусть $x = uu'^*$. Тогда

$$p(x) = (u \cdot p)(u'^*) = f(u'^*) = (u'^* \cdot f)(1) = p(1) = 1,$$

поэтому $p(x^*) = 1$, $1 = p(x)^2 \leqslant p(xx^*) \leqslant 1$ и $p(xx^*) = 1$, и

$$p((e - x)(e - x)^*) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Но $exe = x$, так как конечные проекторы u и u' мажорируются e. Так как p — точная на eAe, то видим, что $x = e$. Пусть H — гильбертово пространство, в котором действует A, e_1 — начальный проектор u. Для $\xi \in e(H)$ имеем

$$\|u(u'^*\xi)\| = \|e\xi\| = \|\xi\|, \quad \text{поэтому} \quad \|u(u'^*\xi)\| \geqslant \|u'^*\xi\|$$

и $u'^*\xi \in e_1(H)$; так как u изометрически отображает $e_1(H)$ на $e(H)$, то из равенства $uu'^*\xi = \xi = uu^*\xi$ следует $u'^*\xi = u^*\xi$. С другой стороны, u^* и u'^* обращаются в нуль на $H \ominus e(H)$, поэтому $u'^* = u^*$ и $u' = u$.

12.2.7. Определение. *В обозначениях* 12.2.4 p *называется абсолютной величиной* f *и обозначается* $|f|$. *Равенство* $f = u \cdot |f|$ *называется полярным разложением* f.

12.2.8. Определение. *Пусть* A — C^*-*алгебра*, E — *обертывающая алгебра фон Неймана для* A, f — *непрерывная линейная форма на* A. *Полярное разложение* $f = u \cdot p$ *формы* f, *рассматриваемой как элемент пространства, преддвойственного для* E, *называется обертывающим полярным разложением* f. *Говорят, что* p, *рассматриваемое как положительная форма на* A, *есть абсолютная величина* f; p *обозначается через* $|f|$.

Если A — алгебра фон Неймана и f принадлежит пространству, преддвойственному для A, то f имеет полярное разложение и обертывающее полярное разложение, вообще говоря, различные (12.5.7). Тем не менее мы покажем, что два возможных определения $|f|$ совпадают. Пусть $f = u \cdot p$ — полярное разложение f; отождествим p с нормальной положительной формой на E [12.1.3 (ii)]. Имеем

$$u^* \in A \subset E, \quad \|u^*\| \leqslant 1, \quad \|p\| = \|f\|.$$

Равенство $p(x) = f(u^*x)$, справедливое для $x \in A$, продолжается по непрерывности для всех $x \in E$ (f отождествляется со слабо непрерывной линейной формой на E). Тогда предложение 12.2.5, примененное к E и $b = u^*$, показывает, что p есть абсолютная величина f в смысле 12.2.8.

12.2.9. Предложение. *Пусть* A — C^*-*алгебра*, f — *непрерывная линейная форма на* A, p — *положительная форма* *на A. Для того чтобы $p=|f|$, необходимо и достаточно, чтобы $\|p\|=\|f\|$ и $|f(x)|^2\leqslant\|f\|\cdot p(x^*x)$ для всех $x\in A$.*

Пусть $f=u\cdot|f|$ — обертывающее полярное разложение f. Если $p=|f|$, то $\|p\|=\|f\|$ и для каждого $x\in A$

$$|f(x)|^2=|p(ux)|^2\leqslant p(u^*u)\,p(x^*x)\leqslant\|p\|\,p(x^*x)=\|f\|\cdot p(x^*x).$$

Обратно, предположим, что $\|p\|=\|f\|$ и $|f(x)|^2\leqslant\|f\|\cdot p(x^*x)$ для всех $x\in A$. Имеем

$$|f(x)|^2\leqslant\|f\|\,(\pi_p(x^*x)\,\xi_p\,|\,\xi_p)=\|f\|\,\|\pi_p(x)\,\xi_p\|^2$$

для всех $x\in A$, поэтому и для всех x из обертывающей алгебры фон Неймана E C^*-алгебры A [π_p предполагается продолженным до нормального представления E; функция $x\to\|\pi_p(x)\,\xi_p\|$ непрерывна в ультрасильной топологии, и A ультрасильно плотно в E]. Применяя это неравенство к u^*x, видим, что

$$\|f|(x)|^2\leqslant\|f\|\cdot\|\pi_p(u^*x)\,\xi_p\|^2\leqslant\|f\|\cdot\|\pi_p(x)\,\xi_p\|^2$$

для всех $x\in E$. Поэтому существует такой вектор ξ в пространстве представления π_p, что $\|\xi\|\leqslant\|f\|^{1/2}$ и

$$|f|(x)=(\pi_p(x)\,\xi_p\,|\,\xi).$$

Тогда

$$(\xi_p\,|\,\xi)=|f|(1)=\|f\|=\|p\|^{1/2}\|f\|^{1/2}\geqslant\|\xi_p\|\cdot\|\xi\|,$$

поэтому

$$\xi=\xi_p \quad \text{и} \quad |f|(x)=(\pi_p(x)\,\xi_p\,|\,\xi_p)=p(x).$$

Библиография: [58], [112], [115], [143], [187].

12.3. Разложение эрмитовой формы на положительную и отрицательную части.

12.3.1. Предложение. *Пусть A — алгебра фон Неймана, f и f' — две нормальные положительные формы на A, e и e' — их носители, и $g=f-f'$.*

(i) *Для того чтобы $\|g\|=\|f\|+\|f'\|$, необходимо и достаточно, чтобы $ee'=0$.*

(ii) *Предположим, что это условие выполнено. Тогда $|g|=f+f'$, носитель $|g|$ есть $e+e'$; $g=(e-e')\cdot|g|$ есть полярное разложение g; $f=e\cdot g$ и $f'=-e'\cdot g$.*

Предположим, что $ee'=0$. Для того чтобы проектор d в A удовлетворял условию $(f+f')(d)=0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(d)=f'(d)=0$, т. е. чтобы $de=de'=0$. Поэтому носитель $f+f'$ есть $e+e'$. С другой стороны, $e-e'$ — эрмитов, частично изометрический, начальный и конечный проектор которого есть $e+e'$. Для каждого $x\in A$ имеем

$$((e-e')\cdot(f+f'))(x)=(f+f')(ex-e'x)=$$
$$=f(ex)-f'(e'x)=f(x)-f'(x)=g(x),$$
$$((e-e')\cdot(f-f'))(x)=(f-f')(ex-e'x)=$$
$$=f(ex)+f'(e'x)=f(x)+f'(x).$$

Это сразу доказывает [12.2.4 (ii)], что $|g|=f+f'$ и что $g=(e-e')\cdot|g|$ есть полярное разложение g. Имеем $e\cdot g=e\cdot f=f$, $e'\cdot g=-e'\cdot f=-f'$. Наконец,

$$\|g\|=\|f+f'\|=\|f\|+\|f'\|.$$

Предположим, что $\|g\|=\|f\|+\|f'\|$. Множество B таких элементов $x\in A$, что $x=x^*$, $\|x\|\leqslant 1$, ультраслабо компактно, а g ультраслабо непрерывна. Поэтому существует такой $x\in B$, что $g(x)=\|g\|$. Отсюда выводим

$$f(x^+)+f'(x^-)-f(x^-)-f'(x^+)=g(x)=\|g\|=\|f\|+\|f'\|.$$

Но

$$f(x^+)\leqslant\|f\|,\quad f'(x^-)\leqslant\|f'\|,\quad -f(x^-)-f'(x^+)\leqslant 0,$$

откуда

$$f(x^+)=\|f\|,\quad f'(x^-)=\|f'\|.$$

Пусть s, s' — носители x^+ и x^-. Имеем

$$\|f\|=f(x^+)\leqslant f(s)\leqslant\|f\|,$$

откуда $f(1-s)=0$, $s\geqslant e$; аналогично $s'\geqslant e'$. Но $ss'=0$, поэтому $ee'=0$.

12.3.2. Определение. *Если выполнены условия* 12.3.1 (i), *то f и f' называются чуждыми.*

12.3.3. Теорема. *Пусть A — алгебра фон Неймана, g — ультраслабо непрерывная эрмитова линейная форма на A. Существует единственная пара (f, f') чуждых нормальных положительных форм на A таких, что $g=f-f'$.*

Пусть P — преддвойственное пространство к A, A' — сопряженное к A, A'' — второе сопряженное, отождествленное с обертывающей алгеброй фон Неймана. Вследствие 2.6.4 существуют две положительные формы f, f' на A (отождествимые с нормальными положительными формами на A'') такие, что $g=f-f'$, $\|g\|=\|f\|+\|f'\|$. Применяя 12.3.1 к A'', видим, что $|g|=f+f'$. Но $|g|\in P$ (12.2.8), поэтому $f\in P$, $f'\in P$, так что f и f' нормальны.

Предположим, что $g = f_1 - f_1'$, где f_1, f_1' — чуждые нормальные положительные формы. Пусть e, e', e_1, e_1' — носители f, f', f_1, f_1'. Вследствие 12.3.1 (ii) имеем

$$f_1 + f_1' = |g| = f + f', \quad \text{откуда} \quad f = f_1, \quad f' = f_1'.$$

12.3.4. Следствие. *Пусть A — C^*-алгебра, g — эрмитова непрерывная линейная форма на A. Существует единственная пара (f, f') положительных форм на A таких, что $g = f - f'$, $\|g\| = \|f\| + \|f'\|$.*

Существование уже известно. Единственность следует из 12.3.3 и 12.1.3 (iii).

12.3.5. Формы f и f' в 12.3.4 называются *положительной и отрицательной частями* g и обозначаются g^+ и g^-. Имеем $|g| = g^+ + g^-$ вследствие 12.3.1.

12.3.6. Пусть A — C^*-алгебра, E — обертывающая алгебра фон Неймана для A, f — положительная форма на A. Тогда f, рассматриваемая как нормальная положительная форма на E, имеет носитель e, который является проектором из E. Он называется обертывающим носителем f. [Если A — алгебра фон Неймана и f нормальна, то f имеет носитель и обертывающий носитель, которые, вообще говоря, различны (12.5.7).] Если f и f' — две положительные формы на C^*-алгебре A, то условие $\|f - f'\| = \|f\| + \|f'\|$ равносильно условию, что обертывающие носители f и f' ортогональны [12.3.1 (i)]; тогда говорят, что f и f' — чуждые, что обобщает определение 12.3.2.

Библиография: [35], [63], [115], [130], [131], [132].

12.4. Положительная часть идеала в C^*-алгебре.

12.4.1. Предложение. *Пусть A — C^*-алгебра, $\mathcal{I}$ — множество замкнутых левых идеалов в A, $\mathcal{J}$ — множество замкнутых частей J в A^+, обладающих следующими свойствами:*

(i) $x, y \in J \Rightarrow x + y \in J$;

(ii) $x \in J$, $y \in A^+$, $y \leqslant x \Rightarrow y \in J$.

Тогда отображение $I \to I^+ = I \cap A^+$ есть биективное отображение $\mathcal{I}$ на $\mathcal{J}$.

Заметим сначала, что если $I \in \mathcal{I}$ и $x \in I^+$, то $x^{1/2} \in I^+$. Действительно, $I \cap I^*$ есть под-C^*-алгебра A и $I^+ \subset I \cap I^*$.

Заметим теперь, что если $J \subset \mathcal{J}$ и $x \in J$, то $x^{1/2} \in J$. В самом деле, существует последовательность функций f_n: $\mathrm{Sp}' x \to \boldsymbol{R}$, непрерывных, $\geqslant 0$, равномерно стремящихся к функции $t \to \sqrt{t}$ и равных нулю в некоторой окрестности 0. Кроме того, существуют такие постоянные $\lambda_n \geqslant 0$, что $f_n(t) \leqslant \lambda_n t$ на $\mathrm{Sp}' x$. Отсюда $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \lambda_n x$, $f_n(x) \in J$ и $x^{1/2} \in J$.

Прервем доказательство, чтобы установить следующее утверждение:

12.4.2. Лемма. *Будем считать, что A вложена в свою обертывающую алгебру фон Неймана E. Пусть $I \in \mathcal{I}$, EI^+ — множество произведений ax $(a \in E,\ x \in I^+)$. Тогда $I = (EI^+) \cap A$.*

Пусть $y \in I$. Имеем $y = u \cdot |y|$, где $u \in E$. Но $|y| = (y^*y)^{1/2} \in I^+$ ввиду предшествующего замечания. Поэтому $y \in EI^+$, откуда $I \subset (EI^+) \cap A$. Обратно, пусть $a \in E$, $x \in I^+$, и пусть $ax \in A$. Нужно доказать, что $ax \in I$. Но a есть точка прикосновения A в топологии $\sigma(E, A')$, поэтому ax есть точка прикосновения $Ax \subset I$ в топологии $\sigma(A, A')$. Так как I — замкнутое по норме векторное подпространство A, то I замкнуто в топологии $\sigma(A, A')$. Поэтому $ax \in I$.

12.4.3. Вернемся теперь к доказательству 12.4.1. Пусть $I \in \mathcal{I}$. Если $x, y \in I^+$, то $x + y \in I^+$. Пусть $z \in A^+$ — такой, что $z \leqslant x$. Существует такой $s \in E$, что $z^{1/2} = sx^{1/4}$ (A8); так как $x^{1/4} \in I^+$ по предыдущему замечанию, то $z = (sx^{1/4})^*(sx^{1/4}) = (x^{1/4}s^*s)x^{1/4} \in EI^+$ и $z \in I^+$ вследствие 12.4.2. Поэтому $I^+ \in \mathcal{J}$. Отображение $I \to I^+$ множества $\mathcal{I}$ в $\mathcal{J}$ инъективно вследствие 12.4.2. Покажем, что оно сюръективно. Пусть $J \in \mathcal{J}$; положим $I = (EJ) \cap A$. Очевидно, что $I^+ \supset J$. Пусть $a \in E$, $x \in J$ таковы, что $ax \in A^+$; покажем, что $ax \in J$. Имеем

$$(ax)^2 = xa^*ax \leqslant \|a\|^2 x^2 \leqslant \|a\|^2 \|x\| x,$$

поэтому $(ax)^2 \in J$ и $ax \in J$ по предыдущему замечанию. Таким образом, $I^+ = J$. Покажем, что I — левый идеал в A. Ясно, что $AI \subset I$. Пусть $x, y \in I$. Тогда x^*x, $y^*y \in I^+ = J$, поэтому $x^*x + y^*y \in J$; так как

$$(x + y)^*(x + y) \leqslant 2(x^*x + y^*y),$$

то отсюда получаем, что

$$|x + y|^2 = (x + y)^*(x + y) \in J \quad \text{и} \quad |x + y| \in J$$

по предыдущему замечанию; но $x + y = u|x + y|$, где $u \in E$, поэтому $x + y \in (EJ) \cap A = I$. Наконец, покажем, что I замкнуто. Если (x_n) — последовательность точек I, стремящаяся к $x \in A$, то $x_n^*x_n \in I^+ = J$ стремится к x^*x, откуда $|x|^2 = x^*x \in J$, $|x| \in J$ и $x \in (EJ) \cap A = I$.

12.4.4. Предложение 12.4.1 остается справедливым, если заменить левые идеалы правыми идеалами. Кроме того, если I — левый идеал A, то I^* — правый идеал и $I^+ = (I^*)^+$.

Библиография: [187].

12.5. Дополнения.

12.5.1. Пусть A — C^*-алгебра. Пусть (f_α) — сеть в пространстве A', сопряженном к A, слабо сходящаяся к f. Если $\|f_\alpha\| \to \|f\|$, то $|f_\alpha|$ слабо сходятся к $|f|$ [187].

12.5.2. Пусть H — гильбертово пространство, A — алгебра фон Неймана в H, f—ультраслабо непрерывная линейная форма на A. Существует ультраслабо непрерывная линейная форма g на $\mathfrak{B}(H)$, продолжающая f и такая, что $\|f\| = \|g\|$. [Если $f \geqslant 0$, то существуют такие $\xi_i \in H$, что $\Sigma \|\xi_i\|^2 < +\infty$ и $f(x) = \Sigma(x\xi_i \mid \xi_i)$ для всех $x \in A$. Положим $g(x) = \Sigma(x\xi_i \mid \xi_i)$ для всех $x \in \mathfrak{B}(H)$; отсюда $\|g\| = g(1) = f(1) = \|f\|$. В общем случае использовать полярное разложение f.] [112], [115].

12.5.3. Пусть A — C^*-алгебра, E — обертывающая алгебра фон Неймана для A, f и g—два чистых состояния A. Для того чтобы $\pi_f \simeq \pi_g$, необходимо и достаточно, чтобы носители f и g, рассматриваемых как нормальные положительные формы на E, были эквивалентны относительно E [148].

***12.5.4.** Пусть A—C^*-алгебра. Для того чтобы сопряженное к A пространство было сепарабельно в смысле нормы, необходимо и достаточно, чтобы A допускала счетный композиционный ряд (I_ρ) такой, что все фактор-алгебры $I_{\rho+1}/I_\rho$ — сепарабельные дуальные C^*-алгебры [148]. [См. также Math. Reviews (1963), стр. 808.]

12.5.5. Фактор, рассматриваемый как банахово пространство, тогда и только тогда является вторым сопряженным к C^*-алгебре, когда он типа I [35], [132].

12.5.6. Пусть A — алгебра фон Неймана, A'' — ее обертывающая алгебра фон Неймана, P — пространство, преддвойственное для A, f — элемент P, отождествленный с линейной формой на A''. Если $x \in A''$, то $x \cdot f \in P$ и $f \cdot x \in P$. [Пусть ρ — канонический проектор A'' на A; если $y \in A$, то, как как f обращается в нуль на $\operatorname{Ker} \rho$, имеем

$$f(xy) = f(\rho(xy)) = f(\rho(x)\, y),$$

поэтому $x \cdot f = \rho(x) \cdot f \in P$.] (Гротендик, не опубликовано.)

12.5.7. Пусть H — гильбертово пространство, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ — ортонормированный базис в H, A — алгебра фон Неймана в H, порожденная $P_i = P_{C\varepsilon_i}$, f — положительная линейная форма $\sum \lambda_i P_i \to \sum i^{-2}\lambda_i$. Эта форма нормальна, с носителем 1. Пусть g—положительная линейная форма $\sum \lambda_i P_i \to \lim \lambda_i$ (обобщенный банахов предел). Рассмотрим f и g как нормальные положительные формы на обертывающей алгебре фон Неймана E для A. Пусть $Q_n = P_n + P_{n+1} + \ldots \in A \subset E$. Q_n имеют сильный предел Q в E, который является проектором в E; имеем $g(Q_n) = 1$ для всех n, поэтому $g(Q) = 1$ и $Q \neq 0$. С другой стороны, $f(Q_n) \to 0$, поэтому $f(Q)=0$. Таким образом, носитель f относительно E не равен 1.

Итак, полярное разложение f отличается от его обертывающего полярного разложения.

12.5.8. Пусть A—алгебра фон Неймана, f и f'—две чуждые нормальные положительные формы на A и $g=f-f'$. Имеем

$$\|f\|=\sup_{x\in A^+,\ \|x\|\leqslant 1} g(x), \quad \|f'\|=\sup_{x\in A^+,\ \|x\|\leqslant 1} (-g(x)).$$

[Если $x \in A^+$ и $\|x\|\leqslant 1$, то $g(x)\leqslant f(x)\leqslant\|f\|$; обозначая через e носитель f, имеем, с другой стороны, $g(e)=f(e)=\|f\|$.]

12.5.9. Пусть A — алгебра фон Неймана. Пусть E—множество слабо замкнутых левых идеалов A. Пусть E' — множество слабо замкнутых частей P в A^+ таких, что:

1° $x,\ y\in P \Rightarrow x+y\in P$;

2° $x\in P$ и $\lambda\geqslant 0 \Rightarrow \lambda x\in P$;

3° $x\in P,\ y\in A^+$ и $y\leqslant x \Rightarrow y\in P$.

Тогда $L\to L\cap A^+$ есть биекция E на E' [187].

12.5.10. Пусть A—C^*-алгебра. Пусть E—множество замкнутых двусторонних идеалов A. Пусть E' — множество таких замкнутых частей P в A^+, что:

1° $x,\ y\in P\Rightarrow x+y\in P$;

2° $x\in P$ и $\lambda\geqslant 0\Rightarrow \lambda x\in P$;

3° $x\in P$ и $y\in A\Rightarrow y^*xy\in P$.

Тогда $I\to I\cap A^+$ есть биекция E на E' [187].

12.5.11. Пусть A—C^*-алгебра, B—ее обертывающая алгебра фон Неймана, $\pi\colon A\to B$ — канонический морфизм. Определим так же A_1, B_1, π_1. Пусть $\varphi\colon A\to A_1$ — морфизм. Тогда существует единственный нормальный морфизм $\psi\colon B\to B_1$ такой, что $\pi_1\circ\varphi=\psi\circ\pi$. Если отождествить B и B_1 с A'' и A_1'', то ψ — второй сопряженный к φ.

ПРИМЕНЕНИЯ К ПРЕДСТАВЛЕНИЯМ ГРУПП

§ 13. УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП

13.1. Элементарные определения, связанные с представлениями.

13.1.1. Определение. *Пусть G — топологическая группа, H — гильбертово пространство. Непрерывным унитарным представлением G в H называется морфизм группы G в унитарную группу H, непрерывный в сильной топологии.*

Иначе говоря, непрерывное унитарное представление G в H есть такое отображение π группы G в унитарную группу H, что $\pi(st) = \pi(s)\pi(t)$, и для любого $\xi \in H$ отображение $s \to \pi(s)\xi$ группы G в H непрерывно (в сильной топологии H). Из условия $\pi(st) = \pi(s)\pi(t)$ следует, что $\pi(e) = 1$ (e всегда обозначает нейтральный элемент изучаемой группы) и $\pi(s^{-1}) = \pi(s)^{-1} = \pi(s)^*$.

Функции $s \to \varphi_{\xi, \eta}(s) = (\pi(s)\xi \mid \eta)$ на G (ξ, η — фиксированные элементы H) называются *коэффициентами* π.

Имеем $\varphi_{\xi, \eta}(s) = \overline{\varphi_{\eta, \xi}(s^{-1})}$.

13.1.2. На унитарной группе H сильная и слабая топологии совпадают. Поэтому в предыдущем определении можно всюду заменить сильную топологию слабой. Но если потребовать непрерывности в топологии, определяемой нормой, мы получим гораздо более ограничительное определение, мало полезное для дальнейшего изложения. (Разумеется, если $\dim H < +\infty$, то все эти понятия непрерывности совпадают.)

13.1.3. Гильбертова размерность H называется *размерностью* π и обозначается $\dim \pi$. Пространство H называется пространством π и обозначается H_π.

По аналогии со случаем инволютивных алгебр без затруднений вводятся также следующие понятия: эквивалентные представления, классы представлений, сплетающий оператор, число сплетения, гильбертова сумма представлений, кратное представления; представление, содержащееся в некотором представлении; тотализирующий вектор [ξ называется *тотализирующим* для π, если $\pi(G)\xi$ тотально в H_π]. При этом используются те же обозначения, что в случае алгебр, и все эти объекты имеют те же элементарные свойства; мы предоставляем читателю удостовериться в этом.

У нас нет оснований определять существенное подпространство представления. Все происходит так, как будто непрерывные унитарные представления автоматически невырождены.

13.1.4. Пусть π — непрерывное унитарное представление G. Следующие условия эквивалентны:

(i) единственные замкнутые векторные подпространства H, инвариантные относительно $\pi(G)$, суть 0 и H;

(ii) коммутант $\pi(G)$ в $\mathfrak{B}(H_\pi)$ сводится к скалярам;

(iii) любой ненулевой вектор в H_π является тотализирующим для π.

Если эти условия выполнены и, кроме того, $H_\pi \neq 0$, то говорят, что π *топологически неприводимо*, или просто *неприводимо*. (Мы никогда не будем рассматривать понятие алгебраической неприводимости, за исключением случая, когда $\dim \pi < \infty$, в котором оно эквивалентно топологической неприводимости.) Обозначим через $\hat{G}$ множество классов (эквивалентности) неприводимых представлений G.

Точно так же, как в § 5, определяются дизъюнктные представления, фактор-представления, квазиэквивалентные представления, представления типов I, II, ..., без кратности, кратности n. Все рассуждения и результаты § 5 немедленно распространяются на представления групп. [Можно также использовать соответствие между представлениями G и представлениями $L^1(G)$, которое будет установлено в 13.3, по крайней мере в случае, если G локально компактна.]

13.1.5. Введем теперь операции над представлениями групп, не имеющие смысла для представлений инволютивных алгебр.

Пусть π, π'—непрерывные унитарные представления G. Для любого $s \in G$ построим в гильбертовом тензорном произведении $H_\pi \otimes H_{\pi'}$ оператор $\pi(s) \otimes \pi'(s)$; он унитарен. Очевидно, что $s \to \pi(s) \otimes \pi'(s)$ есть непрерывное унитарное представление G в $H_\pi \otimes H_{\pi'}$, называемое *тензорным произведением* π и π' и обозначаемое $\pi \otimes \pi'$.

Пусть π — непрерывное унитарное представление G в H, $\overline{H}$ — гильбертово пространство, комплексно сопряженное H [1]). Любой $\pi(s)$ есть унитарный оператор в $\overline{H}$ и очевидно, что $s \to \pi(s)$ есть также непрерывное унитарное представление G в $\overline{H}$, называемое *представлением, сопряженным* π, и обозначаемое $\bar{\pi}$.

---

[1]) Пространство $\overline{H}$ совпадает с H как вещественное линейное пространство, а операция умножения на i в $\overline{H}$ совпадает с операцией умножения на $-i$ в H.

13.1.6. Пусть G — локально компактная группа, снабженная левой мерой Хаара ds. Для любого $x \in G$ введем $\lambda(s)$ — оператор в $L^2(G)$, определенный равенством

$$(\lambda(s) f)(x) = f(s^{-1}x) \qquad (f \in L^2(G),\ x \in G).$$

Непосредственно проверяется, что λ — непрерывное унитарное представление G в $L^2(G)$; оно называется *левым регулярным представлением*.

Пусть Δ: $G \to \boldsymbol{R}$ — модуль G. Для любого $x \in G$ введем $\rho(s)$ — оператор в $L^2(G)$, определенный равенством

$$(\rho(s) f(x) = (\mu(s))^{1/2} f(xs) \qquad (f \in L^2(G),\ x \in G).$$

Непосредственно проверяется, что ρ — непрерывное унитарное представление G в $L^2(G)$; оно называется *правым регулярным представлением*.

Представления λ и ρ инъективны.

Для любой $f \in L^2(G)$ определим $f' \in L^2(G)$ равенством $f'(x) = \Delta(x)^{-1/2} f(x^{-1})$. Тогда $f \to f'$ есть изоморфизм гильбертова пространства $L^2(G)$ на себя, и для любого $s \in G$ имеем

$$(\lambda(s) f)'(x) = \Delta(x)^{-1/2} f(s^{-1}x^{-1}) = \\ = \Delta(s)^{1/2} \Delta(xs)^{-1/2} f\left((xs)^{-1}\right) = (\rho(s) f')(x).$$

Следовательно, изоморфизм $f \to f'$ переводит λ в ρ, так что $\lambda \simeq \rho$. Поэтому иногда говорят о регулярном представлении G без уточнений.

Для любой $f \in L^2(G)$ введем $\bar{f} \in L^2(G)$ — комплексно сопряженную функцию. Тогда $f \to \bar{f}$ — изоморфизм гильбертова пространства $L^2(G)$ на комплексно сопряженное гильбертово пространство, переводящий λ в $\bar{\lambda}$. Поэтому $\lambda \simeq \bar{\lambda}$ и точно так же $\rho \simeq \bar{\rho}$.

13.1.7. Пусть a — кардинальное число, H — гильбертово пространство гильбертовой размерности a. Представление $s \to 1$ группы G в H называется *тривиальным представлением G в H*, или *тривиальным представлением размерности a*. Оно обозначается 1_H или просто 1, если H известно.

13.1.8. Предложение. *Пусть G_1, G_2 — топологические группы, $G = G_1 \times G_2$, σ — неприводимое непрерывное унитарное представление G. Предположим, что любое непрерывное унитарное фактор-представление G_1 имеет тип* I. *Тогда существуют такие неприводимые непрерывные унитарные представления σ_i групп G_i $(i = 1, 2)$, что σ эквивалентно представлению*

$$(s_1, s_2) \to \sigma_1(s_1) \otimes \sigma_2(s_2)$$

в гильбертовом пространстве $H_{\sigma_1} \otimes H_{\sigma_2}$.

Пусть $\mathfrak{A}_i$—алгебра фон Неймана, порожденная $\sigma(G_i)$. Тогда $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ перестановочны и порождают алгебру фон Неймана $\mathfrak{B}(H_\sigma)$. Любой элемент центра $\mathfrak{A}_1$ перестановочен с $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, поэтому с $\mathfrak{B}(H_\sigma)$; следовательно, скалярен. Итак, $\mathfrak{A}_1$ — фактор типа I, по предположению относительно G_1. Тогда существуют такие гильбертовы пространства H_1 и H_2, что H_σ можно отождествить с $H_1 \otimes H_2$, а $\mathfrak{A}_1$ — с $\mathfrak{B}(H_1) \otimes \boldsymbol{C}$ (A36). Для любого $s_1 \in G_1$ оператор $\sigma(s_1)$ представим в виде $\sigma_1(s_1) \otimes 1$, где $\sigma_1(s_1)$ — унитарный оператор в H_1 и σ_1 — непрерывное унитарное представление G_1 в H_1. Операторы $\sigma_1(s_1)$ порождают алгебру фон Неймана $\mathfrak{B}(H_1)$, поэтому σ_1 неприводимо. Имеем $\mathfrak{A}_2 \subset \boldsymbol{C} \otimes \mathfrak{B}(H_2)$ (A18), поэтому для любого $s_1 \in G_2$ оператор $\sigma(s_2)$ представим в виде $1 \otimes \sigma_2(s_2)$, где σ_2 — непрерывное унитарное представление G_2 в H_2. Если $T \in \mathfrak{B}(H_2)$ перестановочен с $\sigma_2(s_2)$, то $I \otimes T$ перестановочен с $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, поэтому скалярен; таким образом, T скалярен и σ_2 неприводимо.

Библиография: [10], [81].

13.2. Инволютивная алгебра $L^1(G)$.

13.2.1. Пусть G — локально компактная группа, $M^1(G)$—алгебра (относительно свертки) ограниченных комплексных мер на G. Это — банахова алгебра, имеющая единичный элемент — меру Дирака ε_e в точке e. Если для любой $\mu \in M^1(G)$ определить μ^* равенством $d\mu^*(s) = \overline{d\mu(s^{-1})}$, то легко проверить, что $M^1(G)$ становится инволютивной алгеброй и $\|\mu^*\| = \|\mu\|$. Поэтому $M^1(G)$ — инволютивная банахова алгебра.

13.2.2. Выберем раз навсегда левую меру Хаара ds на G. Если с любой $f \in L^1(G)$ связать меру $d\mu(s) = f(s)\,ds \in M^1(G)$, то получим изометрический морфизм Φ банаховой алгебры $L^1(G)$ в банахову алгебру $M^1(G)$. Для $g \in \mathcal{K}(G)$ ($\mathcal{K}(G)$ — множество непрерывных комплексных функций на G с компактным носителем), обозначая Δ модуль G, получаем

$$\int g(s)\,d\mu^*(s) = \overline{\int \bar{g}(s^{-1})\,d\mu(s)} = \int g(s^{-1})\overline{f(s)}\,ds =$$
$$= \int g(s)\bar{f}(s^{-1})\Delta(s^{-1})\,ds.$$

Для любой комплексной функции f на G определим f^* равенством

$$f^*(s) = \bar{f}(s^{-1})\Delta(s^{-1}).$$

Тогда предыдущее показывает, что $d\mu^*(s) = f^*(s)\,ds$. Поэтому $f \to f^*$ есть изометрическая инволюция на $L^1(G)$ и Φ—морфизм инволютивной алгебры $L^1(G)$ в инволютивную алгебру $M^1(G)$. Отождествим $L^1(G)$ с $\Phi(L^1(G))$. Вообще говоря, $L^1(G)$ не является C^*-алгеброй.

13.2.3. Для любой комплексной функции f на G определим $\check{f}$ и $\tilde{f}$ равенствами $\check{f}(s)=f(s^{-1})$, $\tilde{f}(s)=\bar{f}(s^{-1})$. Тогда $f^*=\tilde{f}\Delta^{-1}$. Для $a\in G$ положим

$$_af(s)=f(as), \qquad f_a(s)=f(sa).$$

Имеем (обозначая через ε_a меру Дирака в точке a)

$$\varepsilon_a*f={}_{a^{-1}}f, \qquad f*\varepsilon_a=\Delta(a^{-1})f_{a^{-1}}.$$

Тогда формула $(\varepsilon_a*f)^*=f^**\varepsilon_a^*=f^**\varepsilon_{a^{-1}}$ показывает, что

$$({}_{a^{-1}}f)^*=\Delta(a)(f^*)_a.$$

13.2.4. Если G дискретна, то $L^1(G)$ имеет единичный элемент. Если G сепарабельна, то $L^1(G)$ сепарабельна.

13.2.5. Пусть $s\in G$. Пусть I — множество окрестностей s, упорядоченное с помощью отношения порядка, противоположного отношению включения. Для любой $i\in I$ введем u_i — положительную функцию в $L^1(G)$, равную нулю в $G-i$, с интегралом, равным 1. Для любой $f\in L^1(G)$ имеем

$$\|u_i*f-\varepsilon_s*f\|_1\to 0, \qquad \|f*u_i-f*\varepsilon_s\|_1\to 0$$

[достаточно проверить это для $f\in\mathscr{K}(G)$, а тогда утверждение сразу следует из равномерной непрерывности.] Применяя это к $s=e$, видим, что $L^1(G)$ допускает аппроксимативную единицу.

Библиография: [10], [78].

13.3. Представления G и представления $L^1(G)$.

13.3.1. Предложение. *Пусть π — непрерывное унитарное представление G. Для любой $\mu\in M^1(G)$ положим $\pi(\mu)=\int\pi(s)\,d\mu(s)\in\mathfrak{B}(H_\pi)$. Тогда $\mu\to\pi(\mu)$ есть представление инволютивной алгебры $M^1(G)$ в H_π, сужение которого на $L^1(G)$ невырождено.*

То, что $\mu\to\pi(\mu)$ есть представление инволютивной алгебры $M^1(G)$, следует из простых вычислений; например, для $\mu\in M^1(G)$, $\xi\in H_\pi$, $\eta\in H_\pi$ имеем

$$(\eta|\,\pi(\mu^*)\xi)=\overline{(\pi(\mu^*)\xi\,|\eta)}=\int\overline{(\pi(s^{-1})\xi|\,\eta)}\,d\mu(s)=$$

$$=\int(\pi(s)\eta|\,\xi)\,d\mu(s)=(\pi(\mu)\eta|\,\xi)=(\eta|\,\pi(\mu)^*\xi),$$

откуда $\pi(\mu^*)=\pi(\mu)^*$. С другой стороны, пусть $s\in G$, $\xi\in H_\pi$ и $\varepsilon>0$. В обозначениях 13.2.5 существует $i\in I$ такая, что $\|\pi(s')\xi-\pi(s)\xi\|\leqslant\varepsilon$ при $s'\in i$, откуда $\|\pi(u_i)\xi-\pi(s)\xi\|\leqslant\varepsilon$. Поэтому

$$\pi(u_i)\to\pi(s) \tag{1}$$

в сильной операторной топологии. Применяя это к $s=e$, видим, что представление π инволютивной алгебры $L^1(G)$ невырождено.

13.3.2. Говорят, что полученные представления $M^1(G)$ и $L^1(G)$ *связаны* с данным представлением G.

13.3.3. Для $s \in G$ имеем $\pi(\varepsilon_s)=\pi(s)$. Поэтому если $f \in L^1(G)$, то

$$\pi({}_af)=\pi(\varepsilon_{a^{-1}} * f)=\pi(a^{-1})\pi(f),$$

$$\pi(f_a)=\pi(\Delta(a^{-1})f * \varepsilon_{a^{-1}})=\Delta(a^{-1})\pi(f)\pi(a^{-1}).$$

13.3.4. Предложение. *Пусть H — гильбертово пространство, π — невырожденное представление инволютивной алгебры $L^1(G)$ в H. Тогда π связано с едиственным непрерывным унитарным представлением G.*

Единственность следует из формулы (1) в 13.3.1. Докажем существование. Пусть H' — векторное подпространство H, порожденное $\pi(f)(H)$. По предположению, H' всюду плотно в H. Пусть $s \in G$. В обозначениях 13.2.5 имеем

$$\|u_i * f-\varepsilon_s * f\| \to 0, \quad \text{поэтому} \quad \|\pi(u_i)\pi(f)-\pi(\varepsilon_s * f)\| \to 0.$$

Таким образом, $\pi(u_i)$ сходятся в топологии простой сходимости в H' к оператору $\pi(s)$ в H' такому, что

$$\pi(s)\pi(f)=\pi(\varepsilon_s * f).$$

Так как $\|\pi(u_i)\| \leqslant \|u_i\|=1$, то $\pi(s)$ однозначно продолжается до непрерывного линейного оператора в H, который мы снова обозначим $\pi(s)$, такого, что $\|\pi(s)\| \leqslant 1$. Для $s, t \in G$ и $f \in L^1(G)$ имеем, согласно (1),

$$\pi(st)\pi(f)=\pi(\varepsilon_{st} * f)=\pi(\varepsilon_s * \varepsilon_t * f)=\pi(s)\pi(\varepsilon_t * f)=\pi(s)\pi(t)\pi(f),$$

поэтому $\pi(st)=\pi(s)\pi(t)$ на H', а тогда и на H. Равенство (1) показывает, что $\pi(e)=1$ и $\pi(s)\xi$ непрерывно зависит от s при $\xi \in H'$, а тогда и при $\xi \in H$. Наконец, так как $\pi(s)$ и $\pi(s^{-1})=\pi(s)^{-1}$ не увеличивают нормы векторов, то $\pi(s)$ унитарен, что доказывает, что π является непрерывным унитарным представлением G.

Покажем теперь, что связанное с ним представление $L^1(G)$ есть исходное представление. Пусть $f, g \in L^1(G)$; так как

$$f * g=\int f(s)(\varepsilon_s * g)\,ds$$

в $L^1(G)$, то

$$\pi(f)\pi(g)=\pi(f * g)=\int f(s)\pi(\varepsilon_s * g)\,ds=$$

$$=\int f(s)\pi(s)\pi(g)\,ds=\left(\int f(s)\pi(s)\,ds\right)\pi(g),$$

поэтому $\pi(f)=\int f(s)\pi(s)\,ds$.

13.3.5. Предложения 13.3.1 и 13.3.4 устанавливают биективное соответствие между непрерывными унитарными представлениями G и невырожденными представлениями $L^1(G)$. Пусть π — непрерывное унитарное представление G, π' — связанное с ним представление $L^1(G)$. Замкнутые векторные подпространства, инвариантные относительно $\pi(G)$ и $\pi'(L^1(G))$, — одни и те же; тотализирующие векторы для $\pi(G)$ и $\pi'(L^1(G))$ — одни и те же [ввиду формулы (1) в 13.3.1]. Поэтому $\pi(G)$ и $\pi'(L^1(G))$ имеют один и тот же коммутант и порождают одну и ту же алгебру фон Неймана. В частности, топологическая неприводимость π' эквивалентна топологической неприводимости π. Таким образом устанавливается биективное соответствие между неприводимыми непрерывными унитарными представлениями G и топологически неприводимыми представлениями $L^1(G)$. Аналогично, представление π является фактор-представлением, типа I и т. д. тогда и только тогда, когда π' есть факторпредставление, типа I и т. д. Если π_1, π_2 — непрерывные унитарные представления G, π_1', π_2' — связанные с ними представления $L^1(G)$, то операторы, сплетающие π_1 и π_2, суть операторы, сплетающие π_1' и π_2'; имеем $\pi_1' \oplus \pi_2' = (\pi_1 \oplus \pi_2)'$ и т. д. В связи с этим мы будем в дальнейшем обозначать одной и той же буквой непрерывное унитарное представление G и связанное с ним представление $L^1(G)$.

13.3.6. Пусть λ — левое регулярное представление G в $L^2(G)$. Если $f \in L^1(G)$, то $\lambda(f)$ есть оператор $g \to f * g$ в $L^2(G)$. Это представление λ инволютивной алгебры $L^1(G)$ называется левым регулярным представлением $L^1(G)$ в $L^2(G)$. Если $\lambda(f) = 0$, то $f * g = 0$ для любого $g \in \mathcal{K}(G)$ и $f = 0$ вследствие 13.2.5. Поэтому левое регулярное представление $L^1(G)$ в $L^2(G)$ инъективно.

Если G коммутативна и $\widehat{G}$ обозначает группу характеров G, то изоморфизм Планшереля $L^2(G)$ на $L^2(\widehat{G})$ переводит $\lambda(f)$ в оператор умножения на $\mathcal{F}f$ (преобразование Фурье функции f) в $L^2(\widehat{G})$. Поэтому имеем

$$\|\lambda(f)\| = \sup_{t \in \widehat{G}} |(\mathcal{F}f)(t)|.$$

Вообще говоря, $\int |f(s)|\,ds \neq \sup|\mathcal{F}f|$, поэтому λ не изометрично (так что $L^1(G)$ — не C^*-алгебра).

Библиография: [10], [78].

13.4. Положительные формы на $L(G)$ и функции положительного типа.

13.4.1. Пункт 13.3 приводит нас к изучению представлений $L^1(G)$, или, что то же самое (2.4), непрерывных положительных форм на $L^1(G)$. Но непрерывная линейная форма на $L^1(G)$ определяется элементом $L^\infty(G)$. Это заставляет нас ввести некоторый класс ограниченных функций на G.

Определение. *Непрерывная комплексная функция* φ *на* G *называется функцией положительного типа, если для любых* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *в* G *матрица* $\left(\varphi\left(s_i^{-1}s_j\right)\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ *положительно определена.*

Иначе говоря, каковы бы ни были $s_1, \ldots, s_n \in G$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \boldsymbol{C}$, имеем

$$\sum_{i, j=1}^{n} \alpha_i \bar{\alpha}_j \varphi\left(s_i^{-1}s_j\right) \geqslant 0. \tag{1}$$

13.4.2. Сумма двух непрерывных функций положительного типа есть функция положительного типа. Если φ — непрерывная функция положительного типа и $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda\varphi$ — положительного типа. Примеры непрерывных функций положительного типа см. в 13.6.3.

13.4.3. Положим в (1) $n=2$, $s_1=e$, $s_2=s \in G$. Матрица

$$\begin{pmatrix} \varphi(e) & \varphi(s) \\ \varphi(s^{-1}) & \varphi(e) \end{pmatrix}$$

должна быть положительно определенной. Отсюда следует, что

$$\varphi(s^{-1}) = \overline{\varphi(s)},$$
$$|\varphi(s)| \leqslant \varphi(e)$$

для любого $s \in G$. В частности, φ ограничена и $\|\varphi\|_\infty = \varphi(e)$.

13.4.4. Предложение. *Пусть* φ — *непрерывная комплексная функция на* G. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) φ — *положительного типа;*

(ii) φ *ограничена, и для любой ограниченной комплексной меры* μ *на* G *имеем* $\langle\varphi, \mu^* * \mu\rangle \geqslant 0$, *т. е.*

$$\int\int \varphi(y^{-1}z)\overline{d\mu(y)}\,d\mu(z) \geqslant 0;$$

(iii) *для любой* $f \in \mathcal{K}(G)$ *имеем* $\langle\varphi, f^* * f\rangle \geqslant 0$, *т. е.*

$$\int\int \varphi(y^{-1}z)\overline{f(y)}f(z)\,dy\,dz \geqslant 0.$$

(ii)$\Rightarrow$(i). Пусть выполнено условие (ii). Пусть $s_1, \ldots, s_n \in G$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \boldsymbol{C}$, μ — мера на G, определенная массами α_i в точках s_i. Имеем

$$0 \leqslant \int\int \varphi(y^{-1}z)\overline{d\mu(y)}\,d\mu(z) = \sum_{i, j=1}^{n} \bar{\alpha}_i \alpha_j \varphi\left(s_i^{-1}s_j\right),$$

поэтому φ — положительного типа.

(i)$\Rightarrow$(iii). Пусть φ — положительного типа. Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$. Функция $(y, z) \to \varphi(y^{-1}z)\overline{f(y)}f(z)$ на $G \times G$ непрерывна и ее носитель S компактен; S содержится в множестве $K \times K$ (K — компактная часть G). Мера, индуцированная на K мерой Хаара, является широким пределом положительных мер ν_i с конечным носителем и ограниченными нормами; поэтому мера, индуцированная на $K \times K$ мерой Хаара на $G \times G$, есть широкий предел мер $\nu_i \otimes \nu_i$. Но если ν_i определена массами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ в точках $s_1, \ldots, s_n$, то

$$\int\int \varphi(y^{-1}z)\bar{f}(y)f(z)\,d\nu_i(y)\,d\nu_i(z) = \sum_{i,j} \varphi(s_i^{-1}s_j)\bar{f}(s_i)f(s_j)\beta_i\beta_j \geqslant 0$$

и в пределе $\int\int \varphi(y^{-1}z)\bar{f}(y)f(z)\,dy\,dz \geqslant 0$.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Пусть выполнено условие (iii). Пусть μ — комплексная мера с компактным носителем на G. Для любой $f \in \mathscr{K}(G)$ свертка $\mu * f$ есть элемент $\mathscr{K}(G)$, поэтому

$$0 \leqslant \langle \varphi, f^* * \mu^* * \mu * f \rangle = \int\int\int\int \varphi(xyzt)f^*(x)f(t)\,dx\,dt\,d\mu^*(y)\,d\mu(z) =$$

$$= \int\int d\mu^*(y)\,d\mu(z) \int\int \varphi(xyzt)f^*(x)f(t)\,dx\,dt.$$

Полагая $f \geqslant 0$, с интегралом 1, с носителем во все меньших окрестностях e, получаем, что $\int\int \varphi(xyzt)f^*(x)f(t)\,dx\,dt$ стремится к $\varphi(yz)$ равномерно на любой компактной части $G \times G$. Поэтому в пределе получаем $\langle \varphi, \mu^* * \mu \rangle \geqslant 0$. Рассуждая, как в (ii)$\Rightarrow$(i), получаем, что φ — положительного типа, поэтому ограничена. Пусть теперь μ — какая-нибудь ограниченная мера на G. Тогда μ — предел по норме мер ν с компактными носителями. Так как φ ограничена, то $\langle \varphi, \mu^* * \mu \rangle$ есть предел чисел $\langle \varphi, \nu^* * \nu \rangle$, поэтому $\geqslant 0$ по предыдущему.

13.4.5. Теорема. (i) *Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$, ω — непрерывная линейная форма на $L^1(G)$, определенная φ. Для того чтобы ω была положительна, необходимо и достаточно, чтобы φ была локально почти всюду равна некоторой непрерывной функции положительного типа.*

(ii) *Для того чтобы комплексная функция ψ на G была непрерывной функцией положительного типа, необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное унитарное представление π группы G и вектор $\xi \in H_\pi$ (который можно предполагать тотализирующим для π) такие, что*

$$\psi(s) = (\pi(s)\xi \mid \xi).$$

Тогда $\|\psi\|_\infty = (\xi \mid \xi)$.

(iii) *Пусть* π *и* π' — *непрерывные унитарные представления* G *и* ξ (*соотв.* ξ') — *тотализирующий вектор для* π (*соотв.* π'). *Если* $(\pi(s)\xi\,|\,\xi) = (\pi'(s)\xi'\,|\,\xi')$ *для любых* $s \in G$, *то существует изоморфизм* H_π *на* $H_{\pi'}$, *переводящий* π *в* π' *и* ξ *в* ξ'.

Предположим, что φ локально почти всюду равна непрерывной функции положительного типа. Тогда для любой $f \in L^1(G)$ имеем

$$\int \varphi(s)(f^* * f)(s)\,ds \geqslant 0$$

вследствие 13.4.4. Поэтому ω — положительная форма на $L^1(G)$. Обратно, пусть $\omega \geqslant 0$. Построим представление π_ω инволютивной алгебры $L^1(G)$ и вектор ξ_ω. Вследствие 13.3.4 представление π_ω связано с непрерывным унитарным представлением G в пространстве представления π_ω, которое мы снова обозначим π_ω. Тогда для любой $f \in L^1(G)$

$$\int \varphi(s) f(s)\,ds = \omega(f) = (\pi_\omega(f)\xi_\omega\,|\,\xi_\omega) = \int (\pi_\omega(s)\xi_\omega\,|\,\xi_\omega) f(s)\,ds,$$

поэтому

$$\varphi(s) = (\pi_\omega(s)\xi_\omega\,|\,\xi_\omega) \tag{1}$$

локально почти всюду. Если φ непрерывна, то равенство (1) верно всюду, так как второй член равенства есть непрерывная функция s. Чтобы завершить доказательство (i) и (ii), достаточно показать, что если π — непрерывное унитарное представление G и $\xi \in H_\pi$, то $s \to (\pi(s)\xi\,|\,\xi)$ — положительного типа. Но если $\mu \in M^1(G)$, то

$$0 \leqslant \|\pi(\mu)\xi\|^2 = (\pi(\mu^* * \mu)\xi\,|\,\xi) = \int (\pi(s)\xi\,|\,\xi)\,d(\mu^* * \mu)(s),$$

откуда, по 13.4.4, следует наше утверждение.

Примем теперь предположения и обозначения (iii). Имеем

$$(\pi(f)\xi\,|\,\xi) = (\pi'(f)\xi'\,|\,\xi') \quad \text{для всех} \quad f \in L^1(G).$$

Поэтому существует изоморфизм Φ пространства H_π на $H_{\pi'}$, переводящий ξ в ξ' и $\pi(f)$ в $\pi'(f)$ для всех $f \in L^1(G)$ [2.4.1 (ii)]. Вследствие 13.3.4 Φ переводит $\pi(s)$ в $\pi'(s)$ для всех $s \in G$.

13.4.6. Пусть π — непрерывное унитарное представление G и $\xi \in H_\pi$. Говорят, что функция $s \to (\pi(s)\xi\,|\,\xi)$ есть функция положительного типа, *определенная* π и ξ. Для фиксированного π и ξ, пробегающего H_π, получаем функции положительного типа, *связанные* с π. Если π — множество представлений G, то функциями положительного типа, связанными с S, называются функции положительного типа, связанные с различными элементами S.

Пусть φ — непрерывная функция положительного типа на G. Она определяет положительную форму ω на $L^1(G)$, поэтому определяет пару (π_ω, ξ_ω), где π_ω может рассматриваться как непрерывное унитарное представление G. Эту пару будем обозначать также $(\pi_\varphi, \xi_\varphi)$ и говорить, что она определена φ. Она определяется с точностью до изоморфизма условием, что $\varphi(s) = (\pi_\varphi(s)\xi_\varphi|\xi_\varphi)$ для всех $s \in G$ и что ξ_φ — тотализирующий для π_φ.

13.4.7. Предложение. *Пусть φ — непрерывная функция положительного типа на G. Если $s, t \in G$, то*

$$|\varphi(s) - \varphi(t)|^2 \leqslant 2\varphi(e)[\varphi(e) - \operatorname{Re}\varphi(s^{-1}t)].$$

Действительно, пусть $\pi = \pi_\varphi$, $\xi = \xi_\varphi$. Имеем

$$\begin{aligned}|\varphi(s) - \varphi(t)|^2 &= |((\pi(s) - \pi(t))\xi|\xi)|^2 \leqslant \|\xi\|^2\|\pi(s)\xi - \pi(t)\xi\|^2 = \\ &= \varphi(e)[\|\pi(s)\xi\|^2 + \|\pi(t)\xi\|^2 - 2\operatorname{Re}(\pi(s)\xi|\pi(t)\xi)] = \\ &= \varphi(e)[2\|\xi\|^2 - 2\operatorname{Re}(\pi(s^{-1}t)\xi|\xi)] = 2\varphi(e)[\varphi(e) - \operatorname{Re}\varphi(s^{-1}t)].\end{aligned}$$

13.4.8. Предложение. *Любой сдвиг непрерывной функции положительного типа есть линейная комбинация четырех непрерывных функций положительного типа.*

Пусть φ — непрерывная функция положительного типа на G, $\pi = \pi_\varphi$, $\xi = \xi_\varphi$, $a, b \in G$. Положим $\pi(a)\xi = \eta$, $\pi(b)^{-1}\xi = \zeta$. Тогда

$$\begin{aligned}4\varphi(bsa) &= 4(\pi(bsa)\zeta|\zeta) = 4(\pi(s)\eta|\zeta) = \\ &= (\pi(s)(\eta+\zeta)|\eta+\zeta) - (\pi(s)(\eta-\zeta)|\eta-\zeta) + \\ &\quad + i(\pi(s)(\eta+i\zeta)|\eta+i\zeta) - i(\pi(s)(\eta-i\zeta)|\eta-i\zeta).\end{aligned}$$

13.4.9. Предложение. *Пусть φ, φ' — две непрерывные функции положительного типа на G. Тогда $\varphi\varphi'$ — положительного типа. Точнее, пусть $\pi = \pi_\varphi$, $\xi = \xi_\varphi$, $\pi' = \pi_{\varphi'}$, $\xi' = \xi_{\varphi'}$. Тогда*

$$\varphi(s)\varphi'(s) = ((\pi \otimes \pi')(s)(\xi \otimes \xi')|\xi \otimes \xi').$$

Действительно,

$$\begin{aligned}((\pi \otimes \pi')(s)(\xi \otimes \xi')|\xi \otimes \xi') &= (\pi(s)\xi \otimes \pi'(s)\xi'|\xi \otimes \xi') = \\ &= (\pi(s)\xi|\xi)(\pi'(s)\xi'|\xi') = \varphi(s)\varphi'(s).\end{aligned}$$

13.4.10. Предложение. *Пусть φ — непрерывная функция положительного типа на G, $\pi = \pi_\varphi$. Любая непрерывная функция положительного типа, связанная с π, есть равномерный предел на G функций вида*

$$s \to \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\bar{\lambda}_j\varphi(s_j^{-1}ss_i), \quad \textit{где} \quad s_1, \ldots, s_n \in G, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}.$$

Пусть $\xi = \xi_\varphi$, $\eta \in H_\pi$ и $\varepsilon > 0$. Существуют $s_1, \ldots, s_n \in G$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{C}$ такие, что

$$\left\| \eta - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(s_i) \xi \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для любого $s \in G$ имеем

$$\left| (\pi(s)\eta \mid \eta) - \left(\pi(s)\left(\sum \lambda_i \pi(s_i)\xi\right) \mid \sum \lambda_i \pi(s_i)\xi\right) \right| \leqslant \varepsilon \|\eta\| + \varepsilon(\|\eta\| + \varepsilon).$$

Но левая часть неравенства есть

$$\left| (\pi(s)\eta \mid \eta) - \sum_{i, j=1}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_j \varphi(s_j^{-1} s s_i) \right|.$$

13.4.11. Пусть $f \in L^2(G)$. Если λ обозначает левое регулярное представление G, то

$$\overline{(\lambda(s) f \mid f)} = \int \bar{f}(s^{-1}t) f(t)\, dt = \int f(t) \tilde{f}(t^{-1}s)\, dt = (f * \tilde{f})(s).$$

Поэтому $f * \tilde{f}$ есть непрерывная функция положительного типа, связанная с λ. Если $f \in \mathscr{K}(G)$, то $f * \tilde{f} \in \mathscr{K}(G)$; переходя к пределу, получаем, что если $f \in L^2(G)$, то $f * \tilde{f}$ есть равномерный предел функций из $\mathscr{K}(G)$, т. е. стремится к нулю на бесконечности.

Библиография: [3], [10], [28], [57], [116], [117].

13.5. Слабая сходимость и компактная сходимость непрерывных функций положительного типа.

13.5.1. Лемма. *Пусть A — ограниченное множество в $L^\infty(G)$. Пусть $f \in L^1(G)$. Если $\varphi \in A$ слабо сходится к $\varphi_0 \in A$, то $f * \varphi$ сходится к $f * \varphi_0$ в топологии компактной сходимости.*

Действительно,

$$(f * \varphi)(s) = \int f(t) \varphi(t^{-1}s)\, dt = \int f(st) \varphi(t^{-1})\, dt = \langle \check{\varphi}, {}_s f \rangle.$$

Если φ слабо сходится к φ_0, оставаясь в A, то $\langle \check{\varphi}, g \rangle$ сходится к $\langle \check{\varphi}_0, g \rangle$ равномерно на каждой компактной части $L^1(G)$. Но если s пробегает компактную часть G, то множество ${}_s f$ сильно компактно $L^1(G)$, так как отображение $s \to {}_s f$ группы G в $L^1(G)$ сильно непрерывно.

13.5.2. Теорема. *Пусть P_1 — множество непрерывных функций положительного типа φ на G таких, что $\varphi(e) = 1$. На множестве P_1 слабая топология $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ совпадает с топологией компактной сходимости.*

Так как $\|\varphi\|_\infty = 1$ для любой $\varphi \in P_1$, то ясно, что на P_1 топология компактной сходимости тоньше слабой топологии.

Пусть теперь $\varphi_0 \in P_1$, K — компактная часть G и $\varepsilon > 0$. Покажем, что если $\varphi \in P_1$ лежит в подходящей слабой окрестности φ_0, то $|\varphi(s) - \varphi_0(s)| \leqslant \varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon}$ для всех $s \in K$. Это завершает доказательство.

Существует такая комцактная окрестность V точки e в G, что $|\varphi_0(s) - 1| = |\varphi_0(s) - \varphi_0(e)| \leqslant \varepsilon$ для всех $s \in V$. Пусть χ — характеристическая функция V и $a > 0$ — мера V. Пусть $\mathscr{V}$ — слабая окрестность φ_0 в P_1, определенная условием $|\langle \varphi - \varphi_0, \chi \rangle| \leqslant \leqslant \varepsilon a$, т. е. условием

$$\left| \int_V (\varphi(s) - \varphi_0(s))\, ds \right| \leqslant \varepsilon a.$$

Для $\varphi \in \mathscr{V}$ имеем

$$\left| \int_V (1 - \varphi(s))\, ds \right| \leqslant \left| \int_V (1 - \varphi_0(s))\, ds \right| + \left| \int_V (\varphi(s) - \varphi_0(s))\, ds \right| \leqslant 2\varepsilon a.$$

С другой стороны, для $\varphi \in \mathscr{V}$ и $s \in G$ имеем

$$|(a^{-1}\chi * \varphi)(s) - \varphi(s)| = \left| a^{-1} \int \chi(t)\, \varphi(t^{-1}s)\, dt - \varphi(s) \right| =$$
$$= \left| a^{-1} \int_V \varphi(t^{-1}s)\, dt - a^{-1} \int_V \varphi(t)\, dt \right| \leqslant a^{-1} \int_V |\varphi(t^{-1}s) - \varphi(s)|\, dt.$$

Согласно 13.4.7 это число не превосходит

$$a^{-1} \int_V \sqrt{2}\, (1 - \operatorname{Re} \varphi(t))^{1/2}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\, a^{-1} \left(\int_V (1 - \operatorname{Re} \varphi(t))\, dt \right)^{1/2} \left(\int_V 1 \cdot dt \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\, a^{-1} \sqrt{2\varepsilon a}\, \sqrt{a} = 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Существует (13.5.1) такая слабая окрестность $\mathscr{V}'$ точки φ_0 в P_1, что из $\varphi \in \mathscr{V}'$ следует

$$|(a^{-1}\chi * \varphi_0)(s) - (a^{-1}\chi * \varphi)(s)| \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad s \in K.$$

Тогда для $\varphi \in \mathscr{V} \cap \mathscr{V}'$ имеем

$$|\varphi(s) - \varphi_0(s)| \leqslant \varepsilon + 4\sqrt{\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad s \in K.$$

Библиография: [13], [56].

13.6. Чистые функции положительного типа.

13.6.1. Определение. *Непрерывная функция положительного типа φ на G называется чистой, если π_φ неприводимо.*

13.6.2. Это условие равносильно тому, что положительная форма на $L^1(G)$, определяемая φ, является чистой (2.5.4).

Согласно 13.4.5 оно равносильно также условию, что в любом разложении $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ функции φ в сумму двух непрерывных функций положительного типа φ_1 и φ_2 пропорциональны φ.

13.6.3. Если G коммутативна, то неприводимые непрерывные унитарные представления G суть характеры G. Поэтому чистые непрерывные функции положительного типа на G суть функции вида $\lambda\chi$ ($\lambda\geqslant 0$, χ — характер G).

13.6.4. Теорема. *Пусть φ — непрерывная функция положительного типа на G такая, что $\varphi(e)=1$. Тогда φ есть предел в топологии компактной сходимости функций вида $\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_n\varphi_n$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ суть чистые непрерывные функции положительного типа, равные 1 в e, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные числа такие, что $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$.*

Положительная форма ψ на $L^1(G)$, определенная φ, есть слабый предел выпуклых комбинаций ψ_i чистых состояний $L^1(G)$ и 0 (2.5.5). Так как $\lim\|\psi_i\|\geqslant\|\psi\|=1$ и $\|\psi_i\|\leqslant 1$, то можно предполагать, кроме того, умножая ψ_i на подходящие скаляры, что $\|\psi_i\|=1$. Тогда ψ_i — положительная форма на $L^1(G)$, определенная функцией $\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_n\varphi_n$ [$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — чистые непрерывные функции положительного типа, $\varphi_1(e)=\ldots=\varphi_n(e)=1$, $\lambda_1\geqslant 0, \ldots, \lambda_n\geqslant 0$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$]. Теперь достаточно применить 13.5.2.

13.6.5. Следствие. *Любая непрерывная комплексная функция на G есть предел в топологии компактной сходимости линейных комбинаций чистых функций положительного типа.*

Очевидно, достаточно доказать следствие для функции f из $\mathcal{K}(G)$. Но такая функция является равномерным на G пределом функций $f*g$, где $g\in\mathcal{K}(G)$. С другой стороны,

$$4f*g=(f+g)*(f+g)^{\sim}-(f-g)*(f-g)^{\sim}+$$
$$+i(f+ig)+(f+ig)^{\sim}-i(f-ig)*(f-ig)^{\sim}.$$

Наконец, любая функция вида $h*h^{\sim}$, где $h\in\mathcal{K}(G)$, есть непрерывная функция положительного типа (13.4.11), и можно применить к ней 13.6.4.

13.6.6. Следствие. *Для каждого $s\in G$, отличного от e, существует такое неприводимое непрерывное унитарное представление π группы G, что $\pi(s)\neq 1$.*

Существует непрерывная комплексная функция на G, принимающая разные значения в s и e, поэтому (13.6.5) существует чистая непрерывная функция положительного типа на G, принимающая различные значения в s и e. Имеем

$$(\pi_\varphi(s)\xi_\varphi\,|\,\xi_\varphi)=\varphi(s)\neq\varphi(e)=(\xi_\varphi\,|\,\xi_\varphi),$$

поэтому $\pi_\varphi(s)\neq 1$ и π_φ неприводимо.

13.6.7. Следствие 13.6.6, принадлежащее Гельфанду и Райкову, означает, что локально компактная группа имеет «достаточно много» неприводимых непрерывных унитарных представлений. Это следствие становится неверным, если ограничиться конечномерными непрерывными унитарными представлениями. Это оправдывает изучение бесконечномерных непрерывных унитарных представлений.

13.6.8. В 13.6.4 мы видели, как восстановить все непрерывные функции положительного типа, исходя из чистых непрерывных функций положительного типа. Сейчас мы получим результат того же типа, но в интегральной форме.

Предположим, что G сепарабельна. Пусть B — выпуклое множество непрерывных функций положительного типа на G, не превосходящих 1 в точке e. Это — компактное множество в слабой топологии; оно сепарабельно, так как $L^1(G)$ сепарабельно (B7). Для любого $s \in G$ функция $\varphi \to \varphi(s)$ на B, ограниченная по модулю единицей, является борелевской, так как она есть предел последовательности непрерывных функций $\varphi \to \int \varphi(t) f_n(t)\, dt$ [можно взять f_n в $\mathscr{K}(G)$ неотрицательными, с интегралом 1 и с носителями во все более мелких окрестностях s]. С другой стороны, множество P чистых непрерывных функций положительного типа, равных 1 в e, есть множество крайних точек B, за исключением 0 (2.5.5), поэтому P есть G_δ в B (B13).

Предложение. *Пусть φ — непрерывная функция положительного типа на G такая, что $\varphi(e) = 1$. Существует положительная мера с нормой 1 на B, сосредоточенная на P, такая что $\varphi(s) = \int\limits_P \zeta(s)\, d\mu(\zeta)$ для всех $s \in G$.*

Существует положительная мера μ с нормой 1 на B, сосредоточенная на $P \cup \{0\}$, такая, что $\varphi = \int\limits_{P \cup \{0\}} \zeta\, d\mu(\zeta)$, где интеграл берется в слабом смысле (B13). Очевидно, что можно предполагать, что $\mu(\{0\}) = 0$, поэтому μ сосредоточена на P. Пусть $f \in L^1(G)$. Имеем

$$\int\limits_G \varphi(s) f(s)\, ds = \int\limits_B d\mu(\zeta) \int\limits_G \zeta(s) f(s)\, ds. \tag{1}$$

Функция $(\zeta, s) \to \zeta(s)$ непрерывна на $P \times G$ вследствие 13.5.2, поэтому измерима на $B \times G$ относительно произведения мер $d\mu(\zeta)\, ds$; кроме того, она ограничена по модулю единицей.

Поэтому $(\zeta, s) \to \zeta(s) f(s)$ интегрируема по мере $d\mu(\zeta)\, ds$ и (1) можно переписать в виде

$$\int_G \varphi(s) f(s)\, ds = \int_G f(s)\, ds \int_B \zeta(s)\, d\mu(\zeta).$$

Тогда

$$\varphi(s) = \int_B \zeta(s)\, d\mu(\zeta) \tag{2}$$

почти всюду на G. С другой стороны, если $(s_1, s_2, \ldots,)$ — последовательность элементов G, стремящаяся к s, то $\zeta(s_1) \to \to \zeta(s)$ для всех $\zeta \in B$, и

$$\int_B \zeta(s_n)\, d\mu(\zeta) \to \int_B \zeta(s)\, d\mu(\zeta)$$

по теореме Лебега. Поэтому $\int_B \zeta(s)\, d\mu(\zeta)$ непрерывно зависит от s, так что (2) справедливо всюду на G.

Библиография: [3], [10], [28], [30], [54], [117].

13.7. Меры положительного типа.

13.7.1. Определение. *Комплексная мера μ на G называется мерой положительного типа, если*

$$\langle \mu, f * \tilde{f} \rangle \geqslant 0 \tag{1}$$

для всех $f \in \mathcal{K}(G)$. Тогда пишут $\mu \gg 0$.

13.7.2. Если $\mu \gg 0$, то $\mu^* = \mu$. Действительно,

$$\langle \mu^*, f * \tilde{f} \rangle = \overline{\langle \mu, (f * \tilde{f})^{\sim} \rangle} = \overline{\langle \mu, f * \tilde{f} \rangle} = \langle \mu, f * \tilde{f} \rangle$$

для всех $f \in \mathcal{K}(G)$; поэтому $\langle \mu^*, f * \tilde{g} \rangle = \langle \mu, f * \tilde{g} \rangle$ для любых $f, g \in \mathcal{K}(G)$ (с помощью поляризации); переходя к пределу, получаем, что $\langle \mu^*, h \rangle = \langle \mu, h \rangle$ для всех $h \in \mathcal{K}(G)$.

13.7.3. Соотношение (1) в 13.7.1 переписывается в виде

$$\int \int f(s) \bar{f}(t^{-1}s)\, ds\, d\mu(t) \geqslant 0$$

для всех $f \in \mathcal{K}(G)$, или еще, с заменой f на $\bar{f}$, в виде

$$\int \int (\mu * f)(s) \bar{f}(s)\, ds \geqslant 0$$

для всех $f \in \mathcal{K}(G)$.

13.7.4. Предположим, что μ ограничена. Если λ — левое регулярное представление G, то можно построить $\lambda(\mu)$. Вследствие 13.7.3 условие $\mu \gg 0$ равносильно условию: $(\lambda(\mu) f \mid f) \geqslant 0$

для всех $f \in \mathscr{K}(G)$. Так как $\mathscr{K}(G)$ всюду плотно в $L^2(G)$, то

$$\mu \gg 0 \Leftrightarrow \lambda(\mu) \geqslant 0.$$

13.7.5. Пусть Δ — модуль G и $f \in \mathscr{K}(G)$. Имеем

$$(f * f^*)(s)\,\Delta(s)^{1/2} = \int f(t)\,\bar{f}(s^{-1}t)\,\Delta(s^{-1}t)\,\Delta(s)^{1/2}\,dt =$$
$$= \int f(t)\,\Delta(t)^{1/2}\,\bar{f}(s^{-1}t)\,\Delta(s^{-1}t)^{1/2}\,dt = \left((f\Delta^{1/2}) * (f\Delta^{1/2})^{\sim}\right)(s).$$

Условие (1) из 13.7.1 равносильно поэтому также, с заменой f на $f\Delta^{1/2}$, условию

$$\langle \Delta^{1/2}\mu,\ f * f^*\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathscr{K}(G).$$

13.7.6. Определение. *Локально интегрируемая функция φ на G называется функцией положительного типа, если мера $\Delta^{-1/2}(s)\varphi(s)\,ds$ на G — положительного типа. Тогда пишут* $\varphi \gg 0$.

Вследствие 13.7.5 это равносильно условию

$$\langle \varphi,\ f * f^*\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathscr{K}(G).$$

Для непрерывной φ получаем предшествующее определение (13.4.4).

Если φ и ψ — такие локально интегрируемые функции на G, что $\psi - \varphi \gg 0$, то пишем $\psi \gg \varphi$.

13.7.7. Если $\varphi \gg 0$, то имеем равенство мер

$$\Delta^{-1/2}(s)\,\varphi(s)\,ds = (\Delta^{-1/2}(s)\,\varphi(s)\,ds)^* =$$
$$= \Delta^{1/2}(s)\,\bar{\varphi}(s^{-1})\,d(s^{-1}) = \Delta^{1/2}(s)\,\bar{\varphi}(s^{-1})\,ds,$$

поэтому

$$\varphi = \tilde{\varphi} \quad \text{локально почти всюду.}$$

13.7.8. Пусть φ — такая комплексная функция на G, что $\Delta^{-1/2}\varphi \in L^1(G)$. Вследствие 13.7.4 для того, чтобы $\varphi \gg 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda(\Delta^{-1/2}\varphi) \geqslant 0$, где λ — левое регулярное представление G.

13.7.9. Пусть μ — мера положительного типа на G. Для f, $g \in \mathscr{K}(G)$ положим

$$(f \mid g)_\mu = \langle \mu,\ \tilde{g} * f\rangle = \int\int f(t^{-1}s)\,\bar{g}(t^{-1})\,dt\,d\mu(s).$$

Тогда $\mathscr{K}(G)$ становится предгильбертовым пространством. Пусть H_μ — отделимое гильбертово пространство, получаемое из этого предгильбертова пространства. Для $s \in G$, $f \in \mathscr{K}(G)$ положим

$$\sigma(s)f = (\varepsilon_s * f)\,\Delta^{1/2}(s),$$

т. е.

$$(\sigma(s)f)(x) = f(s^{-1}x)\,\Delta^{1/2}(s).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\|\sigma(s)f\|_\mu^2 &= \int\int \overline{(\sigma(s)f)}(t^{-1})(\sigma(s)f)(t^{-1}u)\,dt\,d\mu(u) = \\ &= \int\int \bar f(s^{-1}t^{-1})\Delta^{1/2}(s) f(s^{-1}t^{-1}u)\Delta^{1/2}(s)\,dt\,d\mu(u) = \\ &= \int\int \bar f(t^{-1}) f(t^{-1}u)\Delta(s)\Delta(s)^{-1}\,dt\,d\mu(u) = \\ &= \int\int \bar f(t^{-1}) f(t^{-1}u)\,dt\,d\mu(u) = \|f\|_\mu^2.\end{aligned}$$

Поэтому $\sigma(s)$ определяет унитарный оператор в H_μ, который мы снова обозначим $\sigma(s)$. Ясно, что σ — унитарное представление G в H_μ. С другой стороны, при $s \to s_0$ функция $\sigma(s)f$ стремится равномерно к $\sigma(s_0)f$, и ее носитель содержится в фиксированном компактном множестве, откуда легко следует, что унитарное представление σ непрерывно.

13.7.10. Предложение. *Пусть V — окрестность e и μ — такая мера положительного типа на G, что*

$$\langle \mu, \tilde f * f\rangle \leqslant K\left(\int f(x)\,dx\right)^2 \tag{1}$$

для всех $f \geqslant 0$ в $\mathcal{K}(G)$, равных нулю вне V (K обозначает число, не зависящее от f). Тогда $d\mu(s) = \varphi(s)\Delta^{-1/2}(s)\,ds$, где φ — непрерывная функция положительного типа.

Существует сеть (f_i) неотрицательных функций из $\mathcal{K}(G)$, равных нулю вне V, таких, что $\int f_i(x)\,dx = 1$ и

$$\int f_i(x) g(x)\,dx \to g(e) \quad \text{для любой} \quad g \in \mathcal{K}(G).$$

Вследствие (1) имеем $\|f_i\|_\mu^2 \leqslant K$ для всех i. С другой стороны, для любой $g \in \mathcal{K}(G)$ имеем

$$\begin{aligned}(f_i \mid g)_\mu &= \int\int \bar g(t^{-1}) f_i(t^{-1}s)\,dt\,d\mu(s) = \\ &= \int d\mu(s)\int \bar g(t^{-1}s^{-1}) f_i(t^{-1})\,dt \to \int \bar g(s^{-1})\,d\mu(s).\end{aligned}$$

Поэтому, если Λ обозначает каноническое отображение $\mathcal{K}(G)$ в H_μ, то Λf_i слабо сходится к такому элементу ε в H_μ, что

$$(\varepsilon \mid \Lambda g)_\mu = \int \bar g(s^{-1})\,d\mu(s) \tag{2}$$

для всех $g \in \mathcal{K}(G)$. Положим $\varphi(s) = (\sigma(s)\varepsilon \mid \varepsilon)$ для всех $s \in G$. Тогда φ — непрерывная функция положительного типа на G

(13.4.5). С другой стороны, из (2) получаем для каждого $t \in G$:

$$(\sigma(t)\varepsilon \mid \Lambda g) = \left(\varepsilon \mid \sigma\left(t^{-1}\right)\Lambda g\right) =$$
$$= \int \overline{\left(\sigma\left(t^{-1}\right)g\right)}\left(s^{-1}\right)d\mu(s) = \int \bar{g}\left(ts^{-1}\right)\Delta^{-1/2}(t)\,d\mu(s),$$

поэтому для каждого $f \in \mathcal{K}(G)$

$$\int f(t)(\sigma(t)\varepsilon \mid \Lambda g)\,dt = \int\int f(t)\,\bar{g}(ts^{-1})\,\Delta^{-1/2}(t)\,dt\,d\mu(s) =$$
$$= \int\int f\left(t^{-1}\right)\bar{g}\left(t^{-1}s^{-1}\right)\Delta^{-1/2}(t)\,dt\,d\mu(s) =$$
$$= \int\int \bar{g}\left(t^{-1}\right)f\left(t^{-1}s\right)\Delta^{-1/2}\left(s^{-1}t\right)dt\,d\mu(s) =$$
$$= \left\langle \mu,\ \tilde{g} * \left(\Delta^{1/2} f\right)\right\rangle = \left(\Delta^{1/2} f \mid g\right)_{\mu}.$$

Отсюда получаем

$$\int f(t)(\sigma(t)\varepsilon \mid \varepsilon)\,dt = \left(\Delta^{1/2} f \mid \varepsilon\right),$$

т. е. согласно (2) и равенству $\mu^* = \mu$

$$\int f(t)\varphi(t)\,dt = \int \Delta^{1/2}\left(t^{-1}\right)f\left(t^{-1}\right)d\bar{\mu}(t) = \int \Delta^{1/2}(t)\,f(t)\,d\mu(t).$$

Так как это справедливо для любой $f \in \mathcal{K}(G)$, то

$$d\mu(t) = \Delta^{-1/2}(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

13.7.11. Следствие. *Пусть φ — непрерывная функция положительного типа, ψ — такая локально интегрируемая функция положительного типа, что $\varphi \gg \psi$. Тогда ψ локально почти всюду равна непрерывной функции положительного типа.*

Действительно, для любой $f \in \mathcal{K}(G)$ имеем

$$\int \psi(s)\,\Delta^{-1/2}(s)\,(\tilde{f} * f)(s)\,ds \leqslant \int \varphi(s)\,\Delta^{-1/2}(s)\,(\tilde{f} * f)(s)\,ds.$$

Если $f \in \mathcal{K}(G)$ неотрицательна и равна нулю вне симметричной компактной окрестности V точки e, то правая часть неравенства не превосходит

$$\sup_{s \in V^2}\left|\varphi(s)\Delta^{-1/2}(s)\right| \int\int f\left(t^{-1}\right)f\left(t^{-1}s\right)dt\,ds =$$
$$= \sup_{s \in V^2}\left|\varphi(s)\Delta^{-1/2}(s)\right| \sup_{t \in V}\Delta(t)\left(\int f(t)\,dt\right)^2,$$

и достаточно применить 13.7.10.

Библиография: [3], [28].

13.8. Функции положительного типа с интегрируемым квадратом.

13.8.1. Во всем п. 13.8 λ обозначает левое регулярное представление G. Пусть $f \in L^2(G)$. Для любой $g \in \mathscr{K}(G)$ имеем $\lambda(g) f \in L^2(G)$. Если существует такая конечная постоянная M, что $\|\lambda(g) f\|_2 \leqslant M \|g\|_2$ для любой $g \in \mathscr{K}(G)$, то f называется *умеренным элементом* $L^2(G)$. Отображение $g \to \lambda(g) f$ продолжается тогда единственным образом до непрерывного линейного оператора в $L^2(G)$, который мы обозначим $\rho(f)$. Для любой $g \in \mathscr{K}(G)$ имеем

$$(\rho(f)\bar{g} \mid \bar{g}) = (\lambda(\bar{g}) f \mid \bar{g}) = \int (\bar{g} * f)(s)\, g(s)\, ds =$$
$$= \int \int \bar{g}(t) f(t^{-1}s)\, g(s)\, ds\, dt = \langle f, g^* * g \rangle,$$

Поэтому для того, чтобы $f \gg 0$, необходимо и достаточно чтобы $\rho(f) \geqslant 0$ (13.7.6).

13.8.2. Пусть теперь f — элемент $L^2(G)$ положительного типа, но не обязательно умеренный. Оператор $g \to \lambda(g) f$, определенный в $\mathscr{K}(G)$ со значениями в $L^2(G)$, положителен, как показывает то же вычисление, что в 13.8.1. Обозначим через $\rho(f)$ его продолжение по Фридрихсу (B23), которое является положительным самосопряженным оператором. В случае, когда f умерен, снова получаем оператор $\rho(f)$, определенный в 13.8.1.

13.8.3. Лемма. *Пусть f — элемент $L^2(G)$ положительного типа. Тогда:*

(i) *Для любого $s \in G$ оператор $\rho(f)$ перестановочен с $\lambda(s)$.*

(ii) *Если h лежит в области определения D оператора $\rho(f)$, то $\rho(f) h = h * f$.*

Для $g \in \mathscr{K}(G)$ и $s \in G$ имеем

$$\varepsilon_s * g \in \mathscr{K}(G) \quad \text{и} \quad \varepsilon_s * (g * f) = (\varepsilon_s * g) * f,$$

иначе говоря, $\lambda(s)\rho(f) g = \rho(f)\lambda(s) g$. Поэтому

$$\rho(f) \mid \mathscr{K}(G) = \lambda(s)\rho(f)\lambda(s)^{-1} \mid \mathscr{K}(G)$$

и $\rho(f) = \lambda(s)\rho(f)\lambda(s)^{-1}$ (B23).

С другой стороны, $\rho(f)$ совпадает на D с оператором, сопряженным к $\rho(f) \mid \mathscr{K}(G)$ (B23). Тогда для $h \in D$ и $g \in \mathscr{K}(G)$ имеем

$$(\rho(f) h \mid g) = (h \mid \rho(f) g) = \int h(s)\, ds \int \bar{g}(t) \bar{f}(t^{-1}s)\, dt. \qquad (1)$$

Но $h(s)\bar{g}(t) f(t^{-1}s)$ измерима на $G \times G$ по мере $ds\, dt$ и равна нулю вне счетного объединения множеств, интегрируемых по $ds\,dt$; с другой стороны,

$$\int^* ds \int^* |h(s)\,g(t)\,f(t^{-1}s)|\,dt \leqslant \int^* |h(s)|(|g| * |f|(s))\,ds < +\infty,$$

так как $|h| \in L^2(G)$ и $|g| * |f| \in L^2(G)$. Поэтому $h(s)\,\bar{g}(t)\,\bar{f}(t^{-1}s)$ интегрируема по мере $ds\,dt$ и (1) можно переписать в виде

$$(\rho(f)h \mid g) = \int \left[\int h(s)\,f(s^{-1}t)\,ds\right] \bar{g}(t)\,dt = \int (h * f)(t)\,\bar{g}(t)\,dt,$$

откуда $\rho(f)h = h * f$ почти всюду.

13.8.4. Лемма. *Пусть a, $b \in L^2(G)$ — два умеренных элемента положительного типа таких, что $\rho(a)$ и $\rho(b)$ перестановочны. Тогда $a * b$ — непрерывная функция положительного типа, являющаяся умеренным элементом $L^2(G)$. Имеем $\rho(a * b) = \rho(a)\rho(b)$ и $(a \mid b) \geqslant 0$. Если кроме того, $a \ll b$, то*

$$\|b - a\|_2^2 \leqslant \|b\|_2^2 - \|a\|_2^2.$$

Свертка двух функций из $L^2(G)$ есть непрерывная функция на G. Пусть (a_n) — последовательность функций из $\mathcal{K}(G)$, стремящихся к a в $L^2(G)$. Тогда $a_n * b = \rho(b)\,a_n$ стремится к $\rho(b)\,a$ в $L^2(G)$. С другой стороны, $\|a_n * b - a * b\|_\infty \to 0$, поэтому $a * b = \rho(b)\,a \in L^2(G)$. Пусть $f \in \mathcal{K}(G)$. Имеем $f * a_n \in \mathcal{K}(G)$, и $f * a_n$ стремится к $f * a$ в $L^2(G)$, поэтому $(f * a_n) * b = \rho(b)(f * a_n)$ стремится к $\rho(b)(f * a) = \rho(b)\rho(a)f$ в $L^2(G)$. С другой стороны, $f * (a_n * b)$ стремится к $f * (a * b)$ в $L^2(G)$. Поэтому $f * (a * b) = \rho(b)\rho(a)f = \rho(a)\rho(b)f$ для всех $f \in \mathcal{K}(G)$, что доказывает, что $a * b$ умерен и $\rho(a * b) = \rho(a)\rho(b)$. Так как $\rho(a)$ и $\rho(b)$ положительны и перестановочны, то $\rho(a)\rho(b)$ положителен, поэтому $a * b$ — положительного типа. Имеем

$$(a \mid b) = \int a(s)\,b(s^{-1})\,ds = (a * b)(e) \geqslant 0.$$

Наконец, если $a \ll b$, то пусть $c = b - a \gg 0$; c умерен и, по предыдущему,

$$(a \mid a) \leqslant (a \mid a) + (a \mid c) = (a \mid b),$$

поэтому

$$\|b - a\|^2 = \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2(a \mid b) \leqslant \|b\|^2 - \|a\|^2.$$

13.8.5. Лемма. *Пусть a_1, a_2, ... — умеренные элементы положительного типа в $L^2(G)$ такие, что $a_1 \ll a_2 \ll \ldots$ и $\rho(a_i)$ попарно перестановочны. Если $\sup \|a_i\|_2 < +\infty$, то a_i имеют сильный предел в $L^2(G)$.*

Вследствие 13.8.4 $\|a_i\|_2$ образуют возрастающую последовательность, поэтому сходящуюся. Снова применяя 13.8.4, видим тогда, что a_i образуют последовательность Коши.

13.8.6. Теорема. *Пусть φ — непрерывная функция положительного типа с интегрируемым квадратом на G. Существует такая функция ψ положительного типа с интегрируемым квадратом, что $\varphi = \psi * \psi = \psi * \tilde{\psi}$.*

Предположим сначала, что φ — умеренная. Можно предполагать, умножая φ на постоянную >0, что $0 \leqslant \rho(\varphi) \leqslant 1$. Пусть $(p_1(t), p_2(t), \ldots)$ — последовательность многочленов $\geqslant 0$ на $[0, 1]$, равных нулю в нуле, возрастающая и равномерно сходящаяся к $\sqrt{t}$ на $[0, 1]$. Благодаря 13.8.4 можно построить $\psi_1 = p_1(\varphi)$, $\psi_2 = p_2(\varphi), \ldots$ (где умножение понимается как свертка); эти элементы лежат в $L^2(G)$ и умерены, причем

$$\rho(\psi_1) = p_1(\rho(\varphi)), \quad \rho(\psi_2) = p_2(\rho(\varphi)), \ldots$$

Видим, что $0 \leqslant \rho(\psi_1) \leqslant \rho(\psi_2) \leqslant \ldots$, поэтому $0 \ll \psi_1 \ll \psi_2 \ll \ldots$, при этом $\rho(\psi_n)$ попарно перестановочны. Так как $p_n^2(t) \leqslant t$ на $[0, 1]$, то $\rho(\psi_n)^2 \leqslant \rho(\varphi)$, тогда $\psi_n * \psi_n \ll \varphi$ и $(\psi_n * \psi_n)(e) = \|\psi_n\|^2 \leqslant \varphi(e)$. Поэтому ψ_n сильно сходятся к некоторому элементу ψ в $L^2(G)$ (13.8.5). В то же время $\rho(\psi_n) = p_n(\rho(\varphi))$ сходятся по норме к $\rho(\varphi)^{1/2}$. Для $f \in \mathcal{K}(G)$ функции $f * \psi_n = \rho(\psi_n) f$ сходятся в $L^2(G)$ и к $f * \psi$, и к $\rho(\varphi)^{1/2} f$. Поэтому ψ — умеренная функция положительного типа и $\rho(\psi) = \rho(\varphi)^{1/2}$. Отсюда $\rho(\varphi) = \rho(\psi)^2 = \rho(\psi * \psi)$ и $\varphi = \psi * \psi$.

Перейдем к общему случаю. Пусть $\rho(\varphi) = \int\limits_0^{+\infty} \zeta \, dE_\zeta$ — спектральное разложение $\rho(\varphi)$. Проекторы E_ζ перестановочны с $\lambda(s)$ $(s \in G)$ вследствие 13.8.3 (i). Пусть $\varphi_\zeta = E_\zeta \varphi$. Для каждого $g \in \mathcal{K}(G)$ имеем

$$(g * \tilde{\varphi}_\zeta)(t) = \int g(s) \tilde{\varphi}_\zeta(s^{-1}t) \, ds = \int g(s) \bar{\varphi}_\zeta(t^{-1}s) \, ds =$$
$$= (g \mid \lambda(t) E_\zeta \varphi) = (E_\zeta g \mid \lambda(t) \varphi) = \int (E_\zeta g)(s) \bar{\varphi}(t^{-1}s) \, ds =$$
$$= \int (E_\zeta g)(s) \varphi(s^{-1}t) \, ds = (E_\zeta g * \varphi)(t),$$

а это равно $(\rho(\varphi) E_\zeta g)(t)$ вследствие 13.8.3 (ii). Поэтому $\tilde{\varphi}_\zeta$ умерена и $\rho(\tilde{\varphi}_\zeta) = \rho(\varphi) E_\zeta \geqslant 0$, итак, $\tilde{\varphi}_\zeta = \varphi_\zeta \gg 0$. Кроме того, $\rho(\varphi_\zeta) \leqslant \rho(\varphi)$, следовательно, $\varphi_\zeta \ll \varphi$ и φ_ζ непрерывны (13.7.11). Согласно первой части доказательства существует такой умеренный элемент ω_ζ положительного типа, что $\varphi_\zeta = \omega_\zeta * \omega_\zeta$. Положим, в частности, $\zeta = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Операторы $\rho(\varphi_n)$ попарно перестановочны и возрастают, поэтому то же верно для $\rho(\omega_n) = \rho(\varphi_n)^{1/2}$, тогда $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \ldots$ С другой стороны, $\|\omega_n\|^2 = \varphi_n(e) \leqslant \varphi(e)$, поэтому ω_n имеют сильный предел $\omega \gg 0$

(13.8.5). Тогда φ_n, т. е. $\omega_n * \omega_n$, равномерно стремится на G к $\omega * \omega$; с другой стороны, $\varphi_n = E_n\varphi$ сильно стремится к φ в $L^2(G)$. Итак, $\varphi = \omega * \omega$.

Библиография: [28].

13.9. C^*-алгебра локально компактной группы.

13.9.1. Так как $L^1(G)$ — инволютивная банахова алгебра, допускающая аппроксимированную единицу, то можно построить ее обертывающую C^*-алгебру (2.7.2). Эта C^*-алгебра называется *C^*-алгеброй G* и обозначается $C^*(G)$.

Для $f \in L^1(G)$ положим $\|f\|' = \sup \|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_1$, где π пробегает множество невырожденных представлений $L^1(G)$ или, что то же самое, множество непрерывных унитарных представлений G. Тогда $f \to \|f\|'$ есть полунорма на $L^1(G)$ (2.7.1), и даже норма, так как $L^1(G)$ имеет инъективное представление (13.3.6). C^*-алгебра G есть не что иное, как пополнение $L^1(G)$ по этой норме.

13.9.2. Если G дискретна, то $C^*(G)$ допускает единичный элемент. Если G сепарабельна, то $C^*(G)$ сепарабельна (13.2.4).

13.9.3. Вследствие 2.7.4 и 13.3.5 существует биективное соответствие между непрерывными унитарными представлениями G и невырожденными представлениями $C^*(G)$. Все, что сказано в 13.3.5, остается справедливым при замене $L^1(G)$ на $C^*(G)$.

Левое регулярное представление G соответствует представлению $C^*(G)$, называемому *левым регулярным представлением $C^*(G)$ в $L^2(G)$*.

13.9.4. Группа G называется CCR-, GCR-, NGCR-группой, группой типа I, если $C^*(G)$ — CCR-, GCR-, NGCR-алгебра, алгебра типа I соответственно. Для того чтобы G была CCR-группой, необходимо и достаточно, чтобы для любого неприводимого непрерывного унитарного представления π группы G и любой $f \in L^1(G)$ оператор $\pi(f)$ был компактен.

Предположим, что G — GCR-группа; тогда для любого неприводимого непрерывного унитарного представления π группы G замыкание по норме множества $\pi(L^1(G))$ содержит $\mathscr{B}\mathscr{C}(H_\pi)$ (4.3.7). Обратное верно, если G сепарабельна (9.1).

Для того чтобы G была типа I, необходимо и достаточно, чтобы для любого непрерывного унитарного представления G алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(G)$, имела тип I. Если G — GCR, то G — типа I (5.5.2). Если G сепарабельна, то следующие условия эквивалентны:

1° G — типа I;

2° для любого непрерывного унитарного фактор-представления π группы G фактор, порожденный $\pi(G)$, имеет тип I;

3° G — GCR-группа (9.1).

Библиография: [70], [161].

13.10. Гильбертова алгебра локально компактной группы. В этом разделе G обозначает унимодулярную локально компактную группу.

13.10.1. $\mathscr{K}(G)$ есть инволютивная алгебра относительно умножения — свертки и инволюции $f \to f^*$. Снабдим $\mathscr{K}(G)$ скалярным произведением $(f \mid g) = \int f(s)\overline{g(s)}\,ds$. Легко видеть, что $\mathscr{K}(G)$ становится тогда гильбертовой алгеброй; гильбертово пространство — пополнение $\mathscr{K}(G)$ есть $L^2(G)$. Совершенная гильбертова алгебра A ограниченных элементов (A57) называется гильбертовой алгеброй группы G; имеем $\mathscr{K}(G) \subset A \subset L^2(G)$. Ясно, что A инвариантно относительно отображения $f \to \bar{f}$, поэтому также относительно отображения $f \to \check{f} = (\bar{f})^*$.

13.10.2. Для того чтобы непрерывный линейный оператор в $L^2(G)$ был перестановочен с операторами левого сдвига, необходимо и достаточно, чтобы он был перестановочен с операторами левой свертки с элементами $\mathscr{K}(G)$ (это следует, например, из 13.3.5, примененного к левому регулярному представлению G). Поэтому $\mathfrak{U}(A)$ есть алгебра фон Неймана, порожденная операторами левого сдвига в $L^2(G)$. Аналогично, $\mathfrak{W}(A)$ есть алгебра фон Неймана, порожденная операторами правого сдвига.

13.10.3. Напомним, что для $f \in A$ через U_f, V_f обозначаются непрерывные линейные операторы в $L^2(G)$, продолжающие умножения слева и справа на f в A. Если $f \in A$ и $g \in L^2(G)$, то $U_f g = f * g$ (и аналогично $V_f g = g * f$). Действительно, предположим сначала, что $g \in \mathscr{K}(G)$; пусть (f_n) — последовательность элементов $\mathscr{K}(G)$, стремящаяся к f в среднем квадратичном; тогда $V_g f_n = f_n * g$ стремится в среднем квадратичном и к $V_g f = U_f g$, и к $f * g$, так что $U_f g = f * g$. В общем случае пусть (g_n) — последовательность элементов $\mathscr{K}(G)$, стремящаяся к g в среднем квадратичном: тогда $U_f g_n$ стремится к $U_f g$ в среднем квадратичном, а $f * g_n$ стремится к $f * g$ равномерно на G; так как $U_f g_n = f * g_n$ согласно первой части доказательства, то $U_f g = f * g$.

13.10.4. Напомним, что отображение $f \to f^*$ в $L^2(G)$ перестановочно с любым элементом $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$ [общего центра $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{W}(A)$] (A54). Напомним также, что $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{W}(A)$ суть коммутанты друг друга; это — полуконечные алгебры фон Неймана (A60).

13.10.5. Предложение. *Пусть G — унимодулярная локально компактная группа, A — ее гильбертова алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(i) [*соотв.* (i′)] *алгебра фон Неймана* $\mathfrak{U}(A)$ [*соотв.* $\mathfrak{V}(A)$] *есть конечная алгебра фон Неймана;*

(ii) *в* G *существует фундаментальная система компактных окрестностей* e, *инвариантных относительно внутренних автоморфизмов* G.

Условия (i) и (i′) эквивалентны для любой гильбертовой алгебры (A63).

Предположим, что существует фундаментальная система $(V_i)_{i \in I}$ компактных окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов G. Пусть f_i — характеристическая функция V_i. Элементы f_i центральны в A [они принадлежат центру $L^1(G)$]. С другой стороны, любая $f \in L^2(G)$ является сильной точкой прикосновения множества $f_i * f$. Поэтому характеристический проектор A равен 1 (A62). Поэтому $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{V}(A)$ — конечные алгебры фон Неймана (A63).

Предположим, что $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{V}(A)$ — конечные алгебры фон Неймана. Характеристический проектор A равен 1 (A63). Пусть s — элемент G, отличный от e. Оператор $f \to {}_sf$ в $L^2(G)$ не тождествен; но он перестановочен с правыми сдвигами, а множество правых сдвигов элементов $L^2(G)$, центральных относительно A, тотально в $L^2(G)$ (A62). Поэтому существует $f \in L^2(G)$, центральная относительно A и такая, что ${}_sf$ не равна f. Так как f центральна, то ${}_tf = f_t$ для всех $t \in G$ (A62), поэтому f инвариантна относительно внутренних автоморфизмов G. Рассмотрим функцию $t \to g(t) = ({}_tf, f)$ на G. Она непрерывна, инвариантна относительно внутренних автоморфизмов, стремится к нулю на бесконечности и $g(s) \neq g(e)$. Если W — компактная окрестность $g(e)$ в $\mathbf{C}$, не содержащая ни 0, ни $g(s)$, то соотношение $g(t) \in W$ определяет компактную окрестность e, инвариантную относительно внутренних автоморфизмов и не содержащую s. Поэтому пересечение компактных окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов, сводится к $\{e\}$. Итак, любая окрестность e содержит компактную окрестность, инвариантную относительно внутренних автоморфизмов.

Библиография: [31], [32], [87], [88], [119], [120].

13.11. Дополнения.

13.11.1. Пусть G — локально компактная группа, $f \in L^1(G)$. Если $f(s) \geqslant 0$ для любого $s \in G$, то норма f в $L^1(G)$ и в $C^*(G)$ — одна и та же (рассмотреть тривиальное представление G размерности 1) [161].

13.11.2. Пусть G — локально компактная группа, π — непрерывное унитарное представление G, S — множество непрерывных унитарных представлений G, K — множество таких $\xi \in H_\pi$, что функция $s \to (\pi(s)\xi \mid \xi)$ — равномерный на каждом компакте предел сумм функций положительного типа, связанных с S. Тогда K — замкнутое векторное подпространство H_π, инвариантное относительно $\pi(G)$ [167].

13.11.3. Пусть G — локальн компактная группа, λ — левое регулярное представление G, π — непрерывное унитарное представление G. Тогда $\lambda \otimes \pi \simeq (\dim \pi) \cdot \lambda$. [Рассмотреть изоморфизм $L^2(G) \otimes H_\pi$ на $L^2(G) \otimes H_\pi = L^2_{H_\pi}(G)$, переводящий $f \otimes \xi$ в функцию $s \to f(s)\pi(s^{-1})\xi$] [165].

13.11.4. Пусть G — локально компактная группа аффинных преобразований $\boldsymbol{R}$, G' — замкнутая инвариантная подгруппа сдвигов. Если π — непрерывное унитарное представление G и χ — нетривиальный характер G', то $\pi \mid G'$ не содержит χ. (Если $\pi \mid G$ содержит χ, то $\pi \mid G'$ содержит все нетривиальные характеры G' ввиду действия в G' внутренних автоморфизмов G; соответствующие подпространства в H_π должны быть попарно ортогональны). Отсюда следует, что нетривиальный характер G' нельзя продолжить до непрерывной функции положительного типа на G (Дуади, не опубликовано).

13.11.5. Пусть G — локально компактная группа, Δ — ее модуль. Если непрерывная функция положительного типа интегрируема по мере $\Delta(s)^{-1/2}ds$, то ее квадрат интегрируем по мере ds [28].

***13.11.6.** Пусть G — локально компактная группа, E — множество линейных комбинаций непрерывных функций положительного типа. Для $\varphi \in E$ введем K^g_φ (соотв. K^d_φ) — замкнутую выпуклую оболочку множества левых (соотв. правых) сдвигов φ в пространстве непрерывных комплексных функций на G, снабженном нормой равномерной сходимости. Тогда K^g_φ и K^d_φ содержат единственную и притом общую константу $M(\varphi)$. Непрерывная функция положительного типа φ тогда и только тогда удовлетворяет соотношению $M(\varphi\bar{\varphi}) = 0$, когда π_φ не содержит никакого подпредставления конечной размерности > 0. [28].

13.11.7. Пусть G_1, G_2 — топологические группы.

a) Пусть π_1 — неприводимое непрерывное унитарное представление G_1, π_2 и π'_2 — непрерывные унитарные представления G_2. Если представления

$$(s_1, s_2) \to \pi_1(s_1) \otimes \pi_2(s_2) \quad \text{и} \quad (s_1, s_2) \to \pi_1(s_1) \otimes \pi'_2(s_2)$$

эквивалентны, то π_2 и π'_2 эквивалентны.

b) Пусть π — непрерывное унитарное представление $G_1 \times G_2$. Если π — фактор-представление, то $\pi \mid G_1$ и $\pi \mid G_2$ — фактор-представления.

c) Пусть π — непрерывное унитарное представление $G_1 \times G_2$, $\pi_1 = \pi | G_1$, $\pi_2 = \pi | G_2$. Предположим, что π_1 — фактор-представление типа I. Тогда существуют $\pi'_1 \approx \pi_1$, $\pi'_2 \approx \pi_2$ такие, что π эквивалентно представлению $(s_1, s_2) \to \pi'_1(s_1) \otimes \pi'_2(s_2)$.

d) Если G_1 и G_2 — типа I, то $G_1 \times G_2$ — типа I [81].

13.11.8. Пусть G — локально компактная группа, π — унитарное представление G. Предположим, что для любых ξ, $\eta \in H = H_\pi$ функция $s \to (\pi(s)\xi | \eta)$ измерима по мере Хаара на G. Можно определить $\pi(f) = \int f(s)\pi(s)\,ds$ для любой $f \in L^1(G)$. Пусть $K \subset H$ — существенное подпространство для представления π инволютивной алгебры $L^1(G)$. Тогда H и $H \ominus K$ инвариантны относительно $\pi(G)$. Представление $s \to \pi(s) | K$ непрерывно; для ξ, $\eta \in H \ominus K$ имеем $(\pi(s)\xi | \eta) = 0$ локально почти всюду на G. Пространство $H \ominus K$ — либо нулевое, либо несепарабельное. Оно может быть ненулевым [123].

13.11.9. Пусть G — топологическая группа. Пусть π — непрерывное унитарное представление G. Симметричные тензоры порождают в пространстве $H_\pi \otimes \ldots \otimes H_\pi$ (n сомножителей) замкнутое векторное подпространство K, инвариантное относительно $\rho = \pi \otimes \ldots \otimes \pi$. Подпредставление ρ_K представления ρ называется *n-й симметрической тензорной степенью* π. Аналогично определяются антисимметрические тензорные степени.

***13.11.10.** Пусть G — связная вещественная группа Ли, π — унитарное представление G, непрерывное в равномерной операторной топологии и неприводимое. Тогда π конечномерно [53].

13.11.11. Пусть G — топологическая группа. Унитарное представление π группы G называется *вещественным*, если существует замкнутое вещественное векторное подпространство K в H_π такое, что H_π есть прямая сумма K и iK, скалярное произведение на K вещественно и $\pi(G)$ сохраняет K (иначе говоря, H_π есть гильбертово пространство, получаемое комплексификацией вещественного гильбертова пространства K, а π есть комплексификация представления G в K). Это равносильно условию, что существует инволюция J в H, перестановочная с $\pi(G)$. Если π вещественно, то $\pi \simeq \bar{\pi}$, но обратное неверно.

***13.11.12.** Полупростая связная вещественная группа Ли, нильпотентная связная вещественная группа Ли суть CCR-группы (см. 15.5.6). Вещественнная алгебраическая линейная группа есть GCR-группа. Известны довольно широкие классы разрешимых групп Ли, являющихся GCR-группами, но Маутнер привел пример разрешимой группы Ли, не являющейся GCR-группой. Некоммутативная связная вещественная группа Ли размерности 2 есть GCR-группа, но не CCR-группа. Для того чтобы дискретная счетная группа была группой типа I, необходимо и достаточно, что она была расширением конечной группы с помощью коммутативной группы. Проблемы: является ли GCR-группой алгебраическая p-адическая группа? *) Является ли C^*-алгебра вещественной CCR-группы Ли C^*-алгеброй с обобщенным непрерывным следом? [5], [38], [40], [43], [72], [126], [135], [164], [173], [210].

***13.11.13.** Пусть G — локально компактная группа, π — неприводимое непрерывное унитарное представление G. Тогда $\pi(L^1(G))$, вообще говоря, не является алгебраически неприводимым.

13.11.14. a) Пусть G — дискретная группа, A — ее гильбертова алгебра; пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(A)$; это — конечная алгебра фон Неймана; пусть f — естественный след на $\mathfrak{U}^+$, определяемый A. Так как оператор $1 \in \mathfrak{U}$ соответствует характеристической функции e, то $\mathfrak{M}_f = \mathfrak{N}_f = \mathfrak{U}$, и любой элемент $\mathfrak{U}$ имеет вид U_x, где $x \in L^2(G)$. Мы обозначим снова через f линейное продолжение f на $\mathfrak{U}$. Если $U_x \in \mathfrak{U}$, где $x \in L^2(G)$, то $f(U_x) = x(e)$.

b) Пусть E_{I_i} (соотв. E_{II}) — наибольший проектор из центра $\mathfrak{U}$ такой, что соответствующая алгебра, индуцированная $\mathfrak{U}$, имеет тип I_i (соотв. типа II) (i принимает значения 1, 2, ...). Имеем $E_{\mathrm{II}} + \Sigma E_{\mathrm{I}_i} = 1$. Положим $f(E_{\mathrm{II}}) = r$, $f(E_{\mathrm{I}_i}) = r_i$, откуда $r + \Sigma r_i = 1$.

c) Пусть C — коммутаторная группа G. Пусть φ_C — характеристическая функция C. Если C бесконечна, то $r_1 = 0$. Если C конечна, то $r_1 = (\operatorname{Card} C)^{-1}$ и E_{I} есть элемент $\mathfrak{U}$, определенный функцией $(\operatorname{Card} C)^{-1} \varphi_C$ на G.

d) Если G бесконечна, а C совпадает с центром G и имеет простой порядок p, то $\mathfrak{U}$ есть произведение коммутативной алгебры фон Неймана и $p-1$ фактора типа II_1. Имеем $r_1 = \frac{1}{p}$, $r = \frac{p-1}{p}$.

e) Пусть (G_i) — бесконечное семейство некоммутативных конечных групп. Пусть G — множество элементов ΠG_i, все компоненты которых, кроме конечного числа, равны e. Рассмотрим G как дискретную группу. Тогда $\mathfrak{U}$ — типа II_1.

f) Пусть G — дискретная группа, G_0 — подгруппа G, являющаяся объединением конечных классов сопряженных элементов G. Если G/G_0 бесконечно, то $\mathfrak{U}$ типа II_1. Если $G_0 = \{e\}$ и G бесконечна, то $\mathfrak{U}$ — фактор типа II_1 [69], [82], [90], [91].

) Редуктивная p-адическая группа является CCR-группой, см. [371].

§ 14. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ КВАДРАТОМ

Во всем параграфе G обозначает унимодулярную локально компактную группу.

14.1. Определение представлений с интегрируемым квадратом.

14.1.1. Лемма. *Пусть φ — непрерывная функция положительного типа с интегрируемым квадратом на G. Представление π_φ содержится в левом регулярном представлении.*

Существует такая функция $\psi \in L^2(G)$, что $\varphi = \bar{\psi} * \check{\psi}$ (13.8.6). Иначе говоря,

$$\varphi(s) = \int \bar{\psi}(t)\,\psi(s^{-1}t)\,dt = (\lambda(s)\psi \mid \psi),$$

где λ — обозначает левое регулярное представление G. Поэтому π_φ эквивалентно тому подпредставлению λ, тотализирующий вектор которого есть ψ [13.4.5 (ii)].

14.1.2. Лемма. *Пусть λ — левое регулярное представление G, π — представление, содержащееся в λ, где $H_\pi \neq 0$. Существует функция положительного типа, связанная с π, ненулевая, с интегрируемым квадратом.*

Пусть A — гильбертова алгебра G. Пусть K — замкнутое векторное подпространство $L^2(G)$, инвариантное относительно $\lambda(G)$. Имеем $P_K \in \mathfrak{U}(A)' = \mathfrak{W}(A)$. Поэтому $P_K(A) \subset A$ (A59). Если $K \neq 0$, то видим, что существует ненулевой вектор ψ в $K \cap A$. Подпредставление λ, соответствующее K, допускает в качестве связанной с ним функции положительного типа функцию $s \to (\pi(s)\psi \mid \psi) = \bar{\psi} * \check{\psi}$. Но $\bar{\psi} \in A$, поэтому $\bar{\psi} * \check{\psi} \in L^2(G)$.

14.1.3. Определение. *Неприводимое непрерывное унитарное представление π группы G называется представлением с интегрируемым квадратом, если существует такой вектор $\xi \in H_\pi$, $\xi \neq 0$, что коэффициент $s \to (\pi(s)\xi \mid \xi)$ представления π является функцией с интегрируемым квадратом на G.*

[Мы увидим, что тогда все коэффициенты π имеют интегрируемый квадрат (14.3.2).] Вследствие 14.1.1 и 14.1.2 эти представления суть неприводимые представления, содержащиеся в регулярном представлении.

14.1.4. Предположим, что G коммутативна. Элемент $\widehat{G}$ есть характер χ группы G и $|\chi|^2 = 1$. Поэтому если G компактна, то любой элемент $\widehat{G}$ — с интегрируемым квадратом (см. также § 15); а если G некомпактна, то ни один элемент $\widehat{G}$ не является представлением с интегрируемым квадратом.

Библиография: [29], [174].

14.2. Представления с интегрируемым квадратом и минимальные биинвариантные подпространства $L^2(G)$.

14.2.1. Пусть A — гильбертова алгебра G. Пусть K — замкнутое векторное подпространство $L^2(G)$. Сказать, что K инвариантно относительно левого (соотв. правого) регулярного представления — все равно, что сказать, что $P_K \in \mathfrak{W}(A)$ (соотв. $P_K \in \mathfrak{U}(A)$). Сказать, что K инвариантно относительно левого и правого регулярного представления, или, как мы будем говорить, *биинвариантно*, — все равно, что сказать, что P_K принадлежит $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$, общему центру $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{W}(A)$. Мы установим биективное соответствие между классами эквивалентности неприводимых представлений G с интегрируемым квадратом и некоторыми минимальными биинвариантными подпространствами $L^2(G)$, иначе говоря, некоторыми минимальными проекторами в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$.

14.2.2. Предложение. *Пусть λ — левое регулярное представление G, H — минимальное инвариантное относительно λ замкнутое векторное подпространство $L^2(G)$, так что подпредставление σ представления λ в H неприводимо. Пусть $E = P_H \in \mathfrak{W}(A)$ и F — центральный носитель E в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$. Тогда:*

(i) *F — минимальный проектор в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$.*

(ii) *$\mathfrak{U}(A)_E$ и $\mathfrak{W}(A)_F$ — факторы типа I, являющиеся коммутантами друг друга.*

(iii) *Любой элемент из $F(L^2(G))$ принадлежит A.*

(i) следует из 5.2.7. Вследствие условия (v) из 5.3.1 подпредставление λ, определяемое F, квазиэквивалентно σ, поэтому является фактор-представлением типа I (5.4.11), откуда (ii). Наконец, (iii) следует из (A65) и (A67).

14.2.3. Предложение. *Сохраним обозначения* 14.2.2. *Пусть σ' — другое неприводимое подпредставление λ, и пусть F' — соответствующий минимальный проектор в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$. Для того чтобы σ и σ' были эквивалентны (соотв. неэквивалентны), необходимо и достаточно, чтобы F и F' были равны (соотв. ортогональны).*

Если $F = F'$, то σ и σ' квазиэквивалентны [условие (v) в 5.3.1], поэтому эквивалентны [5.3.3 (ii)].Если F и F' ортогональны, то σ и σ' дизъюнктны [условие (iii) в 5.2.1].

14.2.4. Говорят, что F [соотв. $F(L^2(G))$] есть *центральный проектор* (соотв. биинвариантное подпространство), *связанный* с σ, или с любым эквивалентным представлением.

14.2.5. Предложение. *Пусть F — минимальный проектор в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$ такой, что $\mathfrak{U}(A)_F$ и $\mathfrak{W}(A)_F$ (которые являются факторами) имеют тип* I. *Существует по крайней мере один минимальный проектор E в $\mathfrak{W}(A)$, мажорируемый F. Подпредставление σ представления λ, определяемое E, есть неприводимое представление с интегрируемым квадратом, класс которого* *не зависит от выбора E, и связанный с ним центральный проектор есть F.*

Любой фактор типа I имеет минимальные проекторы (А36), откуда следует существование E. Так как σ неприводимое подпредставление λ, то оно — с интегрируемым квадратом (14.1.3); его класс не зависит от выбора E (14.2.3); очевидно, что связанный с ним центральный проектор есть F.

Библиография: [29], [174].

14.3. Коэффициенты представлений с интегрируемым квадратом.

14.3.1. Предложение. *Пусть σ — неприводимое подпредставление левого регулярного представления группы G. Пусть ξ, $\eta \in H_\sigma$; пусть $s \to \varphi_{\xi,\eta}(s) = (\sigma(s)\xi \mid \eta)$ — соответствующий коэффициент σ. Тогда $\check{\varphi}_{\xi,\eta} = \xi * \eta^* \in L^2(G)$. Замкнутое векторное подпространство $L^2(G)$, порожденное $\check{\varphi}_{\xi,\eta}(\xi, \eta \in H_\sigma)$, есть биинвариантное подпространство, связанное с σ.*

Имеем

$$\check{\varphi}_{\xi,\eta}(s) = (\xi \mid \sigma(s)\eta) = \int \xi(t)\bar{\eta}(s^{-1}t)\,dt = \int \xi(t)\eta^*(t^{-1}s)\,dt = (\xi * \eta^*)(s).$$

Пусть K — биинвариантное подпространство, связанное с σ. Тогда ξ и η, поэтому и η^*, принадлежат K, а тогда и гильбертовой алгебре A группы G [14.2.2(iii)], следовательно, $\xi * \eta^* = V_{\eta^*}\xi \in K$. С другой стороны, так как H_σ инвариантно относительно $\mathfrak{U}(A)$, получаем, что множество $\xi * \eta^*$ (ξ, $\eta \in H_\tau$) инвариантно относительно умножения слева или справа на элементы A. Следовательно, если K' обозначает замкнутое векторное подпространство, порожденное этим множеством, то K' есть биинвариантное замкнутое векторное подпространство в $L^2(G)$, содержащееся в K. Так как K есть минимальное биинвариантное замкнутое векторное подпространство [14.2.2 (i)], то $K' = K$.

14.3.2. Следствие. *Пусть σ — неприводимое унитарное представление G с интегрируемым квадратом. Все коэффициенты G — с интегрируемым квадратом.*

14.3.3. Теорема. *Пусть σ — неприводимое представление G с интегрируемым квадратом. Пусть ξ, $\eta \in H_\sigma$; положим $\varphi_{\xi,\eta}(s) = (\pi(s)\xi \mid \eta)$ $(s \in G)$. Существует единственная постоянная d_σ $(0 < d_\sigma < +\infty)$ такая, что*

$$\int \varphi_{\xi,\eta}(s)\overline{\varphi_{\xi',\eta'}(s)}\,ds = d_\sigma^{-1}(\xi \mid \xi')\overline{(\eta \mid \eta')}, \tag{1}$$

$$\varphi_{\xi,\eta} * \varphi_{\xi',\eta'} = d_\sigma^{-1}(\xi \mid \eta')\varphi_{\xi',\eta} \tag{2}$$

для любых $\xi, \eta, \xi', \eta' \in H_\sigma$. *В частности если* φ — *непрерывная функция положительного типа, связанная с* σ *и равная* 1 *в* e, *то*

$$\|\varphi\|_2^2 = d_\sigma^{-1}, \tag{3}$$

$$\varphi * \varphi = d_\sigma^{-1}\varphi. \tag{4}$$

Пусть A — гильбертова алгебра G. Можно предположить, что σ — подпредставление левого регулярного представления, определяемое минимальным проектором $E \in \mathfrak{W}(A)$. Используя равенство $\check{\varphi}_{\xi,\eta} = \xi * \eta^* = V_{\eta^*}\xi$ из 14.3.1, получаем

$$\int \varphi_{\xi,\eta}(s)\overline{\varphi_{\xi',\eta'}(s)}\,ds = \int \varphi_{\xi,\eta}(s^{-1})\overline{\varphi_{\xi',\eta'}(s^{-1})}\,ds = (V_{\eta^*}\xi \mid V_{\eta'^*}\xi') = (V_{\eta'}V_\eta^*\xi \mid \xi') = (EV_{\eta'}V_\eta^*E\xi \mid \xi').$$

Но так как E — минимальный проектор в $\mathfrak{W}(A)$, то существует $\lambda_{\eta,\eta'} \in \boldsymbol{C}$ такое, что $EV_{\eta'}V_\eta^*E = \lambda_{\eta,\eta'}E$. Поэтому

$$\int \varphi_{\xi,\eta}(s)\overline{\varphi_{\xi',\eta'}(s)}\,ds = \lambda_{\eta,\eta'}(\xi \mid \xi').$$

Этот интеграл равен также, вследствие 13.1.1, выражению

$$\int \varphi_{\eta',\xi'}(s^{-1})\overline{\varphi_{\eta,\xi}(s^{-1})}\,ds = (V_{\xi'^*}\eta' \mid V_{\xi^*}\eta) = \lambda_{\xi',\xi}(\eta' \mid \eta).$$

Поэтому $\lambda_{\eta,\eta'} = \lambda_\sigma(\eta' \mid \eta)$, где λ_σ — конечная постоянная. Полагая $\xi = \xi' = \eta = \eta' \neq 0$, видим, что $\lambda_\sigma > 0$. Тогда достаточно положить $\lambda_\sigma^{-1} = d_\sigma$, чтобы получить (1).

В частности,

$$(\varphi_{\xi,\eta} * \varphi_{\xi',\eta'})(s) = \int (\sigma(t)\xi \mid \eta)(\sigma(t^{-1}s)\xi' \mid \eta')\,dt = \int (\sigma(t)\xi \mid \eta)\overline{(\sigma(t)\eta' \mid \sigma(s)\xi')}\,dt = d_\sigma^{-1}(\xi \mid \eta')(\sigma(s)\xi' \mid \eta) = d_\sigma^{-1}(\xi \mid \eta')\varphi_{\xi',\eta}(s).$$

14.3.4. Определение. *Постоянная* d_σ *называется формальной размерностью* σ.

Ее значение зависит от выбора меры Хаара на G. Мы увидим в 15.2.3, что если G компактна и если мера Хаара имеет полную массу 1, то d_σ есть размерность σ в обычном смысле. Это объясняет принятую терминологию.

14.3.5. Предложение. *Пусть* λ, ρ — *левое и правое регулярное представление* G, σ — *неприводимое представление* λ, $K \supset H_\sigma$ — *биинвариантное подпространство* $L^2(G)$, *связанное с* σ, λ_1, ρ_1 — *подпредставления* λ *и* ρ, *определенные* K, $\overline{H}_\sigma$ — *гильбертово пространство, сопряженное к* H_σ.

Тогда:

(i) *Существует единственный изоморфизм* Φ *гильбертова пространства* $H_\sigma \otimes \overline{H}_\sigma$ *на* K, *переводящий* $\xi \otimes \eta$ *в* $d_\sigma^{1/2}\check{\varphi}_{\xi,\eta}$ *для любых* ξ, $\eta \in H_\sigma$.

(ii) *Пусть* 1_{H_σ}, $1_{\overline{H}_\sigma}$ — *тривиальные представления в* H_σ *и* $\overline{H}_\sigma$. *Тогда* Φ *переводит* $\sigma \otimes 1_{\overline{H}_\sigma}$ *в* λ_1 *и* $1_{H_\sigma} \otimes \bar{\sigma}$ *в* ρ_1.

(iii) $\lambda_1 \simeq (\dim\sigma)\sigma$, $\rho_1 \simeq (\dim\sigma)\bar{\sigma}$.

Отображение $(\xi, \eta) \to d_\sigma^{1/2}\check{\varphi}_{\xi,\eta}$ линейно по ξ, антилинейно по η. Поэтому существует линейное отображение алгебраического тензорного произведения H_σ и $\overline{H}_\sigma$ на всюду плотное векторное подпространство в K, переводящее $\xi \otimes \eta$ в $d_\sigma^{1/2}\check{\psi}_{\xi,\eta}$ (14.3.1). Если ξ, ξ', η, $\eta' \in H_\sigma$, то, согласно 14.3.3, имеем

$$(\xi \otimes \eta \mid \xi' \otimes \eta') = (\xi \mid \xi')\overline{(\eta \mid \eta')} = \left(d_\sigma^{1/2}\check{\varphi}_{\xi,\eta} \middle| d_\sigma^{1/2}\check{\varphi}_{\xi',\eta'}\right),$$

поэтому построенное линейное отображение продолжается до изоморфизма Φ гильбертова пространства $H_\sigma \otimes \overline{H}_\sigma$ на гильбертово пространство K. Свойство единственности в (i) очевидно, так как множество $\xi \otimes \eta$ тотально в $H_\sigma \otimes \overline{H}_\sigma$. Пусть $s \in G$, ξ, $\eta \in H_\sigma$; тогда

$$\Phi(\sigma(s)\xi \otimes \eta) = \check{\varphi}_{\sigma(s)\xi,\eta}$$

и

$$\check{\varphi}_{\sigma(s)\xi,\eta}(t) = \left(\sigma(t^{-1})\sigma(s)\xi \mid \eta\right) = \left(\sigma(t^{-1}s)\xi \mid \eta\right) = \\ = \check{\varphi}_{\xi,\eta}(s^{-1}t) = \left(\lambda(s)\check{\varphi}_{\xi,\eta}\right)(t),$$

поэтому Φ переводит $\sigma \otimes 1_{\overline{H}_\sigma}$ в λ_1, и точно так же получаем, что Φ переводит $1_{H_\sigma} \otimes \bar{\sigma}$ в ρ_1. Наконец, (iii) следует из (ii).

14.3.6. Предложение. *Сохраним обозначения* 14.3.5. *Если канонически отождествить* $H_\sigma \otimes H_{\bar{\sigma}}$ *с множеством операторов Гильберта — Шмидта в* H_σ, *то*

$$\Phi(u^*) = \Phi(u)^*, \quad \Phi(uv) = d_\sigma^{1/2}\Phi(u) * \Phi(v)$$

для любых u, $v \in H_\sigma \otimes \overline{H}_\sigma$.

Достаточно проверить это для $u = \xi \otimes \eta$, $v = \xi' \otimes \eta'$ (ξ, η, ξ', $\eta' \in H_\sigma$). Но

$$\Phi((\xi \otimes \eta)^*) = \Phi(\eta \otimes \xi) = d_\sigma^{1/2}\check{\varphi}_{\eta,\xi} = \left(d_\sigma^{1/2}\check{\varphi}_{\xi,\eta}\right)^*$$

и

$$\Phi((\xi \otimes \eta)(\xi' \otimes \eta')) = \Phi((\xi' \mid \eta)\xi \otimes \eta') = \\ = d_\sigma^{1/2}(\xi' \mid \eta)\check{\varphi}_{\xi,\eta'} = d_\sigma^{1/2}d_\sigma\check{\varphi}_{\xi,\eta} * \check{\varphi}_{\xi',\eta'} = d_\sigma^{1/2}\Phi(\xi \otimes \eta) * \Phi(\xi' \otimes \eta').$$

14.3.7. Теорема. *Пусть σ, σ' — неэквивалентные неприводимые представления G с интегрируемым квадратом. Для ξ, $\eta \in H_\sigma$, ξ', $\eta' \in H_{\sigma'}$ имеем*

$$\int \varphi_{\xi, \eta}(s) \overline{\varphi_{\xi', \eta'}(s)}\, ds = 0,$$

$$\varphi_{\xi, \eta} * \varphi_{\xi', \eta'} = 0.$$

Биинвариантные подпространства K и K' в $L^2(G)$, связанные с σ и σ', ортогональны (14.2.3). С другой стороны, $\check{\varphi}_{\xi, \eta} \in K$, $\check{\varphi}_{\xi', \eta'} \in K$ (14.3.1), откуда

$$(\varphi_{\xi, \eta} | \varphi_{\xi', \eta'}) = (\check{\varphi}_{\xi, \eta} | \check{\varphi}_{\xi', \eta'}) = 0.$$

Наконец, K и K' инвариантны относительно $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{W}(A)$ (где A — гильбертова алгебра G), откуда

$$\check{\varphi}_{\xi', \eta'} * \check{\varphi}_{\xi, \eta} \in K \cap K' = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_{\xi, \eta} * \varphi_{\xi', \eta'} = 0.$$

Библиография: [29], [174].

14.4. Формальная размерность и след.

14.4.1. Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство, B — гильбертова алгебра операторов Гильберта — Шмидта в H, $b \to U_b$ — каноническое отображение B в $\mathfrak{U}(B)$, E — минимальный проектор в $\mathfrak{W}(B)$, $\sigma(b)$ — оператор, индуцируемый U_b в $E(B)$. Для любого $b \in B$ имеем $\| b \|^2 = \operatorname{Tr}(\sigma(b)\sigma(b)^*)$.*

$\mathfrak{U}(B)$ — фактор типа I, и $b \to U_b$ — изоморфизм гильбертовой алгебры B на гильбертову алгебру операторов Гильберта — Шмидта относительно $\mathfrak{U}(B)$ (A61). С другой стороны $T \to T_E$ — изоморфизм $\mathfrak{U}(B)$ на $\mathfrak{B}(E(B))$. Поэтому $b \to \sigma(b)$ — изоморфизм гильбертовой алгебры B на гильбертову алгебру операторов Гильберта — Шмидта в $E(B)$. Поэтому

$$\operatorname{Tr}(\sigma(b)\sigma(b)^*) = \operatorname{Tr}(bb^*) = \| b \|^2.$$

14.4.2. Предложение. *Пусть σ — неприводимое представление G с интегрируемым квадратом, F — центральный проектор, связанный с σ. Для любой $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ имеем*

$$\int |(Ff)(s)|^2 ds = d_\sigma \operatorname{Tr}(\sigma(f)\sigma(f)^*).$$

Пусть A — гильбертова алгебра G и $K = F(L^2(G))$. Тогда $P_K(A) = A \cap K = K$ (14.2.2) и K — гильбертова алгебра, причем связанные с K алгебры фон Неймана суть $\mathfrak{U}(A)_F$ и $\mathfrak{W}(A)_F$. Пусть E — минимальный проектор в $\mathfrak{W}(A)$, мажорируемый F, так что σ отождествляется с подпредставлением левого регулярного представления, определяемым E. Любой $f \in A$ определяет оператор $U_f \in \mathfrak{U}(A)$, и U_f индуцирует в $H_\sigma = E(L^2(G))$

оператор, который мы обозначим $\sigma(f)$; это согласуется с обычным обозначением для $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Докажем теперь требуемое в предложении равенство для любой $f \in A$. Так как $U_{Ff} = FU_f$, то $\sigma(Ff) = \sigma(f)$. Поэтому обе части доказываемого равенства не изменятся, если заменить f на Ff. Предположим в дальнейшем, что $f \in K$.

Воспользуемся обозначениями 14.3.5. Существует такой $u \in H_\sigma \otimes \overline{H}_\sigma$, что $f = \Phi(u)$, причем $\|f\|_2 = \|u\|$. С другой стороны, если $v \in H_\sigma \otimes \overline{H}_\sigma$, то $\Phi(u)\Phi(v) = d_\sigma^{-1/2}\Phi(uv)$ (14.3.6), поэтому Φ^{-1} переводит оператор левого умножения на f в K в оператор левого умножения на $d_\sigma^{-1/2}u$ в $H_\sigma \otimes \overline{H}_\sigma$. Согласно 14.4.1 имеем

$$\operatorname{Tr}\left(\sigma(f)\sigma(f)^*\right) = \|d_\sigma^{-1/2}u\|^2 = d_\sigma^{-1}\|u\|^2 = d_\sigma^{-1}\|f\|^2.$$

14.4.3. Предложение. *Пусть* $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, $f' \in L^1(G) \cap L^2(G)$, $g = f * f'$. *Для любого* $t \in G$ *обозначим* g^t *функцию* $s \to g(tst^{-1})$ *на* G. *Пусть* σ — *неприводимое представление* G *с интегрируемым квадратом. Тогда*:

(i) *Оператор* $\sigma(g)$ *есть оператор со следом.*

(ii) *Для любого единичного вектора* ξ *в* H_σ *функция* $t \to (\sigma(g^t)\xi \mid \xi)$ *интегрируема на* G *и*

$$\int (\sigma(g^t)\xi \mid \xi)\, dt = d_\sigma^{-1} \operatorname{Tr}\sigma(g).$$

Ввиду линейности можно ограничиться случаем $f' = f^*$. Так как $\sigma(f)$ — оператор Гильберта — Шмидта (14.4.2), то $\sigma(g) = \sigma(f)\sigma(f^*)$ — положительный оператор со следом. Пусть (ε_i) — ортонормированный базис в H_σ, образованный собственными векторами $\sigma(g)$. Пусть $\sigma(g)\varepsilon_i = \lambda_i\varepsilon_i$, так что $\Sigma\lambda_i < +\infty$ Для любого $t \in G$ имеем

$$\begin{aligned}(\sigma(g^t)\xi \mid \xi) &= (\sigma(t^{-1})\sigma(g)\sigma(t)\xi \mid \xi) = \\ &= (\sigma(g)\sigma(t)\xi \mid \sigma(t)\xi) = \sum_i (\sigma(g)\sigma(t)\xi \mid \varepsilon_i)\overline{(\sigma(t)\xi \mid \varepsilon_i)} = \\ &= \sum_i \lambda_i \,|(\sigma(t)\xi \mid \varepsilon_i)|^2,\end{aligned}$$

откуда, согласно 14.3.3,

$$\int (\sigma(g^t)\xi \mid \xi)\, dt = \sum_i \lambda_i \int |(\sigma(t)\xi \mid \varepsilon_i)|^2 dt = \sum \lambda_i d_\sigma^{-1} = d_\sigma^{-1}\operatorname{Tr}\sigma(g).$$

Библиография: [174].

14.5. Интегрируемые представления.

14.5.1. Предложение. *Пусть σ — неприводимое непрерывное унитарное представление G. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует такой $\xi \in H_\sigma$, $\xi \neq 0$, что функция $s \to (\sigma(s)\xi \mid \xi)$ интегрируема на G;*

(ii) *существует такое векторное подпространство H', всюду плотное в H, что при $\eta, \zeta \in H'$ функция $s \to (\sigma(s)\eta \mid \zeta)$ интегрируема на G.*

Предположим, что выполнено условие (i). Пусть $g, h \in \mathcal{K}(G)$. Для любого $s \in G$ имеем

$$(\sigma(g)\xi \mid \sigma(s)\sigma(h)\xi) = \int\int g(t)\overline{h(u)}(\sigma(t)\xi \mid \sigma(s)\sigma(u)\xi)\,dt\,du = \\ = \int\int g(t)\overline{h(u)}\left(\xi \mid \sigma(t^{-1}su)\xi\right)dt\,du.$$

Поэтому

$$\int^* |(\sigma(g)\xi \mid \sigma(s)\sigma(h)\xi)|\,ds \leqslant \\ \leqslant \int\int^*\int \left|g(t)\overline{h(u)}\left(\xi \mid \sigma(t^{-1}su)\xi\right)\right| ds\,dt\,du = \\ = \int\int^*\int |g(t)h(u)(\xi \mid \sigma(s)\xi)|\,ds\,dt\,du = \\ = \int |g(t)|\,dt \int |h(u)|\,du \int |(\xi \mid \sigma(s)\xi)|\,ds < +\infty.$$

Таким образом, условие (ii) выполнено при $H' = \sigma(\mathcal{K}(G))\xi$. [Это подпространство — ненулевое и инвариантное относительно $\sigma(G)$ и $\overline{H'} = H$ ввиду неприводимости σ.]

14.5.2. Определение. *Неприводимое непрерывное унитарное представление G называется интегрируемым, если оно удовлетворяет эквивалентным условиям* 14.5.1.

В обозначениях 14.5.1 функция $s \to (\sigma(s)\xi \mid \xi)$ на G ограничена и интегрируема, поэтому — с интегрируемым квадратом. Следовательно, интегрируемое неприводимое представление есть представление с интегрируемым квадратом. Обратное, вообще говоря, неверно.

Библиография: [174].

14.6. Дополнения.

14.6.1. Пусть G — локально компактная группа, π — непрерывное унитарное представление G, p и q — такие числа из $[1, +\infty]$, что $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Следующие условия эквивалентны:

a) существует такая конечная постоянная M, что

$$\|\pi(f)\| \leqslant M\|f\|_p \quad \text{при} \quad f \in L^1(G) \cap L^p(G)$$

($\|f\|_p$ обозначает норму в $L^p(G)$);

b) для всех $\xi, \eta \in H_\pi$ функция $s \to (\pi(s)\xi \mid \eta)$ принадлежит $L^q(G)$ [76].

14.6.2. Пусть G — унимодулярная локально компактная группа, σ — неприводимое унитарное представление G с интегрируемым квадратом, K_σ — соответствующее биинвариантное подпространство. Тогда $\bar{\sigma}$ — неприводимое представление с интегрируемым квадратом и соответствующее биинвариантное подпространство есть образ K_σ при отображении $f \to \bar{f}$, а также при отображении $f \to \check{f}$ пространства $L^2(G)$ на $L^2(G)$.

***14.6.3.** Неприводимые непрерывные унитарные представления с интегрируемым квадратом полупростых связных вещественных групп Ли начинают становиться известными[1]). Полупростые связные комплексные группы Ли, нильпотентные односвязные вещественные группы Ли не имеют неприводимых непрерывных унитарных представлений с интегрируемым квадратом [42], [174], [175].

§ 15. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

В этом параграфе G обозначает компактную группу. Мера Хаара на G всегда выбирается так, что ее полная масса есть 1. Имеем $L^1(G) \supset L^2(G)$ и $\|f\|_2 \geqslant \|f\|_1$ для любой $f \in L^2(G)$.

15.1. Полная приводимость.

15.1.1. Лемма. *В G существует фундаментальная система окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов.*

Нужно показать, что для любого $s \in G$, $s \neq e$ существует компактная и инвариантная относительно внутренних автоморфизмов окрестность V точки e такая, что $s \notin V$. Пусть W — такая компактная окрестность s, что $e \notin W$. Образ $G \times W$ при отображении $(t, w) \to twt^{-1}$ есть компактная окрестность W' точки s, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов и такая, что $e \notin W'$. Поэтому дополнение W' есть открытая окрестность e, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов, и ее замыкание не содержит s.

15.1.2. Лемма. *Гильбертова алгебра A группы G равна $L^2(G)$. Пусть (F_i) — семейство попарно ортогональных минимальных проекторов в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$. Тогда A — гильбертова сумма*

---

[1]) См. [390*] и изложение в [388*].

$A_i = F_i(A)$, A_i — попарно аннулирующие друг друга самосопряженные двусторонние идеалы A и каждый A_i изоморфен гильбертовой алгебре операторов Гильберта — Шмидта в конечномерном гильбертовом пространстве.

Так как $A \supset L^1(G) \cap L^2(G) = L^2(G)$, то $A = L^2(G)$. Согласно 15.1.1 и 13.10.5 $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{W}(A)$ суть конечные алгебры фон Неймана. Тогда лемма следует из А65 и А68.

15.1.3. Теорема. *Пусть π — непрерывное унитарное представление G. Тогда π — гильбертова сумма конечномерных неприводимых представлений.*

Сохраним обозначения 15.1.2. Пусть H_i — замкнутое векторное подпространство H_π, порожденное $\pi(f)\xi$ ($f \in A_i$, $\xi \in H_\pi$). Так как $A = L^2(G)$ всюду плотно в $L^1(G)$, то сумма H_i всюду плотна в H_π. Если $H_\pi \neq 0$, то существует такой индекс i, что $H_i \neq 0$. Для $j \neq i$ имеем $A_j A_i = 0$, тогда $\pi(A_j)\pi(A_i)(H_\pi) = 0$ и $\pi(A_j)(H_i) = 0$. Пусть ξ — ненулевой элемент H_i. Конечномерное подпространство $\pi(A_i)\xi$ равно $\pi(A)\xi$ и поэтому равно $\pi(L^1(G))\xi$; оно отлично от нуля и инвариантно относительно $\pi(G)$. Это подпространство содержит ненулевое подпространство, инвариантное относительно $\pi(G)$ и такое, что соответствующее подпредставление G неприводимо (2.3.5).

Пусть тогда (K_α) — максимальное семейство конечномерных подпространств H_π, инвариантных относительно $\pi(G)$, попарно ортогональных и таких, что соответствующие подпредставления G неприводимы. Тогда $H \ominus (\bigoplus_\alpha K_\alpha)$ инвариантно относительно $\pi(G)$, поэтому оно нулевое согласно предыдущему рассуждению и максимальности семейства (K_α). Итак, $H = \bigoplus_\alpha K_\alpha$.

15.1.4. Следствие. *Любое неприводимое унитарное представление G конечномерно.*

15.1.5. Следствие. *C^*-алгебра группы G есть CCR-алгебра.*

Это следует из 15.1.4, так как в конечномерном гильбертовом пространстве любой линейный оператор компактен.

15.1.6. Следствие. *Пусть (σ_α) — семейство конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений G. Тогда $\bigcap_\alpha \operatorname{Ker} \sigma_\alpha = \{e\}$.*

Это следует из 13.6.6 и 15.1.4.

15.1.7. Следствие. *G — проективный предел компактных групп Ли.*

Пусть (ρ_α) — семейство конечномерных непрерывных унитарных представлений G. Семейство $(\operatorname{Ker} \rho_\alpha)$ убывает и $\bigcap \operatorname{Ker} \rho_\alpha = \{e\}$ (15.1.6), поэтому G — проективный предел групп $G/\operatorname{Ker} \rho_\alpha$, которые изоморфны группам $\rho_\alpha(G)$. Так как $\dim \rho_\alpha < +\infty$, то унитарная группа пространства H_{ρ_α} есть группа Ли; так как

$\rho_\alpha(G)$ — замкнутая подгруппа этой группы, то $\rho_\alpha(G)$ — группа Ли.

15.1.8. Следствие. *Пусть π — непрерывное унитарное представление G. Тогда:*

(i) *Существуют такие кардинальные числа n_σ $(\sigma \in \widehat{G})$, что $\pi = \bigoplus\limits_{\sigma \in \widehat{G}} n_\sigma \sigma$.*

(ii) *Подпространство $H_{n_\sigma \sigma}$ пространства H_π не зависит от выбора разложения π и является замкнутым векторным подпространством H_π, порожденным пространствами подпредставлений, эквивалентных σ.*

(iii) *Кардинальные числа n_σ не зависят от выбора разложения π.*

(i) сразу следует из 15.1.3.

Пусть σ' — подпредставление π, эквивалентное σ $(\sigma \in \widehat{G})$. Тогда σ' дизъюнктно с τ при $\tau \in \widehat{G}$, $\tau \neq \sigma$ (5.2.2), поэтому $H_{\sigma'}$ ортогонально $H_{n_\tau \tau}$ при $\tau \neq \sigma$ [условие iii в 5.2.1], поэтому $H_{\sigma'} \subset H_{n_\sigma \sigma}$, откуда следует (ii).

Так как $\dim H_{n_\sigma \sigma} = n_\sigma \dim \sigma$, то (iii) следует из (ii).

Возможность определить $H_{n_\sigma \sigma}$ внутренним образом будет показана другим способом в 15.3.12.

15.1.9. При условиях 15.1.8 говорят, что σ входит в π n_σ раз (или с кратностью n_σ).

Библиография: [4], [74], [78], [95].

15.2. Неприводимые представления компактной группы.

15.2.1. Согласно предыдущему, изучение непрерывных унитарных представлений G сводится к изучению неприводимых представлений. Эти последние очевидным образом являются представлениями с интегрируемым квадратом, поэтому можно применить к ним результаты § 14. Заметим, что все эти представления являются подпредставлениями регулярного представления.

15.2.2. Теорема. *Пусть $A = L^2(G)$ — гильбертова алгебра G, (F_i) — семейство минимальных проекторов в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{V}(A)$, λ и ρ — левое и правое регулярные представления G, λ_i и ρ_i — подпредставления λ и ρ, определяемые F_i, σ_i — класс неприводимых унитарных представлений, которым соответствует центральный проектор F_i, и $\delta_i = \dim \sigma_i$. Тогда:*

(i) *λ есть гильбертова сумма λ_i, ρ — гильбертова сумма ρ_i;*

(ii) *λ_i — гильбертова сумма δ_i представлений класса σ_i, ρ_i — гильбертова сумма δ_i представлений класса $\bar{\sigma}_i$.*

Известно, что $L^2(G)$ — гильбертова сумма $F_i(L^2(G))$ (15.1.2), отсюда следует (i), а (ii) есть частный случай 14.3.5 (iii).

15.2.3. Предложение. *Пусть σ — неприводимое непрерывное унитарное представление G. Формальная размерность d_σ представления σ равна* $\dim\sigma$.

Алгебра $\sigma(\mathscr{K}(G))$ неприводима в H_σ, поэтому совпадает с $\mathfrak{B}(H_\sigma)$, так как $\dim H_\sigma < +\infty$. Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$ и $\sigma(f) = 1$. Пусть $g = f * f$. Для любого $t \in G$ введем g^t — функцию $s \to g(tst^{-1})$ на G. Имеем

$$\sigma(g^t) = \sigma(t^{-1})\sigma(f * f)\sigma(t) = 1.$$

Пусть ξ — единичный вектор в H_σ. Согласно 14.4.3 имеем

$$d_\sigma^{-1}(\dim\sigma) = d_\sigma^{-1}\operatorname{Tr}\sigma(g) = \int (\sigma(g^t)\xi \mid \xi)\,dt = 1,$$

откуда $d_\sigma = \dim\sigma$.

15.2.4. Теорема. *Для любой $f \in L^2(G)$ имеем*

$$\int |f(s)|^2 ds = \sum_{\sigma\in\widehat{G}} (\dim\sigma)\operatorname{Tr}(\sigma(f)\sigma(f)^*).$$

Для любого $\sigma \in \widehat{G}$ введем F_σ — центральный проектор в $L^2(G)$, связанный с σ. Вследствие 15.1.2 имеем

$$L^2(G) = \bigoplus_{\sigma\in\widehat{G}} F_\sigma(L^2(G)),$$

поэтому

$$\|f\|_2^2 = \sum_{\sigma\in\widehat{G}} \|F_\sigma f\|_2^2.$$

Вследствие 14.4.2 и 15.2.3 $\|F_\sigma f\|_2^2 = (\dim\sigma)\cdot\operatorname{Tr}(\sigma(f)\sigma(f)^*)$.

15.2.5. Для любого $\sigma \in \widehat{G}$ выберем ортонормированный базис $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\dim\sigma})$ в H_σ и положим $\varphi_{i,j,\sigma}(s) = (\sigma(s)\xi_i \mid \xi_j)$. Тогда, вследствие 15.1.2 и 14.3.5 (i), функции $(\dim\sigma)^{1/2}\varphi_{i,j,\sigma}$ ($\sigma \in \widehat{G}$, $i, j = 1, 2, \ldots, \dim\sigma$) образуют ортонормированный базис в $L^2(G)$. Вследствие 14.3.3 и 14.3.7 имеем

$$\varphi_{i,j,\sigma} * \varphi_{i',j',\sigma} = (\dim\sigma)^{-1}\delta_i^{j'}\varphi_{i',j,\sigma},$$

$$\varphi_{i,j,\sigma} * \varphi_{i',j',\sigma'} = 0, \quad \text{если} \quad \sigma \neq \sigma'.$$

Библиография: [10], [17], [78].

15.3. Характеры компактных групп.

15.3.1. Определение. *Пусть σ — неприводимое непрерывное унитарное представление G. Непрерывная функция $s \to \operatorname{Tr}\sigma(s)$ на G называется характером σ и обозначается χ_σ. Нормализованным характером называется функция* $(\dim\sigma)^{-1}\chi_\sigma$.

Если G компактна и коммутативна, мы получаем обычное понятие характера.

15.3.2. Характер σ зависит только от класса представления σ. Если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — ортонормированный базис в H_σ, то

$$\chi_\sigma(s) = (\sigma(s)\xi_1 \mid \xi_1) + \ldots + (\sigma(s)\xi_n \mid \xi_n),$$

что доказывает, что χ_σ—функция положительного типа [13.4.5 (ii)], равная $\dim\sigma$ в точке e.

Функция на группе называется *центральной*, если она инвариантна относительно внутренних автоморфизмов этой группы. Определение 15.3.1 показывает, что χ_σ центральна.

15.3.3. Согласно 15.2.5, если $\sigma \in \widehat{G}$ и $\sigma' \in \widehat{G}$ неэквивалентны, то

$$(\chi_\sigma \mid \chi_{\sigma'}) = 0, \tag{1}$$

$$\chi_\sigma * \chi_{\sigma'} = 0, \tag{2}$$

и, с другой стороны, сохраняя обозначения 15.3.2, имеем

$$(\chi_\sigma * \chi_\sigma)(s) = n^{-1}[(\sigma(s)\xi_1 \mid \xi_1) + \ldots + (\sigma(s)\xi_n \mid \xi_n)],$$

откуда

$$\chi_\sigma * \chi_\sigma = (\dim\sigma)^{-1}\chi_\sigma; \tag{3}$$

в частности,

$$\|\chi_\sigma\|_2 = 1. \tag{4}$$

15.3.4. Пусть K_σ — биинвариантное подпространство $L^2(G)$, связанное с σ. Тогда K_σ, рассматриваемое как гильбертова алгебра, изоморфно алгебре операторов Гильберта — Шмидта в конечномерном гильбертовом пространстве (15.1.2). Эта алгебра имеет одномерный центр. Но $\check{\chi}_\sigma = \bar{\chi}_\sigma = \chi_{\bar{\sigma}}$ — центральная функция на G, принадлежащая K_σ (14.3.1). Поэтому центр K_σ есть $\boldsymbol{C}\chi_{\bar{\sigma}}$. Вследствие 15.1.2 центр гильбертовой алгебры $L^2(G)$ есть гильбертова сумма $\boldsymbol{C}\chi_{\bar{\sigma}}$. Согласно формуле (4) в 15.3.3 функции χ_σ образуют ортонормированный базис в центре $L^2(G)$.

15.3.5. Согласно формуле (3) в 15.3.3 оператор свертки с $(\dim\sigma)\chi_{\bar{\sigma}}$ в $L^2(G)$ есть ненулевой проектор. Так как $\chi_{\bar{\sigma}} = \chi_{\bar{\sigma}}^*$, то этот проектор эрмитов. Он принадлежит $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{V}(A)$ (A — гильбертова алгебра G), и множество его значений содержится в K_σ. Так как P_{K_σ} — минимальный проектор в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{V}(A)$, то оператор свертки с $(\dim\sigma)\chi_{\bar{\sigma}}$ есть P_{K_σ}. Для любой $f \in L^2(G)$ имеем

$$f = \sum_{\sigma \in \widehat{G}} (\dim\sigma)(f * \chi_\sigma),$$

где ряд сходится в $L^2(G)$. Если f центральна, то это разложение сводится к разложению f по ортонормированному базису (χ_σ) центра $L^2(G)$:

$$f = \sum_{\sigma \in \widehat{G}} (f \mid \chi_\sigma)\, \chi_\sigma.$$

Пусть f — центральная непрерывная комплексная функция на G. Согласно 15.1.1 функция f есть равномерный предел на G функций вида $f * g$, где g центральна и принадлежит $L^2(G)$. Так как f и g суть пределы в $L^2(G)$ конечных линейных комбинаций характеров G, то любая центральная непрерывная комплексная функция на G есть равномерный предел на G конечных линейных комбинаций характеров G.

Если в качестве G взять группу вещественных чисел, рассматриваемых по модулю 1, то все эти факты сводятся к хорошо известным утверждениям о рядах Фурье.

15.3.6. Для любого конечномерного непрерывного унитарного представления π группы G можно определить характер χ_π представления π, как в 15.3.1. Пусть $\pi = n_1\sigma_1 \oplus \ldots \oplus n_p\sigma_p$ — разложение π на неприводимые представления, где σ_i попарно неэквивалентны, а n_i — целые числа. Тогда

$$(\chi_\pi \mid \chi_{\sigma_i}) = n_i (\chi_{\sigma_i} \mid \chi_{\sigma_i}) = n_i.$$

Следовательно, по известному характеру χ_π можно восстановить n_i. Иначе говоря, конечномерные непрерывные унитарные представления G эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеры равны.

Если π и π' — конечномерные непрерывные унитарные представления G, то, очевидно,

$$\chi_{\pi \otimes \pi'} = \chi_\pi \chi_{\pi'}.$$

В дальнейшем, говоря о характерах компактной группы, мы будем иметь в виду характеры неприводимых представлений.

15.3.7. Предложение. *Пусть μ — мера на G и μ центральна (т. е. перестановочна относительно свертки с любой мерой). Для того чтобы $\mu \gg 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\chi) \geqslant 0$ для любого характера χ группы G.*

Если $\mu \gg 0$, то $\mu(\chi) = (\dim \sigma)\, \mu(\chi * \chi)$, где σ — представление с характером χ. Но

$$\mu(\chi * \chi) = \mu(\chi * \chi^*) \geqslant 0.$$

Обратно, предположим, что $\mu(\chi) \geqslant 0$ для любого характера χ. Пусть λ — левое регулярное представление G. Для доказательства соотношения $\mu \gg 0$ достаточно показать, что $\lambda(\mu) \geqslant 0$ (13.7.4). Пусть A — гильбертова алгебра G, (F_i) — семейство минимальных проекторов в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$, $K_i = F_i(L^2(G))$. Так как μ центральна, то $\lambda(\mu) \in \mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$ и $\lambda(\mu)$ на каждом K_i сводится к скаляру λ_i. Пусть χ_i — характер, принадлежащий K_i. Имеем (обозначая через σ_i представление с характером χ_i)

$$\lambda_i(\chi_i \mid \chi_i) = (\lambda(\mu)\chi_i \mid \chi_i) = (\mu * \chi_i \mid \chi_i) =$$
$$= (\mu * \chi_i * \chi_i^*)(e) = (\dim \sigma_i)^{-1} (\mu * \chi_i)(e) = (\dim \sigma_i)^{-1} \mu(\bar{\chi}_i) \geqslant 0.$$

15.3.8. Предложение. *Пусть $f \in L^2(G)$ — центральная функция на G. Пусть $f = \sum_{\sigma \in \hat{G}} \lambda_\sigma \chi_\sigma$, где $\Sigma \lambda_\sigma^2 < +\infty$ (15.3.4). Для того чтобы f была непрерывной функцией положительного типа, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_\sigma \geqslant 0$ для любого $\sigma \in \hat{G}$ и $\sum_{\sigma \in \hat{G}} \lambda_\sigma (\dim \sigma) < +\infty$.*

Условие достаточно, так как χ_σ — функция положительного типа, мажорируемая по модулю числом $\dim \sigma$. Пусть f — непрерывная функция положительного типа. Тогда $f = g * g^*$, где $g \in L^2(G)$ (13.8.6). Для любого $\sigma \in \hat{G}$ введем K_σ — биинвариантное подпространство $L^2(G)$, связанное с σ. Имеем

$$g = \sum_{\sigma \in \hat{G}} \mu_\sigma g_\sigma,$$

где

$$g_\sigma \in K_\sigma, \quad \| g_\sigma \|_2 = 1, \quad \sum_{\sigma \in \hat{G}} |\mu_\sigma|^2 < +\infty.$$

Так как $g_\sigma * g_{\sigma'}^* = 0$ при $\sigma \neq \sigma'$ и $\| u * v \|_\infty \leqslant \| u \|_2 \| v \|_2$ для любых $u, v \in L^2(G)$, то f — сумма равномерно сходящегося ряда $\sum_{\sigma \in \hat{G}} |\mu_\sigma|^2 (g_\sigma * g_\sigma^*)$. С другой стороны, $g_\sigma * g_\sigma^* \in K_\sigma$, так что $|\mu_\sigma|^2 (g_\sigma * g_\sigma^*)$ — ортогональная проекция f на K_σ и потому центральна. Можно предполагать, что g_σ центральна при $\mu_\sigma = 0$. Поэтому $g_\sigma * g_\sigma^*$ центральна и

$$(g_\sigma * g_\sigma^*)(e) = \| g_\sigma \|_2^2 = 1.$$

Вследствие 15.3.4 $g_\sigma * g_\sigma^* = (\dim \sigma)^{-1} \chi_{\bar{\sigma}}$, $\lambda_{\bar{\sigma}} = |\mu_\sigma|^2 (\dim \sigma)^{-1}$, что завершает доказательство.

15.3.9. Следствие. *В выпуклом множестве центральных непрерывных функций положительного типа f на G таких, что $f(e) \leqslant 1$, крайние точки суть 0 и нормализованные характеры.*

15.3.10. Предложение. *Пусть ψ — непрерывная комплексная функция на G. Для того чтобы ψ была нормализованным характером, необходимо и достаточно, чтобы $\psi \neq 0$ и*

$$\int \psi(xsx^{-1}t)\,dx = \psi(s)\,\psi(t) \tag{1}$$

для любых s, $t \in G$.

Предположим, что существует такое $\sigma \in \widehat{G}$, что $\psi = (\dim\sigma)^{-1}\chi_\sigma$. Пусть

$$S = \int \sigma(xsx^{-1})\,dx \in \mathfrak{B}(H_\sigma).$$

Для любого $t \in G$ имеем

$$\sigma(t)\,S = \int \sigma(txsx^{-1})\,dx = \int \sigma\left(xs\left(t^{-1}x\right)^{-1}\right)dx = S\sigma(t).$$

Так как σ неприводимо, то S — скаляр. С другой стороны, $\operatorname{Tr} S = \int \chi_\sigma(xsx^{-1})\,dx = \int \chi_\sigma(s)\,dx = \chi_\sigma(s)$, поэтому

$$\int \sigma(xsx^{-1})\,dx = (\dim\sigma)^{-1}\chi_\sigma(s)\cdot 1. \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$\int \sigma(xsx^{-1}t)\,dx = \left(\int \sigma(xsx^{-1})\,dx\right)\sigma(t) = (\dim\sigma)^{-1}\chi_\sigma(s)\,\sigma(t).$$

Беря след от обеих частей равенства, получаем (1).

Предположим теперь, что $\psi \neq 0$ и ψ удовлетворяет (1). Так как $\psi \neq 0$, то существует такое неприводимое непрерывное унитарное представление σ группы G, для которого $\bar\sigma(\psi) \neq 0$. Имеем

$$\psi(s)\,\bar\sigma(\psi) = \int \psi(s)\,\psi(t)\,\bar\sigma(t)\,dt = \int\int \psi(xsx^{-1}t)\,\bar\sigma(t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\int \psi(t)\,\bar\sigma(xs^{-1}x^{-1})\,dx\,dt = \int \psi(t)\left(\int \bar\sigma(xs^{-1}x^{-1})\,dx\right)\bar\sigma(t)\,dt.$$

Согласно (2)

$$\psi(s)\,\bar\sigma(\psi) = \int \psi(t)\,(\dim\sigma)^{-1}\chi_{\bar\sigma}(s^{-1})\,\bar\sigma(t)\,dt = (\dim\sigma)^{-1}\chi_\sigma(s)\,\bar\sigma(\psi),$$

откуда $\psi = (\dim\sigma)^{-1}\chi_\sigma$.

15.3.11. Лемма. *Пусть σ и σ' — неприводимые непрерывные унитарные представления G. Если σ и σ' неэквивалентны, то $\sigma'(\chi_{\bar\sigma}) = 0$. Если σ и σ' эквивалентны, то $\sigma'(\chi_{\bar\sigma}) = (\dim\sigma)^{-1}\cdot 1$.*

Пусть λ — левое регулярное представление G. Тогда $\lambda((\dim\sigma)\chi_{\bar\sigma})$ — проектор на биинвариантное подпространство $K_\sigma \subset L^2(G)$, связанное с σ (15.3.5). С другой стороны, можно предполагать, что σ' есть подпредставление λ (15.2.1) и $H_{\sigma'}$ ортогонально K_σ или содержится в K_σ, если σ' соответственно неэквивалентно σ или эквивалентно σ (14.2.3).

15.3.12. Теорема. *Пусть π — непрерывное унитарное представление G, $\pi = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} n_\sigma \sigma$ — его разложение на неприводимые представления. Для любого $\sigma \in \hat{G}$ ортогональный проектор пространства H_π на $H_{n_\sigma \sigma}$ есть $\pi((\dim \sigma)\chi_{\bar{\sigma}})$.*

Это сразу следует из 15.3.11.

Библиография: [10], [17], [28], [78].

15.4. Представления конечных групп.

15.4.1. Предложение. *Пусть G — конечная группа порядка n. Пусть r — число классов сопряженных элементов в G. Тогда $\hat{G}$ содержит r элементов и $\sum_{\sigma \in \hat{G}} (\dim \sigma)^2 = n$.*

Для любого $\sigma \in \hat{G}$ введем K_σ — биинвариантное подпространство $L^2(G)$, связанное с σ. Имеем

$$\dim K_\sigma = (\dim \sigma)^2 \quad \text{и} \quad n = \dim L^2(G) = \sum_{\sigma \in \hat{G}} \dim K_\sigma$$

согласно 15.2.1 и 15.2.2. Поэтому $\sum_{\sigma \in \hat{G}} (\dim \sigma)^2 = n$. С другой стороны, число элементов в $\hat{G}$ равно числу характеров G, т. е. размерности центра Z алгебры $L^2(G)$ (15.3.4); характеристические функции классов сопряженных элементов в G образуют базис векторного пространства Z; поэтому $\dim Z = r$.

15.4.2. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_r$ — различные классы сопряженных элементов в G и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ — различные элементы $\hat{G}$. *Таблицей характеров G* называется матрица $(\chi_i^j)_{1 \leqslant i, j \leqslant r}$, где χ_i^j — значение на C_i характера представления σ_j. Пусть h_i — число элементов C_i. Согласно формулам (1) и (4) в 15.3.3 имеем

$$\frac{1}{n} \sum_i h_i \chi_i^j \bar{\chi}_i^{j'} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq j', \\ 1, & \text{если } j = j'. \end{cases} \tag{1}$$

Иначе говоря, матрица $\left(\sqrt{h_i/n}\,\chi_i^j\right)$ унитарна. Поэтому

$$\sum_j \sqrt{\frac{h_i}{n}}\, \chi_i^j \sqrt{\frac{h_{i'}}{n}}\, \overline{\chi_{i'}^j} = \delta_i^{i'},$$

или

$$\frac{1}{n} \sum_j \chi_i^j \bar{\chi}_{i'}^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq i', \\ \dfrac{1}{h_i}, & \text{если } i = i'. \end{cases} \tag{2}$$

15.4.3. Доказательство следующего предложения требует совершенно других методов.

Предложение. *Размерность неприводимого представления G делит порядок G.*

Сохраним обозначения 15.4.2. Пусть $d_j = \dim \sigma_j$.

a) Пусть $s \in C_i$. Тогда $\chi_i^j = \operatorname{Tr} \pi_j(s)$ есть сумма собственных значений $\pi_j(s)$. Так как $\pi_j(s)$ имеет конечный порядок, то его собственные значения суть корни из единицы. Поэтому χ_i^j — целое алгебраическое.

b) Пусть f_i — характеристическая функция C_i. Имеем $f_i * f_{i'} = \sum_{i''=1}^{r} c_{ii'i''} f_{i''}$, где $c_{ii'i''}$ — число способов, которыми элемент $C_{i''}$ может быть представлен как произведение элемента из C_i на элемент из $C_{i'}$. Поэтому $c_{ii'i''}$ — целые рациональные. С другой стороны, для любого $\sigma \in \widehat{G}$ имеем

$$\sigma(f_i)\sigma(f_{i'}) = \sum_{i''=1}^{r} c_{ii'i''}\sigma(f_{i''}).$$

Отождествляя $\sigma(f_i)$, $\sigma(f_{i'})$, $\sigma(f_{i''})$ со скалярами, видим, что $\sigma(f_i)$ — собственное значение матрицы $(c_{ii'i''})_{1 \leqslant i', i'' \leqslant r}$, поэтому — целое алгебраическое число. Но

$$\sigma_j(f_i) = \frac{1}{d_j} \operatorname{Tr} \sigma_j(f_i) = \frac{1}{d_j} \sum_{s \in C_i} \operatorname{Tr} \sigma_j(s) = \frac{h_i}{d_j} \chi_i^j.$$

Поэтому $\frac{h_j}{d_i} \chi_i^j$ — целое алгебраическое.

c) Согласно формуле (1) в 15.4.2 число

$$\frac{n}{d_j} = \sum_i \left(\frac{h_i}{d_i} \chi_i^j \right) \bar{\chi}_i^j$$

— целое алгебраическое, но, с другой стороны, рационально, поэтому n/d_i — целое рациональное число.

Библиография, касающаяся представлений конечных групп, весьма обширна. См., например: М. Холл, Теория групп, М., ИЛ, 1962.

15.5. Использование компактных подгрупп некоторых групп.

15.5.1. Пусть G' — локально компактная группа, G — компактная подгруппа G'. Если $f \in L^1(G)$, то можно отождествить f с мерой на G, поэтому — с мерой на G' с компактным носителем. В этом пункте мы отождествим их.

Лемма. *Пусть π — неприводимое непрерывное унитарное представление G', $\rho = \pi|G$ и $\rho = \bigoplus_{\sigma\in\hat{G}} n_\sigma\sigma$ — разложение ρ на неприводимые представления. Предположим, что n_σ конечно для любого $\sigma \in \hat{G}$. Тогда:*

(i) *Если χ — характер G и $f \in L^1(G')$, то $\pi(f*\chi)$ — оператор конечного ранга.*

(ii) *Линейные комбинации функций $f*\chi$ ($f \in L^1(G')$, χ — характер G) всюду плотны в $L^1(G')$.*

(iii) $\pi(C^*(G)) = \mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)$.

Пусть $\sigma \in \hat{G}$. Вследствие 15.3.12 оператор $\rho(\chi_{\bar\sigma})$ имеет ранг $n_\sigma(\dim\sigma)$. Поэтому для любой $f \in L^1(G)$ оператор $\pi(f*\chi_{\bar\sigma}) = \pi(f)\rho(\chi_{\bar\sigma})$ — конечного ранга. Отсюда следует (i).

В G существуют сколь угодно малые окрестности V_i элемента e, инвариантные относительно внутренних автоморфизмов G. Пусть φ_i—характеристическая функция V_i в G. Согласно 15.3.5 каждая функция φ_i является пределом в $L^2(G)$, а потому и в $M^1(G)$, конечных линейных комбинаций характеров G. Но при $f \in L^1(G')$ функцию $f*\varphi_i$ можно сделать как угодно близкой к f в $L^1(G')$. Отсюда следует (ii).

Наконец, (iii) следует из (i), (ii) и 4.1.11.

15.5.2. Теорема. *Пусть G'—локально компактная группа, G — компактная подгруппа G'. Предположим, что для любых $\pi \in G'$, $\sigma \in \hat{G}$ представление σ входит в $\pi|G$ с конечной кратностью. Тогда G' —* CCR*-группа.*

Это сразу следует из 15.5.1 (iii).

15.5.3. Лемма. *Пусть Γ — топологическая группа, σ — конечномерное представление Γ размерности d, n—целое число $>d$. Тогда $n\sigma$ не имеет тотализирующего вектора.*

Действительно, имеем $n\sigma = \sigma\otimes\tau$, где τ—тривиальное представление Γ размерности n. Любой вектор в $H_\sigma \otimes H_\tau$ представим в виде $\zeta = \xi_1\otimes\eta_1 + \ldots + \xi_d\otimes\eta_d$, где $(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ — базис в H_σ. Пусть H — векторное подпространство H_τ, порожденное векторами $\eta_1, \ldots, \eta_d$. Тогда $H \neq H_\tau$ и $[(\sigma\otimes\tau)(\Gamma)](\zeta) \subset H_\sigma \otimes H$, поэтому ζ — не тотализирующий.

15.5.4. Топологическая группа называется *линейной*, если она имеет непрерывное инъективное линейное представление (не обязательно унитарное) в конечномерном комплексном векторном пространстве.

15.5.5. Пусть n — целое >0, M_n — алгебра комплексных матриц с n строками и n столбцами. Пусть $r(n)$—наименьшее целое r такое, что тождество

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(r)} = 0 \qquad (1)$$

выполняется для всех элементов алгебры M_n (см. 3.6.1). Напомним, что $r(n+1) > r(n)$.

Лемма. *Пусть G' — полупростая линейная связная вещественная группа Ли, G — максимальная компактная подгруппа G', $\sigma \in \hat{G}$, $d = \dim \sigma$. Пусть χ — характер σ и $\psi = d\chi$, так что ψ — идемпотент алгебры $\mathscr{K}(G)$, и $\psi * \mathscr{K}(G') * \psi$ есть подалгебра A в $\mathscr{K}(G')$. Тогда в A выполняется тождество* (1) *с* $r = r(d^2)$.

Пусть τ — линейное (не обязательно унитарное) представление G' в конечномерном комплексном векторном пространстве V; если $\xi \in V$ и $\xi' \in V'$ (V' — пространство, сопряженное к V), то функция $s \to \langle \tau(s)\xi, \xi' \rangle$ называется *коэффициентом* τ. Пусть C — множество линейных комбинаций коэффициентов конечномерных непрерывных линейных представлений G'. Рассматривая представления, сопряженные таким представлениям, и попарные тензорные произведения таких представлений, видим, что C — инволютивная алгебра непрерывных функций на G' [с умножением $(f, g) \to fg$ и инволюцией $f \to \bar{f}$]. Так как G' линейна, то алгебра C разделяет точки G'. Вследствие теоремы Стоуна — Вейерштрасса любая непрерывная комплексная функция на G' есть равномерный на каждом компакте предел элементов C. Следовательно, если $f \in \mathscr{K}(G')$ и $f \neq 0$, то существует такая функция $g \in C$, что $\int f(s)\, g(s)\, ds \neq 0$. Таким образом, если $f \in \mathscr{K}(G')$ и $f \neq 0$, то существует такое непрерывное линейное (не обязательно унитарное) конечномерное представление τ группы G', что $\tau(f) \neq 0$; так как G связна и полупроста, то можно предположить, что τ неприводимо. Поэтому для доказательства леммы достаточно установить следующее: пусть τ — неприводимое (не обязательно унитарное) конечномерное представление G' и $r = r(d^2)$; тогда в $\tau(A)$ выполняется тождество (1).

Можно снабдить пространство V представления τ структурой гильбертова пространства, инвариантной относительно $\tau \mid G$ (B34). Пусть $\tau \mid G = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} n_\rho \rho$ — разложение $\tau \mid G$ на неприводимые представления. Тогда $\tau(\psi)$ — проектор на пространство представления $n_\sigma \sigma$ (15.3.12), поэтому — проектор ранга $n_\sigma d$. Таким образом, $\tau(A)$ отождествляется с подалгеброй алгебры матриц с $n_\sigma d$ строками и $n_\sigma d$ столбцами и остается показать, что $n_\sigma \leqslant d$.

Существует такая связная разрешимая замкнутая подгруппа N в G', что любой элемент G' есть произведение элемента G на элемент N[1]). По теореме Ли существует такой ненулевой ξ в V, что $\tau \mid N$ оставляет $\mathbf{C}\xi$ инвариантным. Так

---

[1]) Это следует из разложения Ивасавы, см., например, [391*].

как ξ — тотализирующий вектор для τ, то ξ — тотализирующий для $\tau|G$. Поэтому представление $n_{\bar\sigma}\bar\sigma$, которое является подпредставлением $\tau|G$, имеет тотализирующий вектор. Поэтому $n_{\bar\sigma} \leqslant \dim\bar\sigma = d$ (15.5.3).

15.5.6. Теорема. *Пусть G' — полупростая линейная связная вещественная группа Ли, G — максимальная компактная подгруппа G'. Тогда:*

(i) *Если $\pi \in \widehat{G}'$ и $\sigma \in \widehat{G}$, то σ содержится в $\pi|G$ не более чем* ($\dim\sigma$) *раз.*

(ii) *G' — CCR-группа.*

Пусть $\pi \in \widehat{G}'$ и $\pi|G = \bigoplus\limits_{\sigma\in\widehat{G}} n_\sigma\sigma$ — разложение $\pi|G$. Пусть $\sigma \in \widehat{G}$, $d = \dim\sigma$, и пусть $E \subset H_\pi$ — пространство представления $n_\sigma\sigma$. Вследствие 15.5.5 в алгебре $P_E\pi(\mathcal{K}(G'))P_E$ выполнено тождество (1) с $r = r(d^2)$. Но так как π неприводимо, то $\pi(\mathcal{K}(G'))$ сильно всюду плотно в $\mathfrak{B}(H_\pi)$. Поэтому $P_E\pi(\mathcal{K}(G))P_E$ сильно всюду плотно в $P_E\mathfrak{B}(H_\pi)P_E$, так что тождество (1) выполняется в $\mathfrak{B}(E)$ с $r = r(d^2)$. Так как $r(d^2+1) > r(d^2)$, то E не может содержать векторное подпространство размерности d^2+1. Поэтому $\dim E \leqslant d^2$ и, таким образом, $n_\sigma \leqslant d$. Это доказывает (i), а (ii) следует из (i) и 15.5.2.

Библиография: [32], [126], [173].

15.6. Дополнения.

Буква G обозначает компактную группу.

15.6.1. Любое непрерывное унитарное представление G, допускающее тотализирующий вектор, есть подпредставление регулярного представления [82].

15.6.2. Непрерывная комплексная функция f на G называется *почти инвариантной*, если линейные комбинации ее сдвигов ${}_af_b$ образуют конечномерное векторное пространство. Коэффициенты конечномерных представлений являются почти инвариантными функциями. Любая почти инвариантная непрерывная комплексная функция на G есть равномерный предел линейных комбинаций этих коэффициентов [78].

15.6.3. Пусть H — гильбертово пространство, π — представление в пространстве H инволютивной подалгебры $\mathcal{K}(G) \subset L^1(G)$. Существует единственное непрерывное унитарное представление G в H такое, что $\pi(f) = \int \pi(s)f(s)\,ds$ для любой $f \in \mathcal{K}(G)$.

15.6.4. Пусть G — компактная группа, φ — непрерывная функция положительного типа на G. Существует такая последовательность чистых непрерывных функций положительного типа

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ на G и такие постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \geqslant 0$, что

$$\sum \lambda_n < +\infty, \quad \varphi_1(e) = \varphi_2(e) = \ldots = 1 \quad \text{и} \quad \varphi = \sum \lambda_n \varphi_n$$

(где ряд сходится равномерно на G) [28].

15.6.5. Все компактные связные вещественные группы Ли известны. Для каждой такой группы известен также список неприводимых непрерывных унитарных представлений: эти представления нумеруются конечными наборами целых чисел. Простейшей среди некоммутативных компактных связных вещественных групп Ли является группа G вращений обычного трехмерного пространства; если $\tilde{G}$ — ее универсальная накрывающая (двулистная), то $\tilde{G}$ имеет неприводимое непрерывное унитарное представление π размерности 2, а остальные неприводимые непрерывные унитарные представления $\tilde{G}$ являются симметрическими тензорными степенями π.

Еще очень далеко до списка всех конечных групп, так что в этом случае результаты менее полны. Но известно очень много частных результатов.

§ 16. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе G обозначает топологическую группу. Мы увидим, что изучение конечномерных непрерывных унитарных представлений сводится к изучению конечномерных непрерывных унитарных представлений некоторой компактной группы Σ, связанной с G. На самом деле, даже если группа G очень проста, то группа Σ часто устроена довольно сложно, так что мы не получаем практического метода определения конечномерных непрерывных унитарных представлений G. Но свойства из § 15, примененные к Σ, приводят к замечательным свойствам некоторого класса функций на G, называемых *почти периодическими функциями*.

16.1. Компактная группа, связанная с топологической группой.

16.1.1. Теорема. *Пусть G — топологическая группа. Существует компактная группа Σ и непрерывный морфизм α: $G \to \Sigma$, обладающие следующим свойством: для любой компактной группы Σ' и любого непрерывного морфизма α': $G \to \Sigma'$ существует единственный непрерывный морфизм β: $\Sigma \to \Sigma'$ такой, что $\alpha' = \beta \circ \alpha$.*

Кроме того, пара (Σ, α) определяется этим свойством однозначно с точностью до изоморфизма.

Пусть (π_i) — семейство конечномерных непрерывных унитарных представлений G. Пусть U_i — унитарная группа H_{π_i}, пусть компактная группа U есть произведение U_i, α — непрерывный морфизм $s \to (\pi_i(s))$ группы G в U, Σ — замыкание $\alpha(G)$ в U, которое является компактной подгруппой U. Покажем, что (Σ, α) обладает свойством, требуемым в теореме. Пусть Σ' — компактная группа и α': $G \to \Sigma'$ — непрерывный морфизм. Единственность непрерывного морфизма $\beta: \Sigma \to \Sigma'$ такого, что $\alpha' = \beta \circ \alpha$, очевидна, так как $\alpha(G)$ всюду плотно в Σ. Докажем существование β. Пересечение ядер конечномерных унитарных представлений Σ' сводится к e (15.1.6); поэтому Σ' отождествляется с подгруппой группы $\prod_j V_j$, где каждое V_j есть унитарная группа в конечномерном гильбертовом пространстве; тогда α' отождествляется с морфизмом $s \to (\rho_j(s))$, где каждое ρ_j есть непрерывный морфизм G в V_j. Так как ρ_j эквивалентно одному из представлений π_i, то существует такой непрерывный морфизм β_j группы Σ в V_j, что $\rho_j = \beta_j \circ \alpha$. Морфизмы β_j определяют такой непрерывный морфизм β группы Σ в ΠV_j, что $\alpha' = \beta \circ \alpha$, откуда $\beta(\Sigma) \subset \Sigma'$.

Единственность пары (Σ, α) с точностью до изоморфизма есть очевидное общее свойство универсальных объектов: пусть (Σ_1, α_1) — другой объект, удовлетворяющий условиям теоремы; существуют непрерывные морфизмы β: $\Sigma \to \Sigma_1$, β_1: $\Sigma_1 \to \Sigma$ такие, что $\alpha_1 = \beta \circ \alpha$, $\alpha = \beta_1 \circ \alpha_1$, откуда $\alpha = (\beta_1 \circ \beta) \circ \alpha$; поэтому $\beta_1 \circ \beta$ есть тождественное отображение Σ (вследствие единственности β при данных α и α'); аналогично, $\beta \circ \beta_1$ есть тождественное отображение Σ_1; поэтому β — изоморфизм Σ на Σ_1, переводящий α в α_1.

16.1.2. Определение. *Группа Σ называется компактной группой, связанной с G, а α называется каноническим морфизмом G в Σ.*

Следовательно, $\overline{\alpha(G)} = \Sigma$. В обозначениях 16.1.1 $\beta(\Sigma)$ есть замыкание $\alpha'(G)$. Если G компактна, то в качестве Σ можно взять группу G и в качестве α—тождественное отображение G.

16.1.3. Предложение. *Для любого конечномерного непрерывного унитарного представления ρ группы Σ введем конечномерное непрерывное унитарное представление $\rho' = \rho \circ \alpha$ группы G. Таким образом определяется биекция множества классов конечномерных непрерывных унитарных представлений Σ на множество классов конечномерных непрерывных унитарных представлений G.*

Если ρ' эквивалентно ρ_1', то ρ эквивалентно ρ_1 (так как $\overline{\alpha(G)} = \Sigma$), так что рассматриваемое отображение инъективно. С другой стороны, если π — конечномерное непрерывное унитарное представление G, то существует (16.1.1) такое непрерывное унитарное представление ρ группы G в H_π, что $\pi = \rho \circ \alpha$, поэтому рассматриваемое отображение сюръективно.

16.1.4. Пусть G — коммутативная локально компактная группа; тогда пара (Σ, α) определяется следующим предложением:

Предложение. *Пусть G — коммутативная локально компактная группа, $\widehat{G}$ — ее группа характеров. Пусть G' — коммутативная компактная группа, группой характеров которой является группа $\widehat{G}$, снабженная дискретной топологией. Пусть φ — непрерывный морфизм G в G', двойственный тождественному морфизму $\hat{\varphi}$ группы $\widehat{G}'$ в $\widehat{G}$. Тогда G' отождествляется с компактной группой, связанной с G, а φ — с каноническим морфизмом G в G'.*

Если $\chi' \in \widehat{G}'$ тривиален на $\varphi(G)$, то $\hat{\varphi}(\chi')$ тривиален на G, поэтому $\hat{\varphi}(\chi') = 1$ и $\chi' = 1$. Это доказывает, что $\overline{\varphi(G)} = G'$. Пусть теперь H — компактная группа и ψ — непрерывный морфизм G в H. Докажем, что существует единственный непрерывный морфизм β группы G' в H такой, что $\psi = \beta \circ \varphi$; это докажет предложение. Заменяя H на $\psi(H)$, можно ограничиться случаем, когда H компактна и коммутативна. Тогда морфизм $\hat{\psi}$, двойственный ψ, есть морфизм дискретной группы $\widehat{H}$ в $\widehat{G}$. Осталось доказать, что существует единственный морфизм $\hat{\beta}$ группы $\widehat{H}$ в $\widehat{G}$ такой, что $\hat{\psi} = \hat{\varphi} \circ \hat{\beta}$; но это очевидно, так как $\hat{\varphi}$ — тождественное отображение $\widehat{G}'$ на $\widehat{G}$.

Библиография: [17], [78].

16.2. Почти периодические функции.

16.2.1. Теорема. *Пусть G — топологическая группа, Σ — связанная с ней компактная группа, α — канонический морфизм G в E, $E(G)$ — векторное пространство ограниченных непрерывных комплексных функций на G, снабженное нормой равномерной сходимости, и $f \in E(G)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *множество функций ${}_sf$ $(s \in G)$ относительно компактно в $E(G)$;*

(ii) *Множество функций f_t $(t \in G)$ относительно компактно в $E(G)$;*

(iii) *множество функций ${}_sf_t$ $(s, t \in G)$ относительно компактно в $E(G)$;*

(iv) *существует такая непрерывная комплексная функция g на Σ, что $f = g \circ \alpha$;*

(v) *f есть равномерный предел на G линейных комбинаций коэффициентов конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений G.*

[Так как $E(G)$ полно, то можно заменить в (i), (ii) и (iii) условие «относительно компактно» на «предкомпактно».]

(iv)$\Rightarrow$(iii). Пусть $g \in \mathscr{H}(\Sigma)$ и $f = g \circ \alpha$. Отображение $(\sigma, \tau) \to {}_\sigma g_\tau$ группы $\Sigma \times \Sigma$ в банахово пространство $\mathscr{H}(\Sigma)$ непрерывно, поэтому множество ${}_\sigma g_\tau$ — компакт. Образ этого множества в $E(G)$ при изометрическом отображении $h \to h \circ \alpha$ есть компакт, содержащий множество ${}_s f_t$ $(s, t \in G)$.

(iii)$\Rightarrow$(i) и (iii)$\Rightarrow$(ii). Очевидно.

(i)$\Rightarrow$(iv) (доказательство импликации (ii)$\Rightarrow$(iv) аналогично). Для любых $g \in E(G)$ и $s \in G$ положим $\psi(s) g = {}_{s^{-1}} g$. Тогда $\chi(s)$ — изометрическое линейное отображение $E(G)$ на $E(G)$ и $\psi(ss') = \psi(s)\psi(s')$. Пусть A — множество ${}_s f$ $(s \in G)$. Ясно, что любое $\psi(s)$ индуцирует биекцию A на A, поэтому также биекцию $\varphi(s)$ множества $\bar{A}$ на $\bar{A}$. Отображения $\varphi(s)$ изометричны, и $\bar{A}$ — компакт по предположению (i). Поэтому множество $\varphi(G)$ относительно компактно в множестве $\mathscr{C}(\bar{A}, \bar{A})$ непрерывных отображений множества $\bar{A}$ в себя, снабженном топологией равномерной сходимости (теорема Асколи); поэтому замыкание $\varphi(G)$ в $\mathscr{C}(\bar{A}, \bar{A})$ есть компактная группа Γ гомеоморфизмов $\bar{A}$ (B16). Отображение φ есть морфизм G в Γ. Покажем, что он непрерывен. Достаточно доказать, что при $s \to e$ отображение $\varphi(s)$ сходится к $\varphi(e)$ в топологии равномерной сходимости на $\bar{A}$, или всего лишь в топологии простой сходимости на $\bar{A}$ [что одно и то же, так как $\varphi(G)$ равностепенно непрерывно]. Итак, пусть $g \in \bar{A}$ и V — открытая окрестность g в $\bar{A}$. Тогда $\bar{A} - V$ компактно. Если $h \in \bar{A} - V$, то $|g(u) - h(u)| > 0$ по крайней мере в одной точке $u \in G$, поэтому существуют открытая окрестность V_h элемента h в $\bar{A}$ и окрестность W_h элемента e в G такие, что $\varphi(s) g \notin V_h$ при $s \in W$. Можно покрыть $\bar{A} - V$ конечным числом окрестностей $V_{h_1}, \ldots, V_{h_n}$; тогда при $s \in W_{h_1} \cap \ldots \cap W_{h_n}$ имеем $\varphi(s) g \notin V_{h_1} \cup \ldots \cup V_{h_n}$, поэтому $\varphi(s) g \in V$, и тем самым доказано, что φ — непрерывный морфизм G в Γ. По определению Σ и α, существует такой непрерывный морфизм β группы Σ в Γ, что $\varphi = \beta \circ \alpha$. Функция $\sigma \to (\beta(\sigma) f)(e)$ непрерывна на Σ и

$$f(s^{-1}) = (\varphi(s) f)(e) = (\beta(\alpha(s)) f)(e),$$

поэтому условие (iv) выполнено.

(iv)$\Rightarrow$(v). Пусть $f = g \circ \alpha$, где $g \in \mathscr{H}(\Sigma)$. Тогда g — равномерный предел на Σ линейных комбинаций коэффициентов (конечномерных) неприводимых непрерывных унитарных представлений Σ (13.6.5 и 15.1.4). Поэтому f — равномерный на G предел линейных комбинаций коэффициентов конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений G.

(v)$\Rightarrow$(iv). Предположим, что для любого n существует такая линейная комбинация f_n коэффициентов конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений G, что $\|f-f_n\|_\infty \leqslant 1/n$. Существует функция g_n на Σ, являющаяся линейной комбинацией коэффициентов неприводимых непрерывных унитарных представлений G и такая, что $f_n = g_n \circ \alpha$ (16.1.3). Имеем $\|g_m - g_n\|_\infty = \|f_m - f_n\|_\infty \to 0$ при $m, n \to +\infty$, поэтому g_n сходятся равномерно к непрерывной функции g на Σ, и имеем $f = g \circ \alpha$.

16.2.2. Определение. *Почти периодической функцией на G называется ограниченная непрерывная комплексная функция на G, удовлетворяющая эквивалентным условиям* 16.2.1.

Множество таких функций обозначим $PP(G)$.

16.2.3. Согласно условию (iv) в 16.2.1 функция из $PP(G)$ равномерно непрерывна относительно правой и левой равномерных структур на G. Сумма, произведение и т. д. почти периодических функций почти периодичны; $PP(G)$ замкнуто в $E(G)$.

Библиография: [17], [78].

16.3. Среднее почти периодической функции.

16.3.1. Теорема. *Пусть $f \in PP(G)$. Пусть K — замкнутая выпуклая оболочка в $E(G)$ (в обозначениях* 16.2.1) *множества функций ${}_sf$, где s пробегает G. Тогда K содержит единственную постоянную $M(f)$. Если f' — соответствующая f функция на Σ, то $M(f) = \int_\Sigma f'(s)\,ds$ (мера Хаара на Σ выбрана так, что полная масса равна* 1).

Благодаря каноническому изоморфизму $PP(G)$ на $\mathscr{K}(\Sigma)$ можно ограничиться случаем $G = \Sigma$. Пусть тогда $f \in \mathscr{K}(G)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такая окрестность V элемента e в Σ, что при $st^{-1} \in V$ имеем $|f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. Пусть $(Vs_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное покрытие Σ, и пусть $(h_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Полагая $c_i = \int_\Sigma h_i(s)\,ds$, имеем

$$\left| \int f(s)\,ds - \sum c_i f(s_i t) \right| = \left| \sum_i \int h_i(s)\,[f(st) - f(s_i t)]\,ds \right|,$$

что не превосходит ε, так как $|f(st) - f(s_i t)| \leqslant \varepsilon$ при $h_i(s) \neq 0$. С другой стороны, $\Sigma c_i = 1$, откуда следует, что постоянная $\int f(s)\,ds$ принадлежит K. Наконец, все сдвиги f имеют один и тот же интеграл по Σ, поэтому все функции из K имеют один и тот же интеграл по Σ; следовательно, если постоянная принадлежит K, то ее значение необходимо равно $\int f(s)\,ds$.

16.3.2. Определение. *Постоянная* $M(f)$ *из* 16.3.1 *называется средним функции* f.

16.3.3. Отображение $f \to M(f)$ есть линейная форма на $PP(G)$. Имеем $Mf \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$, $M(1) = 1$, $M({}_sf) = M(f_s) = M(f)$ при любом $s \in G$. Все это следует из равенства $M(f) = \int\limits_{\Sigma} f'(s)\,ds$ в 16.3.1.

16.3.4. Для f, $g \in PP(G)$ положим $(f \mid g) = M(f\bar{g})$. Тогда $PP(G)$ становится отделимым предгильбертовым пространством, канонически изоморфным $\mathcal{H}(\Sigma)$, рассматриваемым как векторное подпространство $L^2(\Sigma)$. Пусть C — множество классов конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений G; для любого $\sigma \in C$ выберем ортонормированный базис $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\dim\sigma})$ в H_σ; положим $\varphi_{i,j,\sigma}(s) = (\sigma(s)\,\varepsilon_i \mid \varepsilon_j)$. Тогда функции $(\dim\sigma)^{1/2}\,\varphi_{i,j,\sigma}$ $(\sigma \in C,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant \dim\sigma)$ образуют ортонормированный базис в предгильбертовом пространстве $PP(G)$; это следует из 15.2.5 и 16.1.3.

Библиография: [17], [78].

16.4. Группы, вложимые в компактную группу.

16.4.1. Лемма. *Следующие три подгруппы G совпадают*:

1° *ядро канонического морфизма* $G \to \Sigma$;

2° *пересечение ядер непрерывных морфизмов G во всевозможные компактные группы*;

3° *пересечение ядер конечномерных неприводимых непрерывных унитарных представлений* G.

Обозначим эти три множества N_1, N_2, N_3. Тогда $N_2 \supset N_1$ по определению Σ и морфизма $G \to \Sigma$. Ясно, что $N_3 \supset N_2$. Наконец, если $s \in N_3$, то его канонический образ в Σ принадлежит ядру любого неприводимого непрерывного унитарного представления Σ (16.1.3), поэтому равен e (13.6.6); следовательно, $N_3 \subset N_1$.

16.4.2. Определение. *Топологическая группа называется вложимой в компактную группу, если подгруппа из* 16.4.1 *сводится к* e.

16.4.3. Подгруппа группы, вложимой в компактную группу, вложима в компактную группу. Произведение групп, вложимых в компактную группу, вложимо в компактную группу. Поэтому проективный предел групп, вложимых в компактную группу, вложим в компактную группу. Фактор-группа любой топологической группы по нормальному делителю из леммы 16.4.1 вложима в компактную группу. Коммутативная локально компактная группа вложима в компактную группу, так как подгруппа, определенная условием 3° в 16.4.1, сводится к e.

16.4.4. Предложение. *Пусть G — топологическая группа, порожденная компактной окрестностью e и вложимая в компактную группу. Тогда G — проективный предел групп Ли, локально изоморфных компактным группам.*

Пусть F — базис фильтра на G, образованного ядрами конечномерных непрерывных унитарных представлений G. Так как G вложима в компактную группу, то пересечение элементов F есть $\{e\}$. По предположению, существует симметричная компактная окрестность U точки e, порождающая G. След F на компактном множестве U^3 сходится к e. Поэтому существует $N_0 \in F$, для которого $U^3 \cap N_0 \subset U$. Для $N \in F$, $N \subset N_0$ положим

$$K_N = U^3 \cap N \subset U.$$

Множества K_N обладают следующими свойствами:

a) K_N — компактная подгруппа G, так как $K_N K_N^{-1} \subset U^2 \cap N \subset K_N$.

b) K_N — нормальный делитель в $U^\infty = G$, так как для любого $s \in U$ имеем $sK_N s^{-1} \subset U^3 \cap N = K_N$; так как $\bigcap K_N = \{e\}$, то G — проективный предел групп G/K_N.

c) K_N открыт в N, поэтому N/K_N — дискретная подгруппа в G/K_N; таким образом, G/K_N локально изоморфна G/N; но G/N имеет инъективное конечномерное непрерывное унитарное представление; отсюда следует, что G/N есть группа Ли. Кроме того, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G/N изоморфна подалгебре компактной алгебры Ли; таким образом, $\mathfrak{g}$ есть произведение коммутативной алгебры Ли и компактной алгебры Ли, поэтому $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли компактной группы C и G/K_N локально изоморфна C.

16.4.5. Лемма. *Пусть G — связная локально компактная группа, имеющая фундаментальную систему окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов. Пусть A и B — замкнутые подгруппы G такие, что:*

1° A содержится в центре G;

2° $A \subset B$ и B/A содержится в центре G/A.

Тогда B содержится в центре G.

Пусть $x \in B$, $y \in G$, χ — характер коммутативной группы A, N — ядро χ. Тогда $xyx^{-1}y^{-1} \in A$. Покажем, что $\chi(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$. Ввиду произвольности χ это докажет, что $xyx^{-1}y^{-1} = e$, и лемма будет доказана. Существует такая окрестность V элемента e в G, что $|\chi(u) - 1| \leqslant 1$ при $u \in V \cap A$, и окрестность V' элемента e в G, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов и такая, что $V' \cdot V'^{-1} \subset V$. Для любого $z \in V'$ произведение $xzx^{-1}z^{-1}$ есть некоторый элемент $a \in A$, и из соотношения $xzx^{-1} = az$ по индукции следует, что $x^n z x^{-n} = a^n z$.

Отсюда

$$a^n = (x^n z x^{-n}) \cdot z^{-1} \in V'V'^{-1} \subset V$$

и, таким образом, $a^n \in V \cap A$, $|\chi(a^n) - 1| \leqslant 1$. Так как это верно для всех n, то $\chi(a) = 1$, т. е. x и z коммутируют по модулю N. Так как G связна, то y является произведением элементов V', поэтому x и y коммутируют по модулю N.

16.4.6. Теорема. *Пусть G — связная локально компактная группа, Z — ее центр. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *G вложима в компактную группу;*

(ii) *G — произведение компактной группы и группы $\boldsymbol{R}^n$;*

(iii) *G — проективный предел групп Ли, локально изоморфных компактным группам;*

(iv) *G/Z компактна;*

(v) *в G существует фундаментальная система окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов.*

Кроме того, если G обладает этими свойствами, то любая связная группа, локально изоморфная G, также обладает этими свойствами.

(i)$\Rightarrow$(iii). Это следует из 16.4.4.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Пусть выполнено условие (iii). В G существует базис фильтра, сходящегося к e, образованный замкнутыми нормальными делителями N такими, что $G/N = G_N$ — группы Ли, локально изоморфные компактным группам. Кроме того, G_N связна. Пусть G_N^1, G_N^2 — связные замкнутые нормальные делители G_N, соответствующие центру и (редуктивной) производной алгебре алгебры Ли группы G_N; тогда $G_N = G_N^1 \cdot G_N^2$, G_N^1 и G_N^2 коммутируют, G_N^2 компактна. Если $N' \subset N$, то каноническое отображение $G_{N'}$ на G_N отображает $G_{N'}^1$ на G_N^1, $G_{N'}^2$ на G_N^2. Пусть тогда $A \subset G$ — проективный предел групп G_N^1, $K \subset G$ — проективный предел G_N^2; A коммутативна и связна, K компактна, A и K коммутируют и $G = AK$. Но $A = \boldsymbol{R}^n \times K_1$, где K_1 компактна (B25). Следовательно, $G = \boldsymbol{R}^n K_2$, где компактная подгруппа K_2 перестановочна с $\boldsymbol{R}^n$. Очевидно, $K_2 \cap \boldsymbol{R}^n = \{e\}$, поэтому G изоморфна $\boldsymbol{R}^n \times K_2$.

(ii)$\Rightarrow$(v). Это следует из 15.1.1.

(v)$\Rightarrow$(iv). Предположим, что выполнено условие (v). Для любого $s \in G$ введем $j(s)$ — внутренний автоморфизм G, определенный s. Из условия (v) следует, что правая и левая равномерные структуры на G совпадают и $j(G)$ — равномерно непрерывная группа гомеоморфизмов G. Существует компактная окрестность U элемента e, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов. Для любого $s \in G$ существует целое $n > 0$ такое, что $s \in U^n$ (так как G связна); тогда класс сопряженных с s элементов содержится в U^n и потому относительно компактен. Пусть $\mathcal{T}$ — топология компактной сходимости в множестве $\mathscr{C}(G, G)$ непрерывных отображений G в себя. По теореме Асколи, $j(G)$ относительно компактно в $\mathscr{C}(G, G)$ в топологии $\mathcal{T}$. Поэтому $\overline{j(G)}$ есть группа Γ гомеоморфизмов G, компактная в топологии $\mathcal{T}$ (B16). Наконец, j непрерывно как отображение G в Γ и морфизм G/Z в Γ, получаемый из j переходом к фактору, инъективен. Таким образом, G/Z вложима в компактную группу. Вследствие уже установленной импликации (i)$\Rightarrow$(ii) заключаем, что $G/Z = A \times K$, где A коммутативна и K компактна. Вследствие 16.4.5 A сводится к $\{e\}$ и G/Z компактна.

(iv)$\Rightarrow$(i). Если G/Z компактна, то Z порожден компактной окрестностью e (B24), поэтому имеет вид $K \times L$, где K компактна, а $L = \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{Z}^p$ (B25). Пусть s — элемент G, отличный от e. Для доказательства (iv)$\Rightarrow$(i) покажем, что существует такой непрерывный морфизм φ группы G в компактную группу, что $\varphi(s) \neq e$. Существует такая замкнутая подгруппа $M \subset L$, что $s \notin M$ и L/M компактна. Тогда G/M, будучи расширением G/Z с помощью $K \times (L/M)$, компактна, и в качестве φ достаточно взять канонический морфизм G на G/M.

Наконец, если G обладает свойством (v), то любая связная группа, локально изоморфная G, также обладает свойством (v).

Вместо «вложимая в компактную группу» говорят также «представимая в компактную группу» или «максимальная почти периодическая».

Библиография: [15], [17].

16.5. Дополнения.

16.5.1. Группа, вложимая в компактную группу, может иметь бесконечномерные неприводимые непрерывные унитарные представления [28].

***16.5.2.** Пусть G — локально компактная группа. Используем обозначения 13.11.6.

a) Если $\varphi, \psi \in E$ и $x \in G$, то функция $t \to \psi(t)\varphi(t^{-1}x)$ есть некоторый элемент ω_x множества E. Положим $M(\omega_x) = (\varphi \times \psi)(x)$. Тогда $\varphi \times \psi \in PP(G)$.

b) Любая непрерывная функция положительного типа представима в виде $\varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 — почти периодическая функция положительного типа, а φ_2 — такая функция положительного типа, что $M(\varphi_2\bar{\varphi}_2) = 0$.

c) Любая почти периодическая функция положительного типа представима в виде $\sum \lambda_i \varphi_i$, где $\lambda_i > 0$, $\sum \lambda_i < +\infty$, φ_i — чистая функция положительного типа, соответствующая неприводимому представлению [28].

16.5.3. a) Пусть G — локально компактная группа, G_0 — связная компонента e. Предположим, что G/G_0 компактна. Следующие условия эквивалентны:

(i) G вложима в компактную группу;

(ii) G_0 вложима в компактную группу;

(iii) G есть полупрямое произведение компактной подгруппы K и нормального делителя V, изоморфного $\boldsymbol{R}^n$; любой элемент V коммутирует с любым элементом компоненты единицы в K;

(iv) G имеет фундаментальную систему компактных окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов.

b) Существуют вполне разрывные локально компактные группы, вложимые в компактную группу и не удовлетворяющие условию (iv) в a) [77], [94].

16.5.4. Проблема: доказать эквивалентность условий (i), (ii), (iii), (iv) в 16.4.6, не используя теории групп Ли.

§ 17. ХАРАКТЕРЫ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ

17.1. Определения.

17.1.1. Пусть G — локально компактная группа. *Следом* (соотв. *биследом*, *характером*) на G называется полунепрерывный снизу полуконечный след (соотв. максимальный бислед, характер) на $C^*(G)$.

17.1.2. *Представлением со следом* группы G называется пара (π, t), обладающая следующими свойствами:

(i) π — непрерывное унитарное представление G;

(ii) t — точный нормальный след на $\mathfrak{U}^+$ [$\mathfrak{U}$ обозначает алгебру фон Неймана, порожденную $\pi(G)$];

(iii) $\pi(C^*(G)) \cap \mathfrak{N}_t$ порождает алгебру фон Неймана $\mathfrak{U}$.

Представления со следом группы G отождествляются с представлениями со следом C^*-алгебры $C^*(G)$. Очевидным образом определяется квазиэквивалентность представлений со следом (ср. 6.6.2). С любым представлением со следом группы G канонически связан след G.

17.1.3. След f группы G определяет объекты $\mathfrak{M}_f$, $\mathfrak{N}_f$, N_f, Λ_f, H_f, J_f, λ_f, ρ_f, $\mathfrak{U}_f$, $\mathfrak{W}_f$, t_f (6.2 и 6.4.5). Представление λ_f C^*-алгебры $C^*(G)$ отождествляется с представлением G, которое мы также обозначим λ_f. Представление $\bar{\rho}_f^0$ C^*-алгебры $C^*(G)$ в $\overline{H}_f$ получается из λ_f при изоморфизме J_f пространства H_f на $\overline{H}_f$ (6.2.2); оно отождествляется с некоторым представлением G, которое мы также обозначим $\bar{\rho}_f^0$ и которое получается из представления λ_f группы G при изоморфизме J_f; поэтому $\bar{\rho}_f^0 \simeq \lambda_f$.

След на группе G называется следом типа I, типа II, ..., если λ_f — типа I, типа II и т. д.

Таким образом, с помощью 17.1.2, определяется биекция множества следов на G на множество классов квазиэквивалентности представлений со следом группы G.

17.1.4. Пусть π — непрерывное унитарное представление G, $\mathfrak{U}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(G)$. Говорят, что π *допускает след*, если существует такой след t на $\mathfrak{U}^+$, что (π, t) есть представление со следом. Представления группы G, допускающие след, отождествляются с представлениями $C^*(G)$, допускающими след.

17.1.5. Пусть π — непрерывное унитарное фактор-представление G; F — фактор, порожденный $\pi(G)$. Следующие условия эквивалентны:

(i) π допускает след;

(ii) F полуконечен и $\pi(C^*(G))$ содержит ненулевой оператор Гильберта — Шмидта относительно F (6.7.2).

Пусть f — след на G. Для того чтобы соответствующее представление G было фактор-представлением, необходимо и достаточно, чтобы f был характером (6.7.3). Таким образом возникает каноническое биективное соответствие между: a) множеством характеров G, определенных с точностью до положительного множителя; b) множеством классов квазиэквивалентности фактор-представлений G, допускающих след (6.7.4).

17.1.6. Предположим, что G — GCR-группа. Любое неприводимое непрерывное унитарное представление π группы G допускает след (6.7.5) и имеет нормализованный характер f_π, определяемый равенством $f_\pi(x) = \operatorname{Tr}\pi(x)$ при $x \in C^*(G)^+$. Пусть π' — другое неприводимое непрерывное унитарное представление G; для того чтобы π и π' были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы $f_\pi = f_{\pi'}$ (6.7.6). Любой характер G имеет вид λf_π, где $\lambda > 0$ и π — неприводимое непрерывное унитарное представление G (6.7.6). Пусть $f = f_\pi$. Тогда H_f, $\lambda_f^{\dashv}$, $\bar{\rho}_f^0$, $\mathfrak{U}_f$, $\mathfrak{W}_f$ канонически отождествляются с $H_\pi \otimes \overline{H}_\pi$, $\pi \otimes 1_{\overline{H}_\pi}$, $1_{\overline{H}_\pi} \otimes \pi$, $\mathfrak{B}(H_\pi) \otimes \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C} \otimes \mathfrak{B}(\overline{H}_\pi)$ соответственно; J_f отождествляется с канонической инволюцией в $H_\pi \otimes \overline{H}_\pi$; t_f отождествляется со следом $T \otimes 1 \to \operatorname{Tr} T$ на $(\mathfrak{B}(H_\pi) \otimes \boldsymbol{C})^+$ (6.7.7).

Библиография: [32].

17.2. Характер, определенный мерой или распределением.

17.2.1. Лемма. *Пусть A — C^*-алгебра, A' — инволютивная подалгебра A, всюду плотная в A, s — комплексная функция на $A' \times A'$, удовлетворяющая следующим условиям;*

(i) s — *положительная эрмитова полуторалинейная форма*;
(ii) $s(y, x) = s(x^*, y^*)$ *при* $x, y \in A'$;
(iii) $s(zx, y) = s(x, z^*y)$ *при* $x, y, z \in A'$;
(iv) $s(zx, zx) \leqslant \|z\|^2 s(x, x)$ *при* $x, z \in A'$,
(v) *элементы* xy (*где* $x, y \in A'$) *всюду плотны в* A' *относительно предгильбертовой структуры, определенной* s.

Тогда существует единственный максимальный бислед A, *продолжающий* s.

Единственность следует из 6.5.3. Докажем существование. Пусть N — множество таких $x \in A'$, что $s(x, x) = 0$. Как и в 6.2.2, проверяется, что N — самосопряженный двусторонний идеал в A' и A'/N — гильбертова алгебра относительно скалярного произведения $(\,|\,)$, определенного s. Пусть H — гильбертово пространство — пополнение A'/N. Пусть Λ — каноническое отображение A' в H. Из предположения (iv) следует, что для любого $z \in A'$ существует единственный непрерывный линейный оператор $\lambda(z)$ в H такой, что $\lambda(z)\Lambda x = \Lambda(zx)$ для всех $x \in A'$; кроме того, $\|\lambda(z)\| \leqslant \|z\|$. Очевидно, что λ — представление A' в H; оно продолжается единственным образом до представления A в H, которое мы снова обозначим λ. Тогда $\lambda(A)$ и $\lambda(A')$ порождают одну и ту же алгебру фон Неймана, а именно $\mathfrak{U}(A'/N)$. Пусть θ — естественный след на $\mathfrak{U}(A'/N)^+$, определенный гильбертовой алгеброй A'/N. Тогда $\mathfrak{N}_\theta \supset \lambda(A')$, поэтому (λ, θ) — представление со следом C^*-алгебры A; пусть s_1 — соответствующий максимальный бислед A. Если $x \in A'$, то $\lambda(x) \in \mathfrak{N}_\theta$, поэтому $x \in \mathfrak{N}_{s_1}$ и

$$s_1(x, x) = \theta(\lambda(x)\lambda(x)^*) = s(x, x),$$

поэтому s_1 продолжает s.

17.2.2. Если G — локально компактная группа, то $\mathcal{K}(G)$ — инволютивная подалгебра $L^1(G)$, всюду плотная в $L^1(G)$ и, следовательно, в $C^*(G)$.

Предложение. *Пусть* G — *унимодулярная локально компактная группа,* μ — *мера на* G. *Для* $f, g \in \mathcal{K}(G)$ *положим* $s(f, g) = \mu(g^* * f)$. *Для того чтобы форма* s *удовлетворяла условиям* (i)—(v) *в* 17.2.1, *необходимо и достаточно, чтобы* μ *была центральной мерой положительного типа.*

Ясно, что s — полуторалинейная форма, поэтому условие (i) в 17.2.1 выполняется тогда и только тогда, когда $\mu(f^* * f) \geqslant 0$ для всех $f \in \mathcal{K}(G)$, т. е. тогда и только тогда, когда $\mu \gg 0$. Предположим, что это условие выполнено. Условие (ii) выполняется тогда и только тогда, когда $\mu(g^* * f) = \mu(f * g^*)$ для любых $f, g \in \mathcal{K}(G)$, т. е. тогда и только тогда, когда μ центральна. Условие (iii) имеет вид $\mu(g^* * (h * f)) = \mu((h^* * g)^* * f)$ для любых $f, g, h \in \mathcal{K}(G)$; оно выполняется автоматически. Пусть $f \in \mathcal{K}(G)$ и K — компактная окрестность носителя f.

Существует такая функция $g \in \mathcal{K}(G)$, что носитель $f * g$ содержится в K и величина $\|f - f * g\|_\infty$ сколь угодно мала; отсюда сразу следует, что условие (v) выполняется. Согласно 13.7.9 мера μ определяет унитарное представление σ группы G. Пространство H_σ получается, если снабдить $\mathcal{K}(G)$ скалярным произведением $s(f, g)$ и перейти к соответствующему полному отделимому гильбертову пространству; обозначая через Λ каноническое отображение $\mathcal{K}(G)$ в H_σ, имеем $\sigma(x)\Lambda f = \Lambda(\varepsilon_x * f)$ для любых $x \in G$ и $f \in \mathcal{K}(G)$. Отсюда следует, что $\sigma(g)\Lambda f = \Lambda(g * f)$ при $f, g \in \mathcal{K}(G)$; поэтому

$$s(g * f, g * f) = (\sigma(g)\Lambda f \mid \sigma(g)\Lambda f) \leqslant \\ \leqslant \|\sigma(g)\|^2 (\Lambda f \mid \Lambda f) = \|\sigma(g)\|^2 s(f, f),$$

и условие (iv) выполнено.

17.2.3. Пусть μ — центральная мера положительного типа на G (G предполагается унимодулярной). Согласно 17.2.1 и 17.2.2 форма $(f, g) \to \mu(g^* * f)$ на $\mathcal{K}(G) \times \mathcal{K}(G)$ продолжается до однозначно определенного максимального биследа μ' на $C^*(G)$. Пусть σ' — представление $C^*(G)$ (или G), определенное μ'; воспользуемся обозначением σ из 17.2.2. Вследствие 6.3.6 имеем $H_{\sigma'} = H_\sigma$; с другой стороны, для $f \in \mathcal{K}(G)$ оператор $\sigma'(f)$ получается из оператора левой свертки с f в $\mathcal{K}(G)$, поэтому $\sigma'(f) = \sigma(f)$. Таким образом, $\sigma' = \sigma$. Кроме того, μ' определяет представление со следом (σ, t) группы G; при $f \in \mathcal{K}(G)$ имеем $\sigma(f) \in \mathfrak{N}_t$ и

$$t(\sigma(f)\sigma(f)^*) = \mu'(f, f) = \mu(f^* * f).$$

Отображение $\mu \to \mu'$ инъективно, так как μ полностью определяется своими значениями на функциях вида $g * f$ ($f, g \in \mathcal{K}(G)$).

В связи с этим отождествим μ, μ' и связанный с ними след; тогда имеет смысл говорить, что центральная мера положительного типа μ на G является характером G. Для того чтобы это условие выполнялось, необходимо и достаточно, по предыдущему, чтобы непрерывное унитарное представление G, получаемое из μ по схеме 13.7.9, было фактор-представлением. В частности, имеет смысл говорить, что центральная непрерывная функция φ положительного типа на G есть характер G [отождествляя φ с мерой $\varphi(x)\,dx$].

17.2.4. Уясним частный случай, важный для приложений.

Предложение. *Пусть G — унимодулярная* GCR-*группа, σ — неприводимое непрерывное унитарное представление G, μ — центральная мера положительного типа на G. Для того чтобы σ имело нормализованный характер μ, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(f)$ был оператором Гильберта — Шмидта* *для любой* $f \in \mathcal{K}(G)$ *и для любых* $f, g \in \mathcal{K}(G)$ *выполнялось равенство*

$$\mathrm{Tr}(\sigma(g)^* \sigma(f)) = \mu(g^* * f).$$

Если эти условия выполнены, то σ *квазиэквивалентно представлению* G, *определяемому мерой* μ *по схеме* 13.7.9.

17.2.5. Предположим, что G унимодулярна. Мера Дирака ε_e в точке e — центральная мера положительного типа. Она определяет максимальный бислед s на $C^*(G)$. Тогда $\mathcal{K}(G)$ всюду плотно в $\mathfrak{N}_s$ в предгильбертовой структуре $\mathfrak{N}_s$; при $f, g \in \mathcal{K}(G)$ имеем $s(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Пространство H_s — не что иное, как $L^2(G)$, λ_s — левое регулярное представление, $\bar{\rho}_s^0$ — сопряженное к правому регулярному представлению, J_s — отображение $f \to f^*$ пространства $L^2(G)$ на $L^2(G)$; совершенная гильбертова алгебра гильбертовой алгебры $\mathfrak{N}_s/N_s$ есть гильбертова алгебра A группы G; алгебра фон Неймана $\mathfrak{U}_s$ есть $\mathfrak{U}(A)$: это — алгебра фон Неймана, порожденная операторами левого сдвига в $L^2(G)$; $\mathfrak{U}_s^+$ снабжено естественным следом t_s и (λ_s, t_s) — представление со следом группы G. Если $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, то

$$t_s(\lambda_s(f)\lambda_s(f)^*) < +\infty$$

и при $f, g \in L^1(G) \cap L^2(G)$

$$t_s(\lambda_s(f)\lambda_s(g)^*) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

17.2.6. Пусть G — вещественная группа Ли. Обозначим $\mathfrak{D}(G)$ множество бесконечно дифференцируемых комплексных функций с компактным носителем на G. Это множество всюду плотно в $L^1(G)$, поэтому и в $C^*(G)$.

Распределение μ на G называется *центральным*, если оно инвариантно относительно внутренних автоморфизмов G, или, что то же самое, если $\mu(f * g) = \mu(g * f)$ для любых $f, g \in \mathfrak{D}(G)$. Распределение μ на G называется *распределением положительного типа*, если $\mu(f * \tilde{f}) \geqslant 0$ для любой $f \in \mathfrak{D}(G)$.

Предложение. *Пусть* G — *унимодулярная вещественная группа Ли,* μ — *распределение на* G. *Для* $f, g \in \mathfrak{D}(G)$ *положим* $s(f, g) = \mu(g^* * f)$. *Для того чтобы форма* s *удовлетворяла условиям* (i) — (v) *в* 17.2.1, *необходимо и достаточно, чтобы* μ *было центральным распределением положительного типа.*

Доказательство, совершенно аналогичное доказательству предложения 17.2.2, предоставляется читателю.

17.2.7. Сохраним предположения предложения 17.2.6. Согласно 17.2.1 форма s продолжается до единственного максимального бизледа μ' на $C^*(G)$, который определяет представление со следом (σ, t) группы G. Представление σ можно определить, снабжая $\mathfrak{Q}(G)$ скалярным произведением $s(f, g)$, переходя к полному отделимому гильбертову пространству и определяя действие G в $\mathfrak{Q}(G)$ левыми сдвигами. При $f \in \mathfrak{Q}(G)$ имеем $\sigma(f) \in \mathfrak{N}_t$ и

$$t(\sigma(f)\sigma(f)^*) = \mu'(f, f) = \mu(f^* * f).$$

Отображение $\mu \to \mu'$ инъективно.

Отождествим в связи с этим μ, μ' и связанный с ними след; тогда имеет смысл говорить, что центральное распределение положительного типа на G является характером G. В частности:

17.2.8. Предложение. *Пусть G — унимодулярная* GCR-*группа Ли, σ — неприводимое непрерывное унитарное представление группы G, μ — центральное распределение положительного типа на G. Для того чтобы μ было нормализованным характером σ, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(f)$ был оператором Гильберта — Шмидта для любой $f \in \mathfrak{Q}(G)$ и для любых $f, g \in \mathfrak{Q}(G)$ выполнялось равенство*

$$\mathrm{Tr}(\sigma(g)^* \sigma(f)) = \mu(g^* * f).$$

Если эти условия выполнены, то σ квазиэквивалентно представлению G, получаемому из μ по схеме 17.2.7.

Библиография: [32], [100].

17.3. Характеры конечного типа.

17.3.1. Предложение. *Пусть G—унимодулярная локально компактная группа, s — характер G, (π, t) — фактор-представление со следом группы G, с которым связан характер s. Тогда*:

(i) *Для того чтобы s был характером конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы s определялся центральной непрерывной функцией положительного типа χ на G.*

(ii) *Если это условие выполнено, то $\chi(x) = t'(\pi(x))$, где t' — линейное продолжение t на алгебру фон Неймана, порожденную $\pi(G)$.*

Для того чтобы s был характером конечного типа, необходимо и достаточно (6.8.1 и 6.8.5), чтобы s продолжался до положительной центральной линейной формы на $C^*(G)$. Положительные центральные линейные формы на $C^*(G)$ биективно соответствуют положительным центральным непрерывным линейным формам на $L^1(G)$ (2.7.5), поэтому также непрерывным центральным функциям положительного типа на G. Следовательно, если s — конечного типа, то существует такая непрерывная центральная функция положительного типа χ на G, что $s(f * f^*) = \langle \chi, f * f^* \rangle$ для любой $f \in \mathcal{K}(G)$; таким образом, s определяется функцией χ. Обратное очевидно. Предположим, что s определяется функцией χ. Функция $x \to t'(\pi(x))$ на G непрерывна. [Действительно, форма t' нормальна, поэтому ультраслабо непрерывна (A25), поэтому сильно непрерывна на единичном шаре (A1).] Для любых $f, g \in \mathcal{K}(G)$ имеем

$$\int t'(\pi(x))(g^* * f)(x)\,dx = t'\left(\int \pi(x)(g^* * f)(x)\,dx\right) =$$
$$= t'(\pi(g^* * f)) = \int \chi(x)(g^* * f)(x)\,dx,$$

поэтому меры $t'(\pi(x))\,dx$ и $\chi(x)\,dx$ равны, и, таким образом, $t'(\pi(x)) = \chi(x)$ для всех $x \in G$.

Отождествим характеры конечного типа группы G с центральными непрерывными функциями положительного типа на G.

17.3.2. Предположим, что G компактна. Любое фактор-представление G есть кратное некоторого неприводимого представления π (15.1.8), и $\dim \pi < +\infty$. Согласно 17.3.1 любой характер G в смысле 17.1.1 отождествляется с некоторой функцией $s \to \lambda \operatorname{Tr} \pi(s)$ на G, где $\lambda > 0$ и π — неприводимое представление G. С точностью до множителя λ мы возвращаемся к определению 15.3.1.

17.3.3. Предположим, что G коммутативна. Любое фактор-представление G есть кратное одномерного представления. Поэтому характеры G в смысле 17.1.1 отождествляются с функциями $\lambda \cdot \chi$, где $\lambda > 0$ и χ — характер G в обычном смысле.

17.3.4. Предложение. *Пусть G — унимодулярная локально компактная группа. Существует взаимно однозначное соответствие между*:

a) *множеством классов квазиэквивалентности непрерывных унитарных фактор-представлений конечного типа группы G*;

b) *множеством характеров конечного типа группы G, равных* 1 *в* e.

Это следует из 6.8.6.

17.3.5. Предложение. *Пусть G — унимодулярная локально компактная группа, C — множество непрерывных центральных функций положительного типа φ на G таких, что $\varphi(e) \leqslant 1$. Тогда*:

(i) *C выпукло и компактно в слабой топологии $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$.*

(ii) *Крайние точки C суть* 0 *и характеры конечного типа группы G, равные* 1 *в* e.

(iii) *C — слабо замкнутая выпуклая оболочка* 0 *и множества характеров конечного типа, равных* 1 *в* e.

Это следует из 6.8.7.

17.3.6. Предложение. *Предположим, что в группе G существует фундаментальная система компактных окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов.*

Тогда:

(i) *Для любого* $s \in G$, *отличного от* e, *существует такой характер* χ *группы* G *конечного типа, что* $\chi(s) \neq \chi(e)$.

(ii) *Для любого* $s \in G$, *отличного от* e, *существует такое непрерывное унитарное фактор-представление конечного типа* π *группы* G, *что* $\pi(s) \neq 1$.

Пусть $s \in G$, $s \neq e$. Существует симметричная компактная окрестность e, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов и такая, что $s \notin V^2$. Пусть f — характеристическая функция V. Тогда $g = f * f^*$ — центральная непрерывная функция положительного типа на G, равная 0 в s и равная $\lambda = \|f\|_2^2 > 0$ в e. Согласно 17.3.5 функция $\lambda^{-1}g$ есть слабый предел функций h_i — линейных комбинаций характеров конечного типа с положительными коэффициентами, таких, что $\|h_i\|_\infty \leqslant 1$. Так как $\|\lambda^{-1}g\|_\infty \leqslant \underline{\lim}\,\|h_i\|_\infty$, то можно предполагать, что $\|h_i\|_\infty = 1$ при всех i; тогда h_i стремится к $\lambda^{-1}g$ равномерно на каждом компакте (13.5.2). Поэтому $h_i(e) \neq h_i(s)$ для некоторых i, откуда следует (i). Пусть χ — такой характер G конечного типа, что $\chi(s) \neq \chi(e)$. Пусть (π, t) — соответствующее фактор-представление со следом конечного типа. Обозначим t' линейное продолжение t на алгебру фон Неймана, порожденную $\pi(G)$. Имеем

$$t'(\pi(s)) = \chi(s) \neq \chi(e) = t'(\pi(e)), \quad \text{поэтому} \quad \pi(s) \neq \pi(e) = 1.$$

17.3.7. Неизвестно, верно ли утверждение, обратное 17.3.6 *). Но:

Предложение. (i) *Пусть* G — *локально компактная группа. Предположим, что для любого* $s \in G$, отличного от e, *существует такое непрерывное унитарное фактор-представление конечного типа* π *группы* G, *что* $\pi(s) \neq 1$. *Тогда*:

($*$) *если* K — *такая компактная часть* G, *что* $e \notin K$, *то существует окрестность* e, *не пересекающаяся с* K *и инвариантная относительно внутренних автоморфизмов*.

(ii) *Если локально компактная группа* G *удовлетворяет* ($*$) *и порождена компактным множеством, то в* G *существует фундаментальная система компактных окрестностей* e, *инвариантных относительно внутренних автоморфизмов*.

Пусть s — точка в G, отличная от e. Существует такое непрерывное унитарное фактор-представление конечного типа π группы G, что $\pi(s) \neq 1$. Пусть t — канонический след на факторе, порожденном $\pi(G)$. Функция

$$x \to \varphi(x) = t[(\pi(x)^* - 1)(\pi(x) - 1)] = t(2 - \pi(x) - \pi(x^{-1}))$$

*) Утверждение, обратное 17.3.6, неверно (см. 16.5.3b). — *Прим. перев.*

непрерывна на G (см. доказательство 17.3.1) и центральна, причем $\varphi(e)=0, \varphi(s)\neq 0$. Поэтому существует замкнутая окрестность V_s точки s, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов и такая, что $e\notin V_s$. Если K — такая компактная часть G, что $e\notin K$, то K можно покрыть конечным числом множеств $V_{s_1}, \ldots, V_{s_n}$ и дополнение $V_{s_1}\cup\ldots\cup V_{s_n}$ есть окрестность e, не пересекающаяся с K и инвариантная относительно внутренних автоморфизмов. Отсюда следует (i). Утверждение (ii) сразу следует из следующей леммы:

17.3.8. Лемма. *Пусть G — локально компактная группа, удовлетворяющая условию* (*) *предложения* 17.3.7. *Пусть V — окрестность e и K — компактная часть G. Существует окрестность e, содержащаяся в V и инвариантная относительно внутренних автоморфизмов, определяемых элементами K.*

Уменьшая V, можно предполагать, что V открыта и относительно компактна. Далее, увеличивая K, можно предполагать, что $V\subset K$ и $K=K^{-1}$. Пусть $K'=K^3\cap(G-V)$; это множество компактно и $e\notin K'$. Согласно (*) существует окрестность W точки e, не пересекающая K' и инвариантная относительно внутренних автоморфизмов. Для завершения доказательства покажем, что если $s\in K$, то $V\cap W$ инвариантно относительно автоморфизма $g\to sgs^{-1}$ группы G. Пусть $x\in V\cap W$. Тогда $sxs^{-1}\in W$ и $sxs^{-1}\in KVK^{-1}\subset K^3$; если $sxs^{-1}\notin V$, то $sxs^{-1}\in$ $\in K^3\cap(G-V)=K'$, что невозможно; поэтому $sxs^{-1}\in V\cap W$.

17.3.9. Связная группа порождается любой окрестностью единичного элемента. Поэтому, согласно 17.3.7 и 16.4.6, единственными связными группами среди локально компактных групп, имеющих достаточно много непрерывных унитарных фактор-представлений конечного типа, являются произведения групп $\boldsymbol{R}^n$ на компактные группы. Эти примеры не очень интересны, так как неприводимые непрерывные унитарные представления этих групп конечномерны (13.1.8). Заметим, однако, что вследствие 17.3.6 любая дискретная группа имеет достаточно много непрерывных унитарных фактор-представлений конечного типа.

Позже (18.7.9) мы получим некоторые результаты о существовании характеров не обязательно конечного типа.

Библиография: [31],[32].

17.4. Дополнения.

17.4.1. а) Пусть G — локально компактная группа, имеющая фундаментальную систему (V_i) компактных окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов. Пусть f — такой характер G, что $\mathfrak{M}_f$ всюду плотен в $C^*(G)$. Тогда f — конечного типа. [Пусть φ_i — характеристическая функция V_i.

Оператор $\lambda_f(\varphi_i)$ скалярен и при некоторых i отличен от нуля. Так как φ_i есть предел в $C^*(G)$ элементов из идеала $\mathfrak{M}_f$, то оператор 1 есть предел по норме операторов, имеющих след относительно $\mathfrak{U}_f$. Поэтому $\mathfrak{U}_f$ — конечный фактор.] [32].

*b) Счетная дискретная группа может иметь характеры, которые не являются характерами конечного типа [21].

***17.4.2.** Существуют такие счетные дискретные NGCR-группы, что пространство характеров конечного типа с нормой 1 не является локально компактным [21].

17.4.3. Пусть G — связная локально компактная группа, π — непрерывное унитарное представление G, A — алгебра фон Неймана, порожденная $\pi(G)$. Тогда наибольший проектор E в центре A такой, что A_E имеет тип II_1, равен 0 [65], [123].

17.4.4. Пусть G — связная локально компактная группа, имеющая семейство унитарных представлений (π_i) со следующими свойствами:

1° для любого $s \in G$, $s \neq e$ существует такой индекс i, что $\pi_i(s) \neq \pi_i(e)$;

2° отображения $s \to \pi_i(s)$ непрерывны по норме.

Тогда G — произведение компактной группы и группы $\boldsymbol{R}^n$ (использовать 16.4.6 и 17.3.8) [53], [65].

17.4.5. Пусть G — некомпактная простая связная вещественная группа Ли. Единственное непрерывное унитарное представление π группы G, для которого $\pi(G)$ содержится в конечном факторе, есть тривиальное представление. Это относится, в частности, к конечномерным представлениям [123].

***17.4.6.** Пусть G — полупростая связная вещественная группа Ли. Пусть π — неприводимое непрерывное унитарное представление G. Если f — элемент $L^2(G)$ с компактным носителем, то $\pi(f)$ — оператор Гильберта — Шмидта. Если f — бесконечно дифференцируемая функция на G с компактным носителем, то $\pi(f)$ — оператор со следом и $f \to \operatorname{Tr} \pi(f)$ есть некоторое распределение χ_π на G. Таким образом, π имеет характер, который является распределением χ_π. Хариш — Чандра недавно сообщил, что χ_π определен локально интегрируемой функцией на G, аналитической на множестве регулярных элементов группы G *). Для классических комплексных простых групп функция χ_π вычислена Гельфандом и Наймарком [100], [173], [174], [175].

***17.4.7.** Пусть G — нильпотентная односвязная вещественная группа Ли. Пусть π — неприводимое непрерывное унитарное представление G. Если f бесконечно дифференцируема на G и быстро убывает на бесконечности, то $\pi(f)$ — оператор со следом

) Доказательство этих утверждений опубликовано в [389] и подробно изложено в [388*]. — *Прим. перев.*

и $f \to \operatorname{Tr} \pi(f)$ есть обобщенная функция умеренного роста (распределение Шварца) χ_π на G. Таким образом, π имеет характер, который является распределением χ_π. Вообще говоря, это распределнние не определено ни функцией, ни мерой [5], [31], [39], [40], [41].

17.4.8. Пусть G — локально компактная группа, в которой e имеет фундаментальную систему компактных окрестностей, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов. Если μ — центральная мера положительного типа на G, то соответствующее унитарное представление G — конечного типа [31].

§ 18. ДУАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ

18.1. Определение дуального пространства.

18.1.1. Пусть G — локально компактная группа. Существует каноническая биекция $C^*(G)^\wedge$ на $\hat{G}$ (13.9.3). Перенося с помощью этой биекции топологию с $C^*(G)^\wedge$, получаем топологию на $\hat{G}$.

Определение. *Получаемое таким образом топологическое пространство называется дуальным пространством группы G.*

В дальнейшем $\hat{G}$ обозначает это топологическое пространство. Пространства $\hat{G}$ и $C^*(G)^\wedge$ часто отождествляются.

18.1.2. Пространство $\hat{G}$ есть локально квазикомпактное пространство Бэра (3.3.8 и 3.4.13). Если G дискретна, то $C^*(G)$ имеет единичный элемент, поэтому $\hat{G}$ квазикомпактно (3.1.8). Если G сепарабельна, то $\hat{G}$ сепарабельно (3.3.4). Если G — GCR-группа, то в $\hat{G}$ существует всюду плотное локально компактное открытое подмножество (4.4.5).

18.1.3. Пусть π — непрерывное унитарное представление G, S — множество непрерывных унитарных представлений G. Говорят, что π слабо содержится в S, если π, рассматриваемое как представление $C^*(G)$, слабо содержится в S, рассматриваемом как множество представлений $C^*(G)$.

Переведем теперь утверждения 3.4.4, 3.4.9, 3.4.10 на случай групп. Для этого перевода мы используем:

1° предложение 2.7.5, позволяющее переходить от положительных форм на $C^*(G)$ к положительным непрерывным формам на $L^1(G)$;

2° теоремы 13.4.5 и 13.5.2, позволяющие переходить от положительных форм на $L^1(G)$ к непрерывным функциям положительного типа на G. Тогда мы получаем:

18.1.4. Предложение. *Пусть π — непрерывное унитарное представление G, S — множество непрерывных унитарных представлений G.*

Следующие условия эквивалентны:

(i) π *слабо содержится в* S;

(ii) *любая функция положительного типа, связанная с* π, *есть равномерный предел на любом компакте сумм функций положительного типа, связанных с* S.

Если π *имеет тотализирующий вектор* ξ, *то эти условия эквивалентны также следующему:*

(ii′) *функция* $S \to (\pi(s)\xi \mid \xi)$ *есть равномерный на любом компакте предел сумм функций положительного типа, связанных с* S.

18.1.5. Предложение. *Пусть* $\pi \in \hat{G}$ *и* $S \subset \hat{G}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\pi \in \bar{S}$;

(ii) π *слабо содержится в* S;

(iii) *одна из ненулевых функций положительного типа, связанных с* π, *есть равномерный на любом компакте предел функций положительного типа, связанных с* S;

(iv) *любая функция положительного типа, связанная с* π, *есть равномерный на любом компакте предел функций положительного типа, связанных с* S.

18.1.6. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (iii) в 18.1.5 доказывает, в частности, что если G коммутативна, то топология, определенная в 18.1.1, есть обычная топология группы, двойственной G.

18.1.7. Определение. *Пусть* π — *непрерывное унитарное представление* G. *Носителем представления* π *называется множество представлений* $\sigma \in \hat{G}$, *которые слабо содержатся в* π. *Анализатором непрерывной функции положительного типа* φ *на* G *называется носитель* π_φ.

Если S — носитель π, то S замкнуто в $\hat{G}$ и π слабо содержится в S (3.4.6).

18.1.8. Предложение. *Пусть* φ — *непрерывная функция положительного типа на* G *и* $A \subset \hat{G}$ — *ее анализатор. Тогда:*

(i) φ *есть равномерный на любом компакте предел сумм (чистых) функций положительного типа, связанных с элементами* A.

(ii) *Любая функция положительного типа, связанная с элементом* A, *есть равномерный на каждом компакте предел функций вида:* $s \to \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_j \varphi(s_j^{-1} s s_i)$, *где* $s_1, \ldots, s_n \in G$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{C}$.

Так как π_φ слабо содержится в A, то (i) следует из 18.1.4. Пусть $\pi \in A$. Если рассматривать π и π_φ как представления $G^*(G)$, то $\operatorname{Ker} \pi \supset \operatorname{Ker} \pi_\varphi$, поэтому любое состояние, связанное с π, есть слабый предел состояний, связанных с π_φ [3.4.2 (ii)]. Тогда (ii) следует из 13.4.10.

18.1.9. Пусть n — кардинальное число, H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n, $\operatorname{Rep}_n(G)$ — множество непрерывных унитарных представлений G в H_n. Существует каноническая биекция $\operatorname{Rep}_n(G)$ на $\operatorname{Rep}'_n(C^*(G))$ [множество невырожденных представлений $C^*(G)$ в H_n]. Прообраз топологии в $\operatorname{Rep}'_n(C^*(G))$ (3.5.2) при этой биекции есть некоторая топология на $\operatorname{Rep}_n(G)$, которую мы сейчас опишем непосредственно. Согласно 3.5.8 это приведет к новому определению топологии на $\widehat{G}_n$ (подпространстве $\widehat{G}$, образованном такими $\sigma \in \widehat{G}$, что $\dim \sigma = n$).

Предложение. *Пусть* π_λ, $\pi \in \operatorname{Rep}_n(G)$, π'_λ, π' — *соответствующие элементы* $\operatorname{Rep}_n(C^*(G))$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\pi'_\lambda \to \pi'$;

(ii) *для любого* $\xi \in H_n$ *и любой компактной части* $K \subset G$
$$\|\pi_\lambda(s)\xi - \pi(s)\xi\| \to 0 \quad \textit{равномерно на } K;$$

(iii) *для любых* ξ, $\eta \in H_n$ *и любой компактной части* $K \subset G$
$$|(\pi_\lambda(s)\xi\,|\,\eta) - (\pi(s)\xi\,|\,\eta)| \to 0 \textit{ равномерно на } K.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидно.

(iii) $\Rightarrow$ (i): пусть выполнено условие (iii). Для любой $f \in \mathscr{K}(G)$ имеем
$$|(\pi'_\lambda(f)\xi\,|\,\eta) - (\pi'(f)\xi\,|\,\eta)| \leqslant \int |f(s)| \cdot |(\pi_\lambda(s)\xi\,|\,\eta) - (\pi(s)\xi\,|\,\eta)|\,ds,$$
и правая часть стремится к нулю. Так как $\mathscr{K}(G)$ всюду плотно в $C^*(G)$, то $\pi'_\lambda \to \pi'$ (3.5.4).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть выполнено условие (i); докажем (ii). Достаточно доказать утверждение (ii) для векторов ξ вида $\pi(f)\eta$ ($f \in L^1(G)$, $\eta \in H_n$), так как множество таких векторов всюду плотно в H_n. Но
$$\begin{aligned}\|\pi_\lambda(s)\pi(f)\eta - \pi(s)\pi(f)\eta\| &\leqslant \\ \leqslant \|\pi_\lambda(s)\pi_\lambda(f)\eta - \pi(s)\pi(f)\eta\| &+ \|\pi_\lambda(s)\pi(f)\eta - \pi_\lambda(s)\pi_\lambda(f)\eta\| = \\ &= \|\pi_\lambda({}_{s^{-1}}f)\eta - \pi({}_{s^{-1}}f)\eta\| + \|\pi(f)\eta - \pi_\lambda(f)\eta\|.\end{aligned}$$
Множество отображений $g \to \pi_\lambda(g)$ пространства $L^1(G)$ в H_n равномерно непрерывно при фиксированном η. Поэтому на множестве ${}_{s^{-1}}f$ ($s \in K$), которое компактно, простая сходимость этих отображений равносильна равномерной сходимости. Поэтому $\|\pi_\lambda({}_{s^{-1}}f)\eta - \pi({}_{s^{-1}}f)\eta\| \to 0$ равномерно на K. С другой стороны, $\|\pi(f)\eta - \pi_\lambda(f)\eta\| \to 0$.

18.1.10. Обозначим через $\operatorname{Irr}_n(G)$ множество неприводимых непрерывных унитарных представлений G в H_n. Снабдим это множество топологией, индуцированной топологией $\mathrm{Rep}_n(G)$. Если G сепарабельна, то $\mathrm{Rep}_n(G)$ и $\mathrm{Irr}_n(G)$ — польские пространства (3.7.4 и 3.7.5).

Библиография: [28], [83], [161].

18.2. Преобразование Фурье.

18.2.1. Определение. *Пусть* $\mu \in M^1(G)$. *Для любого* $\pi \in \widehat{G}$ *положим* $(\mathscr{F}\mu)(\pi) = \pi(\mu)$ *(это — непрерывный линейный оператор в* H_π*). Функция* $\pi \dashrightarrow (\mathscr{F}\mu)(\pi)$ *на* $\widehat{G}$ *называется преобразованием Фурье меры* μ.

Напомним, что пространство представления π определено лишь с точностью до изоморфизма. Если G коммутативна, то $(\mathscr{F}\mu)(\pi)$ есть гомотетия $\int \pi(s)\,d\mu(s)$ в одномерном пространстве H_π, и мы получаем обычное определение преобразования Фурье, отождествляя гомотетию с ее коэффициентом.

18.2.2. Очевидно,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\alpha\mu) &= \alpha\mathscr{F}(\mu) && (\alpha \in \boldsymbol{C},\ \mu \in M^1(G)),\\
\mathscr{F}(\mu + \mu') &= \mathscr{F}(\mu) + \mathscr{F}(\mu') && (\mu,\ \mu' \in M^1(G)),\\
\mathscr{F}(\mu * \mu') &= (\mathscr{F}\mu)\cdot(\mathscr{F}\mu') && (\mu,\ \mu' \in M^1(G)),\\
\mathscr{F}(\mu^*) &= (\mathscr{F}\mu)^* && (\mu \in M^1(G)),\\
\sup\|\mathscr{F}\mu\| &\leqslant \|\mu\|, && (\mu \in M^1(G)).
\end{aligned}$$

18.2.3. Преобразование Фурье инъективно. Действительно пусть μ — ненулевой элемент $M^1(G)$. Существует такая функция $f \in \mathscr{K}(G)$, что $g = f * \mu$ — ненулевой элемент $L^1(G)$. Поэтому существует такое $\pi \in \widehat{G}$, что $\pi(f)\pi(\mu) = \pi(f * \mu) \neq 0$ (2.7.3), откуда $(\mathscr{F}\mu)(\pi) = \pi(\mu) \neq 0$.

18.2.4. Пусть $f \in L^1(G)$; обозначим $\mathscr{F}f$ преобразование Фурье меры $f(s)ds$. Иначе говоря, положим $(\mathscr{F}f)(\pi) = \pi(f)$. Для любого $\varepsilon > 0$ функция $\pi \dashrightarrow \|(\mathscr{F}f)(\pi)\|$ меньше ε вне квазикомпактной части $\widehat{G}$ (3.3.7).

Библиография: [31], [75], [93], [96], [120], [125], [127], [128], [142], [178], [182], [183], [184].

18.3. Приведенное дуальное пространство.

18.3.1. Определение. *Приведенным дуальным пространством* G *называется носитель регулярного представления* G.

Это приведенное дуальное пространство является замкнутой частью $\widehat{G}_r$ пространства $\widehat{G}$.

18.3.2. Пусть λ — левое регулярное представление G. Это представление, рассматриваемое как представление $C^*(G)$, имеет некоторое ядро N. Тогда $\widehat{G}_r$ — множество представлений $\sigma \in \widehat{G} = (C^*(G))^\wedge$, ядро которых содержит N. Иначе говоря, $\widehat{G}_r$ — спектр

C^*-алгебры $C^*(G)/N$, которая изоморфна C^*-алгебре $\lambda(C^*(G))$. Эта C^*-алгебра $\lambda(C^*(G))$ является замыканием по норме в пространстве $\mathfrak{B}(L^2(G))$ множества операторов левой свертки с элементами $L^1(G)$.

Напомним, что $N \cap L^1(G) = 0$ (13.3.6).

18.3.3. Предположим, что G унимодулярна. Любое неприводимое представление с интегрируемым квадратом π группы G содержится в регулярном представлении, поэтому принадлежит $\hat{G}_r$. В частности, если G компактна, то $\hat{G} = \hat{G}_r$.

18.3.4. Предположим, что G коммутативна. Пусть $f \in L^1(G)$, χ — характер G, λ — регулярное представление G. Тогда $|\chi(f)| \leqslant \|\lambda(f)\|$ (13.3.6), и это неравенство распространяется по непрерывности на случай $f \in C^*(G)$. Поэтому χ слабо содержится в λ, так что $\hat{G}_r = \hat{G}$.

Другие примеры см. в 18.3.9, 18.9.8 и 18.9.11.

18.3.5. Предложение. а) *Пусть φ — непрерывная функция положительного типа на G. Следующие условия эквивалентны:*

(i) φ — *равномерный на любом компакте предел функций вида* $f * \tilde{f}$ $(f \in \mathcal{K}(G))$;

(ii) φ — *равномерный на любом компакте предел непрерывных функций положительного типа с компактным носителем;*

(iii) φ — *равномерный на любом компакте предел непрерывных функций положительного типа с суммируемым квадратом;*

(iv) φ *связана с представлением, которое слабо содержатся в регулярном представлении.*

b) *Функции, удовлетворяющие условиям* (i), (ii), (iii), (iv), *образуют слабо замкнутый выпуклый конус Q в $L^\infty(G)$.*

c) *Если $\varphi \in Q$ и ψ — непрерывная функция положительного типа, то $\varphi\psi \in Q$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii): очевидно.

(iii) $\Rightarrow$ (i): достаточно показать, что если φ — непрерывная функция положительного типа с интегрируемым квадратом, то φ есть равномерный предел на группе G функций $f * \tilde{f}$, где $f \in \mathcal{K}(G)$. Но существует $\psi \in L^2(G)$ такая, что $\varphi = \psi * \tilde{\psi}$ (13.8.6). Пусть (f_n) — последовательность элементов $\mathcal{K}(G)$, стремящихся к χ в $L^2(G)$. Тогда $f_n * \tilde{f}_n$ равномерно сходится к $\psi * \tilde{\psi} = \varphi$.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Пусть λ — левое регулярное представление G. Если $f \in \mathcal{K}(G)$, то $f * \tilde{f}$ — функция положительного типа, связанная с λ (13.4.11). Если φ удовлетворяет (i), то π_φ слабо содержится в λ (18.1.4).

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Если φ удовлетворяет (iv), то φ — равномерный на любом компакте предел сумм функций положительного типа, связанных с λ (18.1.4). Но функция положительного типа, связанная с λ, имеет вид $\psi * \tilde{\psi}$, где $\psi \in L^2(G)$, поэтому она является равномерным на G пределом функций вида $f*\tilde{f}$, где $f\in\mathcal{K}(G)$; сумма таких функций есть равномерный на G предел непрерывных функций положительного типа с компактным носителем.

Таким образом, а) доказано.

Ясно, что функции, удовлетворяющие условиям (i), (ii), (iii), (iv), образуют выпуклый конус G в $L^\infty(G)$. Пусть Q_1 — пересечение Q с единичным шаром $L^\infty(G)$. Чтобы доказать, что Q слабо замкнут, достаточно доказать, что Q_1 слабо замкнуто (B8). Пусть φ — функция из $L^\infty(G)$, являющаяся слабой точкой прикосновения Q_1; пусть ω — положительная форма на $C^*(G)$, определяемая φ. Тогда ω — слабый предел положительных форм на $C^*(G)$, определяемых элементами Q_1 [2.7.5 (iii)]. Поэтому π_ω слабо содержится в λ (3.4.9), так что $\varphi\in Q_1$.

Наконец, с) следует из характеризации (ii) элементов множества Q и того факта, что произведение непрерывных функций положительного типа есть непрерывная функция положительного типа (13.4.9).

18.3.6. Предложение. *Пусть G — локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *дуальное пространство G совпадает с приведенным дуальным пространством;*

(i′) *одномерное тривиальное представление G принадлежит приведенному дуальному пространству;*

(ii) *любая непрерывная функция положительного типа на G есть равномерный на любом компакте предел функций вида $f*\tilde{f}$, где $f\in\mathcal{K}(G)$;*

(ii′) *функция 1 есть равномерный на любом компакте предел функций вида $f*\tilde{f}$, где $f\in\mathcal{K}(G)$;*

(iii) *для любой ограниченной меры μ положительного типа на G и любой непрерывной функции положительного типа на G имеем $\int\varphi(x)\,d\mu(x)\geqslant 0$;*

(iii′) *для любой ограниченной меры μ положительного типа на G имеем $\int d\mu(x)\geqslant 0$.*

Эквивалентность (i)$\Leftrightarrow$(ii) следует из 18.3.5. Определение мер положительного типа показывает, что (ii)$\Leftrightarrow$(iii). Пусть условие (iii) выполнено. Пусть φ — непрерывная функция положительного типа на G. Введем обозначение Q из 18.3.5. Чтобы показать, что $\varphi\in Q$, достаточно доказать, что φ принадлежит биполяре Q. Предположим поэтому, что $f\in L^1(G)$ — элемент поляры Q. Так как Q — конус, то $\operatorname{Re}\langle f, q\rangle\leqslant 0$ для любой $q\in Q$, и, в частности, $\operatorname{Re}\langle f, g*\tilde{g}\rangle\leqslant 0$ для любой $g\in\mathcal{K}(G)$, поэтому мера $-(f+f^*)(s)\,ds$ — мера положительного типа. Вследствие условия (iii) имеем Re $\int f(s)\varphi(s)\,ds \leqslant 0$, что доказывает, что φ принадлежит биполяре Q. Поэтому (iii)$\Rightarrow$(ii).

Эквивалентности (i′)$\Leftrightarrow$(ii′)$\Leftrightarrow$(iii′) устанавливаются аналогичным образом.

Ясно, что (ii)$\Rightarrow$(ii′). Наконец, если $1 \in Q$, то любая непрерывная функция положительного типа принадлежит Q вследствие 18.3.5 с).

18.3.7. Лемма. *Если G — полупрямое произведение групп H и K, удовлетворяющих условиям* 18.3.6, *то G также удовлетворяет этим условиям.*

Пусть C — компактная часть G. Существуют такие компактные множества C', C'' в H, K соответственно, что $C \subset C'C''$, и можно предполагать, что $e \in C'$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такая $x \in \mathcal{K}(H)$, что $|x * \tilde{x} - 1| \leqslant \varepsilon$ на C'. Пусть C_0' — носитель x. Множество C_0'' элементов вида $h^{-1}kh\,(h \in C_0',\ k \in C'')$ есть компактное подмножество в нормальном делителе K. Существует такая $y \in \mathcal{K}(K)$, что $|y * \tilde{y} - 1| \leqslant \varepsilon$ на C_0''. Определим $z \in \mathcal{K}(G)$ равенством

$$z(hk) = x(h)\,y(k) \qquad (h \in H,\ k \in K).$$

Тогда при $h' \in H$ и $k' \in K$

$$(z * \tilde{z})(h'k') = \int z(h'k'g)\,\bar{z}(g)\,dg =$$
$$= \int\limits_{H\times K}\int x(h'h)\,y\left(\left(h^{-1}k'h\right)k\right)\bar{x}(h)\,\bar{y}(k)\,dh\,dk =$$
$$= \int\limits_H (y * \tilde{y})\left(h^{-1}k'h\right)x(h'h)\,\bar{x}(h)\,dh.$$

Поэтому

$$|(z * \tilde{z})(h'k') - 1| \leqslant \left|\int\limits_H (y * \tilde{y})\left(h^{-1}k'h\right)x(h'h)\,\bar{x}(h)\,dh - \right.$$
$$\left. - \int\limits_H x(h'h)\,\bar{x}(h)\,dh\right| + \left|\int\limits_H x(h'h)\,\bar{x}(h)\,dh - 1\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{C_0'} \left|(y * \tilde{y})\left(h^{-1}k'h\right) - 1\right| \cdot |x(h'h)| \cdot |\bar{x}(h)|\,dh + |(x * \tilde{x})(h') - 1|.$$

Если $h'k' \in C$, то $h' \in C'$, $k' \in C''$, поэтому $h^{-1}k'h \in C_0''$ при $h \in C_0'$. Тогда

$$|(z * \tilde{z})(h'k') - 1| \leqslant$$
$$\leqslant \int \varepsilon\,|x(h'h)| \cdot |x(h)|\,dh + \varepsilon \leqslant \varepsilon \int |x(h)|^2\,dh + \varepsilon =$$
$$= \varepsilon\,[(x * \tilde{x})(e) + 1] \leqslant \varepsilon\,(2 + \varepsilon).$$

18.3.8. Лемма. *Пусть G — локально компактная группа, удовлетворяющая условиям* 18.3.6, *и N — замкнутый нормальный делитель в G. Тогда G/N удовлетворяет условиям* 18.3.6.

Пусть $G^* = G/N$ и φ — канонический морфизм G на G^*. Пусть C^* — компактная часть G/N и $\varepsilon > 0$. Существует такая компактная часть $C \subset G$, что $\varphi(C) \supset C^*$, и можно предположить, что $e \in C$. Кроме того, существует такая $f \in \mathcal{K}(G)$, что $|f * \tilde{f} - 1| \leqslant \varepsilon$ на C и $(f * \tilde{f})(e) = 1$, т. е. $\|f\|_2 = 1$. Пусть F — функция, определенная на G^* равенством

$$F(s^*) = \left(\int_N |f(sn)|^2 dn\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где dn обозначает левую меру Хаара на N и $s^* = \varphi(s)$ [очевидно, правая часть (1) зависит только от s^*]. Тогда $F \in \mathcal{K}(G^*)$ и

$$\|F\|_2^2 = \int_{G^*} ds^* \int_N |f(sn)|^2 dn = \int_G |f(s)|^2 ds = 1. \tag{2}$$

Согласно (2) для любого $s' \in G$ имеем

$$|(F * \tilde{F})(s'^*) - 1|^2 = \left|\int_{G^*} F(s'^* s^*) \bar{F}(s^*) ds^* - 1\right|^2 =$$

$$= \left|\int_{G^*} (F(s'^* s^*) - F(s^*)) \bar{F}(s^*) ds^*\right|^2 \leqslant \int_{G^*} |F(s'^* s^*) - F(s^*)|^2 ds^* =$$

$$= \int_{G^*} \left|\left(\int_N |f(s'sn)|^2 dn\right)^{1/2} - \left(\int_N |f(sn)|^2 dn\right)^{1/2}\right|^2 ds^*.$$

Применяя неравенство $(\|a\| - \|b\|)^2 \leqslant \|a - b\|^2$ в $L^2(N)$, получаем, что правый член последнего неравенства не превосходит

$$\int_{G^*} ds^* \int_N |f(s'sn) - f(sn)|^2 dn = \int_G |f(s's) - f(s)|^2 ds =$$

$$= 2 - 2 \operatorname{Re} \int f(s's) \bar{f}(s) ds = 2[1 - \operatorname{Re}(f * \tilde{f})(s')].$$

Следовательно, если $s' \in C$, то $|(F * \tilde{F})(s'^*) - 1|^2 \leqslant 2\varepsilon$. Поэтому $|F * \tilde{F} - 1|^2 \leqslant 2\varepsilon$ на C^*.

18.3.9. Предложение. *Пусть G — связная вещественная группа Ли, R — ее радикал. Если G/R компактна, то $\hat{G} = \hat{G}_r$.*

Пусть G' — универсальная накрывающая G, которая является полупрямым произведением компактной группы C и односвязной разрешимой группы S. Так как G есть фактор-группа группы G', то достаточно доказать, что $\widehat{G'} = \hat{G}'_r$ (18.3.8). Но $\hat{C} = \hat{C}_r$ (18.3.8), и, вследствие 18.3.7, достаточно показать, что односвязная разрешимая группа S удовлетворяет условию

$\hat{S} = \hat{S}_r$. Проведем рассуждение индукцией по размерности n группы S. Утверждение очевидно при $n=0$. Пусть $n>0$; предположим, что утверждение справедливо при $\dim S < n$. Тогда S — полупрямое произведение группы, изоморфной $\boldsymbol{R}$ и односвязной разрешимой группы размерности $n-1$; тогда достаточно применить 18.3.4, 18.3.7 и предположение индукции.

Библиография: [36], [134], [161].

18.4. Приведенное дуальное пространство и интегрируемые представления.

18.4.1. Предложение. *Пусть G — унимодулярная локально компактная группа, σ — неприводимое представление с интегрируемым квадратом группы G. Тогда $\{\sigma\}$ замкнуто в $\hat{G}_r$.*

Если $f \in \mathcal{K}(G)$, то $\sigma(f)$ — оператор Гильберта — Шмидта (14.4.2), поэтому $\sigma(C^*(G)) \subset \mathfrak{B}\mathscr{C}(H_\pi)$. Таким образом, ядро σ в $C^*(G)$ есть максимальный замкнутый двусторонний идеал I в $C^*(G)$ и любое неприводимое представление $C^*(G)$ с ядром I эквивалентно σ (4.1.10 и 4.1.11); поэтому множество $\{I\}$ замкнуто в $\operatorname{Prim} C^*(G)$ (3.1.4) и $\{\sigma\}$ замкнуто в $(C^*(G))^\wedge = \hat{G}$. С другой стороны, $\sigma \in \hat{G}_r$ (18.3.3).

18.4.2. Предложение. *Пусть G — унимодулярная локально компактная группа, σ — интегрируемое неприводимое представление G. Тогда $\{\sigma\}$ открыто и замкнуто в $\hat{G}_r$.*

Известно, что $\{\sigma\}$ замкнуто в $\hat{G}_r$ (18.4.1). Пусть λ — левое регулярное представление G; тогда $\lambda(C^*(G)) = B$ есть некоторая C^*-алгебра операторов в $L^2(G)$, спектр которой равен $\hat{G}_r$ (18.3.2). Можно отождествить σ с подпредставлением λ, так как σ — с интегрируемым квадратом. Пусть $K \supset H_\sigma$ — биинвариантное подпространство $L^2(G)$, связанное с σ; пусть λ_1 — подпредставление λ, определенное K. Для любой функции $f \in L^1(G)$ оператор $\lambda_1(f)$ является сужением $\lambda(f)$ на K; поэтому, если отождествить λ_1 с представлением B, то λ_1 — не что иное, как отображение $T \to T|K$ C^*-алгебры B в $\mathfrak{B}(K)$. Ядро представления σ в B равно ядру λ_1, так как $\lambda_1 \simeq (\dim \sigma) \cdot \sigma$ [14.3.5(iii)]; поэтому это ядро I есть множество таких операторов $T \in B$, что $T|K = 0$. Пусть J — множество таких $T \in B$, что $T| L^2(G) \ominus K = 0$. Пусть ξ — такой ненулевой вектор в H_σ, что функция $s \to \varphi(s) = (\lambda(s)\xi | \xi)$ на группе G интегрируема. Тогда $\check{\varphi} \in K$ (14.3.1). Так как $\check{\varphi} \in L^1(G)$, то можно построить оператор $\lambda(\check{\varphi})$, который является ненулевым элементом B. Для любой $g \in L^2(G)$ имеем $\lambda(\check{\varphi})g = \check{\varphi} * g \in K$, так как K биинвариантно; поэтому $\lambda(\check{\varphi})| L^2(G) \ominus K = 0$. Отсюда следует, что $J \neq 0$.

Пусть тогда τ — элемент $\hat{G}_r$, который можно рассматривать как неприводимое представление B. Его ядро $\operatorname{Ker}\tau$ в C^*-алгебре B есть примитивный идеал, содержащий $0 = I \cap J$, поэтому

$\operatorname{Ker}\tau$ содержит I или J (2.11.4). Если $\operatorname{Ker}\tau \supset I$, то τ лежит в замыкании $\{\sigma\}$ и потому равно σ. Это доказывает, что $\bigcap_{\tau \in \hat{G}_r,\, \tau \neq \sigma} \operatorname{Ker}\tau \supset J \neq 0$. Поэтому $\hat{G}_r - \{\sigma\}$ не всюду плотно в $\hat{G}_r$. Поэтому $\{\sigma\}$ содержит непустое открытое подмножество $\hat{G}_r$ и $\{\sigma\}$ открыто в $\hat{G}_r$.

18.4.3. Следствие. *Если G компактна, то $\hat{G}$ дискретно.*

Так как любое неприводимое представление G интегрируемо, то утверждение следует из 18.4.2.

Библиография: [28], [46].

18.5. Борелевская структура Макки.

18.5.1. Пусть G—сепарабельная локально компактная группа. Для любого кардинального числа $n \leqslant \aleph_0$ снабдим $\operatorname{Rep}_n(G)$ и $\operatorname{Irr}_n(G)$ борелевскими структурами, подчиненными топологии. В обозначениях 18.1.9 биекции

$$\operatorname{Rep}_n(G) \to \operatorname{Rep}'_n(C^*(G)), \quad \operatorname{Irr}_n(G) \to \operatorname{Irr}_n(C^*(G))$$

являются борелевскими изоморфизмами. Определим затем борелевские пространства $\operatorname{Rep}(G)$, $\operatorname{Irr}(G)$ как суммы борелевских пространств $\operatorname{Rep}_n(G)$ и $\operatorname{Irr}_n(G)$ соответственно; все эти пространства стандартны.

18.5.2. Функции $\pi \to (\pi(s)\xi \mid \eta)$ на $\operatorname{Rep}_n(G)$ (где $s \in G$, $\xi, \eta \in H_n$) определяют на $\operatorname{Rep}_n(G)$ борелевскую структуру, совпадающую со структурой 18.5.1. Действительно, функции $\pi \to (\pi(s)\xi \mid \eta)$ непрерывны (18.1.9), поэтому эта структура не тоньше структуры 18.5.1. Тогда достаточно заметить, что функции $\pi \to (\pi(s_k)\xi_p \mid \eta_q)$ [s_k — последовательность, всюду плотная в G; (ξ_p), (η_q) — последовательности, всюду плотные в H_n] отделяют точки $\operatorname{Rep}_n(G)$, и применить B21.

18.5.3. *Борелевской структурой Макки на $\hat{G}$* называется фактор-структура борелевской структуры на $\operatorname{Irr}(G)$ при каноническом отображении $\operatorname{Irr}(G) \to \hat{G}$. Эта структура отождествляется с борелевской структурой Макки на $C^*(G)^\wedge$. Она тоньше борелевской структуры, подчиненной топологии $\hat{G}$ (3.8.3), и совпадает с ней, если G — GCR-группа (4.6.1). Точки $\hat{G}$ являются борелевскими множествами в структуре Макки (3.8.4).

Библиография: [83].

18.6. Квазидуальиое пространство.

18.6.1. Пусть G—сепарабельная локально компактная группа, n — кардинальное число, H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n. Обозначим $\operatorname{Fac}_n(G)$ множество непрерывных унитарных фактор-представлений G в H_n; пусть $\mathrm{Fac}(G)$ — объединение $\mathrm{Fac}_n(G)$ по n ($n = 1, 2, \ldots, \aleph_0$), $\mathrm{Fac\,I}_p(G)$ — множество $\pi \in \mathrm{Fac}(G)$ таких, что $\pi(G)'$ — фактор типа I_p, $\mathrm{Fac\,I}(G)$ — множество $\pi \in \mathrm{Fac}(G)$ типа I. Все эти множества являются борелевскими частями $\mathrm{Rep}(G)$, следовательно, стандартными борелевскими пространствами (7.1.4 и 7.3.4). Они отождествляются соответственно с $\mathrm{Fac}_n(C^*(G))$ и т. д.

18.6.2. Обозначим $\widehat{G}$ множество классов квазиэквивалентности непрерывных унитарных фактор-представлений G. Борелевской структурой Макки на $\widehat{G}$ называется фактор-структура борелевской структуры $\mathrm{Fac}(G)$ при каноническом отображении $\mathrm{Fac}(G) \to \widehat{G}$. Борелевское пространство $\widehat{G}$ называется *квазидуальным пространством группы* G. Оно отождествляется с $C^*(G)^\frown$. Любая точка $\widehat{G}$ является борелевским множеством в $\widehat{G}$ (7.2.4).

18.6.3. Пусть $\widehat{G}_{\mathrm{I}}$ — множество классов квазиэквивалентности $\pi \in \mathrm{Fac}(G)$ типа I. Тогда $\widehat{G}_{\mathrm{I}}$ отождествляется с $C^*(G)^\frown_{\mathrm{I}}$. Это — борелевская часть $\widehat{G}$, и каноническая биекция $\hat{G}$ на $\widehat{G}_{\mathrm{I}}$ есть борелевский изоморфизм (7.3.6).

18.6.4. Пусть $\mathrm{Fac\,f}_n(G)$ — множество $\pi \in \mathrm{Fac}_n(G)$ конечного типа, $\mathrm{Fac\,f}(G)$ — объединение $\mathrm{Fac\,f}_n(G)$, $\widehat{G}_{\mathrm{f}}$ — канонический образ $\mathrm{Fac\,f}(G)$ в $\widehat{G}$. Множества $\mathrm{Fac\,f}(G)$, $\mathrm{Fac\,f}_n(G)$ — борелевские подмножества $\mathrm{Fac}(G)$, $\widehat{G}_{\mathrm{f}}$ — борелевское подмножество $\widehat{G}$, все эти пространства стандартны (7.4.3 и 7.4.4) и отождествляются с $\mathrm{Fac\,f}(C^*(G))$, $\mathrm{Fac\,f}_n(C^*(G))$, $C^*(G)^\frown_{\mathrm{f}}$.

Пусть C — множество таких непрерывных центральных функций положительного типа φ на G, что $\varphi(e) \leqslant 1$. Тогда C — метризуемый компакт в слабой топологии. Множество D характеров конечного типа группы G, равных 1 в e, имеет тип G_δ в C (17.3.5 и B13), поэтому D — польское пространство. Снабдим $\widehat{G}_{\mathrm{f}}$ топологией, получаемой из топологии D с помощью канонической биекции D на $\widehat{G}_{\mathrm{f}}$ (17.3.4). Тогда $\widehat{G}_{\mathrm{f}}$ становится польским пространством и борелевская структура, подчиненная его топологии, совпадает со структурой, индуцированной борелевской структурой $\widehat{G}$ (7.4.3).

Библиография: [21], [185].

18.7. Интегрирование и дезинтегрирование представлений.

18.7.1. Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, $\zeta \to H(\zeta)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z. Для любого $\zeta \in Z$ введем $\pi(\zeta)$ — непрерывное унитарное представление G в $H(\zeta)$: говорят, что $\zeta \to \pi(\zeta)$ —

поле непрерывных унитарных представлений G. Это поле называется *измеримым*, если для любого $s \in G$ поле операторов $\zeta \to \pi(\zeta)(s)$ измеримо.

18.7.2. Предположим, что G сепарабельно. Пусть Z есть объединение попарно дизъюнктных борелевских множеств Z_1, $Z_2, \ldots, Z_\infty$ и $\zeta \to H(\zeta)$ сводится на Z_n к постоянному полю $\zeta \to H_n$ (H_n — стандартное гильбертово пространство размерности n). Пусть $\zeta \to \pi(\zeta)$ — поле непрерывных унитарных представлений G в $H(\zeta)$. Для того чтобы $\zeta \to H(\zeta)$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы $\zeta \to \pi(\zeta)$ было почти всюду равно некоторому борелевскому отображению Z в $\mathrm{Rep}(G)$. Это доказывается точно так же, как 8.1.8.

18.7.3. Предложение. *Пусть $\zeta \to \pi(\zeta)$ — поле непрерывных унитарных представлений G. Для любого $\zeta \in Z$ введем $\pi'(\zeta)$ — представление $C^*(G)$, соответствующее $\pi(\zeta)$. Предположим, что G сепарабельна. Для того чтобы поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы поле $\zeta \to \pi'(\zeta)$ было измеримым.*

Можно ограничиться случаем, когда $\zeta \to H(\zeta)$ есть постоянное поле, определенное фиксированным гильбертовым пространством H (A72). Тогда можно предположить, что H есть стандартное гильбертово пространство H_n. Измеримость поля $\zeta \to \pi(\zeta)$ [соотв. $\zeta \to \pi'(\zeta)$] означает согласно 18.7.2 (соотв. 8.1.8), что это поле совпадает почти всюду с борелевским отображением Z в $\mathrm{Rep}_n(G)$ [соотв. в $\mathrm{Rep}_n(C^*(G))$]. Тогда предложение следует из 18.5.1.

18.7.4. Предложение. *Сохраним предположения 18.7.3 и предположим, что поля $\zeta \to \pi(\zeta)$ и $\zeta \to \pi'(\zeta)$ измеримы. Пусть $\pi' = \int^{\oplus} \pi'(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Пусть π — непрерывное унитарное представление G, соответствующее π'. Тогда для любого $s \in G$ имеем $\pi(s) = \int^{\oplus} \pi(\zeta)(s)\, d\mu(\zeta)$.*

Пусть $(V_1, V_2, \ldots)$ — последовательность компактных окрестностей s с пересечением $\{s\}$. Пусть f_n — непрерывная положительная функция, носитель которой содержится в V_n, и интеграл от f_n равен 1. Тогда $\pi'(f_n)$ сильно стремится к $\pi(s)$, $\pi'(\zeta)(f_n)$ сильно стремится к $\pi(\zeta)(s)$ при любом ζ и $\pi'(f_n) = \int^{\oplus} \pi'(\zeta)(f_n)\, d\mu(\zeta)$. Поэтому $\pi(s) = \int^{\oplus} \pi(\zeta)(s)\, d\mu(\zeta)$ (A79).

18.7.5. В предыдущих обозначениях представление π называется *гильбертовым интегралом* представлений $\pi(\zeta)$ и обозначается $\pi = \int^{\oplus} \pi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$.

18.7.6. Таким образом, можно скопировать весь § 8, от предложения 8.1.6 до п. 8.7, заменяя всюду A на G (сепарабельную локально компактную группу) и «представление» на «непрерывное унитарное представление».

18.7.7. Мы не будем указывать очевидное следствие 8.8.1. Применяя 8.8.2, получаем, в частности, следующее:

Предложение. *Пусть G — унимодулярная сепарабельная локально компактная группа, λ и ρ — левое и правое регулярные представления G, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$ — алгебры фон Неймана в $L^2(G)$, порожденные $\lambda(G)$ и $\rho(G)$, J — отображение $f \to f^*$ пространства $L^2(G)$ в себя, t — естественный след на $\mathfrak{U}^+$, определяемый ε_e* (17.2.5). *Тогда*:

(i) *Существуют*: 1° *положительная стандартная мера μ на $\widehat{G}$*; 2° *характер $\mathfrak{f}(\zeta)$ для любого $\zeta \in \widehat{G}$*; 3° *структура измеримого поля гильбертовых пространств на поле $\zeta \to H_{\mathfrak{f}(\zeta)}$ — со следующими свойствами*:

a) *$L^2(G)$ отождествляется с $\int^{\oplus} H_{\mathfrak{f}(\zeta)}\,d\mu(\zeta)$; поля*

$$\zeta \to J_{\mathfrak{f}(\zeta)},\quad \zeta \to \lambda_{\mathfrak{f}(\zeta)},\quad \zeta \to \bar{\rho}^0_{\mathfrak{f}(\zeta)},$$
$$\zeta \to \mathfrak{U}_{\mathfrak{f}(\zeta)},\quad \zeta \to \mathfrak{W}_{\mathfrak{f}(\zeta)},\quad \zeta \to t_{\mathfrak{f}(\zeta)}$$

измеримы и

$$J = \int^{\oplus} J_{\mathfrak{f}(\zeta)}\,d\mu(\xi),\quad \lambda = \int^{\oplus} \lambda_{\mathfrak{f}(\zeta)}\,d\mu(\zeta),\quad \bar{\rho} = \int^{\oplus} \bar{\rho}^0_{\mathfrak{f}(\zeta)}\,d\mu(\zeta),$$
$$\mathfrak{U} = \int^{\oplus} \mathfrak{U}_{\mathfrak{f}(\zeta)}\,d\mu(\zeta),\quad \mathfrak{W} = \int^{\oplus} \mathfrak{W}_{\mathfrak{f}(\zeta)}\,d\mu(\zeta),\quad t = \int^{\oplus} t_{\mathfrak{f}(\zeta)}\,d\mu(\zeta).$$

Алгебра $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W}$ есть алгебра диагонализуемых операторов.

в) *$\lambda_{\mathfrak{f}(\zeta)} \in \zeta$ и $\rho^0_{\mathfrak{f}(\zeta)} \in \zeta$ почти всюду.*

с) *Для любого $x \in C^*(G)^+$ функция $\zeta \to \mathfrak{f}(\zeta)(x)$ измерима и $\mathfrak{f}(x) = \int \mathfrak{f}(\zeta)(x)\,d\mu(\zeta)$.*

(ii) *Пусть даны: мера μ', характеры $\mathfrak{f}'(\zeta)$ и структура измеримого поля гильбертовых пространств на поле $\zeta \to H_{\mathfrak{f}'(\zeta)}$, с теми же свойствами, что в* (i). *Тогда μ и μ' эквивалентны; пусть $\mu' = d \cdot \mu$, где $d > 0$ почти всюду. Тогда $\mathfrak{f}(\zeta) = d(\zeta)\,\mathfrak{f}'(\zeta)$ почти всюду. Если изменить $\mathfrak{f}'(\zeta)$ на множестве меры нуль, то существует изоморфизм измеримого поля $\zeta \to H_{\mathfrak{f}(\zeta)}$ на измеримое поле $\zeta \to H_{\mathfrak{f}'(\zeta)}$, переводящий $J_{\mathfrak{f}(\zeta)}$ в $J_{\mathfrak{f}'(\zeta)}$, $\lambda_{\mathfrak{f}(\zeta)}$ в $\lambda_{\mathfrak{f}'(\zeta)}$, $\bar{\rho}^0_{\mathfrak{f}(\zeta)}$ в $\bar{\rho}^0_{\mathfrak{f}'(\zeta)}$, $\mathfrak{U}_{\mathfrak{f}(\zeta)}$ в $\mathfrak{U}_{\mathfrak{f}'(\zeta)}$, $\mathfrak{W}_{\mathfrak{f}(\zeta)}$ в $\mathfrak{W}_{\mathfrak{f}'(\zeta)}$, $t_{\mathfrak{f}(\zeta)}$ в $d(\zeta)\,t_{\mathfrak{f}'(\zeta)}$.*

18.7.8. Следствие. *Сохраним предыдущие обозначения. Пусть $u \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Для почти всех $\zeta \in \widehat{G}$ имеем $u \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{f}(\zeta)}$; функция*

$$\zeta \to t_{\mathfrak{f}(\zeta)}(\lambda_{\mathfrak{f}(\zeta)}(u)\,\lambda_{\mathfrak{f}(\zeta)}(u)^*)$$

μ-*интегрируема, и*

$$\int_G |u(s)|^2 ds = \int_{\widehat{G}} t_{f(\zeta)}(\lambda_{f(\zeta)}(u)\lambda_{f(\zeta)}(u)^*)\,d\mu(\zeta).$$

По условию, $u \in C^*(G)$, $u*u^* \in C^*(G)^+$. Поэтому функция

$$\zeta \to f(\zeta)(u*u^*) = t_{f(\zeta)}(\lambda_{f(\zeta)}(u)\lambda_{f(\zeta)}(u)^*)$$

измерима и ее интеграл по мере μ равен

$$f(u*u^*) = \varepsilon_e(u*u^*) = \int |u(s)|^2 ds < +\infty.$$

Тогда при почти всех ζ имеем

$$t_{f(\zeta)}(\lambda_{f(\zeta)}(u)\lambda_{f(\zeta)}(u)^*) < +\infty, \quad \text{поэтому} \quad u \in \mathfrak{N}_{f(\zeta)}.$$

18.7.9. Следствие. *Пусть G — унимодулярная сепарабельная локально компактная группа. Пусть s — элемент G, отличный от e. Существует непрерывное унитарное фактор-представление τ группы G, допускающее след и такое, что $\tau(s) \neq 1$.*

В обозначениях 18.7.7 имеем $\lambda(s) \neq 1$, поэтому $\lambda_{f(\zeta)}(s) \neq 1$ на некотором множестве элементов ζ, имеющем положительную меру. Но $\lambda_{f(\zeta)}$ суть фактор-представления, допускающие след.

18.7.10. Пусть (u_i) — последовательность элементов $\mathcal{K}(G)$. Согласно 8.8.3 можно выбрать представление τ в 18.7.9 так, чтобы операторы $\tau(u_i)$ для любого i были операторами Гильберта — Шмидта относительно фактора, порожденного $\tau(G)$.

Библиография: [9], [10], [11], [12], [21], [30], [31], [79], [80], [81], [82], [83], [87], [88], [120], [142], [185].

18.8. Мера Планшереля.

18.8.1. Пусть G — сепарабельная локально компактная GCR-группа.

Пусть $\zeta \to K(\zeta)$ — каноническое поле гильбертовых пространств на $\widehat{G}$ (8.6.1). Выберем поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ непрерывных унитарных представлений G в $K(\zeta)$ такое, что $\pi(\zeta)$ принадлежит классу ζ при любом ζ, причем поле $\zeta \to \pi(\zeta)$ измеримо относительно любой положительной меры на $\widehat{G}$ (8.6.2). Для простоты будем писать ζ вместо $\pi(\zeta)$. Пусть $\overline{K}(\zeta)$ — гильбертово пространство, сопряженное $K(\zeta)$. Пусть J_ζ — каноническая инволюция в $K(\zeta) \otimes \overline{K}(\zeta)$, t_ζ — след $T \otimes 1 \to \operatorname{Tr} T$ на $(\mathfrak{B}(K(\zeta)) \otimes \boldsymbol{C})^+$.

Теорема. *Предположим, кроме того, что G унимодулярна. Пусть λ и ρ — левое и правое регулярные представления G, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{W}$ — алгебры фон Неймана в $L^2(G)$, порожденные $\lambda(G)$ и $\rho(G)$, J — отображение $f \to \bar{f}^*$ в $L^2(G)$, t — естественный след на $\mathfrak{U}^+$, определяемый ε_e(17.2.5). Существуют: положительная* *мера* μ *на* $\widehat{G}$ *и изоморфизм* W *пространства* $L^2(G)$ *на* $\int^{\oplus}(K(\zeta)\otimes\overline{K}(\zeta))\,d\mu(\zeta)$ *со следующими свойствами:*

(i) W *переводит*

$$J \text{ в } \int^{\oplus} J_\zeta\,d\mu(\zeta),\quad \lambda \text{ в } \int^{\oplus}(\zeta\otimes 1)\,d\mu(\zeta),$$

$$\rho \text{ в } \int^{\oplus}(1\otimes\bar{\zeta})\,d\mu(\zeta),\quad \mathfrak{U} \text{ в } \int^{\oplus}(\mathfrak{B}(K(\zeta))\otimes \mathbf{C})\,d\mu(\zeta),$$

$$\mathfrak{W} \text{ в } \int^{\oplus}(C\otimes\mathfrak{B}(\overline{K}(\zeta)))\,d\mu(\zeta),\quad t \text{ в } \int^{\oplus} t_\zeta\,d\mu(\zeta)$$ *и* $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{W}$ — *в алгебру диагонализуемых операторов.*

(ii) *Если* $x\in C^*(G)^+$, *то функция* $\zeta\to\operatorname{Tr}\zeta(x)$ *на* $\widehat{G}$ *полунепрерывна снизу и* $\varepsilon_e(x)=\int_{G}\operatorname{Tr}\zeta(x)\,d\mu(\zeta)$. *В частности, если* $u\in L^1(G)\cap L^2(G)$, *то*

$$\int_G |u(s)|^2\,ds=\int_{\widehat{G}}\operatorname{Tr}(\zeta(u)\zeta(u)^*)\,d\mu(\zeta). \qquad (1)$$

Это следует из 8.8.5, примененного к следу ε_e. Формула (1) называется *формулой Планшереля.*

18.8.2. Теорема. *Пусть* G — *унимодулярная сепарабельная локально компактная* GCR-*группа. Существует единственная положительная мера* μ *на* $\widehat{G}$ *такая, что для любой* $u\in L^1(G)\cap L^2(G)$ *выполняется равенство*

$$\int_G |u(s)|^2\,ds=\int_{\widehat{G}}\operatorname{Tr}(\zeta(u)\zeta(u)^*)\,d\mu(\zeta).$$

Мера μ в 18.8.1 обладает этим свойством. Пусть μ' — другая положительная мера на $\widehat{G}$, имеющая это свойство. Для любого $x\in C^*(G)^+$ положим $f(x)=\int_{\widehat{G}}\operatorname{Tr}\zeta(x)\,d\mu'(\zeta)$. Ясно, что f — след на $C^*(G)^+$. Если $(x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность элементов $C^*(G)^+$, стремящаяся к x, то $\|\zeta(x_n)-\zeta(x)\|\to 0$ для любого $\zeta\in\widehat{G}$, и по лемме Фату

$$\underline{\lim}\, f(x_n)\geqslant\int\underline{\lim}\operatorname{Tr}\zeta(x_n)\,d\mu(\zeta)\geqslant\int\operatorname{Tr}\zeta(x)\,d\mu(\zeta)=f(x),$$

следовательно, f полунепрерывен снизу. Но $f(u*u^*)<+\infty$ при всех $u\in L^1(G)\cap L^2(G)$; таким образом, $\mathfrak{M}_f$ всюду плотен в $C^*(G)$.

Биследы, соответствующие f и ε_e, равны на $L^1(G)\cap L^2(G)$, поэтому совпадают (6.5.3). Таким образом,

$$\varepsilon_e(x)=\int \operatorname{Tr}\zeta(x)\,d\mu'(\zeta)$$

для любого $x\in C^*(G)^+$, откуда $\mu=\mu'$ (8.8.6).

18.8.3. Определение. *Мера μ в 18.8.2 называется мерой Планшереля на $\widehat{G}$, связанной с мерой Хаара на G.*

Предположим, что мера Хаара умножается на число $k>0$. Пусть $u\in L^1(G)\cap L^2(G)$. Для любого $\zeta\in\widehat{G}$ оператор $\zeta(u)$ умножается на k, поэтому $\operatorname{Tr}(\zeta(u)\zeta(u)^*)$ умножается на k^2. Отсюда получаем, что мера Планшереля умножается на k^{-1}.

18.8.4. Носитель меры Планшереля μ равен носителю регулярного представления G (8.6.9 и 18.8.1), т. е. приведенному дуальному пространству G (18.3.1).

Если K — квазикомпактная часть $\widehat{G}$, то $\mu(K)<+\infty$. Действительно, для любого $\pi_0\in K$ существует такая функция $u\in L^1(G)\cap L^2(G)$, что $\pi_0(u)\neq 0$; поэтому существует такое $\alpha>0$, что $\operatorname{Tr}(\pi(u)\pi(u)^*)\geqslant\alpha$ в некоторой открытой окрестности V_{π_0} точки π_0. Из формулы Планшереля следует, что $\mu(V_{\pi_0})<+\infty$. Но K можно покрыть конечным числом множеств V_{π_0}.

18.8.5. Предложение. *Пусть G — унимодулярная сепарабельная локально компактная* GCR*-группа, снабженная мерой Хаара, и μ — соответствующая мера Планшереля на $\widehat{G}$. Пусть $\zeta_0\in\widehat{G}$. Для того чтобы ζ_0 было представлением с интегрируемым квадратом, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(\{\zeta_0\})>0$, и тогда $\mu(\{\zeta_0\})$ равно формальной размерности представления ζ_0.*

Если $\mu(\{\zeta_0\})>0$, то $\zeta_0\otimes 1$ содержится в регулярном представлении λ [8.6.8 (ii) и 18.8.1], поэтому ζ_0 содержится в λ и ζ_0 — с интегрируемым квадратом (14.1.3).

Предположим, что ζ_0 — с интегрируемым квадратом. Воспользуемся обозначениями 18.8.1. Пусть F — центральный проектор, связанный с ζ_0 (14.2.4). Он диагонализуем; пусть Y — такая μ-измеримая часть $\widehat{G}$, что F соответствует характеристической функции φ_Y множества Y. Тогда подпредставление λ, определенное F, с одной стороны, квазиэквивалентно ζ_0 (14.3.5), с другой стороны, эквивалентно $\int_{\widehat{G}}^{\otimes}(\zeta\otimes 1)\varphi_Y(\zeta)\,d\mu(\zeta)$ (18.8.1). Поэтому мера $\varphi_Y\cdot\mu$ эквивалентна мере Дирака в точке ζ_0 (8.4.4), и $\mu(\{\zeta_0\})>0$. Кроме того, при $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$ имеем, вследствие 8.8.7,

$$\int_G |Ff(s)|^2\,ds=\int_{\widehat{G}} \varphi_Y(\zeta)\operatorname{Tr}(\zeta(f)^*\zeta(f))\,d\mu(\zeta)=\mu(\{\zeta_0\})\operatorname{Tr}(\zeta_0(f)^*\zeta_0(f)).$$

С другой стороны, обозначая через d формальную размерность ζ_0, имеем

$$\int_G |Ff(s)|^2\,ds=d\operatorname{Tr}(\zeta_0(f)^*\zeta_0(f)). \tag{14.4.2}$$

Можно выбрать $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$ так, что $\zeta_0(f)\neq 0$, откуда $\mu(\{\zeta_0\})=d$.

18.8.6. Если G — сепарабельная коммутативная группа, то классическая теорема Планшереля показывает, что мера Планшереля есть не что иное, как мера Хаара (нормированная подходящим образом) на дуальной группе $\widehat{G}$.

Библиография: [5], [9], [31], [49], [86], [87], [88], [93], [120] [128], [142], [158], [174], [176], [178].

18.9. Дополнения.

18.9.1. Пусть G — унимодулярная сепарабельная локально компактная GCR-группа, $\widehat{G}_r$ — ее приведенное дуальное пространство и $\pi\in\widehat{G}$. Тогда:

a) Если $\{\pi\}$ открыто в $\widehat{G}_r$, то π — представление с интегрируемым квадратом. [Действительно, если π принадлежит носителю регулярного представления, то, если μ обозначает меру Планшереля, имеем $\mu(\{\pi\})>0$.]

*b) Может случиться, что $\pi\in\widehat{G}_r$ — представление с интегрируемым квадратом, $\{\pi\}$ открыто в $\widehat{G}$, но неинтегрируемо. Может случиться, что π — представление с интегрируемым квадратом, но $\{\pi\}$ не открыто в $\widehat{G}$. Может случиться, что $\{\pi\}$ открыто в $\widehat{G}$, но $\pi\notin\widehat{G}_r$.

c) Проблемы. Если π интегрируемо, то открыто ли $\{\pi\}$ в $\widehat{G}$? Если π — с интегрируемым квадратом, то открыто ли $\{\pi\}$ в $\widehat{G}_r$? [46], [259].

***18.9.2.** Формула Планшереля может быть распространена на несепарабельные унимодулярные локально компактные GCR-группы [49].

18.9.3. Пусть G — локально компактная группа. Любая непрерывная комплексная функция на G есть равномерный на любом компакте предел линейных комбинаций функций $f*\tilde{f}$ ($f\in\mathcal{K}(G)$); эти функции связаны с регулярным представлением. Сопоставим это с 18.1.4 и тем фактом, что для некоторых G не любой элемент $\widehat{G}$ содержится слабо в регулярном представлении [161].

*18.9.4. Пусть G — полупростая связная вещественная группа Ли. Множество таких $f \in L^1(G)$, что ранг оператора $\pi(f)$ конечен и ограничен, когда π пробегает $\widehat{G}$, есть самосопряженный двусторонний идеал $L^1(G)$, всюду плотный в $L^1(G)$. Поэтому можно применить 4.7.11 [161].

18.9.5. Пусть G — локально компактная группа. Если регулярное представление G слабо содержит конечномерное непрерывное унитарное представление, то $\widehat{G} = \widehat{G}_r$ [167].

18.9.6. Пусть G — сепарабельная унимодулярная локально компактная GCR-группа. Пусть μ — мера Планшереля на $\widehat{G}$. Пусть E — множество таких $\pi \in \widehat{G}$, что $\pi(C^*(G)) = \mathcal{BC}(H_\pi)$, т. е. таких, что $\{\pi\}$ замкнуто в $\widehat{G}$. Тогда $\mu(\widehat{G} - E) = 0$. Что можно сказать о множестве E с топологической точки зрения?

18.9.7. Пусть G — сепарабельная локально компактная группа, в которой e имеет фундаментальную систему компактных окрестностей e, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов. Почти все характеры $f(\zeta)$ в 18.7.7 суть характеры конечного типа (использовать 8.8.3 и 17.4.1).

*18.9.8. Пусть G — свободная группа с двумя образующими, снабженная дискретной топологией. Тогда $\widehat{G}_r \neq \widehat{G}$, множество чистых функций положительного типа всюду плотно в множестве функций положительного типа относительно компактной сходимости, и дезинтегрирование регулярного представления λ на неприводимые представления можно осуществить двумя совершенно различными способами. Представление λ является фактор-представлением; оно имеет дезинтегрирование (над стандартным борелевским пространством) на представления, которые не являются фактор-представлениями почти всюду (можно заметить, что алгебры фон Неймана, связанные с гильбертовой алгеброй G, суть факторы типа II_1, и применить 5.7.5, 5.7.6, 11.2.4) [36], [54], [204].

18.9.9. Пусть G — локально компактная группа, H — замкнутый нормальный делитель G, π — непрерывное унитарное фактор-представление группы G и $\rho = \pi | H$. Тогда ρ — представление одного из типов I, II_1, II_∞, III. Если ρ — типа I, то ρ — представление кратности n для некоторого n. Класс мер на $\widehat{H}$, связанный с ρ, инвариантен и эргодичен относительно действия G на $\widehat{H}$ (G действует на H внутренними автоморфизмами, поэтому на $\widehat{H}$ — преобразованиями борелевской структуры) [84].

18.9.10. Пусть G — локально компактная группа, H — открытая подгруппа G. Если $\widehat{G} = \widehat{G}_r$, то $\widehat{H} = \widehat{H}_r$ [134].

*18.9.11. Пусть G — некомпактная простая связная вещественная группа Ли. Тогда $\widehat{G} \neq \widehat{G}_r$ [134].

18.9.12. Пусть G — локально компактная группа. Отображение $\pi \to \bar{\pi}$ есть гомеоморфизм $\hat{G}$ на $\hat{G}$.

18.9.13. Топологическое пространство $\hat{G}$ найдено в явном виде лишь в небольшом числе случаев. Вот примеры. Если G — некоммутативная односвязная нильпотентная вещественная группа Ли размерности 3, то $\hat{G}$ можно отождествить с $(\boldsymbol{R} - \{0\}) \cup \boldsymbol{R}^2$; топология есть топология суммы топологических пространств $\boldsymbol{R} - \{0\}$ и $\boldsymbol{R}^2$ с одним исключением: если точка на $\boldsymbol{R} - \{0\}$ стремиться к нулю в обычном смысле, то она стремится в $\hat{G}$ ко всем точкам $\boldsymbol{R}^2$. Если $G = SL(2, \boldsymbol{C})$, то $\hat{G}$ можно отождествить с подмножеством R^2, образованным парами (n, y) $(n = 1, 2, \ldots, y \in \boldsymbol{R})$, парами $(0, y)$ $(y \geqslant 0)$ и парами $(x, 0)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 0)$, с топологией, индуцированной топологией $\boldsymbol{R}^2$, с одним исключением: точка $\hat{G}$, стремящаяся к $(-1, 0)$ в обычном смысле, стремится в $\hat{G}$ к точкам $(-1, 0)$ и $(2, 0)$ [41], [161].

В случае $SL(2, \boldsymbol{C})$ полностью определена структура $C^*(G)$ [163].

Для большинства групп предстоит еще определить множество $\hat{G}$. Эта работа в некотором смысле закончена для комплексных полупростых групп, и для этих групп известна мера Планшереля; случай вещественных полупростых групп Ли менее изучен. Фундаментальными в этой области являются труды Гельфанда, Граева, Наймарка, Хариш-Чандры.

18.9.14. Если G коммутативна, то $\hat{G}$ снабжено структурой группы. Распространением этого факта на некоммутативный случай является существование для любой пары (π, π') элементов $\hat{G}$ некоторого класса мер и кратностей на $\hat{G}$, а именно, класса мер и кратностей, связанных с $\pi \otimes \pi'$ (если G — сепарабельная GCR-группа). Эти классы мер и эти кратности вычислены лишь в некоторых случаях.

18.9.15. Пусть G — локально компактная группа, π_1, π_2 — непрерывные унитарные представления G, S_1, S_2 — множества непрерывных унитарных представлений G. Если π_k слабо содержится в S_k $(k = 1, 2)$, то $\pi_1 \otimes \pi_2$ слабо содержится в множестве $\rho_1 \otimes \rho_2$ $(\rho_1 \in S_1, \rho_2 \in S_2)$ [167].

***18.9.16.** Пусть G — локально компактная группа, π — конечномерное неприводимое непрерывное унитарное представление G, S — множество непрерывных унитарных представлений G, T — множество $\rho \otimes \bar{\pi}$, где ρ пробегает S. Для того чтобы S слабо содержало π, необходимо и достаточно, чтобы T слабо содержало одномерное тривиальное представление. Обе части этого утверждения становятся неверными, если $\dim \pi = +\infty$ [167].

А. АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА

Это Приложение — список используемых в книге результатов об алгебрах фон Неймана. Доказательства не приводятся, но даны ссылки на книгу Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2^{e} édition, Gauthier—Villars, Paris, 1969 (обозначаемую [1]).

H обозначает гильбертово пространство.

А1. *Нормированной топологией* на $\mathfrak{B}(H)$ называется топология, определяемая нормой $T \to \|T\|$. *Сильной*, *слабой*, *ультрасильной* и *ультраслабой* называются топологии, определяемые соответственно следующими полунормами:

$T \to \|T\xi\|$ (ξ — элемент H) для сильной топологии;

$T \to |(T\xi \mid \eta)|$ (ξ, η — элементы H) для слабой топологии;

$T \to \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|T\xi_i\|^2\right]^{1/2}$ ($\xi_1, \xi_2, \ldots$ — элементы H такие, что $\sum \|\xi_i\|^2 < +\infty$) для ультрасильной топологии; $T \to \left|\sum_{i=1}^{\infty} (T\xi_i \mid \eta_i)\right|$ ($\xi_1, \xi_2, \ldots, \eta_1, \eta_2$ — такие элементы H, что $\sum \|\xi_i\|^2 < +\infty$, $\sum \|\eta_i\|^2 < +\infty$) для ультраслабой топологии.

На ограниченном подмножестве $\mathfrak{B}(H)$ сильная и ультрасильная топологии совпадают; слабая и ультраслабая топологии совпадают ([1], стр. 30—34).

А2. Пусть M — подмножество $\mathfrak{B}(H)$. *Коммутантом* M называется множество элементов $\mathfrak{B}(H)$, перестановочных с элементами M; оно обозначается M'. Положим $(M')' = M''$ (бикоммутант M). Множество M' есть подалгебра $\mathfrak{B}(H)$, содержащая 1. Если $M \subset N$, то $M' \supset N'$. Имеем $M' = M'''$, $M \subset M''$.

А3. Пусть A — инволютивная подалгебра $\mathfrak{B}(H)$, A_1 — единичный шар A. Следующие восемь условий эквивалентны: A (соотв. A_1) слабо замкнуто; A (соотв. A_1) сильно замкнуто; A (соотв. A_1) ультрасильно замкнуто; A (соотв. A_1) ультраслабо замкнуто. Если эти условия выполнены, то в A существует проектор E, мажорирующий все остальные проекторы. Для любого $T \in A$ имеем $ET = TE = T$. Элементы A'' суть $T + \lambda \cdot 1$, где $T \in A$ ([1], стр. 41, теорема 2).

А4. Пусть A — инволютивная подалгебра $\mathfrak{B}(H)$. Следующие девять условий эквивалентны: 1° восемь условий А3, к каждому из которых добавлено предположение $1 \in A$; 2° $A = A''$. Если эти условия выполнены, то A называется *алгеброй фон Неймана в* H ([1], стр. 42). Множество $\mathfrak{B}(H)$ есть алгебра фон Неймана в H. Множество скалярных операторов в H есть алгебра фон Неймана в H, обозначаемая $\boldsymbol{C}_H$ или просто $\boldsymbol{C}$.

А5. Если M — самосопряженное подмножество $\mathfrak{B}(H)$, то M' — алгебра фон Неймана ([1], стр. 2).

А6. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ являются коммутантами друг друга. Общий центр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ есть $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$. Если центр сводится к скалярным операторам, то $\mathfrak{A}$ называется *фактором*. Для того чтобы $\mathfrak{A}$ была фактором, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}'$ была фактором ([1], стр. 3).

A7. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана в H, T — эрмитов элемент $\mathfrak{B}(H)$. Для того чтобы T принадлежал $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы спектральные проекторы T принадлежали $\mathfrak{A}$ ([1], стр. 3).

A8. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, S и T — такие элементы $\mathfrak{A}^+$, что $S \leqslant T$. Существует такой $R \in \mathfrak{A}$, что $S^{1/2} = RT^{1/2}$ ([1], стр. 11, лемма 2).

A9. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, $\mathfrak{M}$ — двусторонний идеал $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{M}$ самосопряжен и $\mathfrak{M}$ есть множество линейных комбинаций элементов $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{A}^+$. Множество таких $T \in \mathfrak{A}$, что $TT^* \in \mathfrak{M}$, есть двусторонний идеал $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{A}$ такой, что идеал $\mathfrak{N}^2$ равен $\mathfrak{M}$; идеал $\mathfrak{N}$ обозначается $\mathfrak{M}^{1/2}$ ([1], стр. 10—12).

Любой слабо замкнутый двусторонний идеал $\mathfrak{A}$ имеет вид $E\mathfrak{A}$, где E — проектор в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ ([1], стр. 42, следствие 3).

A10. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, E — проектор в $\mathfrak{A}$. Среди проекторов в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$, мажорирующих E, существует наименьший. Он называется *центральным носителем* E ([1], стр. 6).

A11. Пусть M — подмножество $\mathfrak{B}(H)$. Существует наименьшая алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ в H, содержащая M; она называется алгеброй фон Неймана, порожденной M. Если $M = M^*$, то $\mathfrak{A} = M''$ ([1], стр. 2).

A12. Пусть A — инволютивная подалгебра $\mathfrak{B}(H)$. Слабое, сильное, ультраслабое и ультрасильное замыкания A совпадают; пусть $\mathscr{B}$ — это замыкание. Пусть K — замкнутое векторное подпространство H, порожденное векторами $T\xi$ ($T \in A$, $\xi \in H$). Тогда P_K — наибольший проектор в $\mathscr{B}$. Если $K = H$, то $\mathscr{B} = A''$ — алгебра фон Неймана, порожденная A ([1], стр. 42).

A13. Пусть A и B — инволютивные подалгебры $\mathfrak{B}(H)$ и $A \subset B$. Если A сильно всюду плотна в B, то единичный шар A_1 инволютивной нормированной алгебры A сильно всюду плотен в единичном шаре $B_1 \subset B$ ([1], стр. 43, теорема 3). Если, кроме того, H сепарабельно, то любой элемент B_1 есть сильный предел последовательности элементов A_1 ([1], стр. 32).

A14. Пусть A — инволютивная подалгебра $\mathfrak{B}(H)$ и $\xi \in H$. Вектор ξ называется отделяющим для A, если из условий $T \in A$, $T\xi = 0$ следует, что $T = 0$. Вектор ξ называется *тотализирующим* (или *циклическим*) для A, если $A\xi$ всюду плотно в H. Если ξ — тотализирующий для A, то ξ — отделяющий для A'. Обратное верно, если A — алгебра фон Неймана ([1], стр. 5—6).

A15. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана в H, $E = P_K$ — проектор в $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество $T \in \mathfrak{A}$ таких, что $ET = TE = T$. Операторы $T \mid K$, где T пробегает $\mathfrak{B}$, образуют алгебру фон Неймана в K, называемую *редуцированной алгеброй* алгебры $\mathfrak{A}$ и обозначаемую $\mathfrak{A}_E$ или $\mathfrak{A}_K$. Пусть $E' = P_{K'}$ — проектор в $\mathfrak{A}'$. Операторы $T \mid K'$, где T пробегает $\mathfrak{A}$, образуют алгебру фон Неймана в K', называемую алгеброй, *индуцированной* $\mathfrak{A}$ *в* K', и обозначаемую $\mathfrak{A}_{E'}$ или $\mathfrak{A}_{K'}$. Обозначения $\mathfrak{A}_E$ и $\mathfrak{A}_{E'}$ согласованы, если проектор принадлежит $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$. Отображение $T \to T \mid K'$ ($T \in \mathfrak{A}$) называется *индукцией* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{A}_{E'}$. Алгебры фон Неймана $(\mathfrak{A}_E)'$ и $(\mathfrak{A}')_E$ равны между собой и обозначаются просто $\mathfrak{A}'_E$ ([1], стр. 16—18). Если $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{A}$, то центр $\mathfrak{A}_E$ есть $\mathfrak{Z}_E$ ([1], стр. 18, следствие).

A16. Птсть (H_i) — семейство гильбертовых пространств, H — их гильбертова сумма, $\mathfrak{A}_i$ — алгебра фон Неймана в H_i. Для любого семейства (T_i) такого, что $T_i \in \mathfrak{A}_i$ при любом i и $\sup \| T_i \| < +\infty$, образуем оператор $(x_i) \to (T_i x_i)$ в H. Множество получаемых таким образом операторов есть алгебра фон Неймана в H, называемая *произведением* $\mathfrak{A}_i$ и обозначаемая $\prod \mathfrak{A}_i$ ([1], стр 19).

A17. Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства. На алгебраическом тензорном произведении H_0 пространств H_1 и H_2 существует единственная предгильбертова структура такая, что $(\xi_1 \otimes \xi_2 \mid \eta_1 \otimes \eta_2) = (\xi_1 \mid \eta_1)(\xi_2 \mid \eta_2)$ для любых $\xi_1, \eta_1 \in H_1$, $\xi_2, \eta_2 \in H_2$. Эта структура отделима. Гильбертово пространство H — пополнение H_0 — называется *гильбертовым тензорным произведением* H_1 и H_2 и обозначается $H_1 \otimes H_2$. Пусть $T_1 \in \mathfrak{B}(H_1)$, $T_2 \in \mathfrak{B}(H_2)$. Алгебраическое тензорное произведение T_1 и T_2 действует в H_0 и является непрерывным оператором. Его непрерывное продолжение принадлежит $\mathfrak{B}(H)$, оно обозначается $T_1 \otimes T_2$ ([1], стр. 21).

Существует семейство $(K_i)_{i \in I}$ замкнутых векторных подпространств $H_1 \otimes H_2$, гильбертовой суммой которых является $H_1 \otimes H_2$, и изоморфизмы U_i: $H_1 \to K_i$ со следующими свойствами:

1° для любого $T \in \mathfrak{B}(H_1)$ произведение $T \otimes 1$ есть оператор в $H_1 \otimes H_2$, оставляющий инвариантным каждое подпространство K_i, и такой, что $T \otimes 1 \mid K_i = U_i T U_i^{-1}$;

2° $\operatorname{Card} I = \dim H_2$ ([1], стр. 22—24).

A18. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — алгебра фон Неймана в H_1, $\mathfrak{A}_2$ — алгебра фон Неймана в H_2. Операторы вида $R_1 \otimes R_2 + S_1 \otimes S_2 + \ldots + T_1 \otimes T_2$, где $R_1, S_1, \ldots, T_1 \in \mathfrak{A}_1$, $R_2, S_2, \ldots, T_2 \in \mathfrak{A}_2$, образуют инволютивную подалгебру A_0 в $\mathfrak{B}(H_1 \otimes H_2)$. Алгебра фон Неймана в $H_1 \otimes H_2$, порожденная A_0, называется алгеброй фон Неймана — *тензорным произведением* $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ и обозначается $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ([1], стр. 24). Если A — инволютивная подалгебра $\mathfrak{B}(H_1)$, то алгебра фон Неймана, порожденная $A \otimes \mathbf{C}_{H^2}$, имеет своим коммутантом $A' \otimes \mathfrak{B}(H_2)$ ([1], стр. 24).

A19. Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — алгебры фон Неймана в H_1, H_2. *Изоморфизм* $\mathfrak{A}_1$ на $\mathfrak{A}_2$ есть просто изоморфизм $\mathfrak{A}_1$ на $\mathfrak{A}_2$ как инволютивных алгебр; такой изоморфизм автоматически изометричен. Разумеется, изоморфизм гильбертовых пространств определяет изоморфизм (называемый *пространственным*) любой алгебры фон Неймана в H_1 на некоторую алгебру фон Неймана в H_2. Но, вообще говоря, изоморфизм не является пространственным ([1], стр. 9).

A20. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, E' — проектор в $\mathfrak{A}'$. Для того чтобы индукция $T \to T_{E'}$ алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_{E'}$ была изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы центральный носитель E' был равен 1 ([1], стр. 18, предложение 2).

A21. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана в H, H' — гильбертово пространство. Отображение $T \to T \otimes 1$ есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ на алгебру фон Неймана $\mathfrak{A} \otimes \mathbf{C}_H \subset \mathfrak{B}(H \otimes H')$. Такой изоморфизм называется *размножением* ([1], стр. 24).

A22. Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — алгебры фон Неймана в H_1, H_2, Φ — изоморфизм $\mathfrak{A}_1$ на $\mathfrak{A}_2$. Существует гильбертово пространство K и проектор $E' \in (\mathfrak{A}_1 \otimes \mathbf{C}_K)'$ с центральным носителем 1 такие, что Φ есть композиция размножения $T \to T \otimes 1_K$, индукции $T \otimes 1_K \to (T \otimes 1_K)_{E'}$ и пространственного изоморфизма. Если H_1 и H_2 сепарабельны, то и пространство K можно считать сепарабельным ([1], стр. 55—56).

A23. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана в H, $\mathfrak{A}'$ — банахово пространство, сопряженное банахову пространству $\mathfrak{B}$. Если $f \in \mathfrak{A}'$, то f ультраслабо непрерывна тогда и только тогда, когда f ультрасильно непрерывна; множество таких форм есть векторное подпространство P в $\mathfrak{A}'$, замкнутое относительно нормы в $\mathfrak{A}'$. Аналогично, если $f \in \mathfrak{A}'$, то f слабо непрерывна тогда и только тогда, когда f сильно непрерывна; множество таких форм есть векторное подпространство P, всюду плотное в P в смысле нормы в $\mathfrak{A}'$. Каноническая билинейная форма на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ индуцирует билинейную форму на $\mathfrak{A} \times P$, относительно которой пространство $\mathfrak{A}$, снабженное исходной нормой, оказывается сопряженным к банахову пространству P. Пространство P называется *предсопряженным* (или *преддвойственным*) пространством $\mathfrak{A}$ ([1], стр. 34—40).

A24. Пусть f — слабо непрерывная линейная форма на $\mathfrak{B}(H)$. Существуют ортонормированные системы $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ в H и числа $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ такие, что $\|f\| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ и $f(T) = \sum \lambda_i (T\varepsilon_i \mid \varepsilon'_i)$ для любого $T \in \mathfrak{B}(H)$ ([1], стр. 36—37).

A25. Пусть A — алгебра фон Неймана. Любое ограниченное возрастающее семейство элементов $\mathfrak{A}^+$ имеет верхнюю грань в $\mathfrak{A}^+$ ([1], стр. 4). Для положительной формы f на $\mathfrak{A}$ следующие условия эквивалентны:

1° для любого возрастающего семейства $\mathscr{F} \subset \mathfrak{A}$ с верхней гранью $T \in \mathfrak{A}^+$ число $f(T)$ есть верхняя грань множества $f(\mathscr{F})$;

2° f принадлежит предсопряженному пространству $\mathfrak{A}$.

Тогда говорят, что f нормальна. Любой элемент предсопряженного пространства $\mathfrak{A}$ есть линейная комбинация нормальных положительных форм ([1], стр. 50—51).

A26. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, f — нормальная положительная форма на $\mathfrak{A}$. В $\mathfrak{A}$ существует наибольший проектор F, обладающий свойством $f(F) = 0$, причем $f(TF) = f(FT) = 0$ для любого $T \in \mathfrak{A}$. Проектор $E = 1 - F$ называется *носителем* f. Для любого $T \in \mathfrak{A}$ имеем $f(T) = f(ET) = f(TE) = f(ETE)$ ([1], стр. 57).

A27. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры фон Неймана, φ — морфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Морфизм φ называется *нормальным*, если для любого возрастающего множества $\mathscr{F} \subset \mathfrak{A}^+$ с верхней гранью $T \in \mathfrak{A}^+$ оператор $\varphi(T)$ есть верхняя грань семейства $\varphi(\mathscr{F})$. Тогда φ ультрасильно и ультраслабо непрерывен и $\varphi(\mathfrak{A})$ слабо замкнута ([1], стр. 53, теорема 2, и стр. 54, следствие 2).

A28. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана.

Следом на $\mathfrak{A}^+$ называется функция φ на $\mathfrak{A}^+$ со значениями $\geqslant 0$ (быть может, бесконечными), обладающая следующими свойствами:

(i) если $S \in \mathfrak{A}^+$ и $T \in \mathfrak{A}^+$, то $\varphi(S + T) = \varphi(S) + \varphi(T)$,

(ii) если $S \in \mathfrak{A}^+$ и λ — число $\geqslant 0$, то $\varphi(\lambda S) = \lambda\varphi(S)$ (считается, что $0 \cdot +\infty = 0$);

(iii) если $S \in \mathfrak{A}^+$ и U — унитарный оператор в $\mathfrak{A}$, то $\varphi(USU^{-1}) = \varphi(S)$.

След φ называется *конечным*, если $\varphi(S) < +\infty$ для любого $S \in \mathfrak{A}^+$.

След φ называется *полуконечным*, если для любого $S \in \mathfrak{A}^+$ число $\varphi(S)$ есть верхняя грань чисел $\varphi(T)$ по $T \in \mathfrak{A}^+$ таким, что $T \leqslant S$ и $\varphi(T) < +\infty$. (Изложенное выше определение следа есть частный случай 6.1.1.)

След φ называется *точным*, если из условий $S \in \mathfrak{A}^+$, $\varphi(S) = 0$ следует, что $S = 0$.

След φ называется *нормальным*, если для любого возрастающего семейства $\mathscr{F} \subset \mathfrak{A}^+$ с верхней гранью $S \in \mathfrak{A}^+$ число $\varphi(S)$ есть верхняя грань $\varphi(\mathscr{F})$.

A29. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, ω и ω' — нормальные следы, определенные на $\mathfrak{A}^+$, B — инволютивная подалгебра $\mathfrak{A}$, слабо всюду плотная в алгебре фон Неймана $\mathfrak{A}$. Пусть $\omega(TT^*) = \omega'(TT^*) < +\infty$ для любого $T \in B$. Тогда $\omega = \omega'$ ([1], стр. 203, лемма 1).

A30. Пусть (e_i) — ортонормированный базис в H. Для любого $T \in \mathfrak{B}(H)^+$ положим $\mathrm{Tr}(T) = \sum_i (Te_i \mid e_i)$. Тогда Tr есть полуконечный точный нормальный след на $\mathfrak{B}(H)^+$, не зависящий от выбора ортонормированного базиса ([1], стр. 94, теорема 5).

А31. Алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ называется *конечной* (соотв. *полуконечной*), если для любого ненулевого $T \in \mathfrak{A}^+$ существует конечный (соотв. полуконечный) нормальный след f на $\mathfrak{A}^+$ такой, что $f(T) \neq 0$. Алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ называется *собственно бесконечной* (соотв. *чисто бесконечной*), если не существует никакого конечного (соотв. полуконечного) нормального следа на $\mathfrak{A}^+$, отличного от 0 ([1], стр. 97, определение 5).

На полуконечной алгебре фон Неймана существует полуконечный точный нормальный след ([1], стр. 99, предложение 9).

А32. Пусть $\mathcal{F}$ — полуконечный фактор, f — полуконечный точный нормальный след на $\mathcal{F}^+$. Любой нормальный след на $\mathcal{F}^+$ имеет вид λf, где $\lambda \in [0, +\infty]$ (считается, что $0 \cdot +\infty = 0$) ([1], стр. 81, следствие 2, и стр. 90, следствие). Идеалы $\mathfrak{M}_f$ и $\mathfrak{N}_f$ не зависят от выбора f. Элементы $\mathfrak{M}_f$ (соотв. $\mathfrak{N}_f$) называются *элементами со следом* (соотв. *элементами Гильберта — Шмидта*) относительно полуконечного фактора $\mathcal{F}$ ([1], стр. 101). В случае $\mathcal{F} = \mathfrak{B}(H)$ мы говорим просто об операторах со следом и операторах Гильберта — Шмидта. Если $T, T' \in \mathfrak{B}(H)$ и T — оператор со следом, то $|\operatorname{Tr}(TT')| \leqslant (\operatorname{Tr}|T|) \cdot \|T'\|$ ([1], стр. 106).

А33. Пусть $\mathcal{F}$ — фактор. Если на $\mathcal{F}^+$ существует ненулевой конечный нормальный след f, то $\mathcal{F}$ конечен (так как f точен вследствие [1], стр. 83, следствие 2).

А34. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана. Проектор $F \in \mathfrak{A}$ называется *минимальным*, если $E \neq 0$ и единственными проекторами $\mathfrak{A}$, мажорируемыми E, являются 0 и E; иначе говоря, если $E \neq 0$ и редуцированная алгебра $\mathfrak{A}_E$ состоит только из скалярных операторов ([1], стр. 123).

Проектор $E \in \mathfrak{A}$ называется *абелевым*, если редуцированая алгебра $\mathfrak{A}_E$ коммутативна ([1], стр. 123, определение 3).

А35. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана. Следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathfrak{A}$ изоморфна такой алгебре фон Неймана $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{B}'$ коммутативна;

(ii) любой ненулевой проектор $\mathfrak{A}$ мажорирует ненулевой абелев проектор;

(iii) существует абелев проектор $\mathfrak{A}$ с центральным носителем 1.

Если эти условия выполнены, то $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй типа* I. Алгебра типа I полуконечна ([1], стр. 122, предложение 2; стр. 123, теорема 1; стр. 126, п. 4).

А36. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана в H. Следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathfrak{A}$ — фактор типа I;

(ii) $\mathfrak{A}$ — фактор, имеющий минимальные проекторы;

(iii) существуют гильбертовы пространства H_1 и H_2 и изоморфизм H на $H_1 \otimes H_2$, переводящий $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}(H_1) \otimes \boldsymbol{C}_{H_2}$;

(iv) существует семейство (K_i) замкнутых векторных подпространств H, гильбертовой суммой которых является H, и изоморфизмы U_i некоторого гильбертова пространства K на пространства K_i, обладающие следующим свойством: $\mathfrak{A}$ есть множество $T \in \mathfrak{B}(H)$, приводимых всеми K_i и таких, что $T|K_i$ сводятся с помощью U_i к одному и тому же элементу $\mathfrak{B}(K)$ ([1], стр. 24, следствие 3, и стр. 21—23).

А37. Любой автоморфизм фактора $\mathfrak{A}$ типа I — внутренний, и определяется унитарным элементом $\mathfrak{A}$ ([1], стр. 241, следствие 2; это утверждение можно рассматривать также как следствие 4.1.5).

А38. Алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ называется *непрерывной* если не существует никакого проектора $E \neq 0$ в $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$, для которого $\mathfrak{A}_E$ — типа I. Она называется *алгеброй типа* II, если она полуконечна и непрерывна. Чисто бесконечная алгебра непрерывна; такая алгебра называется также *алгеброй типа* III. Если пространство, где действует $\mathfrak{A}$, отлично от 0, то $\mathfrak{A}$ не может одновременно быть алгеброй двух различных типов ([1], стр. 121, 122, 126).

А39. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана. Существуют проекторы E_{I}, E_{II}, E_{III} в $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$, характеризуемые следующими свойствами: E_{I}, E_{II}, E_{III} ортогональны, их сумма равна 1, $\mathfrak{A}_{E_{\mathrm{I}}}$ — типа I, $\mathfrak{A}_{E_{\mathrm{II}}}$ — типа II, $\mathfrak{A}_{E_{\mathrm{III}}}$ — типа III.

E_{I} (соотв. E_{II}, E_{III}) — наибольший проектор E в $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$, для которого $\mathfrak{A}_E$ — типа I (соотв. II, III); $E_{\mathrm{I}}+E_{\mathrm{II}}$ — наибольший проектор E в $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$, для которого $\mathfrak{A}_E$ полуконечна; $E_{\mathrm{II}}+E_{\mathrm{III}}$ — наибольший проектор E в $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$, для которого $\mathfrak{A}_E$ непрерывна ([1], стр. 98 и 122).

А40. *Алгеброй фон Неймана типа* II_1 называется конечная алгебра типа II; *алгеброй типа* II_∞ — собственно бесконечная алгебра типа II. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, то существуют проекторы E_{II_1}, E_{II_∞}, характеризуемые следующими свойствами: E_{II_1}, E_{II_∞} ортогональны, их сумма равна E_{II} и соответствующие алгебры, индуцированные $\mathfrak{A}$, имеют тип II_1 и II_∞ ([1], стр. 98 и 122).

А41. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, E и F — проекторы в $\mathfrak{A}$. Проекторы E и F называются *эквивалентными* относительно $\mathfrak{A}$, если существует такой $U\in\mathfrak{A}$, что $U^*U=E$, $UU^*=F$; обозначение $E\sim F$. Если существует проектор в $\mathfrak{A}$, эквивалентный E и мажорируемый F, то пишут $E\prec F$ или $F\succ E$ ([1], стр. 215, определение 1).

А42. Отношение $E\sim F$ является отношением эквивалентности. Отношение $E\prec F$ является отношением предпорядка. Если $E\prec F$ и $F\prec E$, то $E\sim F$ ([1], стр. 215—216).

А43. Эквивалентные проекторы имеют равные центральные носители ([1], стр. 215).

А44. Пусть E, F — проекторы в $\mathfrak{A}$; пусть E_1, F_1 — их центральные носители. Если E_1, F_1 не ортогональны, то существуют эквивалентные проекторы E', F' в $\mathfrak{A}$, мажорируемые соответственно E и F ([1], стр. 217, лемма 1).

А45. Пусть H — пространство, в котором действует $\mathfrak{A}$. Пусть $T\in\mathfrak{A}$. Проекторы на $H\ominus \operatorname{Ker} T$ и на $\overline{T(H)}$ принадлежат $\mathfrak{A}$ и эквивалентны ([1], стр. 216, предложение 2).

А46. Если $\mathfrak{A}$ — фактор и если E, F — проекторы $\mathfrak{A}$, то либо $E\prec F$, либо $F\prec E$ ([1], стр. 218, следствие 1).

А47. Алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ называется *однородной*, если в $\mathfrak{A}$ существует семейство (E_i) попарно ортогональных эквивалентных абелевых проекторов, сумма которых равна 1. Такая алгебра имеет тип I. Кардинальное число n семейства (E_i) зависит только от $\mathfrak{A}$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ — *типа* I_n. Это условие равносильно условию, что $\mathfrak{A}=\mathscr{B}\otimes\mathfrak{B}(K)$, где $\mathscr{B}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, а K — гильбертово пространство размерности n ([1], стр. 239—240).

А48. Для того чтобы алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ была непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы любой проектор $\mathfrak{A}$ был суммой двух ортогональных и эквивалентных проекторов $\mathfrak{A}$ ([1], стр. 219, следствие 3).

А49. Любой фактор есть фактор одного из типов I, II_1, II_∞, III; эти случаи исключают друг друга (если $H\neq 0$). Если фактор имеет тип I, то он — типа I_n для некоторого n.

А50. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана типа I. Существует семейство $(E_i)_{i\in I}$ ненулевых попарно ортогональных проекторов в $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$, сумма которых равна I, таких, что $\mathfrak{A}_{E_i}$ — типа I_{n_i}, где n_i попарно различны. Проекторы E_i определены однозначно с точностью до биекции множества индексов ([1], стр. 240).

А51. Любой изоморфизм алгебр фон Неймана типа III, действующих в сепарабельных пространствах, является пространственным ([1], стр. 301, следствие 7).

А52. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана. Проекторы E_{I} (соотв. E_{II}, E_{III}), связанные с $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, равны между собой. Для того чтобы $\mathfrak{A}$ была алгеброй типа I (соотв. типа II, типа III, полуконечной, непрерывной), необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}'$ была алгеброй типа I (соотв. типа II, типа III, полуконечной, непрерывной) [1], стр. 104, следствия 1, 2, 3; стр. 123, теорема 1; стр. 124, следствие 1).

A53. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, E — проектор в $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A}'$. Если $\mathfrak{A}$ — типа I (соотв. типа II, типа III, полуконечная, непрерывная), то $\mathfrak{A}_E$ — типа I (соотв. типа II, типа III, полуконечная, непрерывная) ([1], стр. 103, предложение 11; стр. 104, следствие 4; стр. 125, предложение 4).

A54. Гильбертовой алгеброй называется инволютивная алгебра A, снабженная скалярным произведением, превращающим A в отделимое предгильбертово пространство, причем выполняются следующие аксиомы:

(i) $(x \mid y) = (y^* \mid x^*)$ для $x, y \in A$;

(ii) $(xy \mid z) = (y \mid x^*z)$ при $x, y, z \in A$;

(iii) для любого $x \in A$ отображение $y \to xy$ предгильбертова пространства A в A непрерывно;

(iv) произведения xy ($x \in A$, $y \in A$) всюду плотны в A.

Тогда $(yx \mid z) = (y \mid zx^*)$ при $x, y, z \in A$, и отображение $y \to yx$ предгильбертова пространства A в A непрерывно.

Пусть H — гильбертово пространство — пополнение A, J — инволюция в H, продолжающая отображение $x \to x^*$ предгильбертова пространства A в A, U_x и V_x — элементы $\mathfrak{B}(H)$, продолжающие умножения слева и справа на x в A. Тогда $x \to U_x$ (соотв. $x \to V_x$) — невырожденное представление A (соотв. противоположной алгебры) в H. Операторы U_x перестановочны с V_y. Имеем $JU_xJ = V_{x^*}$ при любом $x \in A$. Слабое замыкание множества U_x (соотв. V_x) есть алгебра фон Неймана $\mathfrak{U}(A)$ (соотв. $\mathfrak{V}(A)$), называемая *связанной слева* (соотв. *справа*) с A. Имеем $\mathfrak{V}(A) = \mathfrak{U}(A)' = J\mathfrak{U}(A)J$, $\mathfrak{U}(A) = \mathfrak{V}(A)' = J\mathfrak{V}(A)J$. Отображения $x \to U_x$, $x \to V_x$ называются *каноническими отображениями* A *в* $\mathfrak{U}(A)$, $\mathfrak{V}(A)$. Если $C \in \mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{V}(A)$, то $JCJ = C^*$ ([1], стр. 69—73).

A55. Пусть A — гильбертова алгебра, A' — инволютивная подалгебра A. Тогда A' — гильбертова алгебра.

Если U_x, где $x \in A'$, сильно плотны в $\mathfrak{U}(A)$, то A' плотно в A.

Если A' плотно в A, то $\mathfrak{U}(A') = \mathfrak{U}(A)$, $\mathfrak{V}(A') = \mathfrak{V}(A)$ ([1], стр. 72, предложение 1).

A56. Сохраним предыдущие обозначения. Для любого $a \in H$ следующие условия эквивалентны:

(i) отображение $x \to V_x a$ пространства A в H непрерывно;

(ii) отображение $x \to U_x a$ пространства A в H непрерывно.

Тогда говорят, что a ограничен (относительно A). Пусть U_a (соотв. V_a) — непрерывное продолжение на H отображения $x \to V_x a$ (соотв. $x \to U_x a$) пространства A в H. Если $a \in A$, то a ограничен и обозначения U_a, V_a согласуются с предыдущими обозначениями. Для того чтобы a был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы Ja был ограничен. Гильбертова алгебра A называется *совершенной*, если любой ограниченный элемент принадлежит A ([1], стр. 72—74).

A57. Пусть A — гильбертова алгебра, всюду плотная в гильбертовом пространстве H. Если $a, b \in H$ ограничены, то $U_a b = V_b a$; положим $U_a b = V_b a = ab$. Положим также $Ja = a^*$. Тогда множество ограниченных элементов становится гильбертовой алгеброй A', содержащей A как всюду плотную гильбертову подалгебру. Гильбертова алгебра A' совершенна. Имеем $\mathfrak{U}(A') = \mathfrak{U}(A)$, $\mathfrak{V}(A') = \mathfrak{V}(A)$ ([1], стр. 74).

A58. Отображения $a \to U_a$, $a \to V_a$ ($a \in A'$) инъективны ([1], стр. 70).

A59. Операторы U_a (соотв. V_a), где $a \in A'$, образуют самосопряженный двусторонний идеал в $\mathfrak{U}(A)$ [соотв. $\mathfrak{V}(A)$]. Если $a \in A'$, $T \in \mathfrak{U}(A)$, $T' \in \mathfrak{V}(A)$, то $Ta \in A'$, $T'a \in A'$, $U_{Ta} = TU_a$, $V_{T'a} = T'V_a$ ([1], стр. 72, предложение 2).

A60. Для $S \in \mathfrak{U}(A)^+$ положим $f(S) = (a \mid a)$, если $S^{1/2} = U_a$ при $a \in A'$, $f(S) = +\infty$ в противном случае. Тогда f — полуконечный точный нормальный след на $\mathfrak{U}(A)^+$. Двусторонний идеал $\mathfrak{U}(A)$, образованный элементами U_a $(a \in A')$, есть множество $T \in \mathfrak{U}(A)$ таких, что $f(T^*T) < +\infty$, т. е. $\mathfrak{N}_f$. Если $a, b \in A'$, то $(a \mid b) = \dot{f}(U_b^* U_a)$, где $\dot{f}$ обозначает линейное продолжение f на $\mathfrak{M}_f$. Аналогичные результаты справедливы для $\mathfrak{V}(A)$. Алгебры фон Неймана $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{V}(A)$ полуконечны. След f на $\mathfrak{U}(A)^+$ и аналогичный след на $\mathfrak{V}(A)^+$ называются *естественными следами* на $\mathfrak{U}(A)^+$, $\mathfrak{V}(A)^+$, определенными A. Эти следы не меняются при замене A на A' ([1], стр. 85—88).

A61. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, f—точный полуконечный нормальный след на $\mathfrak{A}^+$, $\dot{f}$ — линейное продолжение f на $\mathfrak{M}_f$. Идеал $\mathfrak{N}_f$, снабженный скалярным произведением $(S \mid T) = \dot{f}(T^*S)$, есть совершенная гильбертова алгебра. Пусть H_f — гильбертово пространство — пополнение $\mathfrak{N}_f$, J_f — непрерывная инволюция в H_f, продолжающая инволюцию в $\mathfrak{N}_f$. Если $R \in \mathfrak{A}$, то умножения слева и справа на R в $\mathfrak{N}_f$ продолжаются до непрерывных линейных операторов $\lambda_f(R)$, $\rho_f(R)$, и $\rho_f(R) = J_f \lambda_f(R) J_f$. Отображение λ_f есть изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{U}(\mathfrak{N}_f)$, продолжающий каноническое отображение $\mathfrak{N}_f$ в $\mathfrak{U}(\mathfrak{N}_f)$ и переводящий f в естественный след, определяемый $\mathfrak{N}_f$ на $\mathfrak{U}(\mathfrak{N}_f)^+$ ([1], стр. 88, теорема 2).

A62. Пусть A — гильбертова алгебра, всюду плотная в гильбертовом пространстве H. Пусть $a \in H$. Следующие условия эквивалентны:

(i) $(a \mid xy) = (a \mid yx)$ для любых $x, y \in A$;

(ii) $Ta = JT^*Ja$ для любого $T \in \mathfrak{U}(A)$.

Если a удовлетворяет этим условиям, то a называется *центральным относительно* A. Элементы A, перестановочные с любым элементом A, центральны относительно A. Пусть Z — множество элементов, центральных относительно A. Пусть Y (соотв. Y') — замкнутое векторное подпространство H, порожденное образами элементов Z под действием операторов из $\mathfrak{U}(A)$ [соотв. $\mathfrak{V}(A)$]. Тогда $Y = Y'$ и $P_Y \in \mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{V}(A)$ называется *характеристическим проектором* A ([1], стр. 75—76).

A63. В обозначениях A62 следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathfrak{U}(A)$ — конечная алгебра фон Неймана;

(ii) $\mathfrak{V}(A)$ — конечная алгебра фон Неймана;

(iii) $P_Y = 1$ ([1], стр. 100, теорема 6).

A64. Пусть A_i — семейство гильбертовых алгебр. Пусть H_i — гильбертово пространство — пополнение A_i. Пусть A — прямая сумма A_i, которая очевидным образом является инволютивной алгеброй и предгильбертовым пространством. Тогда A — гильбертова алгебра, называемая *прямой суммой* гильбертовых алгебр A_i. Гильбертово пространство H — пополнение A — есть гильбертова сумма H_i. Имеем $\mathfrak{U}(A) = \prod_i \mathfrak{U}(A_i)$, $\mathfrak{V}(A) = \prod_i \mathfrak{V}(A_i)$. Если E_i — проектор H на H_i, то $E_i \in \mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{V}(A)$, $\mathfrak{U}(A_i) = \mathfrak{U}(A)_{E_i}$, $\mathfrak{V}(A_i) = \mathfrak{V}(A)_{E_i}$ ([1], стр. 76).

A65. Пусть A — совершенная гильбертова алгебра, H — гильбертово пространство — пополнение A, (E_i) — семейство попарно ортогональных проекторов в $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{V}(A)$ с суммой 1 и $H_i = E_i(H)$. Пусть $A_i = E_i(A) = H_i \cap A$. Тогда A_i — инволютивная подалгебра A и A_i является совершенной гильбертовой алгеброй, всюду плотной в H_i. Алгебры A_i попарно аннулируются и поэтому являются двусторонними идеалами A. Имеем

$\mathfrak{U}(A_i) = \mathfrak{U}(A)_{E_i}$, $\mathfrak{W}(A_i) = \mathfrak{W}(A_i)_{E_i}$. Прямая сумма гильбертовых алгебр A_i есть инволютивная подалгебра, всюду плотная в A. Естественный след на $\mathfrak{U}(A)^+$ индуцирует на $\mathfrak{U}(A)^+_{E_i} = \mathfrak{U}(A_i)^+$ естественный след $\mathfrak{U}(A_i)^+$ ([1], стр. 77).

А66. Пусть A — инволютивная алгебра операторов Гильберта — Шмидта в гильбертовом пространстве H. Инволютивная алгебра A, снабженная скалярным произведением $(T \mid T') = \operatorname{Tr}(T'^*T)$, является полной гильбертовой алгеброй. Пусть $\overline{H}$ — гильбертово пространство, сопряженное H. Существует единственный изоморфизм Φ гильбертова пространства A на гильбертово пространство $H \otimes \overline{H}$, переводящий оператор $\zeta \to (\zeta \mid \eta)\xi$ $(\xi \in H, \eta \in H)$ в H в элемент $\xi \otimes \eta$. Отождествляя A с $H \otimes \overline{H}$ с помощью Φ, получаем для ξ, $\eta \in H$ и $S \in \mathfrak{B}(H)$:

$$(\xi \otimes \eta)^* = \eta \otimes \xi, \qquad S \cdot (\xi \otimes \eta) = S\xi \otimes \eta,$$
$$(\xi \otimes \eta) \cdot S = \xi \otimes S^*\eta$$

([1], стр. 95—97).

А67. Пусть A — совершенная гильбертова алгебра такая, что $\mathfrak{U}(A)$ — фактор. Сл дующие условия эквивалентны:

(i) A полна;

(ii) $\mathfrak{U}(A)$ — типа I;

(iii) после умножения нормы A на константу A становится изоморфной гильбертовой алгебре операторов Гильберта — Шмидта в некотором гильбертовом пространстве.

Это гильбертово пространство определяется алгеброй A однозначно с точностью до изоморфизма ([1], стр. 127).

А68. Пусть A — полная гильбертова алгебра. Пусть (E_i) — семейство минимальных проекторов $\mathfrak{U}(A) \cap \mathfrak{W}(A)$.

Тогда:

(i) Гильбертово пространство A есть гильбертова сумма $A_i = E_i(A)$.

(ii) A_i — самосопряженные двусторонние идеалы A, аннулирующие друг друга.

(iii) После умножения нормы в A_i на константу гильбертова алгебра A_i становится изоморфной гильбертовой алгебре операторов Гильберта — Шмидта в некотором гильбертовом пространстве.

(iv) Если $\mathfrak{U}(A)$ и $\mathfrak{W}(A)$ — конечные алгебры фон Неймана, то все A_i конечномерны ([1], стр. 127, предложение 7).

А69. Пусть Z — борелевское пространство (B19) и μ — положительная мера на Z (B30).

μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z есть пара $\mathscr{E} = ((H(\zeta))_{\zeta \in Z}, \Gamma)$, где $(H(\zeta))_{\zeta \in Z}$ — семейство гильбертовых пространств, индексы которых пробегают Z, а Γ — множество векторных полей, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) Γ — векторное подпространство $\prod\limits_{\zeta \in Z} H(\zeta)$;

(ii) существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ элементов Γ таких, что для любого $\zeta \in Z$ элементы $x_n(\zeta)$ образуют последовательность, тотальную в $H(\zeta)$;

(iii) для любого $x \in \Gamma$ функция $\zeta \to \|x(\zeta)\|$ μ-измерима;

(iv) пусть x — векторное поле; если для любого $y \in \Gamma$ функция $\zeta \to (x(\zeta) \mid y(\zeta))$ μ-измерима, то $x \in \Gamma$.

При этих условиях элементы Γ называются *измеримыми векторными полями в* $\mathscr{E}$. Если $x \in \Gamma$ и $y \in \Gamma$, то функция $\zeta \to (x(\zeta) \mid y(\zeta))$ измерима ([1], стр. 142).

А70. Пусть Z, Z' — борелевские пространства; μ, μ' — положительные меры на Z, Z' соответственно; $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$, $\mathscr{E}' = ((H'(\zeta')), \Gamma')$ — μ-измеримое и μ'-измеримое поля гильбертовых пространств. Пусть η: $Z \to Z'$ — борелевский изоморфизм, переводящий μ в μ'; *η-изоморфизмом* $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}'$ называется семейство $(V(\zeta))_{\zeta \in Z}$, обладающее следующими свойствами:

(i) для любого $\zeta \in Z$ отображение $V(\zeta)$ является изоморфизмом $H(\zeta)$ на $H'(\eta(\zeta))$;

(ii) для того чтобы поле векторов $\zeta \to x(\zeta) \in H(\zeta)$ на Z было μ-измеримым, необходимо и достаточно, чтобы поле $\eta(\zeta) \to V(\zeta)\, x(\zeta) \in H'(\eta(\zeta))$ на Z' было μ'-измеримым ([1], стр. 143).

Если $Z = Z'$ и $\mu = \mu'$, то η-изоморфизм $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}'$, где η — тождественное отображение Z на Z', называется просто *изоморфизмом* ([1], стр. 143).

А71. Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, H_0 — сепарабельное гильбертово пространство. Для любого $\zeta \in Z$ положим $H(\zeta) = H_0$. Пусть Γ — множество измеримых отображений Z в H_0, т. е. таких отображений Z в H_0, что $\zeta \to (x(\zeta) \mid a)$ измеримо для любого $a \in H_0$. Тогда $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ есть измеримое поле гильбертовых пространств на Z, называемое *постоянным полем*, определяемым H_0 ([1], стр. 143). Поле, изоморфное постоянному полю (см. А70), называется *тривиальным* ([1], стр. 143).

А72. Сохраним обозначения А69. Пусть $p = 1, 2, \ldots, \aleph_0$. Множество Z_p элементов $\zeta \in Z$ таких, что $\dim H(\zeta) = p$, измеримо. Пусть $\mathscr{E}_p$ — ограничение (определяемое очевидным образом) $\mathscr{E}$ на Z_p. Тогда каждое $\mathscr{E}_p$ тривиально ([1], стр. 144—145, предложения 1 и 3).

А73. Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z. Векторное поле x называется *полем с интегрируемым квадратом*, если $x \in \Gamma$ и $\int \|x(\zeta)\|^2\, d\mu(\zeta) < +\infty$. Если x, y — с интегрируемым квадратом, то $x + y$ и λx — тоже, и функция $\zeta \to (x(\zeta) \mid y(\zeta))$ интегрируема; положим

$$(x \mid y) = \int (x(\zeta) \mid y(\zeta))\, d\mu(\zeta).$$

Тогда векторные поля с интегрируемым квадратом образуют гильбертово пространство H, называемое *гильбертовым интегралом* $H(\zeta)$ и обозначаемое $\int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. (Поля, совпадающие почти всюду, отождествляются.) Элемент x этого пространства записывается также в виде $\int^{\oplus} x(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Если μ стандартна, то H сепарабельно ([1], стр. 145—146 и стр. 149, следствие).

А74. Вернемся к обозначениям А70. Отображение, переводящее поле $x \in H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ в поле

$$\eta(\zeta) \to V(\zeta)\, x(\zeta) \in H' = \int^{\oplus} H'(\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

есть изоморфизм H на H', обозначаемый $\int^{\oplus} V(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ ([1], стр. 159, определение 2).

А75. Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $\tilde{\mu}$ — положительная мера на Z, эквивалентная μ, и $\rho(\zeta) =$

$= d\tilde{\mu}(\zeta)/d\mu(\zeta)$. Отображение, которое каждому $x \in H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ сопоставляет поле

$$\zeta \to \rho(\zeta)^{-1/2} x(\zeta) \in \tilde{H} = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\tilde{\mu}(\zeta),$$

есть изоморфизм H на $\tilde{H}$, называемый *каноническим* ([1], стр. 148).

A76. Пусть Z — борелевское пространство, μ — положительная мера на Z, H_0 — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — постоянное поле на Z, определенное H_0. Существует единственный изоморфизм (называемый *каноническим*) пространства $L^2_C(Z, \mu) \otimes H_0$ на $\int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, который для любой $f \in L^2_C(Z, \mu)$ и любого $\xi \in H$ переводит $f \otimes \xi$ в поле $\zeta \to f(\zeta)\,\xi$ ([1], стр. 153, следствие).

A77. Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — измеримое поле гильбертовых пространств на Z. Пусть для любого $\zeta \in Z$ определен $T(\zeta) \in \mathfrak{B}(H(\zeta))$. Если для любого $x \in \Gamma$ поле $\zeta \to T(\zeta)\,x(\zeta)$ измеримо, то $\zeta \to T(\zeta)$ называется *измеримым операторным полем* (или измеримым полем операторов). Если это условие выполнено, то функция $\zeta \to \|T(\zeta)\|$ измерима. Предположим, кроме того, что эта функция существенно ограничена; в этом случае поле $\zeta \to \|T(\zeta)\|$ называется *существенно ограниченным*. Пусть $H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Тогда для любого $x \in H$ поле Tx: $\zeta \to T(\zeta)\,x(\zeta)$ принадлежит H. Имеем $T \in \mathfrak{B}(H)$, и $\|T\|$ равна существенной верхней грани функции $\zeta \to \|T(\zeta)\|$. Положим $T = \int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Операторы $T(\zeta)$ определяются оператором T однозначно с точностью до множества меры нуль. Операторы вида $\int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ в H называются *разложимыми* ([1], стр. 156—159).

A78. Если $S = \int^{\oplus} S(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ и $T = \int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — разложимые операторы, то

$$S + T = \int^{\oplus} (S(\zeta) + T(\zeta))\, d\mu(\zeta), \quad ST = \int^{\oplus} S(\zeta)\, T(\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

$$\lambda S = \int^{\oplus} \lambda S(\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad S^* = \int^{\oplus} S(\zeta)^*\, d\mu(\zeta)$$

([1], стр. 159, предложение 3).

A79. Пусть $T_i = \int^{\oplus} T_i(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $T = \int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — разложимые операторы. Если T_i сильно стремится к T, то существует подпоследовательность (T_{n_k}) такая, что $T_{n_k}(\zeta)$ сильно стремится к $T(\zeta)$ почти всюду. Если $T_i(\zeta)$ сильно стремится к $T(\zeta)$ почти всюду и $\sup \|T_i\| < +\infty$, то T_i сильно стремится к T ([1], стр. 160, предложение 4).

A80. Операторы вида $\int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, где $T(\zeta)$ — скаляр при каждом ζ, называются *диагонализуемыми операторами.* Пусть $\mathfrak{Z}$ — множество диагонализуемых операторов. Тогда $\mathfrak{Z}$ — *коммутативная* алгебра фон Неймана и $\mathfrak{Z}'$ — множество разложимых операторов ([1], стр. 162, определение 3, стр. 163, предложение 7; стр. 164, следствие).

A81. Предположим, что $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — постоянное поле, определенное H_0. Пусть $S \in \mathfrak{B}(H_0)$. Положим $S(\zeta) = S$ для всех ζ. Канонический изоморфизм $L^2_{\mathbf{C}}(Z, \mu) \otimes H_0$ на $\int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ переводит $1 \otimes S$ в $\int^{\oplus} S(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ ([1], стр. 169—170).

A82. Пусть Z и Z' — борелевские пространства, μ и μ' — положительные меры на Z и Z'.

Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta))_{\zeta \in Z}, \Gamma)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z. Пусть $\mathscr{E}' = ((H'(\zeta'))_{\zeta' \in Z'}, \Gamma')$ — μ'-измеримое поле гильбертовых пространств на Z'.

Пусть I — счетное множество.

Пусть η — борелевский изоморфизм Z на Z', переводящий μ в μ'.

Пусть для любого $i \in I$ определено измеримое относительно $\mathscr{E}$ операторное поле $\zeta \to T_i(\zeta)$ и измеримое относительно $\mathscr{E}'$ операторное поле $\zeta \to T'_i(\zeta')$.

Предположим, что для любого $\zeta \in Z$ существует изоморфизм $H(\zeta)$ на $H'(\eta(\zeta))$, переводящий $T_i(\zeta)$ в $T'_i(\eta(\zeta))$ при любом $i \in I$. Предположим, что μ и μ' стандартны.

При этих предположениях существует η-изоморфизм (A70) $\mathscr{E}$ на $\mathscr{E}'$, который при любом $i \in I$ переводит поле $\zeta \to T_i(\zeta)$ в поле $\zeta \to T'_i(\eta(\zeta))$.

(Очевидно, можно ограничиться случаем, когда $Z = Z'$, $\mu = \mu'$ и η — тождественное отображение Z. Тогда см. [1], стр. 166, лемма 2.)

A83. Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $T_i = \int^{\oplus} T_i(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ $(i \in I)$ — семейство разложимых операторов в $\int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, H_0 — сепарабельное гильбертово пространство, $(S_i)_{i \in I}$ — семейство элементов $\mathfrak{B}(H_0)$. Предположим, что для любого $\zeta \in Z$ существует изоморфизм $H(\zeta)$ на H_0, который при любом i переводит $T_i(\zeta)$ в S_i. Пусть μ стандартна. Тогда существует изоморфизм пространства $\int^{\oplus} H_i(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ на $L^2_{\mathbf{C}}(Z, \mu) \otimes H_0$, который при любом i переводит T_i в $1 \otimes S_i$ ([1], стр. 167, теорема 2).

A84. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{B}(H)$ — коммутативная алгебра фон Неймана. Существуют: стандартное борелевское пространство $\mathfrak{Z}$, ограниченная положительная мера μ на Z, измеримое поле $\zeta \to H(\zeta)$ ненулевых гильбертовых пространств на Z и изоморфизм H на $\int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, переводящий $\mathfrak{Z}$ в алгебру диагонализуемых операторов ([1], стр. 210, теорема 2).

A85. Пусть Z — борелевское пространство, μ — стандартная положительная мера на Z, $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — μ-измеримое поле ненулевых гильбертовых пространств на Z, $H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, $\mathfrak{Z}$ — алгебра диагонализуемых операторов в H. Аналогично определим Z_1, μ_1, $\mathscr{E}_1 = ((H_1(\zeta_1), \Gamma_1), H_1, \mathfrak{Z}_1)$. Пусть U — изоморфизм H на H_1, переводящий $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{Z}_1$. Существуют:

(i) борелевское множество N в Z μ-меры нуль и борелевское множество N_1 в Z_1 μ_1-меры нуль;

(ii) борелевский изоморфизм η борелевского пространства $Z - N$ на $Z_1 - N_1$, переводящий μ в меру $\tilde{\mu}_1$, эквивалентную μ_1;

(iii) η-изоморфизм $(V(\zeta))$ поля $\mathscr{E}$, ограниченного на $Z - N$, на поле $\mathscr{E}_1$, ограниченное на $Z_1 - N_1$,

такие, что U есть композиция $\int^{\oplus} V(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ и канонического изоморфизма $\int^{\oplus} H_1(\zeta)\, d\tilde{\mu}_1(\zeta)$ на H_1 ([1], стр. 212, теорема 4).

A86. Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — измеримое поле гильбертовых пространств, $H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, $T_i = \int^{\oplus} T_i(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — последовательность разложимых операторов, $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, порожденная T_i, $\mathfrak{A}(\zeta)$ — алгебра фон Неймана, порожденная $T_i(\zeta)$, $\mathfrak{Z}$ — алгебра диагонализуемых операторов. Для того чтобы $\mathfrak{Z}$ была максимальной коммутативной подалгеброй фон Неймана в $\mathfrak{A}'$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}(\zeta) = \mathfrak{B}(H(\zeta))$ почти всюду ([1], стр. 172, следствие 1).

A87. Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — измеримое поле гильбертовых пространств на Z. Пусть для любого $\zeta \in Z$ определена алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}(\zeta)$ в $H(\zeta)$. Поле $\zeta \to \mathfrak{A}(\zeta)$ называется *измеримым полем алгебр фон Неймана на Z*, если существует последовательность $\zeta \to T_1(\zeta)$, $\zeta \to T_2(\zeta)$, ... измеримых операторных полей такая, что при любом $\zeta \in Z$ алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}(\zeta)$ порождается операторами $T_i(\zeta)$. Множество разложимых операторов $T = \int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ таких, что $T(\zeta) \in \mathfrak{A}(\zeta)$ при каждом ζ, есть алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ в $H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, обозначаемая $\int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Алгебры $\mathfrak{A}(\zeta)$ определяются алгеброй $\mathfrak{A}$ однозначно с точностью до множества меры нуль. Алгебры фон Неймана вида $\int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ называются *разложимыми*. Пусть $\mathfrak{Z}$ — алгебра диагонализуемых операторов. Предположим, что μ стандартна. Для того чтобы алгебра фон Неймана $\mathfrak{A}$ была разложимой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{Z}'$ ([1], стр. 173—174).

A88. Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — измеримое поле гильбертовых пространств, $T_i = \int^{\oplus} T_i(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — последовательность разложимых операторов, $\mathfrak{Z}$ — алгебра диагонализуемых операторов, $\mathfrak{A}(\zeta)$ — алгебра фон Неймана, порожденная $T_i(\zeta)$, $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана, порожденная $\mathfrak{Z}$ и T_i. Тогда $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ ([1], стр. 171, теорема 1).

А89. Пусть $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — разложимая алгебра фон Неймана. Пусть $\mathfrak{Z}$ — алгебра диагонализуемых операторов. Если $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}(\zeta)$ — фактор почти всюду ([1], стр. 174, теорема 3).

А90. Пусть $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — разложимая алгебра фон Неймана. Предположим, что μ стандартна. Для того чтобы $\mathfrak{A}$ была алгеброй типа I, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}(\zeta)$ были алгебрами типа I почти всюду ([1], стр. 183, следствие 2 предложения 7).

А91. Пусть $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$, $\mathfrak{A}_1 = \int^{\oplus} \mathfrak{A}_1(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — разложимые алгебры фон Неймана. Пусть для любого $\zeta \in Z$ определен изоморфизм $\Phi(\zeta)$ алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}(\zeta)$ на $\mathfrak{A}_1(\zeta)$. Поле изоморфизмов $\zeta \to \Phi(\zeta)$ называется *измеримым*, если для любого $T = \int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta) \in \mathfrak{A}$ поле $\zeta \to \Phi(\zeta)(T(\zeta))$ измеримо. Тогда если $\Phi(T) = \int^{\oplus} \Phi(\zeta)(T(\zeta))\, d\mu(\zeta)$, то Φ — изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_1$, обозначаемый $\int^{\oplus} \Phi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ ([1], стр. 183 и 185).

А92. Пусть $\mathfrak{A} = \int^{\oplus} \mathfrak{A}(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ — разложимая алгебра фон Неймана. Пусть для любого $\zeta \in Z$ определен след $f(\zeta)$ на $\mathfrak{A}(\zeta)^+$. Поле следов $\zeta \to f(\zeta)$ называется *измеримым*, если для любого измеримого операторного поля $\zeta \to T(\zeta) \in \mathfrak{A}(\zeta)^+$ функция $\zeta \to f(\zeta)(T(\zeta))$ измерима. Положим $f(T) = \int f(\zeta)(T(\zeta))\, d\mu(\zeta)$ для любого $T = \int^{\oplus} T(\zeta)\, d\mu(\zeta) \in \mathfrak{A}^+$. Тогда f — след на $\mathfrak{A}^+$, обозначаемый $\int^{\oplus} f(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ ([1], стр. 198).

А93. Пусть $\mathscr{E} = ((H(\zeta)), \Gamma)$ — измеримое поле гильбертовых пространств на Z. Пусть для любого $\zeta \in Z$ определена гильбертова алгебра $A(\zeta)$, причем гильбертовым пространством — пополнением $A(\zeta)$ — является $H(\zeta)$. Поле гильбертовых алгебр $\zeta \to A(\zeta)$ называется μ-*измеримым*, если выполнены следующие условия:

(i) если $x \in \Gamma$ — такое поле, что $x(\zeta) \in A(\zeta)$ при каждом ζ, то поле x^*: $\zeta \to x(\zeta)^*$ измеримо;

(ii) если $x, y \in \Gamma$ таковы, что $x(\zeta)$, $y(\zeta) \in A(\zeta)$ при каждом ζ, то поле xy: $\zeta \to x(\zeta)\, y(\zeta)$ измеримо;

(iii) существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ таких элементов Γ, что $x_i(\zeta) \in A(\zeta)$ при всех i и ζ и последовательность $(x_1(\zeta), x_2(\zeta), \ldots)$ тотальна в $H(\zeta)$ при каждом ζ ([1], стр. 187, определение 1).

А94. Сохраним обозначения А93. Пусть $H = \int^{\oplus} H(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Пусть A — множество таких $x \in H$, что $x(\zeta) \in A(\zeta)$ при любом ζ и операторное поле $\zeta \to U_{x(\zeta)}$ (которое автоматически измеримо) существенно ограничено. Тогда A является гильбертовой алгеброй относительно операций $x \to x^*$, $(x, y) \to xy$ и скалярного произведения, индуцированного скалярным произведением в H;

эта гильбертова алгебра всюду плотна в H; она обозначается $\int^{\oplus} A(\zeta)\,d\mu(\zeta)$. Тогда

$$\mathfrak{U}(A)=\int^{\oplus}\mathfrak{U}(A(\zeta))\,d\mu(\zeta),\quad \mathfrak{W}(A)=\int^{\oplus}\mathfrak{W}(A(\zeta))\,d\mu(\zeta).$$

Если J [соотв. $J(\zeta)$] — инволюция в H [соотв. $H(\zeta)$], определяемая A [соотв. $A(\zeta)$], то

$$J=\int^{\oplus} J(\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Естественный след на $\mathfrak{U}(A)^{+}$, определенный A, есть $\int^{\oplus} t(\zeta)\,d\mu(\zeta)$, где $t(\zeta)$ — естественный след на $\mathfrak{U}(A(\zeta))^{+}$, определенный гильбертовой алгеброй $A(\zeta)$ ([1], стр. 188 — 190 и стр. 199, теорема 1).

А95. Пусть $\mathscr{E}=((H(\zeta)),\Gamma)$ — измеримое поле гильбертовых пространств на Z, $H=\int^{\oplus} H(\zeta)\,d\mu(\zeta)$, $\mathfrak{Z}$ — алгебра диагонализуемых операторов, A — совершенная гильбертова алгебра и гильбертовым пространством — пополнением A — является H. Если $\mathfrak{U}(A)\subset\mathfrak{Z}'$, то существует такое измеримое поле совершенных гильбертовых алгебр $\zeta\to A(\zeta)$, что гильбертовым пространством — пополнением $A(\zeta)$ — является $H(\zeta)$ и $A=\int^{\oplus} A(\zeta)\,d\mu(\zeta)$ ([1], стр. 194, теорема 1).

А96. Пусть Z — борелевское пространство. Борелевским полем $\mathscr{E}$ гильбертовых пространств на Z называется семейство $(H(\zeta))_{\zeta\in Z}$ гильбертовых пространств, снабженное множеством Γ векторных полей, удовлетворяющих условиям (i) — (iv) в А69, где слово «μ — измеримый» всюду заменено словом «борелевский» ([1], стр. 143 и 144). Свойства борелевских полей аналогичны свойствам измеримых полей, и они доказываются аналогично. Заметим, что можно повторить $A71$ и $A72$, заменяя всюду «измеримый» на «борелевский».

А97. Пусть $\mathscr{E}=((H(\zeta)),\Gamma)$ — борелевское поле гильбертовых пространств на Z. Пусть μ — положительная мера на Z. Существует единственное множество $\Gamma'\supset\Gamma$ векторных полей такое, что $((H(\zeta)),\Gamma)$ — μ-измеримое поле гильбертовых пространств; Γ' — множество таких векторных полей x, что для любого $y\in\Gamma$ функция $\zeta\to(x(\zeta)\,|\,y(\zeta))$ μ-измерима. Говорят, что μ-измеримое поле $((H(\zeta)),\Gamma')$ определяется борелевским полем $((H(\zeta)),\Gamma)$ ([1], стр. 144).

А98. Пусть Z — борелевское пространство, $\zeta\to H(\zeta)$ — поле гильбертовых пространств на Z, $\zeta\to x_i(\zeta)$ $(i=1, 2, \ldots)$ — последовательность векторных полей, обладающая следующими свойствами:

(i) для любого $\zeta\in Z$ последовательность $x_i(\zeta)$ тотальна в $H(\zeta)$;

(ii) функции $\zeta\to(x_i(\zeta)\,|\,x_j(\zeta))$ являются борелевскими.

Тогда на поле $\zeta\to H(\zeta)$ существует единственная структура борелевского поля, относительно которой $\zeta\to x_i(\zeta)$ — борелевские векторные поля ([1], стр. 145, предложение 4, и стр. 146, замечание).

В. РАЗЛИЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Это Приложение является беспорядочным списком результатов различного характера, используемых в тексте. Ссылки относятся к специальной библиографии к Приложению В *).

В1. Пусть A — комплексная банахова алгебра. Для любого $x \in A$ последовательность $\|x^n\|^{1/n}$ имеет предел $\rho(x)$ при $n \to +\infty$, называемый *спектральным радиусом* x. Имеем $\rho(x) \leqslant \|x\|$, и $\rho(x)$ есть верхняя грань $|z|$ по всем z, пробегающим $\mathrm{Sp}'_A(x)$ ([11], следствие 2.1.4).

В2. Пусть A — банахова алгебра с единичным элементом, B — замкнутая подалгебра, содержащая 1, и $x \in B$. Тогда $\mathrm{Sp}_B\, x \supset \mathrm{Sp}_A\, x$ и любая граничная точка $\mathrm{Sp}_B\, x$ относительно $\boldsymbol{C}$ принадлежит $\mathrm{Sp}_A\, x$ ([11], теорема 1.6.12).

В3. Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Любой характер A имеет норму $\leqslant 1$. Множество характеров A, снабженное слабой топологией, есть локально компактное пространство S, называемое *спектром* A. Для любого $x \in A$ функция $\chi \to \chi(x)$ на S называется *преобразованием Гельфанда* элемента x и обозначается $\mathcal{F}x$. Функции $\mathcal{F}x$ $(x \in A)$ непрерывны, разделяют точки S и для любого $\chi \in S$ существует такой $x \in A$, что $(\mathcal{F}x)(\chi) \neq 0$. Если A допускает единичный элемент, то множество значений функции $\mathcal{F}x$ есть $\mathrm{Sp}_A(x)$ ([11], стр. 110, теорема 3.1.6, следствие 3.1.7, теорема 3.1.20).

В4. Пусть A — банахова алгебра с единичным элементом, $x \in A$, f — функция, голоморфная в окрестности $\mathrm{Sp}_A\, x$. Существует элемент $f(x) \in A$, обладающий следующими свойствами:

(i) $\mathrm{Sp}_A f(x) = f(\mathrm{Sp}_A\, x)$;

(ii) если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — целая функция, то $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, где ряд сходится нормально (см. [11], стр. 157—158, и цитируемую там литературу. Предположение, что A коммутативна, сделанное в [11], на самом деле не используется. С другой стороны, в единственном месте настоящей книги (1.3.9), где применяются эти результаты, легко ограничиться случаем коммутативных алгебр).

В5. Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство, C — замкнутый выпуклый конус с вершиной в 0, x — точка E, не принадлежащая C. Существует непрерывная линейная форма на E, которая $\geqslant 0$ на C и < 0 в x. [Действительно, существует такая непрерывная линейная форма f на E и такое вещественное число α, что $f(y) \geqslant \alpha$ на C и $f(x) < \alpha$. Тогда $0 = f(0) \geqslant \alpha$, поэтому $f(x) < 0$. Если $f(y) < 0$ в некоторой точке C, то $f(\lambda y) < \alpha$ при достаточно большом $\lambda > 0$, что невозможно.]

В6. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, P — такой выпуклый конус в E, что $P \cap (-P) = 0$, M — векторное подпространство E, f — линейная форма на M, неотрицательная на $M \cap P$. Предположим, что M содержит внутреннюю точку P. Тогда f продолжается до линейной формы на E, неотрицательной на P ([4], стр. 99, предложение 6).

В7. Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Единичный шар пространства, сопряженного к E, — метризуемый компакт в слабой топологии ([5], стр. 264, предложение 2).

В8. Пусть E — банахово пространство, E' — его сопряженное, K — выпуклая часть E'. Для того чтобы K' было слабо замкнутым множеством, необходимо и достаточно, чтобы пересечение K с любым замкнутым шаром в E' было слабо замкнутым ([5], стр. 224, теорема 5).

*) Если есть русский перевод, страницы указаны по переводу.

B9. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, B — единичный шар $\mathfrak{B}(H)$, снабженный слабой топологией. Тогда B — метризуемый компакт ([5], стр. 170, предложение 6, и стр. 214, следствие 3).

B10. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Множество унитарных операторов в H является польским пространством в слабой топологии ([8], стр. 280, лемма 4).

B11. Пусть E, F — локально выпуклые пространства. Предположим, что E бочечно, F отделимо и квазиполно. Тогда $\mathfrak{B}(E, F)$, снабженное топологией простой сходимости, отделимо и квазиполно ([5], стр. 177, следствие 2).

B12. Пусть E, F — топологические векторные пространства. Предположим, что F отделимо и квазиполно. Тогда любое равномерно непрерывное замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{B}(E, F)$, снабженного топологией простой сходимости, является полным равномерным подпространством ([5], стр. 175, теорема 4).

B13. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, C—метризуемое компактное выпуклое подмножество E. Множество A крайних точек C есть множество типа G_δ в C ([9], стр. 118—119). Пусть $x \in C$. Существует положительная мера μ с полной массой 1 на C, сосредоточенная на A (т. е. такая, что μ-мера $C - A$ равна нулю) и такая, что $x = \int\limits_C y \, d\mu(y)$, т. е. $f(x) = \int\limits_C f(y) \, d\mu(y)$ для любой непрерывной линейной формы f на E. (Теорема Г. Шоке: [13].)

B14. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, C — компактное выпуклое подмножество E, A — множество крайних точек C. Тогда C — замкнутая выпуклая оболочка A (теорема Крейна — Мильмана). Если подмножество $A' \subset C$ таково, что замкнутая выпуклая оболочка A' равна C, то $\overline{A'} \supset A$.

Покажем, что A — пространство Бэра. (Этот неопубликованный результат принадлежит Г. Шоке вместе с последующим доказательством.) Можно предполагать, что E вещественно. Для любой непрерывной линейной формы f на E и любого вещественного числа α обозначим $U_{f,\alpha}$ (соотв. $F_{f,\alpha}$) множество таких $x \in C$, что $f(x) < \alpha$ [соотв. $f(x) \leqslant \alpha$].

Пусть $x \in A$. Покажем тогда, что множество таких $F_{f,\alpha}$, что $x \in U_{f,\alpha}$, есть фундаментальная система окрестностей x. Согласно теореме Хана — Банаха пересечение $F_{f,\alpha}$ есть $\{x\}$; так как все $F_{f,\alpha}$ компактны, то достаточно показать, что семейство таких $F_{f,\alpha}$, что $x \in U_{f,\alpha}$, является убывающим. Пусть f_1, α_1, f_2, α_2 таковы, что $x \in U_{f_1,\alpha_1} \cap U_{f_2,\alpha_2}$. Пусть C_1, C_2 — дополнения U_{f_1,α_1} и U_{f_2,α_2} в C. Так как C_1 и C_2 компактны, то выпуклая оболочка C_3 множеств C_1 и C_2 компактна. Она не содержит x, так как x—крайняя. Следовательно, существует непрерывная линейная форма f на E и вещественное число α такие, что $f(x) < \alpha$ и $f(y) > \alpha$ при $y \in C_3$. Тогда $F_{f,\alpha}$ не пересекает ни C_1, ни C_2, т. е. содержится в $U_{f_1,\alpha_1} \cap U_{f_2,\alpha_2}$, и $x \in U_{f,\alpha}$.

Пусть (V_n) — последовательность всюду плотных открытых частей A. Достаточно доказать, что $\bigcap V_n$ всюду плотно в A, т. е. пересекается с любой непустой открытой частью $V \subset A$. Пусть U_n, U — открытые части C, причем U_n всюду плотно в C, — такие, что $U_n \cap A = V_n$, $U \cap A = V$. Можно предположить, что U_n и V_n убывают. Можно предположить также, что U — множество вида U_{f_1,α_1}.

Докажем теперь существование (f_1, α_1), (f_2, α_2) ... со следующими свойствами: $F_{f_{n+1},\alpha_{n+1}} \subset U_{f_n,\alpha_n} \cap U_{n+1}$ и $U_{f_n,\alpha_n} \cap A \neq \varnothing$ при $n = 1, 2, \ldots$ Элемент (f_1, α_1) уже построен. Пусть построены $(f_1, \alpha_1), \ldots, (f_n, \alpha_n)$. Существует $x \in U_{f_n, \alpha_n} \cap A \cap U_{n+1}$. Тогда $U_{f_n, \alpha_n} \cap U_{n+1}$ есть окрестность x в C, поэтому существуют такие (f_{n+1}, α_{n+1}), что $x \in U_{f_{n+1}, \alpha_{n+1}} \subset F_{f_{n+1}, \alpha_{n+1}} \subset \subset U_{f_n, \alpha_n}$. Так как $x \in A$, то $U_{f_{n+1}, \alpha_{n+1}} \cap A \neq \varnothing$, и индукцию можно продолжать.

Множества F_{f_n, α_n} убывают, непусты, компактны, поэтому имеют непустое пересечение F. Имеем $F \subset U_{f_1, \alpha_1}$ и $F \subset \bigcap U_n$. Наконец, F — выпуклый компакт, и его дополнение в C выпукло. Очевидная лемма показывает тогда, что F содержит по крайней мере одну крайнюю точку y множества C. (Множество F имеет крайнюю точку x. Если x — крайняя в C, то утверждение доказано. В противном случае, пусть δ — прямая, проходящая через x, такая, что x — внутренняя точка отрезка $C \cap \delta$; тогда можно показать, что одна из крайних точек $F \cap \delta$ есть крайняя точка C.) Точка y принадлежит $A \cap U_n = V_n$ при каждом n и $A \cap U_{f_1, \alpha_1} = V$.

B15. Любое G_δ в польском пространстве есть польское пространство ([2], стр. 123, теорема 1).

B16. Пусть E — локально компактное пространство, G — группа гомеоморфизмов E на E, $C(E, E)$ — множество непрерывных отображений E на E, снабженное топологией компактной сходимости. Предположим, что G относительно компактно в $C(E, E)$. Тогда замыкание G в $C(E, E)$ есть компактная группа гомеоморфизмов E на E ([3], стр. 52, следствие).

B17. Пусть E — польское пространство, R — отношение эквивалентности в E. Предположим, что насыщение в E любого открытого подмножества является борелевским и классы эквивалентности замкнуты. Тогда существует борелевское подмножество E, пересекающее каждый класс эквивалентности в единственной точке ([8], стр. 279, лемма 2).

B18. Пусть E — пространство Бэра, $f\colon E \to R$ — полунепрерывная снизу функция. Тогда f имеет точку непрерывности. Действительно, заменяя f на $f(1 + |f|)^{-1}$, можем предполагать, что f ограничена. Для любого $x \in E$ введем $\omega(x)$ — колебание f в x. Тогда ω полунепрерывна сверху, поэтому множество E_n точек, в которых $\omega(x) \geqslant 1/n$, замкнуто. Предположим, что E_n содержит непустую открытую часть U. Пусть $\alpha = \sup\limits_{x \in U} f(x)$. Существует такой $x_0 \in U$, что $f(x_0) > \alpha - 1/2n$. В любой окрестности x_0 имеем $\alpha - 1/2n < f(x) \leqslant \alpha$, откуда $\omega(x_0) \leqslant 1/2n$, что невозможно. Поэтому $E - E_n$ открыто и всюду плотно, следовательно, $\bigcap (E - E_n)$ непусто. Если $x \in \bigcap (E - E_n)$, то $\omega(x) = 0$ и f непрерывна в x.

B19. *Борелевским пространством* называется множество E, снабженное множеством $\mathscr{B}$ подмножеств E, обладающим следующими свойствами: $E \in \mathscr{B}$, $\varnothing \in \mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ инвариантно относительно счетного объединения, счетного пересечения и перехода к дополнению. Элементы $\mathscr{B}$ называются борелевскими частями E.

Пусть E — множество, $\mathscr{A}$ — множество подмножеств E. Среди множеств $\mathscr{B}$ подмножеств E, обладающих свойствами $\mathscr{B} \supset \mathscr{A}$ и $(E, \mathscr{B})$ — борелевское пространство, существует наименьшее множество $\mathscr{B}_0$. Борелевская структура $(E, \mathscr{B}_0)$ называется *порожденной* $\mathscr{A}$.

Пусть $(E, \mathscr{B}_1)$, $(E, \mathscr{B}_2)$ — борелевские пространства. Если $\mathscr{B}_2 \supset \mathscr{B}_1$, то говорят, что борелевская структура $(E, \mathscr{B}_2)$ *тоньше* борелевской структуры $(E, \mathscr{B}_1)$.

Пусть $(E_i)_{i \in I}$ — семейство борелевских пространств, E — некоторое множество, $f_i\colon E \to E_i$ — отображения. Борелевской структурой на E, определяемой f_i, называется структура, порожденная $f_i^{-1}(A)$, где i пробегает I, A пробегает множество борелевских частей E_i.

Пусть E, F — борелевские пространства. Отображение f: $E \to F$ называется *борелевским*, если полный прообраз относительно f любого множества в F есть борелевское множество в E.

Пусть E — борелевское пространство, R — отношение эквивалентности в E. Подмножества E/R, полный прообраз которых в E является борелевским, определяют на E/R борелевскую структуру. Борелевское пространство E/R называется *факторпространством* борелевского пространства E по отношению R.

Пусть (E_α) — семейство борелевских пространств. Пусть F — объединение множеств E_α. Подмножества E, пересечение которых с каждым E_α является борелевским, определяют на E борелевскую структуру. Борелевское пространство E называется *суммой борелевских пространств* E_α.

Пусть E — топологическое пространство. Подмножества E, борелевские относительно топологии в E, определяют в E борелевскую структуру, называемую *борелевской структурой, подчиненной топологии*. Если $E' \subset E$, то борелевская структура, индуцируемая на E' борелевской структурой E, есть структура, подчиненная топологии, индуцируемой на E' топологией E.

(По всему предыдущему см. [10], стр. 136—137.)

B20. Борелевское пространство E называется *стандартным*, если его борелевская структура подчинена топологии польского пространства. Если E стандартно и счетно, то любое подмножество E является борелевским. Если E стандартно и несчетно, то E изоморфно борелевскому пространству $[0, 1]$ (снабженному борелевской структурой, подчиненной его обычной топологии). Любое борелевское подмножество стандартного борелевского пространства стандартно. Сумма последовательности стандартных пространств стандартна ([10], стр. 138).

B21. Пусть E_1, E_2 — борелевские пространства, f: $E_1 \to E_2$ — инъективное борелевское отображение. Предположим, что

(i) E_1 стандартно;

(ii) существует последовательность борелевских частей E_2, разделяющих точки E_2 и порождающих борелевскую структуру в E_2 (это условие выполнено, если E_2 стандартно).

Тогда $f(E_1)$ — борелевское множество в E_2 и f — изоморфизм E_1 на $f(E_1)$ ([10], стр. 139, теорема 3.2).

B22. Пусть E_1, E_2 — борелевские пространства, f: $E_1 \to E_2$ — биективное борелевское отображение. Предположим, что:

(i) E_2 стандартно;

(ii) E_1 есть фактор-пространство стандартного борелевского пространства.

Тогда f — изоморфизм E_1 на E_2 ([10], стр. 140, теорема 4.2, и стр. 141, следствие).

B23. Пусть H — гильбертово пространство, S — линейный оператор, определенный на векторном подпространстве D_S в H, всюду плотном в H; пусть S принимает значения в H и $(Sf \mid f) \geqslant 0$ для любого $f \in D_S$. Для $f, g \in D_S$ положим $(f \mid g)_S = (Sf \mid g) + (f \mid g)$. Любая последовательность Коши относительно $(\mid)_S$ есть последовательность Коши в H; последовательности Коши, эквивалентные относительно $(\cdot\mid)_S$, эквивалентны в H. Поэтому пополнение K пространства D_S относительно $(\mid)_S$ можно отождествить с векторным подпространством H. Пусть D — пересечение K и области определения S^*. Пусть S' — ограничение S^* на D. Тогда S' — положительный самосопряженный оператор, называемый *продолжением по Фридрихсу* оператора S. Если $USU^{-1} = S$ для некоторого унитарного оператора U в H, то $US'U^{-1} = S'$ ([12], стр. 35—36).

B24. Пусть G — локально компактная группа, H — такая замкнутая подгруппа, что однородное пространство G/H компактно. Если G порождена компактной окрестностью e, то H — тоже ([6], стр. 195, лемма 3).

B25. Пусть G — коммутативная локально компактная группа, порожденная компактной окрестностью e. Тогда G изоморфна группе $K \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{Z}^p$, где K — коммутативная компактная группа ([7], стр. 125).

B26. Пусть A — алгебра, a и b — элементы A. Тогда $\mathrm{Sp}'_A(ab) = \mathrm{Sp}'_A(ba)$ (эта формула получена Н. Джекобсоном). Действительно, пусть $\tilde{A}$ — алгебра, получаемая из A присоединением единичного элемента e. Достаточно показать, что если $\lambda \neq 0$ — такое, что $ab - \lambda e$ имеет обратный элемент u в $\tilde{A}$, то $ba - \lambda e$ обратим в $\tilde{A}$. Но

$$(ba - \lambda e)(bua - e) = b(abu)a - ba - \lambda bua + \lambda e = \\ = b(\lambda u + e)a - ba - \lambda bua + \lambda e = \lambda e$$

и, аналогично,

$$(bua - e)(ba - \lambda e) = \lambda e.$$

Так как $\lambda \neq 0$, то $ba - \lambda e$ обратим.

B27. Пусть A — алгебра над телом k характеристики 0. Пусть π, π' — неприводимые представления A в конечномерных векторных пространствах над k. Если $\mathrm{Tr}\,\pi(x) = \mathrm{Tr}\,\pi'(x)$ для любого $x \in A$, то π и π' эквивалентны ([1], стр. 136, предложение 3).

B28. Пусть T — локально компактное пространство, μ — ограниченная комплексная мера на T. Если $\|\mu\| = \mu(1)$, то $\mu \geqslant 0$. Действительно, пусть $\nu = |\mu|$. Тогда $\|\mu\| = \|\nu\| = \nu(1)$ и $\mu = f \cdot \nu$, где f — μ-измеримая комплексная функция такая, что $|f(t)| = 1$ при каждом t. Пусть $\alpha < 1$ и T_α — множество таких $t \in T$, для которых $\alpha \leqslant \mathrm{Re}\, f(t)$ $(\leqslant 1)$. Тогда

$$\|\nu\| = \mu(1) = \mathrm{Re} \int_{T-T_\alpha} f(t)\, d\nu(t) + \mathrm{Re} \int_{T_\alpha} f(t)\, d\nu(t) \leqslant \\ \leqslant \alpha \int_{T-T_\alpha} d\nu(t) + \int_{T_\alpha} d\nu(t) = \int_T d\nu(t) - (1-\alpha) \int_{T-T_\alpha} d\nu(t) = \\ = \|\nu\| - (1-\alpha) \int_{T-T_\alpha} d\nu(t).$$

Отсюда следует, что ν-мера $T - T_\alpha$ равна нулю. Это верно при любом $\alpha < 1$ поэтому $\mathrm{Re}\, f(t) \geqslant 1$ почти всюду, $f(t) = 1$ почти всюду и $\mu = \nu \geqslant 0$.

B29. Пусть A — нормированная алгебра. *Аппроксимативной единицей* в A называется семейство $(u_i)_{i \in I}$ элементов A, занумерованное возрастающим семейством индексов и обладающее свойствами:

a) $\|u_i\| \leqslant 1$ при любом i;

b) $\|u_i x - x\| \to 0$ и $\|x u_i - x\| \to 0$ при любом $x \in A$.

B30. Пусть X — борелевское пространство. Пусть $\mathscr{B}$ — множество борелевских частей X. *Положительной мерой на* X называется такое отображение μ: $\mathscr{B} \to [0, +\infty)$, что:

1° если $X_1, X_2, \ldots$ — попарно дизъюнктные элементы $\mathscr{B}$, то

$$\mu(X_1 \cup X_2 \cup \ldots) = \mu(X_1) + \mu(X_2) + \ldots,$$

2° X — объединение последовательности борелевских множеств $Y_1, Y_2, \ldots$ таких, что $\mu(Y_i) < +\infty$ при любом i.

Положительная мера μ на X называется *стандартной*, если существует такое борелевское подмножество N в X, что $\mu(N) = 0$ и $X - N$ — стандартное борелевское пространство.

В31. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если его топология имеет счетную базу. Если пространство метризуемо, то оно сепарабельно тогда и только тогда, когда в этом пространстве существует всюду плотное счетное множество. Компактное метризуемое пространство сепарабельно.

В32. Множество в топологическом пространстве называется *множеством типа* G_δ, если оно является пересечением счетного семейства открытых множеств.

В33. *Характером коммутативной алгебры* называется ненулевой морфизм этой алгебры в основное поле.

В34. Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство, G — компактная группа, π — непрерывный морфизм G в линейную группу V. В V существует скалярное произведение, инвариантное относительно $\pi(G)$ и превращающее V в гильбертово пространство ([6], стр. 188, предложение 1).

БИБЛИОГРАФИЯ

Первая часть этой библиографии относится к периоду до 1963 года. Статьи расположены в алфавитном порядке авторов. Вторая часть относится к 1964—1968 годам; статьи классифицируются по году издания. С некоторого момента становится все труднее отделить работы об алгебрах фон Неймана от работ по C^*-алгебрам. Поэтому разделение литературы между этой книгой и моей книгой по алгебрам фон Неймана (Cahiers Scientifiques, fasc. XXV) довольно произвольно.

Указаны некоторые статьи по теоретической физике, связанные с C^*-алгебрами, но я не стремился сделать их список полным.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

[1] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб. **12** (1943), 197—213.

[2] Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Кольца с инволюцией и их представления, Изв. АН СССР, сер. матем. **12** (1948), 445—480.

[3] Гельфанд И. М., Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сб. **13** (1943), 301—316.

[4] Гуревич А., Unitary representations in Hilbert space of a compact topological group, Матем. сб. **13** (1943), 79—86.

[5] Кириллов А. А., Унитарные представления нильпотентных групп Ли, Успехи матем. наук **17** (1962), № 4, стр. 57—110.

[6] Мильман Д. П., К теории колец с инволюцией, ДАН СССР **76** (1951), 349—352.

[7] Наймарк М. А., Кольца с инволюцией, УМН **3** (1948), 52—145.

[8] Наймарк М. А., Об одной задаче теории колец с инволюцией, УМН **6** (1951), 162—164.

[9] Наймарк М. А., О континуальном аналоге леммы Шура, ДАН СССР **98** (1954), 185—188.

[10] Наймарк М. А., Нормированные кольца, М., Гостехиздат, 1956; М., «Наука», 1968.

[11] Наймарк М. А., О фактор-представлениях локально компактной группы, ДАН СССР **134**, 2 (1960), 275—277; О разложении на фактор-представления унитарного представления локально компактной группы, Сиб. матем. ж. **2**, 1 (1961), 89—99.

[12] Наймарк М. А., Фомин С. В., Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств и некоторые их применения, УМН **10** (1955), 111—142.

[13] Райков Д. А., О различных типах сходимости положительно определенных функций, ДАН СССР **58** (1947) 1279—1282.

[14] Аренс (R. Arens), On a theorem of Gelfand and Neumark, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **32** (1946), 237—239.

[15] Бадрикян (A. Badrikian), Structure de certaines groupes localement compacts, Cahiers Rhodaniens **5** (1953), 27—51.

[16] Боненблуст и Карлин (H. F. Bohnenblust, S. Karlin), Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras, Ann. Math. **62** (1955), 217—229.
[17] Вейль А. (A. Weil), L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, 2e ed., Hermann, Paris, 1953 (есть русский перевод: Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950).
[18] Вольфсон (K. G. Wolfson), The algebra of bounded operators on Hilbert space, Duke Math. J. **20** (1953), 533—538.
[19] Вульфсон (A. Wulfson), Produit tensoriel de C*-algèbres, Bull. Sc. Math. **87** (1963), 13—21.
[20] Гишарде (A. Guichardet), Sur un problème posé par G. W. Mackey, C. R. Acad. Sc. **250** (1960), 962—963.
[21] Гишарде (A. Guichardet), Caractères des algèbres de Banach involutives, Ann. Inst. Fourier **13** (1962), 1—81.
[22] Глимм (J. Glimm), On a certain class of operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 318—340.
[23] Глимм (J. Glimm), A Stone-Weierstrass theorem for C*-algebras, Ann. Math. **72** (1960), 216—244.
[24] Глимм (J. Glimm), Type I C*-algebras, Ann. Math. **73** (1961), 572—612.
[25] Глимм (J. Climm), Families of induced representations, Pacific. J. Math. **12** (1962), 885—911.
[26] Глимм (J. Glimm), What are C*-algebras, Conférence a Columbia University, décembre 1961.
[27] Глимм и Кадисон (J. Glimm, R. V. Kadison), Unitary operators in C*-algebras, Pacific J. Math. **10** (1960), 547—556.
[28] Годман (R. Godement), Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 1—84.
[29] Годман (R. Godement), Sur les relations d'orthogonalité de V. Bargmann, C. R. Acad. Sci. **225** (1947), 521—523, 657—659.
[30] Годман (R. Godement), Sur la théorie des représentations unitaires, Ann. Math. **53** (1951), 68—124.
[31] Годман (R. Godement), Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, J. Math. pures et appl. **30** (1951), 1—110.
[32] Годман (R. Godement), Théorie des caractères. II. Définition et propriétés générales des caractères, Ann. Math. **59** (1954), 63—85.
[33] Гординг и Уайтман (L. Gårding, A. Whightman), Representations of the anticommutation relations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40** (1954), 617—621.
[34] Гординг и Уайтман (L. Gårding, A. Whightman), Representations of the commutation relations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40** (1954), 622—626.
[35] Гротендик (A. Grothendieck), Un résultat sur le dual d'une C*-algèbre, J. Math. pures et appl. **36** (1957), 96—108.
[36] Дарсов (W. F. Darsow), Positive definite functions and states, Ann. Math. **60** (1954), 447—453.
[37] Джекобсон (N. Jacobson), A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **31** (1945), 333—338.
[38] Диксмье ((J. Dixmier), Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques, Ann. Inst. Fourier **7** (1957), 315—328.
[39] Диксмье (J. Dixmier), Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. IV, Can. J. Math. **11** (1959), 321—344.
[40] Диксмье (J. Dixmier), Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. V, Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 65—79.
[41] Диксмье (J. Dixmier), Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. VI, Can. J. Math. **12** (1960), 324—352.

[42] Диксмье (J. Dixmier), Représentations intégrables du groupe de De Sitter, Bull. Soc. Math. Fr. 89 (1961), 9—41.
[43] Диксмье (J. Dixmier), Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles, Math. J. Okayama Univ. 11 (1962), 1—18.
[44] Диксмье (J. Dixmier), Sur les C*-algèbres, Bull. Soc. Math. Fr. 88 (1960), 95—112.
[45] Диксмье (J. Dixmier), Sur les structures boréliennes du spectre d'une C*-algèbre, Publ. Inst. Hautes Études Sc. n°6 (1960), 297—303.
[46] Диксмье (J. Dixmier), Points isolés dans le dual d'un groupe localement compact, Bull. Sc. Math. 85 (1961), 91—96.
[47] Диксмье (J. Dixmier), Points séparés dans le spectre d'une C*-algèbre, Acta Sc. Math. 22 (1961), 115—128.
[48] Диксмье (J. Dixmier), Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive, Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 278—283.
[49] Диксмье (J. Dixmier), Traces sur les C*-algèbres, Ann. Inst. Fourier 13 (1963), 219—262.
[50] Диксмье (J. Dixmier), Quasi-dual d'un idéal dans une C*-algèbre, Bull. Sc. Math. 87 (1963), 7—11.
[51] Диксмье (J. Dixmier), Champs continus d'espaces hilbertiens et de C*-algèbres, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), 83—106.
[52] Диксмье и Дуади (J. Dixmier, A. Douady), Champs continus d'espaces hilbertiens et de C*-algèbres, Bull. Soc. Math. Fr. 91 (1963), 227—284.
[53] Зингер (I. M. Singer), Uniformly continuous representations of Lie groups, Ann. Math. 56 (1952), 242—247.
[54] Иошизава (H. Yoshizawa), Some remarks on unitary representations of the free group, Osaka Math. J. 3 (1951), 55—63.
[55] Иошизава (H. Yoshizawa), A proof of the Plancherel theorem, Proc. Jap. Acad. 30 (1954), 276—281.
[56] Иошизава (H. Yoshizawa), On some types of convergence of positive definite functions, Osaka Math. J. 1 (1949), 90—94.
[57] Ито (S. Ito), Positive definite functions on homogeneous spaces, Proc. Jap. Acad. 26 (1950), 17—28.
[58] Кадисон (R. V. Kadison), Isometries of operator algebras, Ann. Math. 54 (1951), 325—338.
[59] Кадисон (R. V. Kadison), A generalised Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras, Ann. Math. 56 (1952), 494—503.
[60] Кадисон (R. V. Kadison), On the orthogonalization of operator representations, Amer. J. Math. 77 (1955), 600—621.
[61] Кадисон (R. V. Kadison), Operator algebras with a faithful weakly-closed representation, Ann. Math. 64 (1956), 175—181.
[62] Кадисон (R. V. Kadison), Irreducible operator algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1957), 273—276.
[63] Кадисон (R. V. Kadison), Unitary invariants for representations of operator algebras, Ann. Math. 66 (1957), 304—379.
[64] Кадисон (R. V. Kadison), States and representations, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 304—319.
[65] Кадисон и Зингер (R. V. Kadison, I. M. Singer), Some remarks on representations of connected groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 38 (1952), 419—423.
[66] Кадисон и Зингер (R. V. Kadison, I. M. Singer), Extensions of pure states, Amer. J. Math. 81 (1959), 383—400.
[67] Капланский (I. Kaplansky), Normed algebras, Duke Math. J. 16 (1949), 399—418.
[68] Капланский (I. Kaplansky), Groups with representations of bounded degree, Can. J. Math. 1 (1949), 105—112.

[69] Капланский (I. Kaplansky), Group algebras in the large, Tôhoku Math. J. 3 (1951), 249—256.
[70] Капланский (I. Kaplansky), The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), 219—255.
[71] Капланский (I. Kaplansky), Representations of separable algebras, Duke Math. J. 19 (1952), 219—222.
[72] Капланский (I. Kaplansky), Functional analysis, Some aspects of analysis and probability, 1—34, John Wiley and Sons, 1958.
[73] Келли и Вот (J. L. Kelley, R. L. Vaught), The positive cone in Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 44—55.
[74] Кузис (P. Koosis), An irreducible unitary representation of a compact group is finite dimensional, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 712—715.
[75] Кунце (R. A. Kunze), L^p-Fourier transforms on locally compact unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc. 89 (1958), 519—540.
[76] Кунце и Штейн (R. A. Kunze, E. M. Stein), Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, Amer. J. Math. 82 (1960), 1—62.
[77] Куранищи (M. Kuranishi), On non connected maximally almost periodic groups, Tôhoku Math. J. 2 (1950), 40—46.
[78] Люмис (L. H. Loomis), An introduction to abstract harmonic analysis, D. Van Nostrand, 1953 (есть русский перевод: Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956).
[79] Макки (G. W. Mackey), Induced representations of groups, Amer. J. Math. 73 (1951), 576—592.
[80] Макки (G. W. Mackey), Induced representations of locally compact groups. I, Ann. Math. 55 (1952), 101—139.
[81] Макки (G. W. Mackey), Induced representations of locally compact groups. II, The Frobenius reciprocity theorem. Ann. Math. 58 (1953), 193—221.
[82] Макки (G. W. Mackey), The theory of group representations, Notes miméographiées, Université de Chicago, 1955.
[83] Макки (G. W. Mackey), Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 134—165.
[84] Макки (G. W. Mackey), Unitary representations of group extensions, Acta Math. 99 (1958), 265—311.
[85] Макки (G W. Mackey), Induced representations and normal subgroups, Proc. of the International Symposium on linear spaces, Jerusalem, 1960.
[86] Мацусита (S. Matsushita), Sur le théorème de Plancherel, Proc. Jap. Acad. 30 (1954), 557—561.
[87] Маутнер (F. I. Mautner), Unitary representations of locally compact groups. I, Ann. Math. 51 (1950), 1—25.
[88] Маутнер (F. I. Mautner), Unitary representations of locally compact groups. II, Ann. Math. 52 (1950), 528—556.
[89] Маутнер (F. I. Mautner), Infinite-dimensional representations of certain groups, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 582—584.
[90] Маутнер (F. I. Mautner), The structure of the regular representation of certain discrete groups, Duke Math. J. 17 (1950), 437—441.
[91] Маутнер (F. I. Mautner), The regular representation of a restricted direct product of finite groups, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), 531—548.
[92] Маутнер (F. I. Mautner), Induced representations, Amer. J. Math. 74 (1952), 737—758.
[93] Маутнер (F. I. Mautner), Note on the Fourier inversion formula on groups, Trans Amer. Math. Soc. 78 (1955), 371—384.
[94] Мураками (S. Murakami), Remarks on the structure of maximally almost periodic groups, Osaka Math. J. 2 (1950), 119—129.

[95] Нахбин (L. Nachbin), On the finite dimensionality of every irreducible unitary representation of a compact group, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 11—12.

[96] Накамура (M. Nakamura), The two-sided representation of an operator algebra, Proc. Jap. Acad. **27** (1951), 172—176.

[97] Накамура и Турумару (M. Nakamura, T. Turumaru), Simple algebras of completely continuous operators, Tôhoku Math. J. **4** (1952), 303—308.

[98] Накамура и Турумару (M. Nakamura, T. Turumaru), On extensions of pure states of an abelian operator algebra, Tôhoku Math. J. **6** (1954), 253—257.

[99] Накамура, Такесаки и Умегаки (M. Nakamura, M. Takesaki, H. Umegaki), A remark on the expectation of operator algebras, Kodai Mat. Sem. Rep. **12** (1960), 82—90.

[100] Нельсон и Стайнспринг (E. Nelson, W. F. Stinespring), Representation of elliptic operators in an enveloping algebra, Amer. J. Math. **81** (1959), 547—560.

[101] Огасавара (T. Ogasawara), Finite dimensionality of certain Banach algebras, J. Sc. Hiroshima Univ. **17** (1954), 359—364.

[102] Огасавара (T. Ogasawara), A theorem on operator algebras, J. Sc. Hiroshima Univ. **18** (1955), 307—309.

[103] Огасавара и Иошинага (T. Ogasawara, K. Yoshinaga), A characterisation of dual B*-algebras, J. Sc. Hiroshima Univ. **18** (1954), 179—182.

[104] Огасавара и Иошинага (T. Ogasawara, K. Yoshinaga), Weakly completely continuous Banach $*$-algebras, J. Sc. Hiroshima Univ. **18** (1954), 15—36.

[105] Оно (T. Ono), Note on a B*-algebra, J. Math. Soc. Jap. **11** (1959), 146—158.

[106] Риккарт (C. Rickart), Banach algebras with an adjoint operation, Ann. Math. **47** (1946), 528—550.

[107] Риккарт (C. Rickart), The uniqueness of norm problem in Banach algebras, Ann. Math. **51** (1950), 615—628.

[108] Риккарт (C. Rickart), Representation of certain Banach algebras on Hilbert space, Duke Math. J. **18** (1951), 27—39.

[109] Риккарт (C. Rickart), Spectral permanence for certain Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 191—196.

[110] Риккарт (C. Rickart), General theory of Banach algebras, D. Van Nostrand, N Y., 1960.

[111] Розенберг (A. Rosenberg), The number of irreducible representations of simple rings with no minimal ideals, Amer. J. Math. **75** (1953), 523—530.

[112] Сакаи (S. Sakai), On linear functionals of W*-algebras, Proc. Jap. Acad. **34** (1958), 571—574.

[113] Сакаи (S. Sakai), On some problems of C*-algebras, Tôhoku Math. J. **11** (1959), 453—455.

[114] Сакаи (S. Sakai), On a conjecture of Kaplansky, Tôhoku Math. J. **12** (1960), 31—33.

[115] Сакаи (S. Sakai), The theory of W*-algebras, Notes miméographiées, Yale University, 1962.

[116] Сигал (I. E. Segal), The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 69—105.

[117] Сигал (I. E. Segal), Irreducible representations of operator algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 73—88.

[118] Сигал (I. E. Segal), Two-sided ideals in operator algebras, Ann. Math, **50** (1949), 856—865.

[119] Сигал (I. E. Segal), The two-sided regular representation of a unimodular locally compact group, Ann. Math. **51** (1950), 293—298.
[120] Сигал (I. E. Segal), An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, Ann. Math. **51** (1950), 293—298.
[121] Сигал (I. E. Segal), A class of operator algebras which are determined by groups, Duke Math. J. **18** (1951), 221—265.
[122] Сигал (I. E. Segal), Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. I, Mat.-fys. Medd. dan. Vid. Selsk. **31** (1959), 1—38.
[123] Сигал и фон Нейман (I. E. Segal, J. von Neumann), A theorem on unitary representations of semisimple Lie groups, Ann. Math. **52** (1950), 509—517.
[124] Стайнспринг (W. F. Stinespring), Positive functions on C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 242—247.
[125] Стайнспринг (W. F. Stinespring), Integration theorems for gages and duality for unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 15—56.
[126] Стайнспринг (W. F. Stinespring), A semi-simple matrix group is of type I, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 965—967.
[127] Стайнспринг (W. F. Stinespring), Integrability of Fourier transforms for unimodular Lie groups, Duke Math. J. **26** (1959), 123—131.
[128] Суноуши (H. Sunouchi), An extension of the Plancherel formula to unimodular groups, Tôhoku Math. J. **4** (1952), 216—230.
[129] Такахаши (R. Takahashi), Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, Bull. Soc. Math. Fr. **91** (1963), 289—433.
[130] Такеда (Z. Takeda), Conjugate spaces of operator algebras, Proc. Jap. Acad. **30** (1954), 90—95.
[131] Такеда (Z. Takeda), On the representation of operator algebras, Proc. Jap. Acad. **30** (1954), 299—304.
[132] Такеда (Z. Takeda), On the representation of operator algebras. II, Tôhoku Math. J. **6** (1954), 212—219.
[133] Такета (Z. Taketa), Inductive limit and infinite direct product of operator algebras, Tôhoku Math. J. **7** (1955), 67—86.
[134] Такенуши (O Takenouchi), Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact, Math. J. Okayama Univ. **4** (1955), 143—173.
[135] Такенуши (O. Takenouchi), Sur la facteur représentation d'un groupe de Lie résoluble de type (E), Math. J. Okayama Univ. **7** (1957), 151—161.
[136] Такесаки (M. Takesaki), On the conjugate space of an operator algebra, Tôhoku Math. J. **10** (1958), 194—203.
[137] Такесаки (M. Takesaki), A note on the cross-norm of the direct product of operator algebras, Kodai Math. Sem. Rep. **10** (1958), 137—140.
[138] Такесаки (M. Takesaki), A note on the direct product of operator algebras, Kodai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 178—181.
[139] Такесаки (M. Takesaki), On the non separability of singular representations of operator algebras, Kodai Math. Sem. Rep. **12** (1960), 102—108.
[140] Такесаки (M. Takesaki), On some representations of C*-algebras, Tôhoku Math. J. **15** (1963), 79—95.
[141] Томита (M. Tomita), Representations of operator algebras, Math. J. Okayama Univ. **3** (1954), 147—173.
[142] Томита (M. Tomita), Harmonic analysis on locally compact groups, Math. J. Okayama Univ. 5 (1956), 133—193.
[143] Томита (M. Tomita), Spectral theory of operator algebras. I, Math. J. Okayama Univ. **9** (1959), 63—98.
[144] Томита (M. Tomita), Spectral theory of operator algebras. II, Math. J. Okayama Univ. **10** (1960), 19—60.
[145] Томияма (J. Tomiyama), On the projection of norm one in W*-algebras, Proc. Jap. Acad. **33** (1957), 608—612.

[146] Томияма (J. Tomiyama), On the projection of norm one in W*-algebras, II, Tôhoku Math. J **10** (1958), 204—209.

[147] Томияма (J. Tomiyama), Topological representations of C*-algebras, Tôhoku Math. J. **14** (1962), 187—204.

[148] Томияма (J. Tomiyama), A characterisation of C*-algebras whose conjugate spaces are separable, Tôhoku Math. J. **15** (1963), 96—102.

[149] Томияма и Такесаки (J. Tomiyama, M. Takesaki), Applications of fibre bundles to the certain class of C*-algebras, Tôhoku Math. J. **13** (1961), 498—523.

[150] Турумару (T. Turumaru), On the direct product of operator algebras, I, Tôhoku Math. J. **4** (1952), 242—251.

[151] Турумару (T. Turumaru), On the direct product of operator algebras. II, Tôhoku Math. J. **5** (1953), 1—7.

[152] Турумару (T. Turumaru), On the direct product of operator algebras. IV, Tôhoku Math. J. **8** (1956), 281—285.

[153] Турумару (T. Turumaru), Crossed product of operator algebra, Tôhoku Math. J. **10** (1958), 355—365.

[154] Уайтман и Швебер (A. Wightman, S. Schweber), Configuration space methods, Phys. Rev. **98** (1955), 812—837.

[155] Умегаки (H. Umegaki), On some representation theorems in an operator algebra. I, Proc. Jap. Acad. **27** (1951), 328—333.

[156] Умегаки (H. Umegaki), On some representation theorems in an operator algebra. II, Proc. Jap. Acad. **27** (1951), 501—505.

[157] Умегаки (H. Umegaki), On some representation theorems in an operator algebra III, Proc. Jap. Acad. **28** (1952), 29—31.

[158] Умегаки (H. Umegaki), Decomposition theorems of operator algebra and their applications, Jap. J. Math. **22** (1953), 27—50.

[159] Умегаки (H. Umegaki), Note on irreducible decompositions of a positive linear functional, Kodai Math. Sem. Rep. **6** (1954), 25—32.

[160] Фелл (J. M. G. Fell), Representations of weakly closed algebras, Math. Ann. **133** (1957), 118—126.

[161] Фелл (J. M. G. Fell), The dual spaces of C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 365—403.

[162] Фелл (J. M. G. Fell), C*-algebras with smooth dual, III. J. Math. **4** (1960), 221—230.

[163] Фелл (J. M. G. Fell), The structure of algebras of operator fields, Acta Math. **106** (1961), 233—280.

[164] Фелл (J M. G. Fell), A new proof that nilpotent groups are CCR, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 93—99.

[165] Фелл (J. M. G. Fell), Weak containment and induced representations of groups, Canad. J. Math. **14** (1962), 237—268.

[166] Фелл (J. M. G. Fell), Weak containment and induced representations of groups. II, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964), 424—447.

[167] Фелл (J. M. G. Fell), Weak containment and Kronecker products of group representations, Pacific J. Math. **13** (1963), 503—510.

[168] Фелл и Фельдман (J. M. G. Fell, J. Feldman), Separable representations of rings of operators, Ann. Math. **65** (1957), 241—249.

[169] Фелл и Тома (J. M. G. Fell, E. Thoma), Einige Bemerkungen über vollsymmetrish Banachsche Algebren, Arch. Math. **12** (1961), 69—70.

[170] Фукамия (M. Fukamiya), On B*-algebras, Proc Jap. Acad. **27** (1951), 321—327.

[171] Фукамия (M. Fukamiya), On a theorem of Gelfand and Neumark and the B*-algebra, Kumamoto J. of Sc. **1** (1952), 17—22.

[172] Фукамия, Мисоноу и Такеда (M. Fukamiya, M. Misonou, Z. Takeda), On order and commutativity of B*-algebras, Tôhoku Math. J. **6** (1954), 89—93.

[173] Хариш-Чандра (Harish-Chandra), Representations of semisimple Lie groups. III, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 234—253.
[174] Хариш-Чандра (Harish-Chandra), Representations of semisimple Lie groups. VI, Amer. J. Math. **78** (1956), 564—628.
[175] Хариш-Чандра (Harish-Chandra), Invariant eigendistributions on semi-simple Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 117—123.
[176] Хиршфельд (R. Hirschfeld), Sur l'analyse harmonique dans les groupes localement compacts, C. R. Acad. Sci. **246** (1958), 1138—1140.
[177] Цудзи (K. Tsuji), Representation theorems of operator algebras and their applications, Proc. Jap. Acad. **31** (1955), 272—277.
[178] Цудзи (K. Tsuji), Harmonic analysis on locally compact groups, Bull. Kyushi Inst. Tech. **2** (1956), 16—32.
[179] Шатц (J. A. Schatz), Реферат статьи [37] в Math Reviews, **14** (1953), 884.
[180] Шерман (S. Sherman), The second adjoint of a C*-algebra, Proc. Intern. Congr. Math. Cambridge **1** (1950), 470.
[181] Шерман (S. Sherman), Order in operator algebras, Amer. J. Math. **73** (1951), 227—232.
[182] Эренпрейс и Маутнер (L. Ehrenpreis, F. I. Mautner), Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups. I, Ann. Math. **61** (1955), 406—439.
[183] Эренпрейс и Маутнер (L. Ehrenpreis, F. I. Mautner), Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups. II, Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 1—55.
[184] Эренпрейс и Маутнер (L. Ehrenpreis, F. I. Mautner), Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups. III, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 431—484.
[185] Эрнест (J. Ernest), A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 252—277.
[186] Эффрос (E. G. Effros), A decomposition theory for representations of C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **107** (1963), 83—106.
[187] Эффрос (E. G. Effros), Order ideals in a C*-algebra and its dual, Duke Math. J. **30** (1963), 391—412.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

1961

[188] Видав (I. Vidav), Sur un système d'axiomes caractérisant les algèbres C*, Glasnik mat.-fiz. astr. Društvo **16**, 189—192.
[189] Сигал (I. E. Segal), Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. II, Can. J. Math. **13**, 1—18.

1962

[190] Сигал (I. E. Segal), Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose — Einstein field, Ill. J. Math. **6**, 500—523.

1963

[191] Наймарк М. А., О структуре фактор-представлений локально компактной группы, ДАН СССР **148**, 775—778.
[192] Кливленд (S. B. Cleveland), Homomorphisms of non-commutative *-algebras, Pacific. J. Math. **13**, 1097—1109.
[193] Майлс (P. E. Miles), Order isomorphism of B*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **107**, 217—236.
[194] Проссер (R. T. Prosser), On the ideal structure of operator algebras, Mem. Amer. Math. Soc., n° 45,

[195] Стермер (E. Strmer), Positive linear maps of operator algebras, Acta Math. **110**, 233—278.
[196] Такесаки (M. Takesaki), On the unitary equivalence among the components of decompositions of representations of involutive Banach algebras and the associated diagonal algebras, Tôhoku Math. J. **15**, 365—393.
[197] Топпинг (D. Topping), Vector lattices of self — adjoint operators, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 251—255.
[198] Хьюитт и Росс (E. Hewitt, K. A. Ross), Abstract harmonic analysis I, Springer, Berlin (готовится русский перевод).

1964

[199] Варопулос (N. T. Varopulos), Sur les formes positives d'une algèbre de Banach, C. R. Acad. Sci. **258**, 2465—2467.
[200] Вульфсон (A. Wulfsohn), Le produit tensoriel de certaines C*-algèbres, C. R. Acad. Sci. **258**, 6052—6054.
[201] Гарднер (L. T. Gardner), A note on isomorphisms of C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 788—791.
[202] Гишарде (A. Guichardet), Sur la décomposition des représentations des C*-algèbres, C. R. Acad. Sci. **258**, 768—770.
[203] Гишарде (A. Guichardet), Caractères et représentations de produits tensoriels de C*-algèbres, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **81**, 189—206.
[204] Диксмье (J. Dixmier), Utilization des facteurs hyperfinis dans la théorie des C*-algèbres, C. R. Acad. Sci. **258**, 4184—4187.
[205] Диксмье (J. Dixmier), Traces sur les C*-algèbres. II, Bull. Sc. Math. 88, 39—57.
[206] Майлс (P. Miles), Derivations on B*-algebras, Pacific J. Math. **14**, 1359—1366.
[207] Нуссбаум (A. E. Nussbaum), On the reduction of C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **15**, 567—573.
[208] Такесаки (M. Takesaki), On the cross-norm of the direct product of C*-algebras, Tôhoku Math. J. **16**, 111—122.
[209] Такесаки (M. Takesaki), A complement to «On the unitary equivalence among the components of decompositions of representations of involutive Banach algebras and the associated diagonal algebras», Tôhoku Math. J. **16**, 226—227.
[210] Тома (E. Thoma), Über unitäre Darstellungen abzählbarer, diskreter Gruppen, Math. Ann. **153**, 111—138.
[211] Шейл и Стайнспринг (D. Shale, W. F. Stinespring), States of the Clifford algebra, Ann. Math. **80**, 365—381.

1965

[212] Аллан (G. R. Allan), A note on B*-algebras, Proc. Cambridge Phil. Soc. **61**, 29—32.
[213] Борхерс (H. J. Borchers), On the vacuum state in quantum field theory. II, Commun. math. Phys. **1**, 57—79.
[214] Борхерс (H. J Borchers), Local rings and the connection of spin with statistics, Commun. math. Phys., **1**, 281—307.
[215] Гарднер (L. T. Gardner), On isomorphisms of C*-algebras, Amer. J. Math. **87**, 384—396.
[216] Гишарде (A. Guichardet), О тензорных произведениях C*-алгебр, ДАН СССР **160**, 986—989.
[217] Гишарде (A. Guichardet), Utilization des sous-groupes distingués ouverts dans l'étude des représentations unitaires des groupes localement compacts, Compos. Math. **17**, 1—35.
[218] Доплихер (S. Doplicher), An algebraic spectrum condition, Commun. math. Phys. **1**, 1—5.

[219] Кадисон (R. V. Kadison), Transformations of states in operator theory and dynamics, Topology 3, 177—198.
[220] Кастлер (D. Kastler), The C*-algebra of a free boson field. I, Commun. math. Phys. 1, 14—48.
[221] Комб (F. Combes), Relations entre formes positives sur une C*-algèbre, C. R. Acad. Sci. 260, 5435—5438.
[222] Комб (F. Combes), Représentations d'une C*-algébre et formes linéaires positives, C. R. Acad. Sci. 260, 5993—5996.
[223] Рингроуз (J. R. Ringrose), On subalgebras of a C*-algebra, Pacific J. Math. 15, 1377—1382.
[224] Сакаи (S. Sakai), On the central decomposition for positive functionals on C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 118, 406—419.
[225] Стермер (E. Størmer), On the Jordan structure of C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 120, 438—447.
[226] Топпинг (D. Topping), Vector lattices of self-adjoint operators, Trans. Amer. Math. Soc. 115, 14—30.
[227] Фельдман (J. Feldman), Borel sets of states and of representations, Michigan Math. J. 12, 363—366.
[228] Хааг и Свека (R. Haag, J. A. Swieca), When does a quantum field theory describe particles, Commun. math. Phys. 1, 308—320.
[229] Эффрос (E. G. Effros), Transformation groups and C*-algebras, Ann. Math. 81, 38—55.

1966

[230] Васильев Н. Б., C*-алгебры с конечномерными неприводимыми представлениями, УМН 21, 1, 135—154.
[231] Голодец В. Я., О фактор-представлениях антикоммутационных соотношений, ДАН СССР 167, 19—22.
[232] Арвесон (W. B. Arveson), A theorem on the action of abelian unitary groups, Pacific J. Math. 16, 205—212.
[233] Берксон (E. Berkson), Some characterisations of C*-algebras, Ill. J. Math. 10, 1—8.
[234] Бонсалл, Линденштраус и Фелпс (F. F. Bonsall, J. Lindenstrauss, R. R. Phelps), Extreme positive operators on algebras of functions, Math. Scand. 18, 161—182.
[235] Борхерс (H. J. Borchers), Energy and momentum as observables in quantum field theory, Commun. math. Phys. 2, 49—54.
[236] Гишарде (A. Guichardet), Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 83, 1—52.
[237] Гишарде (A. Guichardet), Sur l'homologie et la cohomologie des algèbres de Banach, C. R. Acad. Sci. 262, série A, 38—41.
[238] Гликфельд (W. B. Glickfeld), A metric characterization of C(X) and its generalization to C*-algebras. Ill. J. Math. 10, 547—556.
[239] Делль-Антонио (G. F. Dell'Antonio), On some groups of automorphisms of physical observables, Commun. math. Phys. 2, 384—397.
[240] Делль-Антонио, Доплихер и Рюэль (G. F. Dell'Antonio, S. Doplicher, D. Ruelle), A theorem on canonical commutation and anticommutation relations, Commun. math. Phys. 2, 223—230.
[241] Доплихер, Кастлер и Робинсон (S. Doplicher, D. Kastler, D. W. Robinson), Covariance algebras in field theory and statistical mechanics, Commun. math. Phys. 3, 1—28.
[242] Дункан (J. Duncan), The continuity of the involution in Banach *-algebras, J. London Math. Soc. 41, 701—706.
[243] Зеллер-Мейер (G. Zeller-Meier), Produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes, C. R. Acad. Sci. 263, série A, 20—23.
[244] Кастлер и Робинсон (D. Kastler, D. W. Robinson), Invariant states in statistical mechanics, Commun. math. Phys. 3, 151—180.

[245] Комб (F. Combes), Étude des représentations tracées d'une C*-algèbre, C. R. Acad. Sci. **262**, série A, 114—117.
[246] Лупиас и Миракль-Соль (I. Loupias, S. Miracle-Sole), C*-algèbres des systèmes canoniques. I, Commun. math. Phys. **2**, 31—48.
[247] Лупиас и Миракль-Соль (G. Loupias, S. Miracle-Sole), C*-algèbres des systèmes canoniques. II, Ann. Inst. H. Poincaré **6**, 39—58.
[248] Окаяши (T. Okayasu), On the tensor product of C*-algebras, Tôhoku Math. J. 18, 325—331.
[249] Окаяши и Такесаки (T. Okayasu, M. Takesaki), Dual spaces of tensor products of C*-algebras, Tôhoku Math. J. **18**, 332—337.
[250] Педерсен (G. K. Pedersen), Measure theory for C*-algebras, Math. Scand. **19**, 131—145.
[251] Ренжонне (D. Rainjonneau), Existence des sommes dans certaines catégories d'algèbres, C. R. Acad. Sci. **262**, série A, 283—285.
[252] Руссо (B. Russo) Linear mappings of operator algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 1019—1022.
[253] Руссо и Дай (B. Russo, H. A. Dye), A note on unitary operators in C*-algebras, Duke Math. J. **33**, 413—416.
[254] Рюэлль (D. Ruelle), States of physical systems, Commun. math. Phys. **3**, 133—150.
[255] Сакаи (S. Sakai), On a problem of Calkin, Amer. J. Math. 88, 935—941.
[256] Сакаи (S. Sakai), On a characterisation of type I C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 508—512.
[257] Сакаи (S. Sakai), On pure states of C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 86—87.

1967

[258] Голодец В. Я., О фактор-представлениях типа II_1 для клиффордовой алгебры, ДАН СССР **173**, 745—747.
[259] Каждан Д. А., О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп, Функциональный анализ и его приложения **1**, 1, 71—74.
[260] Арвесон (W. B. Arveson), Operator algebras and measure preserving automorphisms, Acta Math. **118**, 95—109.
[261] Арвесон (W. B. Arveson), An algebraic conjugacy invariant for measure-preserving transformations, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 121—125.
[262] Берберян и Орленд (S. K. Berberian, G. H. Orland), On the closure of the numerical range of an operator, Proc. Amer. Math. Soc. **18**, 499—503.
[263] Биллик (M. Billik), Idempotent Reynolds operators, J. Math. Anal. Appl. **18**, 499—503.
[264] Басби (R. C. Busby), On structure spaces and extensions of C*-algebras, J. functional anal. **1**, 370—377.
[265] Вовдеи (B. J. Vowden), On the Gelfand — Neumark theorem, J. London Math. Soc. **42**, 725—731.
[266] Гальперн (H. Halpern), Finite sums of irreducible functionals on C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **18**, 352—358.
[267] Гишарде (A. Guichardet), Produits tensoriels continus d'espaces et d'algèbres de Banach, Commun. math. Phys. **5**, 262—287.
[268] Делль-Антонио и Доплихер (G. F. Dell'Antonio, S. Doplicher), Total number of particles and Fock representation, J. Math. Phys. 8, 663—666.
[269] Делярош (C. Delaroche), Sur les centres des C*-algèbres, C. R. Acad. Sci. **265**, série A, 465—466.
[270] Делярош (C. Delaroche), Sur les centres des C*-algèbres, Bull. Sc. Math. **91**, 105—112.

[271] Джонсон (B. E. Johnson), AW*-algebras are QW*-algebras, Pacific J. Math. **23**, 97—99.
[272] Диксмье (J. Dixmier), On some C*-algebras considered by Glimm, J. functional anal. **1**, 182—203.
[273] Диксмье (J. Dixmier), Sur les automorphismes des algèbres de Banach, C. R. Acad. Sci. **264**, 729—731.
[274] Доплихер, Кадисон, Кастлер и Робинсон (S. Doplicher, R. V. Kadison, D. Kastler, D. W. Robinson), Asymptotically abelian systems, Commun. math. Phys. **6**, 101—120.
[275] Зеллер-Мейер (G. Zeller-Meier), Représentations fidèles des produits croisés, C. R. Acad. Sci. **264**, série A, 679—682.
[276] Зеллер-Мейер (G. Zeller-Meier), Sur les automorphismes des algèbres de Banach, C. R. Acad. Sci. **264**, série A, 1131—1132.
[277] Кадисон (R. V. Kadison), The energy momentum spectrum of quantum fields, Commun. math. Phys. **4**, 258—260.
[278] Коберн (L. A. Coburn), The C*-algebra generated by an isometry, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 722—726.
[279] Комб (F. Combes), Sur les états factoriels d'une C*-algêbre, C. R. Acad. Sci. **265**, série A, 736—739.
[280] Комб (F. Combes), Etude des poids définis sur une C*-algèbres, C. R. Acad. Sci. **265**, série A, 340—343.
[281] Корд (H. O. Cordes), On a class of C*-algebras, Math. Ann. **170**, 283—313.
[282] Ланс (E. C. Lance), Automorphisms of postliminal C*-algebrac, Pacific J. Math. **23**, 547—555.
[283] Ланфорд и Рюелль (O. Lanford, D. Ruelle), Integral representations of invariant states on B*-algebras, J. math. Phys. **8**, 1460—1463.
[284] Лептин (H. Leptin), Verallgemeinerte L^1-algebren und projektive Darstellungen lokalkompakter Gruppen, I, II, Inventiones Math. **3**, 257—281; **4**, 68—86.
[285] Порта и Шварц (H. Porta, J. T. Schwartz), Representations of the algebra of all operators in Hilbert space, and related analytic function algebras, Comm. pure appl. math. **20**, 457—492.
[286] Робинсон (D. W. Robinson), Statistical mechanics of quantum spin systems, Commun. math. Phys. **6**, 151—160.
[287] Робинсон и Рюелль (D. W. Robinson, D. Ruelle), Extremal invariant states, Ann. Inst. H. Poincaré **6**, 299—310.
[288] Рюелль (D. Ruelle), A variational formulation of equilibrium statistical mechanics and the Gibbs plase rule, Commun. math. Phys. **5**, 324—329.
[289] Саито (K. Saitô), Non-commutativie extension of Lusin's theorem, Tôhoku Math. J. **19**, 332—340.
[290] Сакаи (S. Sakai), On type I C*-algebras, Proc. Amer. Math Soc. **18**, 861—863.
[291] Стермер (E. Størmer), Two-sided ideals in C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 254—257.
[292] Стермер (E. Størmer), Large groups of automorphisms of C*-algebras, Commun. math. Phys. **5**, 1—22.
[293] Такесаки (M. Takesaki), A duality in the representation theory of C*-algebras, Ann. Math. **85**, 370—382.
[294] Такесаки (M. Takesaki), Covariant representations of C*-algebras and their locally compact automorphism groups, Acta Math. **119**, 273—302.
[295] Тестар (D. Testard), Algèbre de covariance, Ann. Inst. H. Poincaré **6**, 267—297.
[296] Томита (M. Tomita), The second dual of a C*-algebra, Mem. Fac. Sci. Kyushi Univ. **21**, 185—193.

[297] Томияма (J. Tomiyama), Applications of Fubini type theorem to the tensor product of C*-algebras, Tôhoku Math. J. **19**, 213—226.
[298] Хааг, Гугенгольц и Виннинк (R. Haag, N. M. Hugenholtz, M. Winnink), On the equilibrium states in quantum statistical mechanics, Commun. math. Phys. **5**, 215—236.
[299] Чайкен (J. M. Chaiken), Finite-particle representations and states of the canonical commutation relations, Ann. Phys. **42**, 23—80.
[300] Эффрос и Стермер (E. G. Effros, E. Størmer), Jordan algebras of self-adjoint operators, Trans. Amer. Math. Soc. **127**, 313—316.
[301] Эффрос и Хан (E. G. Effros, F. Hahn), Locally compact transformation groups and C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 222—226.
[302] Эффрос и Хан (E. G. Effros, F. Hahn), Locally compact transformation groups and C*-algebras, Mem. Amer. Math. Soc. n° 75.

1968

[303] Аарнес (J. F. Aarnes), On the continuity of automorphic representations of groups, Commun. math. Phys. **7**, 332—336.
[304] Балслев, Манусо и Вербер (E. Balslev, J. Manuceau, A. Verbeure), Representations of anticommutation relations and Bogolioubov transformations, Commun. math. Phys. **8**, 315—326.
[305] Балслев и Вербер (E. Balslev, A. Verbeure), States on Clifford algebras, Commun. math. Phys. **7**, 55—76.
[306] Бенке (H. Behncke), Structure of certain non normal operators, J. math. mech. **18**, 103—107.
[307] Басби (R. C. Busby), Double centralizers and extensions of C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **132**, 79—99.
[308] Вилс (W. Wils), Désintégration centrale des formes positives sur les C*-algèbres, C. R. Acad. Sci. **267**, série A, 810—812.
[309] Виннинк (M. Winnink), An application of C*-algebras to guantum statistical mechanics of systems in equilibrium, Thèse, Univ. de Groningen.
[310] Вульфсон (A. Wulfsohn), The primitive spectrum of a tensor product of C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **19**, 1094—1096.
[311] Гишарде (A. Guichardet), Sur un théorème de Sakai, C. R. Acad. Sci. **266**, série A, 974—975.
[312] Гишарде (A. Guichardet), Algèbres d'observables associées aux relations de commutation, A. Colin, Paris.
[313] Гишарде и Вульфсон (A. Guichardet, A. Wulfsohn). Sur les produits tensoriels continus d'espaces hilbertiens, J. functional anal. **2**, 371—377.
[314] Дэвис (E. B. Davies), On the Borel structure of C*-algebras (with an appendix by R. V. Kadison), Commun. math. Phys. **8**, 147—163.
[315] Деларош (C. Delaroche), Sur les centres des C*-algèbres. II, Bull. Sc. Math. **92**, 111—128.
[316] Диксмье (J. Dixmier), Ideal center of a C*-algebra, Duke Math. J. **35**, 375—382.
[317] Диксмье (J. Dixmier), Localization of a theorem of Glimm, Proc. Amer. Math. Soc **19**, 364—366.
[318] Доплихер и Кастлер (S. Doplicher. D Kastler), Ergodic states in a non commutative ergodic theory, Commun. math. Phys. **7**, 1—20.
[319] Зеллер-Мейер (G. Zeller-Meier), Produits croisés d'une C*-algèbre par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et appl. **47**, 101—239.
[320] Илинен (K. Ylinen), Compact and finite-dimensional elements of normed algebras, Ann. Acad. Sc. Fennicae, série A, 428.
[321] Комб (F. Combes), Poids sur une C*-algèbre, J. Math. pures et appl. **47**, 57—100.

[322] Комб (F. Combes), Éléments semi-continus associés à une C*-algèbre, C. R. Acad. Sci. **267**, série A, 986—989.

[323] Лептин (H. Leptin), Darstellungen verallgemeinerter L^1-Algebren, Inventiones Math. **5**, 192—215.

[324] Луфт (E. Luft), The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space, Czech Math. J. **18**, 595—605.

[325] Манусо (J. Manuceau), Étude de quelques automorphismes de la C*-algèbre du champ de bosons libres, Ann. Inst. H. Poincaré **8**, 117—138.

[326] Манусо и Вербер (J. Manuceau, A. Verbeure), Quasi-free states of the CCR-algebra and Bogolubov transformations, Commun. math. Phys. **9**, 293—302.

[327] Ньюбергер (S. M. Newberger), R-algebras and locally convex spaces, Math. Ann. **176**, 145—156.

[328] Палмер (T. W. Palmer), Characterizations of C*-algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **74**, 538—540.

[329] Плимен (G. J. Plymen), A modification of Piron's axioms, Helv. Phys. Acta **41**, 69—74.

[330] Плимен (R. J. Plymen), C*-algebras and Mackey's axioms, Commun. math. Phys. **8**, 132—146.

[331] Ридо (G. Rideau), On some representations of the anticommutation relations, Commun. math. Phys. **9**, 229—241.

[332] Робертс и Репстров (J. E. Roberts, G. Roepstroff), Some basic concepts of algebraic quantum theory, Desy, Hamburg.

[333] Робинсон (D. W. Robinson), Statistical mechanics of quantum spin systems. II, Commun. math. Phys. **7**, 337—348.

[334] Сакаи (S. Sakai), Derivations of simple C*-algebras, J. functional anal. **2**, 202—206.

[335] Стермер (E. Størmer), On partially ordered vector spaces and their duals, with applications to simplexes and C*-algebras, Proc. London Math. Soc. **18**, 245—265.

[336] Стермер (E. Størmer), Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators, Trans. Amer. Math. Soc. **130**, 153—166.

[337] Стермер (E. Størmer), A characterization of pure states of C*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **19**, 1100—1102.

[338] Стритер (R. F. Streater), Current commutation relations and continuous tensor products, Nuovo Cimento **53**, 487—495.

[339] Стритер (R. F. Streater), On certain non-relativistic quantized fields, Commun. math. Phys. **7**, 93—98.

[340] Топпинг (D. M. Topping), Transcendental quasinilpotents in operator algebras, J. functional anal. **2**, 342—351.

[341] Чайкен (J. M. Chaiken), Number operators for representations of the canonical commutation relations, Commun. math. Phys. **8**, 164—184.

В ПЕЧАТИ *)

[342] Акеманн (C. A. Akemann), The Stone — Weierstrass problem of C*-algebras, J. functional anal. 4 (1969), 277—294

[343] Вейнлесс (M. Weinless), Existence and uniqueness of the vacuum for linear quantized fields, J. functional anal. 4 (1969), 350—379.

[344] Даунс и Гофман (J. Dauns, K. H. Hofmann), Representations of rings by continuous sections, Mem. Amer. Math. Soc. n° 83 (1968).

[345] Доплихер, Кастлер и Стермер (S. Doplicher, D. Kastler, E. Størmer), Invariant states and asymptotic abelianness, J. functional anal. **3** (1969), 419—434.

*) При выходе французского издания.

[346] Дэвис (E. B. Davies), Decomposition of traces on separable C*-algebras, Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2), **20** (1969), 97—111.

[347] Дэвис (E. B. Davies), The structure of Σ*-algebras, Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2), **20** (1969), 351—366.

[348] Кастлер, Пул и Пульсен (D. Kastler, J. C. T. Pool, E. Thue Poulsen), Quasi-unitary algebras attached to temperature states in statistical mechanics; a comment on the work of Haag, Hugenholtz and Winnink, Commun. math. Phys. **12** (1969), 175—192.

[349] Келет (E. T. Kehlet), On the monotone sequential closure of a C*-algebra, Math. Scand. **25** (1969), 59—70.

[350] Комб (F. Combes), Sur les faces d'une C*-algèbre, Bull. Sc. Math. (2), **93** (1969), 37—62.

[351] Ланс (E. C. Lance), Automorphisms of certain operator algebras, Amer. J. Math. **91** (1967), 160—174.

[352] Ланс (E. C. Lance), Inner automorphisms of UHF algebras, J. London Math. Soc. **43** (1968), 681—688.

[353] Лаурсен (K. B. Laursen), Tensor products of Banach *-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 467—487.

[354] Манусо, Рокка и Тестар (J. Manuceau, F. Rocca, D. Testard), On the product form of quasi-free states, Commun. math. Phys. **12** (1969), 43—57.

[355] Педерсен (G. K. Pedersen), Measure theory for C*-algebras. II, Math. Scand **22** (1968), 63—74.

[356] Педерсен (G. K. Pedersen), On weak and monotone σ-closure of C*-algebras, Commun. math. Phys. **11** (1968/69), 221—226.

[357] Педерсен (G. K. Pedersen), A decomposition theorem for C*-algebras, Math. Scand. **22** (1968), 266—268.

[358] Пауэрс (R. T. Powers), UHF algebras and their applications to representations of the anticommutation relations, Cargèse lectures in physics **4** (1970), 137—168.

[359] Рокка, Сирюг и Тестар (F. Rocca, M. Sirugue, D. Testard), Translation invariant quasi-free states and Bogoliubov transformations, Ann. Inst. H. Poincaré **10** (1969), 247—258.

[360] Рокка, Сирюг и Тестар (F. Rocca, M. Sirugue, D. Testard), On a class of equilibrium states under the Kubo — Martin — Schwinger boundary condition, I. Fermions, Commun. math. Phys. **13** (1969), 317—334.

[361] Руссо (B. Russo), Isometries of trace class, Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969), 213.

[362] Рюелль (D. Ruelle), Some remarks on the ground state of infinite systems in statistical mechnics, Commun. math. Phys. **11** (1968/69), 339—345.

[363] Сакаи (S. Sakai), Derivations of uniformly hyperfinite C*-algebras, Publ. Res. Inst Math. Sci. **3** (1967), 167—175.

[364] Стермер (E. Størmer), Symmetric states of infinite tensor products of C*-algebras, J. functional anal. **3** (1969), 48—68.

[365] Стермер (E. Størmer), States and invariant maps of operator algebras, J. functional anal. **5** (1970), 44—65.

[366] Стритер (R. F. Streater), A continuum analogue of the lattice gas, Commun. math. Phys. **12** (1969), 226—232

[367] Такесаки (M. Takesaki), A liminal crossed product of a uniformly hyperfinite C*-algebra by a compact abelian automorphism group, J. functional anal. **7** (1971), 140—146.

[368] Топпинг (D. M. Topping), UHF algebras are singly generated, Math. Scand **22** (1968), 224—226.

[369] Фелл (J. M. G. Fell), An extension of Mackey's method to Banach *-algebraic bundles, Mem. Amer. Math. Soc. n° 90 (1969).

[370] Хааг, Кастлер и Мишель (R. Haag, D. Kastler, L. Michel), Central decompositions of ergodic states, mimeographed notes.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

[371*] Бернштейн И. Н., Все редуктивные алгебраические группы — ручные, Функциональный анализ и его приложения 8, 2 (1974), 3—6.
[372*] Желобенко Д. П., Наймарк М. А., Описание вполне неприводимых представлений комплексной полупростой группы Ли, Изв. АН СССР, **4** (1970), 59—83.
[373*] Араки (H. Araki), Factorizable representation of current algebra — non commutative extension of the Levy — Kinchin formula and cohomology of a solvable group with values in a Hilbert space, Publ. Res. Inst. Mat. Sci. Kyoto Univ., **5** (1970), 361—422.
[374*] Араки (H. Araki), Hamiltonian formalism and the canonical commutation relations in quantum field theory, J. Math. Phys. **1** (1960), 492—504.
[375*] Глимм (J. Glimm), Mathematical problems in the foundations of quantum field theory, Lecture Notes in Math., **140** (1970), 58—67.
[376*] Глимм и Джаффе (J. Glimm, A. Jaffe), The Yukawa quantum field theory without cutoffs, J. Funct. Anal., **7** (1971), 323—357.
[377*] Джонсон, Кадисон и Рингроуз (B. E. Johnson, R. V. Kadison, J. R. Ringrose), Cohomology of operator algebras, III. Reduction to normal cohomology, Bull. Soc. Math. France, **100** (1972).
[378*] Диксмье (J. Dixmier), Sur les algèbres de Weyl, II, Bull. Sci. Math., **94** (1970), 289—301.
[379*] Диксмье (J. Dixmier), Sur les représentations induites des algèbres de Lie, J. Math. Pures et Appl., **50** (1971), 1—24.
[380*] Комб (E. Combes), Poids et espérances conditionelles dans les algèbres de von Neumann, Bull. Soc. Math. France, **99** (1971), 73—112.
[381*] Конн (A. Connes), Classification des facteurs de type III, Ann. Ec. Norm. Sup., **6** (1973), 133—252.
[382*] Кригер (W. Krieger), On the Araki — Woods asymptotic ratio set and non-singular transformations of a measure space, Contributions to Ergodic Theory and Probability (Editor Louis Sucheston), Lecture Notes in Math., **160**, Springer, Berlin, 1970.
[383*] Кригер (W. Krieger), On constructing non-*isomorphic hyperfinite factors of type III, J. Funct. Anal., **6** (1970), 97—109.
[384*] Кригер (W. Krieger), On a class of hyperfinite factors that arise from null-recurrent Markov chains, J. Funct. Anal., **7** (1971), 27—42.
[385*] Макдуф (D. McDuff), К структуре II_1 факторов, УМН **25**, 6 (1970), 29—51.
[386*] Сакаи (S. Sakai), C*-algebras and W*-algebras, Springer-Verlag, Berlin e. a., 1971.
[387*] Такесаки (M. Takesaki), Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Math., **128**, Springer-Verlag, Berlin e. a., 1970. Русский перевод: Математика **18**, 3 (1974), 84—120; **18**, 4 (1974), 34—63.
[388*] Уорнер (G. Warner), Harmonic analysis on semisimple Lie groups, vol. 1, 2, Springer-Verlag, Berlin e. a., 1972.
[389*] Хариш-Чандра (Harish-Chandra), Invariant eigen-distributions on a semisimple Lie group, Trans. Amer. Math. Soc., **119**, 3 (1965).
[390*] Хариш-Чандра (Harish-Chandra), Discrete series for semisimple Lie groups, I, II, Acta Math., **113** (1965), 241—318; **116** (1966).
[391*] Хелгасон (S. Helgason), Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., «Мир», 1964.
[392*] Шварц (J. T. Schwartz), Recent progress in the structure theory of factors, Functional Analysis (ed. C. O. Wilde), Academic Press, 1970, 37—53.

БИБЛИОГРАФИЯ К ПРИЛОЖЕНИЮ В

[1] Бурбаки (N. Bourbaki), Algèbre, chap. VIII, Hermann, Paris, 1958 (есть русский перевод: Н. Бурбаки, Алгебра (модули, кольца, формы), М., «Наука», 1966).

[2] Бурбаки (N. Bourbaki), Topologie générale, chap. IX, 2e ed., Hermann, Paris, 1958.

[3] Бурбаки (N. Bourbaki), Topologie générale, chap. X, 2e ed., Hermann, Paris, 1961.

[4] Бурбаки (V. Bourbaki), Espaces vectoriels topologiques, chap. I—II, 2e ed., Hermann, Paris, 1955 (есть русский перевод с первого издания: Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959).

[5] Бурбаки (N. Bourbaki), Espaces vectoriels topologiques, chap. III—IV—V, Hermann, Paris, 1955 (есть русский перевод: Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959).

[6] Бурбаки (N. Bourbaki), Intégration, chap. VII—VIII, Hermann, Paris, 1963 (есть русский перевод: Н. Бурбаки, Интегрирование (векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представления), М., «Наука», 1970).

[7] Вейль А. (A. Weil), L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, 2e ed., Hermann, Paris, 1953 (есть русский перевод с первого издания: А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950).

[8] Диксмье (J. Dixmier), Dual et quasi-dual d'une algebre de Banach involutive, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 278—283.

[9] Годман (R. Godement), Sur la théorie des représentations unitaires, Ann. Math. **53** (1951), 68—124.

[10] Макки (G. W. Mackey), Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 134—165.

[11] Риккарт (C. E. Rickart), General theory of Banach algebras, The University series in higher mathematics, D. Van Nostrand, Princeton, 1960.

[12] Секефальви-Надь (B. Sz. Nagy), Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Räumes, Erg. der Math., Springer-Verlag, Berlin, 1942.

[13] Эрве (M. Hervé), Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux dans un ensemble compact convexe métrizable, C. R. Acad. Sc. **253** (1961), 366—368.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Жак Диксмье

C^*-АЛГЕБРЫ
И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

М., 1974 г., 400 стр.

Редактор И. М. Овчинникова

Техн. редактор С. Я. Шкляр

Корректор Л. Н. Боровина

Сдано в набор 28/I 1974 г.
Подписано к печати 5/VIII 1974 г.
Бумага $60\times90^1/_{16}$, тип. № 3. Физ. печ. л. 25.
Условн. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 26,65.
Тираж 7000 экз.
Цена книги 2 р. 08 к. Заказ № 47.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52,
Измайловский пр., 29.

Ж. ДИКСМЬЕ

C^*-алгебры и их представления