П. А. М. ДИРАК

Лекции по квантовой теории поля

Взаимосвязь между гейзенберговской и шредингеровской картинами ◆ Основные понятия квантовой теории ◆ Представление Фока ◆ Вторичное квантование ◆ Модельный гамильтониан ◆ Значение классической теории ◆ Скалярное поле ◆ Электронное поле ◆ Поля со взаимодействием ◆ Связи ◆ Электромагнитное поле без зарядов ◆ Квантовая электродинамика ◆ Решение гейзенберговских уравнений движения ◆ Нормальное упорядочение ◆ Изменение энергии ◆ Регуляризация ◆ Случай отсутствия статических полей ◆ Перенормировка массы ◆ Аномальный магнитный момент ◆ Лэмбовский сдвиг ◆ Кулоновские силы ◆ Общая физическая интерпретация ◆ Взаимосвязь между новой и обычной теориями поля

LECTURES ON QUANTUM FIELD THEORY

by

PAUL A. M. DIRAC

Published by Belfer Graduate School of Science

Yeshiva University,

New York, 1967

П. А. М. ДИРАК

ЛЕКЦИИ
ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ
ПОЛЯ

Перевод с английского
Б. А. ЛЫСОВА

Под редакцией
А. А. СОКОЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1971

УДК 530.1

Редакция литературы по физике

Инд. 2-3-2
40—71

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Выдающийся английский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии П. А. М. Дирак прочел в 1963—1964 учебном году в университете Иешива (Нью-Йорк) курс лекций по квантовой теории поля, которые по существу представляют собой продолжение прочитанных там же и переведенных на русский язык лекций по квантовой механике[1]). В них он предложил новое и совершенно оригинальное построение квантовой теории поля, начиная с самых основ и кончая такими важнейшими физическими приложениями как аномальный магнитный момент электрона и лэмбовский сдвиг атомных уровней. Не менее интересна и содержащаяся в лекциях многосторонняя критика общепринятой трактовки квантовой теории поля, к которой Дирак, несмотря на все ее успехи, всегда относился, как известно, весьма сдержанно.

По мнению Дирака, в основе квантовой теории поля должны лежать гейзенберговские уравнения движения. Гейзенберговская и шредингеровская картины, как считает Дирак, не эквивалентны, более того, шредингеровский вектор состояния, определенный для всех моментов времени, в квантовой теории поля вообще не имеет физического смысла. Дираку действительно удалось показать, что отказ от использования шредингеровской картины избавляет квантовую теорию поля от целого ряда трудностей, связанных с появлением в теории расходящихся выражений.

Такой подход потребовал, однако, кардинального пересмотра интерпретации теории. Состоянию системы

---

[1]) Дирак П. А. М., Лекции по квантовой механике, изд-во «Мир», 1968.

теперь сопоставляется не вектор состояния как обычно, а оператор. Существенное изменение претерпевает и вероятностный смысл коэффициентов разложения по полной системе собственных векторов.

Изложенную в лекциях квантовую теорию поля, конечно, нельзя считать законченной теорией: она не свободна, к сожалению, от трудностей, связанных с расходимостями и, кроме того, не ясно, как можно было бы ввести в эту теорию S-матрицу, играющую столь важную роль в современной физике элементарных частиц. Многие высказанные в лекциях идеи, как считает и сам Дирак, еще нуждаются в дальнейшей разработке.

В процессе чтения данных лекций и, в частности, в ответах на вопросы аудитории Дираку так или иначе пришлось высказаться практически почти по всем важнейшим вопросам современной квантовой теории. Ознакомление со взглядами П. А. М. Дирака на современную квантовую теорию и пути ее дальнейшего развития, безусловно, принесет неоценимую пользу широкому кругу физиков.

Книга будет интересна как тем, кто еще только начинает изучать квантовую теорию поля, так и теоретикам, работающим в этой области долгие годы.

А. А. Соколов

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Представленная здесь квантовая теория поля основывается на гамильтоновом формализме. Результаты теории являются следствиями уравнений движения, а сама теория строится, насколько возможно, по законам логики. Это предполагает значительный отход от общепринятого изложения квантовой теории поля, где логическая стройность выводов приносится в жертву выработке рабочих рецептов и установлению их непротиворечивости, в ходе чего уравнения движения оказываются утерянными.

В физике следует стремиться к построению всеобъемлющей схемы описания природы в целом. Обширную область физики можно успешно описать с помощью уравнений движения. Необходимо, чтобы квантовая теория поля базировалась на таких понятиях и методах, которые можно было бы унифицировать с понятиями и методами остальной физики. Эта необходимость заставляет задуматься над построением квантовой теории поля, основанной на уравнениях движения. Таким образом, общепринятую трактовку квантовой теории поля следует рассматривать в качестве паллиатива без всякого будущего.

Эти лекции читались в течение 1963—1964 учебного года в университете Иешива (Нью-Йорк). Лекции были записаны и обработаны Даниелем Вишнивецким. Он отдал этой работе много сил и времени, за что я ему весьма признателен. Я внес кое-какие изменения, чтобы представить материал в удобной для книги форме.

П. А. М. Дирак

Кембридж, Англия
Август 1966 г.

«Посвящая себя исследовательской работе, нужно стремиться сохранять свободу суждений и ни во что не следует слишком сильно верить; всегда надо быть готовым к тому, что убеждения, которых придерживался в течение долгого времени, могут оказаться ошибочными.»

*

«С точки зрения методики преподавания, я думаю, всегда следовало бы соблюдать постепенность: не ожидать слишком многого от студентов, обучать их сначала элементарным вещам и постепенно развивать их интеллектуальные способности, но такой подход всегда будет включать классическую теорию в качестве отправного пункта.»

П. А. М. ДИРАК

ЛЕКЦИЯ 1

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЙ И ШРЕДИНГЕРОВСКОЙ КАРТИНАМИ

В атомной теории у нас есть поля и есть частицы. Поля и частицы — это не два различных объекта, а два способа описания одного и того же объекта, две различные точки зрения на один и тот же объект. Мы используем тот или другой способ описания, руководствуясь соображениями удобства. Как правило, второй подход более удобен для задач, включающих лишь небольшое число частиц. Он обычно используется в задачах элементарного характера. Когда же приходится иметь дело с большим числом одинаковых частиц, более удобен первый подход, т. е. полевая точка зрения. В общей теории, которая должна быть сформулирована точно, мы сталкиваемся с большим, возможно, даже бесконечным числом частиц, и здесь оказываются пригодными теоретико-полевые концепции. Настоящий курс лекций будет посвящен общей теории, поэтому он будет базироваться главным образом на полевой точке зрения. Я буду предполагать, что вы в какой-то мере знаете основные идеи квантовой теории и что вы знакомы с теорией относительности и максвелловской электродинамикой.

Наша цель — получить единую всеобъемлющую теорию, пригодную для описания всей физики в целом. Теория предположительно должна состоять из некой схемы уравнений и правил приложения и интерпретации этих уравнений. Сами по себе уравнения еще не составляют физической теории. Только тогда, когда они сопровождаются правилами, указывающими как этими уравнениями пользоваться, мы действительно имеем физическую теорию. Уравнения и правила их использования должны быть *самосогласованными* — это важнейшее требование.

Нам нужна единая самосогласованная всеобъемлющая теория. Этой общей теории не должна противоречить любая специальная теория, выдвигаемая в связи с какой-либо частной проблемой. Вряд ли необходимо говорить вам, что такая общая теория еще не создана. Она является той конечной целью, к достижению которой стремятся все физики. В данных лекциях я намереваюсь показать вам, насколько близко можно подойти к этой цели в настоящее время.

Квантовая теория поля — область, которая весьма бурно развивалась в течение последних пятнадцати лет. Развитие началось с открытия лэмбовского сдвига и его теоретического объяснения. Это одно из самых блестящих открытий, если принять во внимание тесное согласие между теорией и экспериментом. На данную тему написано много статей, а теперь имеется целый ряд книг, и тем, кто хочет узнать о новых работах по квантовой теории поля, лучше всего обратиться к помощи какой-либо из книг, вместо того чтобы изучать одну за другой оригинальные статьи.

Такая работа сопряжена, однако, с серьезными трудностями. Имеется целый ряд величин, появляющихся в теории, которые оказываются бесконечными, хотя они должны были бы быть конечными. Чтобы преодолеть эти трудности, физики прибегали к помощи всевозможных трюков, однако в результате теория очутилась в довольно неприятном положении. Отступления от законов логики настолько серьезны, что местами всякие претензии на логическое развитие теории выглядят совершенно безнадежными. В этих лекциях я предлагаю следовать иному пути, позволяющему обойти некоторые из указанных трудностей. Я не в силах преодолеть все трудности, однако я смогу обойти некоторые самые неприятные из них и сумею во всяком случае сохранить хотя бы некоторую видимость логики. Под этим я подразумеваю, что я буду пренебрегать только теми величинами, которые можно, как это физически чувствуется, считать малыми, вместо того чтобы пренебрегать чем-то, что на самом деле является бесконечно большим, как это часто делают в работах такого рода. Я не смогу выполнить намеченную программу со всей строгостью: я не в силах доказать, что величины, которыми я пренебрегаю, действительно малы, тем не менее я надеюсь, у вас возникнет чувство, что они малы.

Система приближений, которой я буду пользоваться, в какой-то мере аналогична тем приближениям, какими пользуются в своих расчетах инженеры. Инженеру нужно получать результаты, а в стоящих перед ним проблемах имеется такое множество факторов, что большинством из них он вынужден пренебречь. У него нет времени подвергать все серьезному изучению, и он вырабатывает своего рода чувство, чем можно пренебрегать и чем нельзя. Я думаю, что физики, работающие в области квантовой теории поля, тоже должны выработать аналогичное чувство в отношении того, чем допустимо и чем не допустимо пренебрегать. Окончательный критерий состоит в том, является ли построенная теория последовательной и находится ли она в разумном согласии с экспериментом.

Такова в общих четрах теория, которую я собираюсь вам изложить, и вначале мне хотелось бы сказать, в каком аспекте форма представленной здесь теории отличается от обычной. В квантовой механике можно пользоваться, как обычно учат, двумя картинами. В гейзенберговской картине работают с гейзенберговскими динамическими переменными, при этом имеют место гейзенберговские уравнения движения:

$$i\hbar \frac{du}{dt} = uH - Hu. \quad (1.1)$$

Гамильтониан H — это величина, представляющая полную энергию системы. В теории Шредингера мы работаем с векторами состояний, которые представляют состояния системы. Иначе говоря, мы имеем вектор состояния, отвечающий некоторому частному состоянию системы и обозначаемый символом $|A\rangle$; этот вектор меняется во времени в соответствии с уравнением

$$i\hbar \frac{d}{dt} | A\rangle = H | A\rangle. \quad (1.2)$$

Гамильтониан H один и тот же в обеих картинах. Существенное различие между двумя картинами состоит в том, что в гейзенберговской картине меняются во времени динамические переменные, а векторы состояний фиксированы, в то время как в шредингеровской картине изменяются векторы состояний, а фиксированы динамические переменные.

Эти две картины связаны следующим образом: всякая шредингеровская динамическая переменная связана с соответствующей гейзенберговской динамической переменной преобразованием

$$u_{\mathrm{S}} = e^{-iHt/\hbar} u_{\mathrm{H}} e^{iHt/\hbar}, \quad (1.3)$$

а векторы состояний — преобразованием

$$| A_{\mathrm{S}}\rangle = e^{-iHt/\hbar} | A_{\mathrm{H}}\rangle. \quad (1.4)$$

Легко проверить, что, если u_{S} — постоянная величина, переменная u_{H}, согласно (1.3), при изменении t меняется в соответствии с уравнением (1.1), а если $|A_{\mathrm{H}}\rangle$ — постоянный вектор, то вектор $|A_{\mathrm{S}}\rangle$, согласно (1.4), при изменении t меняется в соответствии с уравнением (1.2).

Обычно говорят, что равенства (1.3) и (1.4) позволяют установить эквивалентность обеих картин: можно пользоваться любой из них, какой хочешь, без ограничений. Однако эти аргументы имеют силу только в том случае, если выражение

$$e^{iHt/\hbar}$$

существует и, умножая на него один вектор состояния, можно получить другой. Для гамильтонианов, с которыми мы встречаемся в квантовой теории поля, из-за трудностей с расходимостями имеются веские основания считать, что дело обстоит не так, и поэтому эти две картины не эквивалентны.

Причины, в силу которых две картины должны считаться неэквивалентными, видны из тех примеров, для которых можно найти гамильтониан и быть уверенным, что этот гамильтониан правилен. В частности, имеется пример квантовой электродинамики, где рассматриваются электроны и позитроны, взаимодействующие с электромагнитным полем. В данном случае можно построить гамильтониан и быть вполне уверенным в его правильности, так как при использовании этого гамильтониана в гейзенберговских уравнениях движения получаются разумные уравнения поля, причем между ними и классическими уравнениями поля легко провести тесную аналогию — полученные уравнения являются релятивистскими и выглядят удовлетворительно с любой иной точки зрения. Когда же, с другой стороны, этот гамильтониан используется в шредингеровской картине, получается уравнение Шредингера, которое не имеет решений (во всяком случае решений, представляющих ценность с физической точки зрения). В течение многих лет, даже десятилетий, предпринимались настойчивые попытки получить эти решения, однако все оказалось напрасным, и теперь, по-видимому, можно почти не сомневаться, что решений не существует. Как бы то ни было, если они даже и существуют, то для нас эти решения бесполезны, так как мы не в состоянии их найти.

Во всяком случае можно было бы ожидать, что имеется тривиальное решение, соответствующее такому физическому состоянию, в котором отсутствуют и поля и частицы, т. е. полному вакууму. Физически вакуум — вполне тривиальная вещь, и мы могли бы рассчитывать, что он соответствует тривиальному решению уравнения Шредингера, однако не существует даже и тривиального решения. Все это заставляет думать, *что картина Гейзенберга хорошая картина, а картина Шредингера плохая и что обе картины неэквивалентны.*

Можно считать, что с формальной точки зрения выражение

$$e^{-iHt/\hbar}$$

существует, и умножить его на постоянный вектор состояния $|A\rangle$. Тогда произведение

$$e^{-iHt/\hbar}|A\rangle$$

будет удовлетворять уравнению Шредингера (1.2). Шредингеровская волновая функция состоит из координат вектора $e^{-iHt/\hbar}|A\rangle$. Несуществование шредингеровской волновой функции скорее можно приписать тому, что вектор $e^{-iHt/\hbar}|A\rangle$ не имеет координат, чем тому, что он не существует. Он принадлежит пространству слишком большой размерности, чтобы иметь координаты.

Обычно предполагается, что векторы состояний суть векторы в гильбертовом пространстве, — в этом случае они должны обладать координатами. Здесь я должен оговориться: термин *гильбертово пространство* употребляется мною в том смысле, в котором он первоначально употреблялся самим Гильбертом — в смысле пространства бесконечной размерности, но все еще сепарабельного, т. е. такого пространства, которое можно натянуть на счетное множество векторов. Сегодня математики употребляют термин *гильбертово пространство* в более общем смысле, распространяя его и на несепарабельные пространства; однако, когда я, где бы то ни было, буду упоминать гильбертово пространство, под ним следует понимать сепарабельное гильбертово пространство. Векторы в таком сепарабельном гильбертовом пространстве можно представить с помощью координат.

Это приводит нас к заключению, что в квантовой теории поля векторы состояний не принадлежат гильбертову пространству. Мы можем начать с определенного вектора состояния в гильбертовом пространстве в какой-то определенный момент времени. Предположим, что мы заставим вектор изменяться во времени в соответствии с уравнением Шредингера; что с этим вектором тогда произойдет? Грубо говоря, он будет выбит из гильбертова пространства за наименьший возможный интервал времени. Взаимодействия, которые физически существенны в квантовой теории поля, столь сильны, что любой шредингеровский вектор состояния будет выбит из гильбертова пространства за наименьший возможный промежуток времени. Таким образом, невозможно получить решение уравнения Шредингера, для которого вектор состояния остается в гильбертовом пространстве. Поэтому шредингеровская картина неработоспособна.

Гейзенберговская картина хороша потому, что гейзенберговские уравнения движения разумны. Они не вполне свободны от трудностей. Я не утверждаю, что, используя, к примеру, гейзенберговские уравнения в квантовой электродинамике, мы не столкнемся ни с какими затруднениями вообще, однако мы не встретим таких глубоких затруднений, с которыми нам пришлось бы столкнуться, если бы мы всецело основывались на уравнении, не имеющем никаких решений.

Перед нами, таким образом, стоит проблема построить квантовую теорию поля, работая исключительно в рамках картины Гейзенберга. Именно это я и попытаюсь сделать в настоящих лекциях. Мы можем взять существующую теорию так, как она, например, дана в учебниках, и затем выбросить из нее все ссылки на картину Шредингера и посмотреть, можем ли мы обойтись без них. Это то, что я просил бы вас сделать, если вы вообще собираетесь прибегать к помощи учебников. Как только вы видите ссылку на картину Шредингера, сейчас же выбросьте ее вон. При этом вы обнаружите, что без этих ссылок зачастую можно довольно хорошо обойтись и в результате такого выбрасывания вся теория становится более логичной и более вразумительной. Я сказал бы, что таким образом из обычной трактовки квантовой теории поля удаляется значительная часть хлама. То, что при этом остается, относится исключительно к гейзенберговской картине и составляет существо теории, и на нем нам следует сосредоточить наше внимание.

Теперь мы должны произвести ревизию обычной квантовой теории и посмотреть, что в ней при такой постановке вопроса уцелеет. Если мы будем рассматривать только соотношения, относящиеся к определенному моменту времени, то увидим, что как раз в этом случае уцелеет почти все. Для некоторого определенного момента времени t_0 мы имеем динамические переменные $\alpha(t_0)$. Эти гейзенберговские динамические переменные действуют справа на некоторые векторы, мы их будем называть *кет-векторы*. Ситуация, имеющая место для одного определенного момента времени, по существу одна и та же, рассуждаем ли мы в рамках картины Гейзенберга или же в рамках картины Шредингера. Различие между гейзенберговской и шредингеровской картинами начинает сказываться только тогда, когда мы изменяем t_0. Поэтому всю обычную квантовую теорию до тех пор, пока она касается соотношений между динамическими переменными и кет-векторами в один определенный момент времени, можно взять и сохранить при новой формулировке.

Для определенного момента времени мы имеем кет-векторы и можем представить, что они соответствуют в этот момент времени физическим состояниям, поэтому мы сохраним понятие физического состояния в определенный момент времени. У нас нет понятия физического состояния для всех времен. Последнее понятие, лежащее в основе шредингеровской картины, не появится в настоящей формулировке. В нашем распоряжении имеется только значительно менее обязывающее понятие физического состояния в определенный момент времени. Это понятие нерелятивистское и весьма специальное, относящееся к одной определенной лоренцевой системе отсчета. Шредингеровское понятие состояния для всех моментов времени, если бы оно имело смысл, было бы релятивистским понятием, и, следовательно, его можно было бы рассматривать как нечто фундаментальное по своей природе. Оно, однако, не имеет смысла, и все, чем мы располагаем в настоящей формулировке, — это физическое состояние в определенный момент времени, понятие нерелятивистское, весьма специальное, но полезное в вычислениях.

Мы можем сохранить обычные в квантовой теории соотношения между динамическими переменными и кет-векторами, когда ограничиваемся одним определенным моментом времени t_0. Возьмем, например, уравнение

$$\alpha(t_0)|A\rangle = a|A\rangle,$$

где a — некоторое число. Если мы имеем такое уравнение, то мы можем сказать, что кет-вектор $|A\rangle$ представляет состояние в момент времени t_0, для которого динамическая переменная α в момент времени t_0 с достоверностью имеет значение a. Обычная теория собственных значений и собственных векторов, а также их физическая интерпретация остаются в силе при условии, что мы ограничиваемся одним моментом времени.

Однако в одном отношении настоящая формулировка отличается от обычной даже в том случае, когда мы имеем дело с одним моментом времени: множество кет-векторов, на которые в данный момент времени действуют наши динамические переменные, не образуют гильбертова пространства.

В шредингеровской картине мы не можем получить в качестве решений кет-векторы, остающиеся в гильбертовом пространстве, соответственно в гейзенберговской картине мы не можем получить таких решений, для которых наши динамические переменные действуют только на кет-векторы гильбертова пространства. Мы должны вообразить, что динамические переменные гейзенберговской картины действуют на векторы некоторого пространства, которое больше, нежели гильбертово пространство. Я не знаю, какова математическая природа более общего пространства, — это в настоящее время лучше не уточнять, чем делать предположения, могущие в дальнейшем оказаться малопригодными для физических целей. Я полагаю, что математики будут строить всевозможные предположения о природе этого пространства, однако они вполне могут сделать ошибочное предположение, как они уже сделали ошибочное предположение, думая, что гильбертово пространство адекватно физическим целям. Лучше сконцентрировать внимание на физике и попытаться построить такую физическую теорию, которой с успехом можно будет пользоваться в приложениях.

Вопрос. Обязано ли возникновение трудности всецело тому, что имеется бесконечное число степеней свободы? Является ли это единственной причиной?

Ответ. Я не сказал бы, что это является единственной причиной. Вы вполне могли бы иметь бесконечное число степеней свободы и достаточно слабое взаимодействие между ними для того, чтобы существовали решения уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве. Эта ситуация была бы возможна, однако ваимодействия такого рода — не те взаимодействия, которые встречаются в природе. Что касается тех взаимодействий, которые встречаются в природе, то для них, когда мы пытаемся строить решения обычным путем с помощью теории возмущений, мы получаем интегралы, которые не сходятся. Мы могли бы построить нерелятивистскую теорию со взаимодействием иного вида, для которого интегралы действительно сходились бы, введя, например, какое-нибудь обрезание, или же такое взаимодействие, которое не столь велико при высоких частотах. Математически это было бы приемлемо, если не настаивать на релятивистской инвариантности, и привело бы к уравнению Шредингера, которое вы могли бы решить, несмотря на то, что имеется бесконечное число степеней свободы и взаимодействие между ними. Поэтому простого факта, что у вас имеется бесконечное число степеней свободы со взаимодействием между ними, еще недостаточно, чтобы отбросить картину Шредингера. Она отбрасывается из-за того, что взаимодействия, в которых заинтересованы физики, столь интенсивны при высоких частотах, и, по-видимому, нельзя получить взаимодействий, удовлетворяющих требованиям теории относительности, которые при этом не были бы столь интенсивны при высоких частотах.

Я, пожалуй, соглашусь, что в будущем физики окажутся в состоянии придумать иной гамильтониан, для которого взаимодействие не будет столь интенсивным при высоких частотах, и тогда картина Шредингера вернется на свое место. Это вполне возможно. Теорию, которую я теперь вам представляю, я не считаю окончательной теорией. Я только хочу сказать, что для того рода гамильтонианов, с которыми мы работаем в настоящее время и которые с успехом позволяют получить такие результаты как лэмбовский сдвиг и аномальный магнитный момент, картиной Шредингера пользоваться нельзя. Работая с такими гамильтонианами, лучше отбросить всякие попытки использовать картину Шредингера. Наилучшая квантовая теория поля, которую можно сформулировать в настоящее время, это теория, которая целиком работает в рамках картины Гейзенберга, однако нельзя быть уверенным, что когда-нибудь в будущем люди не придумают нового гамильтониана, для которого картина Шредингера *заработает*.

Посвящая себя исследовательской работе, нужно стремиться сохранять свободу суждений и ни во что не следует слишком сильно верить; всегда надо быть готовым к тому, что убеждения, которых придерживался в течение долгого времени, могут оказаться ошибочными. Поэтому я прошу вас понять, что излагаемое мною, как я верю, является лучшим из того, что можно сформулировать в настоящее время, однако я не хочу настаивать, что все это уцелеет в течение длительного времени. Я не хочу настаивать, что шредингеровская картина не вернется назад; на самом деле у нее имеется масса привлекательных особенностей, и в глубине души я чувствую, что она должна возвратиться. Я действительно крайне неохотно отказываюсь от нее. Вот почему потребовалось так много лет, чтобы прийти к мысли, что от нее нужно отказаться. И все же необходимо прямо смотреть фактам в лицо, а они в настоящее время вынуждают нас отказаться от использования картины Шредингера.

ЛЕКЦИЯ 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ. СЛУЧАЙ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В квантовой теории наши динамические переменные представляют собой величины, подчиняющиеся некоммутативной алгебре. Мы принимаем в качестве основного предположения, что переменные квантовой теории, соответствующие классическим гамильтоновым переменным q_r и p_r, удовлетворяют в каждый момент времени коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} q_r q_s - q_s q_r &= 0, \\ p_r p_s - p_s p_r &= 0, \\ q_r p_s - p_s q_r &= i\hbar\delta_{rs}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Определим квантовые скобки Пуассона двух любых величин u и v:

$$i\hbar\,[u,\ v] = uv - vu. \tag{2.2}$$

При таком определении из соотношений (2.1) видно, что в том случае, когда в качестве u и v берутся любые две из величин q_r, p_s, квантовые скобки Пуассона имеют то же самое значение, что и классические скобки Пуассона.

Мы видим далее, что при таком определении законы, справедливые для классических скобок Пуассона, имеют силу также и для квантовых скобок Пуассона. В квантовой теории, так же как в классической теории, мы имеем законы:

$$\begin{aligned} [u,\ v] &= -[v,\ u], \\ [u_1 + u_2,\ v] &= [u_1,\ v] + [u_2,\ v], \\ [u_1 u_2,\ v] &= u_1 [u_2,\ v] + [u_1,\ v]\, u_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В последнем равенстве необходимо соблюдать осторожность в отношении порядка величин u_1 и u_2: всюду в этом равенстве u_1 должно находиться левее u_2. Наконец, у нас есть тождество Якоби

$$[u, [v, w]]+[v, [w, u]]+[w, [u, v]]=0. \qquad (2.4)$$

Теперь, естественно, встает вопрос: какова математическая природа динамических переменных квантовой теории? В простейших случаях их можно рассматривать как матрицы. И действительно, в первоначальной квантовой механике Гейзенберга они представляли собой просто-напросто матрицы. Обычно это матрицы с бесконечным числом строк и столбцов. Точнее говоря, каждую величину u можно представить в виде двумерной таблицы чисел, где число строк и столбцов бесконечно и между строками и столбцами имеется одно-однозначное соответствие. Подобные матрицы можно складывать и перемножать в соответствии со стандартными правилами матричной алгебры, кроме того, матрицы некоммутативны, поэтому их можно уложить в схему соотношений (2.1).

Далее, если мы будем смотреть на наши динамические переменные как на матрицы, их допустимо умножать на матрицу-столбец, т. е. на матрицу, состоящую из единственного столбца, помещая ее справа от квадратной матрицы. Матрицу-столбец, разумеется, можно рассматривать в качестве вектора: она представляет собой набор чисел, и мы можем смотреть на эти числа как на координаты вектора в некотором векторном пространстве. У матриц-столбцов, важных в физическом отношении, сумма квадратов модулей всех элементов конечна, и она соответствует вектору в гильбертовом пространстве. В таком случае динамические переменные — это операторы в гильбертовом пространстве. Каждую из них можно умножить на один из векторов, и в результате, согласно принципу линейности, мы получим другой вектор.

Мне хотелось бы напомнить вам, что термин «гильбертово пространство» я всегда буду употреблять для обозначения пространства, в котором векторы можно представить, как и выше, с помощью координат. Используя термин «гильбертово пространство» в этом смысле, мы видим, что в простейших случаях на динамические переменные квантовой теории можно смотреть как на операторы в гильбертовом пространстве.

Имеется и иной способ рассмотрения динамических переменных в качестве операторов в гильбертовом пространстве. Мы можем взять матрицу-строку и умножить ее, согласно правилам матричного умножения, слева на квадратную матрицу; в результате получим другую матрицу-строку. Элементы матрицы-строки также можно рассматривать в качестве координат вектора в гильбертовом пространстве. В таком случае оказывается, что наши динамические переменные действуют слева на векторы гильбертова пространства и в результате дают другие векторы этого пространства. Мы имеем два гильбертовых пространства: одно с координатами векторов, являющимися элементами матриц-строк, другое с координатами векторов, являющимися элементами матриц-столбцов, а наши динамические переменные могут действовать слева на гильбертовы векторы первого рода и справа на гильбертовы векторы второго рода.

Удобно пользоваться следующими обозначениями. Векторы, стоящие справа, называются *кет*-векторами, я буду записывать их как $|A\rangle$ (буква A взята для примера); векторы, стоящие слева, называются *бра*-векторами, и я буду записывать их в виде $\langle B|$, т. е. в виде своего рода зеркального изображения кет-векторов. Причина, по которой эти обозначения удобны, состоит в том, что мы можем умножить вектор-строку на вектор-столбец и получить в результате просто число $\langle B|A\rangle$, а это, как вы видите, есть полное скобочное выражение. Бра-вектор — это одна половина полного скобочного выражения, кет-вектор — другая, а будучи умножены друг на друга, они дают число[1]).

[1]) Эта терминология ведет свое происхождение от английского слова bracket (скобка). И хотя в русском переводе смысл

Если операция умножения кет-векторов, бра-векторов и динамических переменных ассоциативна, можно образовывать величины наподобие выражения $\langle B|u|A\rangle$. Мы будем предполагать, что для величин, появляющихся в квантовой теории, умножение ассоциативно. Математически это не всегда верно. Можно построить примеры матриц, для которых ассоциативность умножения не имеет места, однако в физическом отношении эти примеры до сих пор не оказывались сколько-нибудь существенными, и с точки зрения физики можно не без успеха предположить, что умножение обладает свойством ассоциативности.

Чтобы ввести в гильбертовом пространстве координаты в общем случае, можно рассмотреть совокупность базисных кет-векторов $|r\rangle$, $r = 1, 2, \ldots, \infty$ и сопряженных им бра-векторов $\langle r|$, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Совокупность базисных кет-векторов полна: любой кет-вектор $|P\rangle$ можно записать в виде

$$|P\rangle = \sum_r P_r |r\rangle.$$

2. Базисные кет-векторы ортонормированы, т. е.

$$\langle r|s\rangle = \delta_{rs}.$$

3. Базисные кет-векторы независимы, иначе говоря, они не связаны линейным соотношением.

4. Имеет место условие замкнутости

$$\sum_r |r\rangle\langle r| = 1.$$

Можно предположить, что выполняются условия 1 и 2, и вывести условия 3 и 4, или альтернативно предположить справедливость условий 3, 4 и вывести условия 1 и 2.

этой терминологии утрачивается, мы будем пользоваться терминами Дирака: «кет-вектор» и «бра-вектор». В литературе используются также термины «вектор состояния» или просто «вектор» вместо «кет-вектора» и термины «со-вектор состояния» или просто «со-вектор» вместо «бра-вектора». — *Прим. перев.*

В гильбертовом пространстве базисные кет-векторы, удовлетворяющие условиям 1—4, обеспечивают нам систему координат. Всякий кет-вектор $|P\rangle$ имеет координаты $\langle r|P\rangle$, всякий бра-вектор $\langle Q|$ — координаты $\langle Q|r\rangle$ и всякая динамическая переменная α — координаты $\langle r|\alpha|s\rangle$, образующие квадратную матрицу. Из условия 4 мы выводим правило матричного умножения

$$\langle r|\alpha\beta|s\rangle = \sum_t \langle r|\alpha|t\rangle\langle t|\beta|s\rangle.$$

Некоторые динамические переменные можно представить в виде диагональных матриц:

$$\langle r|v|s\rangle = f(r)\,\delta_{rs}.$$

Может существовать несколько таких v, и все они коммутируют между собой.

В конкретных физических задачах мы ищем полный набор коммутирующих наблюдаемых, которые нам желательно представить диагональными матрицами. Затем мы берем их общие собственные кет-векторы в качестве базисных кет-векторов:

$$|v'\rangle = |v_1', v_2', \ldots\rangle,$$

где $|v_r'\rangle$ — собственный кет-вектор переменной v_r, принадлежащий собственному значению v_r'.

Мы можем ввести второй полный набор $w_1, w_2, \ldots$ коммутирующих наблюдаемых w и соответствующий набор базисных кет-векторов $|w'\rangle$. В двух системах координат кет-вектор $|P\rangle$ будет иметь координаты $\langle v'|P\rangle$ и $\langle w'|P\rangle$. Они связаны соотношением

$$\langle v'|P\rangle = \sum_{w'} \langle v'|w'\rangle\langle w'|P\rangle.$$

Приведенные выше рассуждения относятся к гильбертову пространству и применимы лишь в простейших случаях. Возникает вопрос: что же такое простейшие случаи? По-видимому, всякую динамическую систему с конечным числом степеней свободы, или же задачу, где лишь конечное число степеней свободы играет существенную роль, можно трактовать указанным способом. На динамические переменные квантовой теории можно тогда смотреть как на матрицы или как на операторы, действующие на векторы гильбертова пространства.

Однако для квантовой теории поля это не слишком годится. В квантовой теории поля в игру вступает бесконечное число степеней свободы, и тогда, по-видимому, в общем случае наши динамические переменные нельзя рассматривать в качестве матриц или операторов в гильбертовом пространстве. В квантовой теории поля была проделана огромная работа в предположении, что даже и здесь динамические переменные — это операторы в гильбертовом пространстве. В результате возник целый ряд затруднений, большинство из которых можно обойти, не делая этого предположения.

ЛЕКЦИЯ 3

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

В общем случае возникает вопрос: какова математическая природа динамических переменных? Можно было бы считать, что динамические переменные — это просто операторы в более общем гильбертовом пространстве, над теорией которого работают теперь математики, однако я не уверен, что дело обстоит именно так. Я думаю, что на этот счет лучше не иметь никаких предвзятых идей, в противном случае можно впасть в заблуждение, подобно тем людям, которые долгое время были введены в заблуждение предположением, что динамические переменные — это всегда операторы в гильбертовом пространстве. В настоящее время лучше оставить открытым вопрос об этих динамических переменных и называть их просто *q-числами.*

Разумеется, q-числа — это просто название. Обычные числа, когда мы желаем отличать их от этих динамических переменных, можно было бы называть *с-числами.* Причина использования букв q и c заключается в том, что буква q могла бы заставить вас думать о чем-то квантовом, о чем-то странном, а буква c — о чем-то классическом, о чем-то коммутативном [1]).

Существенным различием между c-числами и q-числами является то, что c-числа коммутируют со всеми c-числами, а q-число, вообще говоря, не коммутирует с другим q-числом.

---

[1]) Чтобы понять смысл этого замечания Дирака, надо принять во внимание, что q и c — это начальные буквы слов quantum, queer и classical, commuting. — *Прим. перев.*

Эти q-числа удовлетворяют следующим алгебраическим аксиомам: обычным аксиомам сложения, аксиоме о дистрибутивности умножения

$$u(v_1 + v_2) = uv_1 + uv_2$$

и аксиоме об ассоциативности умножения

$$u(vw) = (uv)w.$$

С данными аксиомами мы можем установить для квантовых скобок Пуассона законы (2.3) и (2.4), аналогичные законам для классических скобок Пуассона. Однако коммутативность умножения уже не имеет места, и если произведение wv равно нулю, то отсюда не следует, что какой-либо из сомножителей равен нулю. Действительно, такая же ситуация возникает и в случае матриц. Произведение двух матриц может равняться нулю, и при этом вполне может быть, что ни один из сомножителей не равен нулю. Именно в связи с указанными алгебраическими аксиомами нами как раз и используются q-числа; квантовомеханические вычисления — это те вычисления, с помощью которых выводятся следствия из основных соотношений (2.1) с использованием некоммутативной алгебры.

Когда речь заходит о предельных переходах, мы не можем действовать с должной математической строгостью. Разумеется, невозможно добиться математической строгости, не зная истинной математической природы величин, с которыми приходится иметь дело. Мы постоянно будем употреблять q-числа в интегралах и при дифференцировании и будем делать разного рода предположения, разумные, по-видимому, с физической точки зрения, о тех пределах, которыми нам придется пользоваться, однако мы не сможем осуществить развитие теории с математической строгостью.

Мы приступим к построению теории q-чисел, делая по мере надобности такие предположения, которые выглядят разумно. Первое, что нам нужно, — это какой-нибудь критерий действительности. В классической теории у нас имеется ясное различие между действительными и комплексными динамическими переменными, содержащими квадратный корень из минус единицы, и в квантовой теории мы нуждаемся в соответствующем ясном различии между действительными и комплексными динамическими переменными. Мы предположим, что переменные q и p, с которых мы начинали построение квантовой теории, — это действительные q-числа. В классической теории у нас имеется общее правило: скобки Пуассона двух действительных величин — величина действительная. И в квантовой теории мы сделаем соответствующее предположение: если величины u и v действительные, то и их скобки Пуассона — также величина действительная. Отсюда следует, что разность $uv - vu$ равна чисто мнимому q-числу, за исключением того случая, когда она исчезает, и мы можем заключить, что оба произведения uv и vu не могут быть действительными, кроме, возможно, того случая, когда u и v коммутируют.

Чтобы сохранить симметрию между двумя произведениями uv и vu, я намерен сделать предположение, что сумма $uv + vu$ — действительная величина, если u и v — действительные величины. Можно проверить, что это предположение не приводит к противоречиям: действительно, хорошо известно, что оно не ведет к противоречиям в том случае, когда q-числа можно представить в виде матриц.

Величина, сопряженная произведению uv (давайте запишем ее в виде $\overline{uv}$), равна

$$\begin{aligned}\overline{uv} &= \tfrac{1}{2}\overline{(uv + vu)} + \tfrac{1}{2}\overline{(uv - vu)} = \\ &= \tfrac{1}{2}(uv + vu) - \tfrac{1}{2}(uv - vu) = \\ &= vu.\end{aligned}$$

Теперь мы можем работать с комплексными q-числами. Положим

$$\xi = u_1 + iu_2, \qquad \eta = v_1 + iv_2,$$

где u_1, u_2, v_1, v_2 — действительные величины. Тогда величина, комплексно сопряженная произведению $\xi\eta$, равна

$$\overline{\xi\eta} = \overline{(u_1 + iu_2)(v_1 + iv_2)} =$$
$$= v_1u_1 - v_2u_2 - iv_2u_1 - iv_1u_2 =$$
$$= (v_1 - iv_2)(u_1 - iu_2) = \bar{\eta}\bar{\xi}.$$

Таким образом, чтобы взять комплексное сопряжение от произведения, вы берете комплексное сопряжение от каждого сомножителя и меняете их порядок на обратный. Видно, что правило распространяется и на произведение большего числа сомножителей:

$$\overline{\xi\eta\zeta} = \bar{\zeta}\bar{\eta}\bar{\xi} \quad \text{и т. д.}$$

Теперь в нашем распоряжении имеется критерий действительности q-чисел, и для любого из них мы можем сказать, является ли оно действительным, или же сказать, каковы его действительная и мнимая части.

Мы будем считать, что q-число u можно умножить справа на *кет-вектор* $|A\rangle$, в результате получим кет-вектор $u|A\rangle$, и что q-число u можно умножить слева на *бра-вектор* $\langle B|$, и это даст бра-вектор $\langle B|u$. Кет-вектор $|A\rangle$ и бра-вектор $\langle B|$ можно перемножить, располагая бра-вектор слева, в результате получим число $\langle B|A\rangle$.

Теперь уже больше нельзя вводить координаты для кет- и бра-векторов. Если мы попытаемся ввести базисные кет- и бра-векторы в соответствии со схемой в предыдущей лекции, то обнаружим, что нельзя удовлетворить условиям 1 и 4, потому что число размерностей слишком велико. Мы будем развивать теорию, делая подходящие предположения относительно кет- и бра-векторов, так чтобы наши построения как можно теснее были увязаны с ситуацией в случае гильбертова пространства.

В случае гильбертова пространства у каждого кет-вектора $|A\rangle$ с координатами A_r имеется сопряженный ему бра-вектор, координатами которого служат комплексно сопряженные числа $\bar{A}_r$. Для этого бра-вектора используется та же буква A, и поэтому он записывается в виде $\langle A|$. Справедливы следующие общие соотношения:

$$\langle B | A\rangle = \overline{\langle A | B\rangle}, \qquad \langle A | A\rangle > 0. \tag{3.1}$$

Мы намерены предположить, что и в том случае, когда векторы не принадлежат гильбертову пространству и их нельзя представить с помощью координат, у всякого кет-вектора $|A\rangle$ все еще имеется сопряженный ему бра-вектор $\langle A|$ и все еще справедливы соотношения (3.1).

Кроме того, мы предположим, что умножение q-чисел, кет- и бра-векторов обладает свойствами дистрибутивности и ассоциативности и что для всякого произведения q-чисел, кет- и бра-векторов сопряженное произведение получается путем обращения порядка всех сомножителей с заменой каждого из них на сопряженный.

Допустим, мы берем какое-нибудь q-число U и обратное ему q-число V. По определению, V является обратным к U тогда и только тогда, когда

$$UV = 1 \qquad \text{и} \qquad VU = 1.$$

В некоммутативной алгебре оба соотношения необходимы. Если мы имеем лишь одно соотношение $UV = 1$, то отсюда можно вывести, что

$$UVU = U \qquad \text{или} \qquad U(VU - 1) = 0,$$

поэтому либо $VU = 1$, либо существует $\xi \neq 0$, такое, что $U\xi = 0$. То, что произведение двух q-чисел равно нулю, хотя ни один из сомножителей не равен нулю, вещь вполне допустимая.

Предположим, что V обратно U, тогда мы будем писать $V = U^{-1}$. Всякое q-число α можно подвергнуть преобразованию подобия

$$\alpha^* = U\alpha U^{-1}.$$

Легко видеть, что это преобразование сохраняет алгебраические соотношения между q-числами, но нет необходимости, чтобы оно сохраняло соотношения действительности. Желательно наложить на U дальнейшие ограничения, так чтобы преобразование подобия сохраняло соотношения действительности, а именно, чтобы α^* было действительным q-числом, когда α — действительное q-число.

Предположим, что из равенства $\alpha = \bar{\alpha}$ вытекает $\alpha^* = \bar{\alpha}^*$. Тогда

$$U\alpha U^{-1} = \alpha^* = \bar{\alpha}^* = \overline{U\alpha U^{-1}} = \overline{U^{-1}}\alpha\bar{U}.$$

Теперь

$$\overline{U^{-1}} = \bar{U}^{-1},$$

поэтому

$$U\alpha U^{-1} = \bar{U}^{-1}\alpha\bar{U},$$

или

$$\bar{U}U\alpha = \alpha\bar{U}U.$$

В результате мы находим, что произведение $\bar{U}U$ коммутирует с каждым q-числом, поскольку всякое q-число α можно представить в виде

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2,$$

где и α_1 и α_2 — действительные q-числа, а $\bar{U}U$ должно коммутировать с каждым из них. В качестве q-числа, которое коммутирует со всеми наблюдаемыми, можно взять обычное c-число, поэтому $\bar{U}U = k$ есть c-число. Это действительное c-число, так как $\overline{\bar{U}U} = \bar{U}U$. Более того, оно положительно, поскольку для любого кет-вектора $|A\rangle$ можно образовать новый кет-вектор $U|A\rangle$, а затем образовать произведение $\langle A|\bar{U}U|A\rangle$, которое можно рассматривать как скалярное произведение кет-вектора $U|A\rangle$ на сопряженный ему бра-вектор, поэтому

$$\langle A|\bar{U}U|A\rangle = k\langle A|A\rangle > 0,$$

и так как $\langle A|A\rangle > 0$, то должно быть $k > 0$.

Положим теперь

$$U' = k^{-1/2}U,$$

тогда

$$\bar{U}'U' = 1.$$

Такое U' называют *унитарным q-числом*, а преобразование

$$\alpha^* = U'\alpha U'^{-1}$$

— *унитарным преобразованием.*

Давайте рассмотрим теперь инфинитезимальное унитарное преобразование, определяемое равенством

$$U' = 1 + \varepsilon A,$$

где ε — бесконечно малое действительное c-число. Тогда для обратного преобразования имеем

$$U'^{-1} = 1 - \varepsilon A,$$

и для любого q-числа α найдем

$$\begin{aligned} \alpha^* &= (1 + \varepsilon A)\,\alpha\,(1 - \varepsilon A) = \\ &= \alpha + \varepsilon(A\alpha - \alpha A) = \\ &= \alpha - i\hbar\varepsilon[\alpha, A]. \end{aligned}$$

Условие унитарности имеет вид

$$1 = \overline{U}'U' = (1 + \varepsilon\overline{A})(1 + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon(\overline{A} + A),$$

поэтому

$$\overline{A} + A = 0,$$

и мы можем положить

$$A = iB,$$

где B — действительное q-число. Тогда результат действия на α инфинитезимального унитарного преобразования можно записать в виде

$$\alpha^* - \alpha = \hbar\varepsilon[\alpha, B].$$

Теперь, если мы вернемся к гейзенберговским уравнениям движения, то увидим, что связь между динамической переменной, взятой в момент времени t, и динамической переменной, взятой в момент времени $t + \delta t$, имеет как раз такую же природу. Для малых δt имеем

$$g_{t+\delta t} - g_t = \delta t\,[g, H].$$

В классической механике эта связь представляет собой инфинитезимальное контактное преобразование. В квантовой теории контактным преобразованиям классической механики соответствуют унитарные преобразования.

Если предположить, что для малых δt

$$e^{iH\,\delta t/\hbar} = 1 + \frac{iH\,\delta t}{\hbar},$$

то $g_{t+\delta t}$ можно записать другим способом:

$$g_{t+\delta t} = e^{iH\,\delta t/\hbar} g_t e^{-iH\,\delta t/\hbar}.$$

Мы можем теперь проинтегрировать это выражение, чтобы получить связь между динамическими переменными в два момента времени, заметным образом различающихся:

$$g_{t_2} = e^{iH\,(t_2-t_1)/\hbar} g_{t_1} e^{-iH\,(t_2-t_1)/\hbar}.$$

Можно чисто формально доказать правильность этой формулы. Однако она мало полезна в общем случае, так как трудно придать смысл фигурирующим в ней экспонентам. Можно было бы попытаться определить их с помощью степенного ряда, но нам даже неизвестно, сходится этот ряд или нет, так как в общем случае у нас нет определения сходимости q-чисел. Практически, чтобы получить корреляцию между g_{t_2} и g_{t_1}, нужно проинтегрировать гейзенберговские уравнения движения.

В рассматриваемом общем случае мы не можем определить кет-вектор его координатами, но мы можем определить кет-вектор $|S\rangle$, подчиняя его подходящим линейным соотношениям, скажем, таким, как

$$\xi_1 | S\rangle = 0, \quad \xi_2 | S\rangle = 0, \quad \ldots, \quad \xi_r | S\rangle = 0,$$

где ξ с индексами — это q-числа, не обязательно действительные. Кроме того, указанные соотношения не обязаны быть независимыми. Из них следует

$$(\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_1) | S\rangle = 0,$$

или

$$(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_1) | S\rangle = 0.$$

Эти соотношения можно рассматривать в качестве условий непротиворечивости.

ЛЕКЦИЯ 4

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА

Предположим, что у нас имеется гармонический осциллятор с энергией

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$$

Введем комплексные q-числа

$$\eta = (2\hbar)^{-1/2}(p + iq), \qquad \bar{\eta} = (2\hbar)^{-1/2}(p - iq). \tag{4.1}$$

Используя обычное соотношение

$$qp - pq = i\hbar,$$

находим

$$\bar{\eta}\eta - \eta\bar{\eta} = 1.$$

Для любого целого положительного n по индукции имеем

$$\bar{\eta}\eta^n - \eta^n\bar{\eta} = n\eta^{n-1},$$

поэтому переменная $\bar{\eta}$ подобна оператору $\partial/\partial\eta$.

Также имеем

$$2\hbar\eta\bar{\eta} = (p + iq)(p - iq) = p^2 + q^2 - \hbar = 2H - \hbar,$$

$$\left(\frac{H}{\hbar} - \frac{1}{2}\right)\eta = (\eta\bar{\eta})\eta = \eta(\bar{\eta}\eta) = \eta\left(\frac{H}{\hbar} + \frac{1}{2}\right),$$

или

$$H\eta = \eta(H + \hbar).$$

Отсюда можно получить как следствие

$$H\eta^n = \eta(H + \hbar)\eta^{n-1} = \ldots = \eta^n(H + n\hbar).$$

Предположим теперь, что имеется такой кет-вектор $|S\rangle$, для которого

$$\bar{\eta}\,|\,S\rangle = 0. \tag{4.2}$$

Тогда

$$H\,|\,S\rangle = \left(\eta\bar{\eta} + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\,|\,S\rangle = \tfrac{1}{2}\,\hbar\,|\,S\rangle,$$

и $|S\rangle$ — собственный кет-вектор H, принадлежащий собственному значению $\frac{1}{2}\hbar$. Аналогично

$$H\eta\,|\,S\rangle = \eta\,(H + \hbar)\,|\,S\rangle = \tfrac{3}{2}\,\hbar\eta\,|\,S\rangle,$$

$$\vdots$$

$$H\eta^n\,|\,S\rangle = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\eta^n\,|\,S\rangle.$$

Таким образом, кет-векторы $\eta^n|S\rangle$ — это собственные кет-векторы H, принадлежащие собственным значениям $(n + {}^1\!/_2)\hbar$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Можно легко убедиться, что в том случае, когда q и p — единственные динамические переменные, существует не более одного кет-вектора, удовлетворяющего условию (4.2). Для доказательства этого утверждения предположим, что имеется два таких кет-вектора $|S_1\rangle$ и $|S_2\rangle$, для которых

$$\bar{\eta}\,|\,S_1\rangle = 0 \qquad \text{и} \qquad \bar{\eta}\,|\,S_2\rangle = 0,$$

и, кроме того, предположим, что они независимы. Тогда можно ввести проекционный оператор ω, удовлетворяющий условиям

$$\omega\eta^n\,|\,S_1\rangle = \eta^n\,|\,S_1\rangle, \qquad \omega\eta^n\,|\,S_2\rangle = 0.$$

Легко проверить, что в предположении о существовании такого оператора ω не содержится противоречий, когда кет-векторы $|S_1\rangle$ и $|S_2\rangle$ независимы. Можно также проверить, что ω коммутирует с η и $\bar{\eta}$, а следовательно, коммутирует с q и p, поэтому ω есть другое q-число, другая динамическая переменная, независимая от q и p. Этот вывод противоречит нашей гипотезе о том, что q и p — это единственные независимые динамические переменные. Поэтому, если q и p — единственные независимые динамические переменные, то существует только один независимый кет-вектор $|S\rangle$, удовлетворяющий условию (4.2).

Произвольный кет-вектор $|A\rangle$ можно записать в виде

$$|A\rangle = \sum_n a_n \eta^n |S\rangle = \psi(\eta)|S\rangle, \tag{4.3}$$

где $\psi(\eta)$ — некий степенной ряд. Но тогда функция $\psi(\eta)$ представляет кет-вектор $|A\rangle$. Это представление отличается от обычного в том отношении, что переменная η в волновой функции комплексна.

Бра-вектор, сопряженный кет-вектору $|S\rangle$, — это вектор $\langle S|$, причем он удовлетворяет соотношению

$$\langle S|\eta = 0.$$

Мы будем предполагать, что

$$\langle S|S\rangle = 1.$$

Если мы имеем два кет-вектора

$$|A\rangle = \sum_n a_n \eta^n |S\rangle \quad \text{и} \quad |B\rangle = \sum_n b_n \eta^n |S\rangle,$$

то их скалярное произведение равно

$$\langle B|A\rangle = \sum_{nm} \langle S|\bar{b}_m \bar{\eta}^m a_n \eta^n |S\rangle.$$

Далее имеем

$$\langle S|\bar{\eta}^m \eta^n|S\rangle = \langle S|\bar{\eta}^{m-1}(\eta^n \bar{\eta} + n\eta^{n-1})|S\rangle =$$
$$= n\langle S|\bar{\eta}^{m-1}\eta^{n-1}|S\rangle = n(n-1)\langle S|\bar{\eta}^{m-2}\eta^{n-2}|S\rangle = \ldots =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n, \\ n! & \text{при} \quad m = n, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\langle B|A\rangle = \sum_n n!\, \bar{b}_n a_n.$$

Если мы нормируем кет-вектор $|A\rangle$ так, что

$$\langle A|A\rangle = 1,$$

то

$$\sum_n n!\, |a_n|^2 = 1,$$

и выражение $n!|a_n|^2$ будет представлять собой вероятность обнаружить в n-м возбужденном состоянии систему, находящуюся в состоянии $|A\rangle$.

Можно получить интересное усиление предшествующих результатов, введя, как это сделал Фок, переменную η^{-1}, удовлетворяющую условию

$$\eta^{-1}\eta = 1.$$

Мы не можем положить

$$\eta\eta^{-1} = 1,$$

поскольку из равенства

$$\langle S|\eta = 0$$

следует

$$\langle S|\eta\eta^{-1} = 0.$$

При таком определении η^{-1} мы находим

$$n!\,\langle S|\eta^{-n} = \langle S|\bar{\eta}^n,$$

так как обе части этого равенства, будучи умножены слева на $\eta^n|S\rangle$ или же на $\eta^m|S\rangle$, где $m < n$ или $m > n$, дают, как легко проверить, один и тот же результат, если дополнительно предположить, что

$$\eta^{-1}|S\rangle = 0.$$

Теперь мы, например, можем написать

$$\begin{aligned}\langle B| &= \langle S|\sum_n \bar{b}_n\bar{\eta}^n = \\ &= \langle S|\sum_n n!\,\bar{b}_n\eta^{-n} = \\ &= \langle S|\varphi(\eta).\end{aligned}$$

Таким образом, бра-вектор $\langle B|$ представляется функцией $\varphi(\eta)$, которая является рядом по убывающим степеням переменной η. Скалярное произведение теперь имеет вид

$$\langle B|A\rangle = (2\pi i)^{-1}\oint \varphi(\eta)\,\psi(\eta)\,\frac{d\eta}{\eta},$$

где контур интегрирования охватывает начало координат.

Если существуют, кроме q и p, другие динамические переменные, мы можем конструировать кет-векторы по типу суммы (4.3), в которой коэффициенты a_n уже не c-числа, а функции других динамических переменных. Таким способом можно получить более общий набор кет-векторов, построенных с помощью одного стандартного кет-вектора $|S\rangle$. Например, в случае, который я разбирал выше и где у нас имелся проекционный оператор ω, мы можем ввести в рассмотрение динамические переменные, некоммутирующие с ω и позволяющие переходить от кет-вектора $|S_1\rangle$ к кет-вектору $|S_2\rangle$. Такие динамические переменные могли бы появиться в коэффициентах a_n, что привело бы к более общим кет-векторам, получающимся из кет-вектора $|S_1\rangle$, по сравнению с теми кет-векторами, которые мы имели бы, если бы взяли c-числа в качестве коэффициентов a_n.

Таковы основные идеи представления Фока применительно к задаче с одной степенью свободы. Представление Фока бывает полезно во всякой задаче, где выражение $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ играет существенную роль. Оно всегда допустимо, но польза от него бывает лишь в тех случаях, когда в расчетах, которые нам приходится делать, существенную роль играет выражение $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$. Выбор представления в квантовой теории аналогичен выбору системы координат в геометрии. Систему координат всегда можно выбрать так, как нам заблагорассудится, однако полезным и удобным этот выбор окажется только в том случае, когда выбранная система координат неким специальным образом связана с важными аспектами рассматриваемой задачи. В квантовой теории представление Фока полезно, если для рассматриваемой задачи важно выражение $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$. Подобные задачи возникают тогда, когда мы имеем дело с осциллятором, энергия которого равна $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$, и, может быть, тогда, когда энергия отличается от указанного выражения на величину, которую допустимо рассматривать в качестве возмущения.

Изложенную теорию можно распространить на случай нескольких осцилляторов, т. е. на случай нескольких q и p, причем для каждой пары q и p у нас имеется некая величина $\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ (возможно, входящая с числовым коэффициентом), играющая существенную роль в наших выкладках. В таком случае мы вводим в рассмотрение несколько переменных η, по одной на каждую пару переменных q и p, так что мы имеем теорию, где фигурируют динамические переменные η_a и $\bar{\eta}_a$, причем индекс a принимает различные значения соответственно различным степеням свободы. Все переменные η будут удовлетворять условию

$$\eta_a\eta_b - \eta_b\eta_a = 0,$$

т. е. будут коммутировать между собой, в то время как

$$\bar{\eta}_a\eta_b - \eta_b\bar{\eta}_a = \delta_{ab}. \qquad (4.4)$$

Если мы образуем произведение $\eta_a\bar{\eta}_a$, то его можно будет назвать степенью возбуждения a-го осциллятора и обозначить n_a. Мы определим стандартный кет-вектор представления $|S\rangle$ с помощью условий

$$\bar{\eta}_a|S\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\eta}_a. \qquad (4.5)$$

Эти условия непротиворечивы, так как переменные $\bar{\eta}$ коммутируют между собой. Как и ранее, мы можем показать, что имеется только один независимый кет-вектор $|S\rangle$, удовлетворяющий условиям (4.5), если η и $\bar{\eta}$ — единственные динамические переменные в нашей задаче.

Кет-векторы мы можем теперь конструировать в виде

$$|P\rangle = \eta_1^{n_1'}\eta_2^{n_2'}\ldots|S\rangle,$$

где n_1', n_2', ... — c-числа, принимающие значения 0, 1, 2, 3, ... Пользуясь коммутационными соотношениями между переменными η и $\bar{\eta}$, нетрудно проверить равенство

$$\eta_a \bar{\eta}_a | P\rangle = n'_a | P\rangle.$$

Это равенство показывает, что $|P\rangle$ является собственным кет-вектором каждого оператора n_a, принадлежащим соответственно собственному значению n'_a. Таким путем мы, следовательно, получаем собственный кет-вектор степеней возбуждения всех осцилляторов.

Беря суперпозицию этих кет-векторов, мы можем построить кет-вектор более общего вида

$$| Q\rangle = \sum a_{n'_1 n'_2} \ldots \eta_1^{n'_1} \eta_2^{n'_2} \ldots | S\rangle.$$

Здесь суммирование распространяется на все значения n', а коэффициенты представляют собой c-числа.

ЛЕКЦИЯ 5

ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ. БОЗОНЫ

Представление Фока подводит нас непосредственно к вопросу о вторичном квантовании; последнее образует краеугольный камень всей квантовой теории поля. Я надеюсь, что многие из вас уже знакомы с этим вопросом, и адресуясь к таким лицам, я лишь замечу, что вы можете сохранить все преобретенные вами ранее сведения о вторичном квантовании при том условии, что вы будете использовать их только в тех соотношениях, которые относятся к одному фиксированному моменту времени t_0. Здесь я намерен ограничиться рассмотрением одного фиксированного момента времени и для этого фиксированного момента времени построить теорию вторичного квантования.

Предположим, что у нас есть частица, которая может существовать в различных состояниях, относящихся, разумеется, к одному определенному моменту времени. Эти различные состояния описываются собственными значениями полного набора коммутирующих наблюдаемых. Теперь, когда речь идет о частице, мы имеем дело лишь с конечным числом степеней свободы, и все обычные результаты, касающиеся эквивалентности гейзенберговского и шредингеровского представлений, остаются в этом случае в силе. В частности, совокупность всех независимых состояний одной частицы образует гильбертово пространство. Когда мы имеем дело всего-навсего с одной частицей, различным состояниям, взятым в определенный момент времени, соответствуют кет-векторы гильбертова пространства, а для них мы можем ввести координаты. Можно воспользоваться обычными обозначениями, введя базисные кет-векторы $|\alpha^1\rangle$, $|\alpha^2\rangle$, $|\alpha^3\rangle$

и т. д. В качестве переменных α здесь можно взять полный набор коммутирующих наблюдаемых для одной частицы, а верхние индексы 1, 2, 3, ... отнести к собственным значениям этих наблюдаемых.

Для ансамбля из u таких частиц мы могли бы иметь состояние

$$|\alpha_1^a\rangle|\alpha_2^b\rangle \ldots |\alpha_u^g\rangle;$$

оно получается простым перемножением кет-векторов отдельных частиц. Это возможное состояние ансамбля, но такие состояния не реализуются в природе, где все наши частицы обязаны подчиняться либо статистике Бозе, либо статистике Ферми. Если они подчиняются статистике Бозе, то в природе реализуются только симметричные состояния. Если же они подчиняются статистике Ферми, то в природе реализуются только антисимметричные состояния.

Рассмотрим первым случай статистики Бозе. Для бозонов физически возможное состояние получается симметризацией написанного выше кет-вектора по всем частицам:

$$S|\alpha_1^a\rangle|\alpha_2^b\rangle \ldots |\alpha_u^g\rangle = S|\alpha_1^a\alpha_2^b \ldots \alpha_u^g\rangle, \tag{5.1}$$

где S — симметризующий оператор

$$S = (u!)^{-1/2} \sum P,$$

а P — оператор перестановок. Числовой коэффициент $(u!)^{-1/2}$ введен для удобства нормировки. Таково возможное состояние ансамбля бозонов. Если число бозонов конечно, то их состояния образуют гильбертово пространство.

Необходимо проверить нормировку кет-вектора (5.1). Можно предположить, что исходные кет-векторы ортонормированы, т. е.

$$\langle\alpha^a|\alpha^b\rangle = \delta_{ab},$$

поэтому они образуют базис представления в гильбертовом пространстве. При этих условиях, когда все состояния a, b, ..., g различны, квадрат длины вектора $S|\alpha_1^a\alpha_2^b \ldots \alpha_u^g\rangle$ равен единице, так как все члены в сумме (5.1) ортогональны между собой. Если же имеются повторения, то ортогональности между некоторыми из них не будет. Так, например, если состояния a и b совпадают, то перестановка, меняющая местами a и b, даст нам кет-вектор, который не ортогонален исходному, а совпадает с ним. В результате в выражении для квадрата длины появится множитель $n_1'!\ n_2'!\ \ldots$, где n' — числа одинаковых состояний. Например, n_1' — число тех α, которые равны α^1 и т. д.

Предположим теперь, что число бозонов u — динамическая переменная и что ее собственные значения u' могут быть различными. Тогда совокупность всех кет-векторов будет состоять, во-первых, из кет-вектора, соответствующего состоянию без бозонов, его мы будем обозначать $|\rangle$, затем кет-векторов, соответствующих состояниям с одним бозоном, $|\alpha^a\rangle$, с двумя бозонами, $S|\alpha^a\alpha^b\rangle$, с тремя бозонами, $S|\alpha^a\alpha^b\alpha^c\rangle$, и т. д. Итак, теперь мы можем воспроизвести весь ряд кет-векторов, описывающих различные состояния ансамбля бозонов с переменным числом частиц.

В общем случае кет-вектор записывается в виде суммы

$$a|\rangle + a_a|\alpha^a\rangle + a_{ab}S|\alpha^a\alpha^b\rangle + \ldots,$$

где коэффициенты a, a_a, ... представляют собой c-числа, причем те из них, которые содержат более одного индекса, симметричны.

Таков в общих чертах способ описания состояний ансамбля бозонов для фиксированного момента времени. Между этими кет-векторами и кет-векторами для набора осцилляторов, который описывается с помощью представления Фока, имеется определенная связь. Эта связь такова:

$$S|\alpha^a\alpha^b\ \ldots\ \alpha^g\rangle = \eta_1^{n_1'}\eta_2^{n_2'}\ \ldots\ |S\rangle = \eta_a\eta_b\ \ldots\ \eta_g|S\rangle, \qquad (5.2)$$

где числа n' определены, как и ранее. (Пусть вас не смущает, что одна и та же буква S используется для обозначения симметризующего оператора и стандартного кет-вектора.) Мы можем приравнять эти кет-векторы друг к другу, так как кет-векторы, стоящие в (5.2) слева, имеют те же свойства, что и кет-векторы, стоящие справа. Кет-векторы, стоящие слева, ортогональны между собой, как и кет-векторы, стоящие справа. Квадрат длины каждого кет-вектора, стоящего слева, имеет то же значение, что и квадрат длины соответствующего кет-вектора, стящего справа.

Сам факт наличия этой связи означает, что две динамические системы в математическом отношении эквивалентны. Одна динамическая система — это набор бозонов, число которых переменно, другая динамическая система — набор осцилляторов. Эти две динамические системы эквивалентны — они представляют собой просто два способа описания одной и той же физической реальности. Именно благодаря этой связи устанавливается эквивалентность корпускулярной и волновой теорий света. Вы можете представлять свет в виде волн, пользуясь переменными η, или же в виде фотонов, пользуясь векторами $|\alpha\rangle$ для различных фотонных состояний.

Мне хотелось бы обратить ваше внимание на то, что каждый из осцилляторов соответствует не бозону, а бозонному состоянию. В данном бозонном состоянии может находиться любое число бозонов, и их число n совпадает со степенью возбуждения соответствующего осциллятора. Именно это нам и нужно с точки зрения физики. У нас может быть любое число фотонов в некотором фотонном состоянии; фотонному состоянию соответствует фурье-компонента поля, которая и есть осциллятор. Таким образом, бозонному состоянию у нас соответствует осциллятор.

Само собой теперь возникает следующий вопрос. Предположим, что рассмотрение системы бозонов мы начали, исходя из другого набора базисных состояний отдельного бозона. Так, выше мы имели набор базисных состояний $|\alpha^1\rangle$, $|\alpha^2\rangle$ и т. д. Мы могли бы использовать другой набор состояний, скажем, $|\beta^1\rangle$, $|\beta^2\rangle$ и т. д., где совокупность переменных β — это другой полный набор коммутирующих наблюдаемых одной частицы. Например, переменные α могли бы быть координатами частицы, а переменные β — компонентами ее импульса. Результаты нашего рассмотрения ансамбля бозонов можно сформулировать на языке β-кет-векторов с тем же успехом, что и на языке α-кет-векторов. Наши α-кет-векторы удовлетворяли условиям ортонормированности

$$\langle \alpha^a \mid \alpha^b \rangle = \delta_{ab},$$

и наши новые кет-векторы мы подчиним аналогичным условиям ортонормированности. В общем случае я буду писать новый кет-вектор в виде $|\beta^A\rangle$, потому что обычно между собственными значениями переменных α и β нет одно-однозначного соответствия, а если бы я использовал тот же индекс a при написании кет-вектора $|\beta\rangle$, это предполагало бы наличие такого одно-однозначного соответствия. Таким образом,

$$\langle \beta^A \mid \beta^B \rangle = \delta_{AB}.$$

Кет-векторы одной частицы принадлежат гильбертову пространству. Одна частица — это система всего-навсего с тремя степенями свободы, впрочем, возможно, имеется еще дополнительная степень свободы, связанная со спином, и для такой простой системы вполне корректна обычная теория с гильбертовыми векторами. И α- и β-кет-векторы принадлежат гильбертову пространству, поэтому они связаны между собой обычным преобразованием координат в гильбертовом пространстве; любой из кет-векторов $|\beta\rangle$ связан с базисными кет-векторами $|\alpha\rangle$ равенством

$$|\beta^A\rangle = |\alpha^a\rangle \langle \alpha^a \mid \beta^A \rangle, \tag{5.3}$$

где суммирование распространяется на все значения a.

Мы можем работать с этими новыми кет-векторами при рассмотрении ансамбля бозонов, и это предполагает, что для описания u бозонов мы будем конструировать кет-векторы типа

$$S\,|\beta_1^A \beta_2^B \ldots \beta_u^G\rangle.$$

Мы снова можем ввести набор осцилляторов, описываемый с помощью представления Фока, так что состояния этих осцилляторов будут связаны с состояниями ансамбля бозонов той же самой формулой:

$$S|\beta_1^A\beta_2^B \ldots \beta_u^G\rangle = \eta_A\eta_B \ldots \eta_G|S\rangle.$$

Возникает вопрос: какова связь между новым набором осцилляторов и предыдущим? Итак, у нас имеется два набора осцилляторов, каждый из которых служит для описания одного и того же ансамбля бозонов. Что касается кет-вектора $|S\rangle$, то он один и тот же в обоих случаях: он относится к состоянию, в котором бозоны вообще отсутствуют; и в этом утверждении, разумеется, не содержится никаких указаний на то, какие именно кет-векторы используются для описания отдельного бозона. Очевидно, что связь между переменными η линейна, т. е. между старыми и новыми переменными η имеется однородное линейное соотношение. Явный вид этого соотношения можно без труда получить, рассмотрев состояния с одним бозоном. Если имеется всего-навсего один бозон, то его можно описывать как с помощью кет-векторов

$$|\alpha^a\rangle = \eta_a|S\rangle,$$

так и с помощью кет-векторов

$$|\beta^A\rangle = \eta_A|S\rangle.$$

Кет-векторы $|\alpha^a\rangle$ и $|\beta^A\rangle$ связаны соотношением (5.3), поэтому

$$\eta_A|S\rangle = \eta_a\langle\alpha^a|\beta^A\rangle|S\rangle.$$

Здесь $\langle\alpha^a|\beta^A\rangle$ — просто некий числовой множитель, и мы получаем

$$\eta_A = \eta_a\langle\alpha^a|\beta^A\rangle.$$

Эта формула показывает, каким образом преобразуются осцилляторные переменные при преобразовании базисных кет-векторов, относящихся к нашим бозонам. Полученный результат можно резюмировать:

переменные η преобразуются так же, как базисные кет-векторы отдельного бозона.

Когда мы рассматриваем одну частицу в рамках теории Шредингера, для описания ее состояний у нас имеется кет-вектор $|P\rangle$, который можно представить с помощью шредингеровской волновой функции, состоящей из скобочных выражений $\langle\alpha^a|P\rangle$ или $\langle\beta^A|P\rangle$. Волновая функция преобразуется подобно базисному бра-вектору. Закон преобразования имеет вид

$$\langle\beta^A|P\rangle = \langle\beta^A|\alpha^a\rangle\langle\alpha^a|P\rangle.$$

Следовательно, закон преобразования волновой функции совпадает с законом преобразования переменных $\bar{\eta}$.

По своему физическому смыслу переменные η являются операторами рождения бозона или иначе операторами, повышающими степень возбуждения осциллятора на одну ступень. Переменные $\bar{\eta}$ соответствуют операторам поглощения, или иначе операторам, понижающим степень возбуждения осциллятора на одну ступень. Таким образом, мы видим, что волновая функция одной частицы преобразуется подобно оператору поглощения в представлении Фока.

Эта связь известна как *вторичное квантование*. Такое название обусловлено, разумеется, тем, что при введении шредингеровской волновой функции вы осуществляете первичное квантование, если за отправную точку считать классическую теорию. Тогда вторичное квантование состоит во введении операторов $\bar{\eta}_a$, соответствующих волновой функции $\langle\alpha^a|P\rangle$, и операторов η_a, соответствующих комплексно сопряженной волновой функции $\langle P|\alpha^a\rangle$. Вторичное квантование заключается в переходе от c-чисел, которые дают нам саму волновую функцию и ее комплексно сопряженное и описывают одну частицу, к q-числам, описывающим ансамбль бозонов. Эти q-числа отличаются от c-чисел только в одном отношении: все c-числа перестановочны между собой, в то время как q-числа не коммутируют друг с другом, а подчинены перестановочному соотношению

$$\bar{\eta}_a\eta_b - \eta_b\bar{\eta}_a = \delta_{ab}.$$

Таким образом, вторичное квантование состоит в изъятии свойства коммутативности у величин, описывающих отдельную частицу в теории Шредингера, а отсутствие коммутативности предоставляет в наше распоряжение набор осцилляторных переменных, удобных для описания ансамбля бозонов.

Я писал все формулы для случая, когда базисные кет-векторы отдельной частицы дискретны, но те же идеи с успехом можно применить и к случаю, когда имеется непрерывная совокупность базисных кет-векторов. Переменными β с таким же успехом могут быть наблюдаемые, обладающие непрерывным спектром собственных значений. Обычно дело так фактически и обстоит: если переменные β относятся к импульсу частицы или к ее пространственным координатам, то они, безусловно, обладают непрерывным спектром собственных значений.

Когда имеется непрерывная совокупность базисных векторов, мы в уравнениях должны сделать одну единственную формальную замену: заменить кронекеровский символ δ на δ-функцию. Таким образом, для непрерывной совокупности кет-векторов мы имеем

$$\langle\beta^A\,|\,\beta^B\rangle = \delta(\beta^A - \beta^B).$$

Делая переход к соответствующим осцилляторам, относящимся к представлению Фока, мы получаем, что индексы переменных η должны принимать непрерывный ряд значений, и поэтому эти переменные должны удовлетворять условиям

$$\bar{\eta}_A\eta_B - \eta_B\bar{\eta}_A = \delta(\beta^A - \beta^B) =$$
$$= \delta(\beta_1' - \beta_1'')\,\delta(\beta_2' - \beta_2'')\,\delta(\beta_3' - \beta_3'')\,\ldots\,.$$

ЛЕКЦИЯ 6

ВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ. ФЕРМИОНЫ

Развитую выше теорию вторичного квантования можно применять к ансамблю бозонов. Соответствующая теория имеется и для ансамбля фермионов. Ее мы можем построить способом, аналогичным применявшемуся нами для бозонов. Теперь мы начнем с ферми-частиц, которые по-прежнему могут находиться в различных состояниях, и введем вместо симметризующего оператора антисимметризующий оператор A, определяемый соотношением

$$A = (u!)^{-1/2} \sum \pm P,$$

где сумма распространяется на все перестановки со знаком плюс или минус в соответствии с тем, является ли перестановка четной или нечетной. Можно образовать выражение

$$A \,|\, \alpha_1^a \alpha_2^b \ldots \alpha_u^g \rangle,$$

которое антисимметрично по различным частицам и описывает ансамбль фермионов. Теперь необходимо, чтобы все фермионы находились в различных состояниях; в противном случае, применяя антисимметризующий оператор, мы получим нуль. Теперь переменные α уже не могут повторяться — число фермионов в любом фермионном состоянии должно равняться нулю или единице.

В случае бозонов число частиц во всяком состоянии равно 0, 1, 2, 3, ..., т. е. любому целому числу вплоть до бесконечности, именно это предполагает связь с осцилляторами, так как значения энергии отдельного осциллятора образуют арифметискую прогрессию. Именно по этой причине ансамбль бозонов связан с набором осцилляторов.

Нечто аналогичное мы желаем сделать и для фермионов, но введение осцилляторов теперь, разумеется, не даст ничего хорошего, потому что осцилляторы будут обладать неправильной последовательностью собственных значений для их степеней возбуждения. Число частиц в различных состояниях — это теперь динамические переменные, каждая из которых имеет только два собственных значения. Тем самым предполагается, что эти переменные подобны переменным, возникающим в теории Паули спина $^1/_2$. Мы сможем построить теорию фермионов, аналогичную теории бозонов, введя операторы η и $\bar{\eta}$, связанные не с гармоническими осцилляторами, а с переменными, подобными спиновым переменным, описывающим спин $^1/_2$.

Давайте введем некие комплексные q-числа η_a так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\begin{aligned} \eta_a\eta_b + \eta_b\eta_a &= 0, \\ \bar{\eta}_a\bar{\eta}_b + \bar{\eta}_b\bar{\eta}_a &= 0, \\ \eta_a\bar{\eta}_b + \bar{\eta}_b\eta_a &= \delta_{ab}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

При $b = a$ эти соотношения дают

$$\eta_a^2 = 0, \tag{6.2}$$

$$\eta_a\bar{\eta}_a + \bar{\eta}_a\eta_a = 1. \tag{6.3}$$

Первый вопрос, который возникает: являются ли эти соотношения непротиворечивыми? Можно ли ввести такие переменные η? Непротиворечивость приведенных соотношений можно проверить следующим образом. Мы можем рассмотреть матрицы, квадрат которых равен единице и которые антикоммутируют друг с другом. Три такие матрицы имеются в теории электронного спина Паули, и мы можем получить большее число таких матриц, переходя к релятивистской теории электрона. Путем увеличения числа строк и столбцов наших матриц мы можем получить любое число таких величин — квадраты их будут равны единице, и все они будут антикоммутировать друг с другом. Давайте предположим, что в нашем распоряжении имеется большое число таких величин ξ, у которых квадраты равны единице и которые антикоммутируют между собой, и давайте снабдим их индексом так, чтобы каждому значению индекса a соответствовало две величины ξ. Назовем их ξ_a и ξ'_a Возьмем теперь комбинации:

$$\eta_a = \tfrac{1}{2}(\xi_a + i\xi'_a), \qquad \bar{\eta}_a = \tfrac{1}{2}(\xi_a - i\xi'_a).$$

Введенные таким образом переменные η и $\bar{\eta}$, как нетрудно проверить, удовлетворяют требуемым условиям.

Мы можем поступить с переменными η и $\bar{\eta}$ так же, как мы это делали в случае представления Фока. Введем стандартный кет-вектор $|S\rangle$, удовлетворяющий условию

$$\bar{\eta}_a | S\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{\eta}_a. \tag{6.4}$$

Заметим, что эти соотношения не противоречат друг другу, так как мы не приходим к противоречиям, составляя соотношения

$$\bar{\eta}_a\bar{\eta}_b | S\rangle = 0,$$
$$\bar{\eta}_b\bar{\eta}_a | S\rangle = 0,$$
$$(\bar{\eta}_a\bar{\eta}_b + \bar{\eta}_b\bar{\eta}_a) | S\rangle = 0.$$

Теперь мы можем построить более общие кет-векторы

$$\eta_a\eta_b\eta_c \ldots | S\rangle \quad \text{и т. д.}$$

Все фигурирующие здесь переменные η должны быть различными. Если две из них одинаковы, например a и c, то мы можем ценой изменения знака поставить множитель η_c левее множителя η_b, но тогда одна из наших переменных будет входить у нас в квадрате, а ее квадрат благодаря соотношению (6.2) равен нулю.

Эти кет-векторы можно связать с кет-векторами ансамбля фермионов. Мы можем положить

$$A | \alpha_1^a \alpha_2^b \ldots \alpha_u^g\rangle = \eta_a\eta_b \ldots \eta_g | S\rangle. \tag{6.5}$$

Причины, позволяющие это сделать, аналогичны причинам, благодаря которым такое отождествление было допустимо в случае бозонов. Всякие два кет-вектора, стоящие в левой части равенства, когда они относятся к разному выбору состояний, ортогональны между собой. Они ортогональны друг другу, если относятся к разным значениям u, и они ортогональны друг другу, если значение u одно и то же, но они относятся к разным наборам состояний. Точно так же кет-векторы, стоящие в правой части равенства, ортогональны между собой, когда они относятся к различным множителям η. Это можно легко проверить. Я собираюсь проверить ортогональность кет-вектора $\eta_a\eta_b\eta_c \ldots \eta_g|S\rangle$ кет-вектору $\eta_{a'}\eta_{b'} \ldots \eta_{g'}|S\rangle$, исключая тот случай, когда оба кет-вектора имеют одинаковые множители перед стандартным кет-вектором $|S\rangle$. Мы можем образовать скалярное произведение одного кет-вектора на кет-вектор, сопряженный другому:

$$\langle S|\bar{\eta}_{g'} \ldots \bar{\eta}_{b'}\bar{\eta}_{a'}\eta_a\eta_b \ldots \eta_g|S\rangle.$$

Теперь можно изменить порядок множителей согласно антикоммутационным соотношениям (6.1). Если мы возьмем какой-нибудь из множителей $\bar{\eta}$, например, $\bar{\eta}_{g'}$, то его можно перенести направо и применить этот оператор непосредственно к стандартному кет-вектору $|S\rangle$, что даст нуль. Мы могли бы получить ненулевой результат только в том случае, когда один из множителей η равен $\eta_{g'}$. Аналогично для каждого множителя $\bar{\eta}_{i'}$ должен найтись соответствующий множитель η_i, иначе все произведение будет равно нулю.

В правой части равенства (6.5) мы имеем, следовательно, набор кет-векторов, которые ортогональны между собой в том случае, когда они относятся к различным наборам индексов. Если же мы возьмем два кет-вектора, относящихся к одному и тому же набору индексов, расположенных в разном порядке, то тогда эти кет-векторы либо будут совпадать между собой, либо будут отличаться знаком в соответствии с тем, четна или нечетна перестановка, реализующая переход от одного кет-вектора к другому. Ситуация здесь как раз такая же, как и в случае кет-векторов, стоящих в левой части равенства.

Кет-векторы, стоящие в левой части равенства (6.5), все нормированы. В случае бозонов нормированными были не все кет-векторы; когда в некотором состоянии находится более одного бозона, это приводит к появлению отличного от единицы множителя в выражении для квадрата длины этого кет-вектора. Но в случае фермионов у нас не может быть более одной частицы в одном и том же состоянии, и подобная ситуация не возникает. Поэтому кет-векторы в левой части равенства (6.5) все нормированы. Кет-векторы, стоящие в правой части равенства (6.5), также все нормированы, конечно, при условии, что стандартный кет-вектор $|S\rangle$ нормирован. Это нетрудно проверить следующим образом. Образуем скалярное произведение:

$$\langle S|\bar{\eta}_g \ldots \bar{\eta}_b\bar{\eta}_a\eta_a\eta_b \ldots \eta_g|S\rangle.$$

Давайте возьмем теперь два стоящие в середине сомножителя $\bar{\eta}_a\eta_a$. На основании соотношения (6.3) мы можем их заменить на $1-\eta_a\bar{\eta}_a$. Множитель $\bar{\eta}_a$ можно передвинуть здесь в крайнее правое положение, так как никакого другого множителя η_a мы при этом встретить не можем. Оператор $\bar{\eta}_a$ при действии на $|S\rangle$ даст нуль, поэтому стоящие в середине сомножители можно заменить на единицу. Теперь роль двух стоящих в середине сомножителей, разумеется, играют сомножители $\bar{\eta}_b\eta_b$, и мы поступим с ними точно таким же образом. Их вклад в общее произведение также равен единице и т. д. Поэтому с нормировкой у нас все в порядке.

Теперь все необходимое, чтобы установить, что два набора кет-векторов из равенства (6.5) можно отождествить друг с другом, нами доказано, и в нашем распоряжении имеется способ описания ансамбля фермионов с помощью операторов η и $\bar{\eta}$. Кет-вектор $|S\rangle$ соответствует состоянию без фермионов, кет-вектор $\eta_a|S\rangle$ — одному фермиону в состоянии a, кет-вектор $\eta_a\eta_b|S\rangle$ — двум фермионам в состояниях a и b и т. д.

В этой схеме число фермионов во всяком состоянии задается оператором $\eta_a\bar{\eta}_a = N_a$. Доказательство состоит в следующем. Надо взять оператор N_a, подействовать им на каждый из кет-векторов перечисленной выше серии и убедиться, что получаются правильные результаты. Мы имеем

$$\bar{\eta}_a|S\rangle = 0,$$

поэтому $|S\rangle$ — собственый кет-вектор оператора N_a, принадлежащий собственному значению 0. Выражение $N_a\eta_a|S\rangle$ равно

$$\eta_a\bar{\eta}_a\eta_a|S\rangle = \eta_a(1-\eta_a\bar{\eta}_a)|S\rangle = \eta_a\;|S\rangle,$$

поэтому $\eta_a|S\rangle$ — собственный кет-вектор оператора N_a, принадлежащий собственному значению 1. Таким же способом мы проверяем, что

$$N_a\eta_b\eta_c\,\ldots\,|S\rangle = 0,$$

если b, c, ... все отличаются от a, и

$$N_a\eta_a\eta_b\,\ldots\,|S\rangle = \eta_a\eta_b\,\ldots\,|S\rangle.$$

Множители $\eta_b\eta_c$ здесь вообще не меняют существа дела. Это показывает, что все кет-векторы типа $\eta_b\eta_c\ldots|S\rangle$ относятся к нулевому собственному значению оператора N_a, а все кет-векторы типа $\eta_a\eta_b\ldots|S\rangle$ принадлежат собственному значению оператора N_a, равному единице. Таким образом, оператор N_a, действительно, представляет собой оператор числа фермионов в состоянии a.

Оператор η_a можно теперь рассматривать в качестве оператора рождения фермиона в состоянии a. Если подействовать оператором η_a на какой-либо кет-вектор, представляющий состояние ансамбля, в котором нет фермионов в состоянии a, то в результате получится кет-вектор, относящийся к состоянию ансамбля, в котором имеется один фермион в состоянии a. Тот факт, что мы не можем поместить два фермиона в одно состояние, связан с равенством $\eta_a^2 = 0$: если мы применяем оператор η_a дважды, то в результате всегда получится нуль безотносительно к тому, с чего мы начинаем. Аналогично оператор $\bar{\eta}_a$ — это оператор уничтожения фермиона в состоянии a: он дает нуль, если фермион первоначально отсутствовал, и дает новый кет-вектор, соответствующий состоянию, в котором этот фермион отсутствует, если он первоначально присутствовал.

Мы можем доказать чисто алгебраически, что число фермионов в состоянии a равно либо нулю, либо единице. Образуем для этого выражение

$$\begin{aligned} N_a^2 &= \eta_a\bar{\eta}_a\eta_a\bar{\eta}_a = \\ &= \eta_a(1-\eta_a\bar{\eta}_a)\,\bar{\eta}_a = \\ &= \eta_a\bar{\eta}_a - \eta_a^2\bar{\eta}_a^2 = \eta_a\bar{\eta}_a = \\ &= N_a. \end{aligned}$$

Таким образом, $N_a^2 = N_a$, поэтому собственные значения оператора N_a равны либо нулю, либо единице.

Можно сделать преобразование к иным состояниям, отличающимся от наших первоначальных фермионных состояний. Мы можем сделать это так же, как делали в случае бозонов. В результате мы получим новый набор кет-векторов ансамбля фермионов, которые можно будет связать с новыми переменными η и $\bar{\eta}$. Связь между старыми и новыми переменными аналогична соответствующей связи в случае бозонов. Ход выкладок совершенно одинаковый и для бозонов и для фермионов. Таким образом, в нашем распоряжении имеется теория вторичного квантования для фермионов.

Окончательный результат для бозонов и фермионов можно представить единой системой равенств:

$$\eta_a\eta_b \pm \eta_b\eta_a = 0, \qquad \bar{\eta}_a\eta_b \pm \eta_b\bar{\eta}_a = \delta_{ab} \quad \text{или} \quad \delta(a-b),$$

где мы имеем знак плюс в случае фермионов и знак минус в случае бозонов. Как для бозонов, так и для фермионов мы имеем

$$\eta_a\bar{\eta}_a = N_a.$$

При обратном порядке сомножителей справедливо соотношение

$$\bar{\eta}_a \eta_a = 1 \pm N_a,$$

где знак минус следует брать для фермионов, а знак плюс — для бозонов.

Таковы важнейшие соотношения, связывающие операторы рождения и операторы уничтожения фермионов и бозонов. Весьма примечательно, что между случаем фермионов и случаем бозонов имеется такое сходство. Фермионы и бозоны как частицы, очень различны, однако уравнения для этих двух случаев, записанные с помощью операторов η, становятся чрезвычайно похожими — разница всего-навсего в знаке.

В теории фермионов мы можем получить еще один результат, которому нет никакого соответствия в теории бозонов. Давайте вернемся назад к соотношениям (6.1) для фермионов. Мы замечаем, что между переменными η и $\bar{\eta}$ имеется симметрия: положите все η равными $\bar{\eta}$, а все $\bar{\eta}$ равными η, соотношения при этом не изменятся. В случае бозонов это несправедливо, потому что знак станет неверным.

Теперь давайте посмотрим, что такая симметрия означает физически. Если у нас имеется теория ансамбля фермионов, то мы можем получить другую теорию, в которой операторы η и $\bar{\eta}$ мы обменяем местами. Теперь

$$\eta_a \bar{\eta}_a = N_a, \qquad \bar{\eta}_a \eta_a = 1 - N_a,$$

поэтому, если η и $\bar{\eta}$ мы обменяем местами, то N_a заменится на $1 - N_a$. Если первоначальное значение N_a равно единице, то новое значение N_a будет равно нулю и наоборот. Это свидетельствует о том, что если первоначально состояние было занято, то при новом описании оно будет свободно, и наоборот. В результате такого преобразования мы получаем новое описание, при котором понятия пустого и занятого состояний меняются местами.

Первоначальное описание было бы удобным, если бы большинство переменных N равнялось нулю и было бы всего несколько частиц соответственно немногим N, равным единице. Однако если ситуация такова, что большинство N равно единице и лишь немногие из них равны нулю, то мы можем сделать рассматриваемое преобразование и перейти к новому описанию, при котором большинство состояний будут пустыми и лишь небольшое число дырок превратятся в занятые состояния.

Разумеется, мы не обязаны применять это преобразование ко всем состояниям. Можно применить его только к некоторым из них. Для некоторых значений индекса a мы можем произвести обмен η_a и $\bar{\eta}_a$ местами и не производить его при других значениях, и даже в этом случае с соотношениями (6.1) будет все в порядке. Таким образом, мы меняем местами понятия пустого и занятого состояний лишь для некоторых из них. Вы знаете, что как раз так поступают в релятивистской теории электронов. При рассмотрении электрона самого по себе в качестве отдельной частицы при изучении его релятивистской теории обнаруживается, что у него имеются состояния с положительной энергией и состояния с отрицательной энергией. Чтобы сосредоточить наше внимание на первоначально незанятых состояниях с отрицательной энергией, для них разумно поменять местами понятия пустого и занятого состояний.

Стандартный кет-вектор $|S\rangle$ должен измениться, когда производится преобразование, включающее обмен η и $\bar{\eta}$ местами. Первоначальный кет-вектор $|S\rangle$ удовлетворяет условиям

$$\bar{\eta}_a|S\rangle = 0.$$

При обмене η и $\bar{\eta}$ местами нам приходится работать с новым кет-вектором $|S\rangle$, удовлетворяющим условиям

$$\eta_a|S_{\text{нов}}\rangle = 0.$$

Кет-вектор $|S_{\text{нов}}\rangle$ — это такой кет-вектор, для которого с точки зрения исходной картины описания частиц все состояния полностью заняты. Умножая его на оператор $\bar{\eta}_a$, мы получаем состояние с одной дыркой.

Когда мы меняем местами η и $\bar{\eta}$ не для всех, а лишь для некоторых степеней свободы, нам необходим такой кет-вектор $|S\rangle$, при действии на который как некоторых $\bar{\eta}$, так и некоторых η в результате получается нуль. Такой обобщенный кет-вектор $|S\rangle$ удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{ll} \bar{\eta}_a | S_{\text{об}}\rangle = 0 & \text{для некоторых значений } a, \\ \eta_b | S_{\text{об}}\rangle = 0 & \text{для некоторых значений } b, \\ & \text{отличных от } a. \end{array}$$

Когда мы имеем дело с электронами и позитронами, удобно ввести в рассмотрение такой кет-вектор, для которого значения a включают все состояния с положительной энергией, а значения b — состояния с отрицательной энергией.

Квантовая теория поля формулируется целиком на языке операторов η и $\bar{\eta}$, относящихся либо к бозонам либо к фермионам. Сказанное выше справедливо и в самом общем случае — все квантовые теории поля строятся с помощью таких операторов η и $\bar{\eta}$: они являются тем основным материалом, которым приходится пользоваться.

ЛЕКЦИЯ 7

МОДЕЛЬНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН

Переменные η и $\bar{\eta}$ — это q-числа, которые относятся к картине природы, взятой в один определенный момент времени. Теперь мы обсудим вопрос о том, как они изменяются с течением времени. Мы будем предполагать, что существует гамильтониан и что у нас имеются гейзенберговские уравнения движения, определяющие изменение этих переменных во времени.

До тех пор пока дело касается одного момента времени, в нашем распоряжении имеются кет-векторы $\eta_a\eta_b\ldots|S\rangle$, которые лежат в гильбертовом пространстве, если мы налагаем подходящие условия сходимости на коэффициенты при образовании сумм вида

$$\sum_{abc\ldots} C_{abc\ldots}\eta_a\eta_b\eta_c\ldots|S\rangle. \tag{7.1}$$

Таким путем можно получить адекватное описание различных состояний для одного момента времени, оставаясь в рамках одного определенного гильбертова пространства.

Переходя к рассмотрению условий в другой момент времени, мы снова могли бы иметь переменные η и $\bar{\eta}$, относящиеся к новому моменту времени, и мы снова могли бы ввести относящийся к новому моменту времени стандартный кет-вектор $|S\rangle$, и снова могли бы получить набор гильбертовых кет-векторов. Однако эти новые гильбертовы кет-векторы, относящиеся к новому моменту времени, вообще говоря, не принадлежали бы тому же гильбертову пространству, которому принадлежит тот набор кет-векторов, с которого мы начали. Таким образом обстоит дело в случае гамильтонианов, интересных с точки зрения физики. Гильбертово пространство, порождаемое кет-векторами, изменяется, и, если мы хотим рассмотреть совокупность кет-векторов для всех моментов времени, у нас должно получиться пространство более обширное, чем пространство Гильберта.

Эту ситуацию лучше всего обсудить с помощью модельного гамильтониана. Я предлагаю вашему вниманию гамильтониан, который вообще не встречается на практике, но зато является хорошей моделью. Он достаточно прост, и все, что нам нужно, мы сможем вычислить в явном виде. С другой стороны, он все еще достаточно сложен, чтобы продемонстрировать необходимость перехода от одного гильбертова пространства к другому и показать, что мы не можем все представить в рамках одного гильбертова пространства и не можем пользоваться картиной Шредингера.

Мы будем работать с фермионами, и поэтому будем иметь дело с последовательностью динамических переменных η_m, $\bar{\eta}_m$, удовлетворяющих соотношениям (6.1). Мы положим $m = 1, 2, \ldots, \infty$. Необходимо иметь бесконечное число фермионных состояний, поскольку трудности не возникают в том случае, когда их имеется лишь конечное число.

В качестве гамильтониана мы возьмем выражение

$$H = \frac{1}{2}(a_{mn}\eta_m\eta_n + \bar{a}_{mn}\bar{\eta}_n\bar{\eta}_m), \qquad (7.2)$$

где все коэффициенты a суть c-числа. Этот гамильтониан действителен. Он содержит только квадратичные комбинации операторов рождения и поглощения.

Так как

$$\eta_m\eta_n = -\eta_n\eta_m,$$

то вклад симметричной части матрицы коэффициентов будет равен нулю. Вклад дает только антисимметричная часть этой матрицы, поэтому мы положим $a_{mn} = -a_{nm}$. Тогда мы получим гамильтониан, который можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2}(a_{mn}\eta_m\eta_n - \bar{a}_{mn}\bar{\eta}_m\bar{\eta}_n).$$

Введем теперь кет-вектор $|S\rangle$, удовлетворяющий условиям

$$\bar{\eta}_m | S\rangle = 0 \quad \text{при всех} \quad m.$$

Этот кет-вектор соответствует состоянию без фермионов.

Образуем теперь выражение $H|S\rangle$. Конечно, оно будет равно $\frac{1}{2} a_{mn}\eta_m\eta_n | S\rangle$ — второй член гамильтониана не вносит никакого вклада. Выражение $H|S\rangle$ состоит только из таких членов, которые соответствуют наличию двух фермионов.

Образуем далее выражение $H^2|S\rangle$. При этом мы получим члены, относящиеся к состояниям с четырьмя фермионами, и члены, относящиеся к состоянию, где нет фермионов вообще. Характер членов, соответствующих четырем фермионам, достаточно очевиден, и с ними не возникает никаких проблем. Я хочу сосредоточить внимание на тех членах, которые соответствуют состоянию, где нет фермионов вообще. Они возникают из выражения

$$-\frac{1}{4}\bar{a}_{mn}\bar{\eta}_m\bar{\eta}_n a_{pq}\eta_p\eta_q | S\rangle.$$

Используя антикоммутационные соотношения (6.1), мы найдем, что вышенаписанное выражение преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\bar{a}_{mn}a_{pq}\bar{\eta}_m(\delta_{np}-\eta_p\bar{\eta}_n)\eta_q | S\rangle = \\
&= -\frac{1}{4}[\bar{a}_{mn}a_{nq}\bar{\eta}_m\eta_q - \bar{a}_{mn}a_{pq}\bar{\eta}_m\eta_p(\delta_{nq}-\eta_q\bar{\eta}_n)] | S\rangle = \\
&= -\frac{1}{2}\bar{a}_{mn}a_{nq}\bar{\eta}_m\eta_q | S\rangle = \\
&= -\frac{1}{2}\bar{a}_{mn}a_{nq}(\delta_{mq}-\eta_q\bar{\eta}_m) | S\rangle = \\
&= -\frac{1}{2}\bar{a}_{mn}a_{nm} | S\rangle = -\frac{1}{2}\langle\bar{a}a\rangle | S\rangle,
\end{aligned} \tag{7.3}$$

где скобки $\langle\ \rangle$ означают сумму диагональных элементов заключенной в них матрицы. Матрица $\bar{a}$ определяется соотношением

$$(\bar{a})_{mn} = \overrightarrow{a_{mn}}.$$

Заметим, что она не является эрмитово сопряженной по отношению к матрице a.

Сумма диагональных матричных элементов вполне может оказаться бесконечной даже для совершенно респектабельной, например, ограниченной матрицы a. Мы можем, в частности, положить

$$\bar{a}a = -1, \tag{7.4}$$

для этого матрицу a можно взять в виде

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

Матрица (7.5) — очень простая матрица с хорошим поведением, она удовлетворяет требованию антисимметричности, и тем не менее мы получаем бесконечность в выражении (7.3) и, следовательно, должны сказать, что вектор $H^2|S\rangle$ не существует.

Предположим, что мы пытаемся решить уравнение Шредингера, т. е. пытаемся найти решение уравнения

$$i\hbar \frac{d}{dt}|A\rangle = H|A\rangle \tag{7.6}$$

при начальном условии

$$|A\rangle = |S\rangle \quad \text{для} \quad t = 0.$$

Формальное решение этого уравнения имеет вид

$$|A\rangle = e^{-iHt/\hbar}|S\rangle.$$

Становясь на абстрактную точку зрения и предполагая, что нашу экспоненту можно дифференцировать согласно обычному правилу дифференцирования экспоненты, содержащей числовой параметр, мы видим, что это выражение как раз удовлетворяет уравнению (7.6) и, кроме того, удовлетворяет правильному начальному условию. Однако, если вы попытаетесь придать смысл экспоненте, представляя ее в виде степенного ряда, то вы увидите, что уже с членами, квадратичными по t, возникают неприятности, так как они содержат вторую степень H, а выражение $H^2|S\rangle$ не существует.

Вы могли бы спросить: может быть выражение $e^{-iHt/\hbar}|S\rangle$ все-таки имеет смысл, несмотря на то, что экспоненту разложить невозможно? Может быть, выражение, получающееся при действии экспоненты на кет-вектор, все же существует, хотя выражение, получающееся при действии оператора H^2 на кет-вектор, не существует? Прежде чем дать определенный ответ на этот вопрос, я хотел бы обсудить рассматриваемую проблему в рамках подхода Гейзенберга.

Возьмите этот же самый гамильтониан и воспользуйтесь им в гейзенберговской картине. Гейзенберговские уравнения движения дают

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{d\eta_p}{dt} &= \eta_p H - H\eta_p = -\frac{1}{2}\bar{a}_{mn}\left(\eta_p\bar{\eta}_m\bar{\eta}_n - \bar{\eta}_m\bar{\eta}_n\eta_p\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\bar{a}_{mn}\left\{\left(\delta_{pm} - \bar{\eta}_m\eta_p\right)\bar{\eta}_n - \bar{\eta}_m\left(\delta_{pn} - \eta_p\bar{\eta}_n\right)\right\} = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\bar{a}_{pn}\bar{\eta}_n - \bar{a}_{mp}\bar{\eta}_m\right) = \\
&= -\bar{a}_{pn}\bar{\eta}_n.
\end{aligned}
$$

Отсюда, разумеется, мы имеем сопряженное уравнение

$$
-i\hbar\frac{d}{dt}\bar{\eta}_p = -a_{pn}\eta_n.
$$

Эти гейзенберговские уравнения движения чрезвычайно просты. Изменение всех переменных η и $\bar{\eta}$ связано линейно с самими переменными. Такие уравнения очень легко проинтегрировать.

Записывая уравнения в матричной форме, имеем

$$
\hbar\frac{d\eta}{dt} = i\bar{a}\bar{\eta}, \qquad \hbar\frac{d\bar{\eta}}{dt} = -ia\eta,
$$

но тогда

$$
\hbar^2\frac{d^2\eta}{dt^2} = \bar{a}a\eta.
$$

Мы видим, что общее решение имеет вид

$$\eta(t) = A\eta(0) + B\bar{\eta}(0),$$

где A и B — матрицы, элементы которых являются c-числами и функциями времени t. Далее имеем

$$\hbar\frac{dA}{dt} = i\bar{a}\bar{B}, \quad \hbar\frac{dB}{dt} = i\bar{a}\bar{A}, \quad \hbar^2\frac{d^2A}{dt^2} = \bar{a}aA.$$

Поступая таким образом, мы получаем уравнения не для q-чисел, а для матриц. Сами q-числа — довольно загадочная вещь, поэтому в выкладках, когда предоставляется такая возможность, желательно освободиться от них, заменяя их матрицами, которые содержат c-числа в качестве своих элементов и смысл которых вполне доступен пониманию.

Возьмем теперь приведенный выше пример (7.4). В этом случае элементы матриц A и B будут изменяться как $\cos(t/\hbar)$ и $\sin(t/\hbar)$. Используя матрицы A и B, мы легко удовлетворим правильным начальным условиям при $t = 0$:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad \frac{dA}{dt} = 0, \quad \frac{dB}{dt} = \frac{i\bar{a}}{\hbar},$$

так что искомое решение будет иметь вид

$$\eta_r(t) = \cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)\eta_r(0) + i\sin\left(\frac{t}{\hbar}\right)\bar{a}_{rs}\bar{\eta}_s(0). \qquad (7.7)$$

Вы видите, что мы проинтегрировали гейзенберговские уравнения движения и не встретили при этом никаких затруднений. Бесконечность, которую мы имели ранее — это трудность, специфическая для картины Шредингера, но ее можно обойти, работая в рамках картины Гейзенберга. Трудности такого рода типичны для квантовой теории поля. В квантовой теории поля приходится иметь дело с гамильтонианами, которые, разумеется, существенно сложнее той модели, которую я рассматривал, но и там справедливо то общее положение, что с уравнениями Гейзенберга работать легче, чем с уравнениями Шредингера. На практике вполне можно столкнуться с примерами, где бесконечности имеются даже в рамках картины Гейзенберга.

Я не говорю, что картина Гейзенберга устраняет все бесконечности, однако она устраняет некоторые бесконечности, появляющиеся в картине Шредингера, и в этом отношении она предпочтительнее картины Шредингера.

Теперь давайте вернемся к вопросу, оставленному мной без ответа. Существует ли выражение $e^{-iHt/\hbar}|S\rangle$? Если смотреть на вещи с точки зрения картины Гейзенберга, то наши переменные η изменяются во времени согласно формуле (7.7). В картину Гейзенберга мы можем ввести кет-вектор $|S_0\rangle$, который удовлетворяет условиям

$$\bar{\eta}_n(0)\,|S_0\rangle = 0.$$

Разумно предположить, что такой кет-вектор существует. Если мы *можем* вводить кет-векторы в картину Гейзенберга, то это предположительно один из них, почти самый простой, какой можно себе представить. Кет-вектор $|S_0\rangle$ совпадает с рассмотренным ранее шредингеровским кет-вектором $|S\rangle$. Однако с равным успехом мы можем ввести такой кет-вектор $|S_t\rangle$, который удовлетворяет условиям

$$\bar{\eta}_m(t)\,|S_t\rangle = 0.$$

В картине Гейзенберга один момент времени ничем не хуже другого, и если существует кет-вектор $|S_0\rangle$, то должен существовать и кет-вектор $|S_t\rangle$.

Какова связь между этими двумя кет-векторами? Это нетрудно установить. Формальное решение уравнения Гейзенберга имеет вид

$$\bar{\eta}_m(t) = e^{iHt/\hbar}\bar{\eta}_m(0)\,e^{-iHt/\hbar}.$$

Давайте подставим это выражение для $\bar{\eta}_m$ в уравнение

$$\bar{\eta}_m(t)\,|S_t\rangle = 0.$$

Мы получим

$$e^{iHt/\hbar}\bar{\eta}_m(0)\,e^{-iHt/\hbar}\,|S_t\rangle = 0 \quad \text{или} \quad \bar{\eta}_m(0)\,e^{-iHt/\hbar}\,|S_t\rangle = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением

$$\bar{\eta}_m(0)\,|S_0\rangle = 0,$$

мы видим, что с точностью до c-числового множителя

$$e^{-iHt/\hbar} \mid S_t\rangle = \mid S_0\rangle.$$

Таким образом,

$$\mid S_t\rangle = e^{iHt/\hbar} \mid S_0\rangle,$$

т. е., по-видимому, выражение

$$e^{iHt/\hbar} \mid S_0\rangle$$

существует. Тот факт, что мы не можем разложить экспоненту, означает: рассматриваемый кет-вектор не принадлежит гильбертову пространству кет-векторов, определяемых выражением (7.1) с $|S_0\rangle$ вместо $|S\rangle$. Здесь мы имеем дело с кет-вектором, который не лежит в этом гильбертовом пространстве; по-видимому, он не лежит ни в каком гильбертовом пространстве вообще. Таким образом, оставаясь в гильбертовом пространстве, мы не можем получить решение уравнения Шредингера. Мы могли бы получить решение, если бы согласились рассматривать кет-векторы в пространстве более общем, чем пространство Гильберта. Однако кет-векторы в таком пространстве нельзя описать с помощью координат. В настоящее время, насколько известно, не существует способа введения координат для описания кет-векторов в таком более общем векторном пространстве. Шредингеровская волновая функция состоит из координат кет-векторов, и, следовательно, шредингеровская волновая функция не существует. Таким образом, мы сталкиваемся с такой ситуацией, когда формальное решение уравнения Шредингера существует, но самой шредингеровской волновой функции нет.

Предположим, что мы начали наши построения не с кет-вектора $|S_0\rangle$, а с другого кет-вектора. Может быть, нам больше повезет с картиной Шредингера? Мы могли бы начать с такого кет-вектора, для которого гамильтониан диагонален. Давайте посмотрим, что у нас получится в этом случае. В качестве примера я возьму выражение (7.5) для матрицы a. Этот пример достаточно хорош для иллюстрации тех аспектов проблемы, которые мы хотим обсудить.

Вернемся к решению (7.7) уравнений Гейзенберга. Сопряженное решение имеет вид

$$\bar{\eta}(t) = \cos\left(\frac{t}{\hbar}\right)\bar{\eta}(0) - i\sin\left(\frac{t}{\hbar}\right)a\eta(0).$$

Предположим, что мы образовали выражение

$$\eta(t) + \bar{a}\bar{\eta}(t) = e^{it/\hbar}[\eta(0) + \bar{a}\bar{\eta}(0)].$$

Мы можем расписать его явным образом в том случае, когда матрица a задана в виде (7.5),

$$\begin{aligned}
\eta_1(t) + \bar{\eta}_2(t) &= e^{it/\hbar}[\eta_1(0) + \bar{\eta}_2(0)],\\
\eta_2(t) - \bar{\eta}_1(t) &= e^{it/\hbar}[\eta_2(0) - \bar{\eta}_1(0)],\\
\eta_3(t) + \bar{\eta}_4(t) &= e^{it/\hbar}[\eta_3(0) + \bar{\eta}_4(0)],\\
\eta_4(t) - \bar{\eta}_3(t) &= e^{it/\hbar}[\eta_4(0) - \bar{\eta}_3(0)] \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Этот способ записи показывает, каким образом связываются переменные, чтобы в результате получились величины, меняющиеся во времени как $e^{it/\hbar}$, другими словами, величины, которые в картине Гейзенберга по мере изменения времени умножаются всего лишь на числовой множитель.

Теперь мы можем сконструировать кет-вектор $|S^*\rangle$, удовлетворяющий в гейзенберговской картине соотношениям

$$\begin{aligned}
&(\eta_1 + \bar{\eta}_2)|S^*\rangle = 0, \qquad (\eta_2 - \bar{\eta}_1)|S^*\rangle = 0,\\
&(\eta_3 + \bar{\eta}_4)|S^*\rangle = 0, \qquad (\eta_4 - \bar{\eta}_3)|S^*\rangle = 0 \text{ и т. д.}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Эти равенства остаются в силе в течение всего времени при одном и том же кет-векторе $|S^*\rangle$, так как операторы, действующие на кет-вектор $|S^*\rangle$, по мере изменения времени умножаются всего лишь на числовой множитель. Мы, разумеется, должны проверить непротиворечивость равенств (7.8). Нельзя конструировать для определения кет-вектора равенства, не согласующиеся друг с другом. Давайте возьмем два первых равенства и образуем антикоммутатор[1])

$$[\eta_1+\bar{\eta}_2, \eta_2-\bar{\eta}_1]_+ = -[\eta_1, \bar{\eta}_1]_+ + [\bar{\eta}_2, \eta_2]_+ = 0.$$

Непротиворечивость остальных соотношений проверяется точно так же. Все эти соотношения, таким образом, не противоречат друг другу, и данный способ определения кет-вектора посредством соотношений (7.8) не хуже любого предшествующего способа определения.

Итак, мы определили кет-вектор $|S^*\rangle$. Теперь выясним, как повел бы себя этот кет-вектор в картине Шредингера. Мы должны выразить гамильтониан через переменные, фигурирующие в (7.8), и переменные, сопряженные с ними. Это можно сделать следующим образом. Используя для матрицы a значение (7.5), мы можем два первых члена в гамильтониане записать в виде

$$\eta_1\eta_2 - \bar{\eta}_1\bar{\eta}_2.$$

Это выражение преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}\eta_1\eta_2 - \bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 &= \tfrac{1}{2}[(\eta_1-\bar{\eta}_2)(\eta_2-\bar{\eta}_1) - (\eta_2+\bar{\eta}_1)(\eta_1+\bar{\eta}_2) + \\ &\quad + \eta_1\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2\eta_2 + \eta_2\bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_1\eta_1] = \\ &= \tfrac{1}{2}[(\eta_1-\bar{\eta}_2)(\eta_2-\bar{\eta}_1) - (\eta_2+\bar{\eta}_1)(\eta_1+\bar{\eta}_2)] + 1.\end{aligned}$$

Заменим теперь гамильтониан H другим гамильтонианом

$$\begin{aligned}H_1 &= \tfrac{1}{2}[(\eta_1-\bar{\eta}_2)(\eta_2-\bar{\eta}_1) - (\eta_2+\bar{\eta}_1)(\eta_1+\bar{\eta}_2)] + \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\text{Аналогичное выражение с } \eta_3 \text{ и } \eta_4) + \ldots .\end{aligned}$$

Гамильтониан H_1 отличается от гамильтониана H на c-число. Каждая пара фермионных состояний вносит

[1]) Мы используем обозначения

$$[u, v]_+ = uv + vu,$$
$$[u, v]_- = uv - vu,$$
$$[u, v] = \frac{1}{i\hbar}(uv - vu).$$

в это c-число вклад, равный единице, поэтому суммарная разница будет равна бесконечному c-числу.

С точки зрения картины Гейзенберга гамильтонианы H_1 и H эквивалентны: оба гамильтониана приводят в точности к одним и тем же гейзенберговским уравнениям движения. С точки же зрения картины Шредингера гамильтонианы H_1 и H различны. Теперь

$$H_1 | S^* \rangle = 0,$$

поэтому кет-вектор $|S^*\rangle$ является решением уравнения Шредингера с H_1 в качестве гамильтониана. Если бы мы попытались работать с гамильтонианом H, то нашли бы, что кет-вектор $|S^*\rangle$ изменяется по фазе и изменяется бесконечно быстро. Если вы хотите интерпретировать гамильтониан как полную энергию, то вам придется сказать, что H_1 и H соответствуют двум различным системам, у которых полные энергии отличаются просто-напросто на бесконечную постоянную. С физической точки зрения имеется по крайней мере столько же оснований использовать гамильтониан H_1, как и гамильтониан H, а если мы работаем с H_1, то тогда мы можем получить решение уравнения Шредингера. Не просто формальное решение, а решение, остающееся в гильбертовом пространстве: фактически этот кет-вектор не перемещается вообще.

Тогда утверждение «можно получить решение уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве» действительно должно быть изменено. Нужно пойти по этому пути. Нельзя получить решение, близкое к $|S_0\rangle$. Можно найти решение, отличающееся значительно от $|S_0\rangle$, если подходящим образом определить нулевую энергию.

Таковы математические аспекты ситуации. Возникает вопрос: каковы те важнейшие особенности, с которыми мы сталкиваемся, применяя эту теорию к гамильтонианам, встречающимся на практике? Мы имеем заданный нам гамильтониан и желаем получить решения, полезные в физическом отношении. Решения, полезные в физическом отношении, — это те решения, которые близки к вакуумному состоянию, т. е. решения, соответствующие состояниям с небольшим числом частиц. Решениям, близким к вакуумному состоянию, отвечают кет-векторы, близкие к кет-вектору $|S_0\rangle$, для которого не удается получить решение уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве. Если вы возьмете квантовую электродинамику с гамильтонианом, который я получу позднее, то вы сможете получить решение, соответствующее кет-вектору $|S^*\rangle$, однако такого рода решение совершенно бесполезно для физика, так как оно будет слишком сильно отличаться от физического вакуума.

Фактически я несколько забегаю вперед, когда говорю о гамильтониане для квантовой электродинамики, но мне хотелось бы, чтобы вы имели ясное представление о возникающей ситуации. Вы знаете, что, применяя теорию вторичного квантования к электронам, необходимо предположить, что физический вакуум — это такое состояние, в котором все электронные состояния с положительной энергией свободны, а все электронные состояния с отрицательной энергией заняты. Такое состояние подобно состоянию $|S_0\rangle$, фигурировавшему выше. Вы могли бы получить состояние, подобное состоянию $|S^*\rangle$, если бы предположили, что все электронные состояния как с положительной, так и с отрицательной энергией не заняты. Вы могли бы в качестве исходной взять математическую ситуацию, когда все электронные состояния свободны, и вы могли бы поступить с кет-вектором, соответствующим этому состоянию так же, как мы поступали с кет-вектором $|S^*\rangle$. В шредингеровской картине кет-вектор $|S^*\rangle$ вообще бы не менялся. При переходе к правильному гамильтониану квантовой электродинамики мы получаем кет-вектор $|S^*\rangle$, который немного меняется, но эти изменения не слишком серьезны. Однако это не тот кет-вектор, которым может пользоваться физик, так как он коренным образом отличается от тех кет-векторов, которые описывают истинную физическую ситуацию. Пример такого кет-вектора для случая электродинамики приведен в одной из моих статей[1]).

[1]) Dirac P. A. M., Comm. Dublin Inst. Adv. Studies, Ser. A (No. 3), Sec. 3 (1946).

Сказать, что уравнение Шредингера не имеет решений, значило бы сгустить краски. Во-первых, оно имеет символические решения, которые не остаются в гильбертовом пространстве, во-вторых, оно на самом деле имеет решения, остающиеся в гильбертовом пространстве, но эти решения слишком сильно отличаются от того, что желательно иметь физику, и не могут принести никакой пользы. В силу этих обстоятельств я утверждаю, что картина Шредингера не является работоспособной картиной и мы должны ограничиться картиной Гейзенберга.

В этих рассуждениях я пользовался очень примитивным гамильтонианом. Можно было бы развить формализм, позволяющий работать с гораздо более сложными гамильтонианами, иллюстрирующими те же самые идеи. Такой более сильный формализм развит в одной из моих статей[1]. В § 4 этой статьи я доказал ряд теорем, полезных для нахождения кет-векторов, не лежащих в гильбертовом пространстве. Ниже я только перечислю эти теоремы. Для согласия с обозначениями, принятыми в статье, я буду вместо η писать ψ. В этих обозначениях мы имеем

$$\psi_A\psi_B + \psi_B\psi_A = 0, \qquad \psi_A\bar{\psi}_B + \bar{\psi}_B\psi_A = \delta_{AB}.$$

В дальнейшем ψ будет рассматриваться в качестве матрицы-столбца, а $\bar{\psi}$ — в качестве матрицы-строки. Введем квадратную матрицу λ, элементы которой являются c-числами.

Одна из теорем гласит

$$[\psi, \bar{\psi}\lambda\psi]_- = \lambda\psi. \qquad (7.9$$

Здесь $\bar{\psi}\lambda\psi$ — единственный элемент, так как λ — это квадратная матрица, и когда она умножается слева на матрицу-строку, а справа на матрицу-столбец, в результате получается единственный элемент. Правая часть формулы (7.9) представляет собой матрицу-столбец, так как здесь квадратная матрица λ умножается справа на матрицу-столбец ψ. Теорема проверяется путем использования антикоммутационных

[1]) Dirac P. A. M., Nuovo Cimento, Suppl. 6, 322 (1957).

соотношений — работа, не требующая изобретательности. Имеется соответствующая (7.9) теорема для сопряженных величин. Она гласит

$$[\bar{\psi}, \bar{\psi}\lambda\psi]_- = -\bar{\psi}\lambda. \tag{7.10}$$

Доказав эти две теоремы, вы легко можете перейти к доказательству соотношения

$$[\bar{\psi}\mu\psi, \bar{\psi}\lambda\psi]_- = \bar{\psi}[\mu, \lambda]_- \psi, \tag{7.11}$$

где μ — другая, подобная λ, квадратная матрица с c-числами в качестве элементов. Отсюда можно перейти к доказательству того, что

$$e^{\bar{\psi}\lambda\psi}\psi e^{-\bar{\psi}\lambda\psi} = e^{-\lambda}\psi. \tag{7.12}$$

Здесь $\bar{\psi}\lambda\psi$ — единственный элемент, и экспоненту для него можно образовать обычным способом. Соответствующая теорема имеется и для сопряженных величин

$$e^{\bar{\psi}\lambda\psi}\bar{\psi}e^{-\bar{\psi}\lambda\psi} = \bar{\psi}e^{\lambda}. \tag{7.13}$$

Таковы теоремы, полезные для последующих расчетов.

Предположим, что кет-вектор $|X\rangle$ удовлетворяет соотношению

$$(a\psi + \bar{\psi}b)\,|X\rangle = 0, \tag{7.14}$$

где a — матрица-строка из c-чисел, а b — матрица-столбец из c-чисел. Определим кет-вектор $|Y\rangle$ соотношением

$$|Y\rangle = e^{\bar{\psi}\lambda\psi}|X\rangle. \tag{7.15}$$

Тогда из (7.12) и (7.13) следует

$$(ae^{-\lambda}\psi + \bar{\psi}e^{\lambda}b)\,|Y\rangle = 0. \tag{7.16}$$

Чтобы определить кет-вектор $|X\rangle$, требуется большое число уравнений типа (7.14). К примеру, эти уравнения могли бы быть такими, чтобы все операторы поглощения электронов с положительной энергией при действии на кет-вектор $|X\rangle$ давали в результате нуль и чтобы все операторы рождения электронов с отрицательной энергией при действии на кет-вектор $|X\rangle$ в результате тоже давали нуль. Тогда мы могли бы с его помощью построить другой кет-вектор $|Y\rangle$, удовлетворяющий иному ряду линейных соотношений (7.16). Эти условия (7.16) были бы не противоречивы, если не противоречивы условия (7.14), которым удовлетворяет кет-вектор $|X\rangle$. Это значит, что все операторы $ae^{-\lambda}\psi + \bar{\psi}e^{\lambda}b$ по необходимости должны антикоммутировать друг с другом, если операторы $a\psi + \bar{\psi}b$ антикоммутируют между собой. Таким образом, мы получаем ряд согласующихся между собой соотношений для определения нового кет-вектора $|Y\rangle$.

Если мы попытаемся разложить экспоненту в (7.15), то вполне возможно, что в результате мы получим бесконечности, точно так же, как и в более примитивном примере, рассмотренном нами ранее. При этих условиях кет-вектор $|Y\rangle$ не будет принадлежать тому же самому гильбертову пространству, что и кет-вектор $|X\rangle$. Таков весьма общий способ построения кет-векторов, лежащих вне гильбертова пространства.

Разрабатывая эти вопросы несколько лет тому назад, я надеялся получить кет-вектор, лежащий вне рамок обычного гильбертова пространства, но все же пригодный для определения физического вакуума во все моменты времени и поэтому удовлетворяющий уравнению Шредингера. Оказалось, что этого сделать нельзя. Можно получить кет-вектор, удовлетворяющий требуемым условиям с некоторой степенью точности, однако при переходе к более высокой степени точности эти условия нарушаются. Это заставило меня поверить, что кет-вектор, описывающий физический вакуум во все моменты времени, получить нельзя.

ЛЕКЦИЯ 8

ЗНАЧЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Теперь мы должны рассмотреть задачу о нахождении правильного гамильтониана, который, будучи использован в квантовой теории, позволит получить описание природы. Для этого мы начнем с классического аналога, хотя бы просто по той причине, что рассуждать сразу о квантовой теории было бы слишком трудно. Мы хотим, чтобы в нашем распоряжении было нечто, способное нам помочь, и то единственное, на чью помощь мы можем рассчитывать, — это классическая модель.

Мы должны придать классической теории форму, удобную для перехода к квантовой теории. Форма теории, которая нам необходима — это гамильтонова форма. Теперь вы могли бы спросить: нельзя ли сразу же начать с классической теории в гамильтоновой форме, взяв ее в качестве отправного пункта для построения квантовой теории? Такой путь был бы неудобен, так как нам нужна релятивистская теория, а для классической механики в гамильтоновой форме далеко не просто выяснить, является теория релятивистской или нет.

Лучше начать с классического принципа действия. Является ли принцип действия релятивистским, выяснить очень легко: если само действие лоренц-инвариантно, то принцип действия, а значит, и вся теория будут релятивистскими. Таким образом, мы видим, что лучше всего нам начать с принципа действия.

Мы будем предполагать, что каждый элемент действия локален во времени. Такое предположение достаточно для существования лагранжиана, который как раз и представляет собой действие, отнесенное к единице времени. Для релятивистской теории нам следует также потребовать, чтобы каждый элемент действия был локализован в пространстве, таким образом, действие становится локализованным в пространстве-времени.

Существуют стандартные методы перехода от лагранжиана к гамильтониану. Эти методы рассмотрены в моих лекциях по квантовой механике[1]).

Давайте рассмотрим теперь связь между классической и квантовой теориями, взяв в качестве примера такую классическую теорию, которая, будучи представлена в гамильтоновой форме, не содержит никаких связей. Вопрос о включении связей я хочу пока оставить и рассмотреть сейчас лишь классическую гамильтонову теорию без связей. Чтобы проквантовать эту теорию, мы возьмем динамические переменные q и p, фигурирующие в классической гамильтоновой теории, и превратим их в q-числа. В классической теории мы имеем функцию Гамильтона и в простейших случаях мы можем предположить, что в квантовой теории у нас имеется такой же гамильтониан. Гамильтониан классической теории — это некая функция классических динамических переменных, и мы будем полагать, что гамильтониан квантовой теории — это та же самая функция квантовых динамических переменных. Мне хотелось бы, однако, обратить ваше внимание на то, что такая процедура квантования неоднозначна. При заданном классическом гамильтониане мы в общем случае не можем с определенностью сказать, каков соответствующий гамильтониан квантовой теории. Классический гамильтониан может включать произведение двух некоммутирующих сомножителей, и при переходе к квантовой теории возникает вопрос, что с таким произведением следует делать. Классическая теория ничего не говорит нам о порядке, в котором следует располагать сомножители, поэтому при пере-

---

[1]) D i r a c P. A. M., Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science Monograph Series, No. 2, 1964. (Имеется перевод: Д и р а к П. А. М., Лекции по квантовой механике, изд-во «Мир», 1968.)

ходе к квантовой теории мы должны еще решить вопрос о порядке следования сомножителей.

Необходимо, конечно, чтобы гамильтониан квантовой теории был действительным, так как он представляет собой полную энергию системы, т. е. нечто такое, что физики могут измерять и что должно быть величиной действительной. Гамильтониан квантовой теории должен быть действительным q-числом, однако этого условия действительности в общем случае недостаточно для того, чтобы однозначно определить, какой квантовый гамильтониан соответствует данному классическому гамильтониану. При заданном действительном квантовом гамильтониане мы можем добавить к нему любую действительную величину, умноженную на $\hbar$, и получить другой квантовый гамильтониан, соответствующий тому же самому классическому гамильтониану.

Таким образом, когда у нас имеется данная классическая теория, в общем случае не существует соответствующей ей единственной квантовой теории. В нашем распоряжении нет хорошо определенной процедуры перехода от классической теории к квантовой. Это означает, что когда мы строим квантовую теорию, мы должны ее строить так, чтобы она могла стоять на своих собственных ногах вне зависимости от классической теории. Единственная ценность классической теории состоит в том, что в ней содержатся кое-какие намеки, позволяющие нам получить квантовую теорию, которую затем следует трактовать как теорию, базирующуюся на своих собственных законах. Если бы мы обладали достаточными способностями, чтобы непосредственно рассматривать хорошую квантовую теорию, мы вообще могли бы обойтись без классической теории. Однако наши способности далеко не столь блистательны, и поэтому мы должны использовать все даже малейшие указания, способные облегчить нам построение хорошей квантовой теории.

Классическая теория может помочь нам в значительной степени. Она дает в наше распоряжение подходящие гамильтонианы, с которыми мы можем начать работать в квантовой теории. Мы можем заняться исследованием этих гамильтонианов и выяснить, хороши они или плохи. Когда у вас имеется один из таких гамильтонианов и вы как следует изучили его, вы можете обнаружить, что этот гамильтониан необходимо видоизменить, и все же у вас имелась некая отправная точка. Без классической теории у вас вообще не было бы такой отправной точки.

Я думаю, что в конечном счете мы достигнем такого состояния, когда построение квантовой теории можно будет осуществить без всяких ссылок на классическую теорию, точно так же, как мы теперь в состоянии построить теорию гравитации Эйнштейна, не прибегая к каким-либо ссылкам на теорию тяготения Ньютона. С точки зрения методики преподавания, я думаю, всегда следовало бы соблюдать постепенность: не ожидать слишком многого от студентов, обучать их сначала элементарным вещам и постепенно развивать их интеллектуальные способности, но такой подход всегда будет включать классическую теорию в качестве отправного пункта.

Пока дело касается построения гамильтониана, то классическая теория интересует нас лишь с точки зрения содержащихся в ней намеков. Однако в классической механике имеется еще и теория преобразований, тесно связанная с теорией преобразований квантовой механики. Эта связь возникает из-за сходства скобок Пуассона в обоих случаях. Сходство скобок Пуассона — вещь более сильная, чем просто намек. Именно в этом пункте мы имеем очень тесную связь между классической и квантовой теориями. Вы не можете изменить определение квантовых скобок Пуассона, оно однозначно диктуется аналогией с классическими скобками Пуассона.

ЛЕКЦИЯ 9

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

В качестве простого примера поля, которое может быть полезным при описании природы, мы рассмотрим действительное скалярное поле V, связанное с частицами, обладающими нулевой массой покоя.

Пространственно-временные координаты будем обозначать x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Мы будем повышать и понижать индексы, руководствуясь следующими правилами: для всякого контравариантного вектора A_μ будем полагать

$$A_0 = A^0, \quad A_r = - A^r \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Производную скалярной функции координат, например V, будем записывать в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x_\mu} = V^{,\mu}.$$

Те, кто работает в области общей теории относительности, обычно обозначают пространственно-временные координаты x^μ, что придает всем индексам смысл, противоположный принятому в настоящих обозначениях.

Начав с классической теории, мы возьмем в качестве плотности действия выражение

$$\mathscr{L} = (8\pi)^{-1} V^{,\mu} V_{,\mu}. \tag{9.1}$$

Оно приводит к уравнениям поля вида

$$V_{,\mu}^{;\mu} = 0 \quad \text{или} \quad \square V = 0, \tag{9.2}$$

где

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \, \partial x^\mu}.$$

При этом лагранжиан имеет вид

$$L = \int \mathscr{L}\, d^3x = (8\pi)^{-1} \int V_{;\mu} V^{,\mu}\, d^3x =$$
$$= (8\pi)^{-1} \int \left(\dot{V}^2 - V^{,r} V^{,r}\right) d^3x.$$

Он равен разности кинетической и потенциальной энергий, как это обычно и бывает в динамике частиц.

Динамические координаты здесь суть значения функции V во всех точках трехмерного пространства в определенный момент времени. Мы можем записать их в виде V_x, где x означает x_1, x_2, x_3. Производные по пространственно-подобным направлениям $V^{,r}$ — функции координат. Скоростями являются производные $\dot{V}_x = V^{,0}$.

Импульс U_x равен функциональной производной $\delta L/\delta \dot{V}_x$. Чтобы определить функциональную производную, мы варьируем скорости в лагранжиане L и собираем коэффициенты при $\delta \dot{V}_x$. Имеем

$$\delta L = (4\pi)^{-1} \int \dot{V}\, \delta \dot{V}\, d^3x$$

и, следовательно,

$$U = \frac{\dot{V}}{4\pi}.$$

Удобно переопределить импульс U, положив его равным $\dot{V}$, так что он будет в 4π раз больше импульса, сопряженного координате V.

При новом определении импульса U классический гамильтониан скалярного поля будет равен

$$H = (4\pi)^{-1} \int U \dot{V}\, d^3x - L = (8\pi)^{-1} \int \left(U^2 + V^{,r} V^{,r}\right) d^3x. \tag{9.3}$$

Заметьте, что H — положительно-определенная величина.

Для скобок Пуассона имеем соотношения

$$[V_x, U_{x'}] = 4\pi\delta(x_1 - x_1')\,\delta(x_2 - x_2')\,\delta(x_3 - x_3') =$$
$$= 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$[V_x, V_{x'}] = 0, \quad [U_x, U_{x'}] = 0.$$

Они представляют собой естественное обобщение соотношений для скобок Пуассона в случае частиц на бесконечное число степеней свободы поля.

Гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\dot{V}_x = [V_x, H] = \left[V_x, (8\pi)^{-1} \int U_{x'}^2 \, d^3x'\right] = U_x,$$

$$\dot{U}_x = [U_x, H] = \left[U_x, (8\pi)^{-1} \int V_{x'}^{,r'} V_{x'}^{,r'} \, d^3x'\right] = V^{,rr}.$$

Они соответствуют уравнениям поля (9.2).

Произведем теперь фурье-разложение поля. При этом давайте будем различать обозначения $V(x) = V(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $V_x = V(x_1, x_2, x_3)$, в последнем случае подразумевается, что x_0 имеет какое-то одно частное значение. Исходя из уравнений поля (9.2), мы можем положить

$$V(x) = \int \left(V_k^c e^{ikx} + \bar{V}_k^c e^{-ikx}\right) d^3k,$$

где

$$kx = k_0x_0 - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 = k_0x_0 - (\mathbf{kx})$$

и

$$k_0 = \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right)^{1/2} = |\mathbf{k}| > 0,$$

а

$$d^3k = dk_1\, dk_2\, dk_3.$$

Здесь V_k^c означает $V_{k_1k_2k_3}^c$ и является постоянным коэффициентом фурье-разложения.

При данном значении x_0

$$V_x = \int \left(V_k e^{-i(\mathbf{kx})} + \bar{V}_k e^{i(\mathbf{kx})}\right) d^3k =$$

$$= \int (V_k + \bar{V}_{-k})\, e^{-i(\mathbf{kx})}\, d^3k, \tag{9.4}$$

где

$$V_k = V_k^c e^{ik_0x_0}$$

— коэффициент фурье-разложения, зависящий от времени. Кроме того,

$$U_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_0}\right)_{x_1x_2x_3} = i \int |k| \, (V_k - \bar{V}_{-k})\, e^{-i(\mathbf{kx})}\, d^3k. \tag{9.5}$$

Эти соотношения мы можем обратить и в результате получим

$$V_k+\bar{V}_{-k}=(2\pi)^{-3}\int V_x e^{i(\mathbf{kx})}\,d^3x,$$
$$i|\mathbf{k}|(V_k-\bar{V}_{-k})=(2\pi)^{-3}\int U_x e^{i(\mathbf{kx})}\,d^3x. \qquad (9.6)$$

Координаты V_x и импульсы $U_x=\partial V_x/\partial x_0$ при данном x_0 фиксируют величину V_k для этого значения x_0. Существенно, что соотношения, связывающие V_x и U_x с V_k и $\bar{V}_{-k}$, не содержат x_0. Поэтому V_k и $\bar{V}_{-k}$ мы можем рассматривать в качестве новых динамических переменных, при этом они будут удовлетворять не уравнению

$$\dot{V}_k=\frac{\partial V_k}{\partial t}+[V_k,\ H],$$

а уравнению

$$\dot{V}_k=[V_k,\ H].$$

Необходимо с полной ясностью представлять себе взаимосвязь между переменными V_k и V_k^c. Переменные V_k — это важные для теории величины, по своей природе они являются гамильтоновыми динамическими переменными. Эти переменные и сопряженные им переменные $\bar{V}_k$ во всякий момент времени x_0 выражаются через полевые величины, взятые в тот же момент времени x_0, с помощью соотношений, которые не содержат x_0. Если поле V взаимодействует с другими полями, то переменные V_k и $\bar{V}_k$ все еще можно использовать в качестве гамильтоновых динамических переменных. С другой стороны, величины V_k^c — это интегралы уравнений движения, а не рабочие динамические переменные. Они являются интегралами уравнений движения только в том случае, когда поле V не взаимодействует с другими полями. При наличии взаимодействия их не удается определить вполне корректным образом.

В качестве следующего шага выразим гамильтониан через новые переменные V_k и $\overline{V}_k$. Мы имеем

$$\int U^2\,d^3x = -\int\int\int |\mathbf{k}||\mathbf{k}'|(V_k - \overline{V}_{-k})\,e^{-i(\mathbf{kx})}\times$$
$$\times(V_{k'} - \overline{V}_{-k'})\,e^{-i(\mathbf{k'x})}\,d^3k\,d^3k'\,d^3x =$$
$$= -8\pi^3\int\int |\mathbf{k}||\mathbf{k}'|(V_k - \overline{V}_{-k})(V_{k'} - \overline{V}_{-k'})\times$$
$$\times\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,d^3k\,d^3k' =$$
$$= -8\pi^3\int |\mathbf{k}|^2(V_k - \overline{V}_{-k})(V_{-k} - \overline{V}_k)\,d^3k,$$

$$\int V_{,r}^{2}\,d^3x = -\int\int\int k_r(V_k + \overline{V}_{-k})\,e^{-i(\mathbf{kx})}\times$$
$$\times k'_r(V_{k'} + \overline{V}_{-k'})\,e^{-i(\mathbf{k'x})}\,d^3k\,d^3k'\,d^3x =$$
$$= 8\pi^3\int \mathbf{k}^2(V_k + \overline{V}_{-k})(V_{-k} + \overline{V}_k)\,d^3k$$

и

$$H = (8\pi)^{-1}\int\left(U^2 + V_{,r}^{2}\right)d^3x =$$
$$= 2\pi^2\int \mathbf{k}^2(V_k\overline{V}_k + \overline{V}_{-k}V_{-k})\,d^3k, \tag{9.7}$$

или

$$H = 4\pi^2\int \mathbf{k}^2 V_k\overline{V}_k\,d^3k. \tag{9.8}$$

Из равенств (9.6) для скобок Пуассона получаем соотношения

$$[V_k + \overline{V}_{-k},\ V_{k'} + \overline{V}_{-k'}] = 0, \tag{9.9}$$
$$[V_k - \overline{V}_{-k},\ V_{k'} - \overline{V}_{-k'}] = 0, \tag{9.10}$$

$$i|\mathbf{k}'|[V_k + \overline{V}_{-k},\ V_{k'} - \overline{V}_{-k'}] =$$
$$= (2\pi)^{-6}\int\int [V_x e^{i(\mathbf{kx})} U_{x'} e^{i(\mathbf{k'x'})}]\,d^3x\,d^3x' =$$
$$= (16\pi^5)^{-1}\int\int e^{i(\mathbf{kx})}e^{i(\mathbf{k'x'})}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d^3x\,d^3x' =$$
$$= (16\pi^5)^{-1}\int e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}}\,d^3x =$$
$$= (2\pi^2)^{-1}\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'). \tag{9.11}$$

С помощью выражений (9.10) и (9.11) находим

$$[V_k, V_{k'} - \bar{V}_{-k'}] = \frac{-i}{4\pi^2 |\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}').$$

Из выражений (9.9) и (9.11) после замены в них k на k' имеем

$$[V_k, V_{k'} + \bar{V}_{-k'}] = \frac{i}{4\pi^2 |\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}').$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\begin{aligned} &[V_k, V_{k'}] = 0, \\ &[V_k, \bar{V}_{-k'}] = \frac{i}{4\pi^2 |\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \end{aligned} \tag{9.12}$$

или

$$[V_k, \bar{V}_{k'}] = \frac{i}{4\pi^2 |\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{9.13}$$

Теперь можно проверить уравнения движения:

$$\dot{V}_k = [V_k, H] = 4\pi^2 k^2 V_k \frac{i}{4\pi^2 |\mathbf{k}|} = i |\mathbf{k}| V_k,$$

что находится в согласии с определением

$$V_k = V_k^c e^{i |\mathbf{k}| x_0}.$$

Мы можем проквантовать нашу теорию в соответствии со статистикой Бозе. Это сводится к замене (9.12) и (9.13) выражениями

$$V_k V_{k'} - V_{k'} V_k = 0 \tag{9.14}$$

и

$$V_k \bar{V}_{k'} - \bar{V}_{k'} V_k = \frac{-\hbar}{4\pi^2 |\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{9.15}$$

Сравним эти выражения с выражениями, возникающими из представления Фока для набора осцилляторов,

$$\eta_r \eta_s - \eta_s \eta_r = 0, \qquad \bar{\eta}_r \eta_s - \eta_s \bar{\eta}_r = \delta(r - s).$$

Мы видим, что переменная V_k соответствует оператору рождения

$$V_k = (2\pi)^{-1} \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{k}|}\right)^{1/2} \eta_k,$$

а переменная $\bar{V}_k$ — оператору поглощения

$$\bar{V}_k = (2\pi)^{-1}\left(\frac{\hbar}{|\mathbf{k}|}\right)^{1/2}\bar{\eta}_k.$$

Мы не можем поставить в соответствие переменной V_k оператор поглощения, а переменной $\bar{V}_k$ оператор рождения, так как правая часть в равенстве (9.15), в том случае, когда она не нуль, отрицательна.

В квантовой теории, как и в классической, на основании соотношения (9.7) мы имеем

$$H = (8\pi)^{-1}\int\left(U^2 + V'^2\right)d^3x =$$

$$= 2\pi^2\int \mathbf{k}^2\left(V_k\bar{V}_k + \bar{V}_kV_k\right)d^3k.$$

В квантовой теории это выражение равно

$$4\pi^2\int \mathbf{k}^2 V_k\bar{V}_k\, d^3k + \text{Бесконечное } c\text{-число}. \tag{9.16}$$

В гейзенберговских уравнениях движения мы можем использовать в качестве гамильтониана любое из двух выражений:

$$H = (8\pi)^{-1}\int\left(U^2 + V'^2\right)d^3x,$$

или

$$H = 4\pi^2\int \mathbf{k}^2 V_k\bar{V}_k\, d^3k.$$

Однако в то время как первое выражение дает бесконечный вклад в вакуумную энергию, второе выражение при действии на вакуумное состояние $|0\rangle$, удовлетворяющее условию

$$\bar{V}_k|0\rangle = 0,$$

дает нуль и, таким образом, является физической энергией.

Если производить квантование в соответствии со статистикой Ферми, то следует положить

$$V_kV_{k'} + V_{k'}V_k = 0, \qquad V_k\bar{V}_{k'} + \bar{V}_{k'}V_k = \frac{\hbar}{4\pi|\mathbf{k}|}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Взятое в качестве гамильтониана выражение

$$H = (8\pi)^{-1} \int (U^2 + V^{\cdot r^2}) \, d^3x$$

теперь уже не является удовлетворительным, так как оно приводит к неправильной зависимости переменной V_k от времени, и тогда энергию нельзя сделать локальной. По этой причине квантование скалярного поля по статистике Ферми лишено интереса.

ЛЕКЦИЯ 10

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Возникает вопрос: является ли квантовая теория скалярного поля в случае статистики Бозе на самом деле релятивистской? Классическая теория, разумеется, — теория релятивистская.

В процессе перехода от классической теории к квантовой делаются новые предположения. Нельзя быть уверенным, что новые предположения носят релятивистский характер, ибо они относятся к гамильтоновым переменным, а все гамильтоновы переменные определяются нерелятивистским образом. Они определяются как относящиеся к одному частному моменту времени. Мы должны проверить, действительно ли наша квантовая теория является релятивистской. Мы пользуемся классической теорией лишь для того, чтобы сформулировать квантовую теорию, после этого мы должны рассмотреть вопрос об удовлетворительности квантовой теории, оперируя выкладками, которые всецело принадлежат самой квантовой теории.

В рассматриваемом случае мы должны проверить, зависят ли наши коммутационные соотношения от той лоренцевой системы отсчета, в которой мы работаем. Это можно проверить непосредственно, получив выражение для коммутатора между величинами V, взятыми в двух различных пространственно-временных точках, и выяснив вопрос о релятивистской инвариантности полученного результата. Здесь мы рассмотрим случай скалярного поля как такового. Если имеются другие поля, взаимодействующие с нашим скалярным полем, выкладки должны проводиться несколько иначе.

Мы имеем

$$[V_k, \overline{V}_{k'}] = i(4\pi^2 |\mathbf{k}|)^{-1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Предстоящие нам выкладки удобнее производить, используя постоянные коэффициенты Фурье вместо коэффициентов Фурье, зависящих от времени. Между ними имеется связь

$$V_k^c = V_k e^{-i|\mathbf{k}|x_0}$$

и, разумеется,

$$\overline{V}_k^c = \overline{V}_k e^{i|\mathbf{k}|x_0}.$$

Давайте выведем выражение для скобок Пуассона двух таких постоянных коэффициентов Фурье:

$$\left[V_k^c, \overline{V}_{k'}^c\right] = [V_k, \overline{V}_{k'}] e^{-i|\mathbf{k}|x_0} e^{i|\mathbf{k}'|x_0} =$$

$$= i(4\pi^2 |\mathbf{k}|)^{-1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Полученный результат означает, что для постоянных коэффициентов Фурье имеет место точно такая же формула, что и для коэффициентов Фурье, зависящих от времени. Кроме того, разумеется, имеет место соотношение

$$\left[V_k^c, V_{k'}^c\right] = 0.$$

Некоммутативность появляется только в том случае, когда у нас имеется одна переменная V и одна переменная $\overline{V}$.

Возьмем теперь выражение

$$[V(x), V(x')] =$$

$$= \int\int \left[V_k^c e^{ikx} + \overline{V}_k^c e^{-ikx}, \overline{V}_{k'}^c e^{ik'x'} + \overline{V}_{k'}^c e^{-ik'x'}\right] d^3k\, d^3k'.$$

Здесь kx означает четырехмерное скалярное произведение. Далее получаем

$$[V(x), V(x')] =$$

$$= \frac{i}{4\pi^2} \int\int \frac{1}{|\mathbf{k}|} (e^{ikx} e^{-ik'x'} - e^{-ikx} e^{ik'x'}) \times$$

$$\times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, d^3k\, d^3k' =$$

$$= \frac{i}{4\pi^2} \int |\mathbf{k}|^{-1} [e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')}]\, d^3k,$$

где k_0 означает $|\mathbf{k}|$. Это выражение удобнее преобразовывать, переписав его в виде

$$\frac{i}{4\pi^2}\int|\mathbf{k}|^{-1}\left\{e^{ik(x-x')}-e^{-ik(x-x')}\right\}\delta(k_0-|\mathbf{k}|)\,d^4k,$$

где k_0 — теперь независимая переменная. Изменим выше знак всех k во втором члене. Тем самым подразумевается, что мы приписываем k_0 отрицательное значение, однако в этом нет ничего страшного, так как k_0 теперь — независимая переменная. Таким образом, получаем

$$\frac{i}{4\pi^2}\int|\mathbf{k}|^{-1}e^{ik(x-x')}\left[\delta(k_0-|\mathbf{k}|)-\delta(k_0+|\mathbf{k}|)\right]d^4k. \quad (10.1)$$

Вот каков результат, и теперь мы хотим выяснить вопрос о его лоренц-инвариантности.

Пусть у нас есть четырех-вектор с компонентами a_0, a_1, a_2, a_3. Тогда функция $\delta(a_\mu a^\mu)$ лоренц-инвариантна. Функция $\delta(a^\mu a_\mu)$ разбивается на две части: одна из них относится к положительным значениям a_0, другая — к отрицательным значениям a_0. Мы можем изменить знак той части, которая относится к отрицательным a_0, и все же получим лоренц-инвариантную функцию

$$\frac{a_0}{|a_0|}\delta(a^\mu a_\mu).$$

На самом деле она выглядит лоренц-инвариантной, так как в нее входит значение a_0, относящееся к одной определенной лоренцевой системе отсчета, однако лоренцева система отсчета, которую мы выбираем, не влияет на существо дела, потому что частное $a_0/|a_0|$ — это всего лишь знак плюс или минус, причем этот знак один и тот же в любой лоренцовой системе отсчета, поскольку мы не рассматриваем обращение времени.

Мы определим функцию $\Delta(a)$, положив ее равной

$$\frac{2a_0}{|a_0|}\delta(a_\mu a^\mu).$$

Эта Δ-функция лоренц-инвариантна и весьма важна для полевой теории частиц с нулевой массой покоя.

Давайте немного займемся ее изучением. Мы можем написать

$$a^\mu a_\mu = a_0^2 - |\mathbf{a}|^2 = (a_0 - |\mathbf{a}|)(a_0 + |\mathbf{a}|).$$

Далее всегда, когда у нас имеется выражение вида $\delta(xy)$, оно равно

$$|x|^{-1}\delta(y) + |y|^{-1}\delta(x).$$

Это — общая формула теории распределений, и мы можем легко ее проверить, подставляя оба члена в качестве сомножителя в интеграл и выполняя интегрирование.

Применим этот результат к нашему определению Δ. Мы получим

$$\Delta(a) = \frac{2a_0}{|a_0|}\left[|a_0 + |\mathbf{a}||^{-1}\delta(a_0 - |\mathbf{a}|) + \right.$$

$$\left. + |a_0 - |\mathbf{a}||^{-1}\delta(a_0 + |\mathbf{a}|)\right].$$

Теперь в первом члене мы можем положить a_0 равным $|\mathbf{a}|$ и получить в знаменателе $2|\mathbf{a}|$, поэтому первый член будет равен $|\mathbf{a}|^{-1}\delta(a_0 - |\mathbf{a}|)$. Аналогично второй член равен $-|\mathbf{a}|^{-1}\delta(a_0 + |\mathbf{a}|)$ и для $\Delta(a)$ мы найдем

$$\Delta(a) = |\mathbf{a}|^{-1}[\delta(a_0 - |\mathbf{a}|) - \delta(a_0 + |\mathbf{a}|)]. \tag{10.2}$$

Выражение (10.1) теперь принимает вид

$$\frac{i}{4\pi^2}\int e^{ik(x-x')}\Delta(k)\,d^4k. \tag{10.3}$$

Это доказывает, что оно представляет собой лоренц-инвариантную функцию.

Функция Δ — интересная функция, она заслуживает дальнейшего изучения. Мне хотелось бы отметить некоторые ее свойства. Что получится, если произвести преобразование Фурье? Мне нет необходимости выполнять вычисления. Результат гласит

$$\int \Delta(k)\,e^{ika}d^4k = 4\pi^2 i\Delta(a). \tag{10.4}$$

Как видите, получается та же самая функция. Мы можем заменить здесь a на x и найти

$$\int \Delta(k)\, e^{ikx}\, d^4k = 4\pi^2 i \Delta(x). \tag{10.5}$$

Таким образом, $\Delta(k)$ — это такая функция, которая при фурье-преобразовании переходит сама в себя, если отвлечься от числового коэффициента.

Мы можем использовать этот результат в выражении (10.3) и получить

$$[V(x), V(x')] = -\Delta(x - x'). \tag{10.6}$$

Таково окончательное выражение. Оно означает, что функция поля V, будучи взята в двух пространственно-временных точках, коммутирует всегда, кроме случая, когда эти две точки лежат на световом конусе $(x - x')^2 = 0$. В последнем случае мы имеем сингулярность типа δ-функции.

Хотелось бы упомянуть ряд других свойств Δ-функции. Мы имеем

$$\Delta(-a) = -\Delta(a),$$

поэтому Δ-функция — нечетная функция, она меняет знак, когда вы изменяете знаки всех компонент четырех-вектора a. Если $a_0 = 0$, то $\Delta(a) = 0$. Из определения не вполне ясно, чему именно равна функция $\Delta(a)$ в начале координат, однако, приняв во внимание свойства антисимметричности, вы убедитесь, что она должна исчезать в начале координат и всюду на трехмерной поверхности $a_0 = 0$.

Другое свойство Δ-функции, которое я хочу вывести, — это значение ее производной при $a_0 = 0$. Давайте вычислим $(\partial/\partial a_0)\Delta(a)$ и затем положим $a_0 = 0$. Наиболее непосредственно мы можем получить интересующий нас результат, воспользовавшись фурье-разложением (10.4):

$$\frac{\partial \Delta(a)}{\partial a_0} = \frac{1}{4\pi^2} \int k_0 e^{ika} \Delta(k)\, d^4k =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{k_0}{|\mathbf{k}|} [\delta(k_0 - |\mathbf{k}|) - \delta(k_0 + |\mathbf{k}|)]\, e^{ika}\, d^4k =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int [\delta(k_0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k_0 + |\mathbf{k}|)]\, e^{ika}\, d^4k.$$

Положив теперь $a_0 = 0$, получим

$$\left.\frac{\partial\Delta(a)}{\partial a_0}\right|_{a_0=0} = \frac{1}{4\pi^2}\int[\delta(k_0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k_0 + |\mathbf{k}|)]\, e^{-i(\mathbf{ka})}\, d^4k.$$

Здесь $(\mathbf{ka})$ — уже трехмерное скалярное произведение. В подынтегральном выражении k_0 содержится лишь под знаком δ-функции, поэтому интегрирование по k_0 тривиально. Результат имеет вид

$$\left.\frac{\partial}{\partial a_0}\Delta(a)\right|_{a_0=0} = 4\pi\delta(\mathbf{a}).$$

Теперь мы можем понять характер сингулярности, имеющейся у Δ-функции в начале координат. Сама функция в начале координат исчезает, а ее производная по a_0, рассматриваемая как функция a_1, a_2, a_3, представляет собой обычную трехмерную δ-функцию.

Мне хотелось бы, чтобы вы обратили внимание на соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial a_\mu \partial a^\mu}\Delta(a) = 0. \tag{10.7}$$

Оно сейчас же следует из фурье-преобразования.

Если вы будете рассматривать значения a в качестве пространственных координат, то Δ-функция будет целиком складываться из волн, распространяющихся со скоростью света. Эти волны образуют своего рода импульс, сначала это приходящий импульс, который движется к началу координат, проходит через него и выходит оттуда, все еще оставаясь импульсом. Вот каким образом следует представлять себе Δ-функцию. В самом начале координат Δ-функция исчезает, но ее производная по времени в нуль не обращается. Таковы важнейшие свойства Δ-функции.

Вы видите, по какой причине она появляется в теории поля в уравнении для коммутатора $[V(x), V(x')]$. Для последнего вам, очевидно, необходимо иметь некое выражение, которое можно разложить по компонентам Фурье, целиком распространяющимся со скоростью света, потому что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} V(x) = 0,$$

а если вы подействуете оператором $\partial^2/\partial x_\mu \partial x^\mu$ на выражение $[V(x), V(x')]$, то в результате найдете

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu}[V(x), V(x')] = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} V(x), V(x')\right] = 0.$$

Это совпадает с соотношением

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x^\mu} \Delta(x - x') = 0,$$

что и завершает доказательство релятивистской инвариантности скалярной теории поля даже в квантовом случае. Все наши коммутационные соотношения лоренц-инвариантны. Можно было бы проделать соответствующие вычисления для ненулевой массы покоя. Результаты по существу остаются такими же. Правда, при этом Δ-функция уже не появляется; здесь мы имеем другое выражение: оно содержит функции Бесселя, но его лоренц-инвариантность можно доказать аналогичным образом.

ЛЕКЦИЯ 11

ЭЛЕКТРОННОЕ ПОЛЕ

В случае электронного поля мы имеем четыре комплексные полевые функции ψ_a $(a = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Для удобства их можно рассматривать как четыре элемента матрицы-столбца ψ. Предполагается, что они удовлетворяют уравнению поля

$$i\hbar\left(\psi^{\cdot\,0} + \alpha_r \psi^{\cdot\,r}\right) - m\alpha_m \psi = 0, \tag{11.1}$$

где различные α — эрмитовы матрицы 4×4; они умножаются на матрицу-столбец ψ согласно правилам матричного умножения. Любые две из них антикоммутируют, а квадрат каждой равен единице. Уравнения поля (11.1) — уравнения релятивистские, если четыре компоненты ψ преобразуются правильно при лоренцевых преобразованиях. Они должны преобразовываться в соответствии с законом преобразования спиноров.

Комплексно сопряженные полевые величины $\bar{\psi}_a$ рассматриваются в качестве матрицы-строки $\bar{\psi}$. Таким образом, матричное произведение $\bar{\psi}\alpha\psi$ для любой из матриц α сводится к единственному элементу. Уравнение, комплексно сопряженное уравнению (11.1), имеет вид

$$i\hbar\left(\bar{\psi}^{\cdot\,0} + \bar{\psi}^{\cdot\,r}\alpha_r\right) + m\bar{\psi}\alpha_m = 0. \tag{11.2}$$

Давайте сначала рассмотрим поле классически. Так как уравнения поля имеют первый порядок по $\partial/\partial x_0$, им очень легко придать гамильтонову форму. Можно убедиться, что правильные уравнения поля (11.1) и (11.2) получаются, если взять

$$H = \int \left(-i\hbar\bar{\psi}_x \alpha_r \psi_x^{\cdot\,r} + m\bar{\psi}_x \alpha_m \psi_x\right) d^3x \tag{11.3}$$

со скобками Пуассона

$$\begin{aligned} [\psi_{ax}, \psi_{bx'}] &= 0, \\ i\hbar [\psi_{ax}, \bar{\psi}_{bx'}] &= \delta_{ab}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \end{aligned} \tag{11.4}$$

Здесь обозначение ψ_{ax} следует понимать так, как понималось обозначение V_x в лекции 9; ψ_a — функция в точке x_1, x_2, x_3 для какого-то определенного времени x_0. Фигурирующая в соотношениях (11.3) и (11.4) постоянная $\hbar$ в классической теории — всего лишь параметр.

Следует заметить, что гамильтониан (11.3) действителен: если подынтегральное выражение в (11.3) заменить комплексно сопряженным, а затем произвести интегрирование по частям, мы вернемся к первоначальному выражению.

Это классическая теория; чтобы проквантовать ее, удобно ввести компоненты Фурье. В случае скалярного поля мы сначала проводили четырехмерное разложение Фурье и от него переходили к трехмерному. Здесь же мы можем выполнить трехмерное разложение Фурье непосредственно. Положим

$$\psi_x = h^{-3/2} \int e^{i(\mathbf{px})/\hbar} \psi_p \, d^3p.$$

Сопряженное равенство имеет вид

$$\psi_p = h^{-3/2} \int e^{-i(\mathbf{xp})/\hbar} \psi_x \, d^3x.$$

Все это справедливо для каждой из четырех компонент. Подобно ψ_x, функция ψ_p имеет четыре компоненты и ее следует понимать как матрицу-столбец.

Выразим теперь гамильтониан через фурье-компоненты:

$$H = h^{-3/2} \int\int \bar{\psi}_x (\alpha_r p_r + \alpha_m m) e^{i(\mathbf{xp})/\hbar} \psi_p \, d^3x \, d^3p =$$

$$= \int \bar{\psi}_p (\alpha_r p_r + \alpha_m m) \psi_p \, d^3p. \tag{11.5}$$

Мы видим, что выражение $\alpha_r p_r + \alpha_m m$ представляет собой оператор энергии, связанный с каждой фурье-компонентой ψ_p.

Имеется четыре фурье-компоненты ψ_p. Оператор $\alpha_r p_r + \alpha_m m$ имеет положительные собственные значения для двух из них и отрицательные собственные значения для двух других. Положительно-энергетические и отрицательно-энергетические фурье-компоненты перемешаны, для дальнейшего мы должны отделить их друг от друга и рассматривать порознь. С этой целью нам нужно преобразовать матрицу

$$\alpha_r p_r + \alpha_m m$$

к диагональному виду, что можно сделать с помощью подходящего унитарного преобразования.

Мы выберем U_p таким образом, чтобы

$$U_p \overline{U}_p = 1$$

и чтобы выражение

$$U_p (\alpha_r p_r + \alpha_m m) \overline{U}_p$$

было диагональной матрицей. Диагональные матричные элементы равны взятому со знаком плюс или минус квадратному корню из выражения $\mathbf{p}^2 + m^2$, так как

$$(\alpha_r p_r + \alpha_m m)^2 = \mathbf{p}^2 + m^2,$$

и поэтому собственные значения матрицы $(\alpha_r p_r + \alpha_m m)$ равны $\pm (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Таким образом, после приведения к диагональному виду матрица $\alpha_r p_r + \alpha_m m$ будет равна

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Допустим, что мы нашли интересующую нас унитарную матрицу U_p. Таких матриц можно найти много; они определены далеко не однозначно, но любая из них пригодна для наших целей. Мы можем написать

$$U_p (\alpha_r p_r + \alpha_m m) \overline{U}_p = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} V, \qquad (11.6)$$

где матрица V имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь преобразуем гамильтониан H:

$$H = \int \bar{\psi}_p \overline{U}_p U_p (\alpha_r p_r + \alpha_m m) \overline{U}_p U_p \psi_p \, d^3p.$$

Я просто вставил сюда произведение $\overline{U}_p U_p$, которое равно единице. Далее получаем

$$H = \int \bar{\psi}_p \overline{U}_p (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} V U_p \psi_p \, d^3p.$$

Положим теперь

$$U_p \psi_p = \varphi_p.$$

Функция φ_p также имеет четыре компоненты. В результате находим

$$H = \int (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \bar{\varphi}_p V \varphi_p \, d^3p.$$

Мы сделали преобразование, с помощью которого разделили положительно- и отрицательно-энергетические части полевой функции ψ. Если мы выпишем выражение для H полностью, то оно будет иметь вид

$$H = \int (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} (\bar{\varphi}_{1p}\varphi_{1p} + \bar{\varphi}_{2p}\varphi_{2p} - \bar{\varphi}_{3p}\varphi_{3p} - \bar{\varphi}_{4p}\varphi_{4p}) \, d^3p. \tag{11.7}$$

Мы могли проквантовать это выражение для H в соответствии со статистикой Бозе; в результате получилась бы теория, в которой некоторые частицы имели бы отрицательную энергию. В этом случае гамильтониан содержал бы какие-то отрицательно-энергетические члены, что привело бы к нефизической теории частиц с отрицательной энергией, которая нам не нужна. С другой стороны, мы могли бы воспользоваться опять-таки квантованием в соответствии со статистикой Бозе, но изменить гамильтониан, поставив знак плюс перед третьим и четвертым членами в выражении (11.7). Это дало бы нам теорию, где имеются только частицы с положительной энергией, но тогда мы нарушили бы локальность гамильтониана.

В рассматриваемой теории мы не можем применить квантование по статистике Бозе, не вводя при этом частиц с отрицательной энергией или же не нарушая условия локальности. Однако мы можем прибегнуть к квантованию по статистике Ферми, не нарушая в то же время локальности теории и оставляя в ней лишь частицы с положительной энергией. Вот почему для полей рассматриваемого типа мы используем квантование по статистике Ферми.

С учетом условий квантования по статистике Ферми мы можем в качестве гамильтониана взять выражение

$$H = \int (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} (\bar{\varphi}_{1p}\varphi_{1p} + \bar{\varphi}_{2p}\varphi_{2p} + \varphi_{3p}\bar{\varphi}_{3p} + \varphi_{4p}\bar{\varphi}_{4p})\, d^3p. \tag{11.8}$$

Оно отличается от выражения (11.7) на бесконечную постоянную. Выше мы изменили порядок следования φ_{3p}, и $\bar{\varphi}_{3p}$, и φ_{4p}, и $\bar{\varphi}_{4p}$, что при квантовании по статистике Ферми обязывает нас ввести дополнительный знак минус и, кроме того, добавить постоянную. Таким образом, новый гамильтониан, если отвлечься от постоянного бесконечно большого c-числа, равен первоначально взятому гамильтониану. Бесконечно большое c-число, разумеется, не сказывается при использовании этого гамильтониана в гейзенберговских уравнениях движения. Оно начинает играть роль лишь тогда, когда мы пытаемся интерпретировать гамильтониан как полную энергию.

Если мы теперь собираемся использовать выражение (11.8) в качестве гамильтониана и иметь дело лишь с частицами, обладающими положительной энергией, то каждый оператор, стоящий в произведении справа, должен быть оператором поглощения, чтобы при действии этого оператора на вакуумный кет-вектор получался нуль. Тогда для вакуумного кет-вектора $|0\rangle$ мы имеем

$$H\,|0\rangle = 0,$$

если принять во внимание, что

$$\varphi_{1p}\,|0\rangle = \varphi_{2p}\,|0\rangle = \bar{\varphi}_{3p}\,|0\rangle = \bar{\varphi}_{4p}\,|0\rangle = 0.$$

Вот каким образом следует определять вакуумный кет-вектор в этом случае. Такой способ определения является единственно возможным, если мы хотим, чтобы все наши частицы обладали положительной энергией. При этом предполагается, что операторы $\bar{\varphi}_{1p}$, $\bar{\varphi}_{2p}$, φ_{3p}, φ_{4p} — операторы рождения, а операторы φ_{1p}, φ_{2p}, $\bar{\varphi}_{3p}$, $\bar{\varphi}_{4p}$ — операторы уничтожения. Что касается компонент φ_1 и φ_2 поля φ, то для них мы имеем просто-напросто обычную схему вторичного квантования по отношению к испусканию и поглощению положительно-энергетических электронов, которые проявляют себя как обычные электроны. В случае же компонент φ_3 и φ_4 мы обменяли операторы испускания и поглощения местами по сравнению с тем, что давала бы прямая процедура квантования. Это означает, что мы пользуемся такой картиной, в которой реальными физическими объектами являются дырки, если иметь в виду картину, получающуюся при прямом методе вторичного квантования. Эти дырки являются позитронами.

Мы должны интерпретировать φ_{3p} и φ_{4p} как операторы испускания позитронов с импульсом $-\mathbf{p}$. В примитивном методе вторичного квантования, где φ_{3p} и φ_{4p} представляют собой операторы поглощения электронов в состояниях с отрицательной энергией, эти операторы означают поглощение некоторого количества движения $\mathbf{p}$. Если же мы намерены переинтерпретировать их, т. е. считать операторами испускания, то тогда они должны стать операторами рождения частиц с импульсом $-\mathbf{p}$. Разумеется, $\bar{\varphi}_{1p}$ и $\bar{\varphi}_{2p}$ — операторы рождения электронов с импульсом $+\mathbf{p}$.

Соотношения (11.4) для классических скобок Пуассона с учетом квантования по статистике Ферми заменяются соотношениями

$$[\varphi_{ap}, \varphi_{bp'}]_+ = \varphi_{ap}\varphi_{bp'} + \varphi_{bp'}\varphi_{ap} = 0$$

и

$$[\varphi_{ap}, \bar{\varphi}_{bp'}]_+ = \delta_{ab}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

Это — основные антикоммутационные соотношения, возникающие при квантовании электронного поля по статистике Ферми.

Как все это будет выглядеть, если мы выполним обратное преобразование и вернемся к функции поля ψ? Давайте получим соответствующие выражения. Мы, очевидно, имеем

$$[\psi_{ap}, \psi_{bp'}]_+ = 0.$$

Далее

$$[\psi_{ap}, \bar{\psi}_{bp'}]_+ = [\bar{U}_{pac}\varphi_{cp}, \bar{\varphi}_{dp'}U_{p'db}]_+.$$

Матричные элементы матриц U_p и $\bar{U}_p$ — это простонапросто числа. Их можно вынести из-под знака антикоммутатора, поэтому мы получаем

$$[\psi_{ap}, \bar{\psi}_{bp'}]_+ = \bar{U}_{pac}U_{p'db}\delta_{cd}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \delta_{ab}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

где мы воспользовались соотношением

$$\bar{U}_{pac}U_{pcb} = \delta_{ab}.$$

Таким образом, антикоммутационные соотношения для ψ точно такие же, как и для φ. Унитарное преобразование этого типа не нарушает антикоммутационных соотношений.

Теперь мы можем продвинуться в наших преобразованиях еще на один шаг и вернуться к первоначальным функциям ψ_x:

$$[\psi_{ax}, \psi_{bx'}]_+ = 0$$

и

$$[\psi_{ax}, \bar{\psi}_{bx'}]_+ = \delta_{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Обратное преобразование Фурье от переменных p к переменным x не затрагивает антикоммутационных соотношений.

Наш гамильтониан совпадает с первоначальным гамильтонианом (11.3) классической теории, за исключением бесконечной постоянной. Разумеется, эта бесконечная постоянная как раз и представляет энергию моря электронов с отрицательной энергией.

Теперь я хочу получить формулу для полного заряда. Каждый электрон вносит вклад $-e$ в полный заряд, а каждый позитрон вносит вклад $+e$, поэтому

$$Q = -e \int [\bar{\varphi}_{1p}\varphi_{1p} + \bar{\varphi}_{2p}\varphi_{2p} - \varphi_{3p}\bar{\varphi}_{3p} - \varphi_{4p}\bar{\varphi}_{4p}]\, d^3p =$$

$$= -e \int [\bar{\varphi}_{1p}\varphi_{1p} + \bar{\varphi}_{2p}\varphi_{2p} + \bar{\varphi}_{3p}\varphi_{3p} + \bar{\varphi}_{4p}\varphi_{4p}]\, d^3p +$$

$$+ \text{Бесконечная постоянная.}$$

Бесконечная постоянная соответствует общему заряду всех электронов с отрицательной энергией. Приведенное выше выражение после отбрасывания бесконечной постоянной принимает вид

$$-e \int \bar{\psi}_p\psi_p\, d^3p = -e \int \bar{\psi}_x\psi_x\, d^3x.$$

Поэтому можно сказать, что у нас имеется плотность заряда

$$j_0 = -e\bar{\psi}_x\psi_x;$$

при этом мы пренебрегаем бесконечной постоянной плотностью заряда. Таким образом, не принимая во внимание бесконечную постоянную, мы получаем теорию, в которой локализованы как плотность энергии, так и плотность заряда.

Из одноэлектронной теории нам известно, как функции ψ ведут себя при преобразованиях Лоренца. В настоящей теории со вторичным квантованием они ведут себя подобным же образом. Если мы произведем преобразование Лоренца, то обнаружим, что с плотностью заряда связана плотность тока

$$j_r = -e\bar{\psi}_x\alpha_r\psi_x.$$

Плотность заряда и плотность тока можно объединить в одну формулу:

$$j_\mu = -e\bar{\psi}_x\alpha_\mu\psi_x, \tag{11.9}$$

где под α_0 понимается единичная матрица. Выше мы опустили бесконечную постоянную, добавляющуюся к j_0 и соответствующую плотности заряда всех электронов с отрицательной энергией.

ЛЕКЦИЯ 12

ЭЛЕКТРОННОЕ ПОЛЕ

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Начав с классической теории и воспользовавшись правилами квантования в соответствии со статистикой Ферми, мы получили квантовую теорию, изложенную в лекции 11. Остается вопрос: является ли данная теория действительно релятивистской? Процедура квантования включает использование одной определенной лоренцевой системы отсчета. Это не такая процедура, которая явно лоренц-инвариантна, следовательно, возникает необходимость проверить лоренц-инвариантность квантовой теории с помощью прямых вычислений, проводимых в рамках самой квантовой теории.

Это можно осуществить с помощью метода, аналогичного тому, которым мы пользовались при квантовании скалярного поля по статистике Бозе. Возьмем две полевых функции в двух любых пространственно-временных точках и посмотрим, чему равен их антикоммутатор. Мы, очевидно, имеем

$$[\psi_a(x), \psi_b(x')]_+ = 0.$$

Здесь x в аргументе функции означает пространственно-временную точку с координатами x_0, x_1, x_2, x_3 (использовавшийся выше индекс x относился к трехмерному пространству в подразумевающийся момент времени). Положим далее

$$[\psi_a(x), \bar{\psi}_b(x')]_+ = K_{ab}(x, x').$$

Теперь мы могли бы вычислить этот антикоммутатор, выражая обе полевые функции через их компоненты Фурье. Мы знаем антикоммутационные соотношения между компонентами Фурье, т. е. имеем достаточно данных, чтобы выполнить интересующие нас расчеты. Мы можем получить этот результат и более прямым способом, замечая, что величина K обладает некоторыми свойствами, которых достаточно для ее определения, и что ответ на вопрос, какова должна быть величина K, обладающая этими свойствами, достаточно очевиден.

Величина K обладает следующими свойствами.

1. Переменные x и x' входят в $K_{ab}(x, x')$ только в виде разности $(x_\mu - x'_\mu)$. То, что здесь может фигурировать только разность, очевидно, поскольку все выражение инвариантно по отношению к пространственным трансляциям.

2. Она удовлетворяет волновому уравнению

$$\left[\alpha_\mu i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) - \alpha_m m\right]_{ab} K_{bc}(x - x') = 0.$$

Оператор

$$\left[\alpha_\mu i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) - \alpha_m m\right]_{ab}$$

действует только на функцию $\psi_b(x)$, стоит ли она слева или справа от функции $\bar{\psi}_c(x')$, а при действии этого оператора на функцию $\psi_b(x)$ получается нуль, так как $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению (11.1). Таким образом, величина $K(x - x')$ также удовлетворяет волновому уравнению.

3. При $x_0 = x'_0$

$$K_{ab}(x, x') = \delta_{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Это третье равенство представляет собой просто-напросто имевшееся у нас раньше антикоммутационное соотношение для полевых функций, взятых в двух точках в один и тот же момент времени.

Величина K обладает этими тремя свойствами, и, обратно, этих трех свойств достаточно для определения величины K. Мы можем убедиться, что в соответствии со сказанным условие 3 определяет величину K при $x_0 = x'_0$. Теперь, если вы оставите переменную

x'_0 фиксированной, а переменной x_0 дадите возможность изменяться, волновое уравнение скажет вам, как при этом изменяется величина K. Таким образом, величина K определена для всех значений x_0 при заданном значении x'_0. Но тогда условие 1 укажет вам, каким образом меняется K при изменении x'_0. Следовательно, эти три условия определяют величину K полностью, и если мы сможем написать для K такое выражение, которое удовлетворяет указанным трем условиям, мы будем знать, что это выражение правильное.

Величина K, почти с очевидностью удовлетворяющая этим трем условиям, имеет вид

$$K_{ab}(x, x') = h^{-3} \int \sum \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha_r p_r + \alpha_m m}{p_0}\right)_{ab} e^{-i(x-x')p/h} d^3p. \tag{12.1}$$

Здесь p_0 означает $\pm(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ и сумма распространяется на оба значения p_0. Давайте теперь проверим, что это выражение для K удовлетворяет условиям, о которых говорилось. Условие 1 выполняется вполне очевидно. Выполнение условия 2 тоже довольно очевидно, так как при действии дифференциального оператора на K в подынтегральном выражении слева появится множитель $(p_0 - \alpha_r p_r - \alpha_m m)$, который после умножения на $[1 + (\alpha_r p_r + \alpha_m m)/p_0]$ даст нуль. Проверим теперь, удовлетворяется ли условие 3. Положим x_0 равным x'_0. Это значит, что член, содержащий p_0 в экспоненте, исчезает, и мы получаем

$$\delta_{ab} h^{-3} \int e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\mathbf{p}/h} d^3p = \delta_{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Следовательно, все три условия выполняются, и выражение (12.1) для K является искомым значением антикоммутатора.

Теперь мы хотим показать, что величина K лоренц-инвариантна. Мы можем записать ее в виде

$$K_{ab}(x - x') = J_0 + \alpha_r J_r + \alpha_m J_m, \tag{12.2}$$

где

$$
\begin{aligned}
J_0 &= h^{-3} \int e^{-i(x-x')p/h}\, d^3p, \\
J_r &= \tfrac{1}{2} h^{-3} \int \sum p_r e^{-i(x-x')p/h} \frac{d^3p}{p_0}, \qquad (12.3) \\
J_m &= \tfrac{1}{2} h^{-3} \int \sum m e^{-i(x-x')p/h} \frac{d^3p}{p_0}.
\end{aligned}
$$

Давайте посмотрим, каким образом эти три интеграла ведут себя при преобразованиях Лоренца.

Возьмем интеграл J_m. Мы можем записать его в виде

$$
J_m = h^{-3} \int m e^{-i(x-x')p/h} \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) \frac{p_0}{|p_0|}\, d^4p,
$$

где p_0 — теперь независимая переменная. Чтобы убедиться, что оба выражения для интеграла J_m эквивалентны, преобразуем δ-функцию

$$
\begin{aligned}
\delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) &= \delta\left\{\left[p_0 + (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right]\left[p_0 - (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right]\right\} = \\
&= \left|p_0 + (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right|^{-1} \delta\left[p_0 - (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right] + \\
&+ \left|p_0 - (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right|^{-1} \delta\left[p_0 + (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right] = \\
&= \left[2(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right]^{-1} \times \\
&\times \left\{\delta\left[p_0 - (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right] + \delta\left[p_0 + (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, δ-функция приводит к появлению двух слагаемых в соответствии с тем, что p_0 имеет два значения: $p_0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$ и $p_0 = -(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$; это и дает вам как раз те два слагаемых, которые фигурируют в выражении (12.3). Интеграл J_m в такой форме, очевидно, лоренц-инвариантен; все четыре переменные p_μ входят сюда на одинаковых основаниях, поэтому J_m равен инварианту, который нам нет необходимости вычислять.

Другие интегралы J можно рассмотреть соответствующим образом. Все их можно объединить в одну формулу

$$
J_\mu = h^{-3} \int p_\mu e^{-i(x-x')p/h} \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2) \frac{p_0}{|p_0|}\, d^4p.
$$

Мы видим, что J_μ равняется некоторому четырех-вектору, а это в свою очередь говорит нам, каким образом коэффициенты J ведут себя при преобразовании Лоренца.

Запишем выражение (12.2) для K в виде

$$K = \alpha_0 J_0 + \alpha_r J_r + \alpha_m J_m,$$

где $\alpha_0 = 1$; глядя на это выражение, вы могли бы подумать, что оно неправильное, так как вы, возможно, склонны считать, что здесь вместо члена $\alpha_r J_r$ должен стоять $-\alpha_r J_r$, чтобы в результате получалось лоренц-инвариантное выражение. Тем не менее знак плюс совершенно правильный. Мы можем написать

$$K = \alpha_m \alpha_\mu \alpha_m J^\mu + \alpha_m J_m. \qquad (12.4)$$

Вы видите, что это дает правильный знак, так как, полагая $\mu = 1, 2, 3$, вы в лице α_μ имеете величину, которая антикоммутирует с α_m и дает нам знак минус, служащий для компенсации того минуса, который появляется при поднимании индекса.

Давайте применим теперь к величине K, задаваемой формулой (12.4), преобразование Лоренца и посмотрим, что с ней происходит. Мы можем сделать преобразование Лоренца, меняющее векторы согласно правилу

$$A^*_\mu = a^\nu_\mu A_\nu,$$

где коэффициенты a^ν_μ удовлетворяют равенству

$$a^\nu_\mu a^{\mu\rho} = g^{\nu\rho}.$$

Обратное преобразование гласит

$$A_\nu = a^\mu_\nu A^*_\mu.$$

Легко проверить, что эти соотношения согласуются друг с другом и сохраняют квадрат длины вектора.

Предположим теперь, что под действием этого преобразования Лоренца функция ψ преобразуется в функцию

$$\psi^* = L\psi,$$

где L — некоторая матрица 4×4. Тогда

$$\bar{\psi}^* = \bar{\psi}\bar{L}.$$

Заметим теперь, что величина K_{ab} преобразуется подобно произведению $\psi_a \bar{\psi}_b$, поэтому

$$K^* = LK\bar{L} = L\alpha_m \alpha_\mu \alpha_m \bar{L} J^\mu + L\alpha_m \bar{L} J_m. \qquad (12.5)$$

Из одноэлектронной теории нам известно, что величина $\bar{\psi}\alpha_\mu\psi$ преобразуется как четырех-вектор. И действительно, это выражение есть четырех-вектор плотности тока. Последнее означает, что

$$\bar{\psi}^* \alpha_\mu \psi^* = a_\mu^\nu \bar{\psi} \alpha_\nu \psi.$$

Стоящее здесь в левой части выражение равно $\bar{\psi}\bar{L}\alpha_\mu L\psi$. Полученный результат имеет место для любой волновой функции ψ, следовательно, мы находим

$$\bar{L}\alpha_\mu L = a_\mu^\nu \alpha_\nu. \qquad (12.6)$$

Теперь мы, кроме того, знаем, что $\bar{\psi}\alpha_m\psi$ — инвариант и что он равен

$$\bar{\psi}^* \alpha_m \psi^* = \bar{\psi}\bar{L}\alpha_m L\psi,$$

поэтому

$$\bar{L}\alpha_m L = \alpha_m. \qquad (12.7)$$

В выражениях (12.6) и (12.7) матрица $\bar{L}$ стоит слева, а матрица L — справа, а нам, чтобы оценить выражение (12.5), желательно иметь какие-нибудь соотношения, где эти матрицы стоят в другом порядке — матрица L слева, матрица $\bar{L}$ справа. Умножая равенство (12.7) слева на $L\alpha_m$, находим

$$L\alpha_m \bar{L} \alpha_m L = L.$$

Мы можем сократить матрицу L, стоящую справа в обеих частях последнего равенства, так как эта матрица с неисчезающим детерминантом. Затем мы можем перенести матрицу α_m в другую часть равенства и получить

$$L\alpha_m \bar{L} = \alpha_m. \qquad (12.8)$$

Умножим равенство (12.6) на $L\alpha_m$ слева и на $\alpha_m\bar{L}$ справа:

$$L\alpha_m\bar{L}\alpha_\mu L\alpha_m\bar{L} = \overset{\nu}{\alpha_\mu} L\alpha_m\alpha_\nu\alpha_m\bar{L}.$$

Используя выражение (12.8), получаем

$$\alpha_m\alpha_\mu\alpha_m = \overset{\nu}{a_\mu} L\alpha_m\alpha_\nu\alpha_m\bar{L}. \qquad (12.9)$$

Теперь мы подставим в формулу (12.5) вместо J^μ его выражение через $J^{\mu*}$:

$$K^* = L\alpha_m\alpha_\nu\alpha_m\bar{L}\overset{\nu}{a_\mu} J^{\mu*} + L\alpha_m\bar{L}\overset{*}{J}_m.$$

Используя соотношения (12.9) и (12.8), находим

$$K^* = \alpha_m\alpha_\mu\alpha_m J^{\mu*} + \alpha_m\overset{*}{J}_m.$$

Здесь, как вы видите, величина K^* имеет тот же вид, что и величина K, этим и доказывается лоренц-инвариантность антикоммутационных соотношений. Таким образом, лоренц-инвариантность всей теории в целом установлена.

ЛЕКЦИЯ 13

ПОЛЯ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

В результате выполненной нами работы мы получили удовлетворительную квантовую теорию скалярного поля, т. е. поля бозонов, а также теорию электронного поля с квантованием по статистике Ферми. Однако это — удовлетворительная квантовая теория полей самих по себе. Чтобы получить что-нибудь интересное, мы должны включить взаимодействие.

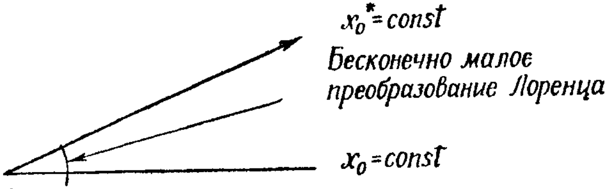
Метод включения взаимодействия состоит в следующем: вы складываете разные гамильтонианы различных свободных полей, а затем добавляете к гамильтониану дополнительный член, соответствующий энергии взаимодействия. Возникает вопрос: что мы будем брать в качестве энергии взаимодействия? Мы можем исходить из классической теории, которая предоставит нам возможность выбрать энергию взаимодействия. Мы можем заимствовать эту энергию взаимодействия из классической теории, тогда мы будем иметь соответствующую квантовую теорию. Затем мы должны будем проверить с помощью вычислений, выполненных всецело в рамках квантовой теории, является ли эта теория правильной. В частности, мы должны проверить, действительно ли наша теория при наличии взаимодействия лоренц-инвариантна. Чтобы сделать это, мы должны решить уравнения поля, представляющие собой гейзенберговские уравнения движения, и проверить, являются ли они лоренц-инвариантными. Затем мы должны проверить, являются ли наши коммутационные или антикоммутационные соотношения лоренц-инвариантными.

Сейчас я хочу обсудить, каким образом следует подходить к вопросу о лоренц-инвариантности коммутационных или антикоммутационных соотношений в том случае, когда имеется взаимодействие. Работа, выполненная нами в лекциях 10 и 12, показывает, что с этим вопросом все обстоит благополучно, когда взаимодействие отсутствует. Нам предстоит обобщить полученные результаты таким образом, чтобы учесть наличие взаимодействия.

Вы, конечно, могли бы сказать, давайте-ка будем пользоваться прежним методом и тогда, когда есть взаимодействие. Такой путь оказывается чрезвычайно трудным, так как под знаком коммутатора или антикоммутатора у нас стоят величины, относящиеся к различным моментам времени. Если же вы хотите сравнивать величины, относящиеся к различным моментам времени, вы должны проинтегрировать гейзенберговские уравнения движения. Интегрирование же гейзенберговских уравнений движения в том случае, когда имеется взаимодействие, процесс очень сложный. Нам необходим какой-нибудь иной метод.

Вместо того чтобы брать две произвольные точки в пространстве-времени, что на самом деле более чем необходимо, давайте начнем с рассмотрения коммутационных соотношений, связывающих полевые величины, взятые в один определенный момент времени, другими словами, полевые величины на трехмерной поверхности пространства-времени $x_0 = \text{const}$. Применим к ним бесконечно малое преобразование Лоренца для того, чтобы перейти к другой трехмерной поверхности, которая наклонена по отношению к первой. Затем давайте посмотрим, что собой представляют коммутационные или антикоммутационные соотношения для полевых величин на этой новой трехмерной поверхности. Если бы мы смогли убедиться, что с ними дело обстоит благополучно, мы знали бы тогда, что коммутационные или антикоммутационные соотношения остаются инвариантными при бесконечно малых преобразованиях Лоренца, а если они инвариантны при бесконечно малых преобразованиях Лоренца, то они будут инвариантны и при конечных преобразованиях Лоренца.

Начнем с наших различных полевых величин на поверхности пространства-времени $x_0 = \text{const}$ и путем бесконечно малого преобразования Лоренца перейдем к поверхности $x_0^* = \text{const}$, как это показано на пространственно-временной диаграмме:



Нам известны коммутационные или антикоммутационные соотношения между величинами, взятыми в заданный момент времени x_0; предполагается, что эти соотношения не затрагиваются взаимодействием. Исходя из них, мы вычислим коммутационные или антикоммутационные соотношения при $x_0^* = \text{const}$.

Преобразование Лоренца будет включать в себя изменение временной координаты

$$x_0^* = x_0 + \varepsilon V_r x_r,$$

где ε — бесконечно малая величина; εV_r характеризует относительную скорость двух систем отсчета; V_r суть c-числа. Величиной ε^2 мы будем пренебрегать. Возьмем теперь две полевые величины K и λ: это могут быть и U, и V, и ψ_a, и $\bar{\psi}_a$. Мы имеем

$$K_x(x_0^*) = K_x(x_0) + (x_0^* - x_0)\frac{dK}{dx_0} = K_x(x_0) + \varepsilon V_r x_r [K_x, H],$$

где H — полный гамильтониан, включающий взаимодействие. С величиной λ мы поступим таким же образом:

$$\lambda_{x'}(x_0^*) = \lambda_{x'}(x_0) + \varepsilon V_s x'_s [\lambda_{x'}, H].$$

Вычислим теперь скобки Пуассона этих двух величин:

$$[K_x(x_0^*), \lambda_{x'}(x_0^*)] = [K_x(x_0), \lambda_{x'}(x_0)] + \varepsilon V_r x_r [[K_x, H], \lambda_{x'}] +$$
$$+ \varepsilon V_s x'_s [K_x, [\lambda_{x'}, H]] = [K_x(x_0), \lambda_{x'}(x_0)] +$$
$$+ \varepsilon V_r (x'_r - x_r)[K_x, [\lambda_{x'}, H]] + \varepsilon V_r x_r [[K_x, \lambda_{x'}], H]; \quad (13.1)$$

второе выражение для скобок Пуассона получено с помощью тождества Якоби.

Имеются иногда такие случаи, когда интерес представляют не скобки Пуассона двух полевых величин, а их антикоммутатор, например, если обе они являются функциями ψ или же одна из них ψ, а другая $\bar{\psi}$. Поэтому мы должны произвести вычисления и для антикоммутатора. Мы имеем

$$[K_x(x_0^*)\,\lambda_{x'}(x_0^*)]_+ = [K_x(x_0),\,\lambda_{x'}(x_0)]_+ + \\ + \varepsilon V_r x_r \big[[K_x,\,H],\,\lambda_{x'}\big]_+ + \varepsilon V_r x'_r \big[K_x,\,[\lambda_{x'},\,H]\big]_+.$$

Вы замечаете, что в этой формуле у нас имеются и антикоммутаторы, и скобки Пуассона. Когда в обкладки входит гамильтониан, мы должны сохранять скобки Пуассона. Наша формула состоит из смеси антикоммутаторов и скобок Пуассона, но мы можем обращаться с ней, как и раньше,

$$[K_x(x_0^*),\,\lambda_{x'}(x_0^*)]_+ = [K_x(x_0),\,\lambda_{x'}(x_0)]_+ + \\ + \varepsilon V_r(x'_r - x_r)\big[K_x,\,[\lambda_{x'},\,H]\big]_+ + \varepsilon V_r x_r \big\{[K_x,\,[\lambda_{x'},\,H]]_+ + \\ + \big[[K_x,\,H],\,\lambda_{x'}\big]_+\big\}. \qquad (13.2)$$

Исходя из обозначений, указанных в примечании на стр. 69, мы можем написать

$$[[a,\,b]_+,\,c]_- = [a,\,[b,\,c]_-]_+ + [[a,\,c]_-,\,b]_+. \qquad (13.3)$$

Мы можем проверить эту формулу просто-напросто непосредственным перемножением с учетом правил некоммутативной алгебры и убедиться, что здесь все в порядке. Таким образом, у нас есть формула для антикоммутаторов, аналогичная тождеству Якоби. С ее помощью мы можем написать

$$\{[K_x,\,[\lambda_{x'},\,H]]_+ + [[K_x,\,H],\,\lambda_{x'}]_+\} = [[K_x,\,\lambda_{x'}]_+,\,H].$$

Но тогда выражение (13.2) становится аналогичным выражению (13.1), и возникает возможность объединить их:

$$[K_x(x_0^*), \lambda_{x'}(x_0^*)]_\pm = [K_x(x_0), \lambda_{x'}(x_0)]_\pm +$$
$$+ \varepsilon V_r(x'_r - x_r)[K_{x'}, [\lambda_{x'}, H]]_\pm + \varepsilon V_r x_r \big[[K_x, \lambda_{x'}]_\pm, H \big]. \tag{13.4}$$

Эта формула содержит два результата: для скобок Пуассона, или коммутатора, и для антикоммутатора.

До сих пор K и λ были совершенно произвольными полевыми величинами. Теперь в качестве этих величин я собираюсь взять основные полевые переменные. Пусть K_x означает одну из переменных V_x, U_x, ψ_{ax}, $\bar{\psi}_{ax}$, а $\lambda_{x'}$ — одну из переменных $V_{x'}$, $U_{x'}$, $\psi_{ax'}$, $\bar{\psi}_{ax'}$. При таких условиях

$$[K_x, \lambda_{x'}]_\pm = 0,$$

или же

$$[K_x, \lambda_{x'}]_\pm = \pm\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

И действительно, все основные полевые величины, с которыми мы уже имели дело, удовлетворяют коммутационным или антикоммутационным соотношениям такого типа. В правой части этих соотношений либо стоит нуль, либо $+\delta$-функция или же в крайнем случае $-\delta$-функция. Таким образом, выражение

$$[K_x, \lambda_{x'}]_\pm = c\text{-число}$$

и

$$\big[[K_x, \lambda_{x'}]_\pm, H\big] = 0.$$

Если взять более сложные локальные величины, например взять в качестве величин K и λ функции переменных U и V, то, разумеется, это не будет выполняться. Однако нас интересуют лишь коммутационные соотношения между основными полевыми величинами.

В связи с этим мы можем выбросить последний член в формуле (13.4). Посмотрим теперь, что же у нас остается:

$$[K_x(x_0^*), \lambda_{x'}(x_0^*)]_\pm = [K_x(x_0), \lambda_{x'}(x_0)]_\pm + \\ + \varepsilon V_r(x_r' - x_r)[K_x, [\lambda_{x'}, H_P]]_\pm + \\ + \varepsilon V_r(x_r' - x_r)[K_x, [\lambda_{x'}, H_Q]]_\pm .$$

Я принял во внимание, что гамильтониан H равен собственной энергии H_P плюс энергия взаимодействия H_Q. Собственная энергия означает энергию самих полей без всякого взаимодействия, а H_Q — энергию взаимодействия, которая добавляется к энергии H_P.

Теперь мы посмотрим, каковы же те условия, при которых коммутационные или антикоммутационные соотношения остаются лоренц-инвариантными. Мы знаем (это мы доказали ранее), что они лоренц-инвариантны, когда взаимодействие отсутствует. Конечно, нам желательно, чтобы взаимодействие не нарушало коммутационных или антикоммутационных соотношений, а это означает, что

$$(x_r' - x_r)[K_x, [\lambda_{x'}, H_Q]]_\pm = 0, \tag{13.5}$$

$$[K_x, [\lambda_{x'}, H_Q]]_\pm = \text{Величина, пропорциональная } \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Положим

$$H_Q = \int W_{Qx}\, d^3x,$$

где W_{Qx} — плотность энергии взаимодействия. Я предполагаю, что мы имеем дело с локальной теорией, в которой взаимодействие определяется плотностью энергии взаимодействия, проинтегрированной по всему трехмерному пространству. Сейчас мы должны выбрать эту функцию W_Q таким образом, чтобы удовлетворить условию (13.5). Мы видим, что указанное условие выполняется, если W_{Qx} представляет собой функцию переменных U_x, V_x, ψ_{ax}, $\bar{\psi}_{ax}$, которая не содержит пространственных производных. Вообще говоря, плотность энергии взаимодействия могла бы, разумеется, включать и пространственные производные, т. е. производные по переменным x_1, x_2, x_3, но предположим, что нами взят случай, когда это не так. Тогда вы видите, что скобки Пуассона гамильтониана H_Q и переменной $\lambda_{x'}$ будут включать полевые величины в точке x' без всяких производных, и коммутатор или антикоммутатор этих скобок Пуассона с величиной K_x даст выражение, пропорциональное δ-функции, но не ее производным.

Таким образом, здесь мы имеем существенный класс плотностей энергии взаимодействия, которым мы можем воспользоваться и который, мы уверены, не нарушает лоренц-инвариантности коммутационных или антикоммутационных соотношений. Этот класс взаимодействий достаточен для практических целей. С теоретической точки зрения полученный результат можно слегка обобщить, но такое обобщение, как оказалось, не приносит пользы.

Таково формальное доказательство лоренц-инвариантности. Его можно было бы раскритиковать на том основании, что в процессе доказательства мы не используем должным образом свойства δ-функции, так как при этом мы берем близкие друг к другу точки поля и разлагаем коммутатор или антикоммутатор в ряд Тейлора по разности $(x-x')$. Если же эти две точки поля очень близки друг к другу, то выражение $[K_x, \lambda_{x'}]_\pm$ нельзя, вообще говоря, разложить в ряд Тейлора по разности $(x-x')$. То, что это невозможно, является очевидным, поскольку в том случае, когда рассматриваемые точки x и x' лежат на световом конусе $(x-x')^2=0$, у нас появляется сильная сингулярность.

Способ использования δ-функции, приведенный выше, не является корректным, однако наши вычисления можно исправить с помощью довольно простого приема. Образуем выражения

$$\int a_x K_x\, d^3x \quad \text{и} \quad \int b_{x'} \lambda_{x'}\, d^3x',$$

где a_x и b_x — непрерывные c-числовые функции трех переменных x, а затем рассмотрим коммутатор

$$\left[\int a_x K_x\, d^3x, \int b_{x'} \lambda_{x'}\, d^3x'\right].$$

Он представляет собой некое выражение, которое не содержит никаких δ-функций. Оно содержит всего лишь интегрирование по x и x', так что вполне допустимо, рассчитывая изменение этого выражения при преобразовании Лоренца, воспользоваться разложением Тейлора, связывающим величины в момент x с величинами в момент x_0. Затем мы могли бы проделать все выкладки, выполненные нами ранее, только наши равенства нам пришлось бы умножить на a_x и $b_{x'}$ и проинтегрировать по x и x'. При этом, разумеется, вообще не появится никаких δ-функций.

Вы можете таким путем сделать вычисления корректными. Правда, будет довольно утомительно выписывать все эти равенства с дополнительными множителями — равенства на самом деле будут весьма длинными, но все это, как вы видите, вполне возможно, и вам не придется пользоваться никакими неудовлетворительными разложениями Тейлора. Поэтому приведенные вычисления в том виде, как я дал их, хотя и не являются удовлетворительными, их можно исправить довольно простым способом. Таким образом, мы приходим к прежнему заключению о лоренц-инвариантности коммутационных или антикоммутационных соотношений при условии, что энергия взаимодействия удовлетворяет вышеприведенным требованиям.

ЛЕКЦИЯ 14

СВЯЗИ

Теперь я хочу перейти к другому вопросу, к вопросу о связях в квантовой теории. Когда мы исходим из классической теории и придаем ей гамильтонову форму, вполне допустимо, что у нас могут появиться связи, т. е. уравнения, содержащие только переменные q и p. Связи бывают двух видов: связи первого рода и связи второго рода.

Связи второго рода можно исключить. С помощью подходящей модификации определения скобок Пуассона уравнения связей второго рода можно рассматривать в качестве сильных равенств или определений. Остается вопрос о связях первого рода. Сейчас мы должны рассмотреть общую задачу о гамильтониане со связями первого рода и выяснить: каким образом все это следует перенести в квантовую теорию?

Полный обзор вопроса о классических связях приведен в моей книге, упомянутой в примечании на стр. 76. Квантовая теория должна быть переформулирована на языке гейзенберговской картины и без всяких ссылок на картину Шредингера.

Уравнения связей — это слабые равенства, записываемые в виде $\varphi_m \approx 0$. Такая запись означает, что они должны использоваться в соответствии с определенными правилами. Сначала я дам классические правила.

Связи можно складывать. Их можно умножать на коэффициенты, которые могут быть функциями переменных q и p. Связи нельзя использовать под знаком скобок Пуассона, т. е. в общем случае $[\varphi_m, f] \neq 0$.

Теперь мы должны установить подходящие квантовые правила. Мы сохраняем правила сложения.

А как обстоит дело с умножением? Если мы можем умножать уравнения связей на некие множители с обеих сторон, то тогда мы можем образовать и квантовые скобки Пуассона, а это мы делать не должны, поскольку в классической теории образовывать скобки Пуассона не разрешается. Каким же образом мы обойдем возникающую возможность образовать скобки Пуассона? Мы сделаем это, принимая в качестве правила, что слабые уравнения связей допустимо умножать на коэффициенты только с одной стороны, например только с левой. Поэтому в качестве нашего второго правила примем: умножение можно выполнять, ставя множитель, являющийся функцией переменных q и p, слева, а умножение справа в общем случае недопустимо. Следовательно, мы не сможем образовать скобки Пуассона.

Таковы те правила, которыми мы будем руководствоваться при работе со слабыми равенствами или иначе связями в квантовой теории. Они нарушают симметрию между левым и правым умножением. Эта симметрия, всегда имевшаяся в нашем распоряжении вплоть до настоящего момента, оказывается нарушенной, если мы имеем дело с квантовой теорией, содержащей связи.

Когда мы имеем слабые равенства в классической теории, они по необходимости должны удовлетворять определенным условиям непротиворечивости. Классические условия непротиворечивости имеют вид

$$[\varphi_m, \varphi_n] \approx 0. \tag{14.1}$$

Мы примем, что в квантовой теории условия непротиворечивости имеют такой же вид.

Условия непротиворечивости в классической теории можно записать в виде сильных равенств:

$$[\varphi_m, \varphi_n] = a_{mnj}\varphi_j. \tag{14.2}$$

Все, что в слабом смысле равно нулю, должно в сильном смысле равняться некоторой комбинации связей φ, так как связи φ — это единственные независимые величины, в слабом смысле равные нулю. В квантовой теории условия непротиворечивости также можно записать в виде сильных равенств наподобие (14.2), но коэффициенты при этом должны располагаться слева. В классической теории не имеет никакого значения, где стоят коэффициенты a_{mnj} — справа или слева, однако при переходе к квантовой теории мы должны потребовать, чтобы коэффициенты a_{mnj} располагались слева.

В классической теории гамильтониан является величиной первого рода. Это означает, что

$$[\varphi_m, H] \approx 0. \tag{14.3}$$

Мы сохраним это условие и в квантовой теории. Такие слабые равенства можно записать в виде сильных равенств:

$$[\varphi_m, H] = b_{mn}\varphi_n, \tag{14.4}$$

и в квантовой теории мы опять-таки должны потребовать, чтобы коэффициенты располагались слева.

Таковы правила обращения со связями в квантовой теории. Может быть, сейчас вас несколько смущает наш отказ от симметрии между левым и правым умножением; вы можете спросить: имеет ли какое-либо значение то обстоятельство, что мы должны отказаться от этой симметрии? Этот отказ важен в одном отношении, а именно в отношении нашего определения действительных q-чисел. Вопрос о действительности q-чисел мы должны рассмотреть заново.

Прежде чем приступать к этому, мне хотелось бы остановиться на дальнейшем развитии теории. Давайте воспользуемся уравнениями связей $\varphi_m \approx 0$ в качестве условий, налагаемых на кет-вектор $|P\rangle$:

$$\varphi_m |P\rangle = 0. \tag{14.5}$$

Естественно возникает вопрос: можем ли мы найти кет-вектор, удовлетворяющий всем этим условиям? Позвольте мне немного поработать с этими условиями, чтобы увидеть, получим ли мы непротиворечивость. На основании соотношений

$$\varphi_m |P\rangle = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_n |P\rangle = 0$$

мы можем заключить, что

$$\varphi_m\varphi_n|P\rangle = 0 \qquad \text{и} \qquad \varphi_n\varphi_m|P\rangle = 0$$

и, следовательно,

$$[\varphi_n, \varphi_m]|P\rangle = 0.$$

Последнее условие не является независимым от предыдущих. Как вытекает из соотношения (14.2), оно лишь означает

$$a_{nmj}\varphi_j|P\rangle = 0.$$

Поэтому, работая с ограничениями типа (14.5), налагаемыми на кет-вектор, мы с помощью указанной процедуры не можем получить новых ограничений и в силу этого обстоятельства можем предположить, что кет-вектор $|P\rangle$ существует.

Таким образом, принимая во внимание наши правила обращения со связями, мы можем использовать последние для определения кет-векторов с помощью соотношений типа (14.5), но мы не можем употребить связи для определения бра-векторов; это попросту невозможно, так как в данном случае множители стояли бы не с той стороны. Кет-вектор, удовлетворяющий этим условиям, называется *физическим кет-вектором*. Таково определение.

Назовем теперь, по определению, q-число *физическим*, если оно, будучи умноженным на физический кет-вектор, снова даст физический кет-вектор. Физические кет-векторы образуют подпространство пространства всех кет-векторов, а физические q-числа являются операторами, действующими в этом подпространстве. Если α — физическое q-число, то для любой связи φ_n мы имеем

$$\varphi_n\alpha|P\rangle = 0$$

и, следовательно, при любом физическом кет-векторе $|P\rangle$

$$(\varphi_n\alpha - \alpha\varphi_n)|P\rangle = 0,$$

поэтому

$$[\varphi_n, \alpha] \approx 0. \tag{14.6}$$

Обратно, условие (14.6) гарантирует нам, что α является физическим q-числом.

Пожалуй, сейчас я должен отметить, чтобы дать вам представление о физической стороне дела, что позднее мы применим всю эту теорию к электродинамике и там обнаружится, что условие физичности как раз совпадает с условием калибровочной инвариантности. Физические q-числа соответствуют величинам, обладающим калибровочной инвариантностью, а физические кет-векторы — это калибровочно инвариантные кет-векторы.

Если α и β — физические q-числа, то, как видно, сумма $\alpha+\beta$ — тоже физическое q-число, и, разумеется, произведения $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ — также физические q-числа. Скобки Пуассона величин α и β — тоже величина физическая. В силу этого физические операторы образуют кольцо. Их можно без опасений складывать и перемножать, получая из них в результате другие физические операторы.

Как показывают равенства (14.3), гамильтониан H является физическим оператором. Мы видим, что если α — физическая величина, то такой же будет и производная $\dot{\alpha}=[\alpha, H]$. Таким образом, если величина α первоначально была физической, то и всегда она будет оставаться физической.

Перейдем теперь к вопросу о комплексно сопряженных q-числах. Сейчас мы видим, что можно определить комплексно сопряженное q-число только в том случае, если оно — физическое q-число. Мы можем ввести это определение таким же способом, как и в лекции 3 для случая отсутствия связей. Мы предполагаем, что у каждого физического q-числа α имеется комплексно сопряженное q-число $\bar{\alpha}$, которое также является физическим, и что

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta} \quad \text{и} \quad \overline{\alpha\beta}=\bar{\beta}\bar{\alpha}.$$

Каждая связь φ_m сама, по определению, величина физическая. Ее следует считать действительной, так как для всякого физического кет-вектора она обращается в нуль.

Такие предположения относительно комплексно сопряженных q-чисел нельзя, вообще говоря, распространить на нефизические q-числа. В этом можно убедиться следующим образом. Мы видели, что связь φ_m действительная. Равенство, выражающее этот факт, можно было бы записать в виде слабого равенства:

$$\varphi_m \approx \bar{\varphi}_m.$$

Аналогично для всякого q-числа α величина $\alpha\varphi_m$ в слабом смысле действительная:

$$\alpha\varphi_m \approx \overline{\varphi_m \alpha}.$$

Взяв теперь величину α действительной и применив второе из правил (14.7), мы получим

$$\alpha\varphi_m \approx \varphi_m \alpha.$$

В случае произвольного q-числа α этот результат ошибочен, но для физического q-числа α в соответствии с соотношением (14.6) здесь все в порядке. Таким образом, в нашем распоряжении имеется непротиворечивая схема лишь до тех пор, пока мы ограничиваемся применением нашего понятия комплексно сопряженного q-числа к физическим q-числам. Фактически этого вполне достаточно для приложений теории.

Важность определения понятия действительности состоит в том, что оно позволяет нам прийти к выводу о действительных собственных значениях действительных физических q-чисел, а это-то и есть самое главное для связи нашей теории с измерениями. Тот факт, что у нас нет определения понятия действительности для нефизических динамических переменных, ровным счетом ничего не значит, так как они не являются теми величинами, которые можно было бы измерить. Таково общее положение вещей со связями и с комплексно сопряженными q-числами в квантовой теории.

Существует один специальный случай, когда понятие комплексного сопряжения можно ввести и для нефизических q-чисел. С этим случаем мы имеем дело, когда все коэффициенты a_{mnj} и b_{mn} в соотношениях (14.2) и (14.4) коммутируют со всеми связями φ, так, например, если все коэффициенты суть c-числа. Тогда

$$[\varphi_m, \varphi_n] = a_{mnj}\varphi_j = \varphi_j a_{mnj},$$
$$[\varphi_m, H] = b_{mn}\varphi_n = \varphi_n b_{mn}.$$

В приведенном частном случае в наших основных равенствах отсутствует асимметрия между правым и левым умножением, и мы можем строить теорию симметричным образом по отношению к правому и левому умножению. При этом мы можем сохранить для q-чисел определение комплексного сопряжения и тогда, когда q-числа не являются физическими. Таким образом, здесь мы имеем такой специальный случай, когда понятия действительности и комплексного сопряжения удается сохранить для нефизических q-чисел.

Как оказывается, этот специальный случай реализуется в электродинамике. Электродинамика — одно из важнейших приложений теории связей. Другое важное приложение — это гравитационное поле или же любая теория с криволинейными координатами. Тогда у нас имеются связи, выражающие те условия, в силу которых наши уравнения должны оставаться инвариантными при преобразованиях координат. При связях, ассоциирующихся с криволинейными координатами, мы уже не имеем рассматриваемого специального случая и лишены возможности ввести понятие действительного q-числа для нефизических q-чисел. Тогда мы можем ввести понятие действительности только для физических q-чисел: это будут такие q-числа, которые не должны зависеть от системы координат.

ЛЕКЦИЯ 15

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ БЕЗ ЗАРЯДОВ

Теперь я хотел бы приступить к систематическому изложению электродинамики. Прежде всего рассмотрим само электромагнитное поле. Мы можем воспользоваться классической электродинамикой в качестве основы для получения квантовой теории. Классической теории можно придать различную форму. Сейчас я намерен поработать с теорией в форме, которая предложена Ферми и в которой мы используем связь

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \approx 0. \tag{15.1}$$

Эта форма теории чаще всего применяется на практике; перед другими формами теории она обладает тем преимуществом, что в ней гораздо больше симметрии между четырьмя координатами пространства-времени.

Классическая плотность действия $\mathscr{L}$ для такой формы электродинамики дается выражением

$$4\pi\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} A_{\mu}^{;\,\mu} A_{\nu}^{;\,\nu}, \tag{15.2}$$

где

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\,\mu} - A_{\mu,\,\nu}.$$

Теперь посмотрим, что отсюда получается. Во-первых, выражение (15.2) можно представить в виде

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} A_\mu A_{\nu}^{;\,\nu\mu} + \text{Полная производная.}$$

Далее, полученный результат мы можем заменить на выражение

$$-\frac{1}{2} A_{\mu,\,\nu}\left(A^{\mu,\,\nu} - A^{\nu,\,\mu}\right) - \frac{1}{2} A_{\mu}^{;\,\nu} A_{\nu}^{;\,\mu} + \\ + \text{Другая полная производная,}$$

тогда у нас останется

$$4\pi\mathscr{L} = -\frac{1}{2} A_{\mu,\,\nu} A^{\mu,\,\nu} + \text{Полная производная.} \qquad (15.3)$$

Полная производная не влияет на уравнения поля, и ее можно отбросить.

Теперь наша плотность действия для каждого значения μ как раз равна плотности действия скалярного поля (9.1) с нулевой массой покоя, за исключением иного знака при $\mu = 0$. Мы имеем здесь плотность действия для четырех скалярных полей. До тех пор пока мы касаемся плотности действия и пренебрегаем связями (15.1), мы имеем четыре независимых скалярных поля. Оказалось, что эти четыре поля снабжены индексом $\mu = 0, 1, 2, 3$ как четыре компоненты четырех-вектора, однако такое обозначение не имеет никакого отношения к вопросу о выводе уравнений движения из принципа действия. Вы можете сразу же установить, что уравнения движения простонапросто имеют вид

$$\Box A_{\mu} = 0,$$

т. е. похожи на уравнение (9.2). Эти уравнения движения, как очевидно, согласуются с дополнительным условием (15.1). Далее мы поступаем следующим образом: работаем с плотностью действия в форме (15.2) или (15.3) и вводим условие Лоренца (15.1) в качестве дополнительного ограничения, наложенного на наши динамические переменные; при этом мы видим, что указанное дополнительное условие находится в согласии с нашими уравнениями движения.

Начнем теперь применять наш обычный метод получения гамильтониана. Введем так же, как для скалярного поля в лекции 9, импульсные переменные $-4\pi B^{\mu}$, сопряженные переменным A_{μ}. Знак минус мы поставили здесь для того, чтобы все величины $4\pi B_{\mu}$ при $\mu = 1, 2, 3$ оказались сопряженными переменным A_{μ}. Тогда переменные B_{μ} определяются как $B_{\mu} = A_{\mu}^{\cdot 0}$, а их скобки Пуассона имеют вид

$$[A_{\mu x}, B_{\nu x'}] = -4\pi g_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \qquad (15.4)$$

Теперь для гамильтониана (обозначим его H_F) получаем

$$H_F = -(8\pi)^{-1} \int \left(B_\mu B^\mu + A_{\mu}{}^{,r} A^{\mu,}{}_{r} \right) d^3x. \qquad (15.5)$$

Это выражение есть просто гамильтониан (9.3) четырех скалярных полей, но поле с индексом $\mu = 0$ входит со знаком минус. Степени свободы, связанной с переменными A_0 и B_0, соответствует отрицательный вклад в энергию. Если же мы положим $\mu = 1, 2, 3$, то вклад в энергию получится, как обычно, положительный.

До сих пор это была всего лишь теория четырех скалярных полей. Теперь мы должны ввести ограничение (15.1), наложенное на потенциалы. Давайте выясним, какие условия налагаются из-за него на гамильтоновы переменные, взятые в определенный момент времени. Эти условия будут представлять собой гамильтоновы связи. Для одного конкретного момента времени мы должны положить

$$A_{\mu}{}^{,\mu} = 0 \qquad (15.6)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left(A_{\mu}{}^{,\mu} \right) = 0. \qquad (15.7)$$

Соотношения (15.6) и (15.7) будут независимыми, если мы будем рассматривать их как условия, имеющие место в какой-то один момент времени. Таким образом, здесь мы имеем два независимых условия, которым обязаны подчиняться потенциалы A. Это и есть все независимые условия, так как дальнейшее условие типа

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_0} A_{\mu}{}^{,\mu} = 0$$

является следствием предшествующих условий и уравнений поля $\Box A_\mu = 0$. Последнее условие, как и все другие, которые мы получаем последовательным дифференцированием по времени, не является независимым, а следует из уравнений движения.

Условие (15.6), выраженное через гамильтоновы переменные, имеет вид

$$B_0 + A_{r}{}^{,r} \approx 0. \qquad (15.8)$$

Условие (15.7) с помощью уравнения поля $\square A_0 = 0$ можно записать как

$$A_{0}{}^{,rr} + A_{r}{}^{,0r} = 0.$$

Это просто-напросто уравнение Максвелла div $\mathcal{E} = 0$. Условие (15.7), выраженное через гамнльтоновы переменные, гласнт

$$B_{r}{}^{,r} + A_{0}{}^{,rr} \approx 0. \qquad (15.9)$$

Соотношення (15.8) и (15.9) содержат все гамнльтоновы связи. Каждое нз этнх соотношений представляет собой трехмерное бесконечное многообразие связей, по одной на каждую точку x_1, x_2, x_3 трехмерного пространства. Мы можем записать их в внде

$$\varphi_1 \approx 0, \qquad \varphi_2 \approx 0,$$

где φ_1 и φ_2 определены соотношениями

$$\varphi_1 = B_0 + A_{r}{}^{,r}, \qquad \varphi_2 = B_{r}{}^{,r} + A_{0}{}^{,rr}. \qquad (15.10)$$

Для проверкн условия непротнворечнвостн (14.1) мы должны убедиться в том, что

$$[\varphi_{1x}, \varphi_{1x'}] \approx 0, \qquad [\varphi_{1x'}, \varphi_{2x'}] \approx 0, \qquad [\varphi_{2x}, \varphi_{2x'}] \approx 0. \quad (15.11)$$

Это выясняется вполне непосредственно. Фактически, все напнсанные соотношення выполняются как сильные равенства, причем все коэффнцненты a_{mnj} нз (14.2) исчезают.

Мы проквантуем изложенную теорию, рассматривая четыре переменные A как четыре скалярных поля и прнменяя статистику Бозе. До тех пор пока мы не нспользуем связи, четыре скалярных поля совершенно обособлены. Уравнения связей — это едннственные уравнения, которые устанавливают взаимосвязь между полями. Если мы пока забудем о связях, то сможем проквантовать нашу теорию просто как теорию четырех скалярных полей.

Введем коэффициенты Фурье $A_{\mu k}$ точно так же, как мы делали раньше в случае одного скалярного поля. В качестве гамильтониана квантовой теории возьмем классическое выражение (15.5) и, записав его через коэффициенты Фурье, в соответствии с (9.16) получим

$$H_F = -4\pi^2 \int \mathbf{k}^2 A_{\mu k} \bar{A}_k^{\mu} \, d^3k + \text{Бесконечное } c\text{-число.}$$

Само преобразование Фурье непосредственно приводит к симметричному произведению $\frac{1}{2}(A\bar{A} + \bar{A}A)$, а замена его на несимметричное произведение, в котором все $\bar{A}$ стоят справа, связана с введением бесконечного c-числа.

В связи с этим гамильтонианом следует подчеркнуть одно обстоятельство: вклад в энергию, соответствующий нулевой степени свободы, отрицателен. Я хотел бы записать это явным образом:

$$H_F = 4\pi^2 \int \mathbf{k}^2 (A_{1k}\bar{A}_{1k} + A_{2k}\bar{A}_{2k} + \\ + A_{3k}\bar{A}_{3k} - A_{0k}\bar{A}_{0k})\, d^3k + \text{Бесконечное } c\text{-число.} \quad (15.12)$$

Мы сталкиваемся здесь со своеобразной ситуацией: с волнами A_0 ассоциируется отрицательная энергия.

Коммутационные соотношения между коэффициентами Фурье, соответствующие соотношениям (9.12) и (9.13), теперь имеют вид

$$[A_{\mu k}, A_{\nu k'}] = 0, \quad [A_{\mu k}, \bar{A}_{\nu k'}] = \frac{-ig_{\mu\nu}}{4\pi^2 |\mathbf{k}|}\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (15.13)$$

Отсюда вытекают коммутационные соотношения для потенциалов A в двух произвольных точках пространства-времени, соответствующие соотношениям (10.6)

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = g_{\mu\nu}\Delta(x - x'). \quad (15.14)$$

Приведенные выше результаты получаются просто как следствие квантования четырех скалярных полей, и теперь мы должны ввести уравнения связей. Прежде всего мы должны проверить, что они не противоречат друг другу. Мы уже делали такую проверку в классической теории, таким же образом она выполняется и в квантовой теории. Альтернативно проверку непротиворечивости можно произвести непосредственно с помощью выражения (15.14). Мы можем это сделать, образовав коммутатор

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'_\nu}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\nu}[A_\mu(x), A_\nu(x')] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\nu} g_{\mu\nu}\Delta(x-x') = -\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} g_{\mu\nu}\Delta(x-x') = 0.$$

Последний результат следует из соотношения (10.7).

Различные скобки Пуассона, образованные из выражений (15.11), все равны нулю в сильном смысле. Этого, право, более чем достаточно. Необходимо, чтобы они обращались в нуль лишь в слабом смысле, мы же обнаружили, что они обращаются в нуль в сильном смысле, так как все коэффициенты a_{mnj} равны нулю. Таким образом, здесь мы имеем дело со специальным случаем, когда понятие комплексно сопряженных q-чисел можно сохранить также и для нефизических q-чисел.

Выясним теперь, какие из динамических переменных являются физическими. Физические динамические переменные должны коммутировать со всеми величинами $\partial A_\mu/\partial x_\mu$; по крайней мере они должны коммутировать с ними в слабом смысле. Допустим, что мы образовали выражение

$$\left[\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}, \frac{\partial A_\sigma(x')}{\partial x'_\sigma}\right].$$

С учетом антисимметричности функции $\Delta(x-x')$ по отношению к переменным x и x' мы можем преобразовать его следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\sigma}[A^\nu(x), A_\sigma(x')] - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x'_\sigma}[A^\mu(x), A_\sigma(x')] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\sigma} g^\nu_\sigma \Delta(x-x') - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x'_\sigma} g^\mu_\sigma \Delta(x-x') = 0.$$

Далее разность

$$\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}$$

дает нам электромагнитные поля $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$. Как мы видим, электрическое и магнитное поля являются физическими величинами в смысле введенного мною определения физической величины. Сами же потенциалы — величины нефизические. Это соответствует тому, что физические величины — величины калибровочно инвариантные.

Чтобы выразить связи через коэффициенты Фурье, рассмотрим равенство

$$A_{\mu}(x) = \int \left(A^{c}_{\mu k} e^{ikx} + \bar{A}^{c}_{\mu k} e^{-ikx}\right) d^3k.$$

Образуем теперь выражение

$$\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x_{\mu}} = -i \int k^{\mu} \left(A^{c}_{\mu k} e^{ikx} - \bar{A}^{c}_{\mu k} e^{-ikx}\right) d^3k.$$

Связи (15.1) дают

$$k^{\mu} A^{c}_{\mu k} \approx 0 \qquad \text{и} \qquad k^{\mu} \bar{A}^{c}_{\mu k} \approx 0.$$

От постоянных коэффициентов Фурье мы можем перейти к коэффициентам Фурье, зависящим от времени, так как все четыре коэффициента Фурье содержат один и тот же временной множитель. Поэтому мы можем записать уравнения связей между фурье-компонентами в виде

$$k^{\mu} A_{\mu k} \approx 0, \qquad k^{\mu} \bar{A}_{\mu k} \approx 0. \tag{15.15}$$

Волны A_1, A_2, A_3 можно разделить на продольную и поперечную части. Если мы будем рассматривать волны, распростаняющиеся по направлению оси 3, то A_{1k} и A_{2k} будут поперечными фурье-компонентами, а A_{3k} — продольной. Волну A_0 удобно считать также продольной волной. Такое разделение не является релятивистским. Если сделать преобразование Лоренца, то прежнее разделение не сохранится, но несмотря на отсутствие лоренц-инвариантности, процедура разделения оказывается полезной для выяснения различных особенностей теории.

Если взять волны, распространяющиеся в направлении оси 3 (при этом $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_0$), то уравнения (15.15) дадут

$$A_{0k} - A_{3k} \approx 0, \qquad \bar{A}_{0k} - \bar{A}_{3k} \approx 0.$$

Мы выведем некоторые следствия из этих слабых равенств, памятуя о том, что их можно умножать только слева. Имеем

$$(\bar{A}_0 + \bar{A}_3)(A_0 - A_3) + (A_0 + A_3)(\bar{A}_0 - \bar{A}_3) \approx 0.$$

Это дает нам

$$\bar{A}_0 A_0 + A_0 \bar{A}_0 - \bar{A}_3 A_3 - \bar{A}_3 A_3 \approx 0.$$

Разность $\bar{A}_0 A_0 - A_0 \bar{A}_0$ равна некоторому c-числу; это число оказывается бесконечным, если мы берем в точности одно и то же значение k в обоих сомножителях, но нас это не должно беспокоить, так как в любом случае оно сократится с разностью $\bar{A}_3 A_3 - A_3 \bar{A}_3$. В результате

$$2(\bar{A}_0 A_0 - A_3 \bar{A}_3) \approx 0.$$

Пренебрегая бесконечной постоянной, мы можем записать выражение (15.12) в виде

$$H_F = 4\pi^2 \int k^2 (A_{1k}\bar{A}_{1k} + A_{2k}\bar{A}_{2k} + \\ + A_{3k}\bar{A}_{3k} - \bar{A}_{0k}A_{0k})\, d^3k. \qquad (15.16)$$

В выражении (15.16) для H_F отсутствует продольная энергия, когда гамильтониан действует на физические кет-векторы. Я доказал это только для тех волн, которые распространяются в направлении оси 3. Однако то же самое справедливо и для волн, распространяющихся в любом направлении, так как при такой записи гамильтониана H_F нет ничего, что бы отличало ось 3 от произвольной оси трехмерного пространства. Поэтому мы останавливаемся на такой форме гамильтониана, и тогда продольная часть энергии исчезает для любого физического кет-вектора.

Теперь положение дел с этой загадочной отрицательной энергией разъяснилось. Физические кет-векторы — это единственные кет-векторы, которые мы желаем использовать при интерпретации теории, а для кет-векторов ассоциированная с волнами A_0 отрицательная энергия как раз компенсируется продольной частью энергии, ассоциированной с волнами A_1, A_2 и A_3.

Мы можем представить потенциал в виде

$$A_{rk} = A^T_{rk} + A^L_{rk},$$

разбив его соответственно на поперечную и продольную части. У поперечной части имеется всего две независимые компоненты, так как

$$k^r A^T_{rk} = 0.$$

Для гамильтониана H_F, заданного выражением (15.16), мы имеем

$$H_F \approx 4\pi^2 \int k^2 A^T_{rk} \bar{A}^T_{rk} d^3k.$$

Этот гамильтониан при действии на кет-вектор $|0\rangle$ дает в результате нуль; кет-вектор $|0\rangle$ должен быть физическим кет-вектором, т. е. для него

$$k^\mu A_{\mu k} |0\rangle = 0, \quad k^\mu \bar{A}_{\mu k} |0\rangle = 0,$$

и должен, по определению, удовлетворять соотношению $\bar{A}^T_{rk} | 0\rangle = 0$.

ЛЕКЦИЯ 16

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Посмотрим, каким образом меняется теория электромагнитного поля в присутствии зарядов. Начав с классической теории, мы должны заняться действием I, равным сумме действий поля и материи,

$$I = \int (\mathscr{L}_F + \mathscr{L}_M)\, d^4x,$$

где $\mathscr{L}_F$ — плотность действия только поля, заданная либо выражением (15.2), либо выражением (15.3), а $\mathscr{L}_M$ — плотность действия материи, включая взаимодействие между материей и электромагнитным полем.

Во всех теориях, интересных с практической точки зрения, переменные электромагнитного поля входят в выражение для $\mathscr{L}_M$ только через потенциалы, а производные потенциалов в нем не содержатся. Это я и буду сейчас предполагать. У нас нет причин, которые мешали бы нам рассмотреть более общий случай, когда в теории появляются производные потенциалов, однако этот более общий случай, как оказывалось до сих пор, не имеет сколько-нибудь существенного практического значения.

Давайте продолжим исследование с помощью нашего общего метода, не определяя, что собой представляют переменные, связанные с материей, и каким образом они входят в выражение для плотности действия $\mathscr{L}_M$. Мы только, разумеется, потребуем, чтобы плотность действия $\mathscr{L}_M$ была лоренц-инвариантна, и тогда наша теория будет релятивистской.

Если мы проварьируем потенциалы A^μ, то для $\mathscr{L}_F$ в форме (15.3) получим

$$\delta I = \int\left(-(4\pi)^{-1} A_{\mu,\nu}\delta A^{\mu,\nu} + \frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial A^\mu}\delta A^\mu\right)d^4x =$$

$$= \int\left((4\pi)^{-1} A_{\mu,\nu}^{\;\;\;\nu} + \frac{\partial\mathscr{L}_M}{\partial A^\mu}\right)\delta A^\mu\, d^4x.$$

Поэтому равенство $\delta I = 0$ приводит к уравнению

$$A_{\mu,\nu}^{\;\;\;\nu} - 4\pi j_\mu = 0,$$

где $j_\mu = -\partial\mathscr{L}_M/\partial A^\mu$. Используя условие Лоренца (15.1), мы можем записать это уравнение в виде

$$F_{\mu\nu}^{\;\;\;\;\nu} + 4\pi j_\mu = 0. \qquad (16.1)$$

Уравнения Максвелла получим, если будем интерпретировать величину j_μ как плотность тока. При этом выясняется, каким образом плотность тока определяется из принципа действия: она представляет собой просто производную $\mathscr{L}_M$ по потенциалам A^μ, взятую со знаком минус.

Теперь с помощью обычного метода мы можем приступить к гамильтоновой формулировке теории. Когда $\mathscr{L}_M$ не содержит производных потенциала A_μ, введение импульса, сопряженного переменной A_μ, происходит так же, как и в отсутствие зарядов. У нас снова переменные $B_\mu = A_\mu^{\;\;0}$ удовлетворяют соотношениям (15.4) для скобок Пуассона. Обозначая через q_n необходимые для описания материи динамические координаты, что бы они собой не представляли, и через p_n сопряженные им импульсы, мы получаем для гамильтониана

$$H = \int\left(-\frac{B_\mu}{4\pi}A^{\mu,0} + p_n q_n^{\;0} - \mathscr{L}_F - \mathscr{L}_M\right)d^3x.$$

Для удобства мы можем написать его в виде суммы двух частей:

$$H = H_F + H_M.$$

Первая часть H_F содержит первый и третий члены и определяется в точности тем же равенством (15.5), что и в отсутствие зарядов. Вторая часть H_M состоит из оставшихся членов:

$$H_M = \int (p_n \dot{q}_n - \mathscr{L}_M)\, d^3x.$$

До сих пор наше рассмотрение носило совершенно общий характер. Мы можем несколько ограничить нашу задачу, предположив, что $\mathscr{L}_M$ линейно по потенциалам, точнее говоря, те члены $\mathscr{L}_M$, которые фактически содержат потенциалы, линейны по ним. В известных важных случаях это действительно так. Но тогда плотность тока j_μ не зависит от A^μ и в нее входят только переменные, связанные с материей. При этих условиях

$$\mathscr{L}_M = -A_\mu j^\mu + \text{Члены, не зависящие от } A_\mu.$$

Если j_μ не содержит скоростей, то H_M состоит из части, отвечающей взаимодействию

$$H_Q = \int A_\mu j^\mu\, d^3x, \tag{16.2}$$

и части, включающей переменные, связанные только с материей.

В квантовой электродинамике мы рассматриваем взаимодействие электромагнитного поля с электронами и позитронами. Электромагнитное поле само по себе мы уже рассмотрели в лекции 15, а электроны и позитроны — в лекции 11. Наша задача сейчас состоит в том, чтобы собрать их вместе и заставить взаимодействовать. Для этого нам нужен полный гамильтониан

$$H_T = H_E + H_F + H_Q, \tag{16.3}$$

где H_E — гамильтониан самих электронов и позитронов, H_F — гамильтониан самого электромагнитного поля, а H_Q — энергия взаимодействия. Гамильтониан H_E — функция одних лишь ψ и $\bar{\psi}$, а H_F — функция A_μ и B_μ, т. е. гамильтоновых переменных, описывающих электромагнитное поле. Энергия взаимодействия H_Q — функция всех переменных ψ, $\bar{\psi}$, A_μ, B_μ.

Теперь наша задача решить, какой должна быть энергия H_Q. В классической теории мы рассмотрели такой случай, когда взаимодействие описывается тем членом в интеграле действия, который содержит только потенциалы и не содержит производных потенциалов, и нашли для H_Q выражение (16.2) при условии, что j_μ не зависит от потенциалов A и скоростей $\dot{q}_n^0$ Этим условиям удовлетворяет выражение (11.9) для j_μ; используя его, получаем

$$H_Q = -e \int A^\mu \bar{\psi} \alpha_\mu \psi \, d^3 x. \tag{16.4}$$

Перенесем это выражение, как оно есть, в квантовую теорию.

Классическая теория должна использоваться лишь для того, чтобы помочь нам получить квантовую теорию, и мы должны проверить и убедиться, что, работая с гамильтонианом (16.3), в котором H_Q определяется выражением (16.4), мы, действительно, имеем дело с релятивистской теорией. Мы должны проверить, являются ли релятивистскими уравнения поля, к которым она приводит, и мы должны проверить, являются ли релятивистскими коммутационные и антикоммутационные соотношения, которые из нее следуют. Вопрос о релятивистском характере коммутационных и антикоммутационных соотношений — это тот вопрос, который мы в общем виде обсуждали в лекции 13, и мы обнаружили, что взаимодействие, когда гамильтониан взаимодействия не содержит производных от динамических переменных, не нарушает вида коммутационных и антикоммутационных соотношений. В выражении (16.4) для H_Q производные не фигурируют, поэтому оно соответствует простейшему виду взаимодействия, которое не нарушает коммутационных и антикоммутационных соотношений, так что с этой точки зрения здесь все в порядке.

Еще мы должны проверить, удовлетворительны ли наши уравнения поля. Мы получим их из гейзенберговских уравнений движения. Давайте возьмем все различные динамические переменные, которые имеются в нашей задаче, и посмотрим, какие для них получаются уравнения движения. Начнем с переменной A_μ. Переменная A_μ коммутирует с $H_E + H_Q$, поэтому

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_0} = [A_\mu,\ H_T] = [A_\mu,\ H_F] = B_\mu,$$

что совпадает с формулой, которая у нас была для самого электромагнитного поля. За переменными B_μ сохраняется смысл производных по времени от переменных A_μ. Взаимодействие не нарушает этого взаимоотношения между ними. Образуем теперь производную

$$\frac{\partial B_\mu}{\partial x_0} = [B_\mu,\ H_T] = [B_\mu,\ H_F] + [B_\mu,\ H_Q].$$

Электронная часть энергии не дает никакого вклада. Что же касается члена $[B_\mu, H_F]$, то он такой же, как и в отсутствие взаимодействия, и поэтому равен $A_\mu^{\cdot rr}$. Чтобы вычислить $[B_\mu, H_Q]$, мы заметим, что B_μ коммутирует с j_μ и что

$$[A_{\mu x},\ B_{\nu x'}] = -4\pi g_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

поэтому

$$[B_\mu,\ H_Q] = 4\pi j_\mu \quad \text{и} \quad \frac{\partial B_\mu}{\partial x_0} = A_\mu^{\cdot rr} + 4\pi j_\mu.$$

Теперь, комбинируя это уравнение с полученным нами ранее уравнением

$$B_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_0},$$

вы найдете

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_0^2} = A_\mu^{\cdot rr} + 4\pi j_\mu, \tag{16.5}$$

т. е. уравнение Максвелла для электромагнитного поля, порождаемого плотностью тока j_μ.

Возьмем теперь одну из компонент функции ψ и напишем гейзенберговские уравнения движения:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0}\psi_{ax} = i\hbar[\psi_{ax},\ H_T] = [\psi_{ax},\ H_E + H_Q]_-.$$

Мы должны вычислить коммутатор. Чтобы это сделать, умножим $H_E + H_Q$ на ψ_{ax} сначала слева, а затем справа и вычтем. Учитывая, что

$$H_E + H_Q = \int \bar{\psi}_b [\alpha_r (-i\hbar\psi^{,r} + eA_r\psi) + \\ + m\alpha_m\psi - eA_0\psi]_b \, d^3x,$$

получаем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0} \psi_{ax} = \int [\psi_a, \bar{\psi}'_b]_+ [\alpha_r (-i\hbar\psi'^{,r'} + eA'_r\psi') + m\alpha_m\psi' - \\ - eA'_0\psi']_b \, d^3x' = \int \delta_{ab}\delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}')[\alpha_r (-i\hbar\psi'^{,r'} + eA'_r\psi') + \\ + m\alpha_m\psi' - eA'_0\psi']_b \, d^3x';$$

в результате имеем

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0} \psi_{ax} = [\alpha_r (-i\hbar\psi^{,r} + eA_r\psi) + m\alpha_m\psi - eA_0\psi]_a.$$

Найденное уравнение — это в точности обычное одноэлектронное уравнение, включающее в качестве полевых переменных q-числа A_μ. Из одноэлектронной теории нам известно, что это уравнение при преобразованиях Лоренца остается инвариантным. Таким образом, с гейзенберговскими уравнениями для ψ_{ax} все в порядке. Уравнение для $\bar{\psi}$ должно быть комплексно сопряженным уравнением, и здесь тоже должно быть все в порядке.

Поэтому все полевые уравнения, которые вытекают из полного гамильтониана (16.3), как и можно было ожидать на основании классической аналогии, являются релятивистскими. По-видимому, даваемая классической теорией энергия взаимодействия является правильной и годится для использования.

Гамильтониан сам по себе еще не дает нам полной теории. Чтобы получить полную теорию, мы должны ввести связи. В случае отсутствия зарядов в нашем распоряжении были связи

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \approx 0.$$

Нам необходимо определить, являются ли они все еще правильными или же нарушаются в результате взаимодействия. Вопрос о правильности связей — это вопрос об их непротиворечивости.

В случае, когда взаимодействие отсутствовало, мы проверяли непротиворечивость двумя путями. Один из них состоял в том, что мы брали связи в двух произвольных точках пространства-времени и с помощью соотношения (15.14) вычисляли их скобки Пуассона, при этом мы обнаружили, что последние равны нулю. Теперь мы так поступить не можем: нельзя взять производные $\partial A_\mu/\partial x_\mu$ в два различных момента времени и сравнить их между собой, так как такая процедура включает в себя интегрирование гейзенберговских уравнений движения, а это чрезвычайно сложная задача. Мы должны проверить условия непротиворечивости, не прибегая к интегрированию гейзенберговских уравнений движения. Нужно воспользоваться другим методом: взять все связи, относящиеся к одному моменту времени, и выяснить, не противоречат ли они уравнениям движения и друг другу.

Для одного определенного момента времени мы имеем

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \approx 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \approx 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \approx 0$$

и т. п. Теперь если вы посмотрете на эти равенства, то так же, как и в случае отсутствия зарядов, увидите, что только первые два из них являются независимыми: для этого достаточно принять во внимание уравнения поля (16.5). Третье равенство есть следствие двух предыдущих, поскольку оно дает

$$A_{\mu}^{\cdot\mu r r} + 4\pi j_{\mu}^{\cdot\mu} \approx 0,$$

а $j_\mu{}^{\cdot\mu}$ равно нулю в силу закона сохранения заряда. Для доказательства этого в рамках настоящей теории мы сошлемся на одноэлектронную теорию. Мы знаем, что в одноэлектронной теории заряд сохраняется. Отсюда мы можем заключить, что заряд сохраняется и в рассматриваемой теории, так как в этой теории уравнения поля для функции ψ имеют тот же самый вид, как и в одноэлектронной теории. То, что берется одноэлектронная теория и вместо потенциалов c-чисел вводятся потенциалы q-чисел, ни в коей мере не сказывается на доказательстве закона сохранения заряда.

Таким образом, у нас остается

$$A_{\mu}{}^{;\mu rr} \approx 0,$$

что является следствием равенства

$$A_{\mu}{}^{;\mu} \approx 0,$$

справедливого для всех точек трехмерного пространства. Этот результат означает, что связь

$$A_{\mu}{}^{;\mu 00} \approx 0$$

не дает нам ничего нового, когда мы пользуемся уравнениями поля. Аналогично не дают ничего нового и высшие производные по переменной x_0. Тот факт, что высшие производные не дают ничего нового, и служит проверкой непротиворечивости связей и уравнений поля. По этой же причине связи коммутируют с гамильтонианом.

Таким образом, у нас остается два уравнения связей: каждое из них представляет собой трехмерное бесконечное многообразие условий, поскольку имеет силу во всякой точке x_1, x_2, x_3. Запишем уравнения связей через наши гамильтоновы переменные и проверим соотношения для скобок Пуассона. Первое уравнение принимает вид (15.10)

$$B_0 + A_r{}^{;r} = \varphi_1 \approx 0. \tag{16.6}$$

Для второго уравнения имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} A_0 + B_r{}^{;r} \approx 0.$$

Используя уравнения поля, заменим здесь вторую производную по времени выражением

$$A_0{}^{;rr} + 4\pi j_0$$

и запишем уравнение связи в виде, похожем на (15.10), но с лишним членом $4\pi j_0$:

$$(A_0{}^{;r} + B_r)^{;r} + 4\pi j_0 = \varphi_2 \approx 0. \tag{16.7}$$

В этом уравнении легко узнать одно из уравнений Максвелла для электрического поля $\mathcal{E}$:

$$-\operatorname{div}\mathcal{E}+4\pi j_0\approx 0.$$

Для проверки непротиворечивости связей мы должны выяснить, выполняются ли равенства (15.11) при наличии в φ_2 дополнительного члена $4\pi j_0$. Справедливость первых двух равенств очевидна. Что же касается третьего, то здесь мы имеем

$$[\varphi_2, \varphi_2'] = \left[(A_0^{\cdot r}+B_r)^{\cdot r}+4\pi j_0,\ (A_0'^{\cdot s'}+B_s')^{\cdot s'}+4\pi j_0'\right].$$

У нас получился один новый член $16\pi^2[j_0, j_0']$. Поэтому, за исключением этого нового члена, включающего плотность заряда, взятую в двух различных точках, с этим равенством дело обстоит благополучно, что непосредственно следует из наших результатов для поля без зарядов. Чему равны эти новые скобки Пуассона? Нам нет необходимости затруднять себя детальными расчетами, так как из общих соображений можно заключить, что они обязаны обращаться в нуль. Антикоммутатор, составленный из ψ и $\bar{\psi}'$ и не включающий их производных, содержит только δ-функцию, поэтому выражение $[j_0, j_0']$ равно некоторому коэффициенту, умноженному на $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$. Далее, выражение $[j_0, j_0']$ должно быть антисимметричным по переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$. Любая пропорциональная δ-функции величина, если она не равна нулю, симметрична по переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$, следовательно,

$$[j_0, j_0'] = 0.$$

Таким образом, мы убедились, что связи в слабом смысле коммутируют между собой и с гамильтонианом; на самом деле, как и в случае поля без зарядов, они коммутируют между собой даже в сильном смысле. Поэтому мы все еще можем определить понятие действительности не только для физических, но и для любых q-чисел.

У квантовой электродинамики имеются два важных приложения: аномальный магнитный момент электрона и лэмбовский сдвиг. В этих приложениях нельзя обойтись более примитивной теорией. Чтобы получить результаты, нужна вся квантовая электродинамика целиком. Теперь я покажу вам, как следует производить расчет аномального магнитного момента и лэмбовского сдвига исходя из гамильтониана (16.3) и (16.4).

Мы с вами должны решить уравнения движения, при этом, как я уже говорил, бесполезно пытаться решать шредингеровские уравнения движения. Формально мы могли бы построить кет-вектор, удовлетворяющий уравнению Шредингера, однако такой кет-вектор не будет оставаться в гильбертовом пространстве. Поэтому мы должны сосредоточить наше внимание на гейзенберговской картине и решить гейзенберговские уравнения движения с гамильтонианом (16.3) [используя (16.4) для H_Q] — это единственный способ продолжить наши исследования.

ЛЕКЦИЯ 17

РЕШЕНИЕ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Прежде всего давайте, исходя из общих соображений, обсудим, как выглядят решения гейзенберговских уравнений движения. Если у нас имеется произвольный гамильтониан H, то для динамической переменной ξ мы можем взять гейзенберговское уравнение движения

$$i\hbar \frac{d\xi}{dt} = \xi H - H\xi$$

и попытаться найти его решение. Такое решение могло бы иметь вид

$$\xi = f(t, \text{ константы движения}).$$

Эти константы движения были бы q-числами, разумеется, некоммутирующими. Каким образом нам следует их выбрать?

Мы можем, например, приравнять их динамическим переменным, взятым в какой-то один определенный момент времени, и получить для ξ выражение вида

$$\xi = f(t, q(t_0), p(t_0)).$$

Другими словами, мы могли бы иметь все полевые переменные в момент t_0 и выразить через них полевые переменные, взятые в произвольный момент времени. Я назову такой метод *методом 1A*.

Конечно, вы могли бы сказать, что все это не слишком хорошо выглядит с релятивистской точки зрения. Такой подход означает, что полевая величина ξ берется в произвольной точке пространства-времени и выражается через значения полевых величин, относящихся ко всему координатному пространству, но в какой-то один определенный момент времени. По своему характеру это совершенно нерелятивистская процедура.

Альтернативно мы могли бы представить ξ в виде функции четырех переменных x и так называемых in-полей (ин-полей) [1]) и получить выражение вида

$$\xi_{x_0 x_1 x_2 x_3} = f(x_\mu, \text{ in-поля}).$$

Этот метод я назову *методом 1Б.* Каким образом определяются in-поля? Мы определяем их так же, как и в классической теории. Рассмотрим, например, электромагнитное поле. У нас имеется уравнение

$$\Box A_\mu = 4\pi j_\mu,$$

справедливое как в квантовой, так и в классической теории. В квантовой теории мы можем решать это уравнение тем же способом, что и в классической теории, представив потенциалы в виде

$$A_\mu = A_{\mu\, \mathrm{in}} + A_{\mu\, \mathrm{ret}},$$

где потенциал $A_{\mu\, \mathrm{ret}}$ выражается через j_μ с помощью классической формулы. Некоммутативность компонент плотности тока j_μ в различных точках не играет здесь роли, так как все выражения линейны по j_μ, а запаздывающий потенциал $A_{\mu\, \mathrm{ret}}$ представляет собой обычную линейную функцию плотности тока j_μ. Затем, по определению, мы полагаем

$$A_{\mu\, \mathrm{in}} = A_\mu - A_{\mu\, \mathrm{ret}},$$

после чего имеем

$$\Box A_{\mu\, \mathrm{in}} = 0.$$

Вот каким образом определяются in-поля в электродинамике, для ψ-полей можно сделать то же самое. Эти определения вводятся точно так же, как и в

---

[1]) По поводу in- и out-решений уравнений поля см., например, Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, гл. 11, изд-во «Мир», 1963. — *Прим. перев.*

классической теории, поскольку в них фигурируют лишь одни линейные соотношения.

Вы могли бы попытаться решить гейзенберговские уравнения движения, выразив каждую полевую величину в какой-то одной точке пространства-времени через координаты этой точки и через in-поля или амплитуды Фурье этих полей. Можно было бы подумать, что это довольно привлекательный метод исследования, так как, будучи релятивистским по своему характеру, он позволил бы нам придать всей теории явно ковариантную форму. Однако понятие in-поля — это довольно сложное понятие, когда построение теории начинается с гейзенберговских уравнений движения. Его правомерность зависит от сходимости интеграла для запаздывающих полей — интеграла, распространяющегося на бесконечно удаленное прошлое. Существуют примеры, для которых понятие in-поля теряет смысл. Дальнейшее обсуждение этого вопроса будет дано в лекции 32.

Иметь теорию, опирающуюся на столь ранней стадии своего развития на такие шаткие понятия, как понятие in-поля, нежелательно. По этой причине следовало бы отказаться от метода 1Б и снова вернуться к методу 1А. Мы можем улучшить метод 1А, применяя несколько иную процедуру, которую я назову *методом 2*.

Метод 2. Найдем какую-нибудь величину K, содержащую явно время t, причем таким образом, чтобы величина K была интегралом движения. Представим далее K в виде функции, явно зависящей от времени t и от взятых в тот же момент времени t динамических переменных q и p. По сравнению с методом 1А метод 2 обладает тем преимуществом, что здесь фигурирует только один момент времени t.

Величина K содержит время явно и поэтому не удовлетворяет уравнению движения такого вида, какому удовлетворяет переменная ξ. Наше уравнение для ξ имеет ценность только для динамических переменных и для таких функций динамических переменных, которые не содержат времени явно. Величина K содержит время явно, и поэтому она должна удовлетворять более общему гейзенберговскому уравнению

$$i\hbar \frac{dK}{dt} = KH - HK + i\hbar \frac{\partial K}{\partial t}.$$

Дополнительный член возникает из-за явной зависимости K от t.

Требование, чтобы величина K была интегралом движения, означает, что $dK/dt = 0$ или

$$i\hbar \frac{\partial K}{\partial t} = HK - KH. \tag{17.1}$$

Мы получили новое уравнение движения, и с этим новым уравнением нам предстоит работать. Вы видите, что здесь появился другой знак и, кроме того, полная производная по времени заменилась частной производной. Следует помнить, что при вычислении частной производной по времени переменные q_t и p_t считаются постоянными, т. е.

$$\frac{\partial q_t}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial p_t}{\partial t} = 0.$$

У переменных q_t и p_t имеются полные производные по времени, но нет частных производных.

Метод 2 является тем методом, с помощью которого мы собираемся продолжать наши исследования.

Сейчас мы должны рассмотреть задачу об отыскании решений уравнения (17.1), где в качестве гамильтониана H взят гамильтониан квантовой электродинамики. Мы будем пользоваться методом теории возмущений, в котором предполагается, что H_Q мало. В выражение для H_Q входит параметр e (заряд электрона), величина его мала по сравнению с величиной той же размерности, сконструированной с помощью постоянной Планка $\hbar$. Основываясь на малости e, мы можем использовать метод теории возмущений и разложить все величины в степенные ряды по e. В наших исследованиях мы ограничимся лишь первыми членами таких степенных рядов.

В качестве первого шага мы перейдем к представлению взаимодействия[1]). Я полагаю, что вы все хо-

[1]) Представление взаимодействия часто называют картиной Дирака. — *Прим. перев.*

рошо знакомы с представлением взаимодействия в том виде, как оно употребляется в связи с картиной Шредингера. Можно использовать соответствующее представление взаимодействия и в связи с картиной Гейзенберга. Оно вводится следующим образом.

Запишем гамильтониан в виде

$$H = H_0 + H_Q,$$

где H_0 — собственная энергия. Для всякого q-числа α, по определению, положим

$$\alpha^* = e^{iH_0t/\hbar}\alpha e^{-iH_0t/\hbar}.$$

Это просто-напросто обычное унитарное преобразование, так как оператор H_0 можно рассматривать в качестве оператора в гильбертовом пространстве.

Применим это преобразование к величине K и возьмем частную производную по t:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial K^*}{\partial t} &= e^{iH_0t/\hbar}\left(-H_0K + i\hbar\frac{\partial K}{\partial t} + KH_0\right)e^{-iH_0t/\hbar} = \\ &= e^{iH_0t/\hbar}(-H_0K + HK - KH + KH_0)\,e^{-iH_0t/\hbar} = \\ &= e^{iH_0t/\hbar}(H_QK - KH_Q)\,e^{-iH_0t/\hbar} = H_Q^*K^* - K^*H_Q^*. \quad (17.2)\end{aligned}$$

Это и есть уравнение движения для K в представлении взаимодействия. С его помощью достигается обычный результат, характерный для перехода к представлению взаимодействия: мы получаем уравнения движения, в силу которых все изменения во времени происходят за счет взаимодействия; собственная часть энергии не дает никакого вклада в эти изменения.

Заметим, что возможность перехода к этому представлению взаимодействия действительно существует. Теперь мы собираемся воспользоваться предположением о малости энергии взаимодействия и представить K^* в виде

$$K^* = K_0^* + K_1^* + K_2^* + \ldots.$$

Различные члены правой части этого равенства имеют разный порядок малости по e. Подставим это выражение для K^* в уравнение движения (17.2) и приравняем члены соответствующего порядка малости. Мы получаем

$$i\hbar \frac{\partial K_0^*}{\partial t} = 0, \tag{17.3}$$

$$i\hbar \frac{\partial K_1^*}{\partial t} = H_Q^* K_0^* - K_0^* H_Q^*, \tag{17.4}$$

$$i\hbar \frac{\partial K_2^*}{\partial t} = H_Q^* K_1^* - K_1^* H_Q^* \text{ и т. д.} \tag{17.5}$$

Что эти уравнения означают? Прежде всего уравнение (17.3) означает, что K_0^* не должно содержать времени явно. Поэтому K_0^* есть функция динамических переменных q_l и p_l, взятых в момент времени t. Чтобы начать вычисления, мы вибираем подходящим образом K_0^* и затем приступает к вычислению K_1^*. Для этого нам надо найти коммутатор $[K_0^*, H_Q^*]_-$ и произвести интегрирование по времени. Далее мы приступаем к вычислению K_2^*. Для этого мы находим коммутатор $[K_1^*, H_Q^*]_-$ и производим интегрирование по времени и т. д. Таким путем, делая шаг за шагом, мы находим решение гейзенберговских уравнений движения.

После того как найдены величины K^*, мы можем вернуться к величинам K просто с помощью обратного унитарного преобразования. Это и есть наше решение. Один момент я хочу подчеркнуть особо: величина K_0^* содержит только динамические переменные и не содержит времени явно. Вот когда вы вернетесь назад к величине K_0, тогда вы получите нечто, зависящее от времени явно.

ЛЕКЦИЯ 18

РЕШЕНИЕ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Вычисляя аномальный магнитный момент и лэмбовский сдвиг, мы имеем дело с одноэлектронной задачей, по этой причине в качестве K_0^* мы берем оператор рождения электрона в определенном состоянии.

При таких расчетах необходимо сделать предположение о существовании статических полей — магнитного или электрического. Чтобы вычислить аномальный магнитный момент, мы предположим, что имеется статическое магнитное поле, и затем исследуем, как это статическое магнитное поле влияет на энергию рождающегося электрона. Аналогично для расчета лэмбовского сдвига мы предположим, что имеется статическое электрическое поле и определим, каким образом это статическое электрическое поле влияет на энергию рождающегося электрона.

При выводе гамильтониана мы не рассматривали статические поля, но их можно включить в рассмотрение тривиальным образом. Статическое поле описывается потенциалами $\mathscr{A}_\mu$, которые не зависят от времени и не являются динамическими переменными. Это просто c-числа, функции переменных x_1, x_2, x_3. Поэтому, чтобы включить в рассмотрение статические поля, мы добавим потенциалы $\mathscr{A}$ к другим потенциалам A. Тем самым мы вводим в гамильтониан дополнительные члены.

Для упрощения последующих выкладок положим $\hbar = 1$ и $c = 1$. Когда получим окончательный результат, мы сможем их всегда снова вставить, исходя из соображений размерности.

Рассмотрим вопрос о введении операторов уничтожения и операторов рождения, которые станут нашими рабочими переменными. Их нужно определить как такие динамические переменные, которые не содержат времени явно.

Возьмем сначала переменные, относящиеся к электромагнитному полю. Для них все делается так же, как в лекции 15, в случае поля без зарядов. Мы начинаем с $A_{\mu x}$ и $B_{\mu x} = \partial A_{\mu x}/\partial x_0$ и выполняем разложение Фурье, подобное (9.4) и (9.5). Имеем

$$\begin{aligned} A_{\mu x} &= \int [A_{\mu k} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x})} + \bar{A}_{\mu k} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})}]\, d^3k, \\ B_{\mu x} &= i \int |\mathbf{k}| [A_{\mu k} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x})} + \bar{A}_{\mu k} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})}]\, d^3k. \end{aligned} \tag{18.1}$$

Эти равенства определяют переменные $A_{\mu k}$ и $\bar{A}_{\mu k}$: мы просто должны обратить разложение Фурье, в результате получим два уравнения, определяющие $A_{\mu k}$ и $\bar{A}_{\mu k}$.

В связи с этими уравнениями я хотел бы подчеркнуть одно обстоятельство: в них нигде не фигурирует время t. Уравнения, определяющие переменные $A_{\mu k}$ и $\bar{A}_{\mu k}$, не содержат времени, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{\mu k} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{A}_{\mu k} = 0.$$

Такой способ введения коэффициентов Фурье приводит нас к коэффициентам Фурье, не зависящим от времени явно. Разумеется, полная производная по времени $(d/dt)A_k$ отлична от нуля.

Мы знаем, что представляет собой эта полная зависимость от времени в случае, когда взаимодействие отсутствует. В отсутствие взаимодействия $A_{\mu k}$ пропорционально $e^{i|\mathbf{k}|t}$, так что тогда

$$\frac{d}{dt} A_{\mu k} = i |\mathbf{k}| A_{\mu k}.$$

Последнее означает

$$[A_{\mu k}, H_0] = i |\mathbf{k}| A_{\mu k}. \tag{18.2}$$

Это же уравнение должно иметь место и тогда, когда есть взаимодействие. Оно всего лишь дает нам информацию о коммутационном соотношении между $A_{\mu k}$

и H_0, которая не должна зависеть от наличия или отсутствия взаимодействия.

Альтернативно уравнение (18.2) можно было бы получить прямым вычислением скобок Пуассона. Мы имеем соотношения

$$\begin{aligned} &[A_{\mu k}, A_{\lambda k'}]_- = 0, \\ &[\bar{A}_{\mu k}, A_{\lambda k'}]_- = -\frac{g_{\mu\lambda}}{4\pi^2 |\mathbf{k}|}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \end{aligned} \tag{18.3}$$

являющиеся следствием наших результатов для электромагнитного поля без зарядов, и мы знаем, что взаимодействие не нарушает вида коммутационных соотношений. Уравнение (18.2) в свою очередь есть следствие соотношений (18.3), поэтому оно справедливо и тогда, когда имеется взаимодействие.

Уравнение (18.2) можно переписать в виде

$$A_k H_0 = (H_0 - |\mathbf{k}|) A_k.$$

Мы можем обобщить его на случай произвольной функции f:

$$A_k f(H_0) = f(H_0 - |\mathbf{k}|) A_k.$$

Последнее уравнение определенно справедливо, когда функция f представляет собой степенной ряд, а у нас нет надобности применять его к функциям более общего вида. Теперь мы можем воспользоваться этим уравнением для вычисления A_k^*:

$$A_k^* = e^{iH_0 t} A_k e^{-iH_0 t} = e^{iH_0 t} e^{-i(H_0 - |\mathbf{k}|)t} A_k = e^{i|\mathbf{k}|t} A_k.$$

Итак, мы вычислили полевые переменные со звездочкой, фигурирующие в представлении взаимодействия.

Вводя операторы уничтожения и операторы рождения для электронов и позитронов, мы должны учесть статические электрические и магнитные поля. Ими обусловлен дополнительный член в гамильтониане:

$$\int \mathscr{A}^{\mu} j_{\mu}\, d^3x.$$

Этот дополнительный член будет нами включен не в энергию взаимодействия H_Q, а в собственную энергию

H_0. Метод возмущения останется таким же, как и в случае, когда у нас не было потенциалов $\mathcal{A}_\mu$.

При наличии члена

$$\int \mathcal{A}^\mu j_\mu \, d^3x,$$

включенного в H_0, нам желательно использовать волновые функции одноэлектронной задачи со статическим полем. Предположим, что эти функции получены. Отыскание собственных функций, отвечающих различным значениям энергии одного электрона в статическом поле, — это тривиальная задача без всякого вторичного квантования.

Пусть в этой одноэлектронной задаче E_n означает собственное значение энергии, а $\langle \mathbf{x}a|n\rangle$ — соответствующую собственную функцию. Эта собственная функция представляет собой функцию трех координат $\mathbf{x}$ и переменной a, которая принимает четыре значения, что соответствует четырем компонентам волновой функции. Буква n просто-напросто напоминает нам, о какой именно собственной функции идет речь. Я буду писать наши уравнения так, как будто спектр энергии дискретен. Если спектр непрерывен, то это будет означать лишь обычное изменение записи: суммы по дискретному n заменятся на интегралы.

Теперь мне хотелось бы выписать волновое уравнение, которому удовлетворяют собственные функции. Для оператора энергии одного электрона в статическом поле мы имеем выражение

$$\alpha_r\left(-i\frac{\partial}{\partial x_r}+e\mathcal{A}_r\right)+\alpha_m m-e\mathcal{A}_0. \tag{18.4}$$

Возьмем матричный элемент оператора (18.4), отвечающий индексам ab, и умножим его на $\langle \mathbf{x}b|n\rangle$. Это даст уравнение

$$\left[\alpha_r\left(-i\frac{\partial}{\partial x_r}+e\mathcal{A}_r\right)+\alpha_m m-e\mathcal{A}_0\right]_{ab}\langle \mathbf{x}b|n\rangle=E_n\langle \mathbf{x}a|n\rangle,$$

являющееся обычным уравнением для собственных функций оператора (18.4). Я буду предполагать, что нами найдены все эти собственные функции и что все они нормированы, так что выполняются обычные условия ортонормированности:

$$\begin{gathered}\int \langle n \mid \mathbf{x}a \rangle \langle a\mathbf{x} \mid n' \rangle \, d^3x = \delta_{nn'}, \\ \sum_n \langle \mathbf{x}a \mid n \rangle \langle n \mid \mathbf{x}'b \rangle = \delta_{ab} \, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),\end{gathered} \tag{18.5}$$

причем в первом из этих соотношений предполагается суммирование по четырем значениям переменной a, а $\langle n|\mathbf{x}a\rangle$ означает функцию, комплексно сопряженную функции $\langle \mathbf{x}a|n\rangle$.

Положим теперь, по определению,

$$\psi_n = \int \langle n \mid \mathbf{x}a \rangle \psi_{ax} \, d^3x;$$

здесь имеется в виду суммирование по индексу a. Мы можем обратить это равенство и написать

$$\psi_{ax} = \sum_n \langle \mathbf{x}a \mid n \rangle \psi_n.$$

Работая выше с собственными функциями, мы имели дело просто с c-числами, теперь же я ввожу q-числа. Мои функции ψ_{ax} — это q-числа, и еще я определяю новые q-числа ψ_n. Кроме того, мы будем использовать комплексно сопряженные q-числа:

$$\bar{\psi}_n = \int \bar{\psi}_{ax} \langle \mathbf{x}a \mid n \rangle \, d^3x, \quad \bar{\psi}_{ax} = \sum_n \bar{\psi}_n \langle n \mid \mathbf{x}a \rangle.$$

Итак, мы вводим здесь q-числа ψ_n и $\bar{\psi}_n$. Каким антикоммутационным соотношениям они удовлетворяют? Совсем нетрудно найти, что

$$[\psi_n, \psi_n']_+ = 0, \quad [\psi_n, \bar{\psi}_{n'}]_+ = \delta_{nn'}.$$

Мы начинали с величин ψ_{ax}, которые не содержат времени явно, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_{ax} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}_{ax} = 0.$$

Равенства, с помощью которых вводятся величины ψ_n и $\bar{\psi}_n$, также не содержат времени явно, поэтому мы можем заключить, что

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial t} = 0.$$

Собственная энергия H_0 равна сумме $H_E + H_F$, где H_E — электронная часть энергии, а H_F — часть энергии, обусловленная электромагнитным полем. Электронная часть энергии H_E имеет вид

$$H_E = \int \bar{\psi}_{ax} \left[\alpha_r \left(-i \frac{\partial}{\partial x_r} + e\mathscr{A}_r \right) + \alpha_m m - e\mathscr{A}_0 \right]_{ab} \psi_{bx}\, d^3x.$$

После перехода к новым переменным ψ_n и $\bar{\psi}_n$ мы получаем

$$H_E = \sum_{nn'} \int \bar{\psi}_n \langle n \mid \mathbf{x}a \rangle \left[\alpha_r \left(-i \frac{\partial}{\partial x_r} + e\mathscr{A}_r \right) + \right.$$

$$\left. + \alpha_m m - e\mathscr{A}_0 \right]_{ab} \langle \mathbf{x}b \mid n' \rangle\, \psi_{n'}\, d^3x.$$

Воспользуемся теперь уравнением для собственных функций. Это дает

$$H_E = \sum_{nn'} \int \bar{\psi}_n \langle n \mid \mathbf{x}a \rangle E_{n'} \langle \mathbf{x}a \mid n' \rangle \psi_{n'}\, d^3x.$$

Здесь справа зависят от $\mathbf{x}$ только собственные функции, поэтому можно воспользоваться соотношением (18.5). Мы получаем

$$H_E = \sum_{nn'} \bar{\psi}_n E_{n'} \delta_{nn'} \psi_{n'} = \sum_n E_n \bar{\psi}_n \psi_n, \tag{18.6}$$

что и следовало ожидать для энергии электронов, выраженной через переменные ψ_n и $\bar{\psi}_n$.

Переменные ψ_n и $\bar{\psi}_n$ — это операторы рождения и уничтожения в различных состояниях n. Для значений E_n, больших нуля, ψ_n представляет собой оператор уничтожения электрона, а $\bar{\psi}_n$ — оператор рождения электрона; для значений E_n, меньших нуля, ψ_n является оператором рождения позитрона, а $\bar{\psi}_n$ — оператором уничтожения позитрона. Таков физический смысл величин ψ_n и $\bar{\psi}_n$.

Теперь мы должны проделать ту же работу, что и в случае переменных, относящихся к электромагнитному полю: найти величины со звездочками, относящиеся к представлению взаимодействия. Мы снова можем получить интересующие нас результаты, просто рассмотрев случай, когда взаимодействие отсутствует и когда, следовательно,

$$i\frac{d\psi_n}{dt}=E_n\psi_n.$$

Но тогда

$$[\psi_n, H_E]_-=E_n\psi_n.$$

Это уравнение имеет силу и при наличии взаимодействия. Отсюда мы можем заключить, что

$$\psi_n H_0=(H_0+E_n)\psi_n$$

или в более общем виде

$$\psi_n f(H_0)=f(H_0+E_n)\psi_n,$$

поэтому

$$\psi_n^*=e^{iH_0t}\psi_n e^{-iH_0t}=e^{-iE_nt}\psi_n$$

и

$$\bar{\psi}_n^*=e^{iE_nt}\bar{\psi}_n.$$

Для разложения Фурье электромагнитного поля я буду пользоваться сокращенным обозначением

$$A_{\mu x}=2\int A_{\mu k}^{(\nu)}e^{-i(\mathbf{kx})}d^3k. \qquad (18.7)$$

Выше я ввел новый индекс ν, принимающий значения ± 1. Когда $\nu=1$, мы полагаем

$$A_{\mu k}^{(1)}=A_{\mu k},$$

когда же $\nu=-1$, мы полагаем

$$A_{\mu k}^{(-1)}=\bar{A}_{\mu(-k)}.$$

Более того, выше имеется в виду усреднение по обоим значениям индекса ν, выполняемое наряду с интегрированием по $\mathbf{k}$. Со средним значением по ν удобнее работать, нежели с суммой, так как вы вообще можете забыть об индексе ν, если он выпадает в каком-либо из рассматриваемых членов. Смысл этих обозначений в том, что мы можем написать в разложении Фурье $A_{\mu x}$ один единственный член вместо двух. Вы могли бы возразить, что это не такая уж большая экономия — писать один член вместо двух, но в дальнейшем нам придется иметь дело с квадратичными функциями потенциалов, и тогда это обозначение позволит писать нам один член вместо четырех, а это уже изрядная экономия.

Энергия взаимодействия H_Q, выраженная через операторы уничтожения и операторы рождения, выглядит следующим образом:

$$H_Q = -2e \int A_{\mu k}^{(\nu)} \bar{\psi}_x \alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})} \psi_x \, d^3x d^3k =$$
$$= -2e \sum_{nn'} \int A_{\mu k}^{(\nu)} d^3k \bar{\psi}_n \langle n | \alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})} | n' \rangle \psi_{n'}.$$

Здесь я вывел новую величину

$$\langle n | \alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})} | n' \rangle,$$

которая является просто матричным элементом для одноэлектронной задачи и определяется интегралом

$$\int \langle n | ax \rangle \alpha^\mu_{ab} e^{-i(\mathbf{kx})} \langle bx | n' \rangle d^3x.$$

Теперь нам необходимо получить выражение для H_Q^*, которое фигурирует в нашей теории возмущений:

$$H_Q^* = -2e \sum_{nn'} \int \langle n | \alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})} | n' \rangle d^3k A_{\mu k}^{(\nu)*} \psi_n^* \psi_{n'}^* =$$
$$= -2e \sum_{nn'} \int \langle n | \alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})} | n' \rangle d^3k A_{\mu k}^{(\nu)} \bar{\psi}_n \psi_{n'} e^{i(\nu|\mathbf{k}| + E_n - E_{n'})t}.$$

Выше я воспользовался формулой

$$A_{\mu k}^{(\nu)*} = A_{\mu k}^{(\nu)} e^{i\nu|\mathbf{k}|t}.$$

Как вы видите, когда $\nu = +1$, нам нужен множитель $e^{i|\mathbf{k}|t}$; когда $\nu = -1$, мы имеем комплексно сопряженные величины и нам нужен множитель $e^{-i|\mathbf{k}|t}$; таким образом, если мы оставим множитель $e^{i\nu|\mathbf{k}|t}$, то тем самым правильно учтем оба значения ν.

Нас интересует одноэлектронная задача. По этой причине мы выберем в качестве K_0^* оператор рождения электрона в состоянии с положительной энергией. Пусть

$$K_0^* = \bar{\psi}_i,$$

где $\bar{\psi}_i$ — оператор рождения электрона в начальном состоянии i. Мы предполагаем, что энергия электрона в состоянии i положительна, в противном случае переменная $\bar{\psi}_i$ была бы не оператором рождения электрона, а оператором уничтожения позитрона. Благодаря такому выбору величины K_0^* мы имеем

$$\frac{\partial K_0^*}{\partial t} = 0,$$

поэтому ей подходит роль исходной величины в расчетах по методу возмущений.

Приступим теперь к вычислению величины K_1^*:

$$i\frac{\partial K_1^*}{\partial t} = [H_Q^*, K_0^*]_- = [H_Q^*, \bar{\psi}_i]_- =$$
$$= -2e\sum_{nn'}\int \langle n|\alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})}|n'\rangle \times$$
$$\times d^3k A_{\mu k}^{(\nu)}[\bar{\psi}_n\psi_{n'}, \bar{\psi}_i]_-\, e^{i(\nu|\mathbf{k}|+E_n-E_{n'})t}.$$

Далее

$$[\bar{\psi}_n\psi_{n'}, \bar{\psi}_i]_- = \bar{\psi}_n\psi_{n'}\bar{\psi}_i - \bar{\psi}_i\bar{\psi}_n\psi_{n'} =$$
$$= \bar{\psi}_n(\psi_{n'}\bar{\psi}_i + \bar{\psi}_i\psi_{n'}) = \bar{\psi}_n\delta_{n'i}.$$

У нас появился символ $\delta_{n'i}$, поэтому мы опускаем суммирование по n' и заменяем индекс n' на индекс i. Это дает

$$i\frac{\partial K_1^*}{\partial t} = -2e\sum_n\int \langle n|\alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})}|i\rangle \times$$
$$\times d^3k A_{\mu k}^{(\nu)}\bar{\psi}_n e^{i(\nu|\mathbf{k}|+E_n-E_i)t}.$$

Теперь мы можем выполнить интегрирование по t; за исключением экспоненциального множителя, все наши величины постоянны, поэтому интегрирование тривиально:

$$K_1^* = 2e \sum_n \int \langle n \,|\alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})}|\, i\rangle \times \\ \times d^3k A_{\mu k}^{(\nu)} \bar{\psi}_n \frac{e^{i(\nu|\mathbf{k}|+E_n-E_i)t}}{\nu|\mathbf{k}|+E_n-E_i}.$$

Сейчас мы должны обратиться к величине K_2^*. Для нее мы имеем

$$i\frac{\partial K_2^*}{\partial t} = \left[H_Q^*, K_1^*\right]_- = -4e^2 \sum_{nn'n''} \int \langle n' \,|\alpha^\lambda e^{-i(\mathbf{k'x})}|\, n''\rangle \times \\ \times \langle n \,|\alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})}|\, i\rangle\, d^3k\, d^3k' \times \\ \times e^{i(\nu'|\mathbf{k'}|+E_{n'}-E_{n''})t} \frac{e^{i(\nu|\mathbf{k}|+E_n-E_i)t}}{\nu|\mathbf{k}|+E_n-E_i} \times \\ \times \left[A_{\lambda k'}^{(\nu')} \bar{\psi}_{n'} \psi_{n''},\ A_{\mu k}^{(\nu)} \bar{\psi}_n\right]_-. \tag{18.8}$$

Чтобы получить K_2^*, нам нужно лишь выполнить интегрирование по времени. Это дало бы нам решение гейзенберговских уравнений движения во втором порядке теории возмущений.

ЛЕКЦИЯ 19

НОРМАЛЬНОЕ УПОРЯДОЧЕНИЕ

Разумеется, в полученном решении содержатся q-числа, и его вид будет зависеть от того, в каком порядке мы эти q-числа расположим. Нам необходимо записать это решение каким-то определенным стандартным образом; с этой целью мы введем нормальное упорядочение q-чисел. В качестве нормального мы принимаем такой порядок, когда все операторы рождения стоят слева, а все операторы уничтожения — справа. Я определяю нормальное упорядочение так же, как это обычно делается при работе с картиной Шредингера, и предполагаю, что оно физически значимо. Некоторые основания для такого подхода будут указаны в лекции 31.

Сейчас нам, следовательно, нужно в выражении (18.8) так расположить q-числа, чтобы все операторы рождения стояли слева, а все операторы уничтожения — справа. Такая перестановка сомножителей, имеющая своей целью расположить их в нормальном порядке, приведет к появлению дополнительных членов, и мы должны выяснить, что собой представляют эти дополнительные члены. Порядок расположения различных операторов уничтожения так же, как и порядок различных операторов рождения, не имеет существенного значения. Изменение этого порядка, когда мы имеем дело с фермионными операторами, самое большее, может изменить только знак и не приведет к появлению дополнительных членов. Такие изменения порядка следования операторов мы будем рассматривать как тривиальные.

Напомню, что при E_n больше нуля операторами уничтожения являются операторы ψ_n, а при E_n меньше нуля — операторы ϕ_n. А как обстоит дело с переменными, относящимися к электромагнитному полю? В случае переменных, относящихся к поперечным составляющим, у нас имеются операторы рождения фотонов и операторы уничтожения фотонов, при этом совершенно ясно, что должно быть оператором рождения, а что оператором уничтожения. Так, оператором уничтожения фотонов у нас служит переменная $\bar{A}_k$. А как обстоит дело с переменными, связанными с продольными составляющими? В этом случае не вполне ясно, что считать операторами рождения, а что операторами уничтожения. И здесь в качестве оператора уничтожения мы опять возьмем переменную $\bar{A}_k$. Это следует рассматривать как определение оператора уничтожения в случае продольных составляющих. С таким определением удобно работать, и в отношении нормального порядка во всех случаях вносится ясность.

Вопрос: Не могли бы вы подробнее объяснить необходимость введения нормального упорядочения?

Ответ: Мы хотим получить некие числовые коэффициенты, которым мы могли бы приписать физический смысл. Но вы вообще не получите никаких числовых коэффициентов, если оставите порядок неопределенным, так как изменение порядка ведет к изменению числовых коэффициентов. Нормальное упорядочение имеет своей целью получить хорошо определенные числовые коэффициенты — это вы обязаны сделать, если хотите получить нечто такое, что можно было бы сравнивать с экспериментом. Но q-числа — это не то, что вы можете сравнить непосредственно с экспериментом; мы должны «выудить» из нашей теории числовые коэффициенты — единственный путь для этого состоит в выборе определенной системы нормального упорядочения. Физическая значимость нормального упорядочения — это, конечно, предположение. Я займусь обсуждением такого предположения позднее в связи с вопросом об интерпретации теории.

Мы принимаем это определение нормального упорядочения и предполагаем, что оно важно в физическом отношении. Теперь же мы должны посмотреть, какие дополнительные члены появляются тогда, когда мы производим нормальное упорядочение.

Для величин, относящихся к электромагнитному полю, в нашем распоряжении имеются коммутационные соотношения (18.3). Рассмотрим произведение $A_{\mu k}^{(\nu)} A_{\lambda k'}^{(\nu')}$. Если ν и ν' одновременно равны 1 или -1, то сомножители здесь, как мы видим, уже расположены в нормальном порядке. Кроме того, в нормальном порядке стоят сомножители и в произведении $A_{\mu k}^{(1)} A_{\lambda k'}^{(-1)}$. Единственный случай, когда у нас нет нормального порядка, — это когда мы имеем $\nu = -1$ слева и $\nu' = 1$ справа. Но произведение $A_{\mu k}^{(-1)} A_{\lambda k'}^{(1)}$ отличается от произведения с нормальным порядком сомножителей только на коммутатор, фигурирующий во втором из равенств (18.3), поэтому мы получаем

$$A_{\mu k}^{(-1)} A_{\lambda k'}^{(1)} = \text{Нормальное произведение} - \frac{g_{\mu\lambda}}{4\pi^2 |\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}').$$

Под знаком δ-функции мы должны были заменить разность $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ на сумму $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$ с тем, чтобы учесть наши определения $A_{\mu k}^{(\nu)}$ при различных значениях ν. Все эти результаты мы можем объединить, написав одну формулу:

$$A_{\mu k}^{(\nu)} A_{\lambda k'}^{(\nu')} = \text{Нормальное произведение} - \\ - \frac{g_{\mu\lambda}}{4\pi^2 |\mathbf{k}|} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left(\frac{1-\nu}{2}\right) \left(\frac{1+\nu'}{2}\right).$$

Множители, содержащие ν и ν', можно записать различными способами, так как

$$(1-\nu)(1+\nu') = (1-\nu)(\nu'-\nu) = (1+\nu')(\nu'-\nu).$$

Это чисто алгебраическая формула, справедливая в силу того, что ν и ν' могут принимать только значения 1 и -1.

Рассмотрим теперь произведение $\psi_n \bar{\psi}_{n'}$. Если энергия $E_{n'}$ отрицательна, то сомножители в этом произведении для всех n расположены в нормальном порядке. В общем случае мы имеем

$$\psi_n \bar{\psi}_{n'} = \text{Нормальное произведение} + \delta_{nn'} \Theta(E_{n'}),$$

где Θ — ступенчатая функция, широко используемая в теории поля. Она определяется следующим образом:

$$\Theta(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x>0,\\ 0 & \text{при} \quad x<0.\end{cases}$$

Альтернативно

$$\Theta(x)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{|x|}\right).$$

Заметьте также, что

$$\Theta(x)+\Theta(-x)=1, \quad \Theta(x)-\Theta(-x)=\frac{x}{|x|}. \qquad (19.1)$$

Мы можем, кроме того, написать

$$\psi_n\bar{\psi}_{n'}=\text{Нормальное произведение}+\delta_{nn'}\Theta(E_n),$$

так как n и n' должны быть одинаковыми для того, чтобы $\delta_{nn'}$ вообще вносило какой-либо вклад. Тогда мы имеем соответствующую формулу

$$\bar{\psi}_n\psi_{n'}=\text{Нормальное произведение}+\delta_{nn'}\Theta(-E_n).$$

Теперь мы должны взять коммутатор, фигурирующий в выражении (18.8), и представить его в виде нормальных произведений. Если мы выпишем этот коммутатор полностью, он будет выглядеть следующим образом:

$$A^{(\nu')}_{\lambda k'}A^{(\nu)}_{\mu k}\bar{\psi}_{n'}\psi_{n''}\bar{\psi}_n-A^{(\nu)}_{\mu k}A^{(\nu')}_{\lambda k'}\bar{\psi}_n\bar{\psi}_{n'}\psi_{n''}.$$

Представив его в виде нормальных произведений с помощью данных выше формул для нормального упорядочения, получаем

$$-\frac{g_{\mu\lambda}}{4\pi^2|\mathbf{k}|}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\frac{1}{4}(\nu-\nu')\{(1+\nu)[\bar{\psi}_{n'}\delta_{nn''}\Theta(E_n)+$$
$$+\bar{\psi}_n\delta_{n'n''}\Theta(-E_{n'})]+(1-\nu)[\bar{\psi}_n\delta_{n'n''}\Theta(-E_n)-$$
$$-\bar{\psi}_{n'}\delta_{nn''}\Theta(-E_n)]\}+\text{Дополнительные члены},$$

причем дополнительные члены содержат более одного оператора рождения или оператора уничтожения.

Мы должны подставить этот коммутатор в выражение (18.8), в результате это нам даст

$$i\frac{\partial K_2^*}{\partial t}=\frac{e^2}{\pi}\left\{\sum_{n'}\bar{\psi}_{n'}Y_{n'i}e^{i(E_{n'}-E_i)t}+\right.$$

$$\left.+\sum_n\bar{\psi}_n Z_{ni}e^{i(E_n-E_i)t}\right\}+\text{Дополнительные члены}=$$

$$=\frac{e^2}{\pi}\sum_n\bar{\psi}_n\{Y_{ni}+Z_{ni}\}e^{i(E_n-E_i)t}+\text{Дополнительные члены},\tag{19.2}$$

где коэффициенты Y_{ni} и Z_{ni} имеют следующие значения:

$$Y_{n'i}=(4\pi)^{-1}\sum_n\int\langle n'|\alpha_\mu e^{i(\mathbf{kx})}|n\rangle\times$$

$$\times\langle n|\alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})}|i\rangle\frac{\nu-\nu'}{\nu|\mathbf{k}|+E_n-E_i}\times$$

$$\times\{(1+\nu)\Theta(E_n)-(1-\nu)\Theta(-E_n)\}\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}\tag{19.3}$$

и

$$Z_{ni}=(2\pi)^{-1}\sum_{n'}\Theta(-E_{n'})\int\langle n'|\alpha_\mu e^{i(\mathbf{kx})}|n'\rangle\times$$

$$\times\langle n|\alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})}|i\rangle\frac{\nu-\nu'}{\nu|\mathbf{k}|+E_n-E_i}\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.\tag{19.4}$$

Здесь кое-что можно сразу же упростить. Мы должны произвести усреднение по всем значениям ν', это значит, что у нас выпадут все члены, в которые ν' входит линейно. Таким образом, множитель $\nu-\nu'$ в числителе выражений Y и Z можно заменить на ν.

ЛЕКЦИЯ 20

ИЗМЕНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

В выражении (19.2) дополнительные члены относятся к более сложным физическим процессам с рождением или же уничтожением более чем одной частицы, члены же Y и Z означают модификацию нашего первоначального оператора рождения, вызванную возмущением. Допустим, что в выражении (19.2) мы взяли один член, для которого n равно i. Этот член имеет вид

$$\frac{e^2}{\pi}(Y_{ii}+Z_{ii})\bar{\psi}_i$$

и представляет собой изменение энергии испущенной частицы.

Посмотрим, какое же именно изменение энергии представлено здесь коэффициентом при $\bar{\psi}_i$. Наиболее определенный способ получить желаемый результат состоит в том, чтобы рассмотреть эффект, обусловленный другим возмущением в гамильтониане. Рассмотрим возмущение V вида

$$V=\sum_n \bar{\psi}_n b_n \psi_n,$$

где b_n — некоторые c-числа, малые при всех значениях n. Предположим далее, что возмущение такого вида добавлено к нашему гамильтониану. Это возмущение, очевидно, изменит энергию испускаемой частицы на величину b_n, поскольку та часть гамильтониана, которая относится только к частицам в силу (18.6), как раз имеет вид

$$\sum_n \bar{\psi}_n E_n \psi_n.$$

Так как E_n заменилось на сумму $E_n + b_n$, то это означает, что b_n представляет собой малое изменение энергии испускаемой частицы.

Возмущение V, если задачу рассматривать методом теории возмущений, дает

$$i\,\frac{\partial K_1^*}{\partial t} = V^* K_0^* - K_0^* V^*.$$

Положив, как и прежде,

$$K_0^* = \bar{\psi}_i,$$

для производной $i(\partial K_1^*/\partial t)$ в первом порядке по b найдем

$$i\,\frac{\partial K_1^*}{\partial t} = \bar{\psi}_i b_i.$$

Найденную производную $\partial K_1^*/\partial t$ можно сравнить с выражением (19.2), в результате чего мы придем к выводу, что изменение энергии испускаемой частицы описывается членом с $n = i$ и равно

$$\frac{e^2}{\pi}(Y_{ii} + Z_{ii}).$$

Это и есть то самое выражение, которое нам необходимо оценить, чтобы получить аномальный магнитный момент и лэмбовский сдвиг. У нас имеются общие формулы (19.3) и (19.4) для матричных элементов Y и Z; диагональным матричным элементам, которые мы получим из этих формул, предстоит в дальнейшем играть главную роль.

Матричный элемент Z мы можем записать в виде

$$Z_{ni} = \pi^{-1} \int J_k^{\mu} \frac{\langle n \,|\, \alpha_{\mu} e^{-i(\mathbf{kx})} \,|\, i\rangle}{\nu\,|\mathbf{k}| + E_n - E_i}\, \nu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}, \tag{20.1}$$

где

$$J_k^{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{n'} \Theta(-E_{n'}) \langle n' \,|\alpha^{\mu} e^{i(\mathbf{kx})}|\, n'\rangle.$$

Выражение для J_k^{μ} можно записать как диагональную сумму

$$J_k^{\mu} = \frac{1}{2} \langle\langle \alpha^{\mu} e^{i(\mathbf{kx})} \Theta(-E) \rangle\rangle, \tag{20.2}$$

где скобки $\langle\langle\ \rangle\rangle$ означают диагональную сумму, а E — оператор энергии для одной частицы во внешнем поле:

$$E = \alpha_r (p_r + e\mathscr{A}_r) + \alpha_m m - e\mathscr{A}_0.$$

Здесь E надо рассматривать не как q-число, а как матрицу для одноэлектронной задачи. Все матричные элементы этой матрицы представляют собой c-числа. Функция $\Theta(-E)$, разумеется, равна $\frac{1}{2}(1 - E/|E|)$. Каким образом определяется $|E|$? Это есть модуль одноэлектронного оператора, довольно простого оператора. Мы имеем

$$|E| = + (E^2)^{1/2}.$$

Поэтому $|E|$ — вполне определенный оператор, хотя для него, может быть, и трудновато привести явное выражение. Фактически, единственный способ получить это явное выражение в общем случае заключается в том, чтобы перейти к представлению, в котором матрица E диагональна.

Диагональная сумма матрицы одинакова во всех представлениях. Поэтому сумму (20.2), правильное выражение для которой мы найдем, перейдя к представлению, где матрица E диагональна, удобнее вычислять, пользуясь представлением, в котором диагональны импульсные переменные. Итак, приступим к вычислениям в представлении, где оператор $\mathbf{p}$ диагонален. Мы имеем

$$\langle \mathbf{p}' | e^{i(\mathbf{kx})} | \mathbf{p}'' \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' - \mathbf{k}), \qquad (20.3)$$

что следует из соотношения

$$p_r e^{i(\mathbf{kx})} = e^{i(\mathbf{kx})} (p_r + k_r).$$

Поэтому мы получаем

$$J_k^{\mu} = \frac{1}{2} \int\int \langle \mathbf{p}'' | e^{i(\mathbf{kx})} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \alpha^{\mu} \Theta(-E) | \mathbf{p}'' \rangle \, d^3p' \, d^3p'' =$$

$$= \frac{1}{2} \int \langle \mathbf{p}' | \alpha^{\mu} \Theta(-E) | \mathbf{p}' + \mathbf{k} \rangle \, d^3p'. \qquad (20.4)$$

Прежде всего возьмем случай, когда внешнее поле отсутствует. При $\mathscr{A}_{\mu} = 0$ E и $\Theta(-E)$ коммутируют со всеми тремя переменными $\mathbf{p}$, поэтому в импульсном представлении J_k^μ имеет только диагональные матричные элементы. Таким образом, $J_k^\mu = 0$ при $\mathbf{k} \neq 0$. Значение же J_k^μ, получающееся при $\mathbf{k} = 0$, не представляет для нас интереса, так как вся наша теория возмущений связана с отличными от нуля значениями $\mathbf{k}$. Нулевое значение $\mathbf{k}$ соответствует статическим полям, которые не включаются в возмущение.

Рассмотрим теперь случай однородного магнитного поля. Для однородного магнитного поля потенциалы $\mathcal{A}_r$ линейны по переменным $\mathbf{x}$. Но тогда для $\mathbf{p}''$, отличных от $\mathbf{p}'$,

$$\langle \mathbf{p}' \,|E|\, \mathbf{p}'' \rangle = 0.$$

При этих условиях $|E|$ также не содержит матричных элементов, заметно отличающихся от диагональных, не равными нулю будут матричные элементы, бесконечно близкие к диагональным, поэтому мы снова имеем $J_k^\mu = 0$ при значениях $\mathbf{k}$, отличных от нуля. Таким образом, Z не дает никакого вклада в аномальный магнитный момент.

При расчете лэмбовского сдвига мы имеем дело с электростатическим полем, которое не является однородным, и в этом случае недиагональные матричные элементы уже вносят вклад в J_k^μ.

Физики, работающие с картиной Шредингера и с диаграммами Фейнмана, называют эффекты, связанные с Z-членами, поляризацией вакуума. Я не знаю, имеет ли это название какой-либо глубокий смысл в рамках картины Гейзенберга, но как обозначение оно вполне приемлемо. Поляризация вакуума не дает никакого вклада в энергию электрона в отсутствие статического поля и в случае однородного магнитного поля. Однако в случае неоднородного электрического поля, а следовательно, и для лэмбовского сдвига вклад от поляризации вакуума существует, и позднее, когда мы перейдем к детальному выводу лэмбовского сдвига, мы должны будем произвести оценку этого вклада.

Исследуем теперь Y-члены. Выражение для Y мы можем немного упростить, воспользовавшись свойством (19.1) функции Θ. После упрощений оно принимает вид

$$Y_{n'i} = (4\pi)^{-1} \sum_n \int \langle n' | \alpha_\mu e^{i(\mathbf{kx})} | n \rangle \langle n | \alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})} | i \rangle \times$$
$$\times \frac{\nu}{\nu |\mathbf{k}| + E_n - E_i} \left(\nu + \frac{E_n}{|E_n|} \right) \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}. \quad (20.5)$$

мы можем написать это выражение в более сжатой форме:

$$Y_{ni} = (4\pi)^{-1} \int \langle n | \alpha^\mu e^{i(\mathbf{kx})} \frac{\nu + (E/|E|)}{|\mathbf{k}| + \nu E - \nu E_i} e^{-i(\mathbf{kx})} \alpha_\mu | i \rangle \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Дальнейшего упрощения можно добиться, если в знаменателе заменить νE на $|E|$. Такая замена возможна потому, что при $\nu E = -|E|$ числитель обращается в нуль. Выражение Y_{ni} можно рассматривать как взятый между состояниями n и i матричный элемент некоторого оператора

$$Y = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu e^{i(\mathbf{kx})} \frac{\nu + (E/|E|)}{|\mathbf{k}| + |E| - \nu E_i} e^{-i(\mathbf{kx})} \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}. \quad (20.6)$$

Для всякого данного нам электронного оператора μ определим оператор

$$\tilde{\mu} = e^{-i(\mathbf{kx})} \mu e^{i(\mathbf{kx})}.$$

С учетом этого определения имеем

$$Y = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu \frac{\nu + (\tilde{E}/|\tilde{E}|)}{|\mathbf{k}| + |\tilde{E}| - \nu E_i} \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}. \quad (20.7)$$

По сравнению с выражением (20.6) здесь имеется изменение в знаке у k, но это не имеет значения, так как k — это всего лишь немая переменная, по которой производится интегрирование. Знак удобнее всего брать так, как сделано в формуле (20.7).

ЛЕКЦИЯ 21

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

В выражение для Y входит интегрирование по k, выполняя которое, вы получаете бесконечность. Использование картины Гейзенберга позволило нам освободиться от многих, но не от всех расходимостей. Некоторые еще выжили, и, если мы хотим иметь логическую теорию, мы не должны допускать вообще никаких расходимостей. Поэтому сейчас мы должны произвести регуляризацию энергии взаимодействия таким образом, чтобы избавиться от этой расходимости.

Конечно, вводя регуляризацию энергии взаимодействия, мы изменяем наш гамильтониан. Теперь вы можете возразить, что, изменяя гамильтониан таким способом, мы нарушаем релятивистскую инвариантность теории. Все это совершенно верно, однако если сделать регуляризацию должным образом, релятивистская инвариантность будет нарушаться только в явлениях, относящихся к области высоких энергий.

Квантовая электродинамика в любом случае не может быть абсолютно точной физической теорией, так как в ней не учитываются всякого рода частицы, появляющиеся в высокоэнергетических процессах: мезоны, нейтрино и т. п. Сама по себе квантовая электродинамика не может быть замкнутой теорией. Мы с вами обнаружили, что в области высоких энергий нам не удается, не впадая в противоречия, сделать квантовую электродинамику релятивистски инвариантной теорией. Но на самом деле это ничего не значит. Мы увидим, что регуляризацию можно сделать для весьма высоких значений энергии порядка нескольких сотен миллионов электронвольт. Вполне разумно произвести регуляризацию где-то в этой области энергий и получить в результате теорию, не пригодную для описания процессов с энергиями, превышающими несколько сотен миллионов электронвольт, но точную, как мы можем думать, при более низких энергиях. Таким образом, мы можем надеяться, что для расчетов, подобных расчету аномального магнитного момента и лэмбовского сдвига, где высокоэнергетические процессы не играют роли, наша теория будет точной.

Я смотрю на создавшуюся ситуацию следующим образом. У нас имеется квантовая электродинамика, которая не может быть точной теорией в области высоких энергий, так как мы не знаем, каким образом учесть взаимодействия при высоких энергиях, и наша регуляризация для высоких энергий как раз и выражает собой нашу неосведомленность в этом вопросе.

Производя регуляризацию энергии взаимодействия, мы должны соблюдать осторожность. Обычная квантовая теория поля крайне неряшлива в этом вопросе. Я же хочу сделать все строго логически. В связи с этим мы должны точно установить, каким именно образом нам следует производить регуляризацию. Рассматривая этот вопрос, можно убедиться, что имеется несколько заслуживающих внимания процедур регуляризации.

Наша энергия взаимодействия имеет вид

$$H_Q = -e\int \bar{\psi}\alpha_\mu A^\mu \psi\, d^3x.$$

Мы выражаем ее через амплитуды Фурье и видим, что каждому члену соответствуют три частицы: каждый член содержит функции $\bar{\psi}_n$, ψ_n, $A_{\mu k}^{(\nu)}$, которые являются операторами рождения или же операторами уничтожения частиц.

Один из способов регуляризации состоит во введении верхнего предела для величины $|\mathbf{k}|$ в энергию взаимодействия. Я назову это способом «*a*».

Способ а. Модуль $\mathbf{k}$ имеет предел, скажем, $|\mathbf{k}|<g$, где g — некоторое большое число. Это наиболее есте-

ственный и очевидный способ регуляризации, и, конечно, применив его к интегралу, определяющему, например, Y, вы сейчас же получите конечную величину, и вас уже не будут беспокоить расходимости. Тем не менее оказывается, что это не такой уж удовлетворительный способ регуляризации, и нужно рассмотреть иные способы.

Способ б. Здесь мы ограничиваем сумму модулей энергий трех частиц, отвечающих каждому члену в энергии взаимодействия H_Q; это означает, что

$$|E_n|+|E_i|+|\mathbf{k}|<2g.$$

Нас будет интересовать конечное состояние, совпадающее с начальным состоянием i или же достаточно близкое к нему, а три энергии, о которых идет речь, — это энергия промежуточного состояния E_n, E_i и $|\mathbf{k}|$. Энергия E_i, коль скоро имеется в виду интегрирование, является постоянной, поэтому, перенося ее в другую часть неравенства, мы получаем

$$|E_n|+|\mathbf{k}|<2g-E_i.$$

Способ «б» — разумный способ регуляризации.

Рассматривая различные способы регуляризации, разумеется, следует позаботиться о том, чтобы сохранить величину H_Q действительной. Вы не должны при регуляризации H_Q превращать ее в величину, не являющуюся в физическом отношении действительной.

Имеется еще один способ регуляризации, который мы должны рассмотреть. В этом способе мы ограничиваем сумму кинетических энергий трех частиц. В предыдущем способе мы ограничивали сумму полных энергий. Теперь я намерен ограничить только кинетические энергии, такой способ регуляризации я назову способом «в». В энергии E у нас содержалась часть $-e\mathcal{A}_0$, являющаяся потенциальной энергией, которую теперь мы собираемся исключить из процесса регуляризации. В результате этого получаем неравенство

$$|E+e\mathcal{A}_0|+|\mathbf{k}|+E_i+e\mathcal{A}_0<2g.$$

Таковы различные процессы регуляризации, которые мы могли бы рассмотреть. Нельзя сказать сразу, каким из них правильнее воспользоваться. Поэтому каждый из них мы должны исследовать. Нам хотелось бы, чтобы наша регуляризация приводила к независящим от выбора g физическим результатам. Поэтому мы должны произвести расчеты и посмотреть, насколько удачны в этом отношении получающиеся результаты; кроме того, в дальнейшем мы должны будем решить, на каком из способов регуляризации нам следует остановиться. Однако уже на этой стадии рассмотрения мы можем выяснить, к каким именно различиям будут приводить указанные процессы регуляризации. Этим я сейчас и займусь. Давайте выясним прежде всего, какие различия получаются в выражении для Y при этих трех способах регуляризации.

Вернемся к интегралу (20.5). Согласно способу «б», область изменения переменных ограничивается неравенством

$$|E_n| + E_i + |\mathbf{k}| < 2g.$$

Простейший путь учесть неравенство такого рода — ввести в подынтегральное выражение множитель вида

$$\Theta(2g - |E_n| - E_i - |\mathbf{k}|).$$

Тогда равенство (20.6) перейдет в равенство вида

$$Y_б = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu e^{i(\mathbf{kx})} \frac{\nu + (E/|E|)}{|\mathbf{k}| + |E| - \nu E_i} \times \\ \times \Theta(2g - |E| - E_i - |k|)\, \alpha^\mu e^{-i(\mathbf{kx})} \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}, \qquad (21.1)$$

а равенство (20.7) — в равенство вида

$$Y_б = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu \frac{\nu + (\tilde{E}/|\tilde{E}|)}{|\mathbf{k}| + |\tilde{E}| - \nu E_i} \times \\ \times \Theta(2g - |\tilde{E}| - E_i - |\mathbf{k}|)\, \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Аналогично при регуляризации по способу «а» мы получаем

$$Y_а = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu \frac{\nu + (\tilde{E}/|\tilde{E}|)}{|\mathbf{k}| + |\tilde{E}| - \nu E_i} \Theta(g - |\mathbf{k}|)\, \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Так как
$$E = \alpha_m m + (\alpha\pi) - e\mathcal{A}_0,$$
где
$$\pi_r = p_r + e\mathcal{A}_r,$$
то
$$\tilde{E} = \alpha_m m + (\alpha\pi) + (\alpha\mathbf{k}) - e\mathcal{A}_0,$$
$$\tilde{E}^2 = \mathbf{k}^2 + 2(\mathbf{k}\pi) - 2(\alpha\mathbf{k})e\mathcal{A}_0 + \text{Члены, не зависящие от } \mathbf{k}.$$

Поэтому для больших $|\mathbf{k}|$, равных по порядку величины g, мы имеем
$$|\tilde{E}| = |\mathbf{k}| + (\mathbf{l}\pi) - (\alpha\mathbf{l})e\mathcal{A}_0 + O(g^{-1}),$$
где
$$l_r = \frac{k_r}{|\mathbf{k}|}.$$

Таким образом,
$$\frac{\nu + (\tilde{E}/|\tilde{E}|)}{|\mathbf{k}| + |\tilde{E}| - \nu E_i} = \frac{\nu + (\alpha\mathbf{l})}{2|\mathbf{k}|} + O(g^{-2}) = \frac{(\alpha\mathbf{l})}{2|\mathbf{k}|} + O(g^{-2}),$$
причем переход к правой части последнего равенства подразумевает усреднение по ν. Кроме того,
$$\Theta(2g - |\tilde{E}| - E_i - |\mathbf{k}|) = \Theta(2g - 2|\mathbf{k}| - (\mathbf{l}\pi) + $$
$$+ (\alpha\mathbf{l})e\mathcal{A}_0 - E_i + O(g^{-1})) = \Theta(g - |\mathbf{k}| + F_6),$$
где
$$F_6 = -\tfrac{1}{2}(\mathbf{l}\pi) + \tfrac{1}{2}(\alpha\mathbf{l})e\mathcal{A}_0 - \tfrac{1}{2}E_i + O(g^{-1}).$$

Следовательно,
$$Y_6 - Y_a = (4\pi)^{-1}\int \alpha_\mu \frac{(\alpha\mathbf{l})}{|2\mathbf{k}|} \times$$
$$\times \{\Theta(g - |\mathbf{k}| + F_6) - \Theta(g - |\mathbf{k}|)\}\alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Положим
$$d^3k = |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}|\,d\Omega,$$
где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Тогда, выполнив сначала интегрирование по $|\mathbf{k}|$, а затем по всему телесному углу, мы найдем
$$Y_6 - Y_a = (4\pi)^{-1}\alpha_\mu \int \tfrac{1}{2}(\alpha\mathbf{l})F_6\,d\Omega\alpha^\mu.$$

Конечно, фигурирующая здесь величина $F_б$ представляет собой оператор, однако это не обесценивает наших аргументов. Для каждого значения переменной $\mathbf{l}$, что, к слову, означает для каждого направления в k-пространстве, мы можем взять такое представление, в котором оператор $F_б$ диагонален, после этого интегрирование по $|\mathbf{k}|$ станет тривиальным. Если мы будем пользоваться другим представлением, результат должен остаться прежним.

После интегрирования по всему телесному углу многие из членов пропадут. Какой-либо вклад будет только от тех членов в $F_б$, которые линейны по $\mathbf{l}$. Таким образом, мы получаем

$$Y_б - Y_а = \frac{1}{2}\alpha_\mu\left[-\frac{(\alpha\pi)}{6}+\frac{1}{2}e\mathcal{A}_0\right]\alpha^\mu.$$

Далее, суммируя по четырем значениям μ, находим следующий окончательный результат:

$$Y_б - Y_а = -\frac{(\alpha\pi)}{6}-\frac{1}{2}e\mathcal{A}_0. \qquad (21.2)$$

При регуляризации по способу «в» мы следуем тому же методу вычислений: надо лишь заменить полную энергию E кинетической энергией. Таким образом, в аргументе функции Θ в (21.1) мы заменяем E на $E+e\mathcal{A}_0$ и E_i на $|E_i+e\mathcal{A}_0|$. Тем самым мы должны заменить величину $F_б$ на $F_в$, выражение для которой имеет вид

$$F_в = -\frac{1}{2}(\mathbf{l}\pi)-\frac{1}{2}|E_i+e\mathcal{A}_0|.$$

Это приводит к следующему результату:

$$Y_в - Y_а = -\frac{1}{6}(\alpha\pi). \qquad (21.3)$$

Так подсчитывается разница в выражениях Y, связанная с различными способами регуляризации. Вы замечаете, что разность между различными выражениями не зависит от g. Эти результаты справедливы лишь до тех пор, пока g велико, причем, получающиеся при различных способах регуляризации выражения для Y разнятся между собой на конечную величину. В настоящий момент мы оставим открытым вопрос о том, какой из способов регуляризации правильный, и отложим его решение на дальнейшее.

ЛЕКЦИЯ 22

СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Продолжая наше рассмотрение, возьмем случай, когда статические поля отсутствуют, и выведем явное выражение для Y. При $\mathscr{A}_\mu = 0$ мы имеем

$$E = (\alpha \mathbf{p}) + \alpha_m m, \qquad E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

и

$$|E| = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} = p_0,$$

т. е. p_0 определяется как положительный квадратный корень из выражения $\mathbf{p}^2 + m^2$. Поэтому выражение (20.6) принимает вид

$$Y = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu \frac{\nu \tilde{p}_0 + (\alpha \tilde{\mathbf{p}}) + \alpha_m m}{\tilde{p}_0 (|\mathbf{k}| + \tilde{p}_0 - \nu E_i)} \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Пусть

$$Y_0 = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu \frac{\nu \tilde{p}_0 + (\alpha \tilde{\mathbf{p}}) + \alpha_m m}{\tilde{p}_0 (|\mathbf{k}| + \tilde{p}_0 - \nu p_0)} \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Это выражение отличается от выражения для Y только тем, что здесь в знаменателе вместо E_i стоит p_0. Выражение для самого оператора Y нам необходимо знать лишь в той мере, в какой нам необходимо выражение для $Y|i\rangle$, знать же последнее достаточно, чтобы зафиксировать все матричные элементы Y_{ni}. Так как

$$p_0 | i\rangle = E_i | i\rangle,$$

то

$$Y_0 | i\rangle = Y | i\rangle,$$

и, следовательно, для получения желаемых результатов мы можем использовать выражение для Y_0 с таким же успехом, как и выражение для Y. Мы будем вычислять интеграл Y_0 вместо интеграла Y.

Предлагаемый подход удобен с точки зрения последующих приложений.

Суммирование по μ выполняется довольно просто. Мы имеем соотношения

$$\frac{1}{2}\alpha_\mu\alpha^\mu = -1,$$
$$\frac{1}{2}\alpha_\mu\alpha_r\alpha^\mu = \alpha_r, \qquad r = 1,\ 2,\ 3, \tag{22.1}$$
$$\frac{1}{2}\alpha_\mu\alpha_m\alpha^\mu = 2\alpha_m;$$

учитывая эти соотношения, получаем

$$Y_0 = (2\pi)^{-1}\int \frac{-\nu\tilde{p}_0 + (\widetilde{\alpha p}) + 2\alpha_m m}{\tilde{p}_0(|\mathbf{k}| + \tilde{p}_0 - \nu p_0)}\,\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Последнее выражение мы можем записать в более удобном виде

$$Y_0 = (2\pi)^{-1}\int \frac{\nu|\mathbf{k}| - p_0 + (\widetilde{\alpha p}) + 2\alpha_m m}{\tilde{p}_0(|\mathbf{k}| + \tilde{p}_0 - \nu p_0)}\,\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|},$$

принимая во внимание, что разница между этими двумя выражениями исчезает при усреднении по ν.

Чтобы вычислить последний интеграл, мы поступим следующим образом. Выберем систему координат, в которой p_1 и p_2 равны нулю, т. е. выберем в качестве оси k_3 ось, проходящую в направлении $\mathbf{p}$. В связи с этим вы могли бы спросить: является ли такая процедура законной, если принять во внимание, что $\mathbf{p}$ — это не просто числа, а операторы? В общем случае такая процедура незаконна, однако здесь операторы p_r коммутируют со всеми встречающимися переменными, поэтому мы с успехом могли бы перейти к представлению, в котором операторы p_r диагональны, а затем положить p_1 и p_2 равными нулю. Позднее, когда нам придется проводить соответствующие расчеты применительно к случаю, в котором фигурируют полевые функции, некоммутирующие с импульсом $\mathbf{p}$, ситуация будет сложнее, и там мы не сможем воспользоваться таким трюком. Пока же мы имеем

$$Y_0 = (2\pi)^{-1}\int \frac{\nu|\mathbf{k}| - p_0 + \alpha_3(p_3 + k_3) + 2\alpha_m m}{\tilde{p}_0(|\mathbf{k}| + \tilde{p}_0 - \nu p_0)}\,\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Выше мы пренебрегли членами, линейными по k_1 и k_2, так как в результате интегрирования по всем значениям k вклад от таких членов исчезает из-за симметрии между положительными и отрицательными значениями k. Членами, линейными по k_3, пренебрегать, конечно, нельзя, потому что в выражение для $\tilde{p}_0$ входит k_3:

$$\tilde{p}_0 = \left[m^2 + (p_3 + k_3)^2 + k_1^2 + k_2^2\right]^{1/2} = \\ = \left(m^2 + p_3^2 + 2p_3k_3 + |\mathbf{k}|^2\right)^{1/2}.$$

Теперь же интегрирование можно выполнить, сделав подходящую замену переменных. Трюк заключается в том, чтобы ввести новую переменную

$$\omega = \tilde{p}_0 + |\mathbf{k}|.$$

Для этого перейдем сначала к цилиндрическим координатам, полагая

$$k_1 = \rho\cos\varphi, \qquad k_2 = \rho\sin\varphi, \qquad \rho = \left(k_1^2 + k_2^2\right)^{1/2},$$

т. е. от переменных k_1, k_2, k_3 перейдем к переменным k_3, ρ, φ. Для элемента объема имеем

$$d^3k = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dk_3.$$

А теперь перейдем к переменным ω, φ, k_3. При второй замене переменных нам понадобится якобиан

$$\frac{\partial(\omega k_3)}{\partial(\rho k_3)} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)_{k_3=\mathrm{const}} = \frac{\rho}{\tilde{p}_0} + \frac{\rho}{|\mathbf{k}|} = \frac{\rho\omega}{\tilde{p}_0|\mathbf{k}|}.$$

В результате мы получим

$$\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|} = \frac{\tilde{p}_0}{\omega}\, d\omega\, d\varphi\, dk_3.$$

После указанной замены переменных выражение для Y_0 принимает вид

$$Y_0 = \int\int \frac{\alpha_3 p_3 + 2\alpha_m m - p_0 + \nu|\mathbf{k}| + \alpha_3 k_3}{\omega - \nu p_0}\, \frac{d\omega}{\omega}\, dk_3. \qquad (22.2)$$

Приступим теперь к регуляризации этого выражения по способу «б», которым здесь удобнее всего воспользоваться. При этом мы сначала проинтегрируем по k_3, а затем по ω. Вы видите, что ω, если оставить в стороне постоянный член E_i, представляет собой как раз полную энергию, поэтому регуляризация по отношению к полной энергии означает регуляризацию по переменной ω.

Теперь интегрирование выполняется довольно бесхитростно. Во-первых, при интегрировании по k_3 мы должны знать пределы изменения переменной k_3, когда значение ω задано. При заданном значении ω переменная k_3 принимает предельные значения тогда, когда $k_3 = \pm|\mathbf{k}|$. Интересующие нас переменные связаны между собой соотношением

$$(\omega - |\mathbf{k}|)^2 = p_0^2 + 2p_3k_3 + |\mathbf{k}|^2.$$

Это соотношение дает

$$2\omega|\mathbf{k}| = \omega^2 - p_0^2 - 2p_3k_3.$$

Вы видите, что пределы интегрирования по k_3 равны

$$k_3 = \frac{\omega^2 - p_0^2}{2(\omega + p_3)}$$

и

$$k_3 = -\frac{\omega^2 + p_0^2}{2(\omega - p_3)}.$$

Если вы теперь посмотрите на выражение (22.2) для Y_0, то вы заметите, что там есть члены, не зависящие от k_3, есть члены, линейные по k_3, и есть члены, линейные по $|\mathbf{k}|$, поэтому нам нужны интегралы трех типов:

$$\int dk_3 = \frac{\omega^2 - p_0^2}{\omega^2 - p_3^2}\,\omega,$$

$$\int k_3\,dk_3 = -\frac{1}{2}\,\frac{(\omega^2 - p_0^2)^2}{(\omega^2 - p_3^2)^2}\,\omega p_3,$$

$$\int |\mathbf{k}|\,dk_3 = \frac{(\omega^2 - p_0^2)^2}{2(\omega^2 - p_3^2)^2}\,\omega^2.$$

Учитывая значения этих интегралов, получаем

$$Y_0 = \int \left[\frac{\alpha_3 p_3 + 2\alpha_m m - p_0}{\omega^2 - p_3^2} + \nu \frac{(\omega^2 - p_0^2)\,\omega}{2(\omega^2 - p_3^2)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_3 p_3 (\omega^2 - p_0^2)}{2(\omega^2 - p_3^2)^2} \right] (\omega + \nu p_0)\, d\omega.$$

На этой стадии вычислений удобно произвести усреднение по ν. Усреднение по ν можно сделать в любой момент времени в процессе наших выкладок, но делать это раньше было невыгодно, так как в результате этого получилось бы удлинение записи. Однако здесь усреднение уже вполне уместно. После усреднения мы находим

$$Y_0 = \int \left[\frac{\alpha_3 p_3 + 2\alpha_m m - p_0}{\omega^2 - p_3^2} + \frac{(p_0 - \alpha_3 p_3)(\omega^2 - p_0^2)}{2(\omega^2 - p_3^2)^2} \right] \omega\, d\omega.$$

Теперь выражение $\omega^2 - p_0^2$ внутри квадратных скобок можно заменить выражением $\omega^2 - p_3^2 - m^2$, и мы получим

$$Y_0 = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\alpha_3 p_3 + 4\alpha_m m - p_0}{\omega^2 - p_3^2} - \frac{(p_0 - \alpha_3 p_3)\, m^2}{(\omega^2 - p_3^2)^2} \right] \omega\, d\omega.$$

Это выражение совсем нетрудно проинтегрировать по ω, результат после подстановки пределов интегрирования имеет вид

$$Y_0 = \frac{1}{4} \left[(\alpha_3 p_3 + 4\alpha_m m - p_0) \ln (\omega^2 - p_3^2) + \frac{p_0 - \alpha_3 p_3}{\omega^2 - p_3^2}\, m^2 \right]_{p_0}^{2g-E} =$$

$$= \frac{1}{2} (\alpha_3 p_3 + 4\alpha_m m - p_0) \ln \frac{2g}{m} - \frac{1}{4} (p_0 - \alpha_3 p_3).$$

Все расчеты нами сделаны для случая, когда p_1 и p_2 равны нулю, однако теперь мы можем вернуться к общему случаю. В общем случае, когда все p_1, p_2, p_3 отличны от нуля, мы, очевидно, должны заменить произведение $\alpha_3 p_3$ скалярным произведением $(\alpha \mathbf{p})$. Тогда мы получаем выражение

$$Y_0 = \frac{1}{2} \left[(\alpha \mathbf{p}) + 4\alpha_m m - p_0 \right] \ln \frac{2g}{m} - \frac{1}{4} [p_0 - (\alpha \mathbf{p})]. \qquad (22.3)$$

Далее имеем

$$[(\alpha\mathbf{p})+\alpha_m]|i\rangle = E_i|i\rangle = p_0|i\rangle.$$

Отсюда мы затем находим

$$Y|i\rangle = \alpha_m m\left[\frac{3}{2}\ln\frac{2g}{m}-\frac{1}{4}\right]|i\rangle = qm\alpha_m|i\rangle,$$

где

$$q=\frac{3}{2}\ln\frac{2g}{m}-\frac{1}{4}.$$

Таков результат наших вычислений. Давайте посмотрим, к чему он приводит. Из соотношения (19.2) следует

$$i\frac{\partial K_2^*}{\partial t}=\frac{e^2}{4\pi}qm\sum_n \bar{\Psi}_n\langle n|\alpha_m|i\rangle e^{i(E_n-E_i)t}.$$

Это выражение показывает, каким образом влияет возмущение на интересующий нас оператор рождения частиц.

ЛЕКЦИЯ 23

ПЕРЕНОРМИРОВКА МАССЫ

Этот эффект можно устранить с помощью процедуры, которая известна как *перенормировка массы*. Она состоит в добавлении к гамильтониану еще одного члена, соответствующего вариации массового параметра. Сохраним обозначение m за наблюдаемой массой. Заменим далее в гамильтониане H параметр m на $m+\delta m$; другими словами, будем теперь считать, что фигурирующий в гамильтониане массовый параметр отличается от наблюдаемой массы. Этот вариационный член в гамильтониане будет рассматриваться нами в качестве возмущения второго порядка. Итак, мы имеем в гамильтониане H лишний член

$$H_2=\delta m\int\bar{\psi}_x\alpha_m\psi_x\,d^3x=\delta m\sum_{nn'}\bar{\psi}_n\langle n|\alpha_m|n'\rangle\psi_{n'}.$$

Его нужно рассматривать в качестве дополнительного возмущения второго порядка, приводящего к дополнительному изменению величины K_2^*:

$$\left(i\frac{\partial K_2^*}{\partial t}\right)_{\text{доп}}=\left[H_2^*,\ \bar{\psi}_i\right]_-,$$

где

$$H_2^*=\delta m\sum_{nn'}\bar{\psi}_n\langle n|\alpha_m|n'\rangle\psi_{n'}e^{i(E_n-E_{n'})t}.$$

Используя выражение для H_2^* при вычислении коммутатора, мы получаем

$$\left(i\frac{\partial K_2^*}{\partial t}\right)_{\text{доп}}=\delta m\sum_{n}\bar{\psi}_n\langle n|\alpha_m|i\rangle e^{i(E_n-E_i)t}.$$

Эта дополнительная производная $i(\partial K_2^*/\partial t)$ должна быть добавлена к рассмотренной нами ранее.

Теперь мы можем сделать так, чтобы общее выражение для производной $i(\partial K_2^*/\partial t)$ обращалось в нуль, т. е. $i(\partial K_2^*/\partial t)=0$, если мы выберем δm подходящим образом, а именно если положим

$$\delta m = -\frac{e^2}{\pi} qm.$$

Эта процедура и есть перенормировка массы. В результате с точностью до членов второго порядка возмущение не влияет на оператор рождения электронов.

На данной стадии рассмотрения мы могли бы обсудить вопрос о том, какое значение следует приписать параметру регуляризации g: он не должен быть слишком велик, потому что мы должны иметь возможность рассматривать H_2^* как возмущение, и это не позволяет нам устремлять g к бесконечности. Однако мы можем взять для g достаточно большое значение и сохранить при этом благодаря логарифмическому множителю достаточно малой величину отношения $\delta m/m$. В наших единицах $e^2 = 1/137$. Я прикинул несколько цифр. При $2g/m = 1000$ мы получаем $\ln(2g/m) = 6{,}9$ и $\delta m/m = 1/43$, что достаточно мало, чтобы на разумных основаниях считаться возмущением. Мы могли бы взять $2g/m = 10\,000$, тогда $\ln(2g/m) = 9{,}2$ и $\delta m/m = 1/32$, что все еще в разумной степени мало для теории возмущений. В первом случае g по порядку величины равно $250 \cdot 10^6$ *эв* и в 10 раз больше во втором случае. Следует ожидать, что электродинамика нарушается при энергиях, заключенных где-то между приведенными значениями, так как при таких высоких энергиях в игру вступают новые эффекты, связанные с возможностью рождения мезонов, нейтрино и т. д. Поэтому мы должны представить себе, что значение $2g/m$ лежит где-то в этой области; это в свою очередь означает, что наша электродинамика является ограниченной теорией с точки зрения высокоэнергетических процессов. Но мы можем надеяться, что для процессов, в которых энергии малы по сравнению с указанными, она будет вполне приличной теорией.

При такой регуляризации влияние $\delta m/m$ можно не без оснований рассматривать как возмущающий эффект. Вот каким образом, я думаю, следует подходить к вопросу о перенормировке массы. При таком подходе мы, действительно, получаем логичную теорию, где мы решаем уравнения, а не просто пользуемся рабочими рецептами и где мы пренебрегаем только такими членами, которые, как мы чувствуем, малы и пренебрежение которыми оправдано.

Приведенные выше расчеты выполнены с помощью регуляризации по способу «б». А как будет обстоять дело, если мы применим иной способ регуляризации? Как вы понимаете, мы пользовались регуляризацией по способу «б», потому что нашей последней переменной интегрирования была переменная ω, равная $|\mathbf{k}|+\tilde{p}_0$, и регуляризация по ω тем самым означала, что мы налагали ограничения на величину $|\mathbf{k}|+\tilde{p}_0$. В этом как раз и заключается регуляризация по способу «б».

При регуляризации по способу «а» мы, согласно соотношению (21.2), получаем

$$Y = q\alpha_m m + \frac{1}{6}(\alpha\mathbf{p}).$$

От первого члена мы можем избавиться с помощью перенормировки массы, но мы ничего не сможем сделать со скалярным произведением $(\alpha\mathbf{p})$. Вы можете спросить: нельзя ли ввести в гамильтониан еще один член, являющийся своего рода контрчленом по отношению к $(\alpha\mathbf{p})$ и приводящий к его уничтожению? Мы могли бы ввести такой член, однако он должен был бы быть пропорционален $(\alpha\mathbf{p})$, а такой член по своей природе не будет релятивистским. Если мы введем в гамильтониан такой контрчлен с тем, чтобы избавиться от $(\alpha\mathbf{p})$, наша теория уже не будет релятивистской даже для процессов, относящихся к области низких энергий. Таким образом, мы заключаем, что регуляризация по способу «а» — это плохая регуляризация.

Пока что мы не можем обнаружить какого-либо различия между регуляризацией по способу «б» и регуляризацией по способу «в», так как оба способа, когда нет статического поля, эквивалентны. Однако различие между ними все-таки можно усмотреть, если воспользоваться соображениями, связанными с калибровочной инвариантностью. Предположим, что статический магнитный потенциал равен нулю

$$\mathcal{A}_r = 0,$$

а статический электрический потенциал постоянен как в пространстве, так и во времени:

$$\mathcal{A}_0 = c\text{-число}.$$

Разумеется, такой потенциал означает, что на самом деле нет никаких статических полей, поэтому такой потенциал не должен оказывать никакого влияния вообще. Введем теперь этот потенциал в наши уравнения и посмотрим, что в них изменится. Прежде всего нам придется работать с оператором энергии

$$E = (\alpha \mathbf{p}) + \alpha_m m - e\mathcal{A}_0 = U - e\mathcal{A}_0,$$

где U — оператор энергии в случае, когда нет потенциалов.

Далее при подсчете выражения (20.6) мы пользуемся величиной

$$\frac{\nu + (E/|E|)}{|\mathbf{k}| + |E| - \nu E_i}, \tag{23.1}$$

умножаем ее слева и справа на подходящие множители и выполняем затем интегрирование, поэтому теперь мы должны посмотреть как повлияет на результат введение внешнего потенциала. Давайте ради простоты введем ограничение $|e\mathcal{A}_0| < m$. Это ограничение означает, что потенциал не должен быть чудовищно огромным, но он все же может быть достаточно большим. Всякая собственная функция оператора U есть одновременно и собственная функция оператора E, так как разница между ними просто-напросто равна c-числу. Если $U > 0$, то $E > 0$ в силу неравенства

$|e\mathscr{A}_0| < m$ и, следовательно,

$$\frac{E}{|E|}=\frac{U}{|U|}=\frac{U}{p_0},$$

где p_0, как вы помните, — это просто $(\mathbf{p}^2+m^2)^{1/2}$.

Во-первых, заменим в знаменателе выражения (23.1) $|E|$ на νE. Это нам даст

$$\frac{\nu+(E/|E|)}{|\mathbf{k}|+\nu(E-E_i)}.$$

Такая замена допустима, так как

$$|E|=\pm\nu E,$$

а если

$$|E|=-\nu E,$$

то исчезает числитель, поэтому равенство выполняется в любом случае. Запишем теперь это выражение в виде

$$\frac{\nu+(U/p_0)}{|\mathbf{k}|+\nu(U-e\mathscr{A}_0-E_i)}$$

и затем сделаем здесь еще замену: введем вместо νU величину $|U|=p_0$. Для оправдания этой замены можно воспользоваться прежней аргументацией. В результате мы получим

$$\frac{\nu+(U/p_0)}{|\mathbf{k}|+p_0-\nu(e\mathscr{A}_0+E_i)}.$$

Как видите, здесь мы имеем тот же результат, что и в случае, когда нет статических потенциалов, но число E_i заменилось на $E_i+e\mathscr{A}_0$. Таким образом, интеграл в этом случае вычислялся бы так же, как и раньше, но с заменой прежнего числа E_i на $E_i+e\mathscr{A}_0$. Поэтому с учетом такой подстановки мы можем распространить на интересующий нас случай все расчеты, относящиеся к случаю, когда потенциалы отсутствуют.

В наших предыдущих расчетах мы пользовались слабым равенством

$$(\alpha\mathbf{p})+\alpha_m m\approx E_i,$$

которое справедливо в обе стороны, если иметь в виду действие на вектор $|i\rangle$. Вместо этого равенства мы теперь имеем

$$(\alpha \mathbf{p}) + \alpha_m m \approx E_i + e\mathscr{A}_0,$$

поскольку все еще справедливо равенство $E \approx E_i$. Поэтому здесь опять-таки мы должны вместо E_i подставить $E_i + e\mathscr{A}_0$. С такой подстановкой все выкладки проходят, как и раньше, и окончательно мы получаем

$$Y \approx q\alpha_m m,$$

причем множитель q имеет здесь прежнее значение. Учитывая перенормировку массы, мы, как и раньше, находим

$$\frac{\partial K_2^*}{\partial t} = 0.$$

Как видите, при такой подстановке все идет благополучно. Теперь мы должны выяснить, какого рода ограничительный процесс нами используется. До этого нами использовалась переменная интегрирования

$$\omega = \tilde{p}_0 + |\mathbf{k}|,$$

причем интегрирование по ней проводилось в последнюю очередь. Это означает, что мы производили регуляризацию по ω. Замена E_i на $E_i + e\mathscr{A}_0$ никоим образом не сказывается на переменной ω, поэтому мы и теперь все еще имеем дело с регуляризацией по ω, но переменная ω относится как раз к полной кинетической энергии; следовательно, мы имеем дело с регуляризацией по способу «в».

Регуляризация по способу «в» — это физически корректная регуляризация, приводящая к калибровочно инвариантному результату. Регуляризация по способу «б» не обладает калибровочной инвариантностью.

Эти расчеты мы выполнили, используя постоянный как в пространстве, так и во времени электростатический потенциал. Вы могли бы спросить: а что произойдет, если использовать постоянный во времени и в пространстве магнитный потенциал? Легко можно сообразить, что эффект, обусловленный таким потенциалом, тривиален. Введение такого потенциала означает всего лишь замену p_r на π_r. После интегрирования p_r исчезает, поэтому исчезнет и π_r. Таким образом, постоянный магнитный потенциал никак не сказывается на вычислениях. Этими рассуждениями и завершается теория как для случая отсутствия статических потенциалов, так и для случая с постоянными статическими потенциалами.

ЛЕКЦИЯ 24

АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ

Теперь мы переходим к рассмотрению случаев, когда статические потенциалы непостоянны. Рассмотрим сначала задачу об аномальном магнитном моменте. С этой целью мы должны взять такие потенциалы $\mathscr{A}_r$, которые будут представлять однородное магнитное поле, я имею в виду поле, однородное и постоянное во всем пространстве; кроме того, мы должны положить $\mathscr{A}_0 = 0$.

Предположим, что магнитное поле имеет величину $\mathscr{H}$ и направлено вдоль оси x_3. В таком случае имеем

$$E = (\alpha(\mathbf{p} + e\mathscr{A})) + \alpha_m m = (\alpha\pi) + \alpha_m m,$$

где π, как и раньше, равно $\mathbf{p} + e\mathscr{A}$. Из одночастичной теории мы получаем

$$E^2 = \pi^2 + m^2 + e\mathscr{H}\sigma_3,$$

где $i\sigma_3 = \alpha_1\alpha_2$.

Мы будем предполагать, что поле $\mathscr{H}$ мало и пренебрежем величиной $\mathscr{H}^2$. Таким образом,

$$|E| = (m^2 + \pi^2)^{1/2} + \frac{1}{2} e\mathscr{H}\sigma_3 (m^2 + \pi^2)^{-1/2}.$$

Далее мы имеем

$$Y = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu \tilde{\mathscr{Y}} \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Причем

$$\tilde{\mathscr{Y}} = \left(\nu + \frac{\tilde{E}}{|\tilde{E}|}\right)(|\tilde{E}| + |\mathbf{k}| - \nu E_l)^{-1}. \qquad (24.1)$$

Будем считать импульс электрона малой величиной. В этом случае обобщенный импульс π тоже мал, поэтому мы будем пренебрегать членами, кубичными по π. Кроме того, мы будем пренебрегать и произведением $\pi\mathscr{H}$.

Знаменатель в выражении для $\tilde{\mathscr{Y}}$ иногда исчезает, если $\nu = 1$. Заметим, что при $\nu = -1$ он исчезать не может. Мы должны оценить по порядку величины вклад, вносимый в Y той частью области интегрирования, где знаменатель мал. Как выяснится, этим вкладом можно пренебречь.

Мы имеем

$$
\begin{aligned}
(|\tilde{E}| + |\mathbf{k}| - E_i)^{-1} &= \\
&= (|\tilde{E}| - |\mathbf{k}| + E_i)\left(\tilde{E}^2 - \mathbf{k}^2 - E_i^2 + 2|\mathbf{k}|E_i\right)^{-1} = \\
&= (|\tilde{E}| - |\mathbf{k}| + E_i)\left[E^2 - E_i^2 + 2(\mathbf{k}\pi) + 2|\mathbf{k}|E_i\right]^{-1}.
\end{aligned}
$$

Введем обозначение

$$D = \frac{1}{2}\left(E^2 - E_i^2\right) + (\mathbf{k}\pi) + |\mathbf{k}|E_i.$$

Мы можем использовать этот знаменатель вместо знаменателя, фигурирующего в выражении (24.1) при $\nu = 1$.

Выражение для Y необходимо знать лишь в той мере, в какой нам необходимо выражение для $Y|i\rangle$. Мы будем писать

$$A \approx B, \quad \text{если} \quad A|i\rangle = B|i\rangle.$$

Обозначим через α_λ продольную по отношению к направлению магнитного поля компоненту α, т. е. $\alpha_\lambda = 1$ или $\alpha_\lambda = \alpha_3$, а поперечную по отношению к направлению магнитного поля компоненту α обозначим через α_τ, т. е. $\alpha_\tau = \alpha_1$ или $\alpha_\tau = \alpha_2$. В таком случае α_λ коммутирует с E^2:

$$\alpha_\lambda E^2 \alpha_\lambda = E^2,$$

но

$$\alpha_\tau E^2 \alpha_\tau = \pi^2 + m^2 - e\mathscr{H}\sigma_3 = E^2 - 2e\mathscr{H}\sigma_3.$$

В этих равенствах нет суммирования по λ или τ.

Далее мы имеем

$$\alpha_\lambda D \alpha_\lambda \approx (\mathbf{k}\pi) + |\mathbf{k}|E_i.$$

Таким образом, произведение $\alpha_\lambda D\alpha_\lambda$ не может исчезнуть из-за малости $(\mathbf{k}\pi)$. С другой стороны,

$$\alpha_\tau D\alpha_\tau \approx (\mathbf{k}\pi) + |\mathbf{k}|E_i - e\mathscr{H}\sigma_3, \tag{24.2}$$

что при малых значениях $|\mathbf{k}|$, равных по порядку величины $\mathscr{H}$, может обратиться в нуль. Физически исчезновение этого выражения соответствует процессу, когда электрон испускает или поглощает фотон и меняет ориентацию своего спина.

Для поперечных компонент α_τ числитель в выражении $\alpha_\tau\widetilde{\mathscr{Y}}\alpha_\tau$ при $\nu = 1$ оказывается малой величиной. Отвлекаясь от множителя порядка единицы, его можно представить в виде

$$\alpha_\tau\left\{1 + [(\alpha\pi) + (\alpha\mathbf{k}) + \alpha_m m]|\widetilde{E}|^{-1}\right\}\alpha_\tau.$$

Это выражение имеет следующую структуру: члены порядка $(1-\alpha_m)$ плюс члены порядка π или $\mathbf{k}$. Заметим, что при действии $(1-\alpha_m)$ на $|i\rangle$ также получается величина порядка π.

Область интегрирования, где знаменатель выражения (24.2) мал, можно изобразить в виде толстой яичной скорлупы, окружающей начало координат и имеющей радиус порядка $e\mathscr{H}/m$. Мы получим порядок величины интеграла, распространенного на эту область, если заменим толстую скорлупу тонкой, подставив

$$\delta[(\mathbf{k}\pi) + |\mathbf{k}|E_i - e\mathscr{H}\sigma_3] \quad \text{вместо} \quad [(\mathbf{k}\pi) + |\mathbf{k}|E_i - e\mathscr{H}\sigma_3]^{-1}.$$

Для интеграла мы после этого получим

$$\int [O(\mathbf{k}) + O(\pi)]\,\delta[(\mathbf{k}\pi) + |\mathbf{k}|E_i - e\mathscr{H}\sigma_3]\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|} = \\ = O(\mathbf{k}^2) + O(\mathbf{k}\pi).$$

В это выражение мы должны подставить значение $\mathbf{k}$ на оболочке, которое по порядку величины равно $\mathscr{H}$. Результат оказывается пренебрежимо малой величиной. Положим, по определению,

$$\widetilde{\mathscr{Y}}_0 = \left\{\nu + [(\alpha\widetilde{\pi}) + \alpha_m m](m^2 + \widetilde{\pi}^2)^{-1/2}\right\}\left[(m^2 + \widetilde{\pi}^2)^{1/2} + |\mathbf{k}| - \\ - \nu(m^2 + \pi^2)^{1/2}\right]^{-1},$$

где

$$\tilde{\pi}_r = \pi_r + k_r$$

и

$$Y_0 = (4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu \tilde{\mathscr{Y}}_0 \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Предположим теперь, что π — малая величина и разложим $\tilde{\mathscr{Y}}_0$ и Y_0 в ряд по степеням π с точностью до членов второго порядка включительно. Единственные в выражении для $\tilde{\mathscr{Y}}_0$ квадратичные члены содержат либо $(\alpha\pi)(\mathbf{k}\pi)$, либо $(\mathbf{k}\pi)^2$, либо, наконец, π^2. После интегрирования по всем направлениям в k-пространстве $(\alpha\pi)(\mathbf{k}\pi)$ дает нуль, а $(\mathbf{k}\pi)^2$ дает $\frac{1}{3}\mathbf{k}^2\pi^2$. Поэтому все квадратичные члены в выражении для Y_0 содержат π^2. Следовательно, с этой степенью точности Y_0 оказывается одной и той же функцией переменных π независимо от того, коммутируют эти переменные между собой или нет.

Если же мы будем рассматривать π в качестве коммутирующих переменных, то $\tilde{\mathscr{Y}}_0$ будет иметь тот же вид, что и соответствующее выражение из лекции 22, где вместо p_r надо поставить π_r. Поэтому Y_0 дается теперь выражением (22.3) с заменой p_r на π_r. Таким образом,

$$Y_0 = \frac{1}{2}\left[(\alpha\pi) + \alpha_m m - m - \frac{\pi^2}{2m}\right]\left[\ln\left(\frac{2g}{m}\right) + \frac{1}{2}\right] + \\ + \alpha_m m\left[\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2g}{m}\right) - \frac{1}{4}\right]. \quad (24.3)$$

Это выражение получено с помощью регуляризации по способу «б» либо по способу «в», так как переменная, по которой интегрирование производится в последнюю очередь, есть

$$\omega = |\mathbf{k}| + (m^2 + \tilde{\pi}^2)^{1/2},$$

она отличается на пренебрежимо малую величину от суммы $|\mathbf{k}| + |\tilde{E}|$.

Давайте ради краткости положим

$$e\mathscr{H}\sigma_3 = h.$$

На основании (24.1) имеем

$$\tilde{\mathscr{Y}} = \left\{\nu + [(\alpha\tilde{\pi}) + \alpha_m m](m^2 + \tilde{\pi}^2 + h)^{-1/2}\right\} \times \\ \times \left[(m^2 + \tilde{\pi}^2 + h)^{1/2} + |\mathbf{k}| - \nu E_i\right]^{-1}.$$

Выражение для $\tilde{\mathscr{Y}}_0$ имеет такой же вид, только надо положить $h = 0$ и вместо E_i подставить $(m^2 + \pi^2)^{1/2}$.

Мы представим разность $\tilde{\mathscr{Y}} - \tilde{\mathscr{Y}}_0$ в виде разложения по малым величинам h и $E_i - (m^2 + \pi^2)^{1/2}$. Последняя величина мала в слабом смысле, поскольку

$$E_i - (m^2 + \pi^2)^{1/2} \approx |E| - (m^2 + \pi^2)^{1/2} = \\ = \frac{1}{2} h (m^2 + \pi^2)^{-1/2}. \quad (24.4)$$

В самом разложении величина $E_i - (m^2 + \pi^2)^{1/2}$ не является крайней справа, поэтому для нее мы не можем воспользоваться непосредственно выражением (24.4). Пренебрегая некоторыми множителями, стоящими слева, мы получаем выражение

$$\left[E_i - (m^2 + \pi^2)^{1/2}\right]\left[(m^2 + \tilde{\pi}^2)^{1/2} + |\mathbf{k}| - \nu (m^2 + \pi^2)^{1/2}\right]^{-1}.$$

Оно отличается от выражения

$$\left[(m^2 + \tilde{\pi}^2)^{1/2} + |\mathbf{k}| - \nu (m^2 + \pi^2)^{1/2}\right]^{-1} \left[E_i - (m^2 + \pi^2)^{1/2}\right],$$

к которому уже применимо соотношение (24.4), причем оно отличается на величины, содержащие $[(\pi\mathbf{k}), \pi^2]$, но такие величины равны по порядку $\pi\mathscr{H}$, и ими можно пренебречь. Таким образом, использование приведенного разложения оправдано.

С учетом слабого равенства (24.4) каждый член в разложении $\tilde{\mathscr{Y}} - \tilde{\mathscr{Y}}_0$ содержит либо h, либо $\mathscr{H}$. Поэтому мы совсем можем пренебречь всеми π, так как мы пренебрегаем произведением $\pi\mathscr{H}$.

Положим

$$(m^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2} = \mu.$$

Тогда

$$\tilde{\mathscr{Y}} - \tilde{\mathscr{Y}}_0 = -\alpha_m m \frac{h}{2\mu^3} (\mu + |\mathbf{k}| - \nu m)^{-1} - \\ - \left(\nu + \frac{\alpha_m m}{\mu}\right)(\mu + |\mathbf{k}| - \nu m)^{-2}\left[\frac{h}{2\mu} - \nu (E_i - m)\right].$$

Далее имеем

$$\alpha_\mu \alpha^\mu = -2, \qquad \alpha_\mu \alpha_m \alpha^\mu = 4\alpha_m,$$
$$\alpha_\mu \sigma_3 \alpha^\mu = 2\sigma_3, \qquad \alpha_\mu \alpha_m \sigma_3 \alpha^\mu = 0.$$

Таким образом,

$$\alpha_\mu (\tilde{\mathscr{Y}} - \tilde{\mathscr{Y}}_0)\alpha^\mu = -(\mu + |\mathbf{k}| - \nu m)^{-2}\left[\nu \frac{h}{\mu} + 2(E_i - m) - \right.$$
$$\left. - 4\nu\alpha_m \frac{m}{\mu}(E_i - m)\right] \approx -(\mu + |\mathbf{k}| - \nu m)^{-2} \times$$
$$\times \left(\nu \frac{h}{\mu} + \frac{h}{m} - 2\nu \frac{h}{\mu}\right) = h(\mu + |\mathbf{k}| - \nu m)^{-2} \frac{\nu m - \mu}{m\mu}.$$

Теперь

$$(\mu + |\mathbf{k}| - \nu m)(\mu - |\mathbf{k}| + \nu m) = \mu^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + 2\nu |\mathbf{k}| m =$$
$$= 2\nu |\mathbf{k}| m.$$

Возводя в квадрат, мы получаем

$$(\mu + |\mathbf{k}| - \nu m)^2 [\mu^2 + \mathbf{k}^2 + m^2 + 2\nu m(\mu - |\mathbf{k}|) - 2\mu|\mathbf{k}|] =$$
$$= 4\mathbf{k}^2 m^2,$$

или

$$(\mu + |\mathbf{k}| - \nu m)^2 (\mu + \nu m)(\mu - |\mathbf{k}|) = 2\mathbf{k}^2 m^2.$$

Поэтому

$$\alpha_\mu (\tilde{\mathscr{Y}} - \tilde{\mathscr{Y}}_0)\alpha^\mu \approx h(\mu + \nu m)(\mu - |\mathbf{k}|) \frac{\nu m - \mu}{2m^3 \mathbf{k}^2 \mu} =$$
$$= -\frac{h(\mu - |\mathbf{k}|)}{2m^3 \mu},$$

$$Y - Y_0 = -\frac{h}{2m^3}(4\pi)^{-1} \int \left(1 - \frac{|\mathbf{k}|}{\mu}\right) \frac{d^3 k}{|\mathbf{k}|} =$$
$$= -\frac{h}{2m^3} \int \left(1 - \frac{|\mathbf{k}|}{\mu}\right) |\mathbf{k}|\, d|\mathbf{k}|.$$

Не имеет значения, каким именно способом регуляризации мы будем пользоваться при оценке этой малой величины. Воспользуемся регуляризацией по способу «а». В таком случае мы получаем для интеграла значение

$$\frac{1}{2}\left\{\mathbf{k}^2 - |\mathbf{k}|(m^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2} + m^2 \ln\left[|\mathbf{k}| + (m^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}\right]\right\}_0^q =$$
$$= \frac{1}{2} m^2 \left[\ln\left(\frac{2g}{m}\right) - \frac{1}{2}\right]$$

и, таким образом,

$$Y - Y_0 = -\frac{h}{4m}\left[\ln\left(\frac{2g}{m}\right) - \frac{1}{2}\right].$$

Взяв для Y_0 выражение, даваемое формулой (24.3), и опуская последний член, сокращающийся в результате перенормировки массы, мы получаем

$$Y \approx \frac{1}{2}\left[(\alpha\pi) + \alpha_m m - m - \frac{\pi^2 + h}{2m}\right]\left[\ln\left(\frac{2g}{m}\right) + \frac{1}{2}\right] + \frac{h}{4m}.$$

Учитывая теперь, что

$$(\alpha\pi) + \alpha_m m - m - \frac{\pi^2 + h}{2m} = E - |E| \approx 0,$$

находим

$$Y \approx \frac{h}{4m} = \frac{e\mathscr{H}\sigma_3}{4m}. \qquad (24.5)$$

Это выражение соответствует дополнительной энергии

$$\frac{e^2}{\pi} Y_{ii} = \frac{e^3\mathscr{H}\sigma_3}{4\pi m}. \qquad (24.6)$$

Элементарная теория дает нам для энергии в магнитном поле выражение $e\mathscr{H}\sigma_3/2m$. Поэтому магнитный момент увеличивается в $(1 + e^2/2\pi)$ раз или, если ввести сюда универсальные постоянные, — в $(1 + e^2/2\pi\hbar c)$ раз. Это значение аномального магнитного момента электрона хорошо согласуется с экспериментом.

Формула (24.5) показывает, что у Y нет недиагональных элементов. Этот результат значительно сильнее результата, использованного нами в формуле (24.6). Он означает, что с принятой нами точностью взаимодействие не влияет на собственные функции. Таким образом, взаимодействие в случае статического однородного магнитного поля оказывается настолько гладким, что не возмущает собственных функций оператора энергии. Единственный обусловленный этим полем эффект состоит в появлении дополнительного энергетического члена, соответствующего аномальному моменту.

Если вы хотите сравнить то, что я здесь изложил, с обычной теорией, использующей картину Шредингера, то вам, по-моему, лучше всего было бы воспользоваться книгой Гайтлера[1]). Сделав сравнение, вы обнаружите, что старый вывод на самом деле не является логическим полноценным выводом, подобным тому, который был дан выше, и все-таки вы сталкиваетесь с такими же интегралами и с такими же подстановками для вычислений этих интегралов. Детали вычислений во многом очень схожи, однако аргументация, конечно, совершенно различна. Я думаю, что аргументация не выдерживает никакой критики, когда пытаются работать в рамках картины Шредингера.

Карпус и Кролл[2]) вычислили аномальный магнитный момент до четвертого порядка, т. е. до $e^4/\hbar^2c^2$. Эти вычисления чрезвычайно громоздки. В результатах Карпуса и Кролла содержались числовые ошибки. Они были устранены Зоммерфельдом[3]), а также Питерманном[4]).

---

[1]) Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, 3rd ed., London — New York, 1954. (Имеется перевод: Гайтлер В., Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.) — *Прим. перев.*

[2]) Karpus R., Kroll N. M., Phys. Rev., **77**, 536 (1950).

[3]) Sommerfeld A., Phys. Rev., **107**, 328 (1957).

[4]) Petermann, Helv. Phys. Acta, **30**, 407 (1957).

ЛЕКЦИЯ 25

ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теперь я хотел бы перейти к другому главному приложению квантовой электродинамики — к лэмбовскому сдвигу. В этом случае у нас имеется статическое электрическое поле, но нет статического магнитного поля; другими словами, у нас имеется потенциал $\mathscr{A}_0$, который может быть произвольной функцией координат x_1, x_2, x_3, т. е.

$$\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}_0(x_1, x_2, x_3),$$

но он не является функцией времени, а векторный потенциал статического магнитного поля равен нулю, т. е.

$$\mathscr{A}_r = 0.$$

Это дает нам для одноэлектронной задачи оператор энергии вида

$$E = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) + \alpha_m m - e\mathscr{A}.$$

Здесь я написал $\mathscr{A}$ вместо $\mathscr{A}_0$, так как мы имеем только один потенциал и нет необходимости повсюду писать индекс. Для сокращения записи я буду писать

$$E = U - e\mathscr{A},$$

где U означает оператор $(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) + \alpha_m m$, т. е. $U^2 = p_0^2$.

Пренебрегая $\mathscr{A}^2$, получаем

$$E^2 = p_0^2 - e(U\mathscr{A} + \mathscr{A}U),$$

где потенциал $\mathscr{A}$ — произвольная функция переменных x_1, x_2, x_3, поэтому он, разумеется, не коммутирует с U. По этой причине мы и должны писать по отдельности члены $U\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}U$. Теперь мы должны найти квадратный корень из E^2, чтобы получить выражение для $|E|$. Каким образом извлечь квадратный корень из оператора общего вида, подобного оператору E^2? Мы можем это сделать в том случае, когда сумма $U\mathscr{A} + \mathscr{A}U$ мала. Результат имеет вид

$$|E| = p_0 - \tfrac{1}{2}(UB + BU), \tag{25.1}$$

где подходящим образом выбранная величина B равна по порядку $\mathscr{A}$. Что именно представляет собой величина B, можно выяснить, возведя $|E|$ в квадрат и сравнив полученное выражение с E^2. Как показывает это сравнение, необходимо, чтобы

$$p_0B + Bp_0 = 2e\mathscr{A}. \tag{25.2}$$

Разложим $\mathscr{A}$ в интеграл Фурье:

$$\mathscr{A}_x = \int \mathscr{A}_k e^{-i(\mathbf{kx})}\, d^3k. \tag{25.3}$$

Здесь $\mathscr{A}_x$, разумеется, просто число. Я должен подчеркнуть, что это разложение Фурье существенным образом отличается от того разложения, которым мы пользовались для переменных электромагнитного поля. Здесь нет никакой временнóй зависимости — это просто тривиальное разложение в трехкратный интеграл Фурье. С помощью формулы (20.3) мы находим

$$\langle \mathbf{p}'|\mathscr{A}|\mathbf{p}''\rangle = \int \mathscr{A}_k \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' + \mathbf{k})\, d^3k = \mathscr{A}_{p''-p'}.$$

Возьмем теперь равенство (25.2) и запишем его в этом матричном представлении. Мы получим

$$(p_0' + p_0'')\langle \mathbf{p}'|B|\mathbf{p}''\rangle = 2e\langle \mathbf{p}'|\mathscr{A}|\mathbf{p}''\rangle = 2e\mathscr{A}_{p''-p'},$$

где

$$p_0' = (m^2 + \mathbf{p}'^2)^{1/2}, \qquad p_0'' = (m^2 + \mathbf{p}''^2)^{1/2}.$$

Это соотношение и определяет величину B:

$$\langle \mathbf{p}'|B|\mathbf{p}''\rangle = \frac{2e\mathscr{A}_{p''-p'}}{p_0' + p_0''}. \tag{25.4}$$

Теперь на основании (25.1) имеем

$$|E|^{-1} = (p_0)^{-1} + (2p_0)^{-1}(UB + BU)(p_0)^{-1}.$$

Выше для разложения дробно-линейной функции при малых n с учетом некоммутативности фигурирующих там величин мы воспользовались общей формулой

$$(x + n)^{-1} = x^{-1} - x^{-1}nx^{-1}.$$

Образуем теперь отношение $E/|E|$; операторы E и $|E|$ коммутируют друг с другом, поэтому нет необходимости специально оговаривать, в каком порядке они следуют в произведении.

Если мы вычислим интересующее нас произведение с оператором E, расположенным слева, это нам даст

$$\frac{E}{|E|} = (U - e\mathscr{A})(p_0)^{-1} + (2p_0)^{-1}(p_0^2B + UBU)(p_0)^{-1},$$

причем выше мы отбросили члены второго порядка малости. Используя формулу (25.2), получаем

$$\frac{E}{|E|} = \frac{U}{p_0} - \frac{B}{2} + \frac{1}{2}\frac{U}{p_0}B\frac{U}{p_0} = \frac{U}{p_0} - \frac{1}{p_0}N\frac{1}{p_0}, \qquad (25.5)$$

где, по определению,

$$N = \frac{1}{2}(p_0Bp_0 - UBU). \qquad (25.6)$$

ЛЕКЦИЯ 26

ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

Теперь я хотел бы вычислить член, связанный с эффектом поляризации вакуума. Этот член не давал вклада в аномальный магнитный момент, но в лэмбовский сдвиг поляризация вакуума дает вклад, и мы должны получить соответствующее выражение.

Поляризация вакуума определяется формулой (20.1). Для расчета изменения энергии нам нужны только диагональные элементы Z, и я ограничу свою задачу их рассмотрением, так как в противном случае все становится значительно сложнее. Диагональные элементы имеют вид

$$Z_{ii} = \pi^{-1} \int J_k^\mu \langle i | \alpha_\mu e^{-i(\mathbf{kx})} | i \rangle \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|^2}, \qquad (26.1)$$

где J_k^μ определяется формулой (20.2). При вычислении диагональной суммы мы можем пользоваться любым представлением. Сейчас мы, разумеется, возьмем импульсное представление, так как именно в этом представлении у нас выражены величины A и B. Для J_k^μ мы получаем

$$J_k^\mu = \frac{1}{4} \int \int \langle \mathbf{p}'' | e^{i(\mathbf{kx})} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \left\langle \alpha^\mu \left(1 - \frac{E}{|E|}\right) \right\rangle | \mathbf{p}'' \rangle \times$$
$$\times d^3p' \, d^3p''$$

В этом выражении уже взята диагональная сумма, коль скоро речь идет об импульсных переменных. Кроме того, мы должны взять диагональную сумму по отношению к спиновым переменным, на что указывает выражение

$$\left\langle \alpha^\mu \left(1 - \frac{E}{|E|}\right) \right\rangle.$$

Используя соотношения (20.3) и (25.5), получаем

$$J_k^\mu = \frac{1}{4} \int\int \langle \mathbf{p}' | \left\langle \alpha^\mu \left[1 - \frac{U}{p_0} + \frac{1}{p_0} N \frac{1}{p_0} \right] \right\rangle | \mathbf{p}'' \rangle \times$$
$$\times \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' + \mathbf{k})\, d^3p'\, d^3p''.$$

Первые два слагаемых из квадратных скобок не дают никакого вклада, так как $\mathbf{k}$ берется отличным от нуля. Случай $\mathbf{k} = 0$ не представляет для нас интереса: он соответствует постоянному потенциалу, с которым нам уже приходилось иметь дело при обсуждении регуляризации по способу «в». Необходимо принимать во внимание только такие члены в квадратных скобках, коэффициенты Фурье которых не исчезают при $\mathbf{k} \neq 0$.

Вернемся теперь к выражению (25.6) для величины N. Оно содержит только четные степени матриц α_1, α_2, α_3, α_m. Отсюда следует, что

$$\langle \alpha_r N \rangle = 0 \quad \text{при} \quad r = 1,\ 2,\ 3,$$

так как произведение $\alpha_r N$ будет содержать только нечетные степени α и поэтому не имеет диагональной суммы. Таким образом,

$$J_k^r = 0,$$

и нам остается лишь вычислить J_k^0:

$$J_k^0 = \frac{1}{4} \int\int \langle \mathbf{p}' | (p_0)^{-1} \langle N \rangle (p_0)^{-1} | \mathbf{p}'' \rangle \times$$
$$\times \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' + \mathbf{k})\, d^3p'\, d^3p''.$$

Теперь необходимо вычислить $\langle N \rangle$. В диагональную сумму будут давать вклад только те члены из N, которые не содержат вообще никаких матриц α. Поэтому имеем

$$\frac{1}{4} \langle N \rangle = \frac{1}{2} (p_0 B p_0 - p_r B p_r - m^2 B).$$

Подставляя этот результат в выражение для J_k^0 и пользуясь формулой (25.4), мы получаем

$$J_k^0 = \int\int \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' + \mathbf{k}) \frac{e\mathcal{A}_{p''-p'}}{p_0' + p_0''} \times$$
$$\times \frac{p_0' p_0'' - p_r' p_r'' - m^2}{p_0' p_0''}\, d^3p'\, d^3p''.$$

Удобно ввести новые переменные интегрирования. Положим

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \tfrac{1}{2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}'' = \mathbf{p} + \tfrac{1}{2}\mathbf{k},$$

так что

$$p'' - p' = k.$$

С учетом этой замены мы получаем

$$J_k^0 = e\mathcal{A}_k \int \frac{p_0' p_0'' - p^2 + \frac{1}{4}k^2 - m^2}{\left(p_0' + p_0''\right) p_0' p_0''} d^3p = e\mathcal{A}_k I_k. \qquad (26.2)$$

Сравнив это выражение с уравнением (16) на стр. 322 книги Гайтлера[1]), вы обнаружите, что I_k — это гайтлеровское L_{44} при $k_0 = 0$. Работая в рамках картины Шредингера и пользуясь совершенно иной аргументацией, в конечном счете Гайтлер получает тот же самый интеграл. Интеграл I_k определяет собой вклад поляризации вакуума в лэмбовский сдвиг.

Мы должны вычислить интеграл I_k. Это можно сделать с помощью подходящих подстановок. Прежде всего, коль скоро речь идет об интегрировании, $\mathbf{k}$ является постоянной величиной, поэтому направление вектора $\mathbf{k}$ мы выберем специальным образом. Для простоты направим $\mathbf{k}$ вдоль оси x_3, т. е.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(0,\ 0,\ k_3),$$

и положим

$$p_1 = \rho\cos\varphi \quad \text{и} \quad p_2 = \rho\sin\varphi.$$

Таким образом,

$$p_0' = \left(\rho^2 + p_3^2 + m^2 + \tfrac{1}{4}k_3^2 - p_3 k_3\right)^{1/2},$$

$$p_0'' = \left(\rho^2 + p_3^2 + m^2 + \tfrac{1}{4}k_3^2 + p_3 k_3\right)^{1/2}.$$

Теперь мы вводим новую переменную

$$\omega = p_0' + p_0''.$$

Вы можете подметить в наших действиях некоторую аналогию с тем, что мы делали, вычисляя интеграл

---

[1]) См примечание 1 на стр. 195. — *Прим. перев.*

в случае свободного электрона. Здесь мы вновь вводим переменную ω, представляющую собой полную энергию.

Мы собираемся перейти к новым переменным интегрирования ρ, φ, ω. Для элемента объема имеем

$$d^3p = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dp_3,$$

поэтому мы должны вычислить якобиан

$$\frac{\partial(\omega, p_3)}{\partial(\rho, p_3)} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)_{p_3=\text{const}} = \frac{\rho\omega}{p_0'p_0''}.$$

Таким образом, в результате

$$\frac{d^3p}{p_0'p_0''} = \frac{d\omega}{\omega}\, d\varphi\, dp_3.$$

С учетом замены переменных имеем

$$I_k = 2\pi \int \left(p_0'p_0'' - \mathbf{p}^2 + \tfrac{1}{4}\mathbf{k}^2 - m^2\right)\omega^{-2}\, d\omega\, dp_3 =$$

$$= 2\pi \int \left[p_0'p_0'' - \tfrac{1}{2}\left(p_0'^2 + p_0''^2\right) + \tfrac{1}{2}k_3^2\right] \frac{d\omega}{\omega^2}\, dp_3 =$$

$$= \pi \int \left[k_3^2 - (p_0'' - p_0')^2\right] \frac{d\omega}{\omega^2}\, dp_3.$$

Замечая теперь, что

$$(p_0'' - p_0')\,\omega = p_0''^2 - p_0'^2 = 2p_3k_3,$$

мы можем написать

$$I_k = \pi k_3^2 \int \left(1 - \frac{4p_3^2}{\omega^2}\right) \frac{d\omega}{\omega^2}\, dp_3.$$

Возьмем сначала интеграл по p_3. Для этого нам необходимо знать пределы интегрирования при каждом фиксированном значении переменной ω. Переменная p_3 принимает граничные значения, когда $\rho = 0$, но тогда

$$\omega = \left[\left(p_3 + \tfrac{1}{2}k_3\right)^2 + m^2\right]^{1/2} + \left[\left(p_3 - \tfrac{1}{2}k_3\right)^2 + m^2\right]^{1/2}$$

и

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 = p_3^2 + \tfrac{1}{4}k_3^2 + m^2 + \left[\left(p_3 + \tfrac{1}{2}k_3\right)^2 + m^2\right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\left(p_3 - \tfrac{1}{2}k_3\right)^2 + m^2\right]^{1/2},$$

поэтому

$$\left(-\tfrac{1}{2}\omega^2+p_3^2+\tfrac{1}{4}k_3^2+m^2\right)^2=\left(p_3^2+\tfrac{1}{4}k_3^2+m^2\right)^2-p_3^2k_3^2.$$

Последнее уравнение сводится к следующему:

$$p_3^2=\frac{\omega^2\left(\omega^2-4m^2-k_3^2\right)}{4\left(\omega^2-k_3^2\right)};$$

квадратные корни из этого выражения, взятые со знаком плюс и знаком минус, определяют пределы интегрирования по p_3 для каждого фиксированного значения ω.

С учетом этих пределов интегрирования мы теперь находим

$$\int dp_3=\omega\left(\frac{\omega^2-4m^2-k_3^2}{\omega^2-k_3^2}\right)^{1/2}$$

и

$$\int p_3^2\,dp_3=\frac{1}{12}\,\omega^3\left(\frac{\omega^2-4m^2-k_3^2}{\omega^2-k_3^2}\right)^{3/2}.$$

Таким образом,

$$I_k=\pi k_3^2\int\left[\left(\frac{\omega^2-4m^2-k_3^2}{\omega^2-k_3^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\omega^2-4m^2-k_3^2}{\omega^2-k_3^2}\right)^{3/2}\right]\frac{d\omega}{\omega}.$$

На этой стадии вычислений мы можем вернуться к произвольному $\mathbf{k}$ и заменить k_3^2 на $\mathbf{k}^2$. Чтобы выполнить последующее интегрирование, положим

$$\omega^2-\mathbf{k}^2=z^2,$$

тогда I_k перейдет в интеграл

$$I_k=\frac{2\pi k^2}{3}\int\frac{(z^2+2m^2)\,(z^2-4m^2)^{1/2}}{z^2\,(z^2+\mathbf{k}^2)}\,dz.$$

Чтобы привести этот интеграл к виду, удобному для интегрирования, необходима еще одна подстановка:

$$1-\frac{4m^2}{z^2}=y^2.$$

Тогда после небольших преобразований получаем

$$I_k = \frac{4\pi m^2 \mathbf{k}^2}{3} \int \frac{3 - y^2}{4m^2 + \mathbf{k}^2 - \mathbf{k}^2 y^2} \frac{y^2\, dy}{1 - y^2}.$$

Последний интеграл можно взять стандартными методами.

Выясним теперь вопрос о пределах интегрирования. Переменная ω^2 изменяется от $4m^2 + k^2$ до $4g^2$, поэтому

$$4m^2 \leqslant z^2 \leqslant 4g^2,$$

а y изменяется от 0 до $1 - (m^2/g^2)$. Для переменной ω мы возьмем в качестве верхнего предела значение $2g$, поскольку мы пользуемся регуляризацией по способу «в». Действительно, наш трюк с использованием переменной интегрирования ω очень удобен для регуляризации по способу «в», так как переменная ω и есть полная энергия промежуточного состояния, ограниченная сверху значением $2g$, если пренебречь величиной $|\mathbf{k}|$ по сравнению с g.

Выполнив интегрирование, мы получаем следующий результат:

$$I_k = \frac{4\pi m^2}{3} \left\{ 2\gamma \ln \frac{2g}{m} - 1 + (1 - 2\gamma) \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right)^{1/2} \ln \left[\gamma^{1/2} + (\gamma + 1)^{1/2} \right] \right\},$$

где

$$\gamma = \frac{k^2}{4m^2}.$$

Теперь мы должны разобраться с этим довольно громоздким выражением. Предположим, что γ мало. Как нетрудно видеть, это означает, что наше электростатическое поле не имеет компонент с очень короткими длинами волн. Такое предположение вполне разумно, если иметь в виду, например, приложение теории к атому водорода. В этом случае любая длина волны будет велика по сравнению с m^{-1}, так что используемое приближение вполне надежно.

Нам необходимо оценить I_k с точностью до γ^2, а второй логарифм — с точностью до $\gamma^{3/2}$. Для этого логарифма мы имеем оценку

$$\gamma^{1/2}-\frac{1}{6}\gamma^{3/2}+\frac{3}{40}\gamma^{5/2},$$

и все выражение для I_k в целом принимает вид

$$I_k=\frac{4\pi m^2}{3}\left[\left(2\ln\frac{2g}{m}-\frac{5}{3}\right)\gamma-\frac{4}{5}\gamma^2\right]=q\mathbf{k}^2-\frac{\pi\mathbf{k}^4}{15m^2},$$

причем

$$q=\frac{2\pi}{3}\left(\ln\frac{2g}{m}-\frac{5}{6}\right).$$

Теперь равенство (26.2) можно заменить следующим образом:

$$J_k^0=\left(q\mathbf{k}^2-\frac{\pi\mathbf{k}^4}{15m^2}\right)e\mathcal{A}_k,$$

а для равенства (26.1) имеем

$$Z_{ii}=\frac{e}{\pi}\int\left(q-\frac{\pi\mathbf{k}^2}{15m^2}\right)\mathcal{A}_k\langle i|\,e^{-i(\mathbf{kx})}\,|\,i\rangle\,d^3k=$$

$$=\frac{e}{\pi}q\langle i|\int\mathcal{A}_k e^{-i(\mathbf{kx})}\,d^3k\,|\,i\rangle-$$

$$-\frac{e}{15m^2}\langle i|\int\mathbf{k}^2\mathcal{A}_k e^{-i(\mathbf{kx})}\,d^3k\,|\,i\rangle=$$

$$=\frac{e}{\pi}q\langle i\,|\,\mathcal{A}_x\,|\,i\rangle+\frac{e}{15m^2}\langle i\,|\,\nabla^2\mathcal{A}_x\,|\,i\rangle. \qquad (26.3)$$

Последнее выражение получено с помощью соотношения (25.3). Матричный элемент Z_{ii}, умноженный на e^2/π, определяет вклад в энергию.

Вы видите, что в первом члене полученного выражения возникает расходимость, если позволить g стремиться к бесконечности, так как в величину q входит $\ln g$. Мы можем, однако, избавиться от этого члена с помощью процедуры, которая известна как *перенормировка заряда.* Существо ее сводится к предположению, что параметр e, фигурирующий в гамильтониане, не есть наблюдаемое значение заряда. Мы сохраним за физически наблюдаемым зарядом обозначение e и будем предполагать, что зарядовый параметр в гамильтониане (обозначим его через $e+\delta e$) отличается от физически наблюдаемого заряда.

Наш гамильтониан состоит из двух частей H_0+H_Q. Мы примем, что δe по порядку величины равно e^3, поэтому вклад в H_Q от добавки δe ни на чем не скажется в пределах той точности расчетов, которой мы придерживаемся. Коль скоро речь идет о теории возмущений, то мы производим расчеты лишь с точностью до e^2. Но параметр e фигурирует, кроме того, и в невозмущенном гамильтониане H_0, и добавка δe приводит к существенному изменению H_0:

$$\delta H_0 = -\delta e \int \mathscr{A}\bar{\psi}\psi\, d^3k.$$

Будем рассматривать это изменение в качестве еще одного возмущения. Мы можем для него написать

$$\delta H_0 = -\delta e \sum_{nn'} \bar{\psi}_n \langle n \mid \mathscr{A} \mid n' \rangle \psi_{n'}.$$

Переходя далее к представлению, отмеченному звездочками, получаем

$$\delta H_0^* = -\delta e \sum_{nn'} \bar{\psi}_n \langle n \mid \mathscr{A} \mid n' \rangle \psi_{n'} e^{i(E_n - E_{n'})t}.$$

Это дает

$$\left(i\,\frac{\partial K_2^*}{\partial t}\right)_{\text{доп}} = \left[\delta H_0^*;\ \bar{\psi}_i\right] = -\,\delta e \sum_n \bar{\psi}_n \langle n \mid \mathscr{A} \mid i \rangle e^{i(E_n - E_i)t}.$$

Член с $n=i$ здесь также соответствует изменению энергии. При подходящем выборе δe, а именно при

$$\delta e = \frac{e^3}{\pi^3} q,$$

он сократится с первым членом в выражении (26.3).

Предложенное видоизменение гамильтониана фактически с физической точки зрения не существенно: оно просто означает, что фигурирующий в гамильтониане зарядовый параметр отличается от наблюдаемого заряда, но в результате такого видоизменения гамильтониана в выражении для Z у нас остается всего-навсего один член, который и дает вклад в лэмбовский сдвиг.

Вопрос. Должны ли мы избавляться от первого члена в выражении для Z_{ii} потому, что он зависит от g? В этом ли причина?

Ответ. Я думаю, что на этот вопрос следует ответить отрицательно. Даже в том случае, если бы q не содержало расходимости при бесконечном параметре регуляризации, нам надлежало бы сделать перенормировку заряда, так как иначе энергия, связываемая с зарядом e в статическом поле $\mathscr{A}_0$, не была бы просто равна $e\mathscr{A}_0$. Появился бы лишний член, и энергия оказалась бы равной $(e+\delta e)\mathscr{A}_0$. Но обычно наблюдаемый заряд определяется так, чтобы при умножении его на $\mathscr{A}_0$ получалась бы энергия электрона в поле $\mathscr{A}_0$. Если мы намерены работать с таким определением наблюдаемого заряда, то по необходимости приходится заключить, что наблюдаемый заряд отличается от параметра e в гамильтониане.

ЛЕКЦИЯ 27

ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ.

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЧЛЕН

Теперь я хочу вычислить другой вклад в лэмбовский сдвиг, а именно вклад, происходящий от интеграла Y:

$$Y=(4\pi)^{-1}\int \alpha_\mu \widetilde{\mathscr{Y}} \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|},$$

$$\widetilde{\mathscr{Y}}=\frac{\nu+(\widetilde{E}/|\widetilde{E}|)}{|\widetilde{E}|+|\mathbf{k}|-\nu E_i}.$$

Пусть $\widetilde{\mathscr{Y}}_0$ означает оператор, соответствующий оператору $\widetilde{\mathscr{Y}}$ в отсутствие внешнего поля $\mathscr{A}$:

$$\widetilde{\mathscr{Y}}_0=\frac{\nu+(\widetilde{U}/\tilde{p}_0)}{\tilde{p}_0+|\mathbf{k}|-\nu p_0}, \tag{27.1}$$

где p_0, по определению, — положительная величина и стоит вместо E_i.

Оператор $\widetilde{\mathscr{Y}}_0$ определяет интеграл Y_0, который мы уже вычисляли, анализируя случай, когда внешнее поле отсутствует. В результате вычислений была найдена формула (22.3). После обычной перенормировки массы мы получим дополнительный член

$$-\alpha_m m\left[\frac{3}{2}\ln\left(\frac{2g}{m}\right)-\frac{1}{4}\right].$$

Добавляя его к выражению (22.3), находим

$$Y_0=\frac{1}{2}\left[(\alpha\mathbf{p})+\alpha_m m-p_0\right]\left[\ln\frac{2g}{m}+\frac{1}{2}\right].$$

Теперь мы воспользуемся подходящими для данного случая слабыми равенствами. Мы имеем

$$\frac{E}{|E|}\approx 1.$$

Это равенство просто означает, что исходным состоянием является состояние с положительной энергией. Отсюда на основании (25.5) следует

$$U - p_0 \approx N(p_0)^{-1}. \tag{27.2}$$

С учетом соотношения

$$U = (\alpha \mathbf{p}) + \alpha_m m$$

мы находим

$$Y_0 \approx \tfrac{1}{2}\left(\ln\frac{2g}{m} + \tfrac{1}{2}\right) N(p_0)^{-1}.$$

В дальнейшем я буду писать $F \sim G$, подразумевая под этим, что

$$\langle i | F | i \rangle = \langle i | G | i \rangle.$$

Нам интересно знать лишь среднее значение оператора Y в состоянии $|i\rangle$. Это среднее значение и даст нам лэмбовский сдвиг. Таким образом, мы будем пользоваться данным обозначением для величин с одинаковым средним значением.

С помощью формул (25.6) и (27.2) мы получаем

$$\langle i | 2N(p_0)^{-1} | i \rangle = \langle i | (p_0 B - UBU)(p_0)^{-1} | i \rangle =$$
$$= \langle i | (p_0 - U) B | i \rangle = -\langle i | (p_0)^{-1} NB | i \rangle.$$

Произведение NB по порядку величины равно $\mathscr{A}^2$, и мы им пренебрегаем. Поэтому

$$\frac{N}{p_0} \sim 0, \tag{27.3}$$

и Y_0 не дает никакого вклада в лэмбовский сдвиг.

Теперь мы должны оценить интеграл

$$(4\pi)^{-1} \int \alpha_\mu (\tilde{\mathscr{Y}} - \tilde{\mathscr{Y}}_0)\, \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}.$$

Мы уже избавились от главной части интеграла Y_0, и теперь у нас остались члены по величине того же порядка, что и $\mathscr{A}$.

Введем обозначение

$$D = (\text{знаменатель в } \tilde{\mathscr{Y}}_0) = \tilde{p}_0 + |\mathbf{k}| - \nu p_0.$$

Тогда

$$(\text{знаменатель в } \tilde{\mathscr{Y}}) = D - \tfrac{1}{2}(\tilde{U}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{U}) + \nu(p_0 - E_i).$$

Но разность (знаменатель в $\tilde{\mathscr{Y}}$) $-D$ в слабом смысле того же порядка, что и $\mathscr{A}$, поэтому, если произвести разложение, считая указанную разность малой величиной, мы получим

$$\tilde{\mathscr{Y}} = \left(\nu + \frac{\tilde{E}}{|\tilde{E}|}\right) \times$$
$$\times \left\{D^{-1} + D^{-1}\left[\tfrac{1}{2}(\tilde{U}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{U}) - \nu(p_0 - E_i)\right]D^{-1}\right\}. \quad (27.4)$$

Обратите внимание: здесь можно пользоваться слабым условием

$$p_0 - E_i \approx O(\mathscr{A}),$$

так как разность $p_0 - E_i$ коммутирует с D.

Выражение (27.4) для $\tilde{\mathscr{Y}}$ может вызвать беспокойство, поскольку знаменатель иногда обращается в нуль. Аналогичные затруднения встречались нам и при вычислении аномального магнитного момента, но там эти затруднения не носили серьезного характера, поскольку, как выяснилось, область k-пространства, где знаменатель мал и где, следовательно, разложение не справедливо, настолько сама мала, что не может оказать влияния на окончательный результат. Однако в рассматриваемом случае это уже неверно. Теперь в k-пространстве имеется область, для которой разложение (27.4) теряет силу, и эта область слишком велика, чтобы можно было пользоваться нашим разложением во всем k-пространстве, не допуская при этом существенной ошибки. В создавшихся условиях нельзя указать аппроксимацию, годную для всего k-пространства в целом. Поэтому мы должны разбить интересующую нас область k-пространства на две части (высокоэнергетическую и низкоэнергетическую) и использовать вышеприведенное разложение только там, где оно законно, т. е. в высокоэнергетической части. Что же касается низкоэнергетической части, то там мы должны использовать иную аппроксимацию. Все это достаточно сложно, но это единственный путь.

Разбиение области изменения $\mathbf{k}$ мы произведем в соответствии со следующим условием:

$$|\mathbf{k}| > \gamma m \quad \text{для высокоэнергетической области,}$$
$$|\mathbf{k}| < \gamma m \quad \text{для низкоэнергетической области.}$$

причем значение γ должно быть выбрано подходящим образом. Потребуем, чтобы γ было значительно меньше 1 (т. е. $\gamma \ll 1$) и в то же самое время выполнялось неравенство $\gamma m \gg |e\mathscr{A}|$. В случае атома водорода, когда $|e\mathscr{A}|$ по порядку величины совпадает с энергией связи, указанный выбор γ действительно возможен. Величина произведения γm должна заключаться между несколькими электронвольтами — величиной энергии покоя электрона. Конкретное значение γ не играет роли при условии, что указанные неравенства выполняются. Таким путем мы получаем два члена, которые называются соответственно *релятивистским* вкладом Y_R и *нерелятивистским* вкладом Y_{NR} в лэмбовский сдвиг.

Приступим к вычислению релятивистского вклада Y_R, используя разложение (27.4) и формулу (25.5) для отношения $E/|E|$. Мы имеем следующее равенство:

$$\tfrac{1}{2}(UB + BU) = \alpha_m mB + \tfrac{1}{2}(\alpha(\mathbf{p}B + B\mathbf{p})),$$

а из формул (25.2) и (25.6) вытекает

$$\frac{1}{2}\frac{U}{p_0}(UB + BU) = e\mathscr{A} - (p_0)^{-1} N.$$

Эти равенства нам дают

$$\tilde{\mathscr{Y}} - \tilde{\mathscr{Y}}_0 = \tilde{\mathscr{Y}}_1 + \tilde{\mathscr{Y}}_2 + \tilde{\mathscr{Y}}_3,$$

где

$$\tilde{\mathscr{Y}}_1 = \frac{\nu}{2D}(\alpha(\tilde{p}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{p}))D^{-1} - \frac{\nu(\alpha\tilde{p})}{\tilde{p}_0 D^2}(p_0 - E_i), \quad (27.5)$$

$$\tilde{\mathscr{Y}}_2 = -(\tilde{p}_0)^{-1}(D^{-1}\tilde{N} + \tilde{N}(\tilde{p}_0)^{-1})D^{-1}, \quad (27.6)$$

$$\tilde{\mathscr{Y}}_3 = \frac{\nu}{D}\left[\alpha_m m\tilde{B} - \left(\nu + \frac{\alpha_m m}{\tilde{p}_0}\right)(p_0 - E_i) + \nu e\mathscr{A}\right]D^{-1}. \quad (27.7)$$

Я буду предполагать, что импульс электрона мал и буду оставлять члены порядка $\mathbf{p}^2$, но пренебрегать членами порядка $\mathbf{p}^3$. Члены порядка $\mathbf{p}^3$ мы должны удерживать, если хотим получить что-либо интересное. Введем обозначение

$$\mu = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}.$$

Эта величина μ отличается от той, с которой мы имели дело в случае магнитного момента. Используя это обозначение, имеем

$$\tilde{p}_0 = [\mu^2 + 2(\mathbf{pk}) + \mathbf{p}^2]^{1/2} = \mu\left[1 + \frac{(\mathbf{pk})}{\mu^2} - \frac{(\mathbf{pk})^2}{2\mu^4} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu^2}\right], \tag{27.8}$$

$$\tilde{p}_0^{-1} = \mu^{-1}\left[1 - \frac{(\mathbf{pk})}{\mu^2} + \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{pk})^2}{\mu^4} - \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu^2}\right]. \tag{27.9}$$

Мы будем сейчас пользоваться регуляризацией по способу «а», так как разница между выражениями, получающимися при регуляризации по способу «а» и по способу «в» пренебрежимо мала. Важно использовать правильный способ регуляризации, когда мы вычисляем Y_0, что же касается разности между Y и Y_0, то эта разность мала и поэтому не имеет значения, каким именно способом регуляризации мы пользуемся при ее вычислении.

Перейдем теперь к вычислению $\tilde{\mathcal{Y}}_1$. Следует обратить внимание, что в этом случае в разложении величины D^{-1}, а также в выражении для величины $\tilde{B}$ мы можем пренебречь членами, квадратичными по p. Необходимо оставить лишь члены, линейные по $\mathbf{p}$. Это происходит по той причине, что каждый член в $\tilde{\mathcal{Y}}_1$ содержит произведение $(\alpha\tilde{\mathbf{p}})$, т. е. либо произведение $(\alpha\mathbf{p})$, либо произведение $(\alpha\mathbf{k})$. Если, далее, какой-то член уже содержит $\mathbf{p}$, то любой входящий в этот член множитель необходимо оценивать лишь с точностью до $\mathbf{p}$, так как мы хотим, чтобы наш результат был верен с точностью до $\mathbf{p}^2$. Если же некоторый член содержит произведение $(\alpha\mathbf{k})$ и умножается на $\mathbf{p}^2$, он при усреднении по всем направлениям вектора $\mathbf{k}$ в итоге даст нуль.

В силу формулы (25.4) имеем

$$\langle \mathbf{p}' \mid \tilde{B} \mid \mathbf{p}'' \rangle = \frac{2e\mathcal{A}_{p''-p'}}{\tilde{p}_0'' + \tilde{p}_0'},$$

где

$$\tilde{p}_0' = [m^2 + (\mathbf{p}' + \mathbf{k})^2]^{1/2},$$

$$\tilde{p}_0'' = [m^2 + (\mathbf{p}'' + \mathbf{k})^2]^{1/2}$$

Таким образом, на основании (27.9) получаем

$$\langle \mathbf{p}' \,|\, \tilde{B} \,|\, \mathbf{p}'' \rangle = e\mathscr{A}_{p''-p'}\mu^{-1}\left[1 - \frac{((\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')\,\mathbf{k})}{2\mu^2}\right].$$

Кроме того, имеем

$$D = \tilde{p}_0 + |\,\mathbf{k}\,| - \nu p_0 = \mu + \frac{(\mathbf{pk})}{\mu} + |\,\mathbf{k}\,| - \nu m = \lambda + \frac{(\mathbf{pk})}{\mu},$$

где

$$\lambda = \mu + |\,\mathbf{k}\,| - \nu m.$$

Поэтому

$$D^{-1} = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{(\mathbf{pk})}{\mu\lambda}\right].$$

В выражении (27.5) для $\tilde{\mathscr{Y}}_1$ имеются два члена, которые я рассмотрю порознь:

$$\tilde{\mathscr{Y}}_1 = \tilde{\mathscr{Y}}_{11} + \tilde{\mathscr{Y}}_{12}.$$

Мы имеем

$$\langle \mathbf{p}' \,|\, \tilde{\mathscr{Y}}_{11} \,|\, \mathbf{p}'' \rangle = \frac{\nu}{2D'D''} \times$$

$$\times (\alpha(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'' + 2\mathbf{k}))\,\frac{e\mathscr{A}_{p''-p'}}{\mu}\left[1 - \frac{((\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')\,\mathbf{k})}{2\mu^2}\right];$$

это соотношение после усреднения по направлениям вектора $\mathbf{k}$ сводится к равенству

$$\langle \mathbf{p}' \,|\, \tilde{\mathscr{Y}}_{11} \,|\, \mathbf{p}'' \rangle = \frac{\nu e\mathscr{A}_{p''-p'}}{2\mu\lambda^2}\,(\alpha(\mathbf{p}' + \mathbf{p}''))\left(1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3\mu^2} - \frac{2\mathbf{k}^2}{3\mu\lambda}\right).$$

Мы можем представить данный результат в символической форме

$$\tilde{\mathscr{Y}}_{11} = \frac{\nu e}{2\mu\lambda^2}\,(\alpha\,(\mathbf{p}\mathscr{A} + \mathscr{A}\mathbf{p}))\left(1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3\mu^2} - \frac{2\mathbf{k}^2}{3\mu\lambda}\right).$$

Далее мы снова имеем

$$\tilde{\mathscr{Y}}_{12} = \frac{\nu}{\mu\lambda^2}\,(\alpha(\mathbf{p} + \mathbf{k}))\left(1 - \frac{2\,(\mathbf{pk})}{\mu\lambda}\right)\left(1 - \frac{(\mathbf{pk})}{\mu^2}\right)(E_l - p_0) =$$

$$= \frac{\nu}{\mu\lambda^2}\,(\alpha\mathbf{p})\left(1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3\mu^2} - \frac{2\mathbf{k}^2}{3\mu\lambda}\right)(E_l - p_0).$$

Сложим эти два члена вместе, а затем проинтегрируем и усредним по ν. В результате получим

$$Y_1 = (4\pi)^{-1} \int\limits_{\gamma m}^{g} \alpha_\mu (\tilde{\mathscr{Y}}_{11} + \tilde{\mathscr{Y}}_{12}) \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|} =$$

$$= m^{-1}\left(\ln\frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{2}\right)\left[(\alpha\mathbf{p})(E_i - p_0) + \tfrac{1}{2}e(\alpha(\mathbf{p}\mathscr{A} + \mathscr{A}\mathbf{p}))\right].$$

Этот результат можно несколько упростить путем рассмотрения выражений, имеющих одинаковые средние значения. Во-первых, если пренебречь членами второго порядка по $\mathscr{A}$, то мы видим

$$(\alpha\mathbf{p})\mathscr{A} \sim (E_i - \alpha_m m)\mathscr{A}.$$

В состоянии $|i\rangle$ обе величины имеют одинаковые средние значения, поскольку

$$\mathscr{A}(E_i - \alpha_m m) \sim \mathscr{A}(\alpha\mathbf{p}).$$

Таким образом,

$$(\alpha\mathbf{p})(E_i - p_0) + \tfrac{1}{2}e[(\alpha\mathbf{p})\mathscr{A} + \mathscr{A}(\alpha\mathbf{p})] \sim$$
$$\sim (\alpha\mathbf{p})(E_i - p_0 + e\mathscr{A}) \sim (\alpha\mathbf{p})(U - p_0) \sim$$
$$\sim (E_i - \alpha_m m)(U - p_0) \sim (E_i - \alpha_m m) N(p_0)^{-1} \sim$$
$$\sim -\alpha_m m N(p_0)^{-1}.$$

Последние два шага в этой цепочке соотношений сделаны с помощью формул (27.2) и (27.3). Окончательный результат имеет вид

$$Y_1 \sim -\ln\left[(2\gamma)^{-1} - \tfrac{1}{2}\right]\alpha_m N(p_0)^{-1}. \qquad (27.10)$$

Перейдем теперь к рассмотрению $\tilde{\mathscr{Y}}_2$. Согласно формуле (25.6),

$$N = \tfrac{1}{2}[p_0 B p_0 - (\alpha\mathbf{p}) B (\alpha\mathbf{p}) - m^2 B - (\alpha\mathbf{p}) B\alpha_m m -$$
$$- \alpha_m m B(\alpha\mathbf{p})]. \qquad (27.11)$$

Чтобы преобразовать это выражение, воспользуемся формулой, справедливой для любой пары векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$:

$$(\alpha\mathbf{P})(\alpha\mathbf{Q}) = (\mathbf{PQ}) + i(\sigma\mathbf{PQ}),$$

где $(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{PQ})$ означает смешанное произведение векторов. Взяв матричный элемент N между состояниями $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}''$, мы с помощью формулы (25.4) получим

$$\langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}'' \rangle = \frac{e\mathscr{A}_{p''-p'}}{p_0' + p_0''} \left[p_0' p_0'' - (\mathbf{p}'\mathbf{p}'') - i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\mathbf{p}'') - \right.$$
$$\left. - m^2 - (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}''))\,\alpha_m m \right].$$

Воспользуемся теперь соотношениями

$$\alpha_\mu \alpha^\mu = -2, \quad \alpha_\mu \sigma_r \alpha^\mu = 2\sigma_r, \quad \alpha_\mu \alpha_r \alpha_m \alpha^\mu = 0.$$

С их помощью находим

$$\langle \mathbf{p}' | \alpha_\mu N \alpha^\mu | \mathbf{p}'' \rangle = -\frac{2e\mathscr{A}_{p''-p'}}{p_0' + p_0''} \times$$
$$\times \left[p_0' p_0'' - (\mathbf{p}'\mathbf{p}'') + i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\mathbf{p}'') - m^2 \right]. \qquad (27.12)$$

Применяя к обеим частям наше тильда-преобразование, после некоторых манипуляций получаем

$$\langle \mathbf{p}' | \alpha_\mu \tilde{N} \alpha^\mu | \mathbf{p}'' \rangle = -e\mathscr{A}_{p''-p'} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 - \frac{1}{2\mu^2}((\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')\mathbf{k})^2 + \right.$$
$$\left. + i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\mathbf{p}'') + i(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')\mathbf{k}) \right] \frac{1}{\mu} \left[1 - \frac{1}{2\mu^2}((\mathbf{p}' + \mathbf{p}'')\mathbf{k}) \right].$$

Я хотел бы обратить ваше внимание на то, что на этой стадии вычислений в малых членах порядка $\mathbf{p}^2$ уже можно произвести усреднение по направлениям вектора $\mathbf{k}$. Что же касается больших членов, то там это делать недопустимо, так как впоследствии мы должны будем ввести в это выражение другие множители, зависящие от $\mathbf{k}$. Поэтому мы получаем

$$\langle \mathbf{p}' | \alpha_\mu \tilde{N} \alpha^\mu | \mathbf{p}'' \rangle = -\frac{e}{\mu}\mathscr{A}_{p''-p'} \times$$
$$\times \left\{ \left[\frac{1}{2}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}'\mathbf{p}'') \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3\mu^2}\right) + i(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')\mathbf{k}) \right\}.$$

Образуем теперь матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}' | \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_2 \alpha^\mu | \mathbf{p}'' \rangle = \frac{e}{\mu} \mathcal{A}_{p''-p'} \left\{ \left[\frac{1}{2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + \right.\right.$$
$$\left.+ i (\sigma \mathbf{p}' \mathbf{p}'') \right] \left(1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3\mu^2} \right) + i (\sigma (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') \mathbf{k}) \Big\} (\tilde{p}_0' D'')^{-1} \times$$
$$\times \left[(D')^{-1} + (\tilde{p}_0'')^{-1} \right].$$

Аппроксимируя множители в последней строке величинами первого порядка, находим

$$\langle \mathbf{p}' | \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_2 \alpha^\mu | \mathbf{p}'' \rangle = (\ldots) (\mu\lambda)^{-1} \{ \lambda^{-1} + \mu^{-1} -$$
$$- ((\mathbf{p}' + \mathbf{p}'') \mathbf{k}) \left[(\mu^2\lambda)^{-1} + (\mu^3)^{-1} + (\mu\lambda^2)^{-1} \right] \}.$$

Это выражение мы должны усреднить по направлениям вектора $\mathbf{k}$. Усреднение дает

$$\frac{e}{\mu^2\lambda} \mathcal{A}_{p''-p'} \left\{ \left[\frac{1}{2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 + i (\sigma \mathbf{p}' \mathbf{p}'') \right] \times \right.$$
$$\times \left(1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3\mu^2} \right) (\lambda^{-1} + \mu^{-1}) - \frac{2}{3} i (\sigma \mathbf{p}' \mathbf{p}'') \mathbf{k}^2 \times$$
$$\left. \times \left[(\mu^2\lambda)^{-1} + (\mu^3)^{-1} + (\mu\lambda^2)^{-1} \right] \right\}.$$

После интегрирования по переменной $|\mathbf{k}|$ в соответствующих пределах получаем

$$\langle \mathbf{p}' | Y_2 | \mathbf{p}'' \rangle = (4\pi)^{-1} \int_{\gamma m}^{g} \langle \mathbf{p}' | \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_2 \alpha^\mu | \mathbf{p}'' \rangle \frac{d^3 k}{|\mathbf{k}|} =$$
$$= \frac{e \mathcal{A}_{p''-p'}}{2m^2} \left[(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 \left\{ \frac{1}{2} \ln (2\gamma)^{-1} + \frac{1}{6} \ln 2 + \frac{5}{18} \right\} + \right.$$
$$\left. + i (\sigma \mathbf{p}' \mathbf{p}'') \ln (2\gamma)^{-1} \right].$$

Этот результат можно представить в символической форме. Имеем

$$\langle \mathbf{p}' | \nabla^2 \mathcal{A} | \mathbf{p}'' \rangle = - (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 \mathcal{A}_{p''-p'}.$$

Кроме того,

$$\langle \mathbf{p}' | \operatorname{grad} \mathcal{A} | \mathbf{p}'' \rangle = i (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') \mathcal{A}_{p''-p'},$$

поэтому

$$\langle \mathbf{p}' | (\sigma \operatorname{grad} \mathcal{A} \mathbf{p}) | \mathbf{p}'' \rangle = i (\sigma \mathbf{p}' \mathbf{p}'') \mathcal{A}_{p''-p'}.$$

Таким образом, в результате находим

$$Y_2 = -\frac{e}{2m^2}\nabla^2\mathscr{A}\left[\frac{1}{2}\ln(2\gamma)^{-1}+\frac{1}{6}\ln 2+\frac{5}{18}\right]+$$
$$+\frac{e}{2m^2}\ln(2\gamma)^{-1}(\sigma\,\mathrm{grad}\,\mathscr{A}\mathbf{p}). \qquad (27.13)$$

Возьмем теперь величину $\tilde{\mathscr{Y}}_3$, заданную формулой (27.7). Мы можем записать ее в виде

$$\tilde{\mathscr{Y}}_3 = -D^{-2}\left(1+\frac{\nu\alpha_m m}{\tilde{p}_0}\right)(p_0-E_t-e\mathscr{A})+$$
$$+\frac{\nu}{D}\alpha_m m\left(\tilde{B}D^{-1}-(D\tilde{p}_0)^{-1}e\mathscr{A}\right)-$$
$$-\frac{e}{D}\left(D^{-1}\mathscr{A}-\mathscr{A}D^{-1}\right)=\tilde{\mathscr{Y}}_{31}+\tilde{\mathscr{Y}}_{32}+\tilde{\mathscr{Y}}_{33}.$$

Возьмем отсюда первый член. Мы должны умножить его слева и справа на α_μ; с учетом соотношений (22.1) это даст

$$\alpha_\mu\tilde{\mathscr{Y}}_{31}\alpha^\mu = \frac{2}{D^2}\left(1-\frac{2\nu\alpha_m m}{\tilde{p}_0}\right)(p_0-E_t-e\mathscr{A}).$$

Теперь мы можем воспользоваться слабым равенством

$$p_0-E_t-e\mathscr{A}\approx p_0-U.$$

Так как умножение на α_μ слева и справа уже произведено, пользоваться слабыми равенствами вполне допустимо. Учитывая еще слабое равенство (27.2), получаем

$$\alpha_\mu\tilde{\mathscr{Y}}_{31}\alpha^\mu \approx -\frac{2}{D^2}\left(1-\frac{2\nu\alpha_m m}{\tilde{p}_0}\right)N(p_0)^{-1}=$$
$$=-\frac{2}{\lambda^2}\left(1-\frac{2\nu\alpha_m m}{\mu}\right)N(p_0)^{-1}. \qquad (27.14)$$

Здесь я воспользовался приближением нулевого порядка

$$D=\lambda \quad \text{и} \quad \tilde{p}_0=\mu.$$

Такое приближение допустимо, так как N — очень малая величина, равная по порядку произведению $\mathbf{p}\mathscr{A}$. Если мы сохраним члены более высокого порядка, то следующее приближение будет включать члены, содержащие произведение $(\mathbf{pk})$, и поэтому они пропадут при усреднении по направлениям вектора $\mathbf{k}$, и тогда у нас останутся члены с произведением $(\mathbf{pk})^2$, которые слишком малы, так как вклад от них в выражение (27.14) имеет порядок $\mathbf{p}^3$. Таким образом, выражение (27.14) будет справедливо после пренебрежения членами порядка $\mathbf{p}^3$ и усреднения по направлениям вектора $\mathbf{k}$.

В силу формулы (27.3) первый член в скобках в выражении (27.14) дает нулевой вклад в среднее значение, поэтому у нас остается

$$\alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{31} \alpha^\mu \sim \frac{4\nu}{\lambda^2\mu} \alpha_m m N (p_0)^{-1},$$

и, следовательно,

$$Y_{31} = (4\pi)^{-1} \int\limits_{\gamma m}^{g} \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{31} \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|} \sim$$

$$\sim 2 \ln (2\gamma)^{-1} \alpha_m N (p_0)^{-1}. \qquad (27.15)$$

Перейдем теперь к величине $\tilde{\mathcal{Y}}_{33}$. Мы имеем равенство

$$\langle i \,|\, \mathbf{p}^2 e\mathcal{A} \,|\, i\rangle = \langle i \,|\, \mathbf{p}^2 (U - E_i) \,|\, i\rangle = \langle i \,|\, (U - E_i)\, \mathbf{p}^2 \,|\, i\rangle =$$

$$= \langle i \,|\, e\mathcal{A} \mathbf{p}^2 \,|\, i\rangle\cdot$$

Поэтому

$$\mathcal{A}\mathbf{p}^2 \sim \mathbf{p}^2 \mathcal{A}.$$

Рассмотрим далее величину D^{-1}:

$$D^{-1} = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(\mathbf{pk})}{\mu\lambda} + O(\mathbf{p}^2)\right]. \qquad (27.16)$$

С помощью тех же аргументов, что и раньше, после усреднения по направлениям вектора $\mathbf{k}$ мы получаем

$$D^{-2}\mathcal{A} \sim \mathcal{A} D^{-2}.$$

Используя этот результат, мы можем написать

$$\alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{33} \alpha^\mu = 2e \left(D^{-2}\mathcal{A} - D^{-1}\mathcal{A} D^{-1}\right) \sim$$

$$\sim e \left[D^{-2}\mathcal{A} - 2D^{-1}\mathcal{A} D^{-1} + \mathcal{A} D^{-2}\right].$$

Образуем матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}' \mid \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{33} \alpha^\mu \mid \mathbf{p}'' \rangle \sim e\mathcal{A}_{p''-p'} \left[(D')^{-2} - \right.$$
$$\left. - 2(D'D'')^{-1} + (D'')^{-2} \right] = e\mathcal{A}_{p''-p'} \left[(D')^{-1} - (D'')^{-1} \right]^2.$$

Оставляя члены лишь первого порядка в разности $[(D')^{-1} - (D'')^{-1}]$, с помощью (27.16) получаем

$$\langle \mathbf{p}' \mid \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{33} \alpha^\mu \mid \mathbf{p}'' \rangle \sim e\mathcal{A}_{p''-p'} \frac{((\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')\,\mathbf{k})^2}{\lambda^4 \mu^2}.$$

Усреднение по направлениям вектора $\mathbf{k}$ дает

$$\langle \mathbf{p}' \mid \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{33} \alpha^\mu \mid \mathbf{p}'' \rangle \sim \frac{e}{3} k^2 \mathcal{A}_{p''-p'} \frac{(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2}{\lambda^4 \mu^2},$$

так что

$$\alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{33} \alpha^\mu \sim - \frac{e\mathbf{k}^2}{3\lambda^4 \mu^2} \nabla^2 \mathcal{A}.$$

Теперь мы можем выполнить интегрирование

$$Y_{33} = (4\pi)^{-1} \int\limits_{\gamma m}^{g} \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{33} \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|} \sim$$
$$\sim - \frac{e}{6m^2} \left[\ln (2\gamma)^{-1} - \tfrac{1}{2} \ln 2 - \tfrac{1}{4} \right] \nabla^2 \mathcal{A}. \qquad (27.17)$$

Перейдем к величине $\tilde{\mathcal{Y}}_{32}$. Поступая, как и раньше, мы можем вывести

$$(D^2 \tilde{p}_0)^{-1} \mathcal{A} \sim \mathcal{A} (D^2 \tilde{p}_0)^{-1},$$

и поэтому

$$\alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{32} \alpha^\mu \sim 2\nu \alpha_m m \left[2D^{-1} \tilde{B} D^{-1} - (D^2 \tilde{p}_0)^{-1} e\mathcal{A} - \right.$$
$$\left. - e\mathcal{A} (D^2 \tilde{p}_0)^{-1} \right].$$

Взяв матричный элемент, имеем

$$\langle \mathbf{p}' \mid \alpha_\mu \tilde{\mathcal{Y}}_{32} \alpha^\mu \mid \mathbf{p}'' \rangle \sim -2\nu \alpha_m m e \mathcal{A}_{p''-p'} \times$$
$$\times \left[\left(D'^2 \tilde{p}_0' \right)^{-1} - \frac{4}{\left(\tilde{p}_0' + \tilde{p}_0'' \right) D' D''} + \left(D''^2 \tilde{p}_0'' \right)^{-1} \right] =$$
$$= - \frac{2\nu \alpha_m m e \mathcal{A}_{p''-p'}}{\tilde{p}_0' + \tilde{p}_0''} \left\{ 2 \left[(D')^{-1} - (D'')^{-1} \right]^2 + \right.$$
$$\left. + (\tilde{p}_0'' - \tilde{p}_0') \left[\left(\tilde{p}_0' D'^2 \right)^{-1} - \left(\tilde{p}_0'' D''^2 \right)^{-1} \right] \right\},$$

и с точностью до членов второго порядка по $(\mathbf{pk})$ находим

$$-\frac{2\nu\alpha_m me\mathcal{A}_{p''-p'}}{\tilde{p}_0'+\tilde{p}_0''}\left\{\frac{2\,((\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')\,\mathbf{k})^2}{\mu^2\lambda^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{((\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')\,\mathbf{k})}{\mu}\left(\frac{(\mathbf{p}'\mathbf{k})}{\mu^3\lambda^2}+\frac{2\,(\mathbf{p}'\mathbf{k})}{\mu^2\lambda^3}-\frac{(\mathbf{p}''\mathbf{k})}{\mu^3\lambda^2}-\frac{2\,(\mathbf{p}''\mathbf{k})}{\mu^2\lambda^3}\right)\right\}=$$

$$=-\frac{\nu\alpha_m me\mathcal{A}_{p''-p'}}{\mu}\,((\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')\,\mathbf{k})^2\times$$

$$\times\left(\frac{2}{\mu^2\lambda^4}+\frac{1}{\mu^4\lambda^2}+\frac{2}{\mu^3\lambda^3}\right).$$

В результате усреднения по направлениям вектора $\mathbf{k}$ имеем

$$((\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')\,\mathbf{k})^2\to\frac{1}{3}(\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')^2\,\mathbf{k}^2,$$

поэтому

$$\alpha_\mu\tilde{\mathcal{Y}}_{32}\alpha^\mu\sim\nu\alpha_m me\nabla^2\mathcal{A}\,\frac{\mathbf{k}^2}{3}\left(\frac{2}{\mu^3\lambda^4}+\frac{1}{\mu^5\lambda^2}+\frac{2}{\mu^4\lambda^3}\right).$$

Теперь мы интегрируем и получаем

$$Y_{32}=(4\pi)^{-1}\int\limits_{\gamma m}^{g}\alpha_\mu\tilde{\mathcal{Y}}_{32}\alpha^\mu\,\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}\sim e\,\frac{\nabla^2\mathcal{A}}{3m^2}\left[\ln(2\gamma)^{-1}-\frac{1}{6}\right]. \tag{27.18}$$

После того как мы выполнили все интегрирования, нам осталось собрать вместе выражения (27.15), (27.17) и (27.18):

$$Y_3=Y_{31}+Y_{32}+Y_{33}\sim\frac{e\nabla^2\mathcal{A}}{m^2}\left[\frac{1}{6}\ln(2\gamma)^{-1}+\frac{1}{12}\ln 2-\frac{1}{72}\right]+$$

$$+2\ln(2\gamma)^{-1}\alpha_m N\,(p_0)^{-1}.$$

Добавляя сюда Y_1 и Y_2, которые определяются соответственно формулами (27.10) и (27.13), мы получаем

$$Y_R\sim-\frac{e\nabla^2\mathcal{A}}{m^2}\left[\frac{1}{12}\ln(2\gamma)^{-1}+\frac{11}{72}\right]+$$

$$+\frac{e}{2m^2}\ln(2\gamma)^{-1}\,(\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{grad}\,\mathcal{A}\mathbf{p})+$$

$$+\left[\ln(2\gamma)^{-1}+\frac{1}{2}\right]\alpha_m N\,(p_0)^{-1}.$$

В последнем члене в выражении для Y_R множитель $(p_0)^{-1}$ можно заменить на m^{-1}, не нарушая степени точности нашего приближения. Затем этот член можно будет объединить с двумя первыми членами. В силу (27.11) имеем

$$2N = p_0 B p_0 - (\alpha\mathbf{p}) B (\alpha\mathbf{p}) - m^2 B + \alpha_m m [B (\alpha\mathbf{p}) - (\alpha\mathbf{p}) B].$$

Далее

$$(\alpha\mathbf{p}) B \sim (E_i - \alpha_m m) B \sim B (E_i - \alpha_m m) \sim B (\alpha\mathbf{p}),$$

поэтому

$$\begin{aligned} 2\alpha_m m N &\sim [p_0 B p_0 - (\alpha\mathbf{p}) B (\alpha\mathbf{p}) - m^2 B] \alpha_m m \sim \\ &\sim [p_0 B p_0 - (\alpha\mathbf{p}) B (\alpha\mathbf{p}) - m^2 B] [E_i - (\alpha\mathbf{p})] \sim \\ &\sim [p_0 B p_0 - (\alpha\mathbf{p}) B (\alpha\mathbf{p}) - m^2 B] m, \end{aligned}$$

так как произведение $(\alpha\mathbf{p})$ в выражении $[E_i - (\alpha\mathbf{p})]$ дает члены порядка $\mathscr{A}\mathbf{p}^3$, и им можно пренебречь. Таким образом,

$$\begin{aligned} 2 \langle \mathbf{p}' | \alpha_m N | \mathbf{p}'' \rangle &\sim \frac{2e\mathscr{A}_{p''-p'}}{p_0' + p_0''} \left[p_0' p_0'' - (\alpha\mathbf{p}') (\alpha\mathbf{p}'') - m^2 \right] \sim \\ &\sim \frac{e\mathscr{A}_{p''-p'}}{m} \left[\tfrac{1}{2} (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2 - i (\sigma\mathbf{p}'\mathbf{p}'') \right]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\alpha_m N \sim -\frac{e}{4m} \nabla^2 \mathscr{A} - \frac{e}{2m} (\sigma \operatorname{grad} \mathscr{A}\, \mathbf{p}).$$

Используя этот результат, мы имеем

$$Y_R \sim -\frac{e}{3m^2} \nabla^2 \mathscr{A} \left[\ln (2\gamma)^{-1} + \frac{5}{6} \right] - \frac{e}{4m^2} (\sigma \operatorname{grad} \mathscr{A}\, p). \quad (27.19)$$

Такова окончательная формула для релятивистской части интеграла Y. Она состоит из двух членов: один из них содержит $\nabla^2\mathscr{A}$, а другой — спин электрона.

Заметьте, что в этой формуле появляется γ и мы не можем положить γ равным нулю, поэтому мы должны произвести обрезание интеграла при малых значениях $\mathbf{k}$.

ЛЕКЦИЯ 28

ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ.

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЧЛЕН

В этом случае мы используем совершенно иное приближение, специально приспособленное к нерелятивистской теории электронов, так как здесь мы имеем дело с такими значениями $|\mathbf{k}|$, которые малы по сравнению с энергией покоя электрона.

Нерелятивистская часть интеграла Y определяется выражением

$$Y_{NR} = (4\pi)^{-1} \int_0^{\gamma m} \alpha_\mu (\tilde{\mathscr{Y}} - \tilde{\mathscr{Y}}_0)\, \alpha^\mu \frac{d^3k}{|\mathbf{k}|},$$

где

$$\tilde{\mathscr{Y}} = \frac{\nu + (\tilde{E}/|\tilde{E}|)}{|\tilde{E}| + |\mathbf{k}| - \nu E_l},$$

$$\tilde{\mathscr{Y}}_0 = \frac{\nu + (\tilde{U}/\tilde{p}_0)}{\tilde{p}_0 + |\mathbf{k}| - \nu p_0}.$$

Прежде всего надо заметить, что малые знаменатели получаются только при $\nu = 1$. Что же касается $\nu = -1$, то в этом случае малые знаменатели не возникают, и мы могли бы интегрировать релятивистскую часть таких членов вплоть до значения $\mathbf{k} = 0$. Вклад членов с $\nu = -1$ в нерелятивистскую часть пренебрежимо мал. Поэтому вместо того, чтобы усреднять по обоим значениям ν, мы просто положим $\nu = 1$ и вставим дополнительный множитель $1/2$. Таким образом, мы полагаем

$$\tilde{\mathscr{Y}} = \frac{1}{2} \frac{1 + (\tilde{E}/|\tilde{E}|)}{|\tilde{E}| + |\mathbf{k}| - E_l},$$

$$\tilde{\mathscr{Y}}_0 = \frac{1}{2} \frac{1 + (\tilde{U}/\tilde{p}_0)}{\tilde{p}_0 + |\mathbf{k}| - p_0}.$$

В силу соотношений (25.5) и (27.12) мы знаем, что

$$\alpha_\mu\left(\frac{E}{|E|}-\frac{U}{p_0}\right)\alpha^\mu = O\left(\mathscr{A}p^2\right).$$

В рассматриваемом случае нет большой разницы между величинами со знаком тильда и величинами без знака тильда, так как $\mathbf{k}$ мало, а разница между ними по порядку величины равна $\mathbf{k}$. Поэтому мы можем в выражении для $\tilde{\mathscr{Y}}_0$ заменить $\tilde{U}/\tilde{p}_0$ на $\tilde{E}/|\tilde{E}|$, не понижая при этом точности наших расчетов: ошибка, равная по порядку величины $\mathscr{A}\mathbf{p}^2/|\mathbf{k}|$, в выражении $\alpha_\mu\tilde{\mathscr{Y}}_0\alpha^\mu$ вызывает в выражении Y_{NR} ошибку порядка

$$\mathbf{p}^2\mathscr{A}\int\limits_0^{\gamma m}|\mathbf{k}|^{-1}\frac{d^3k}{|\mathbf{k}|}=4\pi\gamma\mathbf{p}^2\mathscr{A},$$

но последней можно пренебречь, так как мы полагаем $\gamma \ll 1$.

Следовательно, теперь

$$\alpha_\mu\left(\tilde{\mathscr{Y}}-\tilde{\mathscr{Y}}_0\right)\alpha^\mu=\alpha_\mu\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{\tilde{E}}{|\tilde{E}|}\right)\times$$
$$\times\left[\left(|\mathbf{k}|+|\tilde{E}|-E_l\right)^{-1}-\left(|\mathbf{k}|+\tilde{p}_0-p_0\right)^{-1}\right]\alpha^\mu.$$

После разложения по $|\mathbf{k}|$ вышеприведенное выражение принимает вид

$$\frac{1}{2}\alpha_\mu\left(1+\frac{\tilde{E}}{|\tilde{E}|}\right)\left[\frac{1}{|\mathbf{k}|}-\frac{|\tilde{E}|-E_l}{|\mathbf{k}|\left(|\mathbf{k}|+|\tilde{E}|-E_l\right)}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{|\mathbf{k}|}+\frac{\tilde{p}_0-p_0}{|\mathbf{k}|\left(|\mathbf{k}|+\tilde{p}_0-p_0\right)}\right]\alpha^\mu. \qquad (28.1)$$

Для значений $\mu = 1, 2, 3$ у нас в этом выражении слева и справа имеются матрицы α_r, а в нерелятивистской теории матричные элементы оператора скорости α_r по порядку величины равны p_r/m. Чтобы убедиться в этом, мы пишем

$$\langle l\,|\,\alpha_r\,|\,n\rangle=\left(E_l+E_n\right)^{-1}\langle l\,|\,E\alpha_r+\alpha_rE\,|\,n\rangle=$$
$$=m^{-1}\langle l\,|\,p_r-e\mathscr{A}\alpha_r\,|\,n\rangle=m^{-1}\langle l\,|\,p_r\,|\,n\rangle, \qquad (28.2)$$

поскольку

$$\langle i \,|\, e\mathscr{A}\alpha_r \,|\, n\rangle \ll m\langle i \,|\, \alpha_r \,|\, n\rangle.$$

Таким образом, мы видим, что приближенно матричные элементы скорости совпадают с матричными элементами импульса, деленными на массу. В рассматриваемом случае импульсы считаются малыми величинами, поэтому для значений $\mu=1, 2, 3$ в выражении (28.1) слева и справа появляются малые множители. Но тогда мы можем пренебречь последним членом в квадратных скобках, и у нас останется выражение

$$\alpha_r(\mathscr{Y}-\mathscr{Y}_0)\alpha^r=\frac{1}{2}\alpha^r\left(1+\frac{\tilde{E}}{|\tilde{E}|}\right)\frac{|\tilde{E}|-E_i}{|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}|+|\tilde{E}|-E_i)}\alpha_r. \tag{28.3}$$

При $\mu=0$ эти малые множители не возникают, поэтому член с $\mu=0$ существенно больше трех других членов, и мы должны его вычислять с большей степенью точности. Чтобы добиться этого, мы воспользуемся соотношением

$$\mathscr{Y}-\mathscr{Y}_0=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\tilde{E}}{|\tilde{E}|}\right)\left[\frac{1}{|\mathbf{k}|}-\frac{|\tilde{E}|-E_i}{|\mathbf{k}|^2}+\right.$$
$$+\frac{(|\tilde{E}|-E_i)^2}{|\mathbf{k}|^3}-\frac{(|\tilde{E}|-E_i)^3}{|\mathbf{k}|^3(|\mathbf{k}|+|\tilde{E}|-E_i)}-$$
$$\left.-\frac{1}{|\mathbf{k}|}+\frac{\tilde{p}_0-p_0}{|\mathbf{k}|^2}-\frac{(\tilde{p}_0-p_0)^2}{|\mathbf{k}|^3}+\frac{(\tilde{p}_0-p_0)^3}{|\mathbf{k}|^3(|\mathbf{k}|+\tilde{p}_0-p_0)}\right].$$

Член, кубичный по $(\tilde{p}_0-p_0)$, можно отбросить, так как он содержит $\mathbf{p}^3$. Кроме того, можно показать, что выражения

$$(\tilde{p}_0-p_0)-(|\tilde{E}|-E_i)$$

и

$$(\tilde{p}_0-p_0)^2-(|\tilde{E}|-E_i)^2$$

дают пренебрежимо малые вклады. Для доказательства обратимся к формуле (25.1), из которой видно, что

$$(|\tilde{E}|-E_i)-(\tilde{p}_0-p_0)\sim-\frac{1}{2}(\tilde{U}\tilde{B}+\tilde{B}\tilde{U})+$$
$$+\frac{1}{2}(UB+BU)=O(\mathscr{A}k).$$

Это выражение после умножения на $[1+(\tilde{E}/|\tilde{E}|)]$ и усреднения по направлениям вектора $\mathbf{k}$ дает величину порядка $\mathcal{A}\mathbf{k}^2$. Эту величину мы должны затем умножить на $|\mathbf{k}|^{-2}(d^3\mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ и проинтегрировать, в результате получим член порядка

$$\mathcal{A}\int_0^{\gamma m} |\mathbf{k}|\, d|\mathbf{k}| = O(\gamma^2\mathcal{A}),$$

однако он пренебрежимо мал. Можно воспользоваться аналогичной аргументацией, чтобы показать, что выражение $(\tilde{p}_0 - p_0)^2 - (|\tilde{E}| - E_i)^2$ дает член порядка $\gamma\mathcal{A}$ и его тоже можно отбросить.

Теперь у нас остается выражение

$$\tilde{\mathcal{Y}} - \tilde{\mathcal{Y}}_0 \sim -\frac{1}{2}\left(1+\frac{\tilde{E}}{|\tilde{E}|}\right)\frac{(|\tilde{E}|-E_i)^3}{|\mathbf{k}|^3(|\mathbf{k}|+|\tilde{E}|-E_i)} =$$

$$= -\frac{1}{2}(|\tilde{E}|-E_i)\left(1+\frac{\tilde{E}}{|\tilde{E}|}\right)\frac{|\tilde{E}|-E_i}{|\mathbf{k}|^3(|\mathbf{k}|+|\tilde{E}|-E_i)}(|\tilde{E}|-E_i). \tag{28.4}$$

Выше я лишь изменил порядок отдельных сомножителей. Это мы можем сделать, так как здесь все сомножители коммутируют между собой. Действительно, выше только величины $\tilde{E}$ и $|\tilde{E}|$ не являются числами, но они между собой коммутируют.

В крайнем справа множителе в выражении (28.4) мы можем заменить $|\tilde{E}|$ на $\tilde{E}$, так как у нас имеется множитель $1+(\tilde{E}/|\tilde{E}|)$, благодаря которому $\tilde{E}=|\tilde{E}|$, поскольку при $\tilde{E}=-|\tilde{E}|$ он равен нулю. Таким образом, в выражении (28.4) справа получается множитель

$$\tilde{E} - E_i = (\alpha(\mathbf{p}+\mathbf{k})) + \alpha_m m - e\mathcal{A} - E_i \approx (\alpha\mathbf{k}).$$

После усреднения по состоянию $|i\rangle$ мы можем применить аналогичные соображения и к множителю $(|\tilde{E}| - E_i)$, стоящему слева в выражении (28.4), поэтому он тоже превращается в $(\alpha\mathbf{k})$. Таким образом, член с $\mu = 0$ в выражении (28.1) имеет то же среднее значение, что и выражение

$$-\frac{1}{2}(\alpha\mathbf{k})\left(1+\frac{\widetilde{E}}{|\widetilde{E}|}\right)\frac{\widetilde{E}-E_i}{|\mathbf{k}|^3(|\mathbf{k}|+|\widetilde{E}|-E_i)}(\alpha\mathbf{k}). \quad (28.5)$$

В выражениях (28.3) и (28.5) знак тильда можно опустить, так как величины α_r малы, точнее, малы их матричные элементы, а разность величин со знаком тильда и величин без знака тильда содержит величину $\mathbf{k}$, которая также мала. Усреднив теперь выражение (28.5) по направлениям вектора $\mathbf{k}$, получим

$$\widetilde{\mathscr{Y}}-\widetilde{\mathscr{Y}}_0\sim-\frac{1}{6}\alpha_r\left(1+\frac{E}{|E|}\right)\frac{|E|-E_i}{|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}|+|E|-E_i)}\alpha_r.$$

Добавляя сюда выражение (28.3), имеем

$$\alpha_\mu(\widetilde{\mathscr{Y}}-\widetilde{\mathscr{Y}}_0)\alpha^\mu\sim\frac{1}{3}\alpha_r\left(1+\frac{E}{|E|}\right)\frac{|E|-E_i}{|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}|+|E|-E_i}\alpha_r.$$

Таким образом,

$$Y_{NR}=(4\pi)^{-1}\int\limits_0^{\gamma m}\alpha_\mu(\widetilde{\mathscr{Y}}-\widetilde{\mathscr{Y}}_0)\alpha^\mu\frac{d^3k}{|k|}\sim$$

$$\sim\frac{1}{3}\int\limits_0^{\gamma m}\alpha_r\left(1+\frac{E}{|E|}\right)\frac{|E|-E_i}{|\mathbf{k}|+|E|-E_i}\alpha_r d|\mathbf{k}|.$$

Теперь мы выполним интегрирование и получим

$$Y_{NR}\sim\frac{1}{3}\alpha_r\left(1+\frac{E}{|E|}\right)(|E|-E_i)\ln\frac{\gamma m+|E|-E_i}{||E|-E_i|}\alpha_r.$$

Сохраняя достаточную степень точности, мы можем в числителе дроби под знаком логарифма пренебречь разностью $|E|-E_i$, так как величина γm велика по сравнению с интересующими нас разностями энергий, поэтому в силу соотношения (28.2) имеем

$$\langle i\,|Y_{NR}|\,i\rangle=\frac{2}{3}\sum_{E_n>0}\langle i\,|\,\alpha_r\,|\,n\rangle(E_n-E_i)\ln\frac{\gamma m}{|E_n-E_i|}\langle n\,|\,\alpha_r\,|\,i\rangle=$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{E_n>0}\frac{E_n-E_i}{m^2}|\langle i\,|\,p_r\,|\,n\rangle|^2\ln\frac{\gamma m}{|E_n-E_i|}.$$

Это выражение требует численной оценки в каждом интересующем нас конкретном случае. Результат такой оценки можно представить в виде

$$\langle i \,|Y_{NR}|\, i\rangle = \frac{2}{3}\sum_{E_n>0} \frac{E_n - E_i}{m^2}\,|\langle i\,|p_r|\,n\rangle|^2 \ln\frac{\gamma m}{M},$$

где величина M — некое среднее значение разности $|E_n - E_i|$, которое следует находить численным путем. Такая численная оценка, разумеется, должна учитывать значения тех матричных элементов, на которые при различных n умножается логарифмический член. Величина M фигурирует лишь под знаком логарифма, поэтому вариация ее значений не играет слишком большой роли. Гайтлер[1]) для лэмбовского сдвига водородного уровня с главным квантовым числом, равным двум, дает следующее значение логарифмического члена:

$$\ln\frac{m}{M} = 7{,}6876.$$

Ограничение $E_n > 0$ не является существенным, поскольку члены с $E_n < 0$ дают пренебрежимо малый вклад из-за малости матричных элементов при $E_n < 0$. Отбрасывая это ограничение, мы можем представить наш результат в более удобном виде

$$\begin{aligned}
\langle i\,|Y_{NR}|\,i\rangle &= \frac{2}{3m^2}\ln\frac{\gamma m}{M}\langle i\,|\,p_r(E - E_i)\,p_r\,|\,i\rangle = \\
&= \frac{2}{3m^2}\ln\frac{\gamma m}{M}\langle i\,|\,p_r(U - e\mathcal{A} - E_i)\,p_r\,|\,i\rangle = \\
&= \frac{1}{3m^2}\ln\frac{\gamma m}{M}\langle i\,|(U - E_i)p_r^2 - 2p_r e\mathcal{A}p_r + p_r^2(U - E_i)|\,i\rangle = \\
&= \frac{1}{3m^2}\ln\frac{\gamma m}{M}\langle i\,|\,e\mathcal{A}p_r^2 - 2p_r e\mathcal{A}p_r + p_r^2 e\mathcal{A}\,|\,i\rangle = \\
&= \frac{-e}{3m^2}\ln\frac{\gamma m}{M}\langle i\,|\nabla^2\mathcal{A}|\,i\rangle. \qquad (28.6)
\end{aligned}$$

---

[1]) См. формулу (34.24) на стр. 390 русского перевода упомянутой выше (стр. 195) книги Гайтлера. — *Прим. перев.*

ЛЕКЦИЯ 29

ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ.

РЕЗЮМЕ

Таким образом, складывая выражения (27.19), (28.6) и последний член выражения (26.3), мы окончательно получаем

$$\langle i\,|Y\,|\,i\rangle + \langle i\,|\,Z\,|\,i\rangle =$$
$$= -\frac{e}{3m^2}\langle i\,|\nabla^2\mathscr{A}\,|\,i\rangle\left(\ln\frac{m}{2M}+\frac{19}{30}\right)-\frac{e^2}{4m^2}\langle i\,|(\sigma\,\mathrm{grad}\,\mathscr{A}\mathbf{p})\,|\,i\rangle$$

и

$$\text{Лэмбовский сдвиг} = \frac{e^2}{\pi}\langle i\,|\,Y+Z\,|\,i\rangle.$$

Важно отметить, что из этого выражения выпала величина γ. Если мы нигде не совершили ошибку, то, конечно, величина γ должна исчезнуть, так как конкретное значение выбранной нами границы между нерелятивистской и релятивистской частями несущественно. Чтобы были оправданы наши приближения, γ должна быть величиной правильного порядка, но каким именно образом выбирается нами γ, не имеет значения.

Полученный результат дает нам значение лэмбовского сдвига с некоторой вполне определенной точностью. Более точный расчет лэмбовского сдвига был сделан с использованием картины Шредингера. Недавно профессор Лэмб говорил мне, что он снова ставит эксперимент, но с иной аппаратурой и надеется существенно улучшить точность измерений лэмбовского сдвига. Если эти надежды оправдаются, нужна будет более точная теория лэмбовского сдвига, чтобы сравнить ее с ожидаемыми экспериментальными результатами. Конечно, соответствующие расчеты будут очень сложными, так как для получения предполагаемой в эксперименте высокой точности они должны будут включать величины порядка $(e^2/\hbar c)^2$, возможно, даже порядка $(e^2/\hbar c)^3$. Кроме того, мы должны будем отказаться от другого принятого нами приближения, в силу которого мы считали импульс малой величиной. В нашем изложении мы всюду считали, что импульс частицы мал и учитывали лишь члены порядка $\mathbf{p}^2$. Необходимо же будет учесть члены порядка $\mathbf{p}^4$ и, возможно, члены, квадратичные по потенциалу $\mathscr{A}$, так что с учетом всего этого придется затратить еще гораздо больше усилий, чтобы рассчитать лэмбовский сдвиг с желаемой степенью точности. В моем изложении указан общий метод расчетов и показано, что расходимости не вызывают затруднений, если расчеты проводятся корректным образом.

В наших расчетах аномального магнитного момента и лэмбовского сдвига мы имели дело с одноэлектронной задачей, и в этих вычислениях нам важно было считать, что энергия взаимодействия — малая величина. Мы считали, что выражение $\int A_\mu j^\mu d^3x$ мало, и, по-видимому, в рамках одноэлектронных задач это является хорошим приближением.

В известном смысле это довольно удивительно, так как величина, предполагаемая нами малой, не является калибровочно инвариантной. Наш гамильтониан в целом величина калибровочно инвариантная, но мы разбиваем его на две части: собственно-энергетическую часть и часть, ответственную за взаимодействие, сами же по себе эти две части не являются калибровочно инвариантными. Такой подход не вполне удовлетворителен, но в одноэлектронных задачах он, по-видимому, действительно оправдывается. Хотелось бы иметь расчеты, в которых используются исключительно калибровочно инвариантные величины. Если бы это удалось сделать, у теории был бы значительно более прочный фундамент.

В этих расчетах имеется еще один момент, на который следует обратить внимание: в ходе вычислений мы нигде не пользовались слабыми равенствами

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} \approx 0. \qquad (29.1)$$

По-видимому, для одноэлектронных задач эти слабые равенства не играют существенной роли.

ЛЕКЦИЯ 30

КУЛОНОВСКИЕ СИЛЫ

Если перейти к задачам с двумя и более электронами, ситуация будет совершенно иной. Когда присутствуют два и более электронов, величину H_Q нельзя считать малой, потому что в игру вступает кулоновское взаимодействие. В этом случае мы должны воспользоваться уравнениями связей (29.1).

Я хотел бы показать вам, каким образом появляется в теории кулоновское взаимодействие. Этот вопрос связан с рассмотрением фигурирующих в гамильтониане продольных электромагнитных волн. Такое рассмотрение применительно к картине Шредингера имеется в любой книге по квантовой теории поля в разделе, посвященном переходу от лоренцевой калибровки к кулоновской. Я хотел бы показать, что соответствующие выкладки можно провести и в рамках картины Гейзенберга.

Уравнения связей (29.1) дают нам два условия (16.6) и (16.7) для гамильтоновых переменных, взятых в какой-то один определенный момент времени. Разумеется, для каждой точки трехмерного пространства имеется по одному такому уравнению связей.

Перейдем к фурье-компонентам. Для этого напишем

$$A_x^\mu = \int \left(A_k^\mu + \overline{A}{}_{-k}^\mu\right) e^{-i(\mathbf{kx})}\, d^3k,$$

$$B_x^\mu = i \int |\mathbf{k}| \left(A_k^\mu - \overline{A}{}_{-k}^\mu\right) e^{-i(\mathbf{kx})}\, d^3k, \qquad (30.1)$$

$$j_{0x} = \int j_{0k} e^{-i(\mathbf{kx})} d^3k,$$

Уравнения (16.6) и (16.7), записанные через амплитуды Фурье, гласят

$$i|\mathbf{k}|(A_{0k}-\bar{A}_{0-k})-ik_r(A_{rk}+\bar{A}_{r-k})\approx 0, \qquad (30.2)$$

$$|\mathbf{k}|k_r(A_{rk}-\bar{A}_{r-k})-|\mathbf{k}|^2(A_{0k}+\bar{A}_{0-k})\approx -4\pi j_{0k}. \qquad (30.3)$$

Возьмем уравнение (30.3) и вычтем из него умноженное на $i|\mathbf{k}|$ уравнение (30.2), это нам даст

$$2|\mathbf{k}|^2A_{0k}-2|\mathbf{k}|k_rA_{rk}\approx 4\pi j_{0k}. \qquad (30.4)$$

Положим теперь $k_0=|\mathbf{k}|$, тогда уравнение (30.4) примет вид

$$k^{\mu}A_{\mu k}\approx\frac{2\pi}{k_0}j_{0k}. \qquad (30.5)$$

Для комплексно сопряженного уравнения имеем

$$k^{\mu}\bar{A}_{\mu k}\approx\frac{2\pi}{k_0}j_{0-k}. \qquad (30.6)$$

Разобьем теперь электромагнитное поле на продольную и поперечную части и выведем выражение для энергии поля, связанной с его продольной частью. Мы полагаем

$$A_{rk}=A^L_{rk}+A^T_{rk},$$

где, по определению,

$$A^L_{rk}=\left(\frac{k_r}{k_0^2}\right)k_sA_{sk} \quad \text{и} \quad A^T_{rk}=A_{rk}-A^L_{rk}.$$

Мы имеем

$$k_rA^L_{rk}=k_sA_{sk}$$

и, следовательно,

$$k_rA^T_{rk}=0.$$

Последнее соотношение подтверждает правильность определения продольной части поля.

Вернемся к нашему выражению (15.16) для энергии электромагнитного поля, которая записана там с помощью амплитуд Фурье, и отбросим бесконечную постоянную. Это означает, что она фиксируется таким образом, чтобы не было нулевой энергии. Мы можем написать

$$H_F = H_{FL} + H_{FT},$$

где

$$H_{FL} = 4\pi^2 \int k_0^2 \left(A_{rk}^L \overline{A_{rk}^L} - \bar{A}_{0k} A_{0k}\right) d^3k,$$

$$H_{FT} = 4\pi^2 \int k_0^2 A_{rk}^T \overline{A_{rk}^T} d^3k.$$

Перекрестные члены, содержащие произведения $A_{rk}^L \overline{A_{rk}^T}$ взаимно сокращаются. Это просто означает, что отсутствует интерференционная энергия, связанная одновременно и с продольными и с поперечными волнами.

Продольную часть H_{FL} мы можем записать в следующем виде:

$$H_{FL} = 4\pi^2 \int \left[k_r A_{rk} \left(k_0 \bar{A}_{0k} - k^\mu \bar{A}_{\mu k}\right) - \right.$$

$$\left. - k_0 \bar{A}_{0k} \left(k^\mu A_{\mu k} + k_r A_{rk}\right)\right] d^3k =$$

$$= 4\pi^2 \int \left[-\left(k_0 A_{0k} - k^\nu A_{\nu k}\right) k^\mu \bar{A}_{\mu k} - k_0 \bar{A}_{0k} k^\mu A_{\mu k}\right] d^3k. \quad (30.7)$$

Теперь мы должны воспользоваться уравнениями связей. В лекции 14 мы уже обсуждали с вами вопрос о том, каким образом должны использоваться связи в рамках гейзенберговской картины; у нас имеется правило, согласно которому связи в общем случае можно умножать слева и нельзя умножать справа. Однако в данном случае все интересующие нас результаты, как обнаруживается, мы можем получить, умножая связи только на коммутирующие с ними величины. При этом, разумеется, умножение допустимо как справа, так и слева.

С помощью формул (30.5) и (30.6) мы таким способом находим

$$(A_{0k} + \bar{A}_{0k})\, k^\mu (A_{\mu k} + \bar{A}_{\mu k}) \approx \frac{2\pi}{k_0} (A_{0k} + \bar{A}_{0k}) (j_{0k} + j_{0-k})$$

и

$$(A_{0k} - \bar{A}_{0k})\, k^\mu (A_{\mu k} - \bar{A}_{\mu k}) \approx \frac{2\pi}{k_0} (A_{0k} - \bar{A}_{0k}) (j_{0k} - j_{0-k}).$$

Вычитая одно выражение из другого, имеем

$$A_{0k}k^{\mu}\bar{A}_{\mu k}+\bar{A}_{0k}k^{\mu}A_{\mu k}\approx\frac{2\pi}{k_0}(A_{0k}j_{0-k}+\bar{A}_{0k}j_{0k}).$$

Кроме того, в силу коммутативности $k^{\nu}A_{\nu k}$ и $k^{\mu}\bar{A}_{\mu k}$ из формул (30.5) и (30.6) можно заключить, что

$$k^{\nu}A_{\nu k}k^{\mu}\bar{A}_{\mu k}\approx\frac{4\pi^2}{k_0^2}j_{0k}j_{0-k}.$$

Используя этот результат, мы на основании формулы (30.7) находим

$$H_{FL}\approx-8\pi^3\int(A_{0k}j_{0-k}+\bar{A}_{0k}j_{0k})\,d^3k+16\pi^4\int\frac{j_{0k}j_{0-k}}{k_0^2}\,d^3k.$$

Если теперь от амплитуд Фурье вернуться к исходным полевым величинам и воспользоваться формулой (30.1), то в результате получим

$$H_{FL}=-\int A_{0x}j_{0x}d^3x+\frac{1}{2}\int\int\frac{j_{0x}j_{0x'}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3xd^3x'.$$

Что касается члена

$$-\int A_{0x}j_{0x}d^3x,$$

то он сократится с одним из членов в энергии взаимодействия H_Q, член же

$$\frac{1}{2}\int\int\frac{j_{0x}j_{0x'}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3xd^3x'$$

представляет собой кулоновское взаимодействие между любыми имеющимися в наличии частицами. Вот таким путем и возникает кулоновское взаимодействие между заряженными частицами из продольной части энергии поля.

У этих расчетов имеется примечательная особенность: вы можете выполнить их в рамках картины Гейзенберга, используя уравнения связей лишь в той мере, в какой их приходится умножать на коммутирующие со связями величины.

ЛЕКЦИЯ 31

ОБЩАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Другая проблема, которую мне сейчас хотелось бы рассмотреть, — это вопрос об общей физической интерпретации теории. В обычной квантовой механике берут шредингеровскую волновую функцию, затем эту функцию нормируют и образуют квадрат ее модуля, а получающийся результат интерпретируют как вероятность. Теперь мы больше не можем поступать указанным образом потому, что в нашей квантовой теории поля мы не получили шредингеровской волновой функции. Что же мы можем вместо этого предпринять?

В наших расчетах аномального магнитного момента и лэмбовского сдвига фигурировало нормальное упорядочение q-чисел. Чтобы появление в наших расчетах нормального упорядочения выглядело естественным, нам пришлось для каждого момента времени ввести некий кет-вектор. Для каждого момента времени t вводим кет-вектор, обозначаемый $|O_t\rangle$ (мы можем назвать его вакуумным кет-вектором в момент времени t) и удовлетворяющий системе условий

$$(\text{любой оператор уничтожения в момент } t)\,|O_t\rangle = 0.$$

Казалось бы, этот кет-вектор $|O_t\rangle$ играет роль вакуумного кет-вектора, но он, разумеется, очень сильно отличается от того, что обычно понимают под вакуумным кет-вектором, так как он представляет собой нечто, относящееся только к одному моменту времени. Кет-вектор, удовлетворяющий указанным условиям в момент времени t, будет в корне отличаться от кет-вектора, удовлетворяющего этим условиям в позднейший момент времени. Те, кто работает в рамках картины Шредингера, предполагают, что существует кет-вектор, удовлетворяющий вакуумным условиям во все моменты времени, на самом деле такого кет-вектора не существует. Однако понятие о вакуумном кет-векторе в какой-то один определенный момент времени — это в рамках картины Гейзенберга вполне хорошо сформулированное понятие.

С целью дать физическую интерпретацию теории я сделаю два предположения.

Предположение 1. Каждое физическое состояние соответствует q-числу K, которое в гейзенберговской картине является интегралом движения; K зависит явно от времени так же, как и от динамических переменных, взятых в момент времени t:

$$\frac{dK}{dt}=0 \quad \text{или} \quad i\frac{\partial K}{\partial t}+KH-HK=0.$$

Фактически мы все время и работали с таким K в процессе интегрирования наших гейзенберговских уравнений движения.

Мне хотелось бы, чтобы вы обратили внимание на то, что это в корне отличается от обычного предположения: здесь предполагается, что физическое состояние соответствует не кет-вектору, а q-числу.

Предположение 2. Все, что может быть наблюдаемым для состояния K в момент времени t, описывается выражением $K|O_t\rangle$.

В связи с этим вторым предположением приобретает важность процедура нормального упорядочения. В любом члене нормальное упорядочение ставит все операторы рождения слева от всех операторов уничтожения. После того как выполнено нормальное упорядочение, все те члены в K, которые содержат какие-либо операторы уничтожения, после умножения на кет-вектор $|O_t\rangle$, не будут давать никакого вклада. Согласно предположению 2, эти члены будут латентными в момент времени t. Проявляют себя только те члены в K, которые содержат исключительно одни операторы рождения.

Каждый из этих членов будет относиться к неким частицам в неких определенных состояниях. Мы можем взять коэффициент при каждом таком члене и образовать квадрат его модуля. В результате мы получим некоторое определенное число, и мы можем назвать это число «интенсивностью» появления таких частиц в соответствующих состояниях в момент времени t. Здесь я использую термин «интенсивность», а не обычный термин «вероятность». На то имеются причины. Эти так называемые интенсивности невозможно нормировать, или, точнее, если вы нормируете их в один момент времени, они не останутся нормированными в дальнейшем. Конечно, интенсивности не могут оставаться нормированными потому, что какие-нибудь латентные члены, имеющиеся в K в момент времени t, могут уже не быть латентными в позднейшие моменты времени и давать свой вклад в результаты наблюдения.

Эта интерпретация не дает столь же определенных результатов, какие мы получаем при обычной интерпретации, принятой в шредингеровской теории: в нашем распоряжении нет таких величин, которые мы могли бы с определенностью классифицировать как вероятности. Мы можем лишь сказать, что если интенсивность велика, то и вероятность обнаружить частицу велика, если же интенсивность равна нулю, то и вероятность равна нулю.

Вы замечаете, что в настоящей теории меньше детерминизма, чем в обычной теории со шредингеровской волновой функцией. Причина заключается в том, что величина $K|O_t\rangle$, которая дает нам всю информацию о том, что наблюдаемо в какой-то один момент времени, не фиксирует нам того, что наблюдаемо в последующие моменты времени из-за латентных членов, содержащихся в K. Действительно, содержащиеся в K латентные члены, которые вы могли бы снабдить любыми коэффициентами, не дают вклада ни в какие наблюдаемые величины в момент времени t, но они все-таки могут оказать влияние на наблюдаемые величины в другие моменты времени.

В этой теории нет никакой S-матрицы. S-матрица — это нечто такое, что является унитарным и дает нам вероятности. Я просто не знаю, каким образом определить S-матрицу, работая в рамках картины Гейзенберга. Возможно, будущие успехи укажут нам какой-нибудь способ введения S-матрицы, однако тот обычный способ введения S-матрицы, который используется в теории поля, столь сильно грешит против логики, что я не вижу, каким образом можно было бы перенести это понятие в логически состоятельную теорию.

Таким образом, квантовая теория поля на той стадии развития, на которой я ее оставляю, далека от завершения. Целый ряд направлений теории нуждается в дальнейшем развитии. Важнейшее из них — найти какой-нибудь подход к вопросу о сильных взаимодействиях. С электродинамикой все обстоит благополучно: здесь мала константа связи и мы можем построить теорию возмущений с этой константой в качестве параметра. Но для сильных взаимодействий константа связи не мала, и пользоваться гамильтоновой теорией с такого рода методом возмущений нельзя. Основной задачей дальнейшего развития гамильтоновой теории является отыскание некоего приближенного метода, который позволил бы нам применить картину Гейзенберга к таким процессам столкновений, где константа связи не мала. Многие физики считают, что для этих задач гамильтонова теория не годится. Лично я не думаю, что у нас имеются какие-либо доводы против этой теории. Я думаю, что не годится лишь метод теории возмущений.

Имеется другая нерешенная проблема: она относится к электродинамике. Выполняя одноэлектронные расчеты, я брал в качестве нулевого приближения оператор рождения одного электрона. Можно было бы сделать соответствующие расчеты для однофотонной задачи, взяв в качестве нулевого приближения оператор рождения одного фотона.

Поступая таким образом, мы сталкиваемся с затруднениями: собственная энергия фотона оказывается квадратично расходящейся. Это означает, что собственная энергия фотона, если ввести обрезание, содержит g^2. Для фотона это чрезвычайно большая собственная энергия. Этот результат неверен, кроме всего прочего, еще и потому, что он нарушает калибровочную инвариантность. Обычно говорят, что этой собственной энергии просто не должно быть, и по этой причине ее отбрасывают.

Каким образом, отправляясь от калибровочно инвариантной теории, можно получить калибровочно неинвариантный результат? Этот вопрос доставил физикам много беспокойства. Однако, как видно из того, что говорилось мной раньше, это совсем неудивительно. В этих одночастичных задачах мы пользуемся методом теории возмущений, предполагающим, что калибровочно неинвариантные величины малы. Таким образом, здесь мы имеем дело с предположением, которое само не является калибровочно инвариантным. Поэтому скорее следует удивляться тому, что это предположение так хорошо оправдывается для одноэлектронных задач, чем тому, что оно не оправдывается в случае однофотонных задач.

ЛЕКЦИЯ 32

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ НОВОЙ И ОБЫЧНОЙ ТЕОРИЯМИ ПОЛЯ

При обычной формулировке квантовой теории поля широко используются понятия in- и out-полей (аут-полей). Связь между этими двумя наборами полей осуществляется так называемой S-матрицей. Чтобы составить мнение о ценности этого метода, исследуем вопрос о том, каким образом эти поля определяются.

Свободные поля мы определяем как поля, удовлетворяющие уравнениям поля в отсутствие взаимодействия. Таким образом, сопоставленная свободному полю величина, скажем B, удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{dB}{dt} = BH_0 - H_0 B, \tag{32.1}$$

где H_0 — сумма энергий всех полей по отдельности без учета взаимодействия.

Мы можем рассмотреть свободные поля, равные в некий стандартный момент времени T истинным полям гейзенберговской картины. Этим условием они определяются полностью. Обозначим такие свободные поля в момент времени t через B_{tT}. Таким образом, B_{TT} совпадает с истинным гейзенберговским полем в момент времени T.

Переменные свободных полей B_{tT} для данных t и T должны удовлетворять тем же самым коммутационным или антикоммутационным соотношениям, что и переменные B_{TT}, в силу того что B_{tT} связаны с B_{TT} унитарными преобразованиями, которые складываются из инфинитезимальных унитарных преобразований, определяемых уравнением (32.1). Таким образом, переменные B_{tT} подчиняются тем же самым коммутационным соотношениям, что и гейзенберговские переменные, взятые в данный момент времени. Этот результат имеет место для любых энергий взаимодействия даже при наличии обрезания.

Предположим, что переменные B_{tT} стремятся к определенным пределам по мере стремления T к $-\infty$. Эти предельные значения и являются in-полями. Их можно представить в виде разности истинных и запаздывающих полей, причем последние определяются наподобие запаздывающих полей в классической электродинамике.

Конечно, строго говоря, утверждение, что B_{tT} стремится к определенному пределу при $T \to -\infty$, не может быть истинным потому, что B_{tT} всегда будет подвержено существенным изменениям по мере того, как меняется T, но для очень больших отрицательных значений T вполне может случиться, что эти изменения столь отдаленны по своему характеру, что уже не влияют на результаты вычислений, которые нас интересуют. При этих условиях понятие in-поля становится вполне хорошо сформулированным понятием. Соответствующие величины при $T \to \infty$ представляют собой out-поля.

Понятие in-поля очень полезно, если оно вполне хорошо сформулировано. Амплитуды Фурье in-полей суть интегралы движения и могут быть взяты в качестве базисных переменных при интегрировании гейзенберговских уравнений. Они обладают простыми трансформационными свойствами по отношению к преобразованиям Лоренца и поэтому дают нам возможность построить теорию в явно ковариантной форме.

Однако в случае электродинамики понятие in-поля не является, вообще говоря, хорошо сформулированным понятием. В этом можно убедиться, взяв простой пример рассеяния двух электронов друг на друге. Действующая между ними сила — это в основном кулоновская сила. Когда электроны находятся далеко друг от друга, представляющие их волновые функции не стремятся к плоским волнам потому, что с увеличением расстояния кулоновские силы убывают слишком медленно. Сходящиеся волны для этой задачи рассеяния обладают определенной частотой и направлением распространения, но не обладают определенной фазой, поэтому они определены не полностью.

Для полей с силами, убывающими быстрее обратной величины квадрата расстояния, эта трудность не возникает. В этом случае можно попытаться построить теорию, используя амплитуды Фурье in-полей. Эти амплитуды Фурье будут состоять из операторов рождения η приходящих частиц и комплексно сопряженных операторов уничтожения $\bar{\eta}$ приходящих частиц. При этом можно будет сохранить обычную физическую интерпретацию, согласно которой состояниям соответствуют кет-векторы, причем соответствие между состоянием и кет-вектором в гейзенберговской картине имеет место для всех моментов времени. Состоянию вакуума тогда во все моменты времени будет соответствовать кет-вектор $|0\rangle$, удовлетворяющий при всех $\bar{\eta}$ условию $\bar{\eta}\,|0\rangle = 0$.

Состоянию общего вида во все моменты времени будет соответствовать кет-вектор

$$f(\eta)\,|0\rangle$$

с функцией f, которую можно представить в виде степенного ряда.

Что касается квантовой электродинамики, то ее нельзя построить, следуя этому образцу. Надо обойтись без использования in-полей. В настоящих лекциях показано, каким образом это можно сделать. Мы вынуждены обратиться к новой физической интерпретации, однако на самом деле эта новая интерпретация не так уж сильно отличается от интерпретации, о которой шла речь выше, так как величина K, определяющая состояние во все моменты времени, занимает место упомянутой выше функции $f(\eta)$, причем обе они в гейзенберговской картине являются интегралами движения.

Конечно, невозможность использовать in-поля ставит нас в положение участников турнира с жестким гандикапом. В частности, приходится отказаться от построения теории в явно ковариантной форме. Возможно, будущий прогресс теории лежит на пути такого обобщения понятия in-полей, которое сделает его применимым даже в квантовой электродинамике.

СОДЕРЖАНИЕ

Дирак

ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Редактор *Е. И. Майкова*
Художннк *Г. А. Щетинин*
Художественный редактор *П. Ф. Некундэ*
Техннческий редактор *Л. П. Бирюкова*
Корректор *Е. Б. Авенариус*

Сдано в набор 17XII 1970 г.
Подписано к печати 3/III 1971 г.
Бумага № 2 $84\times108^{1}/_{32}$=3,81 бум. л. 12,81 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 10,44. Изд. № 2/5615
Цена 72 коп. Зак. 897

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29.

72 к.

Physical law should have mathematical beauty
P A M Dirac

П. ДИРАК — выдающийся английский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии, автор многочисленных оригинальных работ в области квантовой механики и теории поля, а также всемирно известной книги «Принципы квантовой механики» (1930), вышедшей четырьмя изданиями (имеются русские переводы).

Родился в 1902 г. Учился в Бристоле и Кембридже, с 1930 г. — член Королевского общества (Британская академия наук), с 1932 г. — профессор математики в Кембриджском университете. Награжден Нобелевской премией по физике в 1933 г., медалями Королевского общества — в 1939 и 1952 гг.

П. ДИРАК является иностранным членом Академии наук СССР (с 1931 г.), почетным профессором Московского государственного университета; он неоднократно посещал Советский Союз. В свой приезд в Москву в 1956 г., в период чтения лекций в МГУ, он оставил на стене кабинета кафедры теоретической физики приведенный выше автограф, который в переводе гласит: «Физический закон должен быть математически изящным».