GENERAL THEORY OF RELATIVITY

P. A. M. DIRAC
Florida State University

A WILEY-INTERSCIENCE PUBLICATION

OHN WILEY & SONS, New York · London · Sydney · Toronto

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

П.А.М. ДИРАК

Перевод с английского
Г. В. ИСАЕВА

Под редакцией
члена-корреспондента АН СССР
Д. И. БЛОХИНЦЕВА

МОСКВА АТОМИЗДАТ 1978

УДК 530.12

Дирак П. А. М. **Общая теория относительности:** Пер. с англ./ Под. ред. Д. И. Блохинцева. — Пер. изд.: США, 1975. — М.: Атомиздат, 1978. — 64 с.

Книга выдающегося физика нашего времени иностранного члена АН СССР П. А. М. Дирака представляет собой конспект лекций, прочитанных в Университете штата Флорида. Автор дает в ней ясную и краткую формулировку математического аппарата общей теории относительности Эйнштейна. Некоторые результаты (в частности, относящиеся к движению непрерывно распределенной материи и к гравитационным волнам) в этой книге получены новыми методами, ранее не публиковавшимися.

Рассчитана на научных работников, аспирантов, студентов и преподавателей, интересующихся проблемами гравитации.

ИБ № 808

ПОЛЬ АНДРИЕН МОРИС ДИРАК

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Редактор **Е. В. Сатарова**
Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**
Обложка художника **А. И. Шаварда**
Технические редакторы **И. Н. Подшебякин, Л. Ф. Шкилевич**
Корректор **С. В. Малышева**

Сдано в набор 27/IV 1978 г. Подписано к печати 19/X 1978 г. Формат 60×90[1]/16. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 4,0. Уч.-изд. л. 3,55. Тираж 23000 экз. Цена 25 коп. Зак. изд. 77505. Зак. тип. 1457. Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5. Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

Д $\dfrac{20402-119}{034(01)-78}$ БЗ—8—4—1978

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Новая книга выдающегося физика нашего времени иностранного члена АН СССР П. А. М. Дирака основана на его лекциях, прочитанных в Университете штата Флорида, и предназначена для читателя, начинающего изучать общую теорию относительности Эйнштейна. Отличительной чертой этой книги является компактность и изящность изложения. В последнее время появилось много монографий по общей теории относительности, включающих наряду с фундаментальными вопросами теории ее многочисленные приложения в астрофизике и космологии. На этом фоне книгу П. А. М. Дирака можно назвать «математическим минимумом» в области общей теории относительности.

Изложение ведется в рамках традиционной геометрической идеологии, основывающей обсуждение эйнштейновской гравитации на римановой геометрии. Прочитав эту книгу, читатель без труда разберется в приложениях теории.

Методы получения некоторых классических результатов являются оригинальными. В частности, в самом общем виде получены уравнения движения непрерывно распределенных источников внешних полей как следствие уравнений Эйнштейна и уравнений соответствующих полей.

Эту книгу с интересом прочтут также и те, кто уже активно работает в области общей теории относительности или преподает этот предмет. Они сумеют оценить ее исключительные достоинства.

Д. И. Блохинцев

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Согласно общей теории относительности Эйнштейна, для описания физической реальности требуется искривленное пространство. Чтобы продвинуться глубже в понимании физических закономерностей, нужно установить корректный вид уравнений, необходимых для описания искривленного пространства. Для этого имеется хорошо развитый, но довольно сложный математический аппарат. Каждый, кто хочет понять теорию Эйнштейна, должен им овладеть.

Эта книга создана на основе курса лекций, прочитанных на физическом факультете Университета штата Флорида. Необходимый материал изложен в ней в доступной и компактной форме. Для ее понимания не требуется предварительных знаний, выходящих за рамки фундаментальных идей специальной теории относительности и умения дифференцировать полевые функции. Это позволит читателю, изучающему общую теорию относительности, преодолеть возникающие трудности с минимальной затратой времени и энергии и подготовить себя к более глубокому изучению специальных аспектов предмета.

П. А. М. Дирак

Талахасси, шт. Флорида
Февраль 1975

1. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Для описания физического пространства — времени требуется четыре координаты: время t и три пространственные координаты x, y, z. Положим

$$t = x^0; \quad x = x^1; \quad y = x^2; \quad z = x^3,$$

тогда четыре координаты можно записать в виде x^μ, где индекс μ пробегает значения 0, 1, 2, 3. Индекс записан в верхней позиции, чтобы выполнить условие баланса индексов во всех общих уравнениях теории. Точное значение выражения «баланс индексов» станет ясным чуть позже.

Возьмем точку, близкую к рассмотренной точке x^μ; пусть ее координаты будут $x^\mu + dx^\mu$. Четыре величины dx^μ, описывающие смещение, можно рассматривать как компоненты вектора. Законы специальной теории относительности позволяют производить линейные однородные преобразования координат, выражающиеся в линейных однородных преобразованиях dx^μ. Эти преобразования таковы, что величина

$$(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1.1}$$

является инвариантом (выбрана система единиц измерений длины и времени, в которой скорость света $c = 1$).

Совокупность величин A^μ, которые при преобразованиях координат преобразуются так же, как dx^μ, называют контравариантным вектором. Инвариантную величину

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A, A) \tag{1.2}$$

можно назвать квадратом длины вектора. Если есть второй контравариантный вектор B^μ, то существует инвариантное скалярное произведение

$$A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = (A, B). \tag{1.3}$$

Для удобства записи таких инвариантов введем нижние индексы. Определим

$$A_0 = A^0; \quad A_1 = -A^1; \quad A_2 = -A^2; \quad A_3 = -A^3. \tag{1.4}$$

Тогда запишем выражение в левой части (1.2) в виде $A_\mu A^\mu$, где подразумевается суммирование по четырем значениям индекса μ. В таких обозначениях (1.3) можно представить в виде $A_\mu B^\mu$ или $A^\mu B_\mu$.

Четыре величины A_μ, введенные выражениями (1.4), также можно рассматривать как компоненты вектора. Законы преобразования этих величин при преобразованиях координат несколько отличаются от законов преобразования A^μ из-за различия в знаках. Такой вектор называют ковариантным вектором.

Из двух ковариантных векторов A^μ и B^μ можно образовать шестнадцать величин $A^\mu B^\nu$ (индекс ν, так же как все греческие индексы в этой книге, пробегает значения 0, 1, 2, 3). Эти шестнадцать величин образуют компоненты тензора второго ранга. Их иногда называют внешним произведением векторов A^μ и B^μ, в отличие от скалярного произведения (1.3), которое называют внутренним произведением.

Тензор $A^\mu B^\nu$ является специальным, так как его компоненты связаны друг с другом определенными соотношениями. Однако, складывая несколько тензоров, образованных таким способом, можно получить тензор второго ранга самого общего вида, скажем

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu + A'^\mu B'^\nu + A''^\mu B''^\nu + \ . \ . \ . \tag{1.5}$$

Этот тензор обладает важным свойством: при преобразованиях координат его компоненты преобразуются так же, как величины $A^\mu B^\nu$.

Можно опустить один из индексов в $T^{\mu\nu}$, применяя правило опускания индексов к каждому члену в правой части (1.5). Так образуется $T_\mu{}^\nu$ или $T^\mu{}_\nu$. Опуская оба индекса, получаем величину $T_{\mu\nu}$.

В $T_\mu{}^\nu$ можно положить $\nu=\mu$, что приводит к $T_\mu{}^\mu$. Здесь должно быть произведено суммирование по четырем значениям μ. Далее всегда по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Значит, $T_\mu{}^\mu$ является скаляром; $T_\mu{}^\mu$ тождественно равно $T^\mu{}_\mu$.

Можно продолжить эту процедуру и перемножить более чем два вектора с различными индексами. Таким способом строятся тензоры высшего ранга. Если все векторы контравариантны, то у тензора будут только верхние индексы. Если же опустить некоторые индексы, то получим тензор общего вида с рядом верхних и рядом нижних индексов.

Положим определенный нижний индекс равным определенному верхнему индексу. Тогда должно быть произведено суммирование по всем значениям этого индекса. Он становится немым. Остается тензор, имеющий на два свободных индекса меньше, чем первоначальный. Такую процедуру называют сверткой. Итак, если исходить из тензора четвертого ранга $T^\mu{}_{\nu\rho}{}^\sigma$, то, сворачивая сначала по индексам σ и ρ, получим тензор второго ранга $T^\mu{}_{\nu\rho}{}^\rho$, который имеет только шестнадцать компонент, соответствующих четырем значениям индексов μ и ν. Произведя свертку снова, придем к скаляру $T^{\mu}{}_{\mu\rho}{}^{\rho}$, состоящему из единственной компоненты.

Теперь проясняется смысл выражения «баланс индексов». Каждый свободный индекс появляется в уравнении один и только один раз в каждом члене (слагаемом) уравнения и является всегда (во всех слагаемых) верхним или всегда нижним. Индекс, возникающий дважды в одном члене, является немым и должен находиться один раз в верхнем и один раз в нижнем положении. Его можно заменить любым другим греческим индексом, еще не использованным в этом члене уравнения. Таким образом, $T^{\mu}{}_{\nu\rho}{}^{\rho} = T^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\alpha}$. Индекс никогда не должен появляться более чем дважды в одном члене.

2. НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

Прежде чем перейти к математическому аппарату общей теории относительности, удобно рассмотреть промежуточный формализм — специальную теорию относительности в неортогональных декартовых координатах.

При переходе к неортогональным осям каждая из величин dx^{μ} в выражении (1.1) оказывается линейной функцией новых dx^{μ}, и квадратичная форма (1.1) становится общей квадратичной формой по новым dx^{μ}, которую можно записать в виде

$$g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}, \tag{2.1}$$

где подразумевается суммирование как по μ, так и по ν. Коэффициенты $g_{\mu\nu}$ зависят от выбора неортогональной декартовой системы координат. Мы, конечно, полагаем $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, так как любое различие между $g_{\mu\nu}$ и $g_{\nu\mu}$ не сказалось бы на выражении для квадратичной формы (2.1). Имеется, таким образом, десять независимых коэффициентов $g_{\mu\nu}$.

При преобразованиях координат четыре компоненты A^{μ} произвольного контравариантного вектора преобразуются так же, как dx^{μ}. Тогда $g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}$ является инвариантом. Этот инвариант есть квадрат длины вектора A^{μ}.

Пусть B^{μ} — другой контравариантный вектор; тогда $A^{\mu} + \lambda B^{\mu}$ также является вектором для произвольного значения числа λ. Квадрат его длины есть

$$g_{\mu\nu}(A^{\mu} + \lambda B^{\mu})(A^{\nu} + \lambda B^{\nu}) = g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu} + \lambda(g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} + g_{\mu\nu}A^{\nu}B^{\mu}) + \lambda^2 g_{\mu\nu}B^{\mu}B^{\nu}.$$

Эта величина должна быть инвариантом при всех значениях λ. Отсюда следует, что коэффициенты при λ^0, λ^1 и λ^2 являются инвариантами. Коэффициент при λ^1 имеет вид

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} + g_{\mu\nu}A^{\nu}B^{\mu} = 2\, g_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu},$$

так как во втором члене левой части можно поменять местами μ и ν и воспользоваться условием $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Таким образом, выясняется, что $g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$ является инвариантом. Этот инвариант есть скалярное произведение A^μ и B^μ.

Пусть g — детерминант $g_{\mu\nu}$. Значение g не должно равняться нулю; в противном случае четыре оси не описывают независимые направления в пространстве — времени и не могут быть выбраны в качестве координатных осей. В ортогональных декартовых координатах, рассмотренных в предыдущей главе, диагональные элементы $g_{\mu\nu}$ равны 1, —1, —1, —1, а недиагональные элементы равны нулю. Тогда $g = -1$. В неортогональных декартовых координатах g должен оставаться отрицательным, поскольку неортогональные координаты могут быть получены из ортогональных непрерывным процессом, выражающимся в непрерывном изменении g; следовательно, значение g не может проходить через нуль.

Определим величину A_μ, называемую ковариантным вектором, следующим образом:

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu. \tag{2.2}$$

Так как g не обращается в нуль, эти уравнения позволяют выразить A^ν через A_μ. Пусть результат имеет вид

$$A^\nu = g^{\mu\nu}A_\mu. \tag{2.3}$$

Каждая компонента $g^{\mu\nu}$ равна алгебраическому дополнению соответствующей компоненты $g_{\mu\nu}$ в детерминанте матрицы $g_{\mu\nu}$, деленному на сам детерминант g. Следовательно, $g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$.

Подставим в (2.2) выражение для A^ν из (2.3). Чтобы не получить три одинаковых индекса в одном члене, нужно заменить немой индекс μ в (2.3) каким-нибудь другим греческим индексом, скажем ρ. Тогда получим

$$A_\mu = g_{\mu\nu}g^{\nu\rho}A_\rho.$$

Так как это соотношение должно иметь место для произвольной четырехкомпонентной величины A_μ, заключаем, что

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = g_\mu^\rho, \tag{2.4}$$

где

$$g_\mu^\rho = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mu = \rho; \\ 0 & \text{при} \quad \mu \neq \rho. \end{cases} \tag{2.5}$$

При помощи формулы (2.2) можно опустить у тензора любой верхний индекс; при помощи формулы (2.3) можно поднять любой нижний индекс. Если определенный индекс поднять и снова опустить, то, согласно (2.4) и (2.5), тензор не изменится. Заметим, что g_μ^ρ просто производит замену μ индексом ρ:

$$g^{\rho}_{\mu} A^{\mu} = A^{\rho}$$

или ρ индексом μ:

$$g^{\rho}_{\mu} A_{\rho} = A_{\mu}.$$

Применив правило поднятия индекса к μ в $g_{\mu\nu}$, получим

$$g^{\alpha}{}_{\nu} = g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu}.$$

Это согласуется с (2.4), если принять во внимание, что вследствие симметрии $g_{\mu\nu}$ индексы в $g^{\alpha}{}_{\nu}$ можно писать один под другим. Поднимая далее по тому же правилу индекс ν, имеем

$$g^{\alpha\beta} = g^{\nu\beta} g^{\alpha}_{\nu}.$$

Этот результат непосредственно следует из (2.5). Правила поднятия и опускания индексов применимы ко всем индексам в $g_{\mu\nu}$, g^{μ}_{ν}, $g^{\mu\nu}$.

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Теперь перейдем к системам криволинейных координат. Рассмотрим величины, локализованные в точке пространства — времени. Это могут быть многокомпонентные величины с компонентами, отнесенными к координатным осям в данной точке. Если подобная величина существует во всех точках пространства, ее называют полевой величиной.

Полевую величину Q (или одну из ее компонент, если их несколько) можно продифференцировать по любой из четырех координат. Запишем результат:

$$\partial Q / \partial x^{\mu} = Q_{,\mu}.$$

Нижний индекс через запятую всегда будет обозначать такую производную. Индекс μ помещен внизу, так как верхний индекс в левой части находится в знаменателе. Изменение Q при переходе от точки x^{μ} к близлежащей точке $x^{\mu} + \delta x^{\mu}$ имеет вид

$$\delta Q = Q_{,\mu} \delta x^{\mu}. \tag{3.1}$$

Видно, что условие баланса индексов выполнено.

Нам понадобятся локализованные в точке векторы и тензоры с компонентами, отнесенными к координатным осям в этой точке. При преобразованиях координат компоненты таких величин преобразуются по тому же закону, что и в предыдущем разделе, но зависящему от преобразования координат в рассматриваемой точке. Получим, как и прежде, величины $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$ с нижними и верхними индексами. Однако они больше не константы, а меняются от точки к точке, т. е. являются полевыми величинами.

Рассмотрим результат специального преобразования координат. Пусть каждая из новых криволинейных координат x'^{μ} есть функция четырех x^{μ}. Удобнее писать $x^{\mu'}$, где штрих стоит при индексе, а не при основном символе.

Варьируя x^{μ}, получаем четыре величины δx^{μ}, образующие контравариантный вектор. Компоненты этого вектора в новых координатах, согласно (3.1), имеют вид

$$\delta x^{\mu'} = (\partial x^{\mu'}/\partial x^{\nu})\,\delta x^{\nu} = x^{\mu'}_{,\,\nu}\,\delta x^{\nu}.$$

Отсюда получаем закон преобразования любого контравариантного вектора A^{ν}

$$A^{\mu'} = x^{\mu'}_{,\,\nu} A^{\nu}. \tag{3.2}$$

Переставив новую и исходную системы координат и изменив индексы, получим

$$A^{\lambda} = x^{\lambda}_{,\,\mu'} A^{\mu'}. \tag{3.3}$$

Из свойств дифференцирования в частных производных известно, что [в обозначениях (2.5)]

$$(\partial x^{\lambda}/\partial x^{\mu'})(\partial x^{\mu'}/\partial x^{\nu}) = g^{\lambda}_{\nu}.$$

Таким образом,

$$x^{\lambda}_{,\,\mu'} x^{\mu'}_{,\,\nu} = g^{\lambda}_{\nu}. \tag{3.4}$$

Это позволяет увидеть согласованность (3.2) и (3.3), так как подстановка (3.2) в правую часть (3.3) дает

$$x^{\lambda}_{,\,\mu'} x^{\mu'}_{,\,\nu} A^{\nu} = g^{\lambda}_{\nu} A^{\nu} = A^{\lambda}.$$

Чтобы выяснить, как преобразуется ковариантный вектор B_{μ}, используем условие инвариантности величины $A^{\mu}B_{\mu}$. С учетом (3.3) запишем:

$$A^{\mu'} B_{\mu'} = A^{\lambda} B_{\lambda} = x^{\lambda}_{,\,\mu'} A^{\mu'} B_{\lambda}.$$

Этот результат должен оставаться справедливым для всех значений четырех величин $A^{\mu'}$, поэтому, приравняв коэффициенты при $A^{\mu'}$, можно получить

$$B_{\mu'} = x^{\lambda}_{,\,\mu'} B_{\lambda}. \tag{3.5}$$

Формулы (3.2) и (3.5) позволяют теперь преобразовывать произвольный тензор с любым числом верхних и нижних индексов. Коэффициенты типа $x^{\mu'}_{,\nu}$ и $x^{\lambda}_{,\mu'}$ как раз и должны быть использованы для каждого верхнего и нижнего индекса соответственно с соблюдением баланса индексов, например:

$$T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'} = x^{\alpha'}_{,\,\lambda} x^{\beta'}_{,\,\mu} x^{\nu}_{,\,\gamma'} T^{\lambda\mu}{}_{\nu}. \tag{3.6}$$

Любая величина, преобразующаяся по такому закону, есть тензор. Соотношение (3.6) можно считать определением тензора.

Заметим, что для тензора существенна симметрия или антисимметрия по индексам типа λ и μ, так как это свойство сохраняется при преобразовании координат.

Формулу (3.4) можно переписать в виде

$$x^{\lambda}_{,\alpha'} x^{\beta'}_{,\nu} g^{\alpha'}_{\beta'} = g^{\lambda}_{\nu},$$

откуда следует, что g^{λ}_{ν} есть тензор. Для произвольных векторов A^{μ}, B^{ν} имеем

$$g_{\alpha'\beta'} A^{\alpha'} B^{\beta'} = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu}_{,\alpha'} x^{\nu}_{,\beta'} A^{\alpha'} B^{\beta'}.$$

Так как это справедливо для всех значений $A^{\alpha'}$ и $B^{\beta'}$, заключаем, что

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\mu\nu} x^{\mu}_{,\alpha'} x^{\nu}_{,\beta'}. \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что $g_{\mu\nu}$ является тензором. Аналогично можно показать, что $g^{\mu\nu}$ — тензор. Эти величины называют фундаментальными тензорами.

Произвольную скалярную полевую величину можно считать как функцией четырех x^{μ}, так и функцией четырех x_{μ}. Согласно свойствам операции дифференцирования в частных производных

$$S_{,\mu'} = S_{,\lambda} x^{\lambda}_{,\mu'}.$$

Следовательно, $S_{,\lambda}$ преобразуется, как B_{λ} из уравнения (3.5), и, таким образом, производная от скалярного поля является ковариантным векторным полем.

4. НЕТЕНЗОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Существуют величины $N^{\mu}{}_{\nu\rho\ldots}$ с различными верхними и нижними индексами, которые не являются тензорами. При преобразованиях координат тензорная величина должна преобразовываться по закону вида (3.6). В противном случае эта величина — не тензор. Тензор обладает тем свойством, что если все его компоненты обращаются в нуль в одной системе координат, то они равны нулю и в любой другой. Для нетензоров это не обязательно так.

Поднимать и опускать индексы нетензорных величин можно по тем же правилам, что и для тензоров. Так,

$$g^{\alpha\nu} N^{\mu}{}_{\nu\rho} = N^{\mu\alpha}{}_{\rho}.$$

Эти правила фактически никак не связаны с законами преобразования к новой системе координат. При определении нетензорных величин с тем же успехом можно не делать различия между верхними и нижними индексами.

Тензоры и нетензоры могут стоять вместе в одном уравнении. Балас индексов понимают для нетензоров так же, как для тензоров.

Теорема о частном. Пусть величина $P_{\lambda\mu\nu}$ такова, что $A^\lambda P_{\lambda\mu\nu}$ является тензором для любого вектора A^ν. В этом случае $P_{\lambda\mu\nu}$ — тензор.

Чтобы доказать это, введем $Q_{\mu\nu} = A^\lambda P_{\lambda\mu\nu}$. По условию $Q_{\mu\nu}$ есть тензор, поэтому

$$Q_{\beta\gamma} = Q_{\mu'\nu'}\, x^{\mu'}_{,\,\beta}\, x^{\nu'}_{,\,\gamma}.$$

Тогда

$$A^\alpha P_{\alpha\beta\gamma} = A^{\lambda'} P_{\lambda'\mu'\gamma'}\, x^{\mu'}_{,\,\beta}\, x^{\nu'}_{,\,\gamma}.$$

Так как A^λ — вектор, из (3.2) имеем:

$$A^{\lambda'} = A^\alpha x^{\lambda'}_{,\,\alpha}.$$

Таким образом,

$$A^\alpha P_{\alpha\beta\gamma} = A^\alpha x^{\lambda'}_{,\,\alpha} P_{\lambda'\mu'\nu'}\, x^{\mu'}_{,\,\beta}\, x^{\nu'}_{,\,\gamma}.$$

Это равенство должно выполняться для всех значений A^α; следовательно,

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P_{\lambda'\mu'\nu'}\, x^{\lambda'}_{,\,\alpha} x^{\mu'}_{,\beta} x^{\nu'}_{,\gamma}.$$

Видно, что $P_{\alpha\beta\gamma}$ — тензор.

Теорема остается справедливой для величины с произвольным числом нижних и верхних индексов.

5. ИСКРИВЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Двухмерное искривленное пространство легко себе представить как поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Аналогичным образом можно иметь дело с искривленным четырехмерным пространством в плоском пространстве большего числа измерений. В этом случае искривленное пространство называют римановым. Малая область риманова пространства близка к плоскому пространству.

Эйнштейн предположил, что физическое пространство является пространством именно такой природы, и поэтому положил риманову геометрию в основу теории гравитации.

В искривленном пространстве нельзя ввести систему прямолинейных координат. Приходится пользоваться криволинейными координатами типа рассмотренных в разд. 3. Формализм этого раздела можно целиком применить к искривленному пространству, так как все обсуждавшиеся там уравнения являются локальными, что делает их нечувствительными к кривизне.

Инвариантный интервал ds между точкой x^μ и близлежащей точкой $x^\mu + dx^\mu$ дается выражением вида (2.1):

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu.$$

Интервал ds для вроемениподобных точек является действительным, для пространственно-подобных точек — мнимым.

В криволинейных координатах $g_{\mu\nu}$, заданная как функция координат, фиксирует все элементы инвариантного расстояния; таким образом, $g_{\mu\nu}$ задает метрику. Величина $g_{\mu\nu}$ определяет как координатную систему, так и кривизну пространства.

6. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Пусть вектор A^μ локализован в точке P. Если пространство искривлено, понятие параллельного вектора в другой точке Q лишено смысла, в чем легко убедиться на примере искривленного двухмерного пространства в трехмерном евклидовом пространстве. Однако в точке P', близкой к P, существует вектор, параллельный A^μ с точностью до членов второго порядка по расстоянию между точками P и P'. Тогда можно придать смысл операции переноса вектора A^μ из точки P в точку P', оставляющей вектор параллельным самому себе и не изменяющей его длины.

При помощи операции параллельного переноса можно непрерывно перемещать вектор вдоль некоторой траектории. Выбрав траекторию от P до Q, получим вектор в точке Q, параллельный, в смысле данной траектории, исходному вектору в точке P. Другая траектория даст иной результат. Понятие вектора в точке Q, параллельного исходному вектору в точке P, не является абсолютным. Если произвести параллельный перенос вектора из точки P вдоль замкнутой траектории, то получим снова вектор в точке P, который, вообще говоря, отличается от исходного направлением.

Уравнения для параллельного переноса вектора можно получить, предположив, что наше четырехмерное физическое пространство находится в плоском пространстве большего числа, скажем N, измерений. Введем в этом N-мерном пространстве прямолинейные координаты $z^n (n=1, 2, ..., N)$. Эти координаты могут быть неортогональными. Для двух близлежащих точек существует инвариантное расстояние:

$$ds^2 = h_{nm} dz^n dz^m, \tag{6.1}$$

где суммирование по n и m ведется от 1 до N. В отличие от $g_{\mu\nu}$ величины h_{nm} являются константами. С их помощью можно опускать индексы в N-мерном пространстве:

$$dz_n = h_{nm} dz^m.$$

Физическое пространство образует четырехмерную «поверхность» в плоском N-мерном пространстве. Каждая точка x^μ этой поверхности определяет некоторую точку y^n в N-мерном пространстве. Каждая координата y^n является функцией четырех x^μ. Уравнения поверхности задаются путем исключения x^μ из N функций $y^n(x)$. Таких уравнений $N-4$.

Дифференцируя $y^n(x)$ по параметрам x^μ, получаем

$$\partial y^n(x)/\partial x^\mu = y^n_{,\mu}.$$

Для двух близких точек поверхности, различающихся на δx^μ, имеем

$$\delta y^n = y^n_{,\mu}\,\delta x^\mu. \tag{6.2}$$

Согласно (6.1), квадрат инвариантного расстояния между этими точками имеет вид

$$\delta s^2 = h_{nm}\delta y^n\delta y^m = h_{nm}y^n_{,\mu}\,y^m_{,\nu}\,\delta x^\mu\,\delta x^\nu.$$

Поскольку h_{nm} — константы, то δs^2 можно записать в виде

$$\delta s^2 = y^n_{,\mu}\,y_{n,\nu}\,\delta x^\mu\delta x^\nu.$$

Кроме того,

$$\delta s^2 = g_{\mu\nu}\,\delta x^\mu\,\delta x^\nu.$$

Отсюда получаем, что

$$g_{\mu\nu} = y^n_{,\mu}\,y_{n,\nu}. \tag{6.3}$$

Рассмотрим в физическом пространстве контравариантный вектор A^μ, локализованный в точке x. Компоненты A^μ преобразуются так же, как δx^μ из (6.2), и из них, следовательно, можно образовать соответствующий контравариантный вектор A^n в N-мерном пространстве, преобразующийся так же, как δy^n из (6.2). Тогда

$$A^n = y^n_{,\mu}\,A^\mu. \tag{6.4}$$

Вектор A^n, разумеется, принадлежит поверхности.

Сместим теперь A^n в соседнюю точку поверхности $x+dx$, оставляя его параллельным самому себе (это означает, что компоненты A^n остаются неизменными). Вследствие кривизны пространства вектор в точке $x+dx$ уже не принадлежит поверхности. Однако его проекция на поверхность задает определенный вектор, принадлежащий поверхности.

Для нахождения проекции на поверхность нужно разложить вектор на тангенциальную и нормальную составляющие, и затем нормальную составляющую отбросить:

$$A^n = A^n_{\tan} + A^n_{\mathrm{nor}}. \tag{6.5}$$

Если обозначить K^μ компоненты $A^n_{\tan}$ в координатной системе x, принадлежащей поверхности, то в соответствии с (6.4) можно записать:

$$A^n_{\tan} = K^\mu\,y^n_{,\mu}(x+dx), \tag{6.6}$$

где коэффициенты $y^n_{,\mu}$ взяты в новой точке $x+dx$.

Составляющая $A^n_{\text{пор}}$ по самому определению ортогональна любому тангенциальному вектору в точке $x+dx$ и, следовательно, любому вектору типа правой части (6.6) независимо от вида K^μ. Тогда

$$A^n_{\text{пор}}\, y_{n,\mu}(x+dx)=0.$$

Если теперь умножить (6.5) на $y_{n,\nu}\,(x+dx)$, то член с $A^n_{\text{пор}}$ исчезает, и с учетом (6.3) получим

$$A^n\, y_{n,\nu}\,(x+dx)=K^\mu\, y^n_{,\mu}\,(x+dx)\, y_{n,\nu}\,(x+dx)=K^\mu\, g_{\mu\nu}\,(x+dx).$$

Таким образом, с точностью до величин первого порядка по dx находим:

$$K_\nu(x+dx)=A^n\,[y_{n,\nu}\,(x)+y_{n,\nu,\sigma}\,dx^\sigma]=A^n\, y^n_{,\mu}\,[y_{n,\nu}+y_{n,\nu,\sigma}\,dx^\sigma]=$$
$$=A_\nu+A^\mu\, y^n_{,\mu}\, y_{n,\nu,\sigma}\,dx^\sigma.$$

Так как K_ν есть результат параллельного переноса A_ν в точку $x+dx$, можно положить

$$K_\nu-A_\nu=dA_\nu,$$

так что dA_ν обозначает изменение A_ν при параллельном переносе. Тогда имеем

$$dA_\nu=A^\mu\, y^n_{,\mu}\, y_{n,\nu,\sigma}\,dx^\sigma. \tag{6.7}$$

7. СИМВОЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ

Дифференцируя (6.3), получаем (вторая запятая при двукратном дифференцировании опущена)

$$g_{\mu\nu,\sigma}=y^n_{,\mu\sigma}\, y_{n,\nu}+y^n_{,\mu}\, y_{n,\nu\sigma}=y_{n,\mu\sigma}\, y^n_{,\nu}+y_{n,\nu\sigma}\, y^n_{,\mu}, \tag{7.1}$$

поскольку немой индекс n вследствие постоянства h_{nm} можно поднять и опустить. Меняя местами μ и σ в (7.1), получаем

$$g_{\sigma\nu,\mu}=y_{n,\sigma\mu}\, y^n_{,\nu}+y_{n,\nu\mu}\, y^n_{,\sigma}. \tag{7.2}$$

Переставляя ν и σ в (7.1), имеем

$$g_{\mu\sigma,\nu}=y_{n,\mu\nu}\, y^n_{,\sigma}+y_{n,\sigma\nu}\, y^n_{,\mu}. \tag{7.3}$$

Теперь сложим (7.1) и (7.3), вычтем из полученного уравнения (7.2) и разделим пополам. В результате получим:

$$(1/2)\,(g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\mu})=y_{n,\nu\sigma}\, y^n_{,\mu}. \tag{7.4}$$

Положим

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma}=(1/2)\,(g_{\mu\nu,\sigma}+g_{\mu\sigma,\nu}-g_{\nu\sigma,\mu}). \tag{7.5}$$

Эту величину называют символом Кристоффеля первого типа. Она симметрична по двум последним индексам. Символ Кристоффеля первого типа не является тензором. Из (7.5) непосредственно следует:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma}. \tag{7.6}$$

Теперь ясно, что (6.7) можно записать в виде

$$dA_\nu = A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma}\, dx^\sigma. \tag{7.7}$$

Это уже не относится к N-мерному пространству, так как символ Кристоффеля выражается только через метрический тензор $g_{\mu\nu}$ физического пространства.

Можно показать, что длина вектора не изменяется при параллельном переносе. Действительно:

$$\begin{aligned} d(g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu) &= g^{\mu\nu} A_\mu\, dA_\nu + g^{\mu\nu} A_\nu\, dA_\mu + A_\mu A_\nu\, g^{\mu\nu}{}_{,\sigma}\, dx^\sigma = \\ &= A^\nu dA_\nu + A^\mu dA_\mu + A_\alpha A_\beta\, g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}\, dx^\sigma = A^\nu A^\mu \Gamma_{\mu\nu\sigma}\, dx^\sigma + \\ &+ A^\mu A^\nu \Gamma_{\nu\mu\sigma}\, dx^\sigma + A_\alpha A_\beta\, g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}\, dx^\sigma = A^\nu A^\mu g_{\mu\nu,\sigma}\, dx^\sigma + \\ &+ A_\alpha A_\beta\, g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma}\, dx^\sigma. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Далее, $g^{\alpha\mu}{}_{,\sigma} g_{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu,\sigma} = (g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu})_{,\sigma} = g^{\alpha}_{\nu,\sigma} = 0$. Умножая на $g^{\beta\nu}$, получаем

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = -\,g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g_{\mu\nu,\sigma}. \tag{7.9}$$

Это полезное соотношение выражает производную $g^{\alpha\beta}$ через производную $g_{\mu\nu}$. Отсюда

$$A_\alpha A_\beta\, g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = -\,A^\mu A^\nu g_{\mu\nu,\sigma}.$$

Следовательно, выражение (7.8) обращается в нуль. Таким образом, длина вектора не изменяется. В частности, нулевой вектор (т. е. вектор нулевой длины) при параллельном переносе остается нулевым.

Постоянство длины вектора при параллельном переносе следует также из геометрических соображений. При разложении вектора A^μ на тангенциальную и нормальную составляющие, согласно (6.5), нормальная составляющая инфинитезимальна и ортогональна тангенциальной составляющей. Значит, в первом приближении длина вектора равна длине его тангенциальной составляющей.

Постоянство длины произвольного вектора влечет за собой постоянство скалярного произведения $g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu$ двух произвольных векторов A и B. Это можно показать, используя постоянство длины вектора $A + \lambda B$ при произвольном значении параметра λ.

Часто бывает полезно поднять первый индекс символа Кристоффеля так, чтобы образовать величину

$$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = g^{\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\nu\sigma},$$

которую называют символом Кристоффеля второго типа. Она симметрична по двум нижним индексам. Как пояснялось в разд. 4, операция поднятия индекса определена и для нетензорных величин.

Формулу (7.7) можно переписать в виде

$$dA_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\sigma} A_\mu dx^\sigma . \tag{7.10}$$

Это стандартная запись в ковариантных компонентах. Введя второй вектор B^ν, получим

$$d(A_\nu B^\nu) = 0;$$

$$A_\nu dB^\nu = -B^\nu dA_\nu = -B^\nu \Gamma^\mu_{\nu\sigma} A_\mu dx^\sigma = -B^\mu \Gamma^\nu_{\mu\sigma} A_\nu dx^\sigma .$$

Последнее соотношение справедливо для произвольного A_ν. Тогда

$$dB^\nu = -\Gamma^\nu_{\mu\sigma} B^\mu dx^\sigma . \tag{7.11}$$

Это — стандартная запись для параллельного переноса в контравариантных компонентах.

8. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Пусть точка с координатами z^μ движется по какой-либо траектории, тогда z^μ является функцией некоторого параметра τ. Положим $dz^\mu/d\tau = u^\mu$.

Имеется, таким образом, вектор u^μ, определенный в каждой точке траектории. Предположим, что при движении вдоль траектории вектор u^μ смещается посредством параллельного переноса. Тогда задание начальной точки и начального значения вектора u^μ определяет всю траекторию. Действительно, надо сместить начальную точку из z^μ в $z^\mu + u^\mu d\tau$, затем посредством параллельного переноса сместить в эту новую точку вектор u^μ, потом снова сместить точку в направлении, заданном новым вектором u^μ, и т. д. Определена не только траектория, но и параметр τ вдоль нее. Траекторию, полученную таким способом, называют геодезической.

Если u^μ в начальной точке является нулевым вектором, то он останется нулевым вектором во всех других точках; в этом случае траекторию называют нулевой геодезической. Если u в начальной точке — времениподобный вектор ($u^\mu u_\mu > 0$), то он останется времениподобным вектором во всех других точках, и мы имеем времениподобную геодезическую. Соответственно, если u^μ в начальной точке является пространственно-подобным вектором ($u^\mu u_\mu < 0$), то он останется пространственно-подобным во всех других точках, и мы получим пространственно-подобную геодезическую.

Обратившись к уравнению (7.11) с $B_\nu = u^\nu$ и $dx^\sigma = dz^\sigma$, получим уравнения геодезической:

$$du^\nu/d\tau + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} u^\mu dz^\sigma/d\tau = 0, \tag{8.1}$$

или

$$d^2z^\nu/d\tau^2 + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} (dz^\mu/d\tau)\, dz^\sigma/d\tau = 0. \tag{8.2}$$

Для времениподобной геодезической можно привести длину начального вектора u^μ к единице, умножив его на соответствующий множитель. Для этого потребуется лишь изменить масштаб τ. Теперь вектор u^μ всегда будет иметь единичную длину. Он представляет собой вектор скорости $v^\mu = dz^\mu/ds$, а параметр τ становится собственным временем s.

Уравнение (8.1) приобретает вид

$$dv^\mu/ds + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\nu v^\sigma = 0, \tag{8.3}$$

а уравнение (8.2) — вид

$$d^2z^\mu/ds^2 + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} (dz^\nu/ds)\, dz^\sigma/ds = 0. \tag{8.4}$$

Предположим, что мировая линия частицы, не находящейся под воздействием каких-либо сил, кроме гравитационных, есть времениподобная геодезическая. Это заменяет первый закон Ньютона. Уравнение (8.4) задает ускорение и является уравнением движения.

Предположим также, что траектория светового луча есть нулевая геодезическая. Она задается уравнением (8.2) с некоторым параметром τ вдоль траектории. Собственное время s в этом случае использовать нельзя, поскольку ds обращается в нуль.

9. СВОЙСТВО СТАЦИОНАРНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Геодезическая, не являющаяся нулевой, обладает следующим свойством: интеграл $\int ds$, взятый вдоль участка траектории с граничными точками P и Q, при малых вариациях траектории с фиксированными граничными точками постоянен.

Пусть каждая точка траектории с координатами z^μ смещена в точку с координатами $z^\mu + \delta z^\mu$. Если смещение вдоль траектории обозначить dx^μ:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu ,$$

то

$$2ds\, \delta(ds) = dx^\mu dx^\nu \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} dx^\mu \delta dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\nu \delta dx^\mu =$$

$$= dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu,\lambda} \delta x^\lambda + 2g_{\mu\lambda} dx^\mu \delta dx^\lambda .$$

Кроме того,

$$\delta dx^\lambda = d\delta x^\lambda .$$

Таким образом, поскольку $dx^\mu = v^\mu ds$, то

$$\delta(ds) = [(1/2) g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu \delta x^\lambda + g_{\mu\lambda} v^\mu d\delta x^\lambda/ds]\, ds.$$

Следовательно,

$$\delta \int ds = \int \delta(ds) = \int [(1/2) g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu \delta x^\lambda + g_{\mu\lambda} v^\mu d\delta x^\lambda/ds]\, ds.$$

Интегрируя по частям и используя условие $\delta x^\lambda = 0$ в граничных точках P и Q, получаем

$$\delta \int ds = \int [(1/2) g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu - (d/ds)(g_{\mu\lambda} v^\mu)]\, dx^\lambda ds. \tag{9.1}$$

Условием обращения (9.1) в нуль при произвольном δx^λ является

$$(d/ds)(g_{\mu\lambda} v^\mu) - (1/2) g_{\mu\nu,\lambda} v^\mu v^\nu = 0 \tag{9.2}$$

Далее,

$$(d/ds)(g_{\mu\lambda} v^\mu) = g_{\mu\lambda} dv^\mu/ds + g_{\mu\lambda,\nu} v^\mu v^\nu = g_{\mu\lambda} dv^\mu/ds +$$
$$+ (1/2)(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu}) v^\mu v^\nu .$$

Тогда условие (9.2) принимает вид

$$g_{\mu\lambda} dv^\mu/ds + \Gamma_{\lambda\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0.$$

Умножив это уравнение на $g^{\lambda\sigma}$, можем записать:

$$dv^\sigma/ds + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0,$$

т. е. как раз условие (8.3) для геодезической.

Отсюда видно, что для геодезической выражение (9.1) обращается в нуль и $\int ds = \text{const}$. И наоборот, если $\int ds$ постоянен, можно показать, что траектория является геодезической. Таким образом, условие постоянства $\int ds$ можно использовать как определение геодезической, за исключением случая нулевой геодезической.

10. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Пусть S — скалярное поле. Тогда, как было показано в разд. 3, $S_{,\nu}$ есть ковариантный вектор. Далее, пусть A_μ — векторное поле. Является ли его производная $A_{\mu,\nu}$ тензором?

Чтобы ответить на этот вопрос, посмотрим, как преобразуется $A_{\mu,\nu}$ при преобразованиях координат. В обозначениях разд. 3 A_μ преобразуется, согласно уравнению (3.5):

$$A_{\mu'} = A_\rho x^\rho_{,\mu'} ,$$

и, следовательно,

$$A_{\mu',\nu'} = (A_\rho x^\rho_{,\mu'})_{,\nu'} = A_{\rho,\sigma} x^\sigma_{,\nu'} x^\rho_{,\mu'} + A_\rho x^\rho_{,\mu'\nu'} .$$

Это выражение является точным законом преобразования тензора, если в правой части отсутствует последний член. Значит, $_{\mu,\nu}$ — не тензор.

Можно, однако, модифицировать операцию дифференцирования так, чтобы получить тензор. Возьмем вектор A_μ в точке x и сместим его посредством параллельного переноса в точку $x+dx$. При этом A остается вектором. Вычтем его из вектора A в точке $x+dx$ — разность тоже является вектором. В первом приближении получим

$$A_\mu(x+dx) - [A_\mu(x) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha dx^\nu] = (A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha)\, dx^\nu .$$

Эта величина есть вектор для произвольного вектора dx^ν, следовательно, согласно теореме о частном (см. разд. 4), коэффициент $A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha$ является тензором. Легко проверить непосредственно, что при преобразованиях координат он преобразуется по тензорному закону. Это выражение называется ковариантной производной A_μ и записывается в виде

$$A_{\mu:\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A_\alpha . \qquad (10.1)$$

Знак «:» перед нижним индексом далее будет обозначать ковариантную производную, подобно тому, как запятая обозначает обычную производную.

Пусть B_ν — некоторый другой вектор. Определим ковариантную производную внешнего произведения как

$$(A_\mu B_\nu)_{:\sigma} = A_{\mu:\sigma} B_\nu + A_\mu B_{\nu:\sigma} . \qquad (10.2)$$

Очевидно, что это тензор с тремя индексами. Его явный вид есть

$$(A_\mu B_\nu)_{:\sigma} = (A_{\mu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A_\alpha) B_\nu + A_\mu (B_{\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} B_\alpha) =$$
$$= (A_\mu B_\nu)_{,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} A_\alpha B_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} A_\mu B_\alpha .$$

Пусть $T_{\mu\nu}$ — тензор с двумя индексами. Он выражается в виде суммы членов вида $A_\mu B_\nu$; тогда его ковариантная производная записывается так:

$$T_{\mu\nu:\sigma} = T_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} T_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} T_{\mu\alpha} . \qquad (10.3)$$

Это правило можно обобщить для случая ковариантной производной тензора с любым числом нижних индексов:

$$Y_{\mu\nu\ldots:\sigma} = Y_{\mu\nu\ldots,\sigma} - \Gamma\text{-член для каждого индекса.} \qquad (10.4)$$

В каждом из этих Г-членов нужно выполнить условие баланса индексов. Этого достаточно для однозначной расстановки индексов. Ковариантная производная скаляра получается из общей формулы (10.4) при нулевом числе индексов в Y:

$$Y_{:\sigma} = Y_{,\sigma} . \qquad (10.5)$$

Применим (10.3) к фундаментальному тензору $g_{\mu\nu}$. С учетом (7.6) это дает

$$g_{\mu\nu:\sigma} = g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} g_{\mu\alpha} = g_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma_{\nu\mu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu\sigma} = 0.$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании $g_{\mu\nu}$ можно рассматривать как константу.

Формула (10.2) представляет собой обычное правило, используемое при дифференцировании произведения. Предположим, что это правило справедливо и для ковариантной производной скалярного произведения двух векторов. Тогда

$$(A^{\mu} B_{\mu})_{:\sigma} = A^{\mu}{}_{:\sigma} B_{\mu} + A^{\mu} B_{\mu:\sigma} . \tag{10.6}$$

Отсюда, согласно (10.5) и (10.1), получаем

$$(A^{\mu} B_{\mu})_{,\sigma} = A^{\mu}{}_{:\sigma} B_{\mu} + A^{\mu} (B_{\mu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} B_{\alpha}) ,$$

следовательно,

$$A^{\mu}_{,\sigma} B_{\mu} = A^{\mu}{}_{:\sigma} B_{\mu} - A^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} B_{\mu} .$$

Так как это справедливо для произвольного B_{μ}, имеем:

$$A^{\mu}{}_{:\sigma} = A^{\mu}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} A^{\alpha} , \tag{10.7}$$

что является стандартным выражением для ковариантной производной контравариантного вектора. Здесь возникает тот же символ Кристоффеля, что и в стандартной формуле (10.1) для ковариантного вектора, но со знаком плюс. Расположение индексов полностью определяется требованиями баланса индексов.

Этот формализм можно обобщить на случай ковариантной производной тензора с любым числом верхних и нижних индексов. Г-члены возникают для каждого индекса (со знаком плюс для верхнего и со знаком минус для нижнего индексов соответственно). Если свернуть два индекса, то соответствующие Г-члены сократятся.

Формула для ковариантной производной произведения

$$(XY)_{:\sigma} = X_{:\sigma} Y + XY_{:\sigma} \tag{10.8}$$

справедлива в самом общем случае для любых тензорных величин X и Y. Поскольку $g_{\mu\nu}$ при ковариантном дифференцировании ведет себя как константа, индексы можно поднимать и опускать до дифференцирования: результат будет тот же, что и при перемещении их после дифференцирования.

Ковариантная производная нетензорной величины не имеет смысла.

Физические законы должны быть справедливы во всех системах координат. Значит, они должны выржаться в виде тензорных уравнений. Если уравнения содержат производные полевых величин, то это должны быть ковариантные производные. Полевые уравнения получаются заменой обычных производных ковариантными. Например, уравнение Даламбера $\Box V = 0$ для скалярного поля V в ковариантной форме принимает вид

$$g^{\mu\nu} V_{:\mu:\nu} = 0.$$

С учетом (10.1) и (10.5) это дает:

$$g^{\mu\nu}(V_{,\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha})=0. \qquad (10.9)$$

Даже если рассматривать задачу в плоском пространстве (т. е. в пренебрежении гравитационным полем) и использовать криволинейные координаты, следует записывать уравнения в терминах ковариантных производных, чтобы они сохраняли свой вид во всех системах координат.

11. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

Из формулы для дифференцирования произведения (10.8) видно, что в этом отношении ковариантное дифференцирование вполне аналогично обычному. Однако важное свойство обычного дифференцирования, которое заключается в том, что при действии двух операторов дифференцирования их порядок не имеет значения, для ковариантного дифференцирования в общем случае не сохраняется.

Начнем с рассмотрения скалярного поля S. Из (10.1) имеем

$$S_{:\mu:\nu}=S_{:\mu,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}S_{:\alpha}=S_{,\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}S_{,\alpha}\,. \qquad (11.1)$$

Полученное выражение симметрично по индексам μ и ν, так что в этом случае порядок операторов ковариантного дифференцирования не имеет значения.

Теперь подействуем двумя операторами ковариантного дифференцирования на вектор A_ν. Из формулы (10.3) с $A_{\nu:\rho}$ вместо $T_{\nu\rho}$ находим

$$A_{\nu:\rho:\sigma}=A_{\nu:\rho,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\alpha:\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}A_{\nu:\alpha}=\left(A_{\nu,\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}A_{\alpha}\right)_{,\sigma}-$$
$$-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\left(A_{\alpha,\rho}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}A_{\beta}\right)-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\left(A_{\nu,\alpha}-\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}A_{\beta}\right)=A_{\nu,\rho,\sigma},-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}A_{\alpha,\sigma}-$$
$$-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}A_{\alpha,\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}A_{\nu,\alpha}-A_{\beta}\left(\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).$$

Переставляя индексы ρ и σ и вычитая получившееся выражение из предыдущего, получаем

$$A_{\nu:\rho:\sigma}-A_{\nu:\sigma:\rho}=A_{\beta}R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}\,, \qquad (11.2)$$

где

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}=\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho}-\Gamma^{\beta}_{\nu\rho,\sigma}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\rho}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\,. \qquad (11.3)$$

Левая часть (11.2) является тензором. Следовательно, и правая часть (11.2) есть тензор. Это справедливо для произвольного вектора A_β, поэтому, согласно теореме о частном (см. разд. 4), $R^{\beta}_{\nu\rho\sigma}$ — тензор. Его называют тензором Римана — Кристоффеля, или тензором кривизны.

Тензор кривизны обладает очевидным свойством:

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = -R^{\beta}_{\nu\sigma\rho}. \tag{11.4}$$

Из (11.3) непосредственно следует, что

$$R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} + R^{\beta}_{\rho\sigma\nu} + R^{\beta}_{\sigma\nu\rho} = 0. \tag{11.5}$$

Опустим индекс β на место первого нижнего индекса. Это даст

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta} R^{\beta}_{\nu\rho\sigma} = g_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu\alpha\rho} - \langle\rho\sigma\rangle,$$

где $\langle\rho\sigma\rangle$ обозначает предыдущие члены с переставленными местами ρ и σ. Тогда из (7.6) получим

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho} - g_{\mu\beta,\rho} \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} + \Gamma_{\mu\beta\rho} \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} - \langle\rho\sigma\rangle =$$

$$= \Gamma_{\mu\nu\sigma,\rho} - \Gamma_{\beta\mu\rho} \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} - \langle\rho\sigma\rangle.$$

С учетом (7.5)

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = (1/2)\left(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\nu\rho,\mu\sigma}\right) +$$

$$+ \Gamma_{\beta\mu\sigma} \Gamma^{\beta}_{\nu\rho} - \Gamma_{\beta\mu\rho} \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}. \tag{11.6}$$

Теперь видны еще некоторые свойства симметрии тензора кривизны, а именно:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} \tag{11.7}$$

и

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}. \tag{11.8}$$

Результатом всех этих свойств симметрии является то, что из 256 компонент $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ независимыми являются лишь 20.

12. КРИТЕРИИ ПЛОСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Если пространство является плоским, можно выбрать прямолинейную систему координат; тогда $g_{\mu\nu}$ будет константой и, следовательно, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ обратится в нуль.

И, наоборт, если $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ обращается в нуль, можно показать, что пространство является плоским. Вектор A_{μ}, расположенный в точке x, сместим посредством параллельного переноса в точку $x+dx$. Затем сместим его посредством параллельного переноса в точку $x+dx+\delta x$. Если $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ обращается в нуль, то при смещении A_{μ} из x сначала в точку $x+\delta x$, а затем в точку $x+\delta x+dx$ результат должен быть прежним. Таким образом, при смещении вектора из одной точки в другую результат не зависит от траектории перехода. Тогда, перемещая параллельным переносом исходный вектор A_{μ} из точки x во всевозможные точки, получаем векторное поле, удовлетворяющее условию $A_{\mu:\nu}=0$, т. е.

$$A_{\mu,\nu}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}A_{\sigma}. \qquad (12.1)$$

Можно ли представить такое векторное поле в виде градиента от скаляра? Положим в (12.1) $A_{\mu}=S_{,\mu}$. Получим

$$S_{,\mu\nu}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}S_{,\sigma}. \qquad (12.2)$$

Вследствие симметрии $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ по нижним индексам выражения для $S_{,\mu\nu}$ и $S_{,\nu\mu}$ совпадают, и уравнение (12.2) является интегрируемым.

Выберем четыре независимых скаляра, удовлетворяющих (12.2), в качестве координат $x^{\alpha'}$ новой координатной системы. Тогда

$$x^{\alpha'}_{,\,\mu\nu}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}x^{\alpha'}_{,\,\sigma}.$$

Согласно трансформационному закону (3.7)

$$g_{\mu\lambda}=g_{\alpha'\beta'}x^{\alpha'}_{,\,\mu}x^{\beta'}_{,\,\lambda}.$$

Дифференцируя это соотношение по x^{ν}, находим с учетом (7.6)

$$g_{\mu\lambda,\nu}-g_{\alpha'\beta',\nu}x^{\alpha'}_{,\,\mu}x^{\beta'}_{,\,\lambda}=g_{\alpha'\beta'}\left(x^{\alpha'}_{,\,\mu\nu}x^{\beta'}_{,\,\lambda}+x^{\alpha'}_{,\,\mu}x^{\beta'}_{,\,\lambda\nu}\right)=$$
$$=g_{\alpha'\beta'}\left(\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}x^{\alpha'}_{,\,\sigma}x^{\beta'}_{,\,\lambda}+x^{\alpha'}_{,\,\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}x^{\beta'}_{,\,\sigma}\right)=g_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}+g_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}=$$
$$=\Gamma_{\lambda\mu\nu}+\Gamma_{\mu\lambda\nu}=g_{\mu\lambda,\nu}.$$

Следовательно,

$$g_{\alpha'\beta',\nu}x^{\alpha'}_{,\,\mu}x^{\beta'}_{,\,\lambda}=0.$$

Значит, $g_{\alpha'\beta',\nu}=0$. В новой системе координат метрический тензор является константой. Таким образом, мы имеем дело с плоским пространством в прямолинейной системе координат.

13. ТОЖДЕСТВА БИАНКИ

Прежде чем обсуждать вторую ковариантную производную произвольного тензора, рассмотрим тензор, являющийся внешним произведением векторов A_{μ} и B_{τ}:

$$(A_{\mu}B_{\tau})_{:\rho:\sigma}=(A_{\mu:\rho}B_{\tau}+A_{\mu}B_{\tau:\rho})_{:\sigma}=A_{\mu:\rho:\sigma}B_{\tau}+A_{\mu:\rho}B_{\tau:\sigma}+$$
$$+A_{\mu:\sigma}B_{\tau:\rho}+A_{\mu}B_{\tau:\rho:\sigma}.$$

Теперь поменяем местами ρ и σ и вычтем полученное равенство из исходного. С учетом (11.2) это даст

$$(A_{\mu}B_{\tau})_{:\rho:\sigma}-(A_{\mu}B_{\tau})_{:\sigma:\rho}=A_{\alpha}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma}B_{\tau}+A_{\mu}R^{\alpha}_{\tau\rho\sigma}B_{\alpha}.$$

Произвольный тензор $T_{\mu\tau}$ выражается в виде суммы членов типа $A_{\mu}B_{\tau}$, тогда он должен удовлетворять соотношению

$$T_{\mu\tau:\rho:\sigma}-T_{\mu\tau:\sigma:\rho}=T_{\alpha\tau}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma}+T_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\tau\rho\sigma}. \qquad (13.1)$$

Пусть $T_{\mu\tau}$ является ковариантной производной вектора $A_{\mu:\tau}$. Тогда

$$A_{\mu:\tau:\rho:\sigma} - A_{\mu:\tau:\sigma:\rho} = A_{\alpha:\tau} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} + A_{\mu:\alpha} R^{\alpha}_{\tau\rho\sigma}.$$

Выполним в этой формуле циклические перестановки индексов τ, ρ и σ и сложим полученные три уравнения. Из левой части имеем

$$A_{\mu:\rho:\sigma:\tau} - A_{\mu:\sigma:\rho:\tau} + \text{цикл. перест.} = (A_\alpha R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma})_{:\tau} + \text{цикл. перест.} =$$

$$= A_{\alpha:\tau} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} + A_\alpha R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} + \text{цикл. перест.} \tag{13.2}$$

Правая часть дает

$$A_{\alpha:\tau} R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma} + \text{цикл. перест.}, \tag{13.3}$$

так как остальные члены сокращаются [см. равенство (11.5)]. Первые члены в (13.2) и (13.3) сокращаются и остается

$$A_\alpha R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} + \text{цикл. перест.} = 0.$$

Множитель A_α фигурирует во всех членах этого уравнения и может быть отброшен. В результате имеем

$$R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma:\tau} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\tau:\rho} + R^{\alpha}_{\mu\tau\rho:\sigma} = 0. \tag{13.4}$$

В дополнение к условиям симметрии из разд. 11 тензор кривизны удовлетворяет этим дифференциальным уравнениям. Эти уравнения известны под названием тождеств Бианки.

14. ТЕНЗОР РИЧЧИ

Свернем $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ по двум индексам. Если свертка производится по индексам, относительно перестановки которых $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ антисимметричен, то, разумеется, результатом будет нуль. Если же сворачивать $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ по другим парам индексов, то получим результаты, отличающиеся один от другого лишь знаком. Это следует из свойств симметрии (11.4), (11.7) и (11.8). Произведем свертку по первому и последнему индексам. Получим

$$R^{\mu}_{\nu\rho\mu} = R_{\nu\rho}.$$

Этот тензор называют тензором Риччи.

Умножая (11.8) на $g^{\mu\sigma}$, находим, что

$$R_{\nu\rho} = R_{\rho\nu}, \tag{14.1}$$

т. е. тензор Риччи симметричен.

Можно свернуть $R_{\nu\rho}$ по оставшимся двум индексам и образовать

$$g^{\nu\rho} R_{\nu\rho} = R^{\nu}_{\nu} = R.$$

Величина R — скаляр и называется скалярной кривизной. Она определена таким образом, что является положительной для сферы в трехмерном пространстве, в чем можно убедиться непосредственным вычислением.

Тождества Бианки (13.4) содержат пять индексов. Свернем их дважды и получим соотношение с одним свободным индексом. Положим в (13.4) $\tau=\alpha$ и умножим на $g^{\mu\rho}$:

$$g^{\mu\rho}\left(R^{\alpha}_{\mu\,\rho\sigma:\alpha}+R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha:\rho}+R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho:\sigma}\right)=0,$$

т. е.

$$(g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma})_{:\alpha}+(g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\sigma\alpha})_{:\rho}+(g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\alpha\rho})_{:\sigma}=0. \tag{14.2}$$

Далее,

$$g^{\mu\rho}R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma}=g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\rho\sigma}=g^{\mu\rho}g^{\alpha\beta}R_{\mu\beta\sigma\rho}=g^{\alpha\beta}R_{\beta\sigma}=R^{\alpha}_{\sigma}.$$

Вследствие симметрии $R_{\alpha\sigma}$ можно писать индексы один над другим, т. е. R^{α}_{σ}. Тогда уравнение (14.2) приобретает вид

$$R^{\alpha}_{\sigma:\alpha}+(g^{\mu\rho}R_{\mu\sigma})_{:\rho}-R_{:\sigma}=0$$

или

$$2R^{\alpha}_{\sigma:\alpha}-R_{:\sigma}=0,$$

что представляет собой тождества Бианки для тензора Риччи. Подняв индекс σ, можем записать

$$[R^{\sigma\alpha}-(1/2)g^{\sigma\alpha}R]_{:\alpha}=0. \tag{14.3}$$

Выражение для тензора Риччи, согласно (11.3), в явном виде выглядит следующим образом:

$$R_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\,\alpha,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}. \tag{14.4}$$

Первый член здесь, на первый взгляд, не симметричен по μ и ν, тогда как остальные три, очевидно, симметричны. Доказательство симметрии первого члена требует проведения некоторых выкладок.

Чтобы продифференцировать детерминант g, необходимо продифференцировать в нем каждый элемент $g_{\lambda\mu}$ и домножить его на алгебраическое дополнение $gg^{\lambda\mu}$. Таким образом,

$$g_{,\nu}=gg^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu}. \tag{14.5}$$

Следовательно,

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\,\mu}=g^{\lambda\mu}\Gamma_{\lambda\nu\mu}=(1/2)g^{\lambda\mu}(g_{\lambda\nu,\mu}+g_{\lambda\mu,\nu}-g_{\mu\nu,\lambda})=$$
$$=(1/2)g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu}=(1/2)g^{-1}g_{,\nu}=(1/2)(\ln g)_{,\nu}. \tag{14.6}$$

Отсюда вытекает, что первый член в (14.4) симметричен по μ и ν.

15. ЭЙНШТЕЙНОВСКИЙ ЗАКОН ГРАВИТАЦИИ

До сих пор содержание книги носило чисто математический характер, за исключением физического предположения о том, что траектория частицы есть геодезическая. Многие результаты, изложенные в предыдущих разделах, были получены в прошлом веке и относятся к искривленному пространству произвольного числа измерений. В предшествующем формализме размерность пространства фигурирует лишь постольку, поскольку

$$g^{\mu}_{\mu} = \text{число измерений}.$$

Эйнштейн предположил, что в пустом пространстве

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{15.1}$$

В этом и состоит эйнштейновский закон гравитации. «Пустое» здесь означает отсутствие материи и каких-либо физических полей, за исключением самого гравитационного поля. Гравитационное поле не нарушает пустоты. Все остальные поля нарушают. Условия пустоты пространства с хорошей точностью справедливы для межпланетного пространства в Солнечной системе, и здесь применимо уравнение (15.1).

Плоское пространство, очевидно, удовлетворяет соотношению (15.1). Геодезические в плоском пространстве являются прямыми линиями; таким образом, частицы движутся по прямым линиям. В случае искривленного пустого пространства эйнштейновский закон накладывает ограничения на кривизну. Вместе с предположением о том, что планеты движутся по геодезическим это дает некоторую информацию об их движении.

На первый взгляд, эйнштейновский закон гравитации не имеет ничего общего с ньютоновским. Чтобы увидеть аналогию, нужно рассматривать $g_{\mu\nu}$ как потенциалы, описывающие гравитационное поле. В отличие от одного ньютоновского потенциала в эйнштейновской теории их десять. Эти потенциалы описывают не только гравитационное поле, но и координатную систему. Гравитационное поле и система координат в эйнштейновской теории неразрывно связаны, и их не удается описать независимо друг от друга.

При рассмотрении компонент $g_{\mu\nu}$ как потенциалов (15.1) оказывается полевым уравнением и выглядит как обычное полевое уравнение в том смысле, что оно является уравнением второго порядка, так как вторые производные входят в (14.4) через символы Кристоффеля. Уравнение (15.1) отличается от обычных полевых уравнений тем, что оно нелинейно, существенно нелинейно. Эйнштейновские уравнения весьма сложны, и находить их точные решения трудно.

16. НЬЮТОНОВО ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим статическое гравитационное поле в статической системе координат. Тогда $g_{\mu\nu}$ постоянно во времени, т. е. $g_{\mu\nu\,0}=0$. Далее, для $m=1$, 2, 3 должно выполняться условие:

$$g_{m0}=0.$$

Следовательно,

$$g^{m0}=0; \quad g^{00}=(g_{00})^{-1},$$

и g^{mn} является обратной матрицей по отношению к g_{mn}. Латинские индексы всегда пробегают значения 1, 2, 3. Отсюда находим, что $\Gamma_{m0n}=0$, а тогда и $\Gamma^m_{0n}=0$.

Рассмотрим частицу, движущуюся со скоростью малой по сравнению со скоростью света. Тогда v^m есть малая первого порядка. В пренебрежении величинами второго порядка малости получим, что

$$g_{00}(v^0)^2=1. \tag{16.1}$$

Частица движется по геодезической. Уравнение геодезической (8.3) с точностью до членов первого порядка дает

$$dv^m/ds=-\Gamma^m_{00}(v^0)^2=-g^{mn}\Gamma_{n00}(v^0)^2=(1/2)\,g^{mn}g_{00,n}(v^0)^2$$

Но с точностью до членов первого порядка

$$\frac{dv^m}{ds}=\frac{dv^m}{dx^\mu}\frac{dx^\mu}{ds}=\frac{dv^m}{dx^0}v^0.$$

Тогда с учетом (16.1) запишем

$$\frac{dv^m}{dx^0}=\frac{1}{2}g^{mn}g_{00,n}v^0=g^{mn}(g_{00}^{1/2})_{,n}. \tag{16.2}$$

Поскольку $g_{\mu\nu}$ не зависит от x^0, можно опустить индекс m, что даст соотношение

$$dv_m/dx^0=(g_{00}^{1/2})_{,m}. \tag{16.3}$$

Видно, что частица движется так, будто она находится под воздействием потенциала $g_{00}^{1/2}$. При получении этого результата никак не использовалось уравнение Эйнштейна. Теперь для сравнения эйнштейновской теории с ньютоновской учтем закон Эйнштейна, приводящий к определенным уравнениям для потенциала.

Предположим, что гравитационное поле является слабым, так что кривизна пространства — времени мала. Тогда можно выбрать систему координат, для которой кривизна координатных осей (для каждой из осей три координаты фиксированы) мала. В этом случае $g_{\mu\nu}$ в первом приближении есть константа, а $g_{\mu\nu,\sigma}$ и все символы Кристоффеля малы. Уравнение

Эйнштейна (15.1) с точностью до членов первого порядка приобретает вид [см. (14.4)]

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}=0.$$

Сворачивая (11.6) по двум индексам с перестановкой ρ и μ и пренебрегая членами второго порядка малости, можно преобразовать это соотношение к следующему более удобному виду:

$$g^{\rho\sigma}\left(g_{\rho\sigma,\mu\nu}-g_{\nu\sigma,\mu\rho}-g_{\mu\rho,\nu\sigma}+g_{\mu\nu,\rho\sigma}\right)=0. \qquad (16.4)$$

Положим теперь $\mu=\nu=0$ и используем условие независимости $g_{\mu\nu}$ от x^0. Получим

$$g^{mn}g_{00,mn}=0. \qquad (16.5)$$

Уравнение Даламбера (10.9) в приближении слабого поля принимает вид

$$g^{\mu\nu}V_{,\mu\nu}=0.$$

В статическом случае это выражение сводится к уравнению Лапласа:

$$g^{mn}V_{,mn}=0.$$

Уравнение (16.5) как раз и означает, что g_{00} удовлетворяет уравнению Лапласа.

Можно выбрать единицу измерения времени так, чтобы g_{00} мáло отличалось от единицы. Тогда положим:

$$g_{00}=1+2V, \qquad (16.6)$$

где V — малó. В этом случае $g_{00}{}^{1/2}=1+V$ и V становится потенциалом. Поскольку V удовлетворяет уравнению Лапласа, его можно отождествить с ньютоновским потенциалом, равным $-m/r$, где m — масса источника. Теперь видно, что (16.2) приводит к соотношению:

$$\text{Ускорение}=-\operatorname{grad}V,$$

так как диагональные элементы $g^{mn}\approx-1$. Значит, знак при V был выбран правильно.

Таким образом, закон Эйнштейна переходит в закон Ньютона, когда поле является слабым и статическим. Следовательно, результаты ньютоновской теории по объяснению движения планет остаются в силе. Приближение статичности оправдывается малостью скоростей планет по сравнению со скоростью света. Приближение слабого поля является хорошим, так как пространство очень незначительно отклоняется от плоского. Рассмотрим порядки некоторых величин.

Значение потенциала V на поверхности Земли оказывается порядка 10^{-9}. Таким образом, g_{00} из формулы (16.6) очень близко к единице. Но даже такое малое отличие g_{00} от единицы приводит к значительным гравитационным эффектам, наблюдаемым на Земле. Взяв радиус Земли порядка 10^9 *см*, найдем, что значение $g_{00,m}$ порядка 10^{-18} *см*$^{-1}$. Следовательно, отклонение пространства от плоского крайне мало. Однако, чтобы получить ускорение в гравитационном поле на поверхности Земли, нужно умножить это отклонение на квадрат скорости света, т. е. на $9\cdot 10^{20}$ (*см/сек*)^2. Поэтому ускорение (около 10^3 *см/сек*^{2}) вполне ощутимо, хотя само отклонение пространства от плоского бесконечно мало, для того чтобы его можно было наблюдать непосредственно.

17. ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ

Рассмотрим монохроматическое излучение покоящегося атома, находящегося в статическом гравитационном поле. Длина волны излучаемого света соответствует определенному значению Δs. Поскольку атом покоится, в статической системе координат типа системы, использовавшейся в разд. 16, имеем

$$\Delta s^2 = g_{00}(\Delta x^0)^2,$$

где Δx^0 — период, т. е. время между соседними максимумами, отнесенное к выбранной системе координат.

При распространении света в другую область пространства Δx^0 не изменяется. Величина Δx^0 — не то же самое, что период некоторой спектральной линии атома, находящегося в данной точке. Эту роль играет Δs. Таким образом, период зависит от гравитационного потенциала g_{00} в той точке, где свет был излучен:

$$\Delta x^0 \sim g_{00}^{-1/2}.$$

Множитель $g_{00}{}^{-1/2}$ описывает смещение спектральной линии. В ньютоновом приближении (16.6) имеем

$$\Delta x^0 \sim 1 - V.$$

Значение V отрицательно в области сильного гравитационного поля, например на поверхности Солнца. Поэтому свет, излучаемый на Солнце, смещен относительно света, излучаемого на Земле, в красную часть спектра. Этот эффект можно было бы наблюдать для света от Солнца, если бы он не терялся на фоне других физических эффектов, таких, как эффект Доплера, возникающий из-за движения излучающих атомов. Красное смещение более заметно для света от белых карликов, где вследствие высокой плотности материи гравитационный потенциал на поверхности звезды гораздо выше.

18. РЕШЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Уравнения Эйнштейна для пустого пространства представляют собой очень сложные нелинейные уравнения, и нахождение их точных решений является весьма трудной задачей. Однако в одном специальном случае решение находится без особых усилий, а именно: в случае статического сферически-симметричного поля, создаваемого покоящимся сферически-симметричным телом.

Условие статичности означает, что в статической координатной системе g_{00} не зависит от времени x^0, или t, и, кроме того, $g_{0m}=0$. В качестве статической координатной системы можно выбрать сферические полярные координаты $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$. Наиболее общее выражение для ds^2 в случае сферической симметрии имеет вид

$$ds^2 = U dt^2 - V dr^2 - W r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где U, V и W зависят только от r. Не нарушая сферической симметрии, можно заменить r произвольной функцией от r. Используем это обстоятельство для максимального упрощения выражения для ds^2. Удобнее всего обратить множитель W в единицу. Тогда ds^2 можно записать следующим образом:

$$ds^2 = \exp(2\nu) dt^2 - \exp(2\lambda) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \qquad (18.1)$$

где ν и λ зависят только от r. Функции ν и λ должны быть выбраны так, чтобы удовлетворять уравнениям Эйнштейна.

Из (18.1) можно выразить $g_{\mu\nu}$ через ν и λ:

$$g_{00} = \exp(2\nu); \quad g_{11} = -\exp(2\lambda);$$
$$g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2\sin^2\theta;$$
$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu.$$

Далее находим

$$g^{00} = \exp(-2\nu); \quad g^{11} = -\exp(-2\lambda);$$
$$g^{22} = -r^{-2}; \quad g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta;$$
$$g^{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu.$$

Теперь необходимо выразить через ν и λ все символы Кристоффеля. Многие из них обращаются в нуль, а оставшиеся имеют вид:

$$\Gamma^1_{00} = \nu' \exp(2\nu - 2\lambda); \qquad \Gamma^0_{10} = \nu';$$
$$\Gamma^1_{11} = \lambda'; \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = r^{-1};$$
$$\Gamma^1_{22} = -r\exp(-2\lambda); \qquad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta;$$
$$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\exp(-2\lambda); \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$

где штрих означает дифференцирование по r. Эти выражения нужно подставить в (14.4). В результате получим:

$$R_{00} = (-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - 2\nu'/r)\exp(2\nu - 2\lambda); \tag{18.2}$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - 2\lambda'/r; \tag{18.3}$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')\exp(-2\lambda) - 1; \tag{18.4}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$$

(остальные компоненты $R_{\mu\nu}$ в этом случае тождественно равны нулю).

Эйнштейновский закон гравитации требует, чтобы эти выражения обращались в нуль. Обращение в нуль (18.2) и (18.3) дает

$$\lambda' + \nu' = 0.$$

При больших r пространство должно быть близко к плоскому, так что при $r \to \infty$ и λ, и ν должны стремиться к нулю. Следовательно,

$$\lambda + \nu = 0.$$

Из обращения в нуль (18.4) следует, что

$$(1 + 2r\nu')\exp(2\nu) = 1,$$

или

$$[r\exp(2\nu)]' = 1.$$

Отсюда

$$r\exp(2\nu) = r - 2m,$$

где m — постоянная интегрирования. Подстановка последнего соотношения в (18.2) и (18.3) также обращает их в нуль. Из этого же соотношения получаем выражение для g_{00}:

$$g_{00} = 1 - 2m/r. \tag{18.5}$$

Для больших значений r должно быть справедливо ньютоново приближение. Сравнение (18.5) с (16.6) показывает, что постоянная интегрирования m, которая появляется в (18.5), есть не что иное, как масса тела, создающего гравитационное поле.

Полное решение уравнений Эйнштейна имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{18.6}$$

Оно известно под названием решения Шварцшильда и применимо вне тела, создающего гравитационное поле, т. е. в области, где отсутствует материя. Таким образом, это уравнение с приемлемой точностью справедливо вне поверхности звезды.

Для движения планет вокруг Солнца решение (18.6) дает малые поправки к ньютоновской теории. Они ощутимы только для Меркурия — ближайшей к Солнцу планеты — и объясняют отклонение траектории этой планеты от траектории, предсказываемой теорией Ньютона. Это является убедительным подтверждением эйнштейновской теории.

19. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

При $r=2m$ решение (18.6) становится сингулярным, так как в этой точке $g_{00}=0$ и $g_{11}=-\infty$. Может показаться, что $r=2m$ является минимально возможным радиусом тела массы m. Однако ближайшее рассмотрение показывает, что это не так.

Рассмотрим частицу, падающую на центральное тело. Пусть ее вектор скорости есть $v^\mu = dz^\mu/ds$. Предположим, что частица падает по радиусу так, что $v^2=v^3=0$. Ее движение определяется уравнением геодезической (8.3):

$$dv^0/ds = -\Gamma^0_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = -g^{00}\Gamma_{0\mu\nu} v^\mu v^\nu =$$
$$= -g^{00} g_{00,1} v^0 v^1 = -g^{00} (dg_{00}/ds) v^0.$$

Учитывая что, $g^{00} = 1/g_{00}$, получаем

$$g_{00} dv^0/ds + (dg_{00}/ds) v^0 = 0.$$

Это уравнение интегрируется и дает соотношение

$$g_{00} v^0 = k,$$

где k — постоянная интегрирования, которая равна значению g_{00} в начальной точке траектории частицы.

В рассматриваемом случае имеем, как и прежде,

$$1 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = g_{00} (v^0)^2 + g_{11} (v^1)^2.$$

Умножая это уравнение на g_{00} и используя соотношение $g_{00}g_{11}=-1$, полученное в предыдущем разделе, находим

$$k^2 - (v^1)^2 = g_{00} = 1 - 2m/r.$$

Для падающего тела $v^1<0$; следовательно,

$$v^1 = -(k^2 - 1 + 2m/r)^{1/2}.$$

Тогда

$$dt/dr = v^0/v^1 = -k (1 - 2m/r)^{-1} (k^2 - 1 + 2m/r)^{-1/2}.$$

Пусть частица находится вблизи критического радиуса, т. е. $r=2m+\varepsilon$, где ε мало и члены порядка ε^2 отброшены. Тогда

$$dt/dr = -2m/\varepsilon = -2m/(r - 2m).$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$t = -2m \ln (r - 2m) + \text{константа}.$$

Таким образом, при $r \to 2m$ $t \to \infty$, т. е. для достижения частицей критического радиуса $2m$ требуется бесконечное время.

Предположим, что удаленный наблюдатель рассматривает частицу, излучающую свет определенной частоты. Свет испытывает красное смещение, описываемое множителем $g_{00}^{-1/2}=(1-2m/r)^{-1/2}$. При достижении частицей критического радиуса этот множитель обращается в бесконечность. С точки зрения удаленного наблюдателя, все физические процессы в частице по мере ее приближения к критическому радиусу $r=2m$ протекают все медленнее и медленнее.

Рассмотрим теперь наблюдателя, движущегося вместе с частицей. Для такого наблюдателя приращение времени совпадает с ds. Тогда

$$ds/dr = 1/v^1 = -(k^2-1+2m/r)^{-1/2}.$$

При $r \to 2m$ величина ds/dr стремится к $-k^{-1}$. Следовательно, достижение частицей радиуса $r=2m$ происходит за конечное собственное время наблюдателя. Если в момент достижения критического радиуса возраст движущегося наблюдателя конечен, то что же произойдет с ним дальше? По-видимому, наблюдатель будет продолжать свободно падать в пустом пространстве, двигаясь в область все меньших и меньших значений r.

Для того чтобы рассмотреть продолжение решения Шварцшильда на область $r<2m$, необходимо ввести нестатическую систему координат; $g_{\mu\nu}$ в этом случае становится функцией временной координаты. Оставим координаты θ и φ прежними, а вместо t и r введем τ и ρ, определяемые соотношениями:

$$\tau = t + f(r); \quad \rho = t + g(r), \tag{19.1}$$

где f и g — произвольные функции. Тогда справедливо равенство

$$d\tau^2 - \frac{2m}{r}d\rho^2 = (dt + f'dr)^2 - \frac{2m}{r}(dt + g'dr)^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 + \\ + 2\left(f' - \frac{2m}{r}g'\right)dt\,dr + \left(f'^2 - \frac{2m}{r}g'^2\right)dr^2 = \\ = \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2, \tag{19.2}$$

полученное за счет выбора функций f и g, которые удовлетворяют условиям:

$$f' = (2m/r)g' \tag{19.3}$$

и

$$(2m/r)g'^2 - f'^2 = (1-2m/r)^{-1}. \tag{19.4}$$

Здесь штрих означает производную по r.

Исключив из этих уравнений f, найдем

$$g' = (r/2m)^{1/2}(1-2m/r)^{-1}. \tag{19.5}$$

Чтобы проинтегрировать уравнение (19.5), положим $r=y^2$ и $2m=a^2$. При $r>2m$ величина $y>a$. Получаем

$$dg/dy = 2y\,dg/dr = (2y^4/a)/(y^2-a^2),$$

откуда

$$g = (2/3a)\,y^3 + 2ay - a^2 \ln[(y+a)/(y-a)]. \qquad (19.6)$$

Окончательно из (19.3) и (19.5) имеем

$$g' - f' = (1-2m/r)\,g' = (r/2m)^{1/2},$$

что интегрируется и дает

$$(2/3)\,(1/\sqrt{2m})\,r^{3/2} = g - f = \rho - \tau. \qquad (19.7)$$

Таким образом,

$$r = \mu(\rho-\tau)^{2/3}, \qquad (19.8)$$

где

$$\mu = [(3/2)\sqrt{2m}]^{2/3}.$$

Из проведенных выкладок видно, что удовлетворить условиям (19.3) и (19.4) можно. Значит, справедливо равенство (19.2). Подставляя (19.2) в решение Шварцшильда (18.6), получаем

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{2m}{\mu(\rho-\tau)^{2/3}}\,d\rho^2 - \mu^2(\rho-\tau)^{4/3}\,(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (19.9)$$

Критический радиус $r=2m$, согласно (19.7), соответствует $\rho-\tau=4m/3$. В метрике (19.9) сингулярность отсутствует.

Поскольку метрику (19.9) можно явно преобразовать в решение Шварцшильда при помощи преобразования координат, то она удовлетворяет уравнениям Эйнштейна для пустого пространства в области $r>2m$. Из отсутствия сингулярности при $r=2m$ и из аналитической непрерывности заключаем, что (19.9) удовлетворяет уравнениям Эйнштейна и при $r\leqslant 2m$. Метрика (19.9) остается применимой вплоть до точки $r=0$ или $\rho-\tau=0$.

Сингулярность появляется при переходе от новых координат к исходным (19.1). Но так как введена новая система координат, забудем об исходной, и тогда сингулярность больше появляться не будет.

Видно, что решение Шварцшильда для пустого пространства распространимо на область $r<2m$. Однако эта область изолирована от области $r>2m$. Как нетрудно проверить, любому сигналу, даже световому, потребуется бесконечное время, чтобы пересечь границу $r=2m$. Таким образом, область $r<2m$ не является непосредственно наблюдаемой. Такую область называют черной дырой, так как материальные тела могут попасть внутрь сферы радиусом $r=2m$ (за бесконечное время по часам удаленного наблюдателя), но ничто не может выйти наружу.

Возникает вопрос, существуют ли такие области в действительности? Определенно можно сказать только одно: уравнения

Эйнштейна их существование допускают. Массивный звездный объект может сжаться до очень малых размеров; в этом случае гравитационные силы становятся настолько большими, что никакие другие из известных физических сил не смогут их уравновесить и предотвратить тем самым дальнейшее сжатие. Похоже, что сжатие такого объекта должно привести к образованию черной дыры*. Правда, по часам удаленного наблюдателя на это потребовалось бы бесконечное время, однако по отношению к самой падающей материи время сжатия конечно.

20. ТЕНЗОРНЫЕ ПЛОТНОСТИ

Элемент четырехмерного объема при преобразованиях координат преобразуется по закону:

$$dx^{0'}\,dx^{1'}\,dx^{2'}\,dx^{3'} = dx^0dx^1dx^2dx^3J, \qquad (20.1)$$

где J — якобиан;

$$J = \partial\left(x^{0'}\,x^{1'}\,x^{2'}\,x^{3'}\right)/\partial\left(x^0x^1x^2x^3\right) = \det x^{\mu'}{}_{,\alpha}.$$

Для краткости запишем (20.1) в виде

$$d^4x' = Jd^4x. \qquad (20.2)$$

Учтем, что

$$g_{\alpha\beta} = x^{\mu'}{}_{,\alpha}\,g_{\mu'\nu'}\,x^{\nu'}{}_{,\beta}.$$

Правую часть этого выражения можно рассматривать как произведение трех матриц; у первой матрицы индекс α обозначает строки, индекс μ' — столбцы; у второй матрицы индекс μ' обозначает строки, индекс ν' — столбцы; у третьей матрицы индекс ν' обозначает строки, индекс β — столбцы. Это произведение равно матрице $g_{\alpha\beta}$ из левой части. Соответствующее соотношение должно иметь место и для детерминантов, поэтому

$$g = Jg'J \quad \text{или} \quad g = J^2g'.$$

Далее, так как g является отрицательно определенной величиной, можно образовать $\sqrt{-g}$, где подкоренное выражение выбрано положительно определенным.

Таким образом,

$$\sqrt{-g} = J\sqrt{-g'}\,. \qquad (20.3)$$

---

* В последнее время появились аргументы в пользу того, что определенные физические поля, не предотвращая сжатия, предотвращают появление сингулярности в метрике, т. е. образование черной дыры (см., например: **М. А. Марков.** Глобальные свойства вещества в коллапсированном состоянии.— «Успехи физ. наук», 1973, т. 111, с. 3). — *Прим. пер.*

Пусть S — некоторое скалярное поле. Для него $S=S'$. Тогда

$$\int S\sqrt{-g}\,d^4x = \int S\sqrt{-g'}\,J d^4x = \int S'\sqrt{-g'}\,d^4x'$$

при условии, что область интегрирования в координатах x' соответствует области интегрирования в координатах x. Следовательно,

$$\int S\sqrt{-g}\,d^4x = \text{инвариант}. \tag{20.4}$$

Назовем величину $S\sqrt{-g}$, интеграл от которой является инвариантом, скалярной плотностью.

Аналогично для любого тензорного поля $T^{\mu\nu\ldots}$ величину $T^{\mu\nu\ldots}\sqrt{-g}$ можно назвать тензорной плотностью. Когда область интегрирования мала, $\int T^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x$ является тензором. Если область интегрирования не мала, то этот интеграл не будет тензором, так как он представляет собой сумму тензоров, заданных в разных точках и, следовательно, не преобразуется по какому-либо простому закону при преобразованиях координат.

Величина $\sqrt{-g}$ в дальнейшем используется очень часто. Далее для краткости будем записывать ее в виде $\sqrt{\ }$. Так как

$$g^{-1}g_{,\nu} = 2\sqrt{\ }^{-1}\sqrt{\ }_{,\nu},$$

то формула (14.5) дает

$$\sqrt{\ }_{,\nu} = (1/2)\sqrt{\ }\,g^{\lambda\mu}g_{\lambda\mu,\nu}, \tag{20.5}$$

и формулу (14.6) можно записать в виде

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\mu}\sqrt{\ } = \sqrt{\ }_{,\nu}. \tag{20.6}$$

21. ТЕОРЕМЫ ГАУССА И СТОКСА

Ковариантная дивергенция $A^{\mu}{}_{:\mu}$ вектора A^{μ} является скаляром. Для нее можно записать выражение

$$A^{\mu}{}_{:\mu} = A^{\mu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\mu}A^{\nu} = A^{\mu}{}_{,\mu} + \sqrt{\ }^{-1}\sqrt{\ }_{,\nu}A^{\nu}.$$

Отсюда

$$A^{\mu}{}_{:\mu}\sqrt{\ } = (A^{\mu}\sqrt{\ })_{,\mu}. \tag{21.1}$$

Подставив в качестве S в (20.4) $A^{\mu}{}_{:\mu}$, получим инвариант

$$\int A^{\mu}{}_{:\mu}\sqrt{\ }\,d^4x = \int (A^{\mu}\sqrt{\ })_{,\mu}\,d^4x.$$

Если интеграл берется по ограниченному (четырехмерному) объему, то правую часть можно преобразовать по теореме Гаусса в интеграл по (трехмерной) граничной поверхности этого объема.

При $A^{\mu}{}_{:\mu} = 0$

$$(A^{\mu}\sqrt{\ })_{,\mu} = 0. \tag{21.2}$$

Это приводит к закону сохранения, а именно к закону сохранения жидкости, плотность которой есть $A^0\sqrt{}$, а поток задается трехмерным вектором $A^m\sqrt{}$ ($m=1, 2, 3$). Можно проинтегрировать (21.2) по трехмерному объему V при некотором фиксированном x^0. В результате получим

$$\left(\int A^0 \sqrt{}\, d^3x\right)_{,0} = -\int (A^m \sqrt{})_{,m}\, d^3x$$

— поверхностный интеграл по границе объема V. Если отсутствуют токи, пересекающие границу объема V, то $\int A^0 \sqrt{}\, d^3x$ есть константа.

Эти результаты для вектора A^μ нельзя, вообще говоря, распространить на тензор с бо́льшим числом индексов. Рассмотрим тензор с двумя индексами $Y^{\mu\nu}$. В плоском пространстве, используя теорему Гаусса, можно преобразовать $\int Y^{\mu\nu}{}_{,\nu}\, d^4x$ в поверхностный интеграл; в искривленном пространстве в общем случае нельзя преобразовать объемный интеграл $\int Y^{\mu\nu}{}_{,\nu} \sqrt{}\, d^4x$ в поверхностный. Исключение составляет антисимметричный тензор $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$.

В этом случае

$$F^{\mu\nu}{}_{:\sigma} = F^{\mu\nu}{}_{,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} F^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\rho} F^{\mu\rho},$$

отсюда с учетом (20.6)

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} F^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\rho} F^{\mu\rho} = F^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \sqrt{}^{-1} \sqrt{}_{,\rho} F^{\mu\rho}.$$

Тогда

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} \sqrt{} = (F^{\mu\nu} \sqrt{})_{,\nu}. \tag{21.3}$$

Следовательно, $\int F^{\mu\nu}{}_{:\nu} \sqrt{}\, d^4x$ равен поверхностному интегралу, и при условии $F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$ получаем закон сохранения.

Для симметричного тензора $Y^{\mu\nu} = Y^{\nu\mu}$, если опустить один из индексов и работать с $Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu}$, то можно получить соответствующее уравнение с дополнительным членом:

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\sigma} = Y_\mu{}^\nu{}_{,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} Y_\alpha{}^\nu + \Gamma^{\nu}_{\sigma\alpha} Y_\mu{}^\alpha.$$

Подставив $\sigma=\nu$ и использовав (20.6), получим

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu} = Y_\mu{}^\nu{}_{,\nu} + \sqrt{}^{-1} \sqrt{}_{,\alpha} Y_\mu{}^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu\nu} Y^{\alpha\nu}.$$

Поскольку $Y^{\alpha\nu}$ симметричен, то можно с учетом (7.6) заменить $\Gamma_{\alpha\mu\nu}$ в последнем члене величиной

$$(1/2)(\Gamma_{\alpha\nu\mu} + \Gamma_{\nu\alpha\mu}) = (1/2)\, g_{\alpha\nu,\mu}.$$

В итоге можно записать

$$Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu} \sqrt{} = (Y_\mu{}^\nu \sqrt{})_{,\nu} - (1/2)\, g_{\alpha\beta,\mu} Y^{\alpha\beta} \sqrt{}. \tag{21.4}$$

Для ковариантного вектора A_μ имеем выражение:

$$A_{\mu:\nu} - A_{\nu:\mu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} A_\rho - (A_{\nu,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} A_\rho) =$$
$$= A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}. \tag{21.5}$$

Результат (21.5) можно сформулировать так: ковариантный ротор равен обычному ротору. Это утверждение справедливо только для ковариантного вектора. Для контравариантного вектора по соображениям баланса индексов ротор образовать нельзя.

Положим $\mu=1$, $\nu=2$. Тогда получим

$$A_{1:2}-A_{2:1}=A_{1,2}-A_{2,1}.$$

Проинтегрируем это равенство по некоторой области поверхности $x^0=\text{const}$, $x^3=\text{const}$. Согласно теореме Стокса, имеем

$$\iint (A_{1:2}-A_{2:1})\,dx^1dx^2=\iint (A_{1,2}-A_{2,1})\,ax^1\,dx^2= \\ =\int (A_1dx^1+A_2dx^2), \tag{21.6}$$

где последний интеграл берется по границе области. Таким образом, полученный интеграл по замкнутому контуру равен потоку через поверхность, ограниченную этим контуром. Этот результат должен иметь место не только в системе координат, в которой уравнение рассматриваемой поверхности есть $x^0=\text{const}$, $x^3=\text{const}$, но и в общем случае, т. е. в любой системе координат.

Чтобы получить инвариантный способ записи этого результата, введем общее выражение для элемента двухмерной поверхности. Элемент поверхности, определяемый двумя малыми контравариантными векторами ξ^μ и ζ^μ, задается антисимметричным тензором второго ранга:

$$dS^{\mu\nu}=\xi^\mu\zeta^\nu-\xi^\nu\zeta^\mu.$$

Тогда, если ξ^μ и ζ^μ имеют вид $(0,\,dx^1,\,0,\,0)$ и $(0,\,0,\,dx^2,\,0)$, то две компоненты $dS^{\mu\nu}$ выглядят следующим образом:

$$dS^{12}=dx^1dx^2;\quad dS^{21}=-dx^1dx^2,$$

а остальные компоненты обращаются в нуль. Левая часть (21.6) принимает вид $\iint A_{\mu:\nu}\,dS^{\mu\nu}$; правая часть (21.6) есть, очевидно, $\int A_\mu\,dx^\mu$, поэтому имеем

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\text{Поверхность}}(A_{\mu:\nu}-A_{\nu:\mu})\,dS^{\mu\nu}=\int\limits_{\text{Периметр}}A_\mu\,dx^\mu. \tag{21.7}$$

22. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Уравнение Даламбера $\Box V=0$ для скалярного поля V с учетом (10.9) дает

$$g^{\mu\nu}\left(V_{,\mu\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}V_{,\alpha}\right)=0. \tag{22.1}$$

В плоском пространстве в неортогональной системе координат каждая из четырех координат x^λ удовлетворяет уравнению

$\Box x^\lambda = 0$. В (22.1) можно в качестве V подставить x^λ. Так как в отличие от V x^λ не является скаляром, полученное уравнение, разумеется, не будет тензорным, т. е. это уравнение справедливо только в определенных координатных системах. Оно накладывает на координаты некоторые ограничения.

Если в качестве V подставить x^λ, то $V_,$ следует заменить величиной $x^\lambda{}_{,\alpha} = g^\lambda_\alpha$. Тогда уравнение (22.1) примет вид

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0. \tag{22.2}$$

Координаты, удовлетворяющие этому условию, называют *гармоническими*. Они аппроксимируют неортогональные координаты с максимальной точностью, какая только возможна в искривленном пространстве. При желании их можно использовать в любой ситуации, однако очень часто дело того не стоит, так как тензорный формализм в произвольных координатах действительно является весьма удобным аппаратом. При рассмотрении гравитационных волн гармонические координаты все же оказываются очень полезными.

Из (7.9) и (7.6) имеем в произвольных координатах

$$g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\Gamma_{\alpha\beta\sigma} + \Gamma_{\beta\alpha\sigma}) = -g^{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\beta\sigma} - g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\sigma}. \tag{22.3}$$

Отсюда с учетом (20.6) следует равенство

$$(g^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\sigma} = (-g^{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\beta\sigma} - g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\sigma} + g^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\sigma\beta})\sqrt{\ }. \tag{22.4}$$

Сворачивая его по двум индексам (полагаем $\sigma=\nu$), получаем

$$(g^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\nu} = -g^{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\beta\nu}\sqrt{\ }. \tag{22.5}$$

Видно, что альтернативная форма записи условий гармоничности есть

$$(g^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\nu} = 0. \tag{22.6}$$

23. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Уравнения Максвелла в стандартной записи имеют вид:

$$\mathbf{E} = -(1/c)\,\partial\mathbf{A}/\partial t - \operatorname{grad}\Phi; \tag{23.1}$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}; \tag{23.2}$$

$$(1/c)\,\partial\mathbf{H}/\partial t = -\operatorname{rot}\mathbf{E}; \tag{23.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0; \tag{23.4}$$

$$(1/c)\,\partial\mathbf{E}/\partial t = \operatorname{rot}\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{j}; \tag{23.5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{23.6}$$

Сначала запишем их в четырехмерной форме в рамках специальной теории относительности. Потенциалы **A** и Φ образуют 4-вектор k согласно соотношениям

$$k^0 = \Phi, \quad k^m = A^m, \quad m = 1, 2, 3.$$

Введем

$$F_{\mu\nu} = k_{\mu,\nu} - k_{\nu,\mu}. \tag{23.7}$$

Тогда в соответствии с (23.1)

$$E^1 = -\frac{\partial k^1}{\partial x^0} - \frac{\partial k^0}{\partial x^1} = \frac{\partial k_1}{\partial x^0} - \frac{\partial k_0}{\partial x^1} = F_{10} = -F^{10},$$

и согласно (23.2)

$$H^1 = \frac{\partial k^3}{\partial x^2} - \frac{\partial k^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial k_3}{\partial x^2} + \frac{\partial k_2}{\partial x^3} = F_{23} = F^{23}.$$

Таким образом, шесть компонент антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$ определяют полевые величины **E** и **H**.

Из (23.7) следует, что

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0. \tag{23.8}$$

Это уравнение содержит в себе уравнения Максвелла (23.3) и (23.4). Далее, из (23.6) имеем

$$F^{0\nu}{}_{,\nu} = F^{0m}{}_{,m} = -F^{m0}{}_{,m} = \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{23.9}$$

Аналогично из (23.5) получаем

$$F^{1\nu}{}_{,\nu} = F^{10}{}_{,0} + F^{12}{}_{,2} + F^{13}{}_{,3} = -\frac{\partial E^1}{\partial x^0} + \frac{\partial H^3}{\partial x^2} - \frac{\partial H^2}{\partial x^3} = 4\pi j^1. \tag{23.10}$$

Плотность заряда ρ и ток j^m образуют 4-вектор J^μ, согласно соотношениям $J^0 = \rho$, $J^m = j^m$. Тогда (23.9) и (23.10) объединяются в одно уравнение

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^\mu. \tag{23.11}$$

Итак, уравнения Максвелла переписаны в четырехмерной форме, требуемой специальной теорией относительности.

Чтобы перейти к общей теории относительности, нужно записать уравнения в ковариантной форме. С учетом равенства (21.5) тензор (23.7) можно непосредственно обобщить:

$$F_{\mu\nu} = k_{\mu:\nu} - k_{\nu:\mu}.$$

Это позволяет определить ковариантные полевые величины $F_{\mu\nu}$. Далее получаем

$$F_{\mu\nu:\sigma} = F_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} F_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} F_{\mu\alpha}.$$

Выполняя циклическую перестановку индексов μ, ν, σ и складывая полученные таким образом уравнения, имеем [с учетом (23.8)]:

$$F_{\mu\nu:\sigma} + F_{\nu\sigma:\mu} + F_{\sigma\mu:\nu} = F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0. \tag{23.12}$$

В результате это уравнение Максвелла автоматически приобретает ковариантный вид.

Остается разобраться с уравнением (23.11). В рамках общей теории относительности оно не справедливо и должно быть заменено ковариантным уравнением

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^{\mu}. \tag{23.13}$$

Из равенства (21.3), которое справедливо для любого антисимметричного тензора второго ранга, получаем

$$(F^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\nu} = 4\pi J^{\mu}\sqrt{\ }.$$

Отсюда непосредственно следует равенство

$$(J^{\mu}\sqrt{\ })_{,\mu} = (4\pi)^{-1}(F^{\mu\nu}\sqrt{\ })_{,\mu\nu} = 0.$$

Это уравнение, аналогичное уравнению (21.2), представляет собой закон сохранения электричества. Учет кривизны пространства не нарушает его, закон выполняется точно.

24. МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА В ПРИСУТСТВИИ МАТЕРИИ

В отсутствие материи уравнения Эйнштейна имеют вид

$$R^{\mu\nu} = 0. \tag{24.1}$$

Отсюда следует, что $R=0$ и, таким образом,

$$R^{\mu\nu} - (1/2)\,g^{\mu\nu}R = 0. \tag{24.2}$$

Если взять за исходное уравнение (24.2), то путем свертки можно получить

$$R - 2R = 0$$

и, следовательно, вернуться к (24.1). В качестве основных уравнений пустого пространства можно использовать как (24.1), так и (24.2).

В присутствии материи эти уравнения необходимо модифицировать. Предположим, что модифицированное уравнение (24.1) записывается так:

$$R^{\mu\nu} = X^{\mu\nu}, \tag{24.3}$$

а (24.2) принимает вид

$$R^{\mu\nu} - (1/2)\,g^{\mu\nu}R = Y^{\mu\nu}. \tag{24.4}$$

Здесь $X^{\mu\nu}$ и $Y^{\mu\nu}$ — симметричные тензоры второго ранга, отражающие присутствие материи.

Теперь видно, что (24.4) — более удобная для работы запись, так как имеют место тождества Бианки (14.3), которые показывают, что

$$[R^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} R]_{:\nu} = 0.$$

Следовательно, (24.4) влечет за собой равенство:

$$Y^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0. \tag{24.5}$$

Любое тензорное поле $Y^{\mu\nu}$, порождаемое материей, должно удовлетворять этому условию; в противном случае уравнения (24.4) не являются согласованными.

Для удобства введем в уравнение (24.4) коэффициент —8π, и перепишем его в виде

$$R^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} R = -8\pi Y^{\mu\nu}. \tag{24.6}$$

В дальнейшем будет показано, что тензор $Y^{\mu\nu}$ с этим коэффициентом следует интерпретировать как плотность и поток энергии и импульса (негравитационного происхождения), причем $Y^{\mu 0}$ представляет собой плотность, а $Y^{\mu r}$ — поток.

В плоском пространстве уравнение (24.5) имело бы вид

$$Y^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

и влекло бы за собой закон сохранения энергии и импульса. В искривленном пространстве энергия и импульс сохраняются лишь приближенно. Отклонение от закона сохранения вызвано действием гравитационного поля на материю и наличием собственных энергии и импульса гравитационного поля.

25. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ — ИМПУЛЬСА МАТЕРИИ

Пусть задано распределение материи, скорость которой непрерывно меняется от точки к точке. Если обозначить z^μ координаты элемента материи, то можно ввести вектор скорости $v^\mu = dz^\mu/ds$, который, подобно полевым величинам, будет непрерывной функцией координат точки. Вектор скорсти обладает следующими свойствами:

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1;$$

$$0 = (g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu)_{:\sigma} = g_{\mu\nu} (v^\mu v^\nu{}_{:\sigma} + v^\mu{}_{:\sigma} v^\nu) = 2 g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu{}_{:\sigma}. \tag{25.1}$$

Отсюда

$$v_\nu v^\nu{}_{:\sigma} = 0. \tag{25.2}$$

Можно ввести скалярное поле ρ таким образом, чтобы векторное поле ρv^μ определяло плотность и поток материи так же, как J^μ определяет плотность и поток электрического заряда; другими словами, чтобы $\rho v^0 \sqrt{\ }$ являлось плотностью, а $\rho v^m \sqrt{\ }$ — потоком. Необходимое условие для сохранения материи:

$$(\rho v^\mu \sqrt{\ })_{,\mu} = 0,$$

или

$$(\rho v^\mu)_{:\mu} = 0. \qquad (25.3)$$

В рассматриваемом случае плотность и поток энергии материи будут иметь вид $\rho v^0 v^0 \sqrt{\ }$ и $\rho v^0 v^m \sqrt{\ }$ соответственно, плотность и поток импульса — $\rho v^n v^0 \sqrt{\ }$ и $\rho v^n v^m \sqrt{\ }$. Положим

$$T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu. \qquad (25.4)$$

Тогда $T^{\mu\nu} \sqrt{\ }$ содержит плотность и поток энергии и импульса. Эту величину называют тензором энергии — импульса материи. Тензор, $T^{\mu\nu}$, разумеется, симметричен.

Можно ли в качестве материального члена в правой части уравнений Эйнштейна (24.6) использовать $T^{\mu\nu}$? Для этого требуется, чтобы выполнялось равенство $T^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0$. Из (25.4) имеем

$$T^{\mu\nu}{}_{:\nu} = (\rho v^\mu v^\nu)_{:\nu} = v^\mu (\rho v^\nu)_{:\nu} + \rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu}.$$

Первый член в правой части обращается в нуль в силу закона сохранения массы (25.3). Второй член исчезает, если материя движется по геодезическим, поскольку в случае, когда вместо того, чтобы быть заданной только на мировой линии, v^μ определена как непрерывная полевая функция, имеем

$$dv^\mu/ds = v^\mu{}_{,\nu} v^\nu.$$

Тогда (8.3) приобретает вид

$$(v^\mu{}_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} v^\sigma) v^\nu = 0,$$

или

$$v^\mu{}_{:\nu} v^\nu = 0. \qquad (25.5)$$

Теперь видно, что тензор энергии — импульса материи (25.4) с соответствующим численным множителем k можно подставить в уравнения Эйнштейна (24.4). Получим

$$R^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} R = k\rho v^\mu v^\nu. \qquad (25.6)$$

Определим теперь значение коэффициента k. Перейдем, следуя методу, изложенному в разд. 16, к ньютонову приближению. Заметим прежде, что сворачивая (25.6), имеем

$$-R = k\rho.$$

Тогда (25.6) можно записать в виде

$$R^{\mu\nu} = k\rho\, [v^\mu v^\nu - (1/2) g^{\mu\nu}].$$

В приближении слабого поля, в соответствии с (16.4), получаем

$$(1/2)\,g^{\rho\sigma}\,(g_{\rho\sigma,\mu\nu}-g_{\nu\sigma,\mu\rho}-g_{\mu\rho,\nu\sigma}+g_{\mu\nu,\rho\sigma})= \\ =k\rho\,[v_\mu v_\nu-(1/2)\,g_{\mu\nu}].$$

Рассмотрим статическое поле и статическое распределение материи. В этом случае $v_0=1$, $v_m=0$. Полагая $\mu=\nu=0$ и пренебрегая членами второго порядка малости, находим

$$-(1/2)\,\nabla^2 g_{00}=(1/2)\,k\rho,$$

или с учетом (16.6)

$$\nabla^2 V=-(1/2)\,k\rho.$$

Для того чтобы это совпало с уравнением Пуассона, нужно взять $k=-8\pi$.

Таким образом, уравнения Эйнштейна в присутствии движущейся материи имеют вид

$$R^{\mu\nu}-(1/2)\,g^{\mu\nu}R=-8\pi\rho v^\mu v^\nu. \qquad (25.7)$$

Тогда $T^{\mu\nu}$, задаваемое (25.4), совпадает с $Y^{\mu\nu}$ из уравнения (24.6).

Условие сохранения массы (25.3) дает

$$\rho_{:\mu}v^\mu+\rho v^\mu{}_{:\mu}=0;$$

следовательно,

$$\partial\rho/ds=(\partial\rho/\partial x^\mu)\,v^\mu=-\rho v^\mu{}_{:\mu}. \qquad (25.8)$$

Это условие фиксирует закон изменения ρ вдоль мировой линии элемента материи. При переходе от мировой линии некоторого элемента к мировой линии соседнего элемента условие (25.8) допускает произвольное изменение ρ. Значит, можно выбрать ρ, обращающимся в нуль везде, кроме семейства мировых линий, образующих трубку в пространстве — времени. Такое семейство описывало бы частицу конечных размеров. Вне частицы $\rho=0$; следовательно, применимы уравнения Эйнштейна для пустого пространства.

Заметим, что если принять общий вид полевых уравнений (25.7), то из них можно вывести два следствия: сохранение массы и движение материи по геодезическим. Вспомним для этого, что $[R^{\mu\nu}-(1/2)\,g^{\mu\nu}R]_{:\nu}$ обращается в нуль вследствие тождества Бианки, откуда имеем

$$(\rho v^\mu v^\nu)_{:\nu}=0,$$

или

$$v^\mu\,(\rho v^\nu)_{:\nu}+\rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu}=0. \qquad (25.9)$$

Умножим это уравнение на v_μ. Второй член даст нуль, что следует из (25.2), и останется $(\rho v^\nu)_{:\nu}=0$, а это как раз совпадает с условием сохранения (25.3). Теперь уравнение (25.9) сводится к равенству $v^{\nu} v^{\mu}{}_{:\nu} = 0$, т. е. к уравнению геодезической. Таким образом, нет необходимости делать предположение о том, что частица движется по геодезической. Для малой частицы движение вдоль геодезической обеспечивается применимостью уравнений Эйнштейна для пустого пространства в области вокруг частицы.

26. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ГРАВИТАЦИИ

Введем скаляр

$$I = \int R \sqrt{\ } \, d^4x, \tag{26.1}$$

где интегрирование проведено по определенному четырехмерному объему. Придадим $g_{\mu\nu}$ малое приращение $\delta g_{\mu\nu}$, оставляющее $g_{\mu\nu}$ и его первые производные неизменными на границе объема. Требование $\delta I = 0$ при произвольных $\delta g_{\mu\nu}$ приводит, как будет показано ниже, к уравнениям Эйнштейна для пустого пространства.

Из (14.4) имеем

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^* - L,$$

где

$$R^* = g^{\mu\nu} (\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\sigma}) \tag{26.2}$$

и

$$L = g^{\mu\nu} (\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}) . \tag{26.3}$$

Скаляр I содержит вторые производные $g_{\mu\nu}$, поскольку они входят в R^*. Однако эти производные входят лишь линейно и, следовательно, их можно исключить интегрированием по частям. Получим

$$\begin{aligned} R^* \sqrt{\ } = {} & (g^{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} \sqrt{\ })_{,\nu} - (g^{\mu\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \sqrt{\ })_{,\sigma} - \\ & - (g^{\mu\nu} \sqrt{\ })_{,\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} + (g^{\mu\nu} \sqrt{\ })_{,\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} . \end{aligned} \tag{26.4}$$

Два первых члена являются полными производными, и поэтому они не дают вклада в I. Тогда в (26.4) необходимо оставить только два последних члена. С учетом (22.5) и (22.4) они принимают вид

$$g^{\nu\beta} \Gamma^{\mu}_{\beta\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} \sqrt{\ } + (-2 g^{\nu\beta} \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} + g^{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\sigma\beta}) \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \sqrt{\ } .$$

Это совпадает с $2L\sqrt{\ }$ из (26.3). Таким образом, для I получаем выражение:

$$I = \int L \sqrt{\ } \, d^4x,$$

содержащее только $g_{\mu\nu}$ и его первые производные. Скаляр I является однородной квадратичной формой по первым производным.

Положим $\mathcal{L}=L\sqrt{\ }$ и возьмем эту величину (с соответствующим численным множителем, который будет определен ниже) в качестве плотности действия для гравитационного поля. Величина $\mathcal{L}$ не является скалярной плотностью, однако работать с ней удобнее, чем с величиной $R\sqrt{\ }$, являющейся скалярной плотностью, так как $\mathcal{L}$ не содержит вторых производных $g_{\mu\nu}$.

Согласно классической динамике, действие есть интеграл по времени от лагранжиана. В рассматриваемом случае

$$I=\int \mathcal{L}d^4x=\int dx_0\int \mathcal{L}dx^1dx^2dx^3,$$

так что лагранжианом, очевидно, является

$$\int \mathcal{L}dx^1dx^2dx^3.$$

Таким образом, $\mathcal{L}$ можно рассматривать и как плотность лагранжиана (в трех измерениях), и как плотность действия (в четырех измерениях). Компоненты $g_{\mu\nu}$ можно считать динамическими координатами, а их временные производные — скоростями. Заметим далее, что лагранжиан является квадратичной (неоднородной) формой по скоростям, как обычно и бывает в классической динамике.

Теперь проварьируем $\mathcal{L}$. Используя (20.6) и (22.5), получаем

$$\begin{aligned}\delta\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta\left(\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)+\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\,\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\\&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }_{,\alpha}\right)+\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\,\delta\left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)=\\&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }_{,\alpha}\right)-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\,\delta\left(g^{\alpha\nu}\sqrt{\ }\right)_{,\nu}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right),\end{aligned}\tag{26.5}$$

а согласно (22.3)

$$\begin{aligned}\delta\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)&=2\left(\delta\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\right)\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}g^{\mu\nu}\sqrt{\ }+\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)=\\&=2\delta\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)=\\&=-\delta\left(g^{\nu\beta}{}_{,\alpha}\sqrt{\ }\right)\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right).\end{aligned}\tag{26.6}$$

Вычитая (26.6) из (26.5), находим

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}&=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\right)_{,\alpha}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\,\delta\left(g^{\alpha\nu}\sqrt{\ }\right)_{,\nu}+\\&+\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right).\end{aligned}\tag{26.7}$$

Два первых члена отличаются от

$$-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)+\Gamma^{\beta}_{\mu\beta,\nu}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)$$

на полную производную. Отсюда имеем

$$\delta I=\delta\int \mathcal{L}d^4x=\int R_{\mu\nu}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)d^4x,\tag{26.8}$$

где $R_{\mu\nu}$ задается формулой (14.4). При произвольных $\delta g_{\mu\nu}$ величины $\delta\left(g^{\mu\nu}\sqrt{\ }\right)$ также являются произвольными и независимыми, тогда требование обращения (26.8) в нуль приводит к уравнениям Эйнштейна в форме (24.1).

Методом аналогичным (7.9) можно показать, что

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \tag{26.9}$$

В соответствии с (20.5) получим

$$\delta \sqrt{} = (1/2) \sqrt{}\, g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \tag{26.10}$$

Таким образом,

$$\delta (g^{\mu\nu} \sqrt{}) = -[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - (1/2) g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}] \sqrt{}\, \delta g_{\alpha\beta}.$$

Тогда (26.8) можно записать в другой форме:

$$\delta I = -\int R_{\mu\nu} \left(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \right) \sqrt{}\, \delta g_{\alpha\beta}\, d^4x =$$

$$= -\int \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) \sqrt{}\, \delta g_{\alpha\beta}\, d^4x. \tag{26.11}$$

Требование обращения (26.11) в нуль приводит к уравнениям Эйнштейна в форме (24.2).

27. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАТЕРИИ

Рассмотрим непрерывное распределение материи, скорость которой непрерывно меняется от точки к точке, подобно тому, как это было сделано в разд. 25. Запишем вариационный принцип в присутствии материи, взаимодействующей с гравитационным полем, в виде

$$\delta (I_g + I_m) = 0, \tag{27.1}$$

где гравитационная часть действия I_g совпадает с точностью до некоторого численного множителя k с I из предыдущего раздела, а I_m — материальная часть действия, которая сейчас и будет определена. Условие (27.1) должно приводить к уравнениям Эйнштейна (25.7) для гравитационного поля в присутствии материи и к уравнениям геодезической для движения материи.

В дальнейшем необходимо будет знать, как влияет на I_m произвольная вариация положения элемента материи. Рассуждение станет более понятным, если предварительно рассмотреть чисто кинематические вариации безотносительно к метрике $g_{\mu\nu}$. В этом случае существует принципиальное различие между ковариантными и контравариантными векторами, и нельзя перейти от одного к другому. Скорость описывается отношением компонент контравариантного вектора u^μ и не может быть нормирована без введения метрики.

Для непрерывного потока материи вектор скорости u^μ (с некоторым неизвестным множителем) задан в каждой точке. Можно построить совпадающую по направлению с u^μ контравариантную векторную плотность ρ^μ, которая определяет величину и скорость потока в виде

$$p^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3,$$

равного количеству материи в элементе объема $dx^1dx^2dx^3$ в определенный момент времени и

$$p^1\,dx^0\,dx^2\,dx^3,$$

равного количеству материи, прошедшей через элемент поверхности dx^2dx^3 за время dx^0. Предположим, что материя сохраняется, тогда

$$p^\mu{}_{,\mu} = 0. \tag{27.2}$$

Пусть каждый элемент материи смещен из точки z^μ в точку $z^\mu + b^\mu$, где b^μ— мало. Требуется определить результирующее изменение p^μ в заданной точке x.

Сначала рассмотрим случай $b^0=0$. Изменение количества материи, находящейся в трехмерном объеме V, равно с обратным знаком количеству материи, прошедшей через границу объема

$$\delta\int\limits_V p^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3 = -\int p^0 b^r dS_r, \quad r = 1, 2, 3,$$

где dS_r обозначает элемент поверхности, ограничивающей объем V. Правую часть этого равенства можно преобразовать по теореме Гаусса; тогда получим

$$\delta p^0 = -(p^0 b^r)_{,r}. \tag{27.3}$$

Теперь этот результат нужно обобщить на случай $b^0 \neq 0$. Если b^μ пропорционально p^μ, то каждый элемент материи смещается вдоль своей мировой линии и, следовательно, вектор p^μ не изменяется. Обобщение (27.3) имеет, очевидно, следующий вид:

$$\delta p^0 = (p^r b^0 - p^0 b^r)_{,r},$$

так как при $b^0=0$ последнее уравнение совпадает с (27.3), а при b^μ, пропорциональном p^μ, дает $\delta p^0=0$. Соответствующая формула справедлива и для других компонент p^μ, так что окончательно общий результат имеет вид

$$\delta p^\mu = (p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)_{,\nu}. \tag{27.4}$$

При описании непрерывного потока материи p^μ является основной характеристикой, которая должна войти в функцию действия. Величина p^μ должна варьироваться, согласно формуле (27.4), и затем после соответствующего интегрирования по частям коэффициенты при каждой из компонент b^μ должны быть приравнены нулю. Это приведет к уравнениям движения материи.

Действие для изолированной частицы массы m имеет вид

$$-m\int ds. \qquad (27.5)$$

Необходимость введения коэффициента $-m$ станет понятной, если рассмотреть случай специальной теории относительности, для которой лагранжиан имел бы вид производной по времени от (27.5), а именно:

$$L = -m ds/dx^0 = -m\,[1-(dx^r/dx^0)\,dx^r/dx^0]^{1/2}$$

(суммирование проведено по r; $r=1, 2, 3$). Отсюда получаем выражение для импульса:

$$\frac{\partial L}{\partial\,(\partial x^r/dx^0)} = m\frac{dx^r}{dx^0}\left(1-\frac{dx^n}{dx^0}\,\frac{dx^n}{dx^0}\right)^{-1/2} = m\frac{dx^r}{ds}.$$

Действие для непрерывно распределенной материи получим заменой m в (27.5) величиной $p^0\,dx^1\,dx^2\,d^3x$ и интегрированием:

$$I_m = -\int p^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,ds. \qquad (27.6)$$

Чтобы записать I_m в более понятной форме, введем метрический тензор и положим

$$p^\mu = \rho v^\mu \sqrt{}, \qquad (27.7)$$

где ρ — скаляр, определяющий плотность, а v^μ — вектор единичной длины, совпадающий по направлению с u^μ. Получим

$$I_m = -\int \rho\sqrt{}\;v^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,ds = -\int\rho\sqrt{}\;d^4x, \qquad (27.8)$$

где учтено, что $v^0 ds = dx^0$.

Такая форма записи действия не удобна для варьирования, так как ρ и v^μ не являются независимыми переменными. Чтобы можно было воспользоваться формулой (27.4), ρ и v^μ должны быть выражены через p^μ. Из (27.7) находим

$$(p^\mu p_\mu)^{1/2} = \rho\sqrt{}.$$

Тогда (27.8) принимает вид

$$I_m = -\int (p^\mu p_\mu)^{1/2}\,d^4x. \qquad (27.9)$$

Для определения вариации этого выражения воспользуемся соотношением:

$$\delta\,(p^\mu p_\mu)^{1/2} = (1/2)\,(p^\lambda p_\lambda)^{-1/2}\,(p^\mu p^\nu\,\delta g_{\mu\nu} + 2p_\mu\,\delta p^\mu) =$$
$$= (1/2)\,\rho v^\mu v^\nu\sqrt{}\;\delta g_{\mu\nu} + v_\mu\,\delta p^\mu.$$

Теперь из вариационного принципа (27.1) после подстановки в него (26.11), умноженного на коэффициент k, имеем

$$\delta\,(I_g + I_m) =$$
$$= -\int\left[k\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)+\frac{1}{2}\rho v^\mu v^\nu\right]\sqrt{}\;\delta g_{\mu\nu}\,d^4x - \int v_\mu\,\delta p^\mu\,d^4x. \qquad (27.10)$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\delta g_{\mu\nu}$ и выбирая $k = (16\pi)^{-1}$, получаем уравнения Эйнштейна (25.7). Последний член (27.10), с учетом (27.4) и (25.2), дает

$$- \int v_\mu (p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu)_{,\nu} d^4x = \int v_{\mu,\nu} (p^\nu b^\mu - p^\mu b^\nu) d^4x =$$
$$= \int (v_{\mu,\nu} - v_{\nu,\mu}) p^\nu b^\mu d^4x = \int (v_{\mu:\nu} - v_{\nu:\mu}) \rho v^\nu b^\mu \sqrt{\ } d^4x =$$
$$= \int v_{\mu:\nu} \rho v^\nu b^\mu \sqrt{\ } d^4x. \qquad (27.11)$$

Приравняв нулю коэффициент при b^μ, получим уравнение геодезической (25.5).

28. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Обычное выражение для плотности действия электромагнитного поля имеет вид

$$(8\pi)^{-1} (E^2 - H^2).$$

Если записать его в четырехмерных обозначениях специальной теории относительности, обсуждавшихся в разд. 23, то получим

$$-(16\pi)^{-1} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Это приводит к следующему выражению для инвариантного действия в общей теории относительности:

$$I_{\text{эм}} = (-16\pi)^{-1} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{\ } d^4x. \qquad (28.1)$$

Следует принять во внимание, что $F_{\mu\nu} = k_{\mu,\nu} - k_{\nu,\mu}$; значит, $I_{\text{эм}}$ является функцией только $g_{\mu\nu}$ и производных от электромагнитных потенциалов.

Будем варьировать сначала $g_{\mu\nu}$, оставляя k_σ постоянным; тогда $F_{\mu\nu}$ (но не $F^{\mu\nu}$) является константой. Из (26.10) и (26.9) имеем

$$\delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{\ }) = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \delta \sqrt{\ } + F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sqrt{\ }\, \delta (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}) =$$
$$= (1/2) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \sqrt{\ }\, \delta g_{\rho\sigma} - 2 F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sqrt{\ }\, g^{\mu\rho} g^{\alpha\sigma} g^{\nu\beta} \delta g_{\rho\sigma}.$$

Таким образом,

$$\delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{\ }) = [(1/2) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 2 F^\rho{}_\nu F^{\sigma\nu}] \sqrt{\ }\, \delta g_{\rho\sigma} = 8\pi E^{\rho\sigma} \sqrt{\ }\, \delta g_{\rho\sigma}, \qquad (28.2)$$

где симметричный тензор $E^{\rho\sigma}$, определяемый соотношением

$$4\pi E^{\rho\sigma} = - F^\rho{}_\nu F^{\sigma\nu} + (1/4) g^{\rho\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad (28.3)$$

есть тензор энергии — импульса электромагнитного поля. Заметим, что в специальной теории относительности

$$4\pi E^{00} = E^2 - (1/2)(E^2 - H^2) = (1/2)(E^2 + H^2);$$
$$4\pi E^{01} = - F^0{}_2 F^{12} - F^0{}_3 F^{13} = E^2 H^3 - E^3 H^2,$$

т. е. E^{00} описывает плотность энергии, а E^{0n} совпадает с вектором Пойнтинга, характеризующим интенсивность потока энергии.

Вариация k_μ при фиксированных $g_{\alpha\beta}$ с учетом (21.3) дает

$$\delta (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{}) = 2F^{\mu\nu}\sqrt{}\,\delta F_{\mu\nu} = 4F^{\mu\nu}\sqrt{}\,\delta k_{\mu,\nu} =$$

$$= 4\,(F^{\mu\nu}\sqrt{}\,\delta k_\mu)_{,\nu} - 4\,(F^{\mu\nu}\sqrt{})_{,\nu}\,\delta k_\mu =$$

$$= 4\,(F^{\mu\nu}\sqrt{}\,\delta k_\mu)_{,\nu} - 4F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\sqrt{}\,\delta k_\mu. \tag{28.4}$$

Складывая (28.2) с (28.4) и умножая результат на -16π, получаем выражение для полной вариации:

$$\delta I_{\text{эм}} = \int \left[-\frac{1}{2} E^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} + (4\pi)^{-1} F^{\mu\nu}{}_{:\nu}\,\delta k_\mu \right] \sqrt{}\,d^4x. \tag{28.5}$$

29. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННОЙ МАТЕРИИ

В предыдущем разделе было рассмотрено электромагнитное поле в отсутствие зарядов. Чтобы описать заряды, необходимо ввести соответствующий член в действие. Для уединенной частицы с зарядом e дополнительный член в действии имеет вид

$$-e \int k_\mu\,dx^\mu = -e \int k_\mu v^\mu ds, \tag{29.1}$$

где интегрирование ведется вдоль мировой линии.

Если частица, несущая заряд, является точечной, то возникают трудности, связанные с тем, что ее электрическое поле содержит сингулярность*. Эти трудности можно обойти, если рассматривать вместо точечного носителя заряда непрерывно распределенную материю. Будем описывать эту материю в рамках формализма, развитого в разд. 27, предполагая, что каждый элемент материи несет заряд.

В кинематических задачах фигурировала контравариантная векторная плотность p^μ, определяющая плотность и поток материи. Здесь необходимо ввести контравариантную векторную плотность $\mathcal{J}^\mu$, определяющую плотность и поток электричества. Эти два вектора должны совпадать по направлению. При малых смещениях приращение векторной плотности $\mathcal{J}^\mu$ в соответствии с (27.4) можно записать следующим образом:

$$\delta\mathcal{J}^\mu = (\mathcal{J}^\nu b^\mu - \mathcal{J}^\mu b^\nu)_{,\nu} \tag{29.2}$$

с теми же значениями b^μ, что и в (17.4).

---

* Эта проблема обсуждается, например, в книге **В. Паули.** Теория относительности. Пер. с англ. М. — Л., ГИТЛ, 1947. — *Прим. пер.*

Для частицы, несущей заряд, действие (29.1) в случае непрерывного распределения заряженной материи приводит [аналогично (27.6)] к

$$I_q = -\int \mathcal{J}^0 k_\mu v^\mu \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \, ds.$$

При введении метрики полагаем, в соответствии с (27.7), что

$$\mathcal{J}^\mu = \sigma v^\mu \sqrt{\ }, \tag{29.3}$$

где σ — скалярная функция, определяющая плотность заряда. Тогда действие принимает вид, аналогичный (27.8):

$$I_q = -\int \sigma k_\mu v^\mu \sqrt{\ } \, d^4x = -\int k_\mu \mathcal{J}^\mu \, d^4x. \tag{29.4}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \delta I_q &= -\int [\mathcal{J}^\mu \, \delta k_\mu + k_\mu (\mathcal{J}^\nu b^\mu - \mathcal{J}^\mu b^\nu)_{,\nu}] \, d^4x = \\ &= \int [-\sigma v^\mu \sqrt{\ } \, \delta k_\mu + k_{\mu,\nu} (\mathcal{J}^\nu b^\mu - \mathcal{J}^\mu b^\nu)] \, d^4x = \\ &= \int \sigma (-v^\mu \, \delta k_\mu + F_{\mu\nu} v^\nu b^\mu) \sqrt{\ } \, d^4x. \end{aligned} \tag{29.5}$$

Уравнения взаимодействия заряженной материи с гравитационным и электромагнитным полями следуют из общего вариационного принципа

$$\delta (I_g + I_m + I_{\text{эм}} + I_q) = 0. \tag{29.6}$$

Итак, возьмем сумму выражений (29.5), (28.5) и (27.10) с заменой последнего члена в (27.10) на (27.11) и приравняем нулю суммарные коэффициенты при вариациях $\delta g_{\mu\nu}$, δk_μ и b^μ.

Если коэффициент при $\sqrt{\ }\delta g_{\mu\nu}$ умножить на -16π, то получим

$$R^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} R + 8\pi\rho v^\mu v^\nu + 8\pi E^{\mu\nu} = 0. \tag{29.7}$$

Уравнение (29.7) представляет собой уравнение Эйнштейна (24.6) с $Y^{\mu\nu}$, состоящим из двух членов: тензора энергии — импульса материи и тензора энергии — импульса электромагнитного поля.

Коэффициент при $\sqrt{\ }\delta k_\mu$ дает

$$-\sigma v^\mu + (4\pi)^{-1} F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 0.$$

Из (29.3) видно, что σv^μ совпадает с вектором тока J^μ; таким образом,

$$F^{\mu\nu}{}_{:\nu} = 4\pi J^\mu. \tag{29.8}$$

Уравнение (29.8) представляет собой уравнение Максвелла (23.13) в присутствии зарядов.

Наконец, для коэффициента при $\sqrt{\ }b^\mu$ находим

$$\rho v_{\mu:\nu} v^\nu + \sigma F_{\mu\nu} v^\nu = 0,$$

или

$$\rho v_{\mu:\nu} v^\nu + F_{\mu\nu} J^\nu = 0. \tag{29.9}$$

Второй член в (29.9) представляет собой силу Лоренца, приводящую к отклонению траектории элемента материи от геодезической.

Уравнение (29.9) является следствием уравнений (29.7) и (29.8). Действительно, возьмем ковариантную дивергенцию от уравнения (29.7). С учетом тождеств Бианки получим

$$(\rho v^\mu v^\nu + E^{\mu\nu})_{:\nu} = 0. \tag{29.10}$$

Далее, согласно (28.3), и с использованием (23.12) и (29.8) имеем

$$4\pi E^{\mu\nu}{}_{:\nu} = -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_{\alpha:\nu} - F^{\mu\alpha}{}_{:\nu} F^\nu{}_\alpha + (1/2) g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta:\nu} =$$
$$= -F^{\mu\alpha} F^\nu{}_{\alpha:\nu} - (1/2) g^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} (F_{\rho\sigma:\nu} - F_{\rho\nu:\sigma} - F_{\nu\sigma:\rho}) = 4\pi F^{\mu\alpha} J_\alpha.$$

Таким образом, (29.10) принимает вид

$$v^\mu (\rho v^\nu)_{:\nu} + \rho v^\nu v^\mu{}_{:\nu} + F^{\mu\alpha} J_\alpha = 0. \tag{29.11}$$

Умножая (29.11) на v_μ и используя (25.2), получаем

$$(\rho v^\nu)_{:\nu} = -F^{\mu\alpha} v_\mu J_\alpha = 0$$

(здесь учтено условие $J_\alpha = \sigma v_\alpha$, заключающееся в том, что J_α и v_α должны совпадать по направлению). Тогда первый член в (29.11) обращается в нуль, и мы приходим к (29.9). Таким образом, уравнения, следующие из вариационного принципа (29.6), не являются независимыми, что далеко не случайно. Причины этого обсуждаются в разд. 30.

30. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Метод, развитый в разд. 29, можно обобщить на случай взаимодействия гравитационного поля с любыми другими полями, взаимодействующими между собой. Вариационный принцип в общем случае можно записать в виде

$$\delta (I_g + I') = 0, \tag{30.1}$$

где I_g — гравитационное действие, обсуждавшееся выше, а I' — действие для всех остальных полей, состоящее из суммы слагаемых, по одному для каждого поля. Большим преимуществом использования вариационного принципа является возможность легко получать корректные уравнения любых взаимодействующих полей. Необходимо лишь найти действие для каждого из рассматриваемых полей и включить все эти члены в (30.1).

Гравитационное действие $I_g=\int \mathscr{L} d^4x$, где $\mathscr{L}$ — лагранжева плотность из разд. 26 с множителем $(16\pi)^{-1}$. Для вариации I_g имеем

$$\delta I_g=\int\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}}\,\delta g_{\alpha\beta}+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\,\delta g_{\alpha\beta,\nu}\right)d^4x=$$

$$=\int\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}}-\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\right)_{,\nu}\right]\delta g_{\alpha\beta}\,d^4x.$$

Выкладки разд. 26, приводящие к (26.11), показывают, что

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}}-\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\right)_{,\nu}=-(16\pi)^{-1}\left(R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right)\sqrt{}. \qquad (30.2)$$

Пусть φ_n ($n=1$, 2, 3) обозначает негравитационные полевые величины. Предполагается, что каждая из φ_n является компонентой тензора; конкретные тензорные свойства несущественны. Величина I' имеет вид интеграла от скалярной плотности: $I'=\int \mathscr{L}' d^4x$, где $\mathscr{L}'$ — функция φ_n и их первых (возможно, также и высших) производных.

Вариация действия дает следующий результат:

$$\delta(I_g+I')=\int\left(p^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}+\sum_n \chi^n\,\delta\varphi_n\right)\sqrt{}\,d^4x, \qquad (30.3)$$

где $p^{\mu\nu}=p^{\nu\mu}$, так как любой член, содержащий δ (производная от полевой величины), при помощи интегрирования по частям можно преобразовать к выражению, которое включается в (30.3). Таким образом, вариационный принцип (30.1) приводит к полевым уравнениям

$$p^{\mu\nu}=0; \qquad (30.4)$$

$$\chi^n=0. \qquad (30.5)$$

Здесь $p^{\mu\nu}$ состоит из двух слагаемых: члена (30.2), обусловленного I_g, и члена (обозначим его $N^{\mu\nu}$), порождаемого $\mathscr{L}'$. Разумеется, $N^{\mu\nu}=N^{\nu\mu}$. Величина $\mathscr{L}'$ обычно не содержит производных от $g_{\mu\nu}$; в этом случае

$$N^{\mu\nu}\sqrt{}=\partial\mathscr{L}'/\partial g_{\mu\nu}. \qquad (30.6)$$

Теперь уравнение (30.4) принимает вид

$$R^{\mu\nu}-(1/2)\,g^{\mu\nu}R-16\pi N^{\mu\nu}=0.$$

Это не что иное, как уравнение Эйнштейна (24.6) с

$$Y^{\mu\nu}=-2N^{\mu\nu}. \qquad (30.7)$$

Отсюда видно, какой вклад в правую часть дает каждое из полей в зависимости от того [согласно (30.6)], каким образом входит $g_{\mu\nu}$ в действие для этого поля.

Для согласованности уравнений $N^{\mu\nu}$ должно удовлетворять соотношению $N^{\mu\nu}{}_{:\nu}=0$. Это свойство можно в самом общем виде вывести из условия, что I' инвариантно относительно преобразований координат, оставляющих неизменной граничную поверхность. Рассмотрим преобразование координат, скажем, $x^{\mu'} = x^\mu + b^\mu$, где b^μ мало и является функцией x, и будем искать вариацию I' в первом порядке по b^μ. Трансформационный закон для $g_{\mu\nu}$ имеет [согласно (3.7)] вид

$$g_{\mu\nu}(x) = x^{\alpha'}_{,\mu} x^{\beta'}_{,\nu} g_{\alpha'\beta'}(x'), \tag{30.8}$$

где штрихованные индексы стоят при преобразованном тензоре. Пусть $\delta g_{\alpha\beta}$ обозначает изменение $g_{\alpha\beta}$ в первом порядке не при фиксированном значении поля, а при фиксированных значениях координат, в которых $g_{\alpha\beta}$ задано, так что

$$g_{\alpha'\beta'}(x') = g_{\alpha\beta}(x') + \delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x) + g_{\alpha\beta,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\alpha\beta}.$$

Имеем далее

$$x^{\alpha'}_{,\mu} = (x^\alpha + b^\alpha)_{,\mu} = g^\alpha_\mu + b^\alpha_{,\mu}.$$

Тогда из (30.8) следует, что

$$g_{\mu\nu}(x) = (g^\alpha_\mu + b^\alpha_{,\mu})(g^\beta_\nu + b^\beta_{,\nu})[g_{\alpha\beta}(x) + g_{\alpha\beta,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\alpha\beta}] =$$
$$= g_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\nu,\sigma} b^\sigma + \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\beta} b^\beta_{,\nu} + g_{\alpha\nu} b^\alpha_{,\mu}.$$

Итак,

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} b^\alpha_{,\nu} - g_{\nu\alpha} b^\alpha_{,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} b^\sigma.$$

Определим теперь вариацию I' при таком изменении $g_{\mu\nu}$; остальные поля имеют в точке $x^{\mu'}$ те же значения, что и до преобразования координат в точке x^μ. Воспользовавшись (30.6), и на основании теоремы, выражаемой формулой (21.4), справедливой для произвольного симметричного тензора второго ранга, находим

$$\delta I' = \int N^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{\ } d^4x = \int N^{\mu\nu}(-g_{\mu\alpha} b^\alpha_{,\nu} - g_{\nu\alpha} b^\alpha_{,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma} b^\sigma) \sqrt{\ } d^4x =$$
$$= \int [2(N_\alpha{}^\nu \sqrt{\ })_{,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha} N^{\mu\nu} \sqrt{\ }] b^\alpha d^4x = 2 \int N_\alpha{}^\nu{}_{:\nu} b^\alpha \sqrt{\ } d^4x.$$

Инвариантность I' означает, что величина $\delta I'$ должна обращаться в нуль при любых значениях b^α. Следовательно, $N_\alpha{}^\nu{}_{:\nu} = 0$.

Вследствие этого равенства полевые уравнения (30.4), (30.5) не являются независимыми.

31. ПСЕВДОТЕНЗОР ЭНЕРГИИ — ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Введем величину $t_\mu{}^\nu$, определяемую соотношением

$$t_\mu{}^\nu \sqrt{\ } = (\partial \mathcal{L}/\partial g_{\alpha\beta,\nu}) g_{\alpha\beta,\mu} - g^\nu_\mu \mathcal{L}. \tag{31.1}$$

Тогда имеем

$$(t_\mu{}^\nu \sqrt{\ })_{,\nu} = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\right)_{,\nu} g_{\alpha\beta,\mu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\mu\nu} - \mathscr{L}_{,\mu}.$$

Далее,

$$\mathscr{L}_{,\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta,\mu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta,\nu\mu}.$$

Согласно (30.2),

$$(t_\mu{}^\nu \sqrt{\ })_{,\nu} = \left[\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\right)_{,\nu} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{\alpha\beta}}\right] g_{\alpha\beta,\mu} =$$

$$= (16\pi)^{-1}\left[R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right] g_{\alpha\beta,\mu} \sqrt{\ }.$$

Теперь с помощью полевых уравнений (24.6) получаем

$$(t_\mu{}^\nu \sqrt{\ })_{,\nu} = -(1/2) Y^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \sqrt{\ };$$

таким образом, из (21.4) и условия $Y_\mu{}^\nu{}_{:\nu} = 0$ имеем

$$[(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu) \sqrt{\ }]_{,\nu} = 0. \qquad (31.2)$$

Мы пришли к закону сохранения, поэтому сохраняющуюся плотность $(t_\mu{}^\nu + Y_\mu{}^\nu)\sqrt{\ }$ естественно рассматривать в качестве плотности энергии и импульса *. Как было показано, $Y_\mu{}^\nu$ представляет собой энергию и импульс негравитационных полей; следовательно, $t_\mu{}^\nu$ описывает энергию и импульс гравитационного поля. Однако $t^{\mu\nu}$ *не является тензором.* Уравнение (31.1), определяющее $t_\mu{}^\nu$, можно записать в виде

$$t_\mu{}^\nu = (\partial L / \partial g_{\alpha\beta,\nu}) g_{\alpha\beta,\mu} - g_\mu^\nu L. \qquad (31.3)$$

Здесь L не скаляр, так как при его получении пришлось для исключения вторых производных трансформировать скаляр R, который был первоначально выбран в качестве действия. Значит, $t_\mu{}^\nu$ не может быть тензором. Эта величина получила название псевдотензор.

При нахождении выражения для энергии гравитационного поля невозможно удовлетворить одновременно следующим условиям: 1) после добавления к другим формам энергии величины $t_\mu{}^\nu$ полная энергия сохраняется; 2) энергия, заключенная в определенном (трехмерном) объеме в фиксированный момент времени, не зависит от выбора системы координат.

---

* К закону сохранения (31.2) приводит также выражение для $t_\mu{}^\nu \sqrt{\ }$, отличающееся от (31.1) членом вида $\partial \eta_\mu{}^{\nu\alpha} / \partial x^\alpha$, где $\eta_\mu{}^{\nu\alpha} = -\eta_\mu{}^{\alpha\nu}$, т. е. $t_\mu{}^\nu$ определено неоднозначно. Действительно, известно несколько выражений для этой величины: Эйнштейна, Ландау — Лифшица и Меллера — Мицкевича. — *Прим. пер.*

Таким образом, *гравитационную энергию, вообще говоря, нельзя локализовать.* В лучшем случае можно пользоваться псевдотензором, удовлетворяющим только условию 1). Это дает приближенную информацию о гравитационной энергии (впрочем, в некоторых специальных случаях эта информация может быть точной).

Запишем интеграл

$$\int \left(t_\mu{}^0 + Y_\mu{}^0\right) \sqrt{\ } \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 \tag{31.4}$$

по трехмерному объему, включающему некоторую физическую систему в определенный момент времени. Можно ожидать, что при стремлении объема к бесконечности мы получим полные энергию и импульс, причем: а) интеграл сходится, б) поток через поверхность, ограничивающую объем, стремится к нулю. Тогда из уравнения (31.2) видно, что значения интеграла (31.4) в момент времени $x^0=a$ и некоторый другой момент $x^0=b$ равны. Более того, этот интеграл не должен зависеть от выбора системы координат, так как можно, не изменяя координат в момент времени $x^0=a$, преобразовывать их при $x^0=b$. Таким образом, найдено однозначное сохраняющееся выражение для полных энергии и импульса.

Условия а) и б), необходимые для сохранения полных энергии и импульса, в практически интересных случаях выполняются редко. Эти условия имели бы место, если бы пространство было статическим вне конечной четырехмерной трубки; такая ситуация реализуется, когда некоторые материальные тела начинают двигаться в определенный момент времени, и это движение создает возмущения, распространяющиеся вовне со скоростью света. В случае обычной планетарной системы движение происходит от бесконечного прошлого и условия а), б) не выполняются. Особого обсуждения требует вопрос об энергии гравитационных волн; этой проблеме посвящен разд. 33.

32. ЯВНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПСЕВДОТЕНЗОРА

Формулу (31.1), определяющую $t_\mu{}^\nu$, можно записать так:

$$t_\mu{}^\nu \sqrt{\ } = (\partial \mathcal{L} / \partial q_{n,\nu}) \, q_{n,\mu} - g_\mu^\nu \mathcal{L}, \tag{32.1}$$

где q_n ($n=1, 2, \ldots, 10$) соответствуют десяти $g_{\mu\nu}$, и по всем значениям n проведено суммирование. Аналогично (32.1) можно переписать в виде

$$t_\mu{}^\nu \sqrt{\ } = (\partial \mathcal{L} / \partial Q_{m,\nu}) \, Q_{m,\mu} - g_\mu^\nu \, \mathcal{L}, \tag{32.2}$$

где Q_m — любые десять независимых функций q_n. Чтобы показать это, заметим, что

$$Q_{m,\sigma} = (\partial Q_m / \partial q_n)\, q_{n,\sigma}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{n,\nu}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\sigma}} \frac{\partial Q_{m,\sigma}}{\partial q_{n,\nu}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\sigma}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} g_\sigma^\nu = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{n,\nu}} q_{n,\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\nu}} \frac{\partial Q_m}{\partial q_n} q_{n,\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_{m,\nu}} Q_{m,\mu},$$

откуда следуют равенства (32.1) и (32.2).

Для получения явного вида $t_\mu{}^\nu$ удобно воспользоваться выражением (32.2) и взять в качестве Q_m величины $g^{\mu\nu}\sqrt{}$. Теперь можно использовать формулу (26.7), из которой находим (с введением коэффициента 16π)

$$16\pi\delta\mathscr{L} = (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - g^\nu_\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma})\delta(g^{\alpha\beta}\sqrt{})_{,\nu} + c\delta(g^{\mu\nu}\sqrt{}),$$

где c — некоторый коэффициент. Следовательно,

$$16\pi t_\mu{}^\nu \sqrt{} = (\Gamma^\nu_{\alpha\beta} - g^\nu_\beta \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma})(g^{\alpha\beta}\sqrt{})_{,\mu} - g^\nu_\mu \mathscr{L}. \tag{32.3}$$

33. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим область пустого пространства, в которой гравитационное поле слабое и $g_{\mu\nu}$ приблизительно постоянно. Тогда применимо уравнение (16.4) или

$$g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\rho\sigma,\mu\nu}) = 0. \tag{33.1}$$

Введем гармонические координаты. Условие (22.2) с опущенным индексом λ дает

$$g^{\mu\nu}[g_{\rho\mu,\nu} - (1/2)\, g_{\mu\nu,\rho}] = 0. \tag{33.2}$$

Продифференцируем это уравнение по x^σ и пренебрежем членами второго порядка. В результате получим

$$g^{\mu\nu}[g_{\mu\rho,\nu\sigma} - (1/2)\, g_{\mu\nu,\rho\sigma}] = 0. \tag{33.3}$$

Поменяем местами ρ и σ:

$$g^{\mu\nu}[g_{\mu\sigma,\nu\rho} - (1/2)\, g_{\mu\nu,\rho\sigma}] = 0. \tag{33.4}$$

Сложим (33.1), (33.3) и (33.4):

$$g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0.$$

Таким образом, каждая компонента $g_{\rho\sigma}$ удовлетворяет уравнению Даламбера, и решение этого уравнения будет состоять из волн, распространяющихся со скоростью света. Это и есть гравитационные волны.

Рассмотрим энергию таких волн. Вследствие того, что псевдотензор не является настоящим тензором, мы не получим в общем случае ясного результата, не зависящего от выбора системы координат. Однако в одном специальном случае, а именно когда все волны движутся в одном направлении, можно получить «чистый» результат.

Если все волны движутся в направлении оси x^3, то координатную систему можно выбрать так, что $g_{\mu\nu}$ будут зависеть только от одной переменной $x^0—x^3$. Рассмотрим более общий случай, когда все компоненты $g_{\mu\nu}$ являются функциями одной переменной $l_\sigma x^\sigma$, где l_σ — константы, удовлетворяющие условию $g^{\rho\sigma} l_\rho l_\sigma = 0$ (в пренебрежении переменной частью $g^{\rho\sigma}$). Тогда имеем

$$g_{\mu\nu,\sigma} = u_{\mu\nu} l_\sigma, \tag{33.5}$$

где $u_{\mu\nu}$ — производная от $g_{\mu\nu}$ по $l_\sigma x^\sigma$. Разумеется, $u_{\mu\nu} = u_{\nu\mu}$. Из условия грамоничности (33.2) следует, что

$$g^{\mu\nu} u_{\mu\rho} l_\nu = (1/2) g^{\mu\nu} u_{\mu\nu} l_\rho = (1/2) u l_\rho,$$

где $u = u^\mu_\mu$. Это соотношение можно записать в виде

$$u^\nu_\rho l_\nu = (1/2) u l_\rho, \tag{33.6}$$

или

$$[u^{\mu\nu} - (1/2) g^{\mu\nu} u] l_\nu = 0. \tag{33.7}$$

Из (33.5) находим

$$\Gamma^\rho_{\mu\sigma} = (1/2)\left(u^\rho_\mu l_\sigma + u^\rho_\sigma l_\mu - u_{\mu\sigma} l^\rho\right).$$

Выражение для L (26.3) в гармонических координатах сводится к следующему:

$$L = - g^{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} =$$
$$= -(1/4) g^{\mu\nu} \left(u^\rho_\mu l_\sigma + u^\rho_\sigma l_\mu - u_{\mu\sigma} l^\rho\right) \left(u^\sigma_\nu l_\rho + u^\sigma_\rho l_\nu - u_{\nu\rho} l^\sigma\right).$$

После раскрытия скобок получим девять членов, но нетрудно показать, что каждый из них обращается в нуль в соответствии с (33.6) и условием $l_\sigma l^\sigma = 0$. Таким образом, плотность действия обращается в нуль. Аналогичный результат имеет место в электромагнитном поле, для которого в случае волн, распространяющихся только в одном направлении, плотность действия также обращается в нуль.

Теперь мы должны найти псевдотензор (32.3). Имеем

$$g^{\alpha\beta}{}_{,\mu} = - g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g_{\rho\sigma,\mu} = - u^{\alpha\beta} l_\mu;$$
$$\sqrt{}_{,\mu} = (1/2) \sqrt{}\, g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = (1/2) \sqrt{}\, u l_\mu, \tag{33.8}$$

тогда

$$(g^{\alpha\beta} \sqrt{})_{,\mu} = - [u^{\alpha\beta} - (1/2) g^{\alpha\beta} u] \sqrt{}\, l_\mu.$$

Следовательно, согласно (33.8) и (33.7)

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} (g^{\alpha\beta} \sqrt{})_{,\mu} = \sqrt{}_{,\alpha} [- u^{\alpha\beta} + (1/2) g^{\alpha\beta} u] l_\mu = 0.$$

В результате остается

$$16\pi t_\mu{}^\nu = -\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\,[u^{\alpha\beta} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} u]\, l_\mu =$$
$$= -(1/2)\,(u^\nu_\alpha l_\beta + u^\nu_\beta l_\alpha - u_{\alpha\beta}\, l^\nu)\,[u^{\alpha\beta} - (1/2)\, g^{\alpha\beta} u]\, l_\mu =$$
$$= (1/2)\,[u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - (1/2)\, u^2]\, l_\mu l^\nu. \qquad (33.9)$$

Полученное для $t_\mu{}^\nu$ выражение имеет вид тензора. Это означает, что при преобразованиях координат, сохраняющих характер поля, так что $g_{\mu\nu}$ остается функцией только от одной переменной $l_\sigma x^\sigma$ (т. е. присутствуют только волны, распространяющиеся в одном направлении), $t_\mu{}^\nu$ преобразуется как тензор. Такие преобразования координат могут состоять только во введении координатных волн, движущихся в направлении l_σ. Их общий вид: $x^{\mu\prime} = x^\mu + b^\mu$, где b^μ является функцией только $l_\delta x^\delta$. Когда имеются волны, движущиеся только в одном направлении, гравитационная энергия может быть локализована.

34. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Чтобы понять физический смысл (33.9), вернемся к случаю, когда волны движутся в направлении оси x^3, так что $l_0 = 1$, $l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = -1$, и используем координаты, близкие к координатам специальной теории относительности. Тогда из условий гармоничности (33.6) следуют равенства:

$$u_{00} + u_{03} = (1/2)\, u; \quad u_{10} + u_{13} = 0;$$
$$u_{20} + u_{23} = 0; \quad u_{30} + u_{33} = -(1/2)\, u.$$

Отсюда $\quad u_{00} - u_{33} = u = u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33};$

значит,

$$u_{11} + u_{22} = 0. \qquad (34.1)$$

Кроме того, $\quad 2u_{03} = -(u_{00} + u_{33}).$

Теперь из (34.1) получаем

$$u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - (1/2)\, u^2 = u_{00}{}^2 + u_{11}{}^2 + u_{22}{}^2 + u_{33}{}^2 - 2u_{01}{}^2 -$$
$$- 2u_{02}{}^2 - 2u_{03}{}^2 + 2u_{12}{}^2 + 2u_{23}{}^2 + 2u_{31}{}^2 - (1/2)\,(u_{00} - u_{33})^2 =$$
$$= u_{11}{}^2 + u_{22}{}^2 + 2u_{12}{}^2 = (1/2)\,(u_{11} - u_{22})^2 + 2u_{12}{}^2.$$

Таким образом,

$$16\pi t_0{}^0 = (1/4)\,(u_{11} - u_{22})^2 + u_{12}{}^2 \qquad (34.2)$$

и $\quad t_0{}^3 = t_0{}^0.$

Видно, что плотность энергии положительно определена, и энергия переносится в направлении оси x^3 со скоростью света.

Для обсуждения вопроса о поляризации волн введем оператор R поворота в плоскости $x^1 x^2$, действующий на произвольный вектор (A_1A_2) следующим образом: $RA_1 = A_2$; $RA_2 = -A_1$. Тогда $R^2A_1 = -A_1$, т. е. собственные значения оператора iR при действии на вектор равны ± 1.

Оператор R действует на $u_{\alpha\beta}$ так:

$$Ru_{11} = u_{21} + u_{12} = 2u_{12};\quad Ru_{12} = u_{22} - u_{11};$$
$$Ru_{22} = -u_{12} - u_{21} = -2u_{12}.$$

Таким образом, $R(u_{11}+u_{22})=0$ и $R(u_{11}-u_{22})=4u_{12}$; $R^2(u_{11}-u_{22})=-4(u_{11}-u_{22})$.

Значит, под действием R $u_{11}+u_{22}$ не изменяется, тогда как при действии на $u_{11}-u_{12}$ или u_{12} iR имеет собственные значения ± 2. Таким образом, компоненты $u_{\alpha\beta}$, дающие вклад в энергию (34.2), соответствуют спину 2.

35. КОСМОЛОГИЧЕСКИЙ ЧЛЕН

Обобщение уравнений гравитационного поля в пустом пространстве

$$R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}, \tag{35.1}$$

где λ — константа, рассмотрел сам Эйнштейн. Это уравнение — тензорное, т. е. оно допустимо в качестве закона природы.

Так как для уравнений Эйнштейна без дополнительного члена было получено хорошее согласие с экспериментами внутри Солнечной системы, λ следует выбрать достаточно малой, чтобы не возникло расхождений с экспериментом. Величина $R_{\mu\nu}$ содержит вторые производные от $g_{\mu\nu}$; значит, λ имеет размерность (длина)$^{-2}$. Чтобы λ была малой, эта длина должна быть очень большой. Величина $\lambda^{-1/2}$ — космологическая длина порядка радиуса Вселенной.

Этот дополнительный член важен в космологических теориях, но для близлежащих объектов дает пренебрежимо малый эффект. Чтобы учесть этот член в теории поля, необходимо ввести в лагранжиан дополнительный член $I_k = c\int\sqrt{}\,d^4x$, где c — соответствующая константа.

Из (26.10) имеем $\delta I_k = c\int \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}\sqrt{}\,d^4x$. Тогда из вариационного принципа $\delta(I_g+I_k)=0$ следует равенство:

$$16\pi\,[R^{\mu\nu} - (1/2)\,g^{\mu\nu}R] + (1/2)\,cg^{\mu\nu} = 0. \tag{35.2}$$

Из уравнения (35.1) получаем $R=4\lambda$ и, следовательно, $R_{\mu\nu} - (1/2)\,g_{\mu\nu}R = -\lambda g_{\mu\nu}$. При выборе $c=32\pi\lambda$ это совпадает с (35.2).

При взаимодействии гравитационного поля с любыми другими полями остается только включить член I_k в полное действие, и мы получим обобщенные полевые уравнения с эйнштейновским космологическим членом.

СОДЕРЖАНИЕ