В. А. Диткин и А. П. Прудников

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ПО ДВУМ ПЕРЕМЕННЫМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе излагаются основные сведения теории операционного исчисления по двум переменным и приводится большое число формул, относящихся к этой теории.

Книга предназначается для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов университетов и втузов, занимающихся операционным исчислением и его применением к решению различных математических задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа содержит изложение операционного исчисления по двум переменным на основе двумерного преобразования Лапласа. Как известно, операционное исчисление получило весьма широкое распространение в различных областях научных исследований. В отечественной и зарубежной литературе опубликовано большое число работ, посвященных вопросам теории и применению операционного исчисления для функций одного переменного. Операционному же исчислению по двум переменным в настоящее время хотя и посвящено значительное количество различных статей, однако монографическая литература по этому вопросу пока крайне недостаточна. Указанное обстоятельство побудило авторов сделать попытку изложить основные результаты операционного исчисления по двум переменным.

Учитывая большое практическое значение операционного исчисления, авторы стремились в своем изложении привести возможно более полный перечень различных операционных формул; при этом в ряде случаев они сознательно шли на некоторое нарушение строгости изложения, уделяя большее внимание технике вычислений. Последнее оправдывается тем, что в большинстве случаев ограничения, необходимые для справедливости окончательных формул, как правило, оказываются слабее тех, которые требуются для строгого обоснования законности всех промежуточных вычислений.

При изучении этой книги необходимо знать операционное исчисление по одному переменному [1—4].

При составлении настоящей монографии использованы литературные источники, список которых приводится в конце книги. Из этого списка считаем необходимым особо отметить

следующие работы: Voelker D., Doetsch G. Die Zweidimensionale Laplace — Transformation. Basel. 1950; Poli L., Delerue P., Le ca'cu' symbolique a deux variables et ses applications. Memorial des Sciences Mathematiques, fasc. 127, Paris, 1954.

Выражаем благодарность М. В. Яковкину за внимательное редактирование рукописи и ряд ценных замечаний.

Авторы отдают себе отчет в том, что настоящая работа не лишена ряда недостатков и будут весьма признательны всем лицам, приславшим свои замечания по адресу: Москва, Ленинский проспект, д. 15, Физматгиз, редакции математической литературы.

Авторы

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

ГЛАВА I

ДВУМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Широко известное интегральное преобразование Лапласа, с помощью которого обосновывается аппарат операционного исчисления, по-видимому, впервые было рассмотрено в 1812 г. [40]. Изучению свойств этого преобразования и его многочисленным приложениям посвящено очень много исследований. Естественно, что должна была возникнуть идея обобщения преобразования Лапласа для функций многих переменных.

В тридцатых годах появились первые небольшие заметки [33, 34, 35], посвященные операционному исчислению по двум переменным на основе двумерного преобразования Лапласа. В последующих работах [19,22] методы операционного исчисления по нескольким переменным были успешно применены к решению дифференциальных уравнений, изучению свойств специальных функций и др. Несколько исследований на эту же тему принадлежат индийским математикам [10, 11, 55]. В последнее время в школе советских теплофизиков А. В. Лыкова операционные методы нашли интересное применение при аналитическом исследовании процессов тепло- и массообмена [5, 6].

Приведем основные свойства двумерного преобразования Лапласа, применительно к обоснованию операционного исчисления по двум переменным.

§ 1. Интеграл Лапласа

Обозначим через $f(x, y)$ вещественную или комплексно-значную функцию от двух действительных переменных, определенную в области $R(0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty)$ и интегрируемую в смысле Лебега в любом конечном прямоугольнике $R_{a,b}(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$.

Введем в рассмотрение выражение

$$F(p, q; a, b) = \int_0^a \int_0^b e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy, \qquad (1.1)$$

где $p = \sigma + i\mu$, $q = \tau + i\nu$ — комплексные параметры. Пусть S — множество всех функций $f(x, y)$, для каждой из которых существует, по крайней мере, одна пара значений параметров p и q (далее эту пару значений будем называть точкой (p, q)), таких, что выполняются следующие условия:

1. Интеграл (1.1) ограничен в точке (p, q) относительно переменных $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, т. е.

$$|F(p, q; a, b)| < M(p, q)$$

для всех $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Здесь $M(p, q)$ — положительная постоянная не зависящая от a и b.

2. В точке (p, q) существует

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} F(p, q; a, b) = F(p, q).$$

Обозначим этот предел через

$$F(p, q) = L_{p,q}\{f(x, y)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (1.2)$$

Интеграл (1.2) называется двумерным интегралом Лапласа или двумерным преобразованием Лапласа для функции $f(x, y)$.

Если условия 1 и 2 одновременно выполнены, то мы будем говорить, что интеграл (1.2) ограниченно сходится в точке (p, q). Таким образом, множество S состоит из функций, для которых интеграл (1.2) ограниченно сходится по крайней мере в какой-либо одной точке (p, q). В случае ограниченной сходимости интеграла (1.2) функцию $f(x, y)$ будем называть преобразуемой, а функцию $F(p, q)$ — преобразованной по Лапласу.

Примечание 1. Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию

$$|f(x, y)| \leqslant M e^{hx + ky} \qquad (1.3)$$

при всех $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, где M, h, k — положительные постоянные, то нетрудно проверить, что функция $f(x, y)$ принадлежит к множеству S и интеграл (1.2) будет ограниченно сходящимся во всякой точке (p, q), для которой $\operatorname{Re} p > h$, $\operatorname{Re} q > k$.

Примечание 2. Если функция $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ и существуют интегралы

$$F_1(p) = \int_0^\infty e^{-px} f_1(x)\, dx, \quad F_2(p) = \int_0^\infty e^{-qy} f_2(y)\, dy,$$

то функция $f(x, y)$ принадлежит к множеству S, и тогда $F(p, q) = F_1(p) F_2(q)$.

Теорема 1. *Если интеграл* (1.2) *ограниченно сходится в точке* (p_0, q_0), *то он ограниченно сходится во всех точках* (p, q), *для которых* $\operatorname{Re}(p - p_0) > 0$, $\operatorname{Re}(q - q_0) > 0$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получим:

$$F(p, q; a, b) = \int_0^a e^{-px} dx \int_0^b e^{-(q-q_0)y} d_y \int_0^y f(x, y)\, e^{-q_0\eta} d\eta =$$

$$= \int_0^a e^{-px} dx \left\{ e^{-(q-q_0)b} \int_0^b e^{-q_0\eta} f(x, \eta)\, d\eta + \right.$$

$$\left. + (q - q_0) \int_0^b e^{-(q-q_0)y} dy \int_0^y e^{-q_0\eta} f(x, \eta)\, d\eta \right\} =$$

$$= \int_0^a e^{-(p-p_0)x} d_x \int_0^x e^{-p_0\xi} d\xi \left\{ e^{-(q-q_0)b} \int_0^b e^{-q_0\eta} f(\xi, \eta)\, d\eta + \right.$$

$$\left. + (q - q_0) \int_0^b e^{-(q-q_0)y} dy \int_0^y e^{-q_0\eta} f(\xi, \eta)\, d\eta \right\} =$$

$$= e^{-(p-p_0)a} \int_0^a e^{-p_0\xi} d\xi \left\{ e^{-(q-q_0)b} \int_0^b e^{-q_0\eta} f(\xi, \eta)\, d\eta + \right.$$

$$\left. + (q - q_0) \int_0^b e^{-(q-q_0)y} dy \int_0^y e^{-q_0\eta} f(\xi, \eta)\, d\eta \right\} +$$

$$+(p-p_0)\int_0^a e^{-(p-p)x}\,dx\int_0^x e^{-p_0\xi}d\xi\left\{e^{-(q-q_0)b}\int_0^b e^{-q_0\eta}\times\right.$$

$$\left.\times f(\xi,\eta)\,d\eta+(q-q_0)\int_0^b e^{-(q-q_0)y}\,dy\int_0^y e^{-q_0\eta}f(\xi,\eta)\,d\eta\right\}=$$

$$=e^{-(p-p_0)a-(q-q_0)b}\int_0^a\int_0^b e^{-p_0\xi-q_0\eta}f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$

$$+(p-p_0)\,e^{-(q-q_0)b}\int_0^a e^{-(p-p_0)x}\,dx\int_0^x e^{-p_0\xi}d\xi\times$$

$$\times\int_0^b e^{-q_0\eta}f(\xi,\eta)\,d\eta+(q-q_0)\,e^{-(p-p_0)a}\int_0^b e^{-(q-q_0)y}\,dy\times$$

$$\times\int_0^a e^{-p_0\xi}d\xi\int_0^y e^{-q_0\eta}f(\xi,\eta)\,d\eta+$$

$$+(p-p_0)(q-q_0)\int_0^a e^{-(p-p)x}\,dx\int_0^b e^{-(q-q_0)y}\,dy\times$$

$$\times\int_0^x e^{-p_0\xi}d\xi\int_0^y e^{-q_0\eta}f(\xi,\eta)\,d\eta.$$

Полагая

$$\varphi(x,y)=\int_0^x e^{-p_0\xi}d\xi\int_0^y e^{-q_0\eta}f(\xi,\eta)\,d\eta,$$

будем иметь

$$F(p,q;a,b)=e^{-(p-p_0)a-(q-q_0)b}\varphi(a,b)+$$
$$+(p-p_0)\,e^{-(q-q_0)b}\int_0^a e^{-(p-p_0)x}\varphi(x,b)\,dx+$$
$$+(q-q_0)\,e^{-(p-p_0)a}\int_0^b e^{-(q-q_0)y}\varphi(a,y)\,dy+$$
$$+(p-p_0)(q-q_0)\int_0^a e^{-(p-p_0)x}\,dx\int_0^b e^{-(q-q_0)y}\,\varphi(x,y)\,dy. \quad (1.4)$$

Обозначая $\operatorname{Re}(p-p_0)=h$, $\operatorname{Re}(q-q_0)=k$ и учитывая, что

$$|\varphi(x,y)|<M(p_0,q_0)=M, \quad (1.5)$$

получим:

$$F(p,q;a,b)\leqslant e^{-ha-kb}M+$$
$$+|p-p_0|\,e^{-kb}\int_0^a Me^{-hx}\,dx+|q-q_0|\,e^{-pa}\int_0^b Me^{-ky}\,dy+$$
$$+|p-p_0|\,|q-q_0|\int_0^a\int_0^b Me^{-hx-ky}\,dx\,dy.$$

Если $h>0$, $k>0$, то имеем

$$|F(p,q;a,b)|\leqslant$$
$$\leqslant M\left(1+\frac{|p-p_0|}{h}+\frac{|q-q_0|}{k}+\frac{|p-p_0|\,|q-q_0|}{hk}\right), \quad (1.6)$$

откуда следует, что условие 1 выполнено. Так как функция $\varphi(x,y)$ ограничена, то из (1.4) следует существование

$$\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} F(p,q;a,b)=$$
$$=(p-p_0)(q-q_0)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(p-p_0)x-(q-q)y}\varphi(x,y)\,dx\,dy, \quad (1.7)$$

т. е. условие 2 также выполнено, и теорема доказана.

Одновременное выполнение условий 1 и 2 существенно. Покажем на примере, что если в некоторой точке (p_0, q_0) выполнено лишь условие 2, а условие 1 не выполнено, то теорема 1 может оказаться несправедливой.

Действительно, пусть

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 2 \text{ и при } x\geqslant 2,\ y\geqslant 2;\\ e^{x^2} & \text{при } 2<x<\infty,\ 0\leqslant y<1;\\ -e^{x^2} & \text{при } 2<x<\infty,\ 1\leqslant y<2;\\ e^{y^2} & \text{при } 0\leqslant x<1,\ 2<y<\infty;\\ -e^{y^2} & \text{при } 1\leqslant x<2,\ 2<y<\infty.\end{cases}$$

Тогда при $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ имеем

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y)\, dx\, dy = 0$$

и

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} \int_0^a \int_0^b f(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

т. е. $F(0, 0) = 0$.

С другой стороны, при $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ имеем

$$F(p, q;\ a, b) = \int_2^a e^{-px}\, dx \left[e^{x^2} \int_0^1 e^{-qy}\, dy - e^{x^2} \int_1^2 e^{-qy}\, dy \right] +$$

$$+ \int_2^b e^{-qy}\, dy \left[e^{y^2} \int_0^1 e^{-px}\, dx - e^{y^2} \int_1^2 e^{-px}\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{q}(1 - e^{-q})^2 \int_2^a e^{-px + x^2}\, dx + \frac{1}{p}(1 - e^{-p})^2 \int_2^b e^{-qy + y^2}\, dy,$$

откуда вытекает, что если p и q не одновременно равны нулю, то $\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} F(p, q;\ a, b)$ не существует.

§ 2. Область сходимости

Обозначим через D множество всех точек (p, q), в которых интеграл (1.2) ограниченно сходится, и назовем это множество областью сходимости интеграла Лапласа. Заметим здесь, что сходимость или расходимость интеграла (1.2) для всех действительных значений (p, q) влечет за собой соответственно его сходимость или расходимость и для всех комплексных значений p, q.

Пусть теперь p, q — действительные числа, а $J(p_0, q_0)$ — открытая область, содержащая все точки, для которых $p > p_0$, $q > q_0$. Предположим, что существуют точки (p, q), в которых интеграл (1.2) сходится, и точки (p, q), где он расходится.

Рассмотрим в pq-плоскости действительных переменных p и q совокупность прямых:

$$q = p + \lambda \quad (-\infty < \lambda + \infty),$$

где λ — действительное число. Выбрав одну из этих прямых, соответствующую некоторому значению $\lambda = \lambda_0$ (см. рис. 1), найдем на этой прямой точки, в которых интеграл (1.2) сходится и точки, где он расходится. Если этот интеграл сходится в какой-либо точке $(p, p + \lambda_0)$ этой прямой, то согласно теореме 1 он сходится во всех точках открытой области $J(p, p + \lambda_0)$.

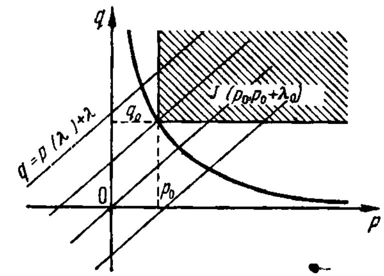

Рис. 1.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что для каждого фиксированного значения $\lambda = \lambda_0$ существует некоторое конечное значение $p_0 = p(\lambda_0)$, такое, что при всех $p > p_0$, $q = p + \lambda_0$ интеграл (1.2) сходится, а при $p < p_0$, $q = p + \lambda_0$ расходится. Изменяя λ, получим в pq-плоскости совокупность точек (α), определяемую параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} p &= p(\lambda) \\ q &= p(\lambda) + \lambda \end{aligned}\right\} (-\infty < \lambda < \infty).$$

$p(\lambda)$ — невозрастающая функция, поэтому существует конечный предел $p(\lambda + 0) \leqslant p(\lambda)$. Но неравенство $p(\lambda + 0) < p(\lambda)$ невозможно, так как в этом случае можно было бы определить значение $\delta > 0$, такое, что точка $[p(\lambda), p(\lambda) + \lambda]$ была бы внутри области $J[p(\lambda + \delta), p(\lambda + \delta) + \lambda + \delta]$, что противоречит определению $p(\lambda)$. Из последнего следует, что $p(\lambda + 0) = p(\lambda)$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $p(\lambda - 0) = p(\lambda)$.

Таким образом, совокупность точек (α) представляет собой непрерывную невозрастающую кривую, которая разделяет pq-плоскость на две открытые области — область D_1, определяемую условиями

$$\left.\begin{aligned} p &> p(\lambda) \\ q &= p(\lambda) + \lambda \end{aligned}\right\} (-\infty < \lambda < \infty),$$

и область D_2, определяемую условиями

$$\left. \begin{array}{l} p < p(\lambda) \\ q = p(\lambda) + \lambda \end{array} \right\} (-\infty < \lambda < \infty).$$

В области D_1 интеграл (1.2) сходится, в области D_2 расходится. В точках кривой (α) интеграл (1.2) может иметь как тот, так и другой случай. Невозрастающая непрерывная кривая (α) называется характеристикой сходимости интеграла Лапласа.

Переходя к комплексным значениям p, q, будем рассматривать множество D, состоящее из точек (p, q), для которых действительные части $\operatorname{Re} p$, $\operatorname{Re} q$ принадлежат области D_1. В случае сходимости интеграла (1.2) на характеристике сходимости (α) к множеству D принадлежат также точки (p, q), для которых значения $\operatorname{Re} p$, $\operatorname{Re} q$ лежат на этой характеристике.

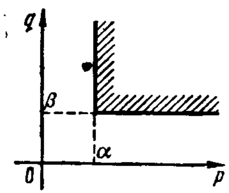

Рис. 2.

Таким образом, возможны следующие случаи:

1. Интеграл (1.2) сходится во всей действительной плоскости.

2. Интеграл (1.2) нигде не сходится.

3. Существует некоторая область сходимости, замкнутая или открытая, внутри которой интеграл (1.2) сходится, а вне которой расходится.

Заметим, что если точки (p_1, q_1) и (p_2, q_2) принадлежат области сходимости и $\operatorname{Re} p_1 < \operatorname{Re} p_2$, $\operatorname{Re} q_1 < \operatorname{Re} q_2$, то согласно теореме 1 к области сходимости принадлежат также все точки (p, q), для которых $\operatorname{Re} p_1 < \operatorname{Re} p < \operatorname{Re} p_2$, $\operatorname{Re} q_1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} q_2$.

Пример 1. Пусть $f(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$ (α, β — действительные), тогда

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} e^{\alpha x + \beta y}\, dx\, dy = \frac{1}{(p-\alpha)(q-\beta)}.$$

Область сходимости имеет вид, изображенный на рис. 2.

Пример 2. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leqslant y, \\ e^y & \text{при } x > y, \end{cases} \quad \text{тогда}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{p+q}{pq(p+q-1)}.$$

Область сходимости имеет вид, изображенный на рис. 3.

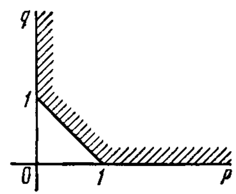

Рис. 3.

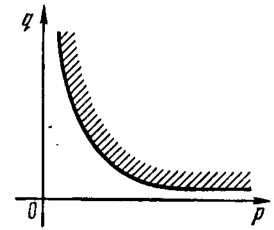

Рис. 4.

Пример 3. Пусть $f(x, y) = I_0(2\sqrt{xy})$, тогда

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} I_0(2\sqrt{xy})\, dx\, dy = \frac{1}{pq-1}.$$

Область сходимости имеет вид, изображенный на рис. 4.

§ 3. Равномерно-ограниченная сходимость

Определение. Если для некоторого множества Δ точек (p, q) выполняются следующие условия:

1. Интеграл (1.1) ограничен относительно переменных $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и всех (p, q) из множества Δ, т. е.

$$|F(p, q;\, a, b)| < M,$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от a, b, p, q.

2. Для всех точек (p, q) из множества Δ существует

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} F(p, q;\, a, b) = F(p, q),$$

причем сходимость относительно всех (p, q), принадлежащих к множеству Δ, — равномерная, т. е. для любого положительного ε можно указать такие числа $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$, что при $a \geqslant A(\varepsilon)$, $b \geqslant B(\varepsilon)$ неравенство

$$|F(p, q) - F(p, q;\ a, b)| < \varepsilon$$

справедливо для всех значений (p, q) из множества Δ; будем говорить, что интеграл (1.2) сходится на множестве Δ равномерно-ограниченно.

Теорема 2. *Если интеграл* (1.2) *сходится ограниченно в точке* (p_0, q_0), то:

1) *интеграл* (1.1) *ограничен относительно переменных* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ *и всех* (p, q) *принадлежащих к области* Δ_0, *определенной неравенствами*:

$$\operatorname{Re}(p - p_0) > |p - p_0| \cos\theta, \qquad \operatorname{Re}(q - q_0) > |q - q_0| \cos\theta$$
$$\left(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right);$$

2) *интеграл* (1.2) *сходится равномерно-ограниченно в области* Δ_1, *определенной неравенствами*:

$$\operatorname{Re}(p - p_0) \geqslant \delta > 0, \quad \operatorname{Re}(q - q_0) \geqslant \delta > 0,$$
$$\operatorname{Re}(p - p_0) \geqslant |p - p_0| \cos\theta, \quad \operatorname{Re}(q - q_0) \geqslant |q - q_0| \cos\theta,$$

где $\delta > 0$ *и* $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ — *произвольные фиксированные числа.*

Доказательство. 1. С помощью неравенства (1.6) для всех $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и (p, q), принадлежащих к области Δ_0, получим

$$|F(p, q;\ a, b)| \leqslant M\left(1 + \frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

2. Согласно (1.4), (1.5), (1.7) будем иметь:

$$|F(p, q) - F(p, q;\ a, b)| =$$
$$= \Big|(p - p_0)(q - q_0)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(p-p_0)x-(q-q_0)y}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy -$$
$$- e^{-(p-p_0)a-(q-q_0)b}\,\varphi(a, b) - (p - p_0)\,e^{-(q-q_0)b}\int_0^a e^{-(p-p_0)x} \times$$

$$\times \varphi(x, b)\,dx - (q - q_0)\,e^{-(p-p_0)a}\int_0^b e^{-(q-q_0)y}\,\varphi(a, y)\,dy -$$
$$- (p - p_0)(q - q_0)\int_0^a e^{-(p-p_0)x}\,dx\int_0^b e^{-(q-q_0)y}\,\varphi(x, y)\,dy\Big| \leqslant$$
$$\leqslant M|p - p_0||q - q_0|\left\{\int_0^a\int_b^\infty e^{-x\operatorname{Re}(p-p_0)-y\operatorname{Re}(q-q_0)}\,dx\,dy + \right.$$
$$+ \int_a^\infty\int_0^b e^{-x\operatorname{Re}(p-p_0)-y\operatorname{Re}(q-q_0)}\,dx\,dy +$$
$$\left. + \int_a^\infty\int_b^\infty e^{-x\operatorname{Re}(p-p_0)-y\operatorname{Re}(q-q_0)}\,dx\,dy\right\} +$$
$$+ Me^{-a\operatorname{Re}(p-p_0)-b\operatorname{Re}(q-q_0)} + Me^{-b\operatorname{Re}(q-q_0)}|p - p_0| \times$$
$$\times \int_0^a e^{-x\operatorname{Re}(p-p_0)}\,dx + M|q - q_0|\,e^{-a\operatorname{Re}(p-p_0)} \times$$
$$\times \int_0^b e^{-y\operatorname{Re}(q-q_0)}\,dy = M\left[\frac{|p - p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)}\frac{|q - q_0|}{\operatorname{Re}(q-q_0)} + \frac{|p - p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)}\right] \times$$
$$\times \left[1 - e^{-a\operatorname{Re}(p-p_0)}\right]e^{-b\operatorname{Re}(q-q_0)} + M\left[\frac{|p - p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)}\frac{|q - q_0|}{\operatorname{Re}(q-q_0)} + \right.$$
$$\left. + \frac{|q - q_0|}{\operatorname{Re}(q-q_0)}\right]\left[1 - e^{-b\operatorname{Re}(q-q_0)}\right]e^{-a\operatorname{Re}(p-p_0)} +$$
$$+ M\left[\frac{|p - p_0|}{\operatorname{Re}(p-p_0)}\frac{|q - q_0|}{\operatorname{Re}(q-q_0)} + 1\right]e^{-a\operatorname{Re}(p-p_0)-b\operatorname{Re}(q-q_0)}.$$

Учитывая неравенства

$$\operatorname{Re}(p - p_0) \geqslant |p - p_0| \cos\theta, \quad \operatorname{Re}(p - p_0) \geqslant \delta > 0,$$
$$\operatorname{Re}(q - q_0) \geqslant |q - q_0| \cos\theta, \quad \operatorname{Re}(q - q_0) \geqslant \delta > 0,$$

найдем

$$|F(p, q) - F(p, q;\ a, b)| \leqslant M\left(\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)e^{-b\delta} +$$
$$+ M\left(\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)e^{-a\delta} + M\left(\frac{1}{\cos^2\theta} + 1\right)e^{-a\delta-b\delta}$$

или

$$|F(p, q) - F(p, q; a, b)| \leqslant \frac{2M}{\cos^2\theta}\left(e^{-a\delta} + e^{-b\delta} + e^{-a\delta - b\delta}\right),$$

откуда и следует теорема. Из последнего неравенства имеем:

Следствие. *Если интеграл* (1.2) *сходится ограниченно в точке* (p_0, q_0), *то интегралы*

$$F(p, q; \infty, b) = \int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^b e^{-qy} f(x, y)\,dy, \qquad (1.8)$$

$$F(p, q; a, \infty) = \int_0^\infty e^{-qy}\,dy \int_0^a e^{-px} f(x, y)\,dx \qquad (1.9)$$

при $b \to \infty$ $a \to \infty$ *сходятся равномерно в области* Δ_1, *определенной в предыдущей теореме, и*

$$\lim_{b\to\infty} F(p, q; \infty, b) = \lim_{a\to\infty} F(p, q; a, \infty) = F(p, q). \quad (1.10)$$

§ 4. Абсолютная сходимость

Определение. Интеграл (1.2) называется абсолютно сходящимся, если существует

$$\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}} \int_0^a\int_0^b |e^{-px-qy} f(x, y)|\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\sigma x - \tau y}|f(x, y)|\,dx\,dy,$$

где $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\operatorname{Re} q = \tau$.

В случае предположения абсолютной сходимости интеграла (1.2) имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Если интеграл* (1.2) *сходится абсолютно в точке* (p_0, q_0), *то он сходится абсолютно во всех точках* (p, q), *для которых* $\operatorname{Re}(p - p_0) > 0$, $\operatorname{Re}(q - q_0) > 0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Подобно тому как была определена область сходимости интеграла (1.2), с помощью теоремы 3 можно определить область абсолютной сходимости этого интеграла.

Теорема 4. *Если функция* $f(x, y)$ *удовлетворяет неравенству* (1.3), *то интеграл* (1.2) *сходится абсолютно во всех точках* (p, q), *для которых* $\operatorname{Re} p > h$, $\operatorname{Re} q > k$ *и* $|F(p, q)| \leqslant \dfrac{M}{(\sigma - h)(\tau - k)}$, *где* $\operatorname{Re} p = \sigma$, $\operatorname{Re} q = \tau$.

Доказательство. Действительно,

$$\left|\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant \int_0^\infty\int_0^\infty |e^{-(\sigma+i\mu)x-(\tau+i\nu)y}\times$$

$$\times f(x, y)|\,dx\,dy \leqslant \int_0^\infty\int_0^\infty M e^{-\sigma x - \tau y} e^{hx+ky}\,dx\,dy = \frac{M}{(\sigma - h)(\tau - k)},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Абсолютная сходимость интеграла (1.2) в точке (p_0, q_0) включает в себя ограниченную сходимость в этой точке, а также во всех точках (p, q), для которых $\operatorname{Re}(p - p_0) \geqslant 0$, $\operatorname{Re}(q - q_0) \geqslant 0$, так как при этих (p, q)

$$|F(p, q; a, b)| \leqslant \int_0^a\int_0^b |e^{-px-qy} f(x, y)|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty\int_0^\infty |e^{-px-qy} f(x, y)|\,dx\,dy.$$

§ 5. Свойства интеграла Лапласа

Теорема 5. *Функция* $F(p, q)$ *является аналитической в области* D, *причем*

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m\,\partial q^n} F(p, q) =$$

$$= (-1)^{m+n}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} x^m y^n f(x, y)\,dx\,dy, \quad (1.11)$$

и функция $x^m y^n f(x, y)$ *принадлежит к множеству* S.

Доказательство. Если точка (p, q) лежит в области D, то, как следует из теоремы 2, ее можно заключить в ограниченную замкнутую область Q, которая будет целиком содержаться в области D, и внутри которой сходимость интеграла (1.2) будет равномерно-ограниченной.

Следовательно, в области Q будет равномерно сходиться и двойной ряд

$$F(p, q)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\int_{k}^{k+1}\int_{l}^{l+1} e^{-px-qy}f(x, y)\,dx\,dy,$$

каждый член которого является целой функцией переменных p, q. Тогда согласно теореме Вейерштрасса функция $F(p, q)$ будет аналитической в указанной области Q, а так как (p, q) — произвольная точка области D, то и во всей области D. Кроме того,

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m\,\partial q^n}F(p, q)=(-1)^{m+n}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-px-qy}x^m y^n f(x, y)\,dx\,dy.$$

Далее, пусть (p_0, q_0) — некоторая точка, лежащая в области Q и $\rho>0$ — наименьшее расстояние от точки $(\operatorname{Re} p_0, \operatorname{Re} q_0)$ до характеристики сходимости (α); тогда функция $F(p, q)$ является аналитической в точках (p, q), для которых $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0-\frac{\rho}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{Re} q>\operatorname{Re} q_0-\frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Кроме того, при достаточно малых ρ существует (см. теорему 2) постоянная $M>0$ такая, что $|F(p, q; a, b)|\leqslant M$ при всех $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ $|p-p_0|<\frac{\rho}{2}$, $|q-q_0|<\frac{\rho}{2}$. Применяя неравенство Коши для аналитических функций двух переменных, найдем

$$\left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m\partial q^n}F(p_0, q_0; a, b)\right|\leqslant\frac{Mm!n!}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{m+n}},$$

откуда следует, учитывая сходимость интеграла (1.11), что функция $x^m y^n f(x, y)$ принадлежит к множеству S.

Теорема 6. *Пусть $F_1(p, q)$ и $F_2(p, q)$ — преобразования Лапласа функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$. Если в точке (p_0, q_0) оба интегралл Лапласа сходятся и*

$$F_1(p_0+nl,\ q_0+mk)=F_2(p_0+nl,\ q_0+mk),$$

где $l>0$, $k>0$ и $n=0, 1, 2, \ldots$, $m=0, 1, 2, \ldots$, то почти всюду $f_1(x, y)=f_2(x, y)$.

Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что если интеграл Лапласа

$$F(p, q)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-px-qy}f(x, y)\,dx\,dy$$

сходится в точке (p_0, q_0) и равен нулю в бесконечной последовательности точек (p, q), определяемых арифметическими прогрессиями $p=p_0+nl$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ $q=q_0+mk$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, то почти всюду $f(x, y)=0$.

Доказательство. Из равенства (1.7) имеем

$$F(p, q)=(p-p_0)(q-q_0)\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)x-(q-q_0)y}\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

где

$$\varphi(x, y)=\int_0^{x}\int_0^{y} e^{-p_0\xi-q_0\eta}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-nlx-mky}\varphi(x, y)\,dx\,dy=0$$

$$(n=1, 2, \ldots;\quad m=1, 2, \ldots).$$

После замены переменных в последнем интеграле по формулам

$$u=e^{-xl},\quad v=e^{-yk},$$

найдем

$$\int_0^{1}\int_0^{1} u^{n-1}v^{m-1}\psi(u, v)\,du\,dv=0, \tag{1.12}$$

где

$$\psi(u, v)=\varphi\left(-\frac{\ln u}{l}, -\frac{\ln v}{k}\right).$$

Очевидно, что функция $\psi(u, v)$ непрерывна в квадрате $(0<u<1,\ 0<v<1)$. Поэтому из (1.12) в силу полноты системы функций $u^n v^m$ $(n=0, 1, 2, \ldots;\ m=0, 1, 2, \ldots)$

следует $\psi(u, v) \equiv 0$ для $0 < u < 1$, $0 < v < 1$, откуда $\varphi(x, y) = 0$ для $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ или

$$\int_0^x \int_0^y e^{-p_1\xi - q_1\eta} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 0$$

$$(0 \leqslant x \leqslant \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant \infty).$$

Следовательно, $f(x, y) = 0$ почти всюду.

Примечание. Преобразование Лапласа $F(p, q)$, не равное тождественно нулю, может иметь лишь конечное число корней в точках (p, q), определяемых арифметическими прогрессиями и однозначно определяется бесконечной последовательностью значений p, q, для которых $p = p_0 + nl$, $q = q_0 + mk$, где l, k — действительные положительные постоянные, а m, n пробегают ряд натуральных чисел от нуля до бесконечности.

Теорема 7. *Если интеграл* (1.2) *при* $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ *и* $\operatorname{Re} q > \tau_0$ *сходится абсолютно, то* $\lim\limits_{\substack{\mu \to \pm\infty \\ \nu \to \pm\infty}} F(\sigma + i\mu, \tau + i\nu) = 0$ *и сходимость равномерная для всех* $\sigma\,(\sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_0)$, $\tau\,(\tau \geqslant \tau_1 > \tau_0)$.

Доказательство. Из абсолютной сходимости двойного интеграла (1.2) и неравенства

$$|F(p, q)| \leqslant \left| \int_0^A \int_0^B e^{-px - qy} f(x, y)\, dx\, dy \right| +$$

$$+ \int_0^A \int_B^\infty e^{-\sigma_1 x - \tau_1 y} |f(x, y)|\, dx\, dy +$$

$$+ \int_A^\infty \int_0^B e^{-\sigma_1 x - \tau_1 y} |f(x, y)|\, dx\, dy + \int_A^\infty \int_B^\infty e^{-\sigma_1 x - \tau_1 y} |f(x, y)|\, dx\, dy$$

следует, что теорему достаточно доказать для функции

$$F(p, q) = \int_0^A \int_0^B e^{-px - qy} f(x, y)\, dx\, dy$$

при любых фиксированных положительных A и B. Если $f(x, y)$ имеет абсолютно интегрируемые первые частные

производные и вторую смешанную производную, то интегрированием по частям легко установить справедливость теоремы 7.

Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать функцию $f_1(x, y)$ имеющую непрерывные первые и вторые частные производные, и такую, что

$$\int_0^A \int_0^B |f(x, y) - f_1(x, y)|\, e^{-\sigma_1 x - \tau_1 y}\, dx\, dy < \varepsilon,$$

откуда будет следовать теорема 7 и в общем случае.

Теорема 8. *Если интеграл* (1.2) *ограниченно сходится в точке* (p, q) *и* $\operatorname{Re} p = \alpha > 0$, $\operatorname{Re} q = \beta > 0$, *то при* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$$\left| e^{-\alpha a - \beta b} \int_0^a \int_0^b f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right| < M,$$

более того,

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} e^{-\alpha a - \beta b} \int_0^a \int_0^b f(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int_0^a \int_0^b f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int_0^a d\xi \int_0^b e^{qy} \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^y f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta}\, d\eta - \int_0^b f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta}\, d\eta \right] dy =$$

$$= \int_0^a d\xi \left\{ \left[\int_0^y f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta} d\eta - \int_0^b f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta} d\eta \right] e^{qy} \Big|_0^b - \right.$$

$$\left. - q \int_0^b e^{qy} \left[\int_0^y f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta}\, d\eta - \int_0^b f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta} \right] dy \right\} =$$

$$= \int_0^a d\xi \left\{ \int_0^b f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta}\, d\eta - \right.$$

$$\left. - q \int_0^b e^{qy} \left[\int_0^y f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta}\, d\eta - \int_0^b f(\xi, \eta)\, e^{-q\eta}\, d\eta \right] dy \right\}.$$

Введем обозначение

$$\varphi(x, y)=\int_0^x\int_0^y e^{-p\xi-q\eta}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Тогда последнее равенство перепишется в следующем виде:

$$\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta=\int_0^a e^{px}\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x, b)-\varphi(a, b)]\,dx-$$
$$-q\int_0^b e^{qy}\,dy\left\{\int_0^a e^{px}\frac{\partial}{\partial x}[\varphi(x, y)-\varphi(x, b)-\varphi(a, y)+\right.$$
$$\left.+\varphi(a, b)]\,dx\right\}.$$

Отсюда, интегрируя снова по частям, найдем

$$\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta=[\varphi(x, b)-\varphi(a, b)]\,e^{px}\Big|_0^a-$$
$$-p\int_0^a e^{px}[\varphi(x, b)-\varphi(a, b)]\,dx-q\int_0^b e^{qy}\times$$
$$\times\left\{[\varphi(x, y)-\varphi(x, b)-\varphi(a, y)+\varphi(a, b)]\,e^{px}\Big|_0^a-\right.$$
$$\left.-p\int_0^a e^{px}[\varphi(x, y)-\varphi(x, b)-\varphi(a, y)+\varphi(a, b)]\,dx\right\}dy=$$
$$=\varphi(a, b)-p\int_0^a[\varphi(x, b)-\varphi(a, b)]\,e^{px}\,dx-$$
$$-q\int_0^b[\varphi(a, y)-\varphi(a, b)]\,e^{qy}\,dy+$$
$$+pq\int_0^a\int_0^b[\varphi(x, y)-\varphi(x, b)-\varphi(a, y)+\varphi(a, b)]\,e^{px+qy}\,dx\,dy.$$

Так как интеграл (1.2) предполагается сходящимся в точке (p, q), то $|\varphi(x, y)|<M$, и существует

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\varphi(x, y)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-p\xi-q\eta}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Пусть $\varepsilon>0$ и постоянные A и B выбраны так, что $|\varphi(x, y)-\varphi(a, b)|<\varepsilon$ при $x>A$, $y>B$, $a>A$, $b>B$. Тогда при $a>A$, $b>B$ имеем

$$e^{-\alpha a-\beta b}\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta=\left\{\varphi(a, b)-p\int_0^A[\varphi(x, b)-\varphi(a, b)]\times\right.$$
$$\times e^{px}\,dx-q\int_0^B[\varphi(a, y)-\varphi(a, b)]\,e^{qy}\,dy+$$
$$+pq\int_0^A\int_0^B[\varphi(x, y)-\varphi(x, b)-\varphi(a, y)+\varphi(a, b)]\times$$
$$\left.\times e^{px+qy}\,dx\,dy\right\}e^{-\alpha a-\beta b}+\left\{-p\int_A^a[\varphi(x, b)-\varphi(a, b)]\,e^{px}\,dx-\right.$$
$$-q\int_B^b[\varphi(a, y)-\varphi(a, b)]\,e^{qy}\,dy+pq\left(\int_0^A\int_B^b+\int_A^a\int_0^B+\right.$$
$$\left.+\int_A^a\int_B^b\right)[\varphi(x, y)-\varphi(x, b)-\varphi(a, y)+\varphi(a, b)]\times$$
$$\left.\times e^{px+qy}\,dx\,dy\right\}e^{-\alpha a-\beta b}.$$

Далее, учитывая, что $|\varphi(x, y)|<M$ при $x>A$, $a>A$; $y>B$, $b>B$ и $|\varphi(a, y)-\varphi(a, b)|<\varepsilon$, $|\varphi(x, b)-\varphi(a, b)|<\varepsilon$, $|\varphi(x, y)-\varphi(x, b)-\varphi(a, y)+\varphi(a, b)|<2\varepsilon$, получим

$$\left|e^{-\alpha a-\beta b}\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\right|\leqslant Q\left(e^{-\alpha a-\beta b}+e^{-\alpha a-\beta b}\int_A^a e^{\alpha x}\,dx+\right.$$
$$\left.+e^{-\alpha a-\beta b}\int_B^b e^{\beta y}\,dy\right)+|pq|\,2\varepsilon e^{-\alpha a-\beta b}\int_A^a\int_B^b e^{\alpha x+\beta y}\,dx\,dy. \quad (1.13)$$

Здесь Q — некоторая величина, не зависящая от a и b и удовлетворяющая условию:

$$\left|\varphi(a, b)-p\int_0^A[\varphi(x, b)-\varphi(a, b)]\,e^{px}\,dx-\right.$$

$$-q\int_0^B[\varphi(a, y)-\varphi(a, b)]\,e^{qy}\,dy+$$

$$\left.+pq\int_0^A\int_0^B[\varphi(x, y)-\varphi(x, b)-\varphi(a, y)+\varphi(a, b)]\,e^{px+qy}\,dx\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant M+2M|p|\int_0^A e^{\alpha x}\,dx+2M|q|\int_0^B e^{\beta y}\,dy+$$

$$+4M|pq|\int_0^A\int_0^B e^{\alpha x+\beta y}\,dx\,dy\leqslant Q.$$

Из (1.13) вытекает ограниченность выражения

$$e^{-\alpha a-\beta b}\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

при всех $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, и очевидно, что

$$\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}}\left|e^{-\alpha a-\beta b}\int_0^a\int_0^b f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\right|<2\varepsilon|p||q|.$$

Теорема 9. *Для того чтобы $f(x, y)$ принадлежала к множеству S, необходимо и достаточно, чтобы неравенство*

$$\left|e^{-\alpha a-\beta b}\int_0^a\int_0^b f(x, y)\,dx\,dy\right|<M\quad(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)\tag{1.14}$$

выполнялось хотя бы для одной пары значений (α, β); $\alpha>0$, $\beta>0$.

Доказательство. Действительно, если функция $f(x, y)$ принадлежит к множеству S, то (см. теорему 1) найдется точка (p, q) такая, что интеграл (1.2) ограниченно сходится

в точке ($\operatorname{Re}p=\alpha>0$, $\operatorname{Re}q=\beta>0$). В этом случае из предыдущей теоремы следует условие (1.13). Обратно, если (1.13) выполнено, и точка (p, q) выбрана так, что $\operatorname{Re}p>\alpha$, $\operatorname{Re}q>\beta$, то, воспользовавшись равенством (1.4), в котором полагаем $p_0=q_0=0$, получим:

$$F(p, q;\ a, b)=e^{-pa-qb}\varphi(a, b)+pe^{-qb}\int_0^a\varphi(x, b)\,e^{-px}\,dx+$$

$$+qe^{-pa}\int_0^b e^{-qy}\varphi(a, y)\,dy+pq\int_0^a\int_0^b e^{-px-qy}\varphi(x, y)\,dx\,dy,\tag{1.15}$$

где

$$\varphi(x, y)=\int_0^x\int_0^y f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

По условию $|\varphi(x, y)\,e^{-\alpha x-\beta y}|<M$ при всех $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, поэтому из равенства (1.14) следует ограниченная сходимость интеграла (1.2) в точке (p, q), если $\operatorname{Re}p>\alpha$, $\operatorname{Re}q>\beta$, и, кроме того, будем иметь

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}f(x, y)\,dx\,dy=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}\varphi(x, y)\,dx\,dy\tag{1.16}$$

при $\operatorname{Re}p>\alpha$, $\operatorname{Re}q>\beta$.

Так же как при обычном преобразовании Лапласа, каждая операция над преобразуемой функцией при двойном преобразовании Лапласа отображается в определенную операцию над преобразованной функцией, а каждая операция, произведенная над преобразованной функцией, отображается в определенную операцию над преобразуемой функцией. Например, из теоремы 5 следует, что дифференцированию преобразованной функции соответствует умножение преобразуемой функции на $(-x)$ и $(-y)$. Следует подчеркнуть, что множество всевозможных операций над функциями двух переменных несравненно больше, чем над функциями одной переменной, так как возникают многие операции, не имеющие аналогов в одномерном случае, например, операции, переводящие функцию $F(p, q)$ в функцию $F(p, p)$ или $\dfrac{F(p, q)-F(q, p)}{p-q}$.

Отсюда вытекают более широкие возможности применения двойного преобразования Лапласа в приложениях.

Теорема 10. *Если функция $f(x, y)$ принадлежит к множеству S, то к этому же множеству принадлежит функция*

$$f_{u,v}(x, y)=\begin{cases} f(x-u,\ y-v) \text{ при } x>u,\ y>v, \\ 0 \text{ — в остальных случаях,} \end{cases} \quad (u, v>0),$$

и

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_0^\infty e^{-qy}f_{u,v}(x, y)\,dx\,dy=$$
$$=e^{-pu-qv}\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_0^\infty e^{-qy}f(x, y)\,dy.$$

Доказательство. В самом деле, имеем

$$\int_0^a\int_0^b e^{-px-qy}f_{u,v}(x, y)\,dx\,dy=$$
$$=\int_u^a\int_v^b e^{-px-qy}f(x-u,\ y-v)\,dx\,dy=$$
$$=\int_0^{a-u} e^{-p(u+x)}\,dx\int_0^{b-v} e^{-q(v+y)}f(x, y)\,dy, \tag{1.17}$$

откуда следует, что все интегралы в (1.17) ограничены при всех $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и существует

$$\lim_{\substack{a\to\infty\\ b\to\infty}}\int_0^a\int_0^b e^{-px-qy}f_{u,v}(x, y)\,dx\,dy=$$
$$=\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_0^\infty e^{-qy}f_{u,v}(x, y)\,dy=$$
$$=e^{-pu-qv}\int_0^\infty e^{-px}\,dx\int_0^\infty e^{-qy}f(x, y)\,dy,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Очевидно, что если функция $f(x, y)\equiv 0$ при $0<x<m$ и $0<y<n$ принадлежит к множеству S, то к этому же множеству принадлежит функция $f(x+u, y+v)$; $0<u\leqslant m$, $0<v\leqslant n$ и

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}f(x+u,\ y+v)\,dx\,dy=$$
$$=e^{pu+qv}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}f(x, y)\,dx\,dy.$$

Теорема 11. *Пусть $F(p, q)$ — преобразование Лапласа функции $f(x, y)$ и интеграл*

$$H(p)=\int_0^\infty e^{-pt}h(t)\,dt$$

абсолютно сходится; тогда

$$H(p+q)\,F(p, q)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}g(x, y)\,dx\,dy,$$

где

$$g(x, y)=\int_0^{\min(x,y)} h(\tau)f(x-\tau,\ y-\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. После замены переменных по формулам $x-\tau=\xi$, $\tau=\tau$, $y-\tau=\eta$, получим:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}\,dx\,dy\int_0^{\min(x,y)} h(\tau)f(x-\tau,\ y-\tau)\,d\tau=$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-p\xi-q\eta-(p+q)\tau}h(\tau)f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\,d\tau=$$
$$=\int_0^\infty e^{-(p+q)\tau}h(\tau)\,d\tau\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-p\xi-q\eta}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta=H(p+q)\,F(p, q)$$

и теорема доказана.

Если производные функции $f(x, y)$ принадлежат к множеству S, то их преобразования Лапласа могут быть найдены с помощью интегрирования по частям. Например, пусть производная $f'_x(x, y)$ принадлежит к множеству S, тогда после интегрирования по частям будем иметь (см. (1.8), (1.9) и (1.10)):

$$\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \int_0^\infty e^{-px} f'_x(x, y)\,dx = \int_0^\infty e^{-qy} \left\{ e^{-px} f(x, y) \Big|_{x=0}^{x=\infty} + \right.$$

$$\left. + p \int_0^\infty e^{-px} f(x, y)\,dx \right\} dy = pF(p, q) - \int_0^\infty e^{-qy} f(0, y)\,dy.$$

Далее, пусть все последующие частные производные функции $f(x, y)$ вплоть до n-го порядка по x, m-го порядка по y и смешанные производные по x и y до $(m+n)$-го порядка принадлежат к множеству S; тогда аналогичным образом можно получить:

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f'_y(x, y)\,dy = qF(p, q) - \int_0^\infty e^{-px} f(x, 0)\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f''_{xy}(x, y)\,dy = pqF(p, q) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-px} f'_x(x, 0)\,dx - \int_0^\infty e^{-qy} f'_y(0, y)\,dy - f(0, 0),$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f''_{yy}(x, y)\,dy =$$

$$= q^2 F(p, q) - \int_0^\infty e^{-px} \{ q f(x, 0) + f'_y(x, 0) \}\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \int_0^\infty e^{-px} f''_{xx}(x, y)\,dx =$$

$$= p^2 F(p, q) - \int_0^\infty e^{-qy} \{ p f(0, y) + f'_x(0, y) \}\,dy.$$

. . . .

. . . .

$$\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \int_0^\infty e^{-px} f^{(n)}_{x^n}(x, y)\,dx = p^n F(p, q) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-qy} \{ p^{n-1} f(0, y) + p^{n-2} f'_x(0, y) + \ldots$$

$$\ldots + f^{(n-1)}_{x^{n-1}}(0, y) \}\,dy = p^n F(p, q) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-qy} \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}_{x^k}(0, y)\,dy,$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f^{(m)}_{y^m}(x, y)\,dy = q^m F(p, q) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-px} \{ q^{m-1} f(x, 0) + q^{m-2} f'_y(x, 0) + \ldots$$

$$\ldots + f^{(m-1)}_{y^{(m-1)}}(x, 0) \}\,dx = q^m F(p, q) -$$

$$- \int_0^\infty e^{-px} \sum_{k=0}^{m-1} q^{m-k-1} f^{(k)}_{y^k}(x, 0)\,dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\,dx \int_0^\infty e^{-qy} f^{(n+m)}_{x^n y^m}(x, y)\,dy = p^n q^m F(p, q) -$$

$$- \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} p^{n-r-1} q^{m-k-1} f^{(r+k)}_{x^r y^k}(0, 0) +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-px} \sum_{k=0}^{m-1} q^{m-k-1} f^{(k+n)}_{x^n y^k}(x, 0)\,dx +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-qy} \sum_{r=0}^{n-1} p^{n-r-1} f^{(r+m)}_{x^r y^m}(0, y)\,dy.$$

§ 6. Теоремы о свертках

В случае двойного преобразования Лапласа известная теорема свертывания представляется в следующих двух видах.

Теорема 12. *Если в точке* (p, q) *интеграл*

$$F_1(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f_1(x, y)\, dx\, dy$$

ограниченно сходится, а интеграл

$$F_2(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f_2(x, y)\, dx\, dy \tag{1.18}$$

сходится абсолютно, то $F(p, q) = F_1(p, q) F_2(p, q)$ *является преобразованием Лапласа от*

$$f(x, y) = \int_0^x \int_0^y f_1(x-\xi, y-\eta) f_2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

и интеграл

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy$$

ограниченно сходится в точке (p, q), *т. е. функция* $f(x, y)$ *принадлежит к множеству* S.

Доказательство. При всех $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ после замены переменных по формулам $x - \xi = u$, $y - \eta = v$, получим:

$$\int_0^b e^{-qy}\, dy \int_0^a e^{-px} f(x, y)\, dx =$$

$$= \int_0^b e^{-qy}\, dy \int_0^a e^{-px}\, dx \int_0^x d\xi \int_0^y f_2(\xi, \eta) f_1(x-\xi, y-\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_0^b d\eta \int_0^a f_2(\xi, \eta)\, d\xi \int_\eta^b e^{-qy}\, dy \int_\xi^a e^{-px} f_1(x-\xi, y-\eta)\, dx =$$

$$= \int_0^b e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^a e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, d\xi \int_0^{b-\eta} e^{-qv}\, dv \int_0^{a-\xi} e^{-pu} f_1(u, v)\, du =$$

$$= \int_0^b e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^a e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, d\xi \int_0^b e^{-qv}\, dv \int_0^a e^{-pu} f_1(u, v)\, du -$$

$$- \int_0^b e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^a e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta) \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi,$$

где

$$\rho_1(\xi, \eta; a, b) = \int_0^b e^{-qv}\, dv \int_0^a e^{-pu} f_1(u, v)\, du -$$

$$- \int_0^{b-\eta} e^{-qv}\, dv \int_0^{a-\xi} e^{-pu} f_1(u, v)\, du. \tag{1.19}$$

Введем обозначения:

$J_1(p, q; a, b) =$

$$= \int_0^b e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^a e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, d\xi \int_0^b e^{-qv}\, dv \int_0^a e^{-pu} f_1(u, v)\, du,$$

$$J_2(p, q; a, b) = \int_0^b e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^a e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta) \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi.$$

Так как функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ принадлежат к множеству S, то при всех $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ имеем

$$|J_1(p, q; a, b)| < M_1,$$

и существует

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} J_1(p, q; a, b) = F_1(p, q) F_2(p, q).$$

Принимая во внимание, что

$$|\rho_1(\xi, \eta; a, b)| < M,$$

в силу абсолютной сходимости интеграла (1.18) при всех $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ будем иметь

$$|J_2(p, q; a, b)| < M_2.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} J_2(p, q; a, b) = 0.$$

Имеем

$$J_2(p, q; a, b) = \int_0^b e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^a e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi =$$

$$= \int_0^{\frac{b}{2}} e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^b e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^a e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi -$$

$$- \int_0^{\frac{b}{2}} e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi. \quad (1.20)$$

Обозначим через

$$\mu(a, b) = \max_{\substack{0 \leqslant \xi \leqslant \frac{a}{2} \\ 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{b}{2}}} |\rho_1(\xi, \eta; a, b)|.$$

Тогда, учитывая, что функция $f_1(x, y)$ принадлежит к множеству S, получим

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} \mu(a, b) = 0. \quad (1.21)$$

Наконец, с учетом (1.18), (1.20), (1.21) найдем

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} \int_0^{\frac{b}{2}} e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi = 0, \quad (1.22)$$

и из абсолютной сходимости интеграла (1.18) и ограниченности $\rho_1(\xi, \eta; a, b)$ следует:

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} \left\{ \int_0^b e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^a e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi - \int_0^{\frac{b}{2}} e^{-q\eta}\, d\eta \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-p\xi} f_2(\xi, \eta)\, \rho_1(\xi, \eta; a, b)\, d\xi \right\} = 0,$$

поэтому

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} J_2(p, q; a, b) = 0.$$

Теорема 13. *Если интеграл*

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy$$

ограниченно сходится в точке (p, q), *а интеграл*

$$G(p \cos \alpha + q \sin \alpha) = \int_0^\infty e^{-(p \cos \alpha + q \sin \alpha)t} g(t)\, dt, \quad (1.23)$$

$$\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

сходится абсолютно, то $\Phi(p, q) = G(p \cos \alpha + q \sin \alpha) F(p, q)$ *является преобразованием Лапласа для*

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{1}{\cos \alpha} \int_0^x g\left(\frac{\xi}{\cos \alpha}\right) f(x - \xi, y - \xi \operatorname{tg} \alpha)\, d\xi = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} g\left(\frac{\eta}{\sin \alpha}\right) f\left(x - \frac{\eta}{\operatorname{tg} \alpha}, y - \eta\right) d\eta \end{aligned}\right\} & (y \geqslant x \operatorname{tg} \alpha), \\ \left.\begin{aligned} &\frac{1}{\cos \alpha} \int_0^{\frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}} g\left(\frac{\xi}{\cos \alpha}\right) f(x - \xi, y - \xi \operatorname{tg} \alpha)\, d\xi = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^{y} g\left(\frac{\eta}{\sin \alpha}\right) f\left(x - \frac{\eta}{\operatorname{tg} \alpha}, y - \eta\right) d\eta \end{aligned}\right\} & (y \leqslant x \operatorname{tg} \alpha), \end{cases}$$

и интеграл

$$\Phi(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

ограниченно сходится в точке (p, q), *т. е. функция* $\varphi(x, y)$ *принадлежит к множеству* S.

Доказательство. Случай $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Пусть

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^x g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) f(x-\xi, y-\xi\operatorname{tg}\alpha)\,d\xi & \text{при } y \geqslant x\operatorname{tg}\alpha, \\ \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^{\frac{y}{\operatorname{tg}\alpha}} g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) f(x-\xi, y-\xi\operatorname{tg}\alpha)\,d\xi & \text{при } y \leqslant x\operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Тогда, при $b \geqslant a\operatorname{tg}\alpha$, будем иметь

$$\int\limits_0^b e^{-qy}\,dy \int\limits_0^a e^{-px}\varphi(x, y)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^b e^{-qy}\,dy \int\limits_0^a g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) d\xi \int\limits_\xi^a e^{-px} f(x-\xi, y-\xi\operatorname{tg}\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^a g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) d\xi \int\limits_0^b e^{-qy}\,dy \int\limits_\xi^a e^{-px} f(x-\xi, y-\xi\operatorname{tg}\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^a e^{-p\xi} g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) d\xi \int\limits_0^{a-\xi} e^{-pu}\,du \int\limits_0^b e^{-qy} f(u, y-\xi\operatorname{tg}\alpha)\,dy =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^a e^{-(p+q\operatorname{tg}\alpha)\xi} g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) d\xi \int\limits_0^{a-\xi} e^{-pu}\,du \int\limits_0^{b-\xi\operatorname{tg}\alpha} e^{-qv} f(u,v)\,dv =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^a e^{-(p+q\operatorname{tg}\alpha)\xi} g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) d\xi \int\limits_0^a e^{-pu}\,du \int\limits_0^b e^{-qv} f(u, v)\,dv -$$

$$- \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^a e^{-(p+q\operatorname{tg}\alpha)\xi} g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) \rho_2(\xi;\ a,\ b)\,d\xi, \qquad (1.24)$$

где

$$\rho_2(\xi;\ a,\ b) = \int\limits_0^b e^{-qv}\,dv \int\limits_0^a e^{-pu} f(u, v)\,du - \int\limits_0^{a-\xi} e^{-pu}\,du \int\limits_0^{b-\xi\operatorname{tg}\alpha} e^{-qv} f(u, v)\,dv.$$

С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были проведены в предыдущей теореме, можно показать, что

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^a e^{-(p+q\operatorname{tg}\alpha)\xi} g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) \rho_2(\xi;\ a,\ b)\,d\xi = 0 \qquad (1.25)$$

и

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^a e^{-(p+q\operatorname{tg}\alpha)\xi} g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) d\xi \int\limits_0^a e^{-pu}\,du \int\limits_0^b e^{-qv} f(u, v)\,dv =$$

$$= \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int\limits_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} e^{-(p\cos\alpha+q\sin\alpha)t} g(t)\,dt \int\limits_0^a e^{-pu}\,du \int\limits_0^b e^{-qv} f(u, v)\,dv =$$

$$= G(p\cos\alpha + q\sin\alpha)\,F(p, q). \qquad (1.26)$$

Из (1.24), (1.25), (1.26) следует, что при $b \geqslant a\operatorname{tg}\alpha$

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int\limits_0^b e^{-qy}\,dy \int\limits_0^a e^{-px}\varphi(x, y)\,dx =$$

$$= G(p\cos\alpha + q\sin\alpha)\,F(p, q). \qquad (1.27)$$

Аналогично предыдущему, при $b \leqslant a\operatorname{tg}\alpha$ можно получить

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int\limits_0^b e^{-qy}\,dy \int\limits_0^a e^{-px}\varphi(x, y)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \frac{1}{\cos\alpha}\int\limits_0^{\frac{b}{\operatorname{tg}\alpha}} e^{-(p+q\operatorname{tg}\alpha)\xi} g\left(\frac{\xi}{\cos\alpha}\right) d\xi \times$$

$$\times \int\limits_0^{a-\xi} e^{-pu}\,du \int\limits_0^{b-\xi\operatorname{tg}\alpha} e^{-qv} f(u, v)\,dv = G(p\cos\alpha + q\sin\alpha)\,F(p, q),$$

что и требовалось доказать.

Случай $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Используя представление функции $\varphi(x, y)$ в виде следующего соотношения:

$$\varphi(x, y)=\begin{cases}\frac{1}{\sin\alpha}\int\limits_0^{x\operatorname{tg}\alpha} g\left(\frac{\eta}{\sin\alpha}\right)f\left(x-\frac{\eta}{\operatorname{tg}\alpha}, y-\eta\right)d\eta \text{ при } y\geqslant x\operatorname{tg}\alpha,\\ \frac{1}{\sin\alpha}\int\limits_0^{y} g\left(\frac{\eta}{\sin\alpha}\right)f\left(x-\frac{\eta}{\operatorname{tg}\alpha}, y-\eta\right)d\eta \text{ при } y\leqslant x\operatorname{tg}\alpha,\end{cases}$$

доказательство проводится так же, как и в предыдущем случае.

§ 7. Теорема обращения

Теорема 14. *Пусть функция $f(x, y)$ имеет первые частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, вторую смешанную частную производную $f''_{xy}(x, y)$, и существуют такие положительные постоянные* Q, k_1 и k_2, что для всех $0<x<\infty$ и $0<y<\infty$ *имеют место неравенства*

$$|f(x, y)|<Qe^{k_1x+k_2y},\quad |f''_{xy}(x, y)|<Qe^{k_1x+k_2y}. \quad (1.28)$$

Тогда, если

$$F(p, q)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-px-qy}f(x, y)\,dx\,dy, \quad (1.29)$$

то

$$f(x, y)=\lim_{\substack{\omega_1\to\infty\\ \omega_2\to\infty}}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma-i\omega_1}^{\sigma+i\omega_1}\int\limits_{\tau-i\omega_2}^{\tau+i\omega_2} e^{px+qy}F(p, q)\,dp\,dq$$

или

$$f(x, y)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\int\limits_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{px+qy}F(p, q)\,dp\,dq, \quad (1.30)$$

где $\sigma>k_1$ и $\tau>k_2$.

Доказательство. Полагая $p=\sigma+i\mu$, $q=\tau+i\nu$ в любой точке $x=a$, $y=b$ при $0<a<\infty$; $0<b<\infty$, имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma-i\omega_1}^{\sigma+i\omega_1}\int\limits_{\tau-i\omega_2}^{\tau+i\omega_2} e^{pa+qb}F(p, q)\,dp\,dq=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\omega_1}^{\omega_1}\int\limits_{-\omega_2}^{\omega_2} e^{(\sigma+i\mu)a+(\tau+i\nu)b}F(\sigma+i\mu, \tau+i\nu)\,d\mu\,d\nu=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x, y)\,dx\,dy\int\limits_{-\omega_1}^{\omega_1}\int\limits_{-\omega_2}^{\omega_2} e^{(\sigma+i\mu)(a-x)+(\tau+i\nu)(b-y)}\,d\mu\,d\nu=$$

$$=\frac{e^{\sigma a+\tau b}}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x, y)\,e^{-\sigma x-\tau y}\frac{\sin\omega_1(x-a)}{x-a}\,\frac{\sin\omega_2(y-b)}{y-b}\,dx\,dy. \quad (1.31)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(x, y)=f(x, y)-f(a, y)-f(x, b)+f(a, b).$$

Очевидно, что

$$G''_{xy}(x, y)=f''_{xy}(x, y)=g(x, y) \quad (1.32)$$

и

$$G(x, y)=\int\limits_a^x\int\limits_b^y g(u, v)\,du\,dv.$$

Отсюда следует, что функция

$$\varphi(x, y)=\frac{G(x, y)}{(x-a)(y-b)} \quad (1.33)$$

является непрерывной при всех $0<x<\infty$, $0<y<\infty$. Из (1.28) и (1.32) вытекает, что при всех $x>a$ и $y>b$ имеем

$$|\varphi(x, y)|<\frac{Q}{(x-a)(y-b)}\int\limits_a^x\int\limits_b^y e^{k_1u+k_2v}\,du\,dv,$$

откуда

$$|\varphi(x, y)|<Qe^{k_1x+k_2y}.$$

Аналогичным образом, при $x > a$, $y < b$ и $x < a$, $y > b$, найдем

$$|\varphi(x, y)| < Qe^{k_1 x + k_2 b} \quad \text{и} \quad |\varphi(x, y)| < Qe^{k_1 a + k_2 y}$$

соответственно. Наконец, при $x \leqslant a$, $y \leqslant b$

$$|\varphi(x, y)| \leqslant Qe^{k_1 a + k_2 b}.$$

Поэтому при всех $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x, y)| < Q_1 e^{k_1 x + k_2 y}, \tag{1.34}$$

где $Q_1 = Qe^{k_1 a + k_2 b}$. Принимая во внимание введенную в (1.33) функцию $\varphi(x, y)$, равенство (1.31) можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma - i\omega_1}^{\sigma + i\omega_1} \int_{\tau - i\omega_2}^{\tau + i\omega_2} e^{pa + qb} F(p, q)\, dp\, dq =$$

$$= \frac{e^{\sigma a + \tau b}}{\pi^2} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x, y)\, e^{-\sigma x - \tau y} \sin \omega_1 (x - a) \sin \omega_2 (y - b)\, dx\, dy + \right.$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty f(a, y)\, e^{-\sigma x - \tau y} \frac{\sin \omega_1 (x - a)}{x - a} \frac{\sin \omega_2 (y - b)}{y - b}\, dx\, dy +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, b)\, e^{-\sigma x - \tau y} \frac{\sin \omega_1 (x - a)}{x - a} \frac{\sin \omega_2 (y - b)}{y - b}\, dx\, dy -$$

$$\left. - \int_0^\infty \int_0^\infty f(a, b)\, e^{-\sigma x - \tau y} \frac{\sin \omega_1 (x - a)}{x - a} \frac{\sin \omega_2 (y - b)}{y - b}\, dx\, dy \right\}. \tag{1.35}$$

Приступим к изучению поведения интегралов, стоящих в фигурных скобках последнего равенства при $\omega_1 \to \infty$, $\omega_2 \to \infty$. Пусть $\sigma > k_1$ и $\tau > k_2$; тогда из неравенства (1.34) следует абсолютная сходимость интеграла:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\varphi(x, y)|\, e^{-\sigma x - \tau y}\, dx\, dy.$$

Поэтому (см. теорему 7) будем иметь

$$\lim_{\substack{\omega_1 \to \infty \\ \omega_2 \to \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x, y)\, e^{-\sigma x - \tau y} \sin \omega_1 (x - a) \sin \omega_2 (y - b)\, dx\, dy = 0.$$

Что касается оставшихся трех интегралов, то к ним применима теория интеграла Фурье для функций, зависящих от одного переменного. В силу условия (1.28) существуют при $\sigma > k_1$ и $\tau > k_2$ интегралы

$$\int_0^\infty |f(x, b)|\, e^{-\sigma x}\, dx, \qquad \int_0^\infty |f(a, y)|\, e^{-\tau y}\, dy$$

и, кроме того, функции $f(x, b)$ и $f(a, y)$ дифференцируемы соответственно по x и y. Поэтому

$$\lim_{\omega_1 \to \infty} \int_0^\infty f(x, b)\, e^{-\sigma x} \frac{\sin \omega_1 (x - a)}{x - a}\, dx = \pi f(a, b)\, e^{-\sigma a},$$

$$\lim_{\omega_2 \to \infty} \int_0^\infty e^{-\tau y} f(a, y) \frac{\sin \omega_2 (y - b)}{y - b}\, dy = \pi f(a, b)\, e^{-\tau b}.$$

Далее

$$\lim_{\omega_1 \to \infty} \int_0^\infty e^{-\sigma x} \frac{\sin \omega_1 (x - a)}{x - a}\, dx = \pi e^{-\sigma a},$$

$$\lim_{\omega_2 \to \infty} \int_0^\infty e^{-\tau y} \frac{\sin \omega_2 (y - b)}{y - b}\, dy = \pi e^{-\tau b}.$$

Отсюда следует, что три интеграла в фигурных скобках равенства (1.35) при $\omega_1 \to \infty$ и $\omega_2 \to \infty$ сходятся. Пределы их равны одному и тому же числу $\pi^2 f(a, b)\, e^{-\sigma a - \tau b}$. Следовательно, при $\omega_1 \to \infty$ и $\omega_2 \to \infty$ существует

$$\lim_{\substack{\omega_1 \to \infty \\ \omega_2 \to \infty}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\sigma - i\omega_1}^{\sigma + i\omega_1} \int_{\tau - i\omega_2}^{\tau + i\omega_2} e^{pa + qb} F(p, q)\, dp\, dq = f(a, b) \tag{1.36}$$

что и требовалось доказать.

Формула (1.36) доказана в предположении $a>0$, $b>0$. Если $a<0$, $b<0$, то из (1.31) немедленно следует, что предел в (1.36) равен нулю. В случаях, когда $a<0$, $b>0$ или $a>0$, $b<0$, как видно из доказательства, предел (1.36) также равен нулю. Наконец, если $a=0$, $b>0$; $a>0$, $b=0$ или $a=0$, $b=0$, то упоминаемый выше предел будет равен соответственно

$$\frac{1}{2}f(+0,\ b),\ \frac{1}{2}f(a,\ +0)$$

и

$$\frac{1}{4}[f(0,\ +0)+f(+0,\ 0)-f(0,\ 0)].$$

Примечание. Для существования пределов при $\omega_1\to\infty$ и $\omega_2\to\infty$ трех последних интегралов в правой части выражения (1.35) достаточно, чтобы функция $f(x,y)$ удовлетворяла в отдельности по каждому из переменных условиям, обеспечивающим справедливость теоремы обращения для случая одного переменного. Например, достаточно, чтобы функция $\varphi(x)=f(x,y)$ (y — любое фиксированное) и $\psi(y)=f(x,y)$ (x — любое фиксированное) были функциями ограниченной вариации в окрестности любой точки и чтобы интегралы

$$\int_0^\infty e^{-\sigma x}|\varphi(x)|\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-\tau y}|\psi(y)|\,dy$$

сходились. Если такие условия выполнены, то доказательство теоремы обращения сводится к исследованию поведения интеграла

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(x,\ y)\,e^{-\sigma x-\tau y}\sin\omega_1(x-a)\sin\omega_2(y-b)\,dx\,dy \tag{1.37}$$

при $\omega_1\to\infty$, $\omega_2\to\infty$.

С этой целью выделим в области интегрирования интеграла (1.37) область $|x-a|\geqslant\delta$, $|y-b|\geqslant\varepsilon$ и дополнение к ней обозначим через $R(\varepsilon,\ \delta)$. Очевидно, для доказательства стремления к нулю интеграла (1.37) при $\omega_1\to\infty$ и $\omega_2\to\infty$ достаточно показать, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to\infty\\ \delta\to\infty}}\iint\limits_{R(\varepsilon,\ \delta)}|\varphi(x,\ y)|\,e^{-\sigma x-\tau y}\,dx\,dy=0.$$

Так как

$$\iint\limits_{R(\varepsilon,\ \delta)}|\varphi(x,\ y)|\,e^{-\sigma x-\tau y}\,dx\,dy\leqslant\int_{a-\delta}^{a+\delta}dx\int_0^\infty|\varphi(x,y)|\,e^{-\sigma x-\tau y}dy+$$
$$+\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}dy\int_0^\infty|\varphi(x,\ y)|\,e^{-\sigma x-\tau y}\,dx,$$

то достаточно рассмотреть поведение интегралов

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{a-\delta}^{a+\delta}dx\int_0^\infty|\varphi(x,\ y)|\,e^{-\tau y}\,dy,\\ \displaystyle\int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon}dy\int_0^\infty|\varphi(x,\ y)|\,e^{-\sigma x}\,dx\end{array}\right\} \tag{1.38}$$

при $\delta\to\infty$ и $\varepsilon\to\infty$. Если функция $f(x,\ y)$ удовлетворяет по каждому переменному условиям

$$|f(x,\ y)-f(a,\ y)|\leqslant M|x-a|^\alpha e^{k_1x+k_2y},$$
$$|f(x,\ y)-f(x,\ b)|\leqslant M|y-b|^\alpha e^{k_1x+k_2y},$$

где M и α — некоторые положительные постоянные, вообще говоря, зависящие от выбора чисел a и b, то очевидно, что

$$|G(x,\ y)|\leqslant M|x-a|^\alpha e^{k_1x+k_2y},$$
$$|G(x,\ y)|\leqslant M|y-b|^\alpha e^{k_1x+k_2y}.$$

Отсюда

$$|G(x,\ y)|\leqslant M|x-a|^{\frac{\alpha}{2}}|y-b|^{\frac{\alpha}{2}}e^{k_1x+k_2y}.$$

Следовательно,

$$|\varphi(x,\ y)|\leqslant M|x-a|^{\frac{\alpha}{2}-1}|y-b|^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{k_1x+k_2y}.$$

Поэтому

$$\left|\int_{a-\delta}^{a+\delta}dx\int_0^\infty|\varphi(x,\ y)|\,e^{-\tau y}\,dy\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|M\int_{a-\delta}^{a+\delta}e^{k_1x}|x-a|^{\frac{\alpha}{2}-1}dx\int_0^\infty e^{-(\tau-k_2)y}|y-b|^{\frac{\alpha}{2}-1}dy\right|.$$

Если $a > 0$, то, очевидно,

$$\lim_{\delta\to\infty}\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta} dx \int\limits_0^\infty |\varphi(x, y)|\, e^{-\tau y}\, dy = 0.$$

Аналогичным образом

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} dy \int\limits_0^\infty |\varphi(x, y)|\, e^{-\sigma x}\, dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПО ДВУМ ПЕРЕМЕННЫМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Несмотря на то, что операционное исчисление в современных работах (и в первую очередь в работах Микусинского [7] и Шварца [54]) получило свое дальнейшее и глубокое обобщение, во многих практических задачах часто бывает целесообразно пользоваться схемой обоснования операционного исчисления, основанной на применении преобразования Лапласа. В связи со сказанным представляет известный интерес построить аппарат операционного исчисления по двум переменным на основе двумерного преобразования Лапласа. В последнем вместо преобразования Лапласа рассматривается преобразование Лапласа — Карсона,

$$F(p, q) = pq\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\, dx\, dy, \tag{2.1}$$

которое, в отличие от символической записи операционного исчисления по одной переменной $F(p) \risingdotseq f(x)$, записывается в виде $F(p, q) \mathrel{\ddot{\risingdotseq}} f(x, y)$. Функция $F(p, q)$ называется изображением, а функция $f(x, y)$ оригиналом. При этом преобразовании единичная функция $\eta(x, y)$ *) переходит в единицу, т. е. $\eta(p, q) = 1$. Так как преобразование Лапласа — Карсона отличается от преобразования Лапласа лишь множителем pq, то очевидно, что все теоремы и свойства

*) То есть функция, равная единице для всех пар положительных значений x и y и равная нулю, когда по крайней мере один из аргументов отрицательный.

преобразования Лапласа могут быть сформулированы и для преобразования Лапласа — Карсона. В дальнейшем будем обозначать через x и y — переменные оригинала, а через p и q — переменные изображения. Кроме того, обозначим через

$$F_1(p, y) = p\int_0^\infty e^{-p\xi} f(\xi, y)\,d\xi; \quad F_2(x, q) = q\int_0^\infty e^{-q\eta} f(x, \eta)\,d\eta$$

промежуточные изображения функции $f(x, y)$ по одной из переменных x или y.

§ 1. Правило подобия и теоремы сдвига

Правило подобия. Если $F(p, q) \doteqdot f(x, y)$, то

$$F\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right) \doteqdot f(ax, by), \tag{2.2}$$

где a и b — положительные числа, $f(x, y)$ — функция действительных переменных, определенная для положительных значений x и y и принадлежащая к множеству S.

Теорема сдвига для изображения. Если $F(p, q) \doteqdot f(x, y)$, то

$$\frac{p}{p+a}\frac{q}{q+b}F(p+a, q+b) \doteqdot e^{-ax-by} f(x, y) \tag{2.3}$$

при любых a и b.

Теорема сдвига для оригинала. В противоположность предыдущему пункту, оригинал от $e^{-ap-bq}F(p, q)$ существует лишь для действительных и положительных значений a и b, а именно, если $F(p, q) \doteqdot f(x, y)$, то

$$e^{-ap-bq} F(p, q) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \text{ или } y < b, \\ f(x-a, y-b) & \text{при } x > a, y > b. \end{cases} \tag{2.4}$$

§ 2. Изображение интегралов и производных. Теорема умножения

Изображение интегралов. Если $F(p, q) \doteqdot f(x, y)$, то имеют место следующие соотношения:

$$\int_0^x f(\xi, y)\,d\xi \doteqdot \frac{1}{p}F(p, q), \tag{2.5}$$

$$\int_0^y f(x, \eta)\,d\eta \doteqdot \frac{1}{q}F(p, q), \tag{2.6}$$

$$\int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \doteqdot \frac{1}{pq}F(p, q), \tag{2.7}$$

$$\int_x^\infty \frac{f(\xi, y)}{\xi}\,d\xi \doteqdot \int_0^p \frac{F(\xi, q)}{\xi}\,d\xi, \tag{2.8}$$

$$\int_y^\infty \frac{f(x, \eta)}{\eta}\,d\eta \doteqdot \int_0^q \frac{F(p, \eta)}{\eta}\,d\eta, \tag{2.9}$$

$$\int_x^\infty \int_y^\infty \frac{f(\xi, \eta)}{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta \doteqdot \int_0^p \int_0^q \frac{F(\xi, \eta)}{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta, \tag{2.10}$$

$$\int_0^x \frac{f(\xi, y)}{\xi}\,d\xi \doteqdot \int_p^\infty \frac{F(\xi, q)}{\xi}\,d\xi, \tag{2.11}$$

$$\int_0^y \frac{f(x, \eta)}{\eta}\,d\eta \doteqdot \int_q^\infty \frac{F(p, \eta)}{\eta}\,d\eta, \tag{2.12}$$

$$\int_0^x \int_0^y \frac{f(\xi, \eta)}{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta \doteqdot \int_p^\infty \int_q^\infty \frac{F(\xi, \eta)}{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta. \tag{2.13}$$

Здесь предполагается сходимость всех вышеприведенных несобственных интегралов. Соотношения подобного типа справедливы и для интегралов большей кратности.

Изображение производных. Существование изображения некоторой функции не влечет за собой существование изображения для ее производных. Однако, если эти изображения существуют, то они находятся так же, как и в одномерном случае, только при этом необходимо знать большее количество начальных значений. Например, найдем оригинал для функции $pF(p, q)$. Интегрируя по частям, получим

$$pF(p, q) = pq\int_0^\infty e^{-qy}\left\{-e^{-px}f(x, y)\Big|_{x=0}^{x=\infty}\right\}dy +$$
$$+ pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,dx\,dy,$$

откуда следует, что если для всех $y>0$, $f(0, y)=0$, то

$$pF(p, q) \doteqdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Аналогично, если для всех $x>0$, $f(x, 0)=0$, то

$$qF(p, q) \doteqdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Пусть $f(0, y)=f_1(y)\doteqdot F_1(q)$, тогда

$$f(x, y)-f_1(y)\doteqdot F(p, q)-F_1(q).$$

Дифференцируя только что написанное символическое равенство по x, получим

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\doteqdot p\,[F(p, q)-F_1(q)].$$

Подобно предыдущему, если $f(x, 0)=f_2(x)\div F_2(p)$, то

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\doteqdot q\,[F(p, q)-F_2(p)].$$

Дифференцируя по x и y операционное соответствие

$$f(x, y)-f_1(y)-f_2(x)+$$
$$+f(0, 0)\doteqdot F(p, q)-F_1(q)-F_2(p)+f(0, 0),$$

получим

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial f_2(x)}{\partial x}\doteqdot p\,[F(p, q)-F_1(q)-F_2(p)+f(0, 0)],$$
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}-\frac{\partial f_1(y)}{\partial y}\doteqdot q\,[F(p, q)-F_1(q)-F_2(p)+f(0, 0)],$$
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}\doteqdot pq\,[F(p, q)-F_1(q)-F_2(p)+f(0, 0)].$$

Кроме того, большое количество операционных соответствий, содержащих производные, можно получить с помощью дифференцирования по параметру. Например, дифференцируя несколько раз по a или b символическое равенство

$$f(ax, by)\doteqdot F\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right)$$

и полагая после дифференцирования $a=b=1$, найдем

$$x\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\doteqdot -p\frac{\partial F(p, q)}{\partial p},$$
$$xy\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,dy}\doteqdot pq\frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial p\,\partial q}$$

и т. п. Здесь предполагается, что функция $f(x, y)$ дифференцируема во всей области определения и для производных существуют изображения. Приведем несколько обобщений двух последних формул, а именно:

$$x^n y^m\frac{\partial^{m+n}f(x, y)}{\partial x^n\,\partial y^m}\doteqdot(-1)^{m+n}\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial p^{n-1}\,\partial q^{m-1}}\left[p^n q^m\frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial p\,\partial q}\right],$$
$$x^r y^s\frac{\partial^{m+n}f(x, y)}{\partial x^n\,\partial y^m}\doteqdot(-1)^{r+s}pq\frac{\partial^{r+s}}{\partial p^r\,\partial q^s}[p^{n-1}q^{m-1}F(p, q)],$$

где $r\geqslant m$, $s\geqslant n$ (r, s, m, n — целые положительные числа). Кроме того,

$$\frac{\partial^{r+s-2}}{\partial x^{r-1}\,\partial y^{s-1}}\left[x^n y^m\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}\right]\doteqdot(-1)^{m+n}p^r q^s\frac{\partial^{m+n}F(p,q)}{\partial p^n\,\partial q^m},$$

где $m\geqslant r$, $n\geqslant s$ (r, s, m, n — целые положительные числа). Все вышеприведенные формулы часто применяются при решении дифференциальных уравнений в частных производных.

Теорема умножения. Если $F_1(p, q)\doteqdot f_1(x, y)$ и $F_2(p, q)\doteqdot f_2(x, y)$, то имеет место следующее (см. теорему 12) весьма полезное в приложениях операционное соответствие:

$$f_1(x, y) \overset{x\,y}{**} f_2(x, y) \risingdotseq \frac{1}{pq} F_1(p, q) F_2(p, q), \qquad (2.14)$$

где

$$f_1(x, y) \overset{x\,y}{**} f_2(x, y) = \int_0^x \int_0^y f_1(\xi, \eta) f_2(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Двойная звездочка обозначает двойную свертку по x и y, в отличие от свертки только по x,

$$f_1(x, y) \overset{x}{*} f_2(x, y) = \int_0^x f_1(\xi, y) f_2(x-\xi, y)\, d\xi,$$

или только по y:

$$f_1(x, y) \overset{y}{*} f_2(x, y) = \int_0^y f_1(x, \eta) f_2(x, y-\eta)\, d\eta.$$

§ 3. Линейная подстановка переменных p и q

Пусть m и M — соответственно наименьшее и наибольшее из значений x и y и пусть для функции $f(x)$ существует преобразование Лапласа. Найдем изображение функции $f(m)$, т. е.

$$F(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(m)\, dx\, dy.$$

Проведем биссектрису $x = y$ первого координатного угла xOy и вычислим этот интеграл в области $x > y$, где $f(m) = f(y)$, и в области $x < y$, где $f(m) = f(x)$. Тогда получим:

$$F(p, q) = pq \int_0^\infty e^{-qy} f(y)\, dy \int_y^\infty e^{-px}\, dx + pq \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx \times$$

$$\times \int_x^\infty e^{-qy}\, dy = (p+q) \int_0^\infty e^{-(p+q)u} f(u)\, du = F(p+q),$$

т. е.

$$f(m) \risingdotseq F(p+q), \qquad (2.15)$$

где

$$F(p) = p \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx.$$

Таким же образом можно получить следующие операционные соотношения:

$$f(M) \risingdotseq F(p) + F(q) - F(p+q), \qquad (2.16)$$

$$\left.\begin{matrix} f(x) & \text{при} & x < y \\ 0 & \text{при} & x > y \end{matrix}\right\} \risingdotseq \frac{p}{p+q} F(p+q), \qquad (2.17)$$

$$\left.\begin{matrix} f(x) & \text{при} & x < y \\ f_1(y) & \text{при} & x > y \end{matrix}\right\} \risingdotseq \frac{pF(p+q) + qF_1(p+q)}{p+q}, \qquad (2.18)$$

где

$$F_1(q) = q \int_0^\infty e^{-qy} f_1(y)\, dy;$$

$$\left.\begin{matrix} f(y) & \text{при} & x < y \\ f_1(x) & \text{при} & x > y \end{matrix}\right\} \risingdotseq F(q) + F_1(p) - \frac{qF(p+q) + pF_1(p+q)}{p+q}, \qquad (2.19)$$

$$\left.\begin{matrix} f(x)(y-x)^\nu & \text{при} & y > x \\ 0 & \text{при} & y < x \end{matrix}\right\} \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)\, pF(p+q)}{q^\nu (p+q)}, \qquad (2.20)$$

$$\left.\begin{matrix} f(x) \text{ при } y < ax;\ y > bx \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \\ a > b \end{matrix}\right\} \risingdotseq F(p) - \frac{p}{p+aq} F(p+aq) + \frac{p}{p+bq} F(p+bq). \qquad (2.21)$$

Найдем теперь оригинал от функции $\frac{F(p, q)}{p+q}$, часто встречающейся при решении дифференциальных уравнений с частными производными.

Пусть

$$F(p, q) \risingdotseq F_1(x, q) \risingdotseq f(x, y).$$

Так как

$$\frac{p}{p+q} \risingdotseq e^{-qx},$$

то с помощью теоремы умножения будем иметь

$$\frac{F(p,q)}{p+q}=\frac{1}{p}\,\frac{p}{p+q}F(p,q)\doteqdot e^{-qx}\overset{x}{*}F_1(x,q)=$$
$$=\int_0^x e^{-q\xi}F_1(x-\xi,q)\,d\xi.$$

Применяя теорему сдвига относительно переменной q, получим

$$e^{-q\xi}F_1(x-\xi,q)\doteqdot\begin{cases}0 & \text{при}\quad y<\xi,\\ f(x-\xi,\,y-\xi) & \text{при}\quad y>\xi,\end{cases}$$

откуда следует, что

$$\frac{F(p,q)}{p+q}\doteqdot\int_0^{\min(x,\,y)} f(x-\xi,\,y-\xi)\,d\xi. \tag{2.22}$$

В частности,

$$\frac{F(p)F_1(q)}{p+q}\doteqdot\int_0^{\min(x,\,y)} f(x-\xi)f_1(y-\xi)\,d\xi. \tag{2.23}$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{F(ap+bq,\,a_1p+b_1q)}{(ap+bq)(a_1p+b_1q)}=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(ap+bq)\xi-(a_1p+b_1q)\eta}f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Заметим, что числа a, b, a_1, b_1 — действительные и неотрицательные. Сделаем замену переменных по формулам

$$a\xi+a_1\eta=x,\quad b\xi+b_1\eta=y.$$

Пусть $\Delta=ab_1-a_1b\neq0$. Тогда можно найти следующую формулу:

$$pq\,\frac{F(ap+bq,\,a_1p+b_1q)}{(ap+bq)(a_1p+b_1q)}\doteqdot\frac{1}{\Delta}f\left(\frac{b_1x-a_1y}{\Delta},\ \frac{ay-bx}{\Delta}\right), \tag{2.24}$$

где функцию $f(x,y)$ следует считать равной нулю, когда хотя бы один из ее аргументов становится отрицательным. В частности, имеем

$$\frac{p}{p+q}F(p+q,\,q)\doteqdot\begin{cases}f(x,\,y-x) & \text{при}\quad y>x,\\ 0 & \text{при}\quad y<x,\end{cases}$$

что является обобщением формулы (2.17).

§ 4. Функции от функций

Пусть

$$F(p)=p\int_0^\infty e^{-ps}f(s)\,ds \tag{2.25}$$

и существуют операционные соответствия

$$\alpha(p)\,e^{-s\rho(p)}\doteqdot A(x,s),$$
$$\beta(q)\,e^{-s\sigma(q)}\doteqdot B(y,s).$$

Заменяя в (2.25) p на $\rho(p)+\sigma(q)$, получим

$$\frac{\alpha(p)\beta(q)F[\rho(p)+\sigma(q)]}{\rho(p)+\sigma(q)}\doteqdot\int_0^\infty A(x,s)B(y,s)f(s)\,ds. \tag{2.26}$$

В качестве примеров приведем несколько соотношений, полученных указанным методом:

$$\frac{pqF(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{q^2+1})}{\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\,[\sqrt{p^2+1}+\sqrt{q^2+1}]}\doteqdot\int_0^m J_0\left(2\sqrt{x^2-s^2}\right)\times$$
$$\times J_0\left(2\sqrt{y^2-s^2}\right)f(s)\,ds, \tag{2.27}$$

$$F_1(p)F_2(q)\frac{F(p+q)}{p+q}\doteqdot\int_0^m f_1(x-s)f_2(y-s)f(s)\,ds, \tag{2.28}$$

$$\frac{F(p+\ln q)}{p+\ln q}\doteqdot\int_0^x\frac{y^s f(s)\,ds}{\Gamma(1+s)}. \tag{2.29}$$

Другое выражение типа (2.26) можно получить аналогичным образом, используя интеграл (2.1). Получаемые при этом формулы позволяют представить оригиналы изображений, содержащих функцию от функций с помощью двойных интегралов, что находит важные приложения при решении дифференциальных уравнений с частными производными.

Например, имеем

$$\frac{pqF(\sqrt{p^2+1},\ \sqrt{q^2+1})}{(p^2+1)(q^2+1)} \risingdotseq \int_0^x \int_0^y J_0(\sqrt{x^2-\xi^2})\, J_0(\sqrt{y^2-\eta^2}) \times$$
$$\times f(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{pqF\left(p+\frac{1}{p},\ q+\frac{1}{q}\right)}{(p^2+1)(q^2+1)} \risingdotseq \int_0^x \int_0^y J_0\left(2\sqrt{\xi(x-\xi)}\right) \times$$
$$\times J_0\left(2\sqrt{\eta(y-\eta)}\right) f(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Наконец, заметим, что иногда бывает необходимо находить оригиналы от изображений, таких как $F(p,\ p)$, $F(\sqrt{p},\ p)$ и т. д. Пусть, например, требуется найти оригинал от $F(p,\ p)$. Напишем

$$\frac{1}{p} F(p,\ p) = p \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(\xi+\eta)} f(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Введем новую переменную $x = \xi + \eta$. Тогда будем иметь

$$\frac{1}{p} F(p,\ p) = p \int_0^\infty e^{-px}\, dx \int_0^x f(\xi,\ x-\xi)\, d\xi,$$

т. е.

$$\frac{1}{p} F(p,\ p) \risingdotseq \int_0^x f(\xi,\ x-\xi)\, d\xi = \int_0^x f(x-\xi,\ \xi)\, d\xi. \tag{2.30}$$

§ 5. Изображение функции $f(x+y)$

Пусть $F(p) \risingdotseq f(x)$. Найдем изображение функции $f(x+y)$. После замены переменной по формуле $x+y=u$, получим

$$F(p,\ q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x+y)\, dx\, dy =$$
$$= pq \int_0^\infty e^{-pu} f(u)\, du \int_0^u e^{(p-q)y}\, dy =$$
$$= \frac{pq}{p-q} \int_0^\infty (e^{-qu} - e^{-pu}) f(u)\, du = \frac{pF(q) - qF(p)}{p-q},$$

т. е.

$$f(x+y) \risingdotseq \frac{pF(q) - qF(p)}{p-q}. \tag{2.31}$$

Например,

$$\sin(x+y) \risingdotseq \frac{pq(p+q)}{(p^2+1)(q^2+1)},$$
$$\cos(x+y) \risingdotseq \frac{pq(pq-1)}{(p^2+1)(q^2+1)},$$
$$J_0\left(2\sqrt{x+y}\right) \risingdotseq \frac{qe^{-\frac{1}{p}} - pe^{-\frac{1}{q}}}{q-p}.$$

Таким же образом можно найти для производной $f'(u)$ и интегралов от $f(u)$

$$f'(x+y) \risingdotseq pq\, \frac{F(q) - F(p)}{p-q}, \tag{2.32}$$

$$\int_0^x f(\xi)\, d\xi + \int_0^y f(\xi)\, d\xi - \int_0^{x+y} f(\xi)\, d\xi \risingdotseq \frac{F(p) - F(q)}{p-q}. \tag{2.33}$$

Найдем теперь изображение функции $(x+y)^m$. Для этого можно воспользоваться (2.31). Однако непосредственно из

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^m \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n y^{m-n}$$

следует

$$(x+y)^m \risingdotseq \sum_{n=0}^m \frac{m(m-1)\ldots(m-n-1)}{n!} \frac{n!\,(m-n)!}{p^n q^{m-n}}$$

или

$$(x+y)^m \risingdotseq \sum_{n=0}^m \frac{m!}{p^n q^{m-n}} = \frac{m!}{q^m} \sum_{n=0}^m \left(\frac{p}{q}\right)^n,$$

поэтому

$$(x+y)^m \risingdotseq \frac{m!}{p^m q^m} \frac{q^{m+1} - p^{m+1}}{q-p}. \tag{2.34}$$

Дифференцируя последнее символическое равенство по m и полагая $m=0$, получим соотношение

$$\ln(x+y) \risingdotseq \frac{p\ln q - q\ln p}{q-p} - C, \tag{2.35}$$

где C — постоянная Эйлера.

Применяя правило подобия и учитывая формулу (2.31), получим

$$f(ax+by) \risingdotseq \frac{bpF\left(\frac{q}{b}\right)-aqF\left(\frac{p}{a}\right)}{bp-aq}. \tag{2.36}$$

Как ранее упомянуто, числа a и b должны быть действительными и положительными.

§ 6. Изображение функции $f(|x-y|)$

Считая $f(x)$ при отрицательном значении аргумента равной нулю, можно найти изображение для функции $f(x-y)$. Обозначив

$$f_1(x, y)=\begin{cases} f(x-y) & \text{при} \quad x>y, \\ 0 & \text{при} \quad x<y, \end{cases}$$

имеем

$$F_1(p, q)=pq\int_0^\infty e^{-qy}\,dy\int_y^\infty e^{-px}f(x-y)\,dx.$$

Полагая $x-y=u$, будем иметь

$$f_1(x, y) \risingdotseq F_1(p, q)=\frac{q}{p+q}F(p). \tag{2.37}$$

Найдем также изображение функции

$$f_2(x, y)=\begin{cases} f(y-x) & \text{при} \quad y>x, \\ 0 & \text{при} \quad y<x, \end{cases}$$

которое по симметрии с (2.37) имеет вид

$$f_2(x, y) \risingdotseq F_2(p, q)=\frac{p}{p+q}F(q). \tag{2.38}$$

Складывая (2.37) и (2.38), получим

$$f_1(x, y)+f_2(x, y)=f(|x-y|) \risingdotseq \frac{pF(q)+qF(p)}{p+q}.$$

§ 7. Изображение функции $f(xy)$

Для вычисления изображения функции $f(xy)$ следует воспользоваться интегралом

$$\int_0^\infty e^{-pt-\frac{q}{t}}\frac{dt}{t}=2K_0(2\sqrt{pq}).$$

Тогда

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}f(xy)\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x}dx\int_0^\infty e^{-\frac{q\xi}{x}}f(\xi)\,d\xi=2\int_0^\infty K_0(2\sqrt{pq\xi})f(\xi)d\xi,$$

откуда

$$f(xy) \risingdotseq 2pq\int_0^\infty K_0(2\sqrt{pq\xi})f(\xi)\,d\xi. \tag{2.39}$$

§ 8. Изображение функции $Jl_0(2\sqrt{xy})$

Рассмотрим функцию

$$Jl_0(x)=\int_x^\infty \frac{J_0(u)}{u}\,du;$$

имеем

$$-Jl_0(2\sqrt{x})=C+\ln\sqrt{x}+\sum_{s=1}^\infty \frac{(-1)^s x^s}{s!s!2s}.$$

Так как

$$\ln\left(1+\frac{1}{pq}\right)=-\sum_{s=1}^\infty \frac{(-1)^s}{sp^sq^s} \risingdotseq -\sum_{s=1}^\infty \frac{(-1)^s x^s y^s}{s!s!s},$$

то

$$\ln\left(1+\frac{1}{pq}\right) \risingdotseq 2Jl_0(2\sqrt{xy})+2C+\ln xy;$$

учитывая, что

$$\ln pq \doteqdot -2C - \ln xy,$$

получим

$$\ln(pq+1) \doteqdot 2Jl_0(2\sqrt{xy}).$$

§ 9. Изображение функции $\frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$

Пусть $f(x) = F(p)$. Заменяя p на $\sqrt{p}+\sqrt{q}$, где под $\sqrt{p}$ и $\sqrt{q}$ мы всегда будем понимать ту ветвь, для которой $\sqrt{1}=1$, $\arg 1 = 0$, будем иметь

$$\sqrt{pq}\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \int_0^\infty \sqrt{p}e^{-\xi\sqrt{p}}\sqrt{q}e^{-\xi\sqrt{q}} f(\xi)\,d\xi.$$

Учитывая, что

$$\sqrt{p}\cdot e^{-\xi\sqrt{p}} \doteqdot \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4x}}}{\sqrt{\pi x}},$$

получим

$$\sqrt{pq}\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \doteqdot \int_0^\infty \frac{e^{-\xi^2\frac{x+y}{4xy}}}{\pi\sqrt{xy}} f(\xi)\,d\xi. \qquad (2.40)$$

Пусть в (2.40) $\xi = \sqrt{u}$; тогда

$$\sqrt{pq}\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \doteqdot \int_0^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}} e^{-u\left(\frac{x+y}{4xy}\right)} \frac{f(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\,du. \quad (2.41)$$

Полагая в (2.41) $p = \frac{x+y}{4xy}$, $f(x) \doteqdot F(p)$, $\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \doteqdot G(p)$, получим

$$\sqrt{pq}\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \doteqdot \frac{2\sqrt{xy}}{\pi(x+y)} G\left(\frac{x+y}{4xy}\right). \qquad (2.42)$$

Пример. Пусть

$$f(x) = xJ_0(x) \doteqdot \frac{p^2}{(p^2+1)^{3/2}} = F(p),$$

$$\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = J_0(\sqrt{x}) \doteqdot e^{-\frac{1}{4p}} = G(p).$$

Тогда по (2.42) имеем

$$\frac{\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{[(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2+1]^{3/2}} \doteqdot \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{xy}}{(x+y)} e^{-\frac{xy}{x+y}}.$$

С другой стороны, пусть $F(p) \doteqdot f(x)$, $F(\sqrt{p}) \doteqdot h(x)$.

Тогда, учитывая, что $\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \doteqdot \sqrt{p\pi}\, h\left(\frac{1}{4p}\right)$, можно (из 2.42) найти

$$\sqrt{pq}\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} h\left(\frac{xy}{x+y}\right). \qquad (2.43)$$

Эту формулу можно также записать в виде

$$\sqrt{pq}\frac{F[(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2]}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} f\left(\frac{xy}{x+y}\right). \quad (2.43')$$

Приведем несколько операционных соответствий, полученных с помощью последней формулы.

Исходя из формулы $\cos x \doteqdot \frac{p^2}{p^2+1}$, найдем

$$\sqrt{pq}\frac{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^3}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^4+1} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} \cos\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Исходя из формулы $\sin x \doteqdot \frac{p}{p^2+1}$, найдем

$$\sqrt{pq}\frac{(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^4+1} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}} \sin\frac{xy}{x+y}.$$

Исходя из формулы $\frac{x^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} \doteqdot \frac{1}{p^{\frac{\nu}{2}}}$ $(\nu > -2)$, найдем

$$\frac{\sqrt{pq}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^{\nu+1}} \doteqdot \frac{(xy)^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)(x+y)^{\frac{\nu+1}{2}}}.$$

Получим еще несколько аналогичных формул.

а) Пусть $F(p) \doteqdot f(x)$ и $f(\sqrt{x}) \doteqdot G(p)$.

Тогда можно найти следующие соотношения:

$$p\sqrt{q}\,\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{y}{\pi\sqrt{xy}\,(x+y)}\,G\left(\frac{x+y}{4xy}\right),$$

$$q\sqrt{p}\,\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{x}{\pi\sqrt{xy}\,(x+y)}\,G\left(\frac{x+y}{4xy}\right)$$

и

$$\sqrt{pq}\,F(\sqrt{p}+\sqrt{q}) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\,G\left(\frac{x+y}{4xy}\right).$$

Пример. $f(x)=J_0(x)\doteqdot\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$ и $J_0(\sqrt{x})\doteqdot e^{-\frac{1}{4p}}$.

Получим

$$\frac{\sqrt{pq}\,(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{1+(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\,e^{-\frac{xy}{x+y}}.$$

б) Пусть $f(x)\doteqdot F(p)$ и $\sqrt{x}\,f(\sqrt{x})\doteqdot\Phi(p)$. Получим теперь еще одно соответствие, аналогичное (2.42). В самом деле,

$$\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=\int_0^\infty\frac{e^{-s\sqrt{p}-s\sqrt{q}}}{s^2}\,s^2f(s)\,ds.$$

Кроме того,

$$\frac{pe^{-s\sqrt{p}}}{s}\doteqdot\frac{e^{-\frac{s^2}{4x}}}{2\sqrt{\pi}}\,x^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{qe^{-s\sqrt{q}}}{s}\doteqdot\frac{e^{-\frac{s^2}{4y}}}{2\sqrt{\pi}}\,y^{-\frac{3}{2}}.$$

Поэтому после очевидных преобразований будем иметь

$$pq\,\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{1}{8\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{x+y}{4xy}u}\,\frac{\sqrt{u}\,f(\sqrt{u})}{(xy)^{3/2}}\,du.$$

Учитывая, что $\sqrt{x}\,f(\sqrt{x})\doteqdot\Phi(p)$, найдем

$$pq\,\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{1}{2\pi\,(x+y)\sqrt{xy}}\,\Phi\left(\frac{x+y}{4xy}\right).$$

в) Пусть $f(x)\doteqdot F(p)$ и $G(\sqrt{p})\doteqdot\Phi(x)$, где

$$G(p)=p\,\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{F(p)}{p}\right];$$

тогда, используя предыдущее соответствие в виде

$$pq\,\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\,\frac{s^2f(s)}{(xy)^{3/2}}\,ds \qquad (2.44)$$

и учитывая, что

$$G(p)=p\,\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{F(p)}{p}\right]\doteqdot t^2f(t),$$

а

$$F(\sqrt{p})\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}}f(s)\,ds,$$

где $F(p)\doteqdot f(t)$, будем иметь

$$G(\sqrt{p})\doteqdot\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}}s^2f(s)\,ds.$$

Подставляя в последнем соответствии $\frac{1}{t}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ и используя (2.44), получим

$$pq\,\frac{F(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{1}{4xy\sqrt{\pi\,(x+y)}}\,\Phi\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

§ 10. Изображение функций Кельвина (Томсона)

Зная изображение функций Бесселя, можно легко получить изображение функций Кельвина, а также несколько интересных свойств этих функций. Действительно, имеем

$$J_0(2i\sqrt{xy}) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{pq}{pq-1} \qquad (2.45)$$

и, следовательно,

$$J_0(2i\sqrt{ixy}) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{pq}{pq-i}=\frac{pq\,(pq+i)}{p^2q^2+1}.$$

Так как

$$J_0(2i\sqrt{ixy})=\operatorname{ber}(2\sqrt{xy})+i\operatorname{bei}(2\sqrt{xy}),$$

то получим

$$\operatorname{ber}(2\sqrt{xy}) \mathrel{\overset{\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}}} \frac{p^2q^2}{p^2q^2+1}, \qquad (2.46)$$

$$\operatorname{bei}(2\sqrt{xy})=\frac{pq}{p^2q^2+1}. \qquad (2.47)$$

Учитывая, что $\operatorname{bei}(0)=0$ $\operatorname{ber}(0)=1$, с помощью формул (2.46), (2.47) можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\operatorname{bei}\left(2\sqrt{xy}\right) \doteqdot \frac{p^2q^2}{p^2q^2+1} \doteqdot \operatorname{ber}\left(2\sqrt{xy}\right) \qquad (2.48)$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\operatorname{ber}\left(2\sqrt{xy}\right) = -\operatorname{bei}\left(2\sqrt{xy}\right). \qquad (2.49)$$

С другой стороны, имеем

$$\operatorname{bei}\left(2\sqrt{xy}\right) \doteqdot \frac{1}{pq}\,\frac{p^2q^2}{(pq-i)(pq+i)}.$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{pq}{pq-i} \doteqdot J_0\left(2i\sqrt{ixy}\right),$$
$$\frac{pq}{pq+i} \doteqdot J_0\left(2i\sqrt{-ixy}\right),$$

и применяя теорему умножения, получим следующее интегральное представление функции Кельвина:

$$\operatorname{bei}\left(2\sqrt{xy}\right) = \int_0^x\int_0^y J_0\left[2i\sqrt{i(x-\xi)(y-\eta)}\right] J_0\left(2i\sqrt{-i\xi\eta}\right) d\xi\, d\eta.$$

§ 11. Изображение функции произведения и частного аргументов

Пусть $F(p) \doteqdot f(x)$. Рассматривая изображение только относительно x, будем иметь

$$\frac{p}{p+\frac{1}{q}}F\left(p+\frac{1}{q}\right) \doteqdot e^{-\frac{x}{q}}f(x).$$

Вычисляя оригинал относительно q, получим

$$e^{-\frac{x}{q}} \doteqdot J_0\left(2\sqrt{xy}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\frac{p}{p+\frac{1}{q}}F\left(p+\frac{1}{q}\right) \doteqdot J_0\left(2\sqrt{xy}\right)f(x).$$

Заменяя p на $\frac{1}{p}$, преобразуем написанное соответствие по формуле

$$pF\left(\frac{1}{p}\right) \doteqdot \int_0^\infty J_0\left(2\sqrt{xs}\right)f(s)\,ds;$$

найдем

$$\frac{pq}{p+q}F\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \doteqdot \int_0^\infty J_0\left(2\sqrt{sx}\right)J_0\left(2\sqrt{sy}\right)f(s)\,ds; \qquad (2.50)$$

в частности, полагая $f(x)=e^{-x}$, найдем $F(p)=\frac{p}{p+1}$. Применяя формулу (2.50) и вычисляя интеграл в правой части полученного соответствия, будем иметь

$$\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{-1} \doteqdot e^{x+y}J_0\left(2i\sqrt{xy}\right) = e^{x+y}I_0\left(2\sqrt{xy}\right).$$

Пусть опять $F(p) \doteqdot f(x)$. Считая q постоянным, имеем

$$\frac{p}{p+\sqrt{q}}F\left(p+\sqrt{q}\right) \doteqdot e^{-x\sqrt{q}}f(x).$$

Так как еще

$$\sqrt{q}\cdot e^{-x\sqrt{q}} \doteqdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{\sqrt{\pi y}},$$

то получим

$$\frac{p\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}F\left(p+\sqrt{q}\right) \doteqdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{\sqrt{\pi y}}f(x).$$

Учитывая теперь формулу

$$F\left(\sqrt{p}\right) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}}f(s)\,ds,$$

можно получить еще одно соответствие:

$$\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}F\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right) \doteqdot \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}f(s)\,ds.$$

Приведем еще несколько аналогичных операционных соответствий.

1. Пусть $f(x) \doteqdot F(p)$ и $F\left(\frac{1}{x}\right) \doteqdot G(p)$.

Тогда найдем

$$F(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} f(xy)\,dx\,dy =$$

$$= q\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \cdot p\int_0^\infty e^{-\frac{p}{y}u} f(u)\frac{du}{y} =$$

$$= q\int_0^\infty e^{-qy} F\left(\frac{p}{y}\right)dy = pq\int_0^\infty e^{-pqx} F\left(\frac{1}{x}\right)dx = G(pq).$$

Следовательно, $G(pq) \doteqdot f(xy)$. Например,

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \doteqdot J_0(x),$$

$$\frac{\pi}{2}\,p\,[H_0(p) - Y_0(p)] \doteqdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

откуда

$$J_0(xy) \doteqdot \frac{\pi}{2}\,pq\,[H_0(pq) - Y_0(pq)].$$

Точно так же можно найти

$$\frac{(xy)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n+1)} J_n\left(2\sqrt{xy}\right) \doteqdot \frac{pq}{(pq+1)^{n+1}},$$

$$J_0\left(2\sqrt{xy}\right) I_1\left(2\sqrt{xy}\right) \doteqdot \frac{pq\left(\sqrt{p^2q^2+1} - pq\right)}{\sqrt{p^2q^2+1}}.$$

2. Пусть $f(x) \doteqdot F(p)$, $F(x) \doteqdot G(p)$. Тогда будем иметь

$$F(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} f\left(\frac{x}{y}\right)dx\,dy =$$

$$= q\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \cdot p\int_0^\infty e^{-pyu} f(u)\,y\,du =$$

$$= q\int_0^\infty e^{-qy} F(py)\,dy = \frac{q}{p}\int_0^\infty e^{-\frac{q}{p}x} F(x)\,dx = G\left(\frac{q}{p}\right).$$

Таким путем можно получить следующие операционные соответствия:

$$J_1\left(\frac{x}{y}\right) \doteqdot \frac{\pi}{2}\,\frac{q}{p}\left[H_1\left(\frac{q}{p}\right) - Y_1\left(\frac{q}{p}\right) - \frac{2}{\pi}\right],$$

$$J_0\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \doteqdot \sqrt{\frac{q}{p}}\,K_1\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right).$$

3. Пусть $f(x) \doteqdot F(p)$ и $x^\alpha F\left(\frac{1}{x}\right) \doteqdot G(p)$.

Тогда

$$F(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} y^\alpha f(xy)\,dx\,dy =$$

$$= q\int_0^\infty e^{-qy}\,dy\,p\int_0^\infty e^{-\frac{p}{y}u} y^\alpha f(u)\frac{du}{y} =$$

$$= q\int_0^\infty e^{-qy} y^\alpha F\left(\frac{p}{y}\right)dy = pq\int_0^\infty e^{-pqx} p^\alpha x^\alpha F\left(\frac{1}{x}\right)dx = p^\alpha G(pq).$$

4. Пусть $f(x) \doteqdot F(p)$ и $x^\alpha F(x) \doteqdot G(p)$.

Тогда найдем

$$F(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} y^\alpha f\left(\frac{x}{y}\right)dx\,dy =$$

$$= q\int_0^\infty e^{-qy}\,dy \cdot p\int_0^\infty e^{-pyu} y^\alpha f(u)\,y\,du =$$

$$= q\int_0^\infty e^{-qy} y^\alpha F(py)\,dy = \frac{q}{p}\int_0^\infty e^{-\frac{q}{p}x}\frac{1}{p^\alpha} x^\alpha F(x)\,dx = \frac{1}{p^\alpha} G\left(\frac{q}{p}\right).$$

§ 12. Оригинал $F\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$

Пусть $F(p, q) \doteqdot f(x, y)$ и, кроме того, соответствие

$$e^{-\frac{s}{p}-\frac{t}{q}} \doteqdot J_0\left(2\sqrt{sx}\right) J_0\left(2\sqrt{ty}\right) \tag{2.51}$$

справедливо при $s>0$ и $t>0$. Умножив (2.51) на функцию $f(s, t)$ и интегрируя по s и t от 0 до ∞, получим

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{s}{p}-\frac{t}{q}} f(s, t)\,ds\,dt = \int_0^\infty\int_0^\infty J_0(2\sqrt{sx})J_0(2\sqrt{ty})f(s,t)\,ds\,dt,$$

т. е.

$$pqF\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteqdot \int_0^\infty\int_0^\infty J_0(2\sqrt{sx})J_0(2\sqrt{ty})f(s, t)\,ds\,dt. \qquad (2.52)$$

Например, так как

$$F(p, q) = \frac{pq}{p^2q^2+1} \doteqdot \operatorname{bei}(2\sqrt{xy}),$$

то

$$pqF\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = \frac{p^2q^2}{p^2q^2+1} \doteqdot \operatorname{ber}(2\sqrt{xy})$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ber}(2\sqrt{xy}) = \int_0^\infty\int_0^\infty J_0(2\sqrt{sx})J_0(2\sqrt{ty})\operatorname{bei}(2\sqrt{st})\,ds\,dt. \qquad (2.53)$$

Таким же образом, если

$$F(p, q) = \frac{pq(p+q)}{(p^2+1)(q^2+1)} \doteqdot \sin(x+y),$$

то

$$pqF\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = \frac{pq(p+q)}{(p^2+1)(q^2+1)} \doteqdot \sin(x+y)$$

и, следовательно,

$$\sin(x+y) = \int_0^\infty\int_0^\infty J_0(2\sqrt{sx})J_0(2\sqrt{ty})\sin(s+t)\,ds\,dt.$$

§ 13. Оригинал $F(\sqrt{p}, \sqrt{q})$

Введем в рассмотрение два операционных соответствия:

$$\sqrt{p}\,e^{-s\sqrt{p}} \doteqdot \frac{e^{-\frac{s^2}{4x}}}{\sqrt{\pi x}}, \qquad (2.54)$$

$$\sqrt{q}\,e^{-t\sqrt{q}} \doteqdot \frac{e^{-\frac{t^2}{4y}}}{\sqrt{\pi y}}. \qquad (2.55)$$

Почленно перемножив символические равенства (2.54) и (2.55) и интегрируя по s и t от 0 до ∞, после умножения на функцию $f(s, t)$ получим,

$$F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \doteqdot \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}-\frac{t^2}{4y}} f(s, t)\,ds\,dt. \qquad (2.56)$$

Например, пусть

$$f(x, y) = \operatorname{ber}(2\sqrt{xy}) \doteqdot \frac{p^2q^2}{p^2q^2+1}.$$

Тогда

$$F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \frac{pq}{pq+1} \doteqdot J_0(2\sqrt{xy})$$

и, следовательно,

$$J_0(2\sqrt{xy})\frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}-\frac{t^2}{4y}}\operatorname{ber}(2\sqrt{st})\,ds\,dt. \qquad (2.57)$$

Если в формуле (2.56) положить $s^2=u$ и $t^2=v$, то получим

$$F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \doteqdot \frac{1}{4\pi\sqrt{xy}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u}{4x}-\frac{v}{4y}} \frac{f(\sqrt{u}, \sqrt{v})}{\sqrt{uv}}\,du\,dv. \qquad (2.58)$$

Предполагая, что $F(p, q) \doteqdot f(x, y)$ и $G(p, q) \doteqdot \frac{f(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$, получим

$$F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \doteqdot \frac{4\sqrt{xy}}{\pi}G\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right).$$

Таким образом, имеем систему операционных соответствий:

$$\left.\begin{aligned} &F(p, q) \doteqdot f(x, y),\\ &G(p, q) \doteqdot \frac{F(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}\\ &F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \doteqdot \frac{4\sqrt{xy}}{\pi}G\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.59)$$

с помощью которой всегда может быть вычислена одна из шести фигурирующих здесь функций, когда известны остальные. Например, используя (2.59), можно получить:

1. Изображение функции $\dfrac{f(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$ из оригинала функции $F(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ с помощью замены x и y соответственно на $\dfrac{1}{4p}$ и $\dfrac{1}{4q}$, с последующим умножением на $\pi\sqrt{pq}$.

2. Оригинал функции $F(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ из изображения функции $\dfrac{f(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$ с помощью замены p и q, соответственно на $\dfrac{1}{4x}$ и $\dfrac{1}{4y}$, с последующим умножением на $\dfrac{4}{\pi}\sqrt{xy}$.

3. Изображение функции $xyf(x^2, y^2)$ из изображения функции $\sqrt{xy}\,F\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ с помощью замены p и q, соответственно на $\dfrac{p^2}{4}$ и $\dfrac{q^2}{4}$, с последующим делением на π.

4. Оригинал функции $F(p^2, q^2)$ из оригинала функции $\pi\sqrt{pq}\,F\left(\dfrac{1}{4p}, \dfrac{1}{4q}\right)$ с помощью замены x и y, соответственно на x^2 и y^2, с последующим умножением на xy.

5. Изображение функции $\sqrt{xy}\,f\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ из изображения функции $xyf(x^2, y^2)$ с помощью замены p и q, соответственно на $2\sqrt{p}$ и $2\sqrt{q}$, с последующим умножением на π.

6. Оригинал функции $\sqrt{pq}\,F\left(\dfrac{1}{4p}, \dfrac{1}{4q}\right)$ из оригинала функции $F(p^2, q^2)$ с помощью замены x и y, соответственно на $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$, с последующим умножением на $\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}$. Аналогичным образом можно получить следующую систему операционных соответствий:

$$\left.\begin{aligned} &F(p, q) \doteqdot f(x, y),\\ &G(p, q) \doteqdot f(\sqrt{x}, \sqrt{y}),\\ &\sqrt{pq}\,F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \doteqdot \frac{1}{\pi\sqrt{xy}}\,G\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right) \end{aligned}\right\}, \tag{2.60}$$

а также

$$\left.\begin{aligned} &F(p, q) \doteqdot f(x, y),\\ &G(p, q) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,f(\sqrt{x}, \sqrt{y}),\\ &\sqrt{q}\,F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \doteqdot \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{x}{y}}\,G\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

и

$$\left.\begin{aligned} &F(p, q) \doteqdot f(x, y),\\ &G(p, q) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{y}}\,f(\sqrt{x}, \sqrt{y}),\\ &\sqrt{p}\,F(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \doteqdot \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{y}{x}}\,G\left(\frac{1}{4x}, \frac{1}{4y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.62}$$

Для каждой из систем (2.60), (2.61) и (2.62) можно сформулировать по шести правил, аналогичных только что упомянутым для системы (2.59).

Например, используя (2.60), можно получить:

1. Оригинал функции $\dfrac{1}{p}F(p^2, q^2)$ из оригинала функции $\dfrac{\pi}{2\sqrt{pq}}f\left(\dfrac{1}{4p}, \dfrac{1}{4q}\right)$ с помощью замены x и y соответственно на x^2 и y^2.

2. Изображение функции $f(x^2, y^2)$ из изображения функции $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}f\left(\dfrac{1}{4x}, \dfrac{1}{4y}\right)$ с помощью замены p и q соответственно на p^2 и q^2 с последующим делением на πpq.

§ 14. Изображение функции $f(\sqrt{x^2+y^2})$

Пусть

$$f(x) \doteq F(p) = p\Phi(p),$$

тогда

$$xf(x) \doteq -p\Phi'(p).$$

Вычислим интеграл

$$F(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам по формулам

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

будем иметь

$$F(p, q) = pq\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{\infty} e^{-(p\cos\theta + q\sin\theta)\rho}\rho f(\rho)\,d\rho =$$

$$= -pq\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(p\cos\theta + q\sin\theta)\,d\theta.$$

Обозначим через

$$u = p\cos\theta + q\sin\theta, \quad R^2 = p^2 + q^2.$$

Тогда получим

$$du = (-p\sin\theta + q\cos\theta)\,d\theta = \pm\sqrt{R^2 - u^2}\,d\theta$$

и

$$F(p, q) = pq\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-px-qy} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy =$$

$$= -pq\int\limits_p^R \Phi'(u)\frac{du}{\sqrt{R^2-u^2}} - pq\int\limits_q^R \Phi'(u)\frac{du}{\sqrt{R^2-u^2}}. \quad (2.63)$$

§ 15. Полиномы Лагерра

Введем в рассмотрение часто встречающиеся в приложениях полиномы Лагерра,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \quad (2.64)$$

Учитывая операционное соответствие

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n = F(p) \risingdotseq L_n(x) \quad (2.65)$$

и применяя теорему сдвига для изображения

$$\frac{p}{p+\lambda}F(p+\lambda) \risingdotseq e^{-\lambda x}f(x), \quad (2.66)$$

найдем, полагая $\lambda = 1$ и $F(p) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$,

$$\frac{p}{p+1}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right)^n = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{n+1} \risingdotseq e^{-x}L_n(x). \quad (2.67)$$

Заменяя x на y и p на q, будем иметь

$$\left(\frac{q}{q+1}\right)^{n+1} \risingdotseq e^{-y}L_n(y). \quad (2.68)$$

Учитывая известное операционное соответствие

$$\ln(1+p) \risingdotseq \int\limits_x^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt \quad (2.69)$$

и аналогичное соответствие по переменной y

$$\ln(1+q) \risingdotseq \int\limits_y^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

можно найти явное выражение для билинейной формы

$$e^{-x-y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)L_n(y)}{n+1} = K(x, y). \quad (2.70)$$

Докажем, что

$$K(x, y) = \begin{cases} \int\limits_y^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{t} & \text{при} \quad x < y, \\ \int\limits_x^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{t} & \text{при} \quad x > y. \end{cases} \quad (2.71)$$

Действительно, из (2.67) и (2.68) имеем

$$e^{-x-y}L_n(x)L_n(y) \risingdotseq\!\risingdotseq \left(\frac{pq}{(1+p)(1+q)}\right)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(x)L_n(y)}{n+1} = K(x, y) \risingdotseq\!\risingdotseq -\ln\left(1 - \frac{pq}{(1+p)(1+q)}\right)$$

или

$$K(x, y) \doteqdot \ln(1+p) + \ln(1+q) - \ln(1+p+q). \qquad (2.72)$$

С другой стороны, применяя формулу (2.16), где

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt,$$

следовательно (см. 2.69), $F(p) = \ln(1+p)$, найдем

$$f(M) = \ln(1+p) + \ln(1+q) - \ln(1+p+q). \qquad (2.73)$$

Очевидно, из (2.72) и (2.73) с помощью формулы (2.15) найдем

$$\ln(1+p+q) \doteqdot \begin{cases} \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt & \text{при} \quad x < y, \\ \int_y^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt & \text{при} \quad x > y. \end{cases} \qquad (2.74)$$

Докажем еще одну формулу, содержащую полиномы Лагерра, а именно

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty L_n(x) L_n(y) \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda} e^{-\frac{\lambda(x+y)}{1-\lambda}} I_0\left(\frac{2\sqrt{\lambda xy}}{1-\lambda}\right), \\ |\lambda| < 1. \end{aligned} \right\} \qquad (2.75)$$

Очевидно, имеем из (2.64)

$$\left(1 - \frac{1}{q}\right)^n \doteqdot L_n(y). \qquad (2.76)$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^\infty L_n(x) L_n(y) \lambda^n \doteqdot \sum_{n=0}^\infty \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\lambda\right]^n$$

или

$$\sum_{n=0}^\infty L_n(x) L_n(y) \lambda^n \doteqdot \frac{1}{1-\lambda} \frac{pq}{pq + \frac{\lambda}{1-\lambda}(p+q) - \frac{\lambda}{1-\lambda}}. \qquad (2.77)$$

При переходе к оригиналу в правой части последнего равенства воспользуемся формулой

$$\frac{pq}{pq - ap - bq + c} \doteqdot e^{bx+ay} J_0\left(2\sqrt{(c-ab)xy}\right). \qquad (2.78)$$

Из (2.77) и (2.78) следует (2.75).

§ 16. Вычисление интегралов

В этом пункте будут рассмотрены вопросы применения операционного исчисления по двум переменным к вычислению интегралов. Интегралы, подлежащие вычислению, могут рассматриваться в одних случаях как оригиналы, в других случаях как изображения. Кроме того, под знак интеграла можно вводить произвольный параметр, при определенных значениях которого получаем значение искомого интеграла. Наконец, можно использовать формулы операционного исчисления по одной переменной, получающиеся из соответствующих формул операционного исчисления по двум переменным, путем замены одного из двух аргументов в изображении, значением другого аргумента. Например, по формуле (2.30) имеем

$$\frac{F(p,p)}{p} \doteqdot \int_0^x f(x-s, s)\, ds.$$

Следовательно, если известно изображение $F(p, q)$ для функции $f(x, y)$ и оригинал от функции $\frac{F(p,p)}{p}$, то всегда можно вычислить интеграл

$$F(x) = \int_0^x f(x-s, s)\, ds.$$

Аналогичным образом можно использовать и другие операционные соответствия, например, такие, как

$$\frac{1}{p} F(\sqrt{p}, p) \doteqdot \int_0^\infty ds \int_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{x-t}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} f(s, t)\, dt, \qquad (2.79)$$

$$\frac{F(\sqrt{p}, p)}{\sqrt{p}} \doteqdot \int_0^\infty ds \int_0^x \frac{s}{2\sqrt{\pi(x-t)^3}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} f(s, t)\, dt. \qquad (2.80)$$

Приведем несколько примеров. Пусть требуется вычислить интегралы:

1. $$F(x)=\int\limits_0^\infty \sin xs \cos s \,\frac{ds}{s}.$$

Введем вспомогательный параметр y с помощью формулы

$$F(x,\ y)=\int\limits_0^\infty \sin xs \cos ys \,\frac{ds}{s}.$$

Учитывая формулы

$$\sin xs \doteqdot \frac{ps}{p^2+s^2}, \qquad \cos ys \doteqdot \frac{q^2}{q^2+s^2},$$

получим

$$F(x,\ y) \mathrel{\ddot{=}} \int\limits_0^\infty \frac{ps}{p^2+s^2}\,\frac{q^2}{q^2+s^2}\,\frac{ds}{s}=\frac{\pi}{2}\,\frac{q}{p+q}.$$

После перехода к оригиналу в правой части последнего соответствия, будем иметь

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{q}{p+q} \mathrel{\ddot{=}} \begin{cases} 0 & \text{при } x<y, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } x>y. \end{cases}$$

Полагая $y=1$, получим

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при } x>1, \\ 0 & \text{при } x<1. \end{cases}$$

2. $$F(x)=\int\limits_0^\infty \sin xs \sin\frac{1}{s}\,\frac{ds}{s}.$$

Введем вспомогательный параметр y следующим образом:

$$F(x,\ y)=\int\limits_0^\infty \sin xs \sin\frac{y}{s}\,\frac{ds}{s}.$$

Принимая во внимание, что

$$\sin xs \doteqdot \frac{ps}{p^2+s^2}, \qquad \sin\frac{y}{s} \doteqdot \frac{qs}{q^2s^2+1},$$

найдем

$$F(x,\ y) \mathrel{\ddot{=}} \int\limits_0^\infty \frac{pq}{(p^2+s^2)(q^2s^2+1)}\,ds=\frac{\pi}{2}\,\frac{q}{pq+1}.$$

При переходе к оригиналу в правой части последнего равенства, воспользуемся формулой

$$\frac{q}{pq+a} \mathrel{\ddot{=}} \sqrt{\frac{x}{ay}}\,J_1(2\sqrt{axy}), \quad (a\neq 0).$$

Тогда получим

$$F(x,\ y)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,J_1(2\sqrt{xy}).$$

Наконец, полагая $y=1$, найдем

$$F(x)=\frac{\pi}{2}\sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{x}).$$

3. $$F(x)=\int\limits_0^a \operatorname{ber}[2\sqrt{s(x-s)}]\,ds.$$

Пусть

$$F(p,\ q)=\frac{p^2q^2}{p^2q^2+1} \mathrel{\ddot{=}} \operatorname{ber}(2\sqrt{xy}). \tag{2.81}$$

Тогда

$$\frac{F(p,\ p)}{p}=\frac{p^3}{p^4+1} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{2}}+\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{2.82}$$

Поэтому согласно (2.30) будем иметь

$$F(x)=\int\limits_0^x \operatorname{ber}[2\sqrt{(x-s)s}]\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{2}}+\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]. \tag{2.83}$$

4. $$F(x)=\int\limits_0^\infty ds\int\limits_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{x-t}}\,e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}}\operatorname{ber}(2\sqrt{st})\,dt.$$

Принимая во внимание (2.79), (2.81), найдем

$$F(x) \doteqdot \frac{p^2}{p^3+1} = -\frac{1}{3}\left(e^{-x} + \varepsilon^2 e^{-\varepsilon x} + \varepsilon e^{-\varepsilon^2 x}\right),$$

где $\varepsilon \neq 1$ и $\varepsilon^3 = 1$.

5.
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mathrm{tg}^2\varphi}\, d\varphi.$$

После замены переменной φ на переменную s по формулам

$$x - s = x\cos^2\varphi, \qquad s = x\sin^2\varphi, \tag{2.84}$$

будем иметь

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{s}{x-s}}}{\sqrt{s(x-s)}}\, ds.$$

Учитывая, что

$$F(p, q) = \pi\sqrt{pq}\, e^{-\frac{p}{q}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{-\frac{p}{q}}\right) \doteqdot \frac{\sqrt{\pi q}}{\sqrt{x - \frac{1}{q}}} \doteqdot \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{\sqrt{xy}},$$

найдем

$$\frac{F(p,p)}{p} = \frac{\pi}{e}\operatorname{erfc}(1).$$

Наконец, с помощью (2.30) получим значение искомого интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mathrm{tg}^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2e}\operatorname{erfc}(1).$$

6.
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mathrm{tg}^2\varphi}\, \mathrm{tg}\,\varphi\, d\varphi.$$

После замены переменных по формулам (2.84), получим

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{s}{x-s}}}{x-s}\, ds.$$

Имеем

$$F(p, q) = -pe^{\frac{p}{q}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{p}{q}\right) \doteqdot \frac{1}{x + \frac{1}{q}} \doteqdot \frac{1}{x}\, e^{-\frac{y}{x}}$$

и, следовательно,

$$\frac{E(p,p)}{p} = -e\operatorname{Ei}(-1).$$

Поэтому, согласно (2.30), найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\mathrm{tg}^2\varphi}\, \mathrm{tg}\,\varphi\, d\varphi = -\frac{e}{2}\operatorname{Ei}(-1).$$

§ 17. Дифференциальные уравнения

Одна из важнейших причин широкого распространения операционного исчисления состоит в удобстве его применения к решению дифференциальных уравнений. Уже Лаплас показал, что его преобразование приводит линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами к алгебраическим уравнениям. Однако первые работы, в которых при решении дифференциальных уравнений применяется двумерное преобразование Лапласа, появились сравнительно недавно. Подобно одномерному случаю, метод применения операционного исчисления по двум переменным к решению дифференциальных уравнений распадается на три этапа:

1. Получение изображающего уравнения.
2. Нахождение решения изображающего уравнения.
3. Переход от решения изображающего уравнения к искомому решению.

На первом этапе возникают специфические трудности операционного исчисления по двум переменным, обусловливаемые тем обстоятельством, что могут потребоваться «лишние» начальные и граничные условия, которые не могут быть заданы при постановке задачи. Вводя эти «лишние» условия на первом этапе, мы должны, исходя из свойств решения изображающего уравнения, исключить их на втором этапе. Наконец, на третьем этапе надо перейти от решения изображающего уравнения к искомому решению с помощью заранее заготовленных таблиц операционных формул, или с помощью формулы обращения. Ограничимся рассмотрением дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными.

Заметим, что переменные x и y предполагаются действительными и положительными.

1. Уравнения первого порядка. Рассмотрим сначала линейное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y), \quad 0<x<\infty, \quad 0<y<\infty. \tag{2.85}$$

Чтобы применить операционное исчисление и найти изображение от $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, необходимо задать значения функции $u(x,y)$ при $x=0$ и при $y=0$, т. е. $u(0,y)=a(y)$ и $u(x, 0)=b(x)$. Пусть

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &\fallingdotseq U(p, q), \\ f(x, y) &\fallingdotseq F(p, q), \\ a(y) &\fallingdotseq A(q), \\ b(x) &\fallingdotseq B(p) \end{aligned}\right\}. \tag{2.86}$$

В обозначениях (2.86) изображающее уравнение имеет вид

$$p\{U(p, q)-A(q)\}+q\{U(p, q)-B(p)\}=F(p, q),$$

откуда

$$U(p, q)=\frac{F(p, q)}{p+q}+\frac{p}{p+q}A(q)+\frac{q}{p+q}B(p).$$

Используя формулы (2.16) и (2.18), найдем

$$\frac{p}{p+q}A(q)\fallingdotseq\begin{cases} 0 & \text{при } x>y, \\ a(y-x) & \text{при } x<y; \end{cases}$$

$$\frac{q}{p+q}B(p)\fallingdotseq\begin{cases} 0 & \text{при } x<y, \\ b(x-y) & \text{при } x>y. \end{cases}$$

Учитывая формулу (2.22), получим искомое решение

$$u(x, y)=\begin{cases} b(x-y)+\int\limits_0^y f(x-s,\ y-s)\,ds & \text{при } x>y, \\ a(y-x)+\int\limits_0^x f(x-s,\ y-s)\,ds & \text{при } x<y. \end{cases}$$

Из последнего следует, что при $a(0)=b(0)$ функция $u(x, y)$ определена и непрерывна в области $R\ (0\leqslant x<\infty,\ 0\leqslant y<\infty)$ и дифференцируема при $y>x$ и $y<x$. Функции $a(y)$ и $b(x)$ не зависят друг от друга, метод получения решения предполагает, что эти функции преобразуемы по Лапласу. Заметим, что существование и единственность аналитического решения уравнения (2.85) определяется его значениями на оси $x=0$, т. е. лишь одним $a(y)$. Однако задание $b(x)$ не противоречит этому факту, так как здесь получается решение, не являющееся аналитическим вдоль прямой $y=x$. Пусть теперь дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=f(x, y), \ 0<x<\infty, \ 0<y<\infty. \tag{2.87}$$

Оказывается, что в этом случае функции $a(y)$ и $b(x)$ не могут быть выбраны независимо друг от друга. Действительно, в обозначениях (2.86) изображающее уравнение примет следующий вид:

$$p\{U(p, q)-A(q)\}-q\{U(p, q)-B(p)\}=F(p, q),$$

откуда

$$U(p, q)=\frac{F(p, q)-pA(q)-qB(p)}{p-q}. \tag{2.88}$$

Так как изображение искомого решения должно быть аналитической функцией при всех значениях параметров p и q, для которых $\operatorname{Re} p>\alpha$, $\operatorname{Re} q>\beta$, где α и β — две подходящим образом выбранные постоянные, то числитель дроби в правой части равенства (2.88) должен быть равен нулю при $p=q$, что дает

$$pA(p)-pB(p)+F(p, p)=0. \tag{2.89}$$

Переходя к оригиналам в последнем равенстве, получим соотношение между функциями $a(x)$ и $b(x)$:

$$a(x)-b(x)+\int_0^\infty f(x-s, s)\,ds=0. \qquad (2.90)$$

Таким образом, операционный метод дает возможность исключить лишние начальные условия. Соотношение (2.90) является «условием совместимости» начальных условий. Если оно выполняется, то функция $U(p, q)$ служит изображением искомого решения. Подставляя в (2.88) значение $B(p)$ из (2.89), получим

$$U(p, q)=\frac{pA(q)-qA(p)}{p-q}+\frac{F(p,q)}{p-q}+\frac{q}{p}\frac{F(p,p)}{p-q}. \qquad (2.91)$$

Оригиналом первой дроби правой части написанного равенства согласно (2.31) служит функция $a(x+y)$. Записывая вторую дробь в виде $\frac{1}{q}F(p,q)\frac{q}{p-q}$, легко найдем оригинал относительно q. Действительно, пусть

$$\frac{q}{q-p}=e^{py}, \qquad F(p, q)\doteqdot F_1(p, y).$$

Тогда, по теореме свертывания, получим

$$\frac{1}{q}F(p, q)\frac{q}{q-p}\doteqdot e^{+py}\int_0^y e^{-ps}F_1(p, s)\,ds. \qquad (2.92)$$

Далее, так как

$$\frac{F(p, p)}{p}=\int_0^\infty e^{-py}F_1(p, y)\,dy,$$

то

$$\frac{q}{q-p}\frac{F(p, p)}{p}\doteqdot e^{py}\int_0^\infty e^{-ps}F_1(p, s)\,ds. \qquad (2.93)$$

Из (2.92) и (2.93) следует, что

$$\frac{F(p, q)}{p-q}-\frac{q}{p}\frac{F(p, p)}{p-q}\doteqdot\int_y^\infty e^{-p(s-y)}F_1(p,s)\,ds. \qquad (2.94)$$

Учитывая, что $s-y>0$, по теореме сдвига для оригинала найдем

$$e^{-p(s-y)}F_1(p, s)\doteqdot\begin{cases}0 \text{ при } x<s-y,\\ f(x+y-s, s)\\ \text{при } x>s-y.\end{cases} \qquad (2.95)$$

Объединяя (2.94) и (2.95), будем иметь

$$\frac{F(p, q)}{p-q}-\frac{q}{p}\frac{F(p, p)}{p-q}\doteqdot\int_y^{x+y} f(x+y-s, s)\,ds=$$

$$=\int_0^x f(x-s, y+s)\,ds. \qquad (2.96)$$

Следовательно, искомое решение представится в следующем виде:

$$u(x, y)=a(x+y)+\int_0^x f(x-s, y+s)\,ds.$$

Заметим, что решение уравнения (2.87) можно было бы выразить также через функцию $b(x)$.

2. Уравнения второго порядка гиперболического типа. Рассмотрим уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x, y), \quad 0<x<\infty, \quad 0<y<\infty. \qquad (2.97)$$

Для применения операционного метода зададим значения:

$$\left.\begin{aligned} u(0, y)&=a(y)\doteqdot A(q),\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}&=c(y)\doteqdot C(q),\\ u(x, 0)&=b(x)\doteqdot B(p),\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}&=d(x)\doteqdot D(p).\end{aligned}\right\} \qquad (2.98)$$

Как обычно, введем обозначения

$$u(x, y)\doteqdot\doteqdot U(p, q), \quad f(x, y)\doteqdot\doteqdot F(p, q). \qquad (2.99)$$

В (2.98) и (2.99) все функции предполагаются преобразуемыми по Лапласу. Кроме того, для сохранения непрерывности функции $u(x, y)$ в начале координат предположим, что $a(0)=b(0)$. В обозначениях (2.98) и (2.99) изображающее уравнение имеет вид

$$p^2\{U(p, q)-A(q)\}-pC(q)-\\ -q^2\{U(p, q)-B(p)\}+qD(p)=F(p, q),$$

откуда

$$U(p, q)=\frac{F(p, q)+pC(q)-qD(p)+p^2A(q)-q^2B(p)}{p^2-q^2}. \quad (2.100)$$

Для выявления условий того, какие из функций a, b, c и d независимы между собой, воспользуемся тем фактом, что функция $U(p, q)$ является преобразованием Лапласа. По этой причине при $p=q$ числитель правой части (2.100) должен быть равен нулю. Следовательно, имеем

$$F(p, p)+pC(p)-pD(p)+p^2\{A(p)-B(p)\}=0.$$

Преобразуем только что написанное равенство к следующему виду:

$$\frac{F(p, p)}{p}+C(p)-D(p)+p\{A(p)-a(0)\}-\\ -p\{B(p)-b(0)\}=0. \quad (2.101)$$

Переходя в последнем равенстве к оригиналам, будем иметь

$$\int_0^\infty f(x-s, s)\,ds+c(x)-d(x)+\frac{\partial}{\partial x}\{a(x)-b(x)\}=0,$$

откуда следует, что одна из четырех функций a, b, c, d определяется остальными. Оказывается, что в равенстве (2.100) можно перейти к оригиналам без предварительного вычисления $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ и $D(p)$ и не прибегая к формуле обращения. Действительно, после вычитания левой части (2.101), умноженной на q из числителя правой части (2.100), будем иметь

$$U(p, q)=\frac{pF(p, q)-qF(p, p)}{p(p^2-q^2)}+\frac{pC(q)-qC(p)}{p^2-q^2}+\\ +p\left\{\frac{pA(q)-qA(p)}{p^2-q^2}\right\}+\frac{qB(p)}{p+q}. \quad (2.102)$$

Используя (2.22) и (2.96), получим оригинал первой дроби правой части (2.102)

$$\frac{pF(p, q)-qF(p, p)}{p(p^2-q^2)} \doteqdot \int_0^{\min(x, y)} ds\int_0^{x-s} f(x-s-t, y-s+t)\,dt.$$

Используя (2.22) и (2.31), получим оригинал второй дроби

$$\frac{pC(q)-qC(p)}{p^2-q^2} \doteqdot \int_0^{\min(x, y)} c(x+y-2s)\,ds.$$

Представляя третью дробь в виде

$$p\left[\frac{pA(q)-qA(p)}{p^2-q^2}\right]=\frac{1}{2}\,\frac{pA(q)-qA(p)}{p-q}+\frac{1}{2}\,\frac{pA(q)}{p+q}-\frac{1}{2}\,\frac{qA(p)}{p+q}$$

и используя (2.31), (2.38) и (2.39), найдем

$$p\left[\frac{pA(q)-qA(p)}{p^2-q^2}\right] \doteqdot \begin{cases} \frac{1}{2}\{a(x+y)+a(y-x)\} & \text{при } y>x, \\ \frac{1}{2}\{a(x+y)-a(x-y)\} & \text{при } y<x. \end{cases}$$

Наконец, напишем оригинал четвертой дроби,

$$\frac{qB(p)}{p+q} \doteqdot e^{-py}B(p) \doteqdot \begin{cases} b(x-y) & \text{при } x>y, \\ 0 & \text{при } x<y. \end{cases}$$

Следовательно, искомое решение представится в следующем виде:

$$u(x, y)=\int_0^{\min(x, y)} ds\int_0^{x-s} f(x-s-t, y-s+t)\,dt+\\ +\int_0^{\min(x, y)} c(x+y-2s)\,ds+\frac{1}{2}a(x+y)+\\ +\begin{cases} \frac{1}{2}a(y-x) & \text{при } x<y, \\ b(x-y)-\frac{1}{2}a(x-y) & \text{при } x>y. \end{cases}$$

3. Уравнения второго порядка параболического типа. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \ 0 < x < \infty, \ 0 < y < \infty. \qquad (2.103)$$

Пусть

$$u(x, y) \doteqdot U(p, q), \quad f(x, y) \doteqdot F(p, q)$$

и заданы граничные и начальные условия:

$$u(x, 0) = a(x) \doteqdot A(p),$$
$$u(0, y) = b(y) \doteqdot B(q),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = c(y) \doteqdot C(q).$$

Переходя к изображениям в уравнении (2.103), найдем

$$p^2 [U(p, q) - B(q)] - pC(q) - q[U(p, q) - A(p)] = F(p, q),$$

откуда

$$U(p, q) = \frac{F(p, q) - qA(p) + pC(q) + p^2 B(q)}{p^2 - q}. \qquad (2.104)$$

Знаменатель в (2.104) имеет корни $p = \sqrt{q}$ и $p = -\sqrt{q}$. Второй корень $p = -\sqrt{q}$ нас не интересует, так как при достаточно больших $\operatorname{Re} q$ не лежит в области сходимости интеграла Лапласа. Напротив, первый корень $p = \sqrt{q}$ лежит в области сходимости интеграла Лапласа. Следовательно, числитель в правой части (2.104) должен иметь корень $p = \sqrt{q}$, без чего функция $U(p, q)$ перестала бы быть аналитической при $p^2 = q$. Поэтому имеет место равенство:

$$F(\sqrt{q}, q) - qA(\sqrt{q}) + \sqrt{q}\, C(q) + qB(q) = 0, \qquad (2.105)$$

связывающее между собой функции $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$, так что только две из них могут быть выбраны произвольно. Пусть, например, требуется вычислить функцию $b(x)$ по известным функциям $a(x)$ и $c(x)$. Определяя $B(p)$ из равенства (2.105), получим

$$B(p) = -\frac{F(\sqrt{p}, p)}{p} + A(\sqrt{p}) - \frac{C(p)}{\sqrt{p}}. \qquad (2.106)$$

По формуле (2.79) имеем

$$\frac{F(\sqrt{p}, p)}{p} \doteqdot \int_0^\infty ds \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi(x-t)}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} f(s, t)\, dt. \qquad (2.107)$$

Оригинал от $A(\sqrt{p})$ хорошо известен:

$$A(\sqrt{p}) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} a(s)\, ds. \qquad (2.108)$$

Найдем теперь оригинал от функции

$$\frac{C(p)}{\sqrt{p}} = \sqrt{p} \int_0^\infty e^{-ps} c(s)\, ds.$$

Так как

$$e^{-ps}\sqrt{p} \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } x < s, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi(x-s)}} & \text{при } x > s, \end{cases}$$

то

$$\frac{C(p)}{\sqrt{p}} \doteqdot \int_0^x \frac{c(s)}{\sqrt{\pi(x-s)}} ds. \qquad (2.109)$$

Подставляя (2.107), (2.108), (2.109) в (2.106), получим

$$b(x) = -\int_0^\infty ds \int_0^x \frac{1}{\pi\sqrt{x-t}} e^{-\frac{s^2}{4(x-t)}} f(s, t)\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} a(s)\, ds - \int_0^x \frac{c(s)}{\sqrt{\pi(x-s)}} ds. \qquad (2.110)$$

Подобным же образом можно вычислить любую из трех функций $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, когда известны две остальные.

После подстановки функции $B(q)$, определенной с помощью равенства (2.106), в выражение (2.104) и перехода к оригиналам будем иметь

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-s)^2}{4y}} + e^{-\frac{(x+s)^2}{4y}} \right\} a(s)\, ds -$$

$$- \int_0^y \frac{e^{-\frac{x^2}{4(y-t)}}}{\sqrt{\pi (y-t)}} c(t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \int_0^y \frac{1}{\sqrt{\pi (y-t)}} \left\{ e^{-\frac{(x-s)^2}{4(y-t)}} + e^{-\frac{(x+s)^2}{4(y-t)}} \right\} f(s, t)\, dt.$$

4. Уравнения второго порядка эллиптического типа. Рассмотрим уравнение потенциала:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{2.111}$$

Применение операционного исчисления требует задания следующих четырех функций:

$$\left.\begin{aligned} &u(x, 0) = a(x) \risingdotseq A(p), \\ &u(0, y) = b(y) \risingdotseq B(q), \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = a_1(x) \risingdotseq A_1(p), \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = b_1(y) \risingdotseq B_1(q). \end{aligned}\right\} \tag{2.112}$$

Изображающее уравнение имеет вид

$$p^2 U(p, q) - p^2 B(q) - p B_1(q) +$$
$$+ q^2 U(p, q) - q^2 A(p) - q A_1(p) = 0,$$

откуда следует

$$U(p, q) = \frac{q^2 A(p) + q A_1(p) + p^2 B(q) + p B_1(q)}{p^2 + q^2}. \tag{2.113}$$

Принимая во внимание оба корня знаменателя $p = iq$ и $p = -iq$, как и ранее получим два уравнения совместимости граничных условий, а именно:

$$q^2 A(iq) + q A_1(iq) - q^2 B(q) + iq B_1(q) = 0, \tag{2.114}$$

$$q^2 A(-iq) + q A_1(-iq) - q^2 B(q) - iq B_1(q) = 0. \tag{2.115}$$

Применение операционного метода дает возможность решить новые задачи. Например, если известны $a(x)$ и $a_1(x)$, т. е. $A(p)$ и $A_1(p)$, то из уравнений (2.114)—(2.115) можно легко исключить функции $B(q)$ и $B_1(q)$ и получить решение задачи, которая обычно не ставится в классической теории. Однако в случае классических задач Дирихле и Неймана исключение двух функций из четырех a, b, a_1 и b_1 не всегда представляется возможным. Пусть заданы функции $a(x)$ и $b(y)$ (задача Дирихле). При определении $a_1(x)$ и $b_1(y)$ через функции $a(x)$ и $b(y)$ сталкиваемся с дополнительным затруднением, возникающим по той причине, что аргументы функции a_1 в уравнениях (2.114) и (2.115) различны. Поэтому функции a_1 и b_1 нельзя выразить независимо друг от друга через функции a и b. Из сказанного следует, что применение операционных методов к решению уравнений эллиптического типа вызывает определенные трудности. В этом направлении известны работы [27, 41].

ЧАСТЬ II

ТАБЛИЦЫ ФОРМУЛ

ПОЯСНЕНИЯ К ТАБЛИЦАМ ФОРМУЛ

Для удобства пользования в начале таблиц приводится перечень общепринятых обозначений специальных функций и некоторых постоянных. Обозначения специальных функций следуют в алфавитном порядке, причем вначале размещаются обозначения, начинающиеся латинскими буквами, а после них обозначения, начинающиеся греческими буквами.

Затем приводится перечень основных операционных соотношений операционного исчисления по двум переменным. Все соотношения располагаются в виде двух колонок. В левой колонке каждой страницы приводится изображение

$$F(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\,dx\,dy,$$

а в правой колонке соответствующий оригинал $f(x, y)$.

Формулы по своему содержанию подразделяются на следующие разделы:

Рациональные функции.

Иррациональные функции.

Показательные функции.

Логарифмические функции.

Гиперболические и обратные гиперболические функции.

Цилиндрические функции.

Интегральные функции.

Вырожденные гипергеометрические функции.

Разные функции.

ПЕРЕЧЕНЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫХ ПОСТОЯННЫХ

$$\operatorname{arccos} x = \frac{1}{i}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);$$

$$\operatorname{arcsin} x = \frac{1}{i}\ln\left(ix+\sqrt{1-x^2}\right);$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{i}{2}\ln\frac{1-ix}{1+ix};$$

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);$$

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);$$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x};$$

$$B(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

$$B(x, y) = \int_0^1 \xi^{x-1}(1-\xi)^{y-1}\, d\xi = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)};$$

$\operatorname{bei}_\nu(x) = \operatorname{Im}\left(J_\nu\left(i\sqrt{i}\,x\right)\right)$,
где $\operatorname{Im}(z)$ означает мнимую часть комплексного числа z;

$\operatorname{ber}_\nu(x) = \operatorname{Re}\left(J_\nu\left(i\sqrt{i}\,x\right)\right)$,
где $\operatorname{Re}(z)$ означает вещественную часть комплексного числа z;

$$\operatorname{bei}_0(x) = \operatorname{bei} x = \operatorname{Im}\left[I_0\left(\sqrt{i}\,x\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[(2n+1)!]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2};$$

$$\operatorname{ber}_0(x) = \operatorname{ber} x = \operatorname{Re}\left[I_0\left(\sqrt{i}\,x\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[(2n)!]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n};$$

$$C = -\Psi(1) = 0{,}577215665\ldots;$$

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2\nu)} \times {}_2F_1\left(n+2\nu, -n; \nu+\frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right);$$

$$C(x) = \int_0^x \cos\frac{\pi u^2}{2}\, du = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, C^*\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right);$$

$$C^*(x) = \int_x^\infty \cos u^2\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2} - C\left(x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right];$$

$$ce_{2n}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}^{(2n)}\cos 2kz;$$

$$ce_{2n+1}(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}^{(2n+1)}\cos(2k+1)z;$$

$$Ce_{2n}(z, q) = ce_{2n}(iz, q);$$

$$Ce_{2n+1}(z, q) = ce_{2n+1}(iz, q);$$

$$\operatorname{chi}(x) = \ln\gamma x + \int_0^x \frac{\operatorname{ch} u - 1}{u}\, du;$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\, du = \ln\gamma x - \int_0^x \frac{1-\cos u}{u}\, du;$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2};$$

$$C(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}};$$

$$D(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

$$D_n(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}\operatorname{He}_n(x);$$

$$D_\nu(x) = 2^{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2}}x^{-\frac{1}{2}} \times W_{\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2},\ \pm\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$e = 2{,}718281828\ldots;$$

$$e^x = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi;$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\, du;$$

$$E_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(\nu\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi;$$

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\, du = \operatorname{li}(e^x);$$

$$-\operatorname{Ei}(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du;$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\, du;$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\, du;$$

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}};$$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) \equiv {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x);$$

$${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, k)(\alpha_2, k)\ldots(\alpha_p, k)}{(\beta_1, k)(\beta_2, k)\ldots(\beta_q, k)} \times \frac{x^k}{k!},$$

где $(\alpha, k) = \dfrac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$;

$$(\beta, k) = \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)};$$

$$\mathfrak{F}_n(\alpha, \gamma, x) = F(-n, \alpha+n; \gamma; x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \times \frac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+n+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)} x^k \quad (\gamma \neq 0, -1, \ldots, -n+1);$$

$$Fek_{2n}(z, q) = \frac{ce_{2n}(0, q)}{\pi A^{(2n)}} \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A_{2k}^{(2n)} K_{2k}(-2ik\,\mathrm{sh}\,z);$$

$$Fek_{2n+1}(z, q) = \frac{ce_{2n+1}(0, q)}{\pi k A_1^{(2n+1)}} \mathrm{cth}\, z \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) A_{2k+1}^{(2n+1)} \times K_{2k+1}(-2ik\,\mathrm{sh}\,z);$$

$$Gek_{2n+1}(z, q) = \frac{se'_{2n+1}(0, q)}{\pi k B^{(2n+1)}} \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_{2k+1}^{(2n+1)} \times K_{2k+1}(-2ik\,\mathrm{sh}\,z);$$

$$Gek_{2n+2}(z, q) = -\frac{se'_{2n+2}(0, q)}{\pi k^2 B_2^{(2n+2)}} \mathrm{cth}\, z \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+2) B_{2k+2}^{(2n+2)} \times K_{2k+2}(-2ik\,\mathrm{sh}\,z);$$

$$\mathbf{H}_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\nu+\frac{3}{2}\right)};$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x);$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x);$$

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right);$$

$$He_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2});$$

$$\mathrm{hei}_\nu(x) = \mathrm{Im}\left(H_\nu^{(1)}(i\sqrt{i}x)\right);$$

$$\mathrm{hei}_0(x) = \mathrm{hei}(x);$$

$$\mathrm{her}_\nu(x) = \mathrm{Re}\left(H_\nu^{(1)}(i\sqrt{i}x)\right);$$

$$\mathrm{her}_0(x) = \mathrm{her}(x);$$

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2x}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)};$$

$$Il_\nu(x) = \int_x^{\infty} \frac{I_\nu(u)}{u} du;$$

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\nu\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi;$$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)};$$

$$J_{\mu,\nu}(x) = \frac{x^{\mu+\nu}}{3^{\mu+\nu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} \times {}_0F_2\left(\mu+1, \nu+1; -\frac{x^3}{27}\right);$$

$$J_n^m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2\cos\varphi)^m \times \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi;$$

$$J_\nu(xi\sqrt{i}) = \mathrm{ber}_\nu\, x + i\,\mathrm{bei}_\nu\, x;$$

$$Jc(x, y) = \int_0^y J_0(xu) \cos u\, du;$$

$$Ji_\nu(x) = \int_x^{\infty} \frac{J_\nu(u)}{u} du;$$

$$Js(x, y) = \int_0^y J_0(xu) \sin u\, du;$$

$$K(k) = F(k);$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} \mathbf{H}_\nu^{(1)}(ix);$$

$$Ki_\nu x = \int_x^{\infty} \frac{K_\nu(u)}{u} du;$$

$$\mathrm{kei}_\nu(x) = \mathrm{Im}\,(i^{-\nu} K_\nu(\sqrt{i}\,x));$$

$$\mathrm{ker}_\nu(x) = \mathrm{Re}\,(i^{-\nu} K_\nu(\sqrt{i}\,x));$$

$$\mathbf{L}_\nu(x) = i^{-\nu-1} \mathbf{H}_\nu(ix);$$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x});$$

$$L_\nu(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} M_{\nu+\frac{1}{2}, 0}(x) = {}_1F_1(-\nu; 1; x);$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \times (e^{-x} x^{n+\alpha});$$

$$L_\nu^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu+1)} \times x^{-\frac{\alpha+1}{2}} e^{\frac{x}{2}} M_{\frac{\alpha+1}{2}+\nu, \frac{\alpha}{2}}(x);$$

$$\mathrm{li}\, x = \int_0^x \frac{du}{\ln u};$$

$\ln z = i\varphi + \ln|z|$, где $z = re^{i(\varphi+2k\pi)}$, $-\pi < \varphi < \pi$;

$$M_{\mu,\nu}(x) = x^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\nu-\mu; 2\nu+1; x\right);$$

$$n! = \Pi(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = \Gamma(n+1);$$

$$N_\nu(x) = Y_\nu(x);$$

$$N_{\mu,\nu}(x) = Y_{\mu,\nu}(x);$$

$$Ni_\nu(x) = Yi_\nu(x);$$

$$O_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-xu} \times [(u+\sqrt{u^2+1})^n + (u-\sqrt{u^2-1})^n]\, du;$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n;$$

$$P_\nu(x) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad |1-x| < 2$$

$$P_\nu^m(x) = \begin{cases} (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \times \dfrac{d^m P_\nu(x)}{dx^m} & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d^m P_\nu(x)}{dx^m} & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$$

и

$$Q_\nu^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \times \frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m} \quad |x| \leqslant 1$$

$$Q_\nu^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \times \frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}, \quad |x| > 1;$$

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \times {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \quad |x-1| < 2;$$

$$P(x, \nu) = \int_0^x e^{-u} u^{\nu-1}\, du = \Gamma(\nu) - \Gamma(\nu, x) = \gamma(\nu, x);$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2-1)^n \times \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} P_n(x), \quad |x| > 1;$$

$$Q_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} x^{-\nu-1} \times {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+1, \frac{\nu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{x^2}\right);$$

$$Q_\nu^\mu(x) = e^{\pi i \mu} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \times (x^2-1)^{\frac{\mu}{2}} x^{-\mu-\nu-1} \times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2}+1, \frac{\mu+\nu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{x^2}\right);$$

$$Q^{\nu, \rho}(x) = \sqrt{\pi}\, 2^{2\nu-1} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho+2\nu+2k)}{k!\, \Gamma(\rho+\nu+k+1)} \times (2x)^{-\rho-2\nu-2k};$$

$$Q(x, \nu) = \int_x^\infty e^{-u} u^{\nu-1}\, du = \Gamma(\nu, x);$$

$$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi u^2}{2}\, du = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, S^*\left(x \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right);$$

$$S^*(x) = \int_x^\infty \sin u^2\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} - S\left(x \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\right];$$

$$S(\nu, x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xu}\, du}{(1+u)^\nu} = x^{\nu-1} e^x \int_x^\infty e^{-\xi} \xi^{-\nu}\, d\xi;$$

$$s_1(x) = \frac{1}{3}\left(e^{-x} + e^{-\varepsilon x} + e^{-\varepsilon^2 x}\right);$$

$$s_2(x) = \frac{1}{3}\left(e^{-x} + \varepsilon e^{-\varepsilon x} + \varepsilon^2 e^{-\varepsilon^2 x}\right);$$

$$s_3(x) = \frac{1}{3}\left(e^{-x} + \varepsilon^2 e^{-\varepsilon x} + \varepsilon e^{-\varepsilon^2 x}\right), \quad \varepsilon \neq 1 \text{ и } \varepsilon^3 = 1;$$

$$S_n(x) = \int_0^\infty e^{-xu} \times \left[(u + \sqrt{u^2+1})^n - (u - \sqrt{u^2+1})^n\right] \frac{du}{\sqrt{u^2+1}};$$

$$se_{2n+1}(z, q) = \sum_{k=0}^\infty B_{2k+1}^{(2n+1)} \sin(2k+1) z;$$

$$se_{2n}(z, q) = \sum_{k=1}^\infty B_{2k}^{(2n)} \sin(2k) z;$$

$$Se_{2n}(z, q) = -i\, se_{2n}(iz, q);$$

$$Se_{2n+1}(z, q) = -i\, se_{2n+1}(iz, q);$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{shi} x = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} u}{u}\, du;$$

$$\operatorname{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin u}{u}\, du;$$

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si}(x);$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2};$$

$$\operatorname{stei}_\nu(x) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{H}_\nu(i \sqrt{ix})\right);$$

$$\operatorname{ster}_\nu(x) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{H}_\nu(i \sqrt{ix})\right);$$

$$s_{\mu, \nu}(x) = \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+\nu+1)(\mu-\nu+1)} \times {}_1F_2\left(1; \frac{\mu+\nu+3}{2}; \frac{\mu-\nu+3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right);$$

$$S_{\mu, \nu}(x) = s_{\mu, \nu}(x) + 2^{\mu-1} \times \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \times \frac{1}{\sin \nu\pi} \left[\cos\left(\frac{\mu-\nu}{2}\pi\right) J_{-\nu}(x) - \cos\left(\frac{\mu+\nu}{2}\pi\right) J_{-\nu}(x)\right];$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\right];$$

$$T_\alpha^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(\alpha+n+1)};$$

$$U(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \times \left[1 + 2 \sum_{k=1}^\infty e^{-2k\alpha - \frac{k^2}{x}}\right];$$

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x) = \frac{1}{2i}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n - (x - \sqrt{x^2-1})^n\right];$$

$$U_\nu(w, x) = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \times \left(\frac{w}{x}\right)^{\nu+2m} \times J_{\nu+2m}(x);$$

$$V_\nu(w,\ x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\times\left(\frac{w}{x}\right)^{-\nu-2m}\times J_{-\nu-2m}(x);$$

$$W_{\mu,\nu}(x)=\frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\nu\right)}\times M_{\mu,\nu}(x)+\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\nu\right)}\times M_{\mu,-\nu}(x);$$

$$Y_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi};$$

$$Yi_\nu(x)=\int_x^\infty\frac{Y_\nu(u)}{u}\,du;$$

$$Y_{\mu,\nu}(x)=\frac{x^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(2\nu+1)}M_{\mu,\nu}(x);$$

$[x]=n$ для $n\leqslant x<n+1$;

$$(x)=x-[x];$$

$$\gamma=e^C=1{,}781072\ldots;$$

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}\,du=\Pi(x-1);$$

$$\Gamma(\nu,\ x)=\int_x^\infty u^{\nu-1}e^{-u}\,du=Q(x,\ \nu);$$

$$\gamma(\nu,\ x)=\Gamma(\nu)-\Gamma(\nu,\ x)=P(x,\ \nu);$$

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x};$$

$$\zeta(x,\ \nu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\nu)^x};$$

$$\vartheta_0(v,\ x)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\times e^{-\pi^2k^2x}\cos 2\pi kv;$$

$$\vartheta_1(v,\ x)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\times e^{-\pi^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2x}\sin\pi(2k+1)v;$$

$$\vartheta_2(v,\ x)=2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\pi^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2x}\times\cos\pi(2k+1)v;$$

$$\vartheta_3(v,\ x)==1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\pi^2k^2x}\cos 2\pi kv;$$

$$\hat\vartheta_0(v,\ x)==\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{x}\left(v+k+\frac{1}{2}\right)^2}-\sum_{k=-1}^{-\infty}e^{-\frac{1}{x}\left(v+k+\frac{1}{2}\right)^2}\right];$$

$$\hat\vartheta_1(v,\ x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{1}{x}\left(v+k-\frac{1}{2}\right)^2}-\sum_{k=-1}^{-\infty}(-1)^k e^{-\frac{1}{x}\left(v+k-\frac{1}{2}\right)^2}\right];$$

$$\hat\vartheta_2(v,\ x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{1}{x}(v+k)^2}-\sum_{k=-1}^{-\infty}(-1)^k e^{-\frac{1}{x}(v+k)^2}\right];$$

$$\hat\vartheta_3(v,\ x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{x}(v+k)^2}-\sum_{k=-1}^{-\infty}e^{-\frac{1}{x}(v+k)^2}\right];$$

$$\Theta_n(w,\ x)=i^{-n}V_n(iw,\ ix);$$

$$\lambda(e^x,\ \alpha)=\int_0^\alpha e^{-xu}\Gamma(u+1)\,du;$$

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln q & \text{для } n=q^m, \text{ где } q \text{ — простое число, } m>0,\\ 0 & \text{в остальных случаях;}\end{cases}$$

$$\mu(x,\ a)=\int_0^\infty\frac{x^u u^a}{\Gamma(u+1)}\,du;$$

$$\mu(x,\ a,\ b)=\int_0^\infty\frac{x^{u+b}u^a}{\Gamma(u+b+1)}\,du;$$

$$\nu(x)=\int_0^\infty\frac{x^u\,du}{\Gamma(u+1)}=\int_1^\infty\frac{x^{u-1}\,du}{\Gamma(u)};$$

$$\nu(x,\ a)=\int_a^\infty\frac{x^u\,du}{\Gamma(u+1)};$$

$$\nu i(x,\ a)=\int_0^x\frac{\nu(u,\ a)}{u}\,du;$$

$$\Upsilon_n(w,\ x)=i^{-n}U_n(iw,\ ix);$$

$$\Pi(x)=\Gamma(x+1),$$

$$\pi=3{,}14159265\ldots;$$

$$\varphi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),\quad x\geqslant 0;$$

$$\psi(x,\ y)=\frac{x}{2\sqrt{\pi y^3}}e^{-\frac{x^2}{4y}};$$

$$\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)};$$

$$\omega(x)=\ln\Gamma(x)--\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x+x-\ln\sqrt{2\pi};$$

$$\chi(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
0	$pq \frac{\partial^n}{\partial p^n}\left[\frac{F(p, q)}{pq}\right]$	$(-x)^n f(x, y)$
1	$pq \frac{\partial^2}{\partial p\, \partial q}\left[\frac{F(p, q)}{pq}\right]$	$xy f(x, y)$
2	$pq \frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m\, \partial q^n}\left[\frac{F(p, q)}{pq}\right]$	$(-x)^m (-y)^n f(x, y)$
3	$p \frac{\partial F(p, q)}{\partial p}$	$-x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$
4	$pq \frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial p\, \partial q}$	$xy \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}$
5	$pq \frac{\partial^{m+n}}{\partial p^m\, \partial q^n} F(p, q)$	$(-x)^m (-y)^n \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}$
6	$p^r q^s \frac{\partial^{m+n} F(p, q)}{\partial p^m\, \partial q^n}$ r, s, m, n — целые положительные числа, $m \geqslant r$, $n \geqslant s$	$\frac{\partial^{r+s-2}}{\partial x^{r-1}\, \partial y^{s-1}} \times$ $\times \left[(-x)^m (-y)^n \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y}\right]$
7	$pq \frac{\partial^{r+s}}{\partial p^r\, \partial q^s} [p^{m-1} q^{n-1} F(p, q)]$ r, s, m, n — целые положительные числа, $r \geqslant m$, $s \geqslant n$	$(-x)^r (-y)^s \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m\, \partial y^n}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
8	$\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial p^{m-1}\, \partial q^{n-1}}\left[p^m q^n \frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial p\, \partial q}\right]$ r, s, m, n — целые положительные числа, $r \geqslant m$, $s \geqslant n$	$(-x)^m (-y)^n \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m\, \partial y^n}$
9	$pF(p, q) - pF_2(0, q)$ *)	$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$
10	$qF(p, q) - qF_1(p, 0)$	$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$
11	$p^2 F(p, q) - p^2 F_2(0, q) -$ $- pF_{2,\,x}(0, q)$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$
12	$pqF(p, q) - pqF_2(0, q) -$ $- pqF_1(p, 0) + pqf(0, 0)$	$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} f(x, y)$
13	$q^2 F(p, q) - q^2 F_1(p, 0) -$ $- qF_{1,\,y}(p, 0)$	$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$

---

*) Начиная с формулы (9) и далее мы пользуемся следующими обозначениями:

$$F_1(p, y) = p \int_0^\infty e^{-p\xi} f(\xi, y)\, d\xi,$$

$$F_2(x, q) = q \int_0^\infty e^{-q\eta} f(x, \eta)\, d\eta,$$

$$F_{1,\, y^l}(p, 0) = p \int_0^\infty e^{-p\xi} \left.\frac{\partial^l f(\xi, y)}{\partial y^l}\right|_{y=0} d\xi,$$

$$F_{2,\, x^k}(0, q) = q \int_0^\infty e^{-q\eta} \left.\frac{\partial^k f(x, \eta)}{\partial x^k}\right|_{x=0} d\eta,$$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
14	$p^3F(p, q) - p^3F_2(0, q) - p^2F_{2,x}(0, q) - pF_{2,xx}(0, q)$	$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, y)$
15	$p^2qF(p, q) - p^2qF_2(0, q) - p^2qF_1(p, 0) + p^2qf(0, 0) - pqF_{2,x}(0, q) + pqf'_x(0, 0)$	$\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y} f(x, y)$
16	$pq^2F(p, q) - pq^2F_1(p, 0) - pq^2F_2(0, q) + pq^2f(0, 0) - pqF_{1,y}(p, 0) + pqf'_y(0, 0)$	$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} f(x, y)$
17	$q^3F(p, q) - q^3F_1(p, 0) - q^2F_{1,y}(p, 0) - qF_{1,yy}(p, 0)$	$\frac{\partial_3}{\partial y^3} f(x, y)$
18	$p^4F(p, q) - p^4F_2(0, q) - p^3F_{2,x}(0, q) - p^2F_{2,xx}(0, q) - pF_{2,xxx}(0, q)$	$\frac{\partial^4}{\partial x^4} f(x, y)$
19	$p^3qF(p, q) - p^3qF_1(p, 0) - p^3qF_2(0, q) - p^2qF_{2,x}(0, q) - pqF_{2,xx}(0, q) + p^3qf(0, 0) + p^2qf'_x(0, 0) + pqf''_{xx}(0, 0)$	$\frac{\partial^4}{\partial x^3\,\partial y} f(x, y)$
20	$p^2q^2F(p, q) - p^2q^2F_1(p, 0) - p^2q^2F_2(0, q) - p^2qF_{1,y}(p, 0) - pq^2F_{2,x}(0, q) + p^2q^2f(0, 0) + p^2qf'_y(0, 0) + pq^2f'_x(0, 0) + pqf''_{xy}(0, 0)$	$\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} f(x, y)$
21	$pq^3F(p, q) - pq^3F_2(0, q) - pq^3F_1(p, 0) - pq^2F_{1,y}(p, 0) - pqF_{1,yy}(p, 0) + pq^3f(0, 0) + pq^2f'_y(0, 0) + pqf''_{yy}(0, 0)$	$\frac{\partial^4}{\partial x\,\partial y^3} f(x, y)$
22	$q^4F(p, q) - q^4F_1(p, 0) - q^3F_{1,y}(p, 0) - q^2F_{1,yy}(p, 0) - qF_{1,yyy}(p, 0)$	$\frac{\partial^4}{\partial y^4} f(x, y)$
23	$p^nF(p, q) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k}F_{2,x^k}(0, q)$ $(n \geqslant 1)$	$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x, y)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
24	$q^nF(p, q) - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k}F_{1,y^k}(p, 0)$ $(n \geqslant 1)$	$\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y)$
25	$p^mq^nF(p, q) - p^m\sum_{l=0}^{n-1} q^{n-l}F_{1,y^l}(p, 0) - q^n\sum_{k=0}^{m-1} p^{m-k}F_{2,x^k}(0, q) + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} p^{m-k}q^{n-l}f^{(k+l)}_{x^ky^l}(0, 0)$	$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} f(x, y)$ $(m, n \geqslant 1)$
26	$\frac{pq}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{p^2\lambda^2}{4}-\frac{q^2\mu^2}{4}} \times \frac{\lambda^2F\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)-\mu^2F\left(\frac{1}{\mu^2}\right)}{\lambda^2-\mu^2}\,d\lambda\,d\mu$	$f(x^2+y^2)$
27	$-pq\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(p\cos\theta + q\sin\theta)\,d\theta$ *)	$f(\sqrt{x^2+y^2})$
28	$pq\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(p\cos\theta + q\sin\theta)\,d\theta$	$\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$
29	$pq\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(p\cos\theta + q\sin\theta + a)\,d\theta$	$e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$

*) Выражение для функции Φ дано в § 14.

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
30	$pq\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tg}\theta)}{(p\cos\theta+q\sin\theta)^2}\,d\theta$	$f\left(\frac{y}{x}\right)$
31	$pq\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tg}\theta)}{p\cos\theta+q\sin\theta}\,d\theta$	$\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
32	$\frac{p}{p+a}\cdot\frac{q}{q+b}\,F(p+a, q+b)$	$e^{-ax-by}f(x, y)$
33	$\frac{F(p)-F(q)}{p-q}$	$\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^y f(\eta)\,d\eta+ + \int\limits_0^{x+y} f(\xi)\,d\xi$
34	$-\frac{qF(p)-pF(q)}{p-q}$	$f(x+y)$
35	$pq\left\{-\frac{F(p)-F(q)}{p-q}\right\}$	$f'(x+y)$
36	$pq\left[-\frac{pF(p)-qF(q)}{p-q}+f(0)\right]$	$f''(x+y)$
37	$pq\left\{-\frac{p^2F(p)-q^2F(q)}{p-q}\right\}+ + pq\{f'(0)+(p+q)f(0)\}$	$f'''(x+y)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
38	$pq\left\{-\frac{p^3F(p)-q^3F(q)}{p-q}\right\}+ + pq\{f''(0)+(p+q)f'(0)+ + (p^2+pq+q^2)f(0)\}$	$f^{IV}(x+y)$
39	$pq\left\{-\frac{p^{n-1}F(p)-q^{n-1}F(q)}{p-q}\right\}+ + pq\{(p^{n-2}+p^{n-3}q+\ldots+pq^{n-3}+q^{n-2})f(0)+ + (p^{n-3}+p^{n-4}q+\ldots+pq^{n-4}+q^{n-3})f'(0)+ + (p^{n-4}+p^{n-5}q+\ldots+pq^{n-5}+q^{n-4})f''(0)+ \ldots + (p+q)f^{(n-3)}(0)+f^{(n-2)}(0)\}$	$f^{(n)}(x+y)$
40	$e^{pa}\left\{F(p, q)-p\int\limits_0^a e^{-p\xi}F_2(\xi, q)\,d\xi\right\}$ $a\geqslant 0$	$f(x+a, y)$
41	$e^{pa+qb}\left\{F(p, q)-p\int\limits_0^a e^{-p\xi}F_2(\xi, q)\,d\xi- -q\int\limits_0^b e^{-q\eta}F_1(p, \eta)\,d\eta+ + pq\int\limits_0^a\int\limits_0^b e^{-p\xi-q\eta}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta\right\}$ $a, b\geqslant 0$	$f(x+a, y+b)$
42	$(e^{ap}-1)F(p, q)-pe^{ap}\int\limits_0^a e^{-p\lambda}F_2(\lambda, q)\,d\lambda$	$\Delta_{a, x}f(x, y)= =f(x+a, y)- -f(x, y)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
43	$(e^{ap}-1)(e^{bq}-1)F(p,q)-(e^{ap}-1)qe^{bq}\int_0^b e^{-q\mu}F_1(p,\mu)\,d\mu-(e^{bq}-1)pe^{ap}\int_0^a e^{-p\lambda}F_2(\lambda,q)\,d\lambda+pqe^{ap+bq}\int_0^a\int_0^b e^{-p\lambda-q\mu}f(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu$	$\Delta_{a,x}\Delta_{b,y}f(x,y)=f(x+a,y+b)-f(x+a,y)-f(x,y+b)+f(x,y)$
44	$\dfrac{pq}{pq+1}F\left(p+\dfrac{1}{q}\right)$	$J_0(2\sqrt{xy})f(x)$
45	$\dfrac{p\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}F(p+\sqrt{q})$	$\chi(x,y)f(x)$
46	$\dfrac{1}{2}p\int_0^\infty \chi(p,\lambda)F(\lambda,q)\dfrac{d\lambda}{\lambda}$	$f(x^2,y)$
47	$\dfrac{1}{4}pq\int_0^\infty\int_0^\infty \chi(p,\lambda)\chi(q,\mu)F(\lambda,\mu)\dfrac{d\lambda\,d\mu}{\lambda\mu}$	$f(x^2,y^2)$
48	$\dfrac{pqF\left(p+q+\dfrac{a}{q}\right)}{pq+q^2+a}$	$\begin{cases} J_0(2\sqrt{a(y-x)x})f(x) & \text{при } y>x \\ 0 & \text{при } y<x \end{cases}$
49	$\dfrac{1}{2}p\int_0^\infty \psi(p,\lambda)F(\lambda,q)\dfrac{d\lambda}{\lambda}$	$xf(x^2,y)$
50	$\dfrac{pF(ap+bq+c)}{ap+bq+c}$	$\begin{cases} \dfrac{1}{a}e^{-\frac{c}{a}x}f\left(\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } y>\dfrac{b}{a}x \\ 0 & \text{при } y<\dfrac{b}{a}x \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
51	$\dfrac{1}{4}pq\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(p,\lambda)\psi(q,\mu)F(\lambda,\mu)\dfrac{d\lambda\,d\mu}{\lambda\mu}$	$xyf(x^2,y^2)$
52	$\int_0^\infty\sqrt{\dfrac{p}{\lambda}}J_1(2\sqrt{p\lambda})F(\lambda,q)\,d\lambda$	$f\left(\dfrac{1}{x},y\right)$
53	$\int_0^\infty\int_0^\infty\sqrt{\dfrac{pq}{\lambda\mu}}J_1(2\sqrt{p\lambda})J_1(2\sqrt{q\mu})\times F(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu$	$f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$
54	$p\int_0^\infty J_0(2\sqrt{p\lambda})F(\lambda,q)\dfrac{d\lambda}{\lambda}$	$\dfrac{1}{x}\cdot f\left(\dfrac{1}{x},y\right)$
55	$\int_0^\infty\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}J_\alpha(2\sqrt{p\lambda})F(\lambda,q)\,d\lambda$	$x^{\alpha-1}f\left(\dfrac{1}{x},y\right)$
56	$pq\int_0^\infty\int_0^\infty J_0(2\sqrt{p\lambda})J_0(2\sqrt{q\mu})\times F(\lambda,\mu)\dfrac{d\lambda\,d\mu}{\lambda\mu}$	$\dfrac{1}{xy}\cdot f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$
57	$\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\dfrac{\lambda}{p}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\dfrac{\mu}{q}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}J_\alpha(2\sqrt{p\lambda})\times J_\beta(2\sqrt{q\mu})F(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu$	$x^{\alpha-1}y^{\beta-1}f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
58	$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left(\frac{\sin 2\sqrt{p\lambda}}{2\sqrt{p}}-\sqrt{\lambda}\cos 2\sqrt{p\lambda}\right)\times$ $\times\left(\frac{\sin 2\sqrt{q\mu}}{2\sqrt{q}}-\sqrt{\mu}\cos 2\sqrt{q\mu}\right)\times$ $\times F(\lambda, \mu)\frac{d\lambda\, d\mu}{\lambda\mu}$	$\sqrt{xy}\, f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$
59	$pq\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{p}{\lambda}-\frac{q}{\mu}}}{(\lambda\mu)^{\frac{5}{2}}}\cdot f(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu$	$\sqrt{xy}\, f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$
60	$p\int\limits_p^\infty e^{-(\lambda-p)}F(\lambda, q)\frac{d\lambda}{\lambda}$	$\frac{1}{x+1}f(x, y)$
61	$\int\limits_p^\infty \frac{pq}{q+\lambda-p}F(\lambda, q+\lambda-p)\frac{d\lambda}{\lambda}$	$\frac{1}{x+y}f(x, y)$
62	$p\int\limits_p^\infty \frac{F(\lambda, q)}{\lambda}\, d\lambda$	$\frac{1}{x}f(x, y)$
63	$pq\int\limits_p^\infty\int\limits_q^\infty \frac{F(\lambda, \mu)}{\lambda\mu}\, d\lambda\, d\mu$	$\frac{f(x, y)}{xy}$
64	$\int\limits_0^p \frac{F(\lambda, q)}{\lambda}\, d\lambda$	$\int\limits_x^\infty \frac{f(\xi, y)}{\xi}\, d\xi$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
65	$\int\limits_0^p\int\limits_0^q \frac{F(\lambda, \mu)}{\lambda\mu}\, d\lambda\, d\mu$	$\int\limits_x^\infty\int\limits_y^\infty \frac{f(\xi, \eta)}{\xi\eta}\, d\xi\, d\eta$
66	$\int\limits_0^\infty \frac{F(\lambda, q)}{\lambda}\, d\lambda$	$\int\limits_0^\infty \frac{f(\xi, y)}{\xi}\, d\xi$
67	$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{F(\lambda, \mu)}{\lambda\mu}\, d\lambda\, d\mu$	$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{f(\xi, \eta)}{\xi\eta}\, d\xi\, d\eta$
68	$\frac{1}{pq}F_1(p, q)\, F_2(p, q)$	$\int\limits_0^x\int\limits_0^y f_1(\xi, \eta)\times$ $\times f_2(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta$

ТАБЛИЦЫ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.1	1	1
1.2	$\frac{pq}{(p-a)(q-b)}$	e^{ax+by}
1.3	$\frac{1}{p^m q^n}$	$\frac{x^m y^n}{m!n!}$
1.4	$\frac{q}{p+q-b}$	$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad y > x, \\ e^{by} & \text{при} \quad y < x \end{cases}$
1.5	$\frac{pq}{(p-a)(p+q-a)}$	$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad y > x, \\ e^{ax} & \text{при} \quad y < x \end{cases}$
1.6	$\frac{pq}{pq+a}$	$J_0(2\sqrt{axy})$
1.7	$\frac{pq}{p^2q^2-a}$	$I_0(2\sqrt{axy})$
1.8	$\frac{pq}{p^2q^2+1}$	$\operatorname{bei}(2\sqrt{xy})$
1.9	$\frac{p^2q^2}{p^2q^2+1}$	$\operatorname{ber}(2\sqrt{xy})$
1.10	$\frac{pq}{pq-ap-bq+c}$	$e^{bx+ay}J_0(2\sqrt{(c-ab)xy})$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.11	$\frac{pq}{p^2+apq+b}$ $a > 0$	$\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad y > ax, \\ \frac{1}{a}J_0\left(\frac{2}{a}\sqrt{by(ax-y)}\right) \text{ при } y < ax \end{cases}$
1.12	$\frac{pq}{(p+aq+b)(p+\alpha q+d)+c}$ $0 \leqslant \alpha < a$	$\begin{cases} \frac{1}{a-\alpha}e^{-b\frac{y-\alpha x}{a-\alpha}-d\frac{ax-y}{a-\alpha}} \times \\ \times J_0\left(\frac{2}{a-\alpha}\sqrt{c(y-\alpha x)(ax-y)}\right) \\ \text{при } \alpha x < y < ax, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$
1.13	$\frac{pq}{ap^2+2bpq+cq^2+ +2du+2eq+f}$ $b^2 > ac$	$\begin{cases} \frac{1}{2D}e^{-\frac{1}{D^2}[(be-cd)x-(bd-ae)y]} \times \\ \times J_0\left(\frac{1}{D^2}\sqrt{cx^2-2bxy+ay^2} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{acf+2bde-b^2f-ae^2-cd^2}\right) \\ \text{при } (b-D)x < ay < (b+D)x, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$ $D = \sqrt{b^2-ac}$
1.14	$\frac{pq}{(p+q)(p-1)(q-1)}$	$\begin{cases} e^y \operatorname{sh} x & \text{при} \quad y > x, \\ e^x \operatorname{sh} y & \text{при} \quad y < x \end{cases}$
1.15	$\frac{pq}{(p-1)(q-1)(p+q-1)}$	$\begin{cases} e^y(e^x-1) & \text{при} \quad y > x, \\ e^x(e^y-1) & \text{при} \quad y < x \end{cases}$
1.16	$\frac{pq}{pq(p+q+a)}$ $a \neq 0$	$\begin{cases} \frac{1-e^{-ax}}{a} & \text{при} \quad y > x, \\ \frac{1-e^{-ay}}{a} & \text{при} \quad y < x \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.17	$\dfrac{pq}{p^2q+a}$ $a \neq 0$	$\sqrt{\pi}\,\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{4}{ax^2y}\right)^{\frac{1}{6}} J_{0,\frac{1}{2}}\left(3\sqrt[3]{\dfrac{ax^2y}{4}}\right) = x\,{}_0F_2\left(1, \dfrac{3}{2}; -\dfrac{ax^2y}{4}\right)$
1.18	$\dfrac{q}{pq+a}$ $a \neq 0$	$-\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial y} J_0(2\sqrt{axy}) = \sqrt{\dfrac{x}{ay}}\, J_1(2\sqrt{axy})$
1.19	$\dfrac{q^2}{(p+q)(p+2q)}$	$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{при } x < y < 2x, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } 0 < y < x \end{cases}$
1.20	$\dfrac{pq}{(p+aq+b)[(p+aq+b)\times(p+\alpha q+d)+c]}$ $0 \leqslant \alpha < a$	$\begin{cases} \dfrac{1}{a-\alpha} e^{-b\frac{y-\alpha x}{a-\alpha} - d\frac{ax-y}{a-\alpha}} \times \sqrt{\dfrac{y-\alpha x}{c(ax-y)}} \times J_1\left(\dfrac{2}{a-\alpha}\sqrt{c(y-\alpha x)(ax-y)}\right) \\ \text{при } \alpha x < y < ax, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$
1.21	$\dfrac{1}{p^\nu}\,\dfrac{pq}{1+p^2q^2}$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}\nu}\left[\operatorname{bei}_\nu(2\sqrt{xy})\cos\dfrac{3\nu\pi}{4} - \operatorname{ber}_\nu(2\sqrt{xy})\sin\dfrac{3\nu\pi}{4}\right]$
1.22	$\dfrac{p^2q}{p^2q+a}$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{ax^2y}{4}\right)^{\frac{1}{6}} J_{0,-\frac{1}{2}}\left(3\sqrt[3]{\dfrac{ax^2y}{4}}\right) = {}_0F_2\left(\dfrac{1}{2}, 1; -\dfrac{ax^2y}{4}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.23	$\dfrac{p+q}{p+q-1}$	$\begin{cases} e^x & \text{при } y > x, \\ e^y & \text{при } y < x \end{cases}$
1.24	$\dfrac{pq(p+q-2)}{(p-1)(q-1)(p+q-1)}$	$\begin{cases} e^y & \text{при } y > x, \\ e^x & \text{при } y < x \end{cases}$
1.25	$\dfrac{pq(bp+aq)}{(p-a)(q-b)\times(bp+aq-ab)}$ $\dfrac{a}{b} \geqslant 0$	$\begin{cases} e^{by}(2e^{ax}-1) & \text{при } y > \dfrac{a}{b}x, \\ e^{ax}(2e^{by}-1) & \text{при } y < \dfrac{a}{b}x \end{cases}$
1.26	$\dfrac{p}{q(p+aq)^2}$ $a \geqslant 0$	$\begin{cases} x(y-ax) & \text{при } y > ax, \\ 0 & \text{при } y < ax \end{cases}$
1.27	$\dfrac{q}{p^2q+a}$	$\sqrt{\pi}\,\dfrac{x^2}{4}\left(\dfrac{4}{ax^2y}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2},1}\left(3\sqrt[3]{\dfrac{ax^2y}{4}}\right) = \dfrac{x^2}{2!}\,{}_0F_2\left(\dfrac{3}{2}, 2; -\dfrac{ax^2y}{4}\right)$
1.28	$\dfrac{pq}{p^2q^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{bei}(2\sqrt{axy})$
1.29	$\dfrac{pq}{p^2q^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}[I_0(2\sqrt{axy}) - J_0(2\sqrt{axy})]$
1.30	$\dfrac{pq}{(pq+b)^2+a^2}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(2\sqrt{bxy}) \overset{x}{*} \dfrac{1}{a}\operatorname{bei}(2\sqrt{axy})\right]$
1.31	$\dfrac{pq}{(pq+b)^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}[J_0(2\sqrt{(b-a)xy}) - J_0(2\sqrt{(a+b)xy})]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.32	$\dfrac{pq}{p^2q^2+apq+a^2}$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}\,a}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right]$
1.33	$\dfrac{q}{p(pq+a)}$	$\dfrac{x}{ay}J_2(2\sqrt{axy})$
1.34	$\dfrac{pq}{p^3q+a}$	$\dfrac{x^2}{2}\,{}_0F_3\left(1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}; -\dfrac{ax^3y}{27}\right)$
1.35	$\dfrac{pq}{p^3q+ap^2+b}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(2\sqrt{axy})\overset{x}{*}\dfrac{x^2}{2}\times{}_0F_3\left(1, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}; -\dfrac{bx^3y}{27}\right)\right]$
1.36	$\dfrac{pq}{(p^2+a)(q^2+b)+cpq}$	$\int\limits_0^x\int\limits_0^y J_0(2\sqrt{a\xi(x-\xi)})\times J_0(2\sqrt{b\eta(y-\eta)})\,J_0(2\sqrt{c\xi\eta})\,d\xi\,d\eta$
1.37	$\dfrac{pq}{(p^2+a)(pq+b)-c}$	$\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^\xi J_0\left(2\sqrt{\left(b-\dfrac{c}{a}\right)y(x-\xi)}\right)\times J_0(2\sqrt{a\tau(\xi-\tau)})\,J_0\left(2\sqrt{\dfrac{c}{a}y\tau}\right)d\tau$
1.38	$\dfrac{p}{q(p+q)^2}+\dfrac{2p}{(p+q)^3}$	$\begin{cases} xy & \text{при } y>x, \\ 0 & \text{при } y<x \end{cases}$
1.39	$\dfrac{p^2q}{(pq+a)(pq+b)}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{\dfrac{y}{(b-a)x}}J_1(2\sqrt{(b-a)xy})\overset{x}{*}J_0(2\sqrt{axy})\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.40	$\dfrac{p^2q}{(pq+b)^2+a^2}$	$J_0(2\sqrt{bxy})\overset{y}{*}\left[\operatorname{ber}(2\sqrt{axy})-\dfrac{b}{a}\operatorname{bei}(2\sqrt{axy})\right]$
1.41	$\dfrac{p^2q}{(pq+b)^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\left[\sqrt{(a+b)\dfrac{y}{x}}J_1(2\sqrt{(a+b)xy})-\sqrt{(b-a)\dfrac{y}{x}}J_1(2\sqrt{(b-a)xy})\right]$
1.42	$\dfrac{p^2q}{(p^2+a)(q^2+b)+cpq}$	$\int\limits_0^y J_0(2\sqrt{b\eta(y-\eta)})\,J_0(2\sqrt{cx\eta})\,d\eta-\int\limits_0^x\int\limits_0^y\sqrt{\dfrac{a\xi}{x-\xi}}J_1(2\sqrt{a\xi(x-\xi)})\times J_0(2\sqrt{b\eta(y-\eta)})\,J_0(2\sqrt{c\xi\eta})\,d\xi\,d\eta$
1.43	$\dfrac{p^2q}{p^2q^2+apq+a^2}$	$J_0(\sqrt{2axy})\overset{y}{*}\left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right]$
1.44	$\dfrac{p^2q}{p^2q^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial}{\partial x}\operatorname{bei}(2\sqrt{axy})=\sqrt{\dfrac{y}{2ax}}\left[\operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})-\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy})\right]$
1.45	$\dfrac{p^2q}{p^2q^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{ax}}\left[J_1(2\sqrt{axy})+I_1(2\sqrt{axy})\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.46	$\dfrac{p^2q}{p^3q+a}$	$x\,{}_0F_3\left(\dfrac{2}{3},\,1,\,\dfrac{4}{3};\,-\dfrac{ax^3y}{27}\right)$
1.47	$\dfrac{p^2q}{p^3q+ap^2+b}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(2\sqrt{axy})\overset{x}{*}x\times{}_0F_3\left(\dfrac{2}{3},\,1,\,\dfrac{4}{3};\,-\dfrac{bx^3y}{27}\right)\right]$
1.48	$\dfrac{pq(p+q)}{(p^2+1)(q^2+1)}$	$\sin(x+y)$
1.49	$\dfrac{pq(p+q)}{(p^2-1)(q^2-1)}$	$\operatorname{sh}(x+y)$
1.50	$\dfrac{p+q}{pq+a}$	$\dfrac{x+y}{\sqrt{axy}}J_1(2\sqrt{axy})$
1.51	$\dfrac{p^2q^2}{p^2q^2+a^2}$	$\operatorname{ber}(2\sqrt{axy})$
1.52	$\dfrac{p^2q^2}{p^2q^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2}[J_0(2\sqrt{axy})+I_0(2\sqrt{axy})]$
1.53	$\dfrac{p^2q^2}{(pq+b)^2+a^2}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(2\sqrt{bxy})\overset{x}{*}\left(\operatorname{ber}(2\sqrt{axy})-\dfrac{b}{a}\operatorname{bei}(2\sqrt{axy})\right)\right]$
1.54	$\dfrac{p^2q^2}{p^2q^2+apq+a^2}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*}\left(\operatorname{ber}\left(\sqrt{\sqrt{3}\,axy}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right)\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.55	$\dfrac{p^2q^2}{(p^2+a)(q^2+b)+cpq}$	$J_0(2\sqrt{cxy})-\int\limits_0^x\sqrt{\dfrac{a\xi}{x-\xi}}J_1(2\sqrt{a\xi(x-\xi)})\times J_0(2\sqrt{cy\xi})\,d\xi-\int\limits_0^y\sqrt{\dfrac{b\eta}{y-\eta}}\times J_1(2\sqrt{b\eta(y-\eta)})J_0(2\sqrt{cx\eta})\,d\eta+\int\limits_0^x\int\limits_0^y\sqrt{\dfrac{ab\xi\eta}{(x-\xi)(y-\eta)}}\times J_1(2\sqrt{a\xi(x-\xi)})\times J_1(2\sqrt{b\eta(y-\eta)})J_0(2\sqrt{c\xi\eta})\,d\xi\,d\eta$
1.56	$\dfrac{p^3q}{p^3q+a}$	${}_0F_3\left(\dfrac{1}{3},\,\dfrac{2}{3},\,1;\,-\dfrac{ax^3y}{27}\right)$
1.57	$\dfrac{p^3q}{p^3q+ap^2+b}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(2\sqrt{axy})\overset{x}{*}{}_0F_3\left(\dfrac{1}{3},\,\dfrac{2}{3},\,1;\,-\dfrac{bx^3y}{27}\right)\right]$
1.58	$\dfrac{pq(pq-1)}{(p^2+1)(q^2+1)}$	$\cos(x+y)$
1.59	$\dfrac{pq(pq+1)}{(p^2-1)(q^2-1)}$	$\operatorname{ch}(x+y)$
1.60	$\dfrac{pq(pq+b)}{(pq+b)^2+a^2}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}[J_0(2\sqrt{bxy})\overset{x}{*}\operatorname{ber}(2\sqrt{axy})]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.61	$\dfrac{pq(pq+b)}{(pq+b)^2-a^2}$	$\frac{1}{2}[J_0(2\sqrt{(a+b)xy}) + J_0(2\sqrt{(b-a)xy})]$
1.62	$\dfrac{pq(pq+a)}{p^2q^2+apq+a^2}$	$\frac{\partial}{\partial x}\left\{J_0(\sqrt{2axy}) \overset{x}{*} \left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right)\right]\right\}$
1.63	$\dfrac{(p+q)^2-bp-aq}{(p+q-a)(p+q-b)}$	$\begin{cases} e^{ax} & \text{при} \quad y>x, \\ e^{by} & \text{при} \quad y<x \end{cases}$
1.64	$\dfrac{pq(pq-a)}{p^2q^2+apq+a^2}$	$\frac{\partial}{\partial x}\left\{J_0(\sqrt{2axy}) \overset{x}{*} \left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right) - \sqrt{3}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right)\right]\right\}$
1.65	$\dfrac{pq[(p+q)^2-(2a+b)p-(2b+a)q+a^2+b^2]}{(p-a)(q-b)\times(p+q-a)(p+q-b)}$	$\begin{cases} e^{by} & \text{при} \quad y>x, \\ e^{ax} & \text{при} \quad y<x \end{cases}$
1.66	$\dfrac{1}{pq(p+q)}$	$\frac{1}{2}\begin{cases} x^2y-\frac{x^3}{3} & \text{при} \quad y>x, \\ xy^2-\frac{y^3}{3} & \text{при} \quad y<x \end{cases}$
1.67	$\dfrac{q}{p^2q^2+a^2}$	$-\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{ber}(2\sqrt{axy}) = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x}{2ay}}[\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy}) + \operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.68	$\dfrac{q}{(p^2q^2-a^2)}$	$\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{x}{ay}}[I_1(2\sqrt{axy}) - J_1(2\sqrt{axy})]$
1.69	$\dfrac{q}{(pq+b)^2+a^2}$	$\frac{1}{a}J_0(2\sqrt{bxy}) \overset{x}{*} \operatorname{bei}(2\sqrt{axy})$
1.70	$\dfrac{pq}{p^3q^2+a}$	$\frac{x^2y}{2}\,{}_0F_4\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -\frac{ax^3y^2}{3^3 2^2}\right)$
1.71	$\dfrac{pq}{p^4q+a}$	$\frac{x^3}{3!}\,{}_0F_4\left(1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}; -\frac{ax^4y}{64}\right)$
1.72	$\dfrac{q}{p^3q+a}$	$\frac{x^3}{3!}\,{}_0F_3\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2; -\frac{ax^3y}{27}\right)$
1.73	$\dfrac{p^2}{p^2q^2-a^2}$	$\frac{y}{2ax}[J_2(2\sqrt{axy}) + I_2(2\sqrt{axy})]$
1.74	$\dfrac{p^2}{p^2q^2+a^2}$	$\frac{y}{ax}\left\{\operatorname{bei}(2\sqrt{axy}) + \frac{1}{\sqrt{2axy}}[\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy}) + \operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})]\right\} = -\frac{y}{ax}\operatorname{bei}_2(2\sqrt{axy})$
1.75	$\dfrac{q}{p(p^2q+a)}$	$\sqrt{\pi}\,\frac{x^3}{2^3}\left(\frac{4}{ax^2y}\right)^{3/2} J_{1,\,3/2}\left(3\sqrt[3]{\frac{ax^2y}{4}}\right) = \frac{x^3}{3!}\,{}_0F_2\left(2, \frac{5}{2}; -\frac{ax^2y}{4}\right)$
1.76	$\dfrac{p^2q}{p^3q^2+a}$	$xy\,{}_0F_4\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}; -\frac{ax^3y^2}{3^3 2^2}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.77	$\dfrac{p^2 q}{p^4 q + a}$	$\dfrac{x^2}{2!}\, {}_0F_4\left(\dfrac{3}{4},\ 1,\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{6}{4};\ -\dfrac{ax^4y}{4^4}\right)$
1.78	$\dfrac{pq^2}{p^3q^2 + a}$	$\dfrac{x^2}{2!}\, {}_0F_4\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3};\ -\dfrac{ax^3y^2}{3^3 2^2}\right)$
1.79	$\dfrac{p^2q^2}{p^3q^2 + a}$	$x \cdot {}_0F_4\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ 1,\ \dfrac{4}{3};\ -\dfrac{ax^3y^2}{3^3 2^2}\right)$
1.80	$\dfrac{p^3q}{p^3q^2 + a}$	$y\, {}_0F_4\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 1;\ -\dfrac{ax^3y^2}{3^3 2^2}\right)$
1.81	$\dfrac{p^3q}{p^4q + a}$	$x\, {}_0F_4\left(\dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ 1,\ \dfrac{5}{4};\ -\dfrac{ax^4y}{4^4}\right)$
1.82	$\dfrac{q(pq + a)}{(p^2q^2 + a^2)}$	$-\sqrt{\dfrac{2x}{ay}}\, \mathrm{ber}_1(2\sqrt{axy})$
1.83	$\dfrac{q(pq - a)}{p^2q^2 + a^2}$	$\sqrt{\dfrac{2x}{ay}}\, \mathrm{bei}_1(2\sqrt{axy})$
1.84	$\dfrac{p(pq - a)}{p^2q^2 + apq + a^2}$	$J_0(2\sqrt{axy}) \overset{y}{*} \left[\mathrm{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right) - \sqrt{3}\, \mathrm{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right)\right]$
1.85	$\dfrac{q(pq + b)}{(pq + b)^2 + a^2}$	$J_0(2\sqrt{bxy}) \overset{x}{*} \mathrm{ber}(2\sqrt{axy})$
1.86	$\dfrac{p(bpq + b^2 - a^2)}{(pq + b)^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{(b+a)\dfrac{y}{x}}\, J_1\left(2\sqrt{(b+a)\dfrac{y}{x}}\right) + \sqrt{(b-a)\dfrac{y}{x}}\, J_1\left(2\sqrt{(b-a)\dfrac{y}{x}}\right)\right]$
1.87	$\dfrac{p(ap^2 + b)}{p^3q + ap^2 + b}$	$-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[J_0(2\sqrt{axy}) \overset{x}{*} {}_0F_3\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 1;\ -\dfrac{bx^3y}{27}\right)\right]$
1.88	$\dfrac{p^3q^2}{p^3q^2 + a}$	${}_0F_4\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 1;\ -\dfrac{ax^3y^2}{3^3 2^2}\right)$
1.89	$\dfrac{p^4q}{p^4q + a}$	${}_0F_4\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ 1;\ -\dfrac{ax^4y}{4^4}\right)$
1.90	$\dfrac{pq}{p^3q^3 + a^3}$	$\dfrac{1}{3a^2}\Big[J_0(2\sqrt{axy}) - \dfrac{\partial}{\partial x}\Big\{I_0(\sqrt{2axy}) \overset{x}{*} \left(\mathrm{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right) - \sqrt{3}\, \mathrm{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right)\right)\Big\}\Big]$
1.91	$\dfrac{pq}{p^3q^3 + ap^2q^2 + a^2pq + a^3}$	$\dfrac{1}{2a^2}\left[J_0(2\sqrt{axy}) - \mathrm{ber}(2\sqrt{axy}) + \mathrm{bei}(2\sqrt{axy})\right]$
1.92	$\dfrac{p}{q(p^2q^2 + a^2)}$	$\dfrac{\sqrt{y}}{a^2x}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2ax}}\, \mathrm{bei}_1(2\sqrt{axy}) - \dfrac{1}{\sqrt{2ax}}\, \mathrm{ber}_1(2\sqrt{axy}) - \sqrt{y}\, \mathrm{ber}_0(2\sqrt{axy})\right] = \dfrac{y}{a^2x}\, \mathrm{ber}_2(2\sqrt{axy})$
1.93	$\dfrac{p}{q(p^2q^2 - a^2)}$	$\dfrac{y}{2a^2x}\left[I_2(2\sqrt{axy}) - J_2(2\sqrt{axy})\right]$
1.94	$\dfrac{q}{p(p^3q + a)}$	$\dfrac{x^4}{4!}\, {}_0F_3\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{6}{3},\ \dfrac{7}{3};\ -\dfrac{ax^3y}{27}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.95	$\dfrac{p^2q}{p^3q^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3a}\Big\{I_0(\sqrt{2axy}) \overset{y}{*} \Big[\operatorname{ber}\Big(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\Big) + \sqrt{3}\operatorname{bei}\Big(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\Big)\Big] - \sqrt{\dfrac{y}{ax}}\,J_1(2\sqrt{axy})\Big\}$
1.96	$\dfrac{p^2q}{p^3q^3+ap^2q^2+a^2pq+a^3}$	$-\dfrac{1}{2a}\sqrt{\dfrac{y}{ax}}\,[J_1(2\sqrt{axy}) + \sqrt{2}\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy})]$
1.97	$\dfrac{p^2q}{p^3q^3-ap^2q^2+a^2pq-a^3}$	$\dfrac{1}{2a}\sqrt{\dfrac{y}{ax}}\,[I_1(2\sqrt{axy}) - \sqrt{2}\operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})]$
1.93	$\dfrac{p^2}{q(p^2q^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2x^2}\Big[2y\operatorname{ber}_0(2\sqrt{axy}) + (2-axy)\sqrt{\dfrac{y}{2ax}}\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy}) - (2+axy)\sqrt{\dfrac{y}{2ax}}\operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})\Big] = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\dfrac{y}{ax}\Big)^{3/2}[\operatorname{ber}_3(2\sqrt{axy}) + \operatorname{bei}_3(2\sqrt{axy})]$
1.99	$\dfrac{p^2}{q(p^2q^2-a^2)}$	$\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{y}{ax}\Big)^{3/2}[J_3(2\sqrt{axy}) + I_3(2\sqrt{axy})]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.100	$\dfrac{pq(pq-a)}{p^3q^3+a^3}$	$\dfrac{2}{3a}\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}\{I_0(\sqrt{2axy}) \overset{x}{*} \operatorname{ber}\Big(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\Big)\} - J_0(2\sqrt{axy})\Big]$
1.101	$\dfrac{p^2q^2}{p^3q^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3a}\Big\{\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[I_0(\sqrt{2axy}) \overset{x}{*} \Big(\operatorname{ber}\Big(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\Big) + \sqrt{3}\operatorname{bei}\Big(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\Big)\Big)\Big] - J_0(2\sqrt{axy})\Big\}$
1.102	$\dfrac{p^2q^2}{p^3q^3+ap^2q^2+a^2pq+a^3}$	$\dfrac{1}{2a}[-J_0(2\sqrt{axy}) + \operatorname{ber}(2\sqrt{axy}) + \operatorname{bei}(2\sqrt{axy})]$
1.103	$\dfrac{p^3q}{p^3q^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\Big[\dfrac{y}{ax}J_2(2\sqrt{axy}) + \Big\{2\sqrt{\dfrac{2y}{ax}}\,I_1(\sqrt{2axy})\Big\} \overset{y}{*} \operatorname{ber}\Big(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\Big)\Big]$
1.104	$\dfrac{p^3q}{p^3q^3+ap^2q^2+a^2pq+a^3}$	$\dfrac{y}{2ax}\Big[J_2(2\sqrt{axy}) + \sqrt{\dfrac{2}{axy}}\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy}) + \operatorname{ber}_0(2\sqrt{axy}) + \operatorname{bei}_0(2\sqrt{axy})\Big] = \dfrac{y}{2ax}[J_2(2\sqrt{axy}) - \operatorname{ber}_2(2\sqrt{axy}) - \operatorname{bei}_2(2\sqrt{axy})]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.105	$\dfrac{p^3q^2}{p^3q^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left[\sqrt{\dfrac{y}{ax}}\,J_1(2\sqrt{axy})+ 2I_0(\sqrt{2axy})\overset{y}{*}\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right]$
1.106	$\dfrac{p^3q^2}{p^3q^3+ap^2q^2+a^2pq+a^3}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{ax}}\,[J_1(2\sqrt{axy})+ \sqrt{2}\operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})]$
1.107	$\dfrac{p^2q(pq-2a)}{p^3q^3+a^3}$	$\sqrt{\dfrac{y}{ax}}\,J_0(2\sqrt{axy})- \dfrac{2}{\sqrt{3}}I_0(\sqrt{2axy})\overset{y}{*}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)$
1.108	$\dfrac{pq(p^2q+q^2+p)}{(p^3-1)(q^3-1)}$	$\dfrac{1}{3}\,[e^{x+y}+\varepsilon e^{\varepsilon x+\varepsilon^2 y}+\varepsilon^2 e^{\varepsilon^2 x+\varepsilon y}]$, $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}$
1.109	$\dfrac{p^3q^3}{p^3q^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left[J_0(2\sqrt{axy})+2\dfrac{\partial}{\partial x}\times \left\{I_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*}\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right\}\right]$
1.110	$\dfrac{p^3q^3}{p^3q^3+ap^2q^2+a^2pq+a^3}$	$\dfrac{1}{2}\,[J_0(2\sqrt{axy})+\operatorname{ber}(2\sqrt{axy})- \operatorname{bei}(2\sqrt{axy})]$
1.111	$\dfrac{pq(p^2q^2+2a^2)}{p^3q^3+a^3}$	$J_0(2\sqrt{axy})+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial x}\times \left[I_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,xy}\right)\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.112	$\dfrac{pq(p^2q^2+2a^2)}{p^3q^3-a^3}$	$I_0(2\sqrt{axy})-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial x}\times \left[J_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right]$
1.113	$\dfrac{p^2q^2(pq-2a)}{p^3q^3+a^3}$	$J_0(2\sqrt{axy})-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial x}\times \left[I_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right]$
1.114	$\dfrac{pq(p^2q^2+pq+1)}{(p^3-1)(q^3-1)}$	$\dfrac{1}{3}\,[e^{x+y}+e^{\varepsilon x+\varepsilon^2 y}+e^{\varepsilon^2 x+\varepsilon y}]$, $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}$
1.115	$\dfrac{pq(2p^2q^2-apq-a^2)}{p^3q^3-a^3}$	$2\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*} \operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right]$
1.116	$\dfrac{pq(p^2q^2+apq-2a^2)}{p^3q^3-a^3}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[J_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*} \left\{\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)+ \sqrt{3}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)\right\}\right]$
1.117	$\dfrac{1}{p^2q^2(p+q)}$	$\dfrac{1}{12}\begin{cases} x^3y^2-\dfrac{x^4y}{2}+\dfrac{x^5}{10} & \text{при } y>x,\\ x^2y^3-\dfrac{xy^4}{2}+\dfrac{y^5}{10} & \text{при } y<x\end{cases}$
1.118	$\dfrac{q}{p^2(p^3q+a)}$	$\dfrac{x^5}{5!}\cdot{}_0F_3\left(2, \dfrac{7}{3}, \dfrac{8}{3}; -\dfrac{ax^3y}{27}\right)$
1.119	$\dfrac{q(2p^2q^2-apq-a^2)}{p^3q^3-a^3}$	$2J_0(\sqrt{2axy})\overset{x}{*}\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}\,axy}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.120	$\dfrac{pq}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}\pi a^3}\times\left[\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\sqrt{2}axy}\cdot\sin\sqrt{\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{\sqrt{2}axy}+\cos\sqrt{2\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}} - \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{\sqrt{2}axy}\cdot\cos\sqrt{\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{2\sqrt{2}axy}-\cos\sqrt{2\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}}\right]$
1.121	$\dfrac{pq}{p^4q^4-a^2}$	$\dfrac{1}{4a^3}[I_0(2\sqrt{axy})-J_0(2\sqrt{axy})-2\operatorname{bei}(2\sqrt{axy})]$
1.122	$\dfrac{p^2q}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\overset{y}{*}\left[I_0\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)-J_0\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\right]$
1.123	$\dfrac{p^2q}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{1}{4a^2}\sqrt{\dfrac{y}{ax}}[J_1(2\sqrt{axy})+I_1(2\sqrt{axy})+\sqrt{2}\{\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy})-\operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})\}]$
1.124	$\dfrac{p^2q^2}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{2\pi a^2}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\sqrt{2}axy}\sin\sqrt{\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{2\sqrt{2}axy}-\cos\sqrt{2\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.125	$\dfrac{p^2q^2}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{1}{4a^2}[J_0(2\sqrt{axy})+I_0(2\sqrt{axy})-2\operatorname{ber}(2\sqrt{axy})]$
1.126	$\dfrac{p^2q^2}{(p^2q^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{4a}\sqrt{\dfrac{xy}{a}}[I_1(2\sqrt{axy})-J_1(2\sqrt{axy})]$
1.127	$\dfrac{p^3q}{p^4q^4+a^2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}a}\left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\overset{y}{*}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}y}{ax}}\left\{I_1\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)-J_1\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\right\}+\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\overset{y}{*}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}y}{ax}}\left\{I_1\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)+J_1\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\right\}\right]$
1.128	$\dfrac{p^3q}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{y}{4a^2x}[I_2(2\sqrt{axy})-J_2(2\sqrt{axy})+2\operatorname{ber}_2(2\sqrt{axy})]$
1.129	$\dfrac{p^3q^2}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}a}\left[\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\overset{y}{*}\left\{I_0\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)-J_0\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\right\}+\operatorname{bei}\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\overset{y}{*}\left\{I_0\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)+J_0\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\right\}\right]$
1.130	$\dfrac{p^3q^2}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{1}{4a}\sqrt{\dfrac{y}{ax}}[I_1(2\sqrt{axy})-J_1(2\sqrt{axy})-\sqrt{2}\{\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy})+\operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})\}]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.131	$\dfrac{p^4q}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}a}\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right) \overset{y}{*} \dfrac{y}{x}\left[J_2\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)+I_2\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\right]$
1.132	$\dfrac{p^4q}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{y}{ax}\right)^{3/2}\left[J_3(2\sqrt{axy})+I_3(2\sqrt{axy})+\sqrt{2}\operatorname{ber}_3(2\sqrt{axy})+\sqrt{2}\operatorname{bei}_3(2\sqrt{axy})\right]$
1.133	$\dfrac{p^3q^3}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{2}a\pi}\times\left[\dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{\sqrt{2}axy}\cos\sqrt{2\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{2\sqrt{2}axy}-\cos\sqrt{2\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\sqrt{2}axy}\cdot\sin\sqrt{\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{2\sqrt{2}axy}+\cos\sqrt{2\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}}\right]$
1.134	$\dfrac{p^3q^3}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{1}{4a}\left[I_0(2\sqrt{axy})-J_0(2\sqrt{axy})+2\operatorname{bei}(2\sqrt{axy})\right]$
1.135	$\dfrac{p^4q^2}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{2}\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right) \overset{y}{*} \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}y}{ax}}\left[J_1\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)+I_1\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.136	$\dfrac{p^4q^2}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{y}{4ax}\left[J_2(2\sqrt{axy})+I_2(2\sqrt{axy})-2\operatorname{bei}_2(2\sqrt{axy})\right]$
1.137	$\dfrac{pq(p^2q^2+a^2)}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}a\pi}\,\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\sqrt{2}axy}\sin\sqrt{\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{2\sqrt{2}axy}+\cos\sqrt{2\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}}$
1.138	$\dfrac{pq(p^2q^2-a^2)}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}a\pi}\,\dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{\sqrt{2}axy}\cos\sqrt{\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{2\sqrt{2}axy}-\cos\sqrt{2\sqrt{2}axy}}{\sqrt{x}}$
1.139	$\dfrac{pq(p^2q^2+a^2)}{(p^2q^2-a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{xy}{a}}\left[J_1(2\sqrt{axy})+I_1(2\sqrt{axy})\right]$
1.140	$\dfrac{q(2p^2q^2-apq-a^2)}{p(p^3q^3-a^3)}$	$\left\{2\sqrt{\dfrac{2x}{ay}}J_1(\sqrt{2axy})\right\} \overset{x}{*} \operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{3}axy}\right)$
1.141	$\dfrac{p^4q^3}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{2}\operatorname{ber}\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right) \overset{y}{*} \left[J_0\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)+I_0\left(\sqrt{2\sqrt{2}axy}\right)\right]$
1.142	$\dfrac{p^4q^3}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{y}{ax}}\left[J_1(2\sqrt{axy})+I_1(2\sqrt{axy})-\sqrt{2}\left\{\operatorname{ber}_1(2\sqrt{axy})-\operatorname{bei}_1(2\sqrt{axy})\right\}\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.143	$\dfrac{p^4q^4}{p^4q^4+a^4}$	$\dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{\sqrt{2}\,axy}\cdot\cos\sqrt{\sqrt{2}\,axy}}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{2\sqrt{2}\,axy}+\cos\sqrt{2\sqrt{2}\,axy}}{\sqrt{x}}$
1.144	$\dfrac{p^4q^4}{p^4q^4-a^4}$	$\dfrac{1}{4}\,[J_0(2\sqrt{axy})+I_0(2\sqrt{axy})+ + 2\operatorname{ber}(2\sqrt{axy})]$
1.145	$\left(1-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)^{-1}$	$e^{x+y}J_0(2i\sqrt{xy})$
1.146	$\dfrac{pq}{p^nq+a}$ $n>0$	$\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,{}_0F_n\left(1,\ 1+\dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{2}{n},\ \ldots \ldots,\ 1+\dfrac{n-1}{n};\ -\dfrac{ax^ny}{n^n}\right)$
1.147	$\dfrac{pq}{(pq+1)^{n+1}}$	$\dfrac{(xy)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n+1)}\,J_n(2\sqrt{xy})$
1.148	$\dfrac{m!}{p^mq^n}\cdot\dfrac{q^{m+1}-p^{m+1}}{q-p}$	$(x+y)^m$
1.149	$\dfrac{p^nq}{p^nq+n}$ $n>0$	${}_0F_n\left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{2}{n},\ \ldots,\ \dfrac{n-1}{n},\ 1;\ -\dfrac{ax^ny}{n^n}\right)$
1.150	$\dfrac{p^{n-m+1}q}{p^nq+a}$ $m,\ n>0$	$\dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,{}_0F_n\left(\dfrac{m}{n},\ \dfrac{m+1}{n},\ \ldots \ldots,\ \dfrac{m+n-1}{n};\ -\dfrac{ax^ny}{n^n}\right)$
1.151	$\dfrac{q}{p^{n-3}(p^3q+a)}$	$\dfrac{x^n}{n!}\,{}_0F_3\left(\dfrac{n+1}{n},\dfrac{n+2}{n},\dfrac{n+3}{a};-\dfrac{ax^3y}{27}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.152	$\dfrac{q}{p^{n-1}(p^2q+a)}$	$\sqrt{\pi}\,\dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}}\left(\dfrac{4}{ax^2y}\right)^{\frac{2n+1}{6}}\times \times J_{\frac{n}{2},\,\frac{n+1}{2}}\left(3\sqrt[3]{\dfrac{ax^2y}{4}}\right)= =\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,{}_0F_2\left(\dfrac{n+2}{2},\dfrac{n+3}{2};-\dfrac{ax^2y}{4}\right)$
1.153	$\dfrac{q}{p^{4n-1}(p^2q^2+a^2)}$	$\dfrac{(-1)^n}{a}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n}\operatorname{bei}_{4n}(2\sqrt{axy})$
1.154	$\dfrac{q^2}{p^{4n-2}(p^2q^2+a^2)}$	$(-1)^n\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n}\operatorname{ber}_{4n}(2\sqrt{axy})$
1.155	$\dfrac{q}{p^{4n}(p^2q^2+a^2)}$	$\dfrac{(-1)^{n+1}}{a\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+\frac{1}{2}}\times \times[\operatorname{ber}_{4n+1}(2\sqrt{axy})+\operatorname{bei}_{4n+1}(2\sqrt{axy})]$
1.156	$\dfrac{q^2}{p^{4n-1}(p^2q^2+a^2)}$	$\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+\frac{1}{2}}\times \times[\operatorname{ber}_{4n+1}(2\sqrt{axy})-\operatorname{bei}_{4n+1}(2\sqrt{axy})]$
1.157	$\dfrac{q(pq+a)}{p^{4n}(p^2q^2+a^2)}$	$(-1)^{n+1}\sqrt{2}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+\frac{1}{2}}\times \times\operatorname{ber}_{4n+1}(2\sqrt{axy})$
1.158	$\dfrac{q(pq-a)}{p^{4n}(p^2q^2+a^2)}$	$(-1)^n\sqrt{2}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+\frac{1}{2}}\operatorname{bei}_{4n+1}(2\sqrt{axy})$
1.159	$\dfrac{q}{p^{4n+1}(p^2q^2+a^2)}$	$\dfrac{(-1)^n}{a}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+1}\operatorname{ber}_{4n+2}(2\sqrt{axy})$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.160	$\dfrac{q^2}{p^{4n}(p^2q^2+a^2)}$	$(-1)^{n+1}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+1}\operatorname{bei}_{4n+2}(2\sqrt{axy})$
1.161	$\dfrac{q}{p^{4n+2}(p^2q^2+a^2)}$	$\dfrac{(-1)^{n+1}}{a\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+\frac{3}{2}}[\operatorname{ber}_{4n+3}(2\sqrt{axy})-$ $-\operatorname{bei}_{4n+3}(2\sqrt{axy})]$
1.162	$\dfrac{q^2}{p^{4n+1}(p^2q^2+a^2)}$	$\dfrac{(-1)^{n}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+\frac{3}{2}}[\operatorname{ber}_{4n+3}(2\sqrt{axy})+$ $+\operatorname{bei}_{4n+3}(2\sqrt{axy})]$
1.163	$\dfrac{q(pq+a)}{p^{4n+2}(p^2q^2+a^2)}$	$(-1)^n\sqrt{2}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+\frac{3}{2}}\operatorname{bei}_{4n+3}(2\sqrt{axy})$
1.164	$\dfrac{q(pq-a)}{p^{4n+2}(p^2q^2+a^2)}$	$(-1)^n\sqrt{2}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{2n+\frac{3}{2}}\operatorname{ber}_{4n+3}(2\sqrt{axy})$
1.165	$\dfrac{pq}{(pq)^n+a^n}$	$\dfrac{1}{na^{n-1}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{I_0\left(2\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{axy}\right)}{\varepsilon^{(n-1)(2k+1)}};\quad \varepsilon=e^{\frac{\pi i}{n}}$
1.166	$\dfrac{(pq)^{n-m+1}}{(pq)^n+a^n}$ $0<m\leqslant n$	$\dfrac{1}{na^{m-1}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{I_0\left(2\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{axy}\right)}{\varepsilon^{(m-1)(2k+1)}};\quad \varepsilon=e^{\frac{\pi i}{n}}$
1.167	$\dfrac{p^2q^2}{(pq)^n+a^n}$	$\dfrac{1}{na^{n-2}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{I_0\left(2\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{axy}\right)}{\varepsilon^{(n-2)(2k+1)}};\quad \varepsilon=e^{\frac{\pi i}{n}}$
1.168	$\dfrac{(pq)^{n-m+1}}{(pq)^n-a^n}$ $0<m\leqslant n$	$\dfrac{1}{na^{m-1}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{I_0\left(2\varepsilon^{\frac{k}{2}}\sqrt{axy}\right)}{\varepsilon^{(m-1)k}};\quad \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.169	$\dfrac{(pq)^n}{(pq)^n+a^n}$	$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}I_0\left(2\varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{axy}\right);\quad \varepsilon=e^{\frac{\pi i}{n}}$
1.170	$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}\times$ $\times\sum\limits_{i=0}^{k}\dfrac{1}{p^iq^{k-i}}$	$L_n(x+y)$
1.171	$\dfrac{pq}{p^mq^n+a}$	$\dfrac{x^{m-1}y^{n-1}}{(m-1)!\,(n-1)!}\,{}_1F_{m+n}\Big(1;\ 1,\ 1+$ $+\dfrac{1}{m},\ldots,2-\dfrac{1}{m},\ 1,\ 1+\dfrac{1}{n},\ldots$ $\ldots,2-\dfrac{1}{n};\ -a\dfrac{x^my^n}{m^mn^n}\Big)$
1.172	$\dfrac{pq}{p^mq^n+a^m}$	$\dfrac{x^{\frac{m}{n}-1}}{na^{m\left(1-\frac{1}{n}\right)}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(a^{\frac{m}{n}}x^{\frac{m}{n}}y\right)^k\varepsilon^{k-n+1}}{k!\,\Gamma\left[\frac{m}{n}(k+1)\right]}\times$ $\times\dfrac{1-\varepsilon^{2n(k-n+1)}}{1-\varepsilon^{2(k-n+1)}};\quad \varepsilon=e^{\frac{\pi i}{n}}$
1.173	$\dfrac{pq}{p^mq^n-a^m}$	$\dfrac{x^{\frac{m}{n}-1}}{na^{m\left(1-\frac{1}{n}\right)}}\times$ $\times\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(a^{\frac{m}{n}}x^{\frac{m}{n}}y\right)^k\left(1-\varepsilon^{n(k-n+1)}\right)}{k!\,\Gamma\left[\frac{m}{n}(k+1)\right]\left(1-\varepsilon^{k-n+1}\right)};$ $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.174	$\dfrac{pq}{p^n q^n - a^n}$	$\dfrac{x^{\frac{m}{n}-1}}{na^{n-1}} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(ax^{\frac{m}{n}} y\right)^k}{k!\,\Gamma\left[\frac{m}{n}(k+1)\right]} \times$ $\times \dfrac{1-\varepsilon^{n(k-n+1)}}{1-\varepsilon^{k-n+1}};\quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$
1.175	$\dfrac{p^m q^n}{p^m q^n - a^m}$	$\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(a^{\frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n}} y\right)^k}{k!\,\Gamma\left(\frac{m}{n}k+1\right)} \dfrac{1-\varepsilon^{nk}}{1-\varepsilon^k};\quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$
1.176	$\dfrac{p^m q^n}{p^m q^n + a^m}$ $m,\ n > 0$	$\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(\varepsilon a^{\frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n}} y\right)^k}{k!\,\Gamma\left[\frac{m}{n}k+1\right]} \cdot \dfrac{1-\varepsilon^{2nk}}{1-\varepsilon^{2k}};\quad \varepsilon = e^{\frac{\pi i}{n}}$
1.177	$\dfrac{p^{m-\alpha+1} q^{n-\beta+1}}{p^m q^n + a}$ α, β — целые положительные	$\dfrac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1}}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!} \times$ $\times\, {}_1F_{m+n}\left(1, \dfrac{\alpha}{m}, \dfrac{\alpha+1}{m}, \ldots, \dfrac{\alpha+m-1}{m},\right.$ $\left.\dfrac{\beta}{n}, \dfrac{\beta+1}{n}, \ldots, \dfrac{\beta+n-1}{n}; -\dfrac{ax^m y^n}{m^m n^n}\right)$
1.178	$\dfrac{p^{m-\alpha+1} q^{n-\beta+1}}{p^m q^n + a^m}$ α, β — целые положительные	$\dfrac{x^{\alpha-1-\frac{m}{n}(\beta-1)}}{na^{\frac{m}{n}(\beta-1)}} \times$ $\times \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(a^{\frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n}} y\right)^k \varepsilon^{k-\beta+1}}{k!\,\Gamma\left[\frac{m}{n}(k-\beta+1)+\alpha\right]} \times$ $\times \dfrac{1-\varepsilon^{2n(k-\beta+1)}}{1-\varepsilon^{2(k-\beta+1)}};\quad \varepsilon = e^{\frac{\pi i}{n}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.179	$\dfrac{p^{m-\alpha+1} q^{n-\beta+1}}{p^m q^n - a^m}$ α, β — целые положительные	$\dfrac{x^{\alpha-1-\frac{m}{n}(\beta-1)}}{na^{\frac{m}{n}(\beta-1)}} \times$ $\times \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\left(a^{\frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n}} y\right)^k}{k!\,\Gamma\left[\frac{m}{n}(k-\beta+1)+\alpha\right]} \times$ $\times \dfrac{1-\varepsilon^{n(k-\beta+1)}}{1-\varepsilon^{k-\beta+1}};\quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$
1.180	$\dfrac{pq^{m-n+1}}{(1+pq)^{m+1}}$	$\dfrac{x^{m-\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(m+1)} J_n(2\sqrt{xy})$
1.181	$\dfrac{p^2 q^2}{p^2+q^2+k^2}$ k — действительное число	$\dfrac{1}{4} Y_0\left(\lvert k\rvert \sqrt{x^2+y^2}\right)$
1.182	$\dfrac{1}{p^{\mu-k} q^{\nu-k}} \dfrac{1}{(p+q)^k}$ $\mu,\ \nu > -1$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\mu-k}}{\Gamma(\mu-k)} \cdot \dfrac{y^{\nu}}{\Gamma(\nu-1)} \times \\ \times\, {}_2F_1\left(k, k-\mu; \nu+1; \dfrac{y}{x}\right) \text{ при } y > x; \\ \dfrac{x^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \dfrac{y^{\nu-k}}{\Gamma(\nu-k)} \times \\ \times\, {}_2F_1\left(k, k-\nu; \mu+1; \dfrac{x}{y}\right) \text{ при } x > y \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
1.183	$\dfrac{q}{p^{\nu-1}(1+p^2q^2)}\times\left[pq\cos\dfrac{3\nu\pi}{4}-\sin\dfrac{3\nu\pi}{4}\right]$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}\nu}\operatorname{ber}_\nu(2\sqrt{xy})$
1.184	$\dfrac{q}{p^{\nu-1}(1+p^2q^2)}\times\left[\cos\dfrac{3\nu\pi}{4}+pq\sin\dfrac{3\nu\pi}{4}\right]$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}\nu}\operatorname{bei}_\nu(2\sqrt{xy})$
1.185	$\dfrac{1}{p^\nu}\,\dfrac{p^2q^2}{(1+p^2q^2)}$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}\nu}\left[\operatorname{ber}_\nu(2\sqrt{xy})\cos\dfrac{3\nu\pi}{4}+\operatorname{bei}_\nu(2\sqrt{xy})\sin\dfrac{3\nu\pi}{4}\right]$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.1	$\dfrac{pq\sqrt{p}}{pq+a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}\cos(2\sqrt{axy})$
2.2	$\sqrt{pq}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}$
2.3	$\dfrac{pq}{\sqrt{pq+a}}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}\cos(2\sqrt{axy})$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.4	$\dfrac{pq}{p+\alpha\sqrt{q}}$, $\lvert\arg\alpha\rvert\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, $\alpha\neq0$	$\dfrac{\alpha x}{2\sqrt{\pi}\,y^{3/2}}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{4y}}$
2.5	$\dfrac{pq}{p+\sqrt{q}+q}$	$\begin{cases}\dfrac{x}{2\sqrt{\pi}\,(y-x)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(y-x)}} & \text{при } y>x;\\ 0 & \text{при } y<x\end{cases}$
2.6	$\dfrac{pq}{p+aq+\sqrt{cq+a}}$, $a\geqslant0$, $c>0$	$\begin{cases}\dfrac{1}{c}e^{-a\frac{y-ax}{c}}\dfrac{xc^{3/2}}{2\sqrt{\pi}\,(y-ax)^{3/2}}e^{-\frac{cx^2}{4(y-ax)}} & \text{при } y>ax;\\ 0 & \text{при } y<ax\end{cases}$
2.7	$\dfrac{pq}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{q})}$	$\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\,\dfrac{1}{x+y}$
2.8	$\dfrac{pq(q-\sqrt{q^2+1})}{p-q+\sqrt{q^2+1}}$	$\dfrac{x}{y+2x}J_2(\sqrt{y^2+2xy})-\dfrac{1}{\sqrt{y^2+2xy}}J_1(\sqrt{y^2+2xy})$
2.9	$\dfrac{q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}}$
2.10	$\dfrac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}}$
2.11	$\dfrac{q\sqrt{p}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}$	$\dfrac{x}{\sqrt{\pi}\,(x+y)^{3/2}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.12	$\dfrac{p\sqrt{q}}{(p+a\sqrt{q})}$ $\lvert \arg a \rvert \leqslant \dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{e^{-\frac{a^2x^2}{4y}}}{\sqrt{\pi y}}$
2.13	$\dfrac{p\sqrt{q}}{p+q+\sqrt{q}}$	$\begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{4(y-x)}}}{\sqrt{\pi(y-x)}} & \text{при} \quad y>x; \\ 0 & \text{при} \quad y<x \end{cases}$
2.14	$\dfrac{q\sqrt{p}}{p+\sqrt{2pq}+q}$	$\dfrac{\sqrt{-y+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{x^2+y^2}}$
2.15	$\dfrac{q\sqrt{p}}{p+\sqrt{2apq}+q}$ $a \geqslant 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(2-a)}}\times$ $\times\dfrac{\sqrt{-(a-1)x-y+\sqrt{x^2+2(a-1)xy+y^2}}}{\sqrt{x^2+2(a-1)xy+y^2}}$
2.16	$\dfrac{q}{q+\sqrt{p}}$	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{x}}\right)$
2.17	$\dfrac{q}{p+\sqrt{pq}}$	$\dfrac{2}{\pi}\left[\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right]$
2.18	$\dfrac{p}{p+\sqrt{pq}}$	$\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$
2.19	$\dfrac{q}{\sqrt{pq+a^2}}$	$\dfrac{1}{\pi ay}\sin(2a\sqrt{xy})$
2.20	$\dfrac{\sqrt{pq}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}$	$\dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.21	$\dfrac{q\sqrt{p}}{(\sqrt{p}+a)(\sqrt{p}+q)}$	$e^{a^2x+ay}\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{x}+\dfrac{y}{2\sqrt{x}}\right)$
2.22	$\dfrac{p}{p-q+\sqrt{q^2+1}}$	$1-\displaystyle\int_0^y \dfrac{x}{\sqrt{\eta^2+2x\eta}}J_1(\sqrt{\eta^2+2x\eta})\,d\eta$
2.23	$\dfrac{pq}{p^2+1+(q-p)\sqrt{p^2+1}}$	$J_0(\sqrt{x^2+2xy})$
2.24	$\dfrac{p}{p-aq+\sqrt{c^2q^2+a^2}}$ $c \geqslant a$	$\begin{cases} 1-\displaystyle\int_0^{\frac{y-(c-a)x}{c}} \dfrac{ax}{\sqrt{\eta^2+2x\eta}}\times \\ \qquad \times J_1(a\sqrt{\eta^2+2x\eta})\,d\eta & \text{при } y>(c-a)x; \\ 0 & \text{при } y<(c-a)x \end{cases}$
2.25	$\dfrac{p}{p+aq+\sqrt{c^2q^2+bq+a^2}}$ $a+c \geqslant 0$	$\begin{cases} e^{-\frac{b}{2c}x}-\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{4c^2}}\,x\times \\ \quad\times\displaystyle\int_0^{\frac{y-(a+c)x}{c}} \dfrac{e^{-\frac{b}{2c}(\eta+x)}}{\sqrt{\eta^2+2x\eta}}\times \\ \quad\times J_1\left(\sqrt{\left(a^2-\dfrac{b^2}{4c^2}\right)(\eta^2+2x\eta)}\right)d\eta & \text{при } y>(a+c)x; \\ 0 & \text{при } y<(a+c)x \end{cases}$
2.26	$\dfrac{pq}{\sqrt{p^2+1}\,(p+\sqrt{q^2+1})}$	$\begin{cases} J_0(\sqrt{y^2-x^2}) & \text{при} \quad y>x; \\ 0 & \text{при} \quad y<x \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.27	$\dfrac{pq}{\sqrt{c^2q^2+a^2}}\times$ $\times\dfrac{1}{p+aq+b+\sqrt{c^2q^2+a^2}}$ $c>0,\ a+c\geqslant 0$	$\begin{cases} \dfrac{e^{-bx}}{c}J_0\left(\dfrac{a}{c}\sqrt{(y-ax)^2-c^2x^2}\right) & \text{при } y>(a+c)\,x; \\ 0 & \text{при } y<(a+c)\,x \end{cases}$
2.28	$\dfrac{pq}{\sqrt{c^2q^2+bq+a^2}}\times$ $\times\dfrac{1}{p+\sqrt{c^2q^2+bq+a^2}},$ $c>0$	$\begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{b}{2c^2}y}}{c}J_0\left(\dfrac{\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4c^2}}}{c}\sqrt{y^2-c^2x^2}\right) & \text{при } y>cx; \\ 0 & \text{при } y<cx \end{cases}$
2.29	$\dfrac{pq}{\sqrt{c^2q^2+bq+a^2}}\times$ $\times\dfrac{1}{(p-aq+d+ +\sqrt{c^2q^2+bq+a^2})}$ $c>0,\ c-a>0$	$\begin{cases} \dfrac{e^{-dx-\frac{b}{2c^2}(y+ax)}}{c}J_0\left(\dfrac{\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4c^2}}}{c}\times \times\sqrt{(y+ax)^2-c^2x^2}\right) & \text{при } y>(c-a)\,x; \\ 0 & \text{при } y<(c-a)\,x \end{cases}$
2.30	$\dfrac{q\sqrt{q}}{p+\sqrt{2pq}+q}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2.31	$\dfrac{\sqrt{pq}\,(\sqrt{p}+\sqrt{2q})}{p+\sqrt{2pq}+q}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2.32	$\dfrac{\sqrt{pq}\left(\sqrt{p}+\dfrac{\sqrt{q}}{2}\right)}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}}-\dfrac{\pi x}{2\,[\pi(x+y)]^{3/2}}$
2.33	$\dfrac{q\,(q-\sqrt{q^2+1})}{p-q+\sqrt{q^2+1}}$	$-\dfrac{x}{\sqrt{y^2+2xy}}J_1(\sqrt{y^2+2xy})$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.34	$pq\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2q^2+1}+1}{p^2q^2+1}}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}[\operatorname{ch}\sqrt{2xy}\cos\sqrt{2xy}+ +\operatorname{sh}\sqrt{2xy}\cdot\sin\sqrt{2xy}]$
2.35	$pq\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2q^2-1}+i}{p^2q^2-1}}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}\operatorname{ch}2\sqrt{xy}$
2.36	$pq\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2q^2-1}-i}{p^2q^2-1}}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}\cos 2\sqrt{xy}$
2.37	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2q^2+1}+pq}{1+\dfrac{1}{p^2q^2}}}$	$\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{2}{xy}}\operatorname{ch}\sqrt{2xy}\cdot\cos\sqrt{2xy}$
2.38	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2q^2+1}-pq}{1+\dfrac{1}{p^2q^2}}}$	$\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{2}{xy}}\operatorname{sh}\sqrt{2xy}\cdot\sin\sqrt{2xy}$
2.39	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2q^2-1}+pq}{1-\dfrac{1}{p^2q^2}}}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{2xy}}[\operatorname{ch}2\sqrt{xy}+\cos 2\sqrt{xy}]$
2.40	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2q^2-1}-pq}{1-\dfrac{1}{p^2q^2}}}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{2xy}}[\operatorname{ch}2\sqrt{xy}-\cos 2\sqrt{xy}]$
2.41	$\dfrac{q\sqrt{p}}{pq+a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a\pi y}}\sin 2\sqrt{axy}$
2.42	$\dfrac{1}{\sqrt{pq}}\cdot\dfrac{q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$	$\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}[\sqrt{x+y}-\sqrt{y}]$
2.43	$\dfrac{\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}$	$\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.44	$\frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{q}{p+\sqrt{2pq}+q}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{y+\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{2y}\right]$
2.45	$\frac{\sqrt{q}}{p+\sqrt{2pq}+q}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{y}-\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\right]$
2.46	$\frac{p}{(p+q)(q+a\sqrt{q})}$ $\operatorname{Re} a>0$	$\begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{\pi}}\sqrt{y-x}-\frac{1}{a}\int\limits_x^y \chi\,[a(\eta-x),\ y-\eta]\,d\eta & \text{при } y>x; \\ 0 & \text{при } y<x \end{cases}$
2.47	$\frac{p\sqrt{q}}{(p+q)(q+a\sqrt{q})}$ $\operatorname{Re} a>0$	$\begin{cases} \int\limits_x^y \chi\,[a(\eta-x),\ y-\eta]\,d\eta & \text{при } y>x; \\ 0 & \text{при } y<x \end{cases}$
2.48	$\frac{q}{\sqrt{p}\,(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{x+2y}{\sqrt{x+y}}-2\sqrt{y}\right]$
2.49	$\frac{\sqrt{q}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}$	$2\sqrt{\frac{y}{\pi}}\left[1-\sqrt{\frac{y}{x+y}}\right]$
2.50	$\frac{\sqrt{pq}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^3}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{xy}{(x+y)^{3/2}}$
2.51	$\frac{pq}{(pq+a)^{3/2}}$	$\frac{2}{\pi\sqrt{a}}\sin(2\sqrt{axy})$
2.52	$\frac{q}{p(q+\sqrt{p})}$	$xy^2\chi(y, x)+\left(x+\frac{y^2}{2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{x}}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.53	$\frac{1}{(p+a\sqrt{p})\,q}$ $\operatorname{Re} a>0$	$\frac{2}{a\sqrt{\pi}}\,y\sqrt{x}-\frac{1}{a}\,y\int\limits_0^x \chi(a\xi, x-\xi)\,d\xi$
2.54	$\frac{1}{\sqrt{(p+q)^2+1}}$	$\begin{cases} \int\limits_0^x J_0(\xi)\,d\xi & \text{при } y>x; \\ \int\limits_0^y J_0(\eta)\,d\eta & \text{при } y<x \end{cases}$
2.55	$\frac{p}{(p+q)\sqrt{(p+q)^2+1}}$	$\begin{cases} \int\limits_0^x J_0(\xi)\,d\xi & \text{при } y>x; \\ 0 & \text{при } y<x \end{cases}$
2.56	$\frac{pq(p+q)}{\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\times(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{q^2+1})}$	$J_0(x+y)$
2.57	$\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot\frac{\sqrt{p}+\sqrt{2q}}{p+\sqrt{2pq}+q}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}$
2.58	$\sqrt{\frac{q}{p}}\cdot\frac{\sqrt{p}+\sqrt{2q}}{p+\sqrt{2pq}+q}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}-\sqrt{y}\right]$
2.59	$\sqrt{\frac{q}{p}}\,\frac{\sqrt{p}+\frac{\sqrt{q}}{2}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}$	$\frac{x}{\sqrt{\pi(x+y)}}$
2.60	$\frac{pq(pq-p\sqrt{q^2+1}-1)}{(p+q)\sqrt{q^2+1}\times(p+\sqrt{q^2+1})}$	$\begin{cases} \frac{-y}{\sqrt{y^2-x^2}}J_1(\sqrt{y^2-x^2}) & \text{при } y>x; \\ 0 & \text{при } y<x \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.61	$\dfrac{1}{(p+2\sqrt{pq}+q+1)^{3/2}}$	$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}e^{\frac{xy}{x+y}}$
2.62	$\dfrac{pq(p+q)}{\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\times(p\sqrt{q^2+1}+q\sqrt{p^2+1})}$	$J_1(x+y)$
2.63	$\dfrac{1}{\sqrt{pq}}\left[\sqrt{2q}+\dfrac{p\sqrt{p}}{p+\sqrt{2pq}+q}\right]$	$\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}$
2.64	$\dfrac{pq^2(p+2\sqrt{q^2+1})}{(q^2+1)^{3/2}(p+\sqrt{q^2+1})^2}$	$\begin{cases} yJ_0(\sqrt{y^2-x^2}) & \text{при } y>x; \\ 0 & \text{при } y<x \end{cases}$
2.65	$\dfrac{pq^{\nu+1}}{p+\sqrt{q}}$ $\operatorname{Re}\nu<\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{8y}}}{(2y)^{\nu+1}}D_{2\nu+1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2y}}\right)$
2.66	$\dfrac{q}{p^{\nu-1}(p+q)}$ $\operatorname{Re}\nu>0$	$0 \quad \text{при } y>x;$ $\dfrac{(x-y)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \quad \text{при } y<x$
2.67	$\dfrac{q}{p^{\nu-1}(pq+a)}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{\frac{\nu}{2}}J_\nu(2\sqrt{axy})$
2.68	$\dfrac{q}{p^{\nu-1}(p^2q^2+a^2)}$ $\operatorname{Re}\nu>-2$	$\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left[\cos\dfrac{3\nu\pi}{4}\operatorname{bei}_\nu(2\sqrt{axy})-\sin\dfrac{3\nu\pi}{4}\operatorname{ber}_\nu(2\sqrt{axy})\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.69	$\dfrac{q}{p^{\nu-1}(p^2q^2-a^2)}$ $\operatorname{Re}\nu>-2$	$\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{\frac{\nu}{2}}[I_\nu(2\sqrt{axy})-J_\nu(2\sqrt{axy})]$
2.70	$\dfrac{p^2q^2}{p^\nu(p^2q^2+a^2)}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left[\cos\dfrac{3\nu\pi}{4}\operatorname{ber}_\nu(2\sqrt{axy})+\sin\dfrac{3\nu\pi}{4}\operatorname{bei}_\nu(2\sqrt{axy})\right]$
2.71	$\dfrac{p^2q^2}{p^\nu(p^2q^2-a^2)}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{\frac{\nu}{2}}[J_\nu(2\sqrt{axy})+I_\nu(2\sqrt{axy})]$
2.72	$\dfrac{p^2q^2\sin\frac{3\nu\pi}{4}+apq\cos\frac{3\nu\pi}{4}}{p^\nu(p^2q^2+a^2)}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{\frac{\nu}{2}}\operatorname{bei}_\nu(2\sqrt{axy})$
2.73	$\dfrac{p^2q^2\cos\frac{3\nu\pi}{4}-apq\sin\frac{3\nu\pi}{4}}{p^\nu(p^2q^2+a^2)}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{\frac{\nu}{2}}\operatorname{ber}_\nu(2\sqrt{axy})$
2.74	$\dfrac{pq}{(pq+a)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu>0$	$\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\dfrac{xy}{a}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}(2\sqrt{axy})$
2.75	$\dfrac{pq}{[(p+1)(q+1)+apq]^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu>0,\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\dfrac{e^{-\frac{x+y}{a+1}}}{a+1}\left(\dfrac{xy}{a}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}\left(\dfrac{2\sqrt{axy}}{a+1}\right)$
2.76	$\dfrac{p\sqrt{q}}{\sqrt{pq+aq+1}}$	$\dfrac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}}J_0(2\sqrt{xy})$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.77	$\dfrac{\pi\sqrt{pq}}{2(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}$	$\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$
2.78	$\dfrac{pq\sqrt{q}}{(pq+1)\sqrt{pq+aq+1}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{erf}(\sqrt{ax})\,J_0(2\sqrt{xy})$
2.79	$\dfrac{pq}{[ap^2+2bpq+cq^2+2dp+2eq+f]^\nu}$ $b>0,\ a,\ c\geqslant 0$ $b^2-ac>0,\ \operatorname{Re}\nu>0$	$\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\dfrac{1}{2^\nu D}e^{-\frac{be-cd}{D^2}x-\frac{bd-ae}{D^2}y}\times \\ \times\left[\dfrac{cx^2-2bxy+ay^2}{2bde+acf-b^2f-cd^2-ae^2}\right]^{\frac{\nu-1}{2}}\times \\ \times J_{\nu-1}\left[\dfrac{1}{D^2}\sqrt{(cx^2-2bxy+ay^2)\times(2bde+acf-b^2f-cd^2-ae^2)}\right] \\ \text{при } (b-D)x<ay<(b+D)x, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$ $D=\sqrt{b^2-ac}$
2.80	$\dfrac{p}{(p+q)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu>0$	$\begin{cases} \dfrac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{при } y>x, \\ 0 & \text{при } y<x \end{cases}$
2.81	$\dfrac{1}{(p+q)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\begin{cases} \dfrac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} & \text{при } y>x, \\ \dfrac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} & \text{при } y<x \end{cases}$
2.82	$\dfrac{1}{(p+q+a)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu>0$	$\begin{cases} \displaystyle\int_0^x e^{-a\xi}\frac{\xi^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\,d\xi & \text{при } y>x, \\ \displaystyle\int_0^y e^{-a\eta}\frac{\eta^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\,d\eta & \text{при } y<x \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.83	$\dfrac{q}{p^{n-1}(pq+a)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu>0$	$\dfrac{y^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\left(\dfrac{x}{ay}\right)^{\frac{\nu+n-1}{2}}J_{\nu+n-1}(2\sqrt{axy})$
2.84	$\dfrac{q}{p^{\nu-1}(pq+1)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu>0$	$\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\dfrac{x^\nu}{\sqrt{xy}}J_{2\nu-1}(2\sqrt{xy})$
2.85	$\dfrac{q}{p^{\nu-1}(pq+1)^{\nu+1}}$ $\operatorname{Re}\nu>-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}J_{2\nu}(2\sqrt{xy})$
2.86	$\dfrac{pq}{p^{\nu+n}(pq+1)^{\nu+1}}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$ при $n=1, 2, 3, \ldots,$ $\operatorname{Re}\nu>-\dfrac{1}{2}$ при $n=0$	$\dfrac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{n}{2}}J_{2\nu+n}(2\sqrt{xy})$
2.87	$\dfrac{1}{p^{\mu-1}q^{\nu-1}}$ $\operatorname{Re}\mu,\ \nu>0$	$\dfrac{x^{\mu-1}y^{\nu-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}$
2.88	$\dfrac{pq}{(p-a)^\mu(q-b)^\nu}$ $\operatorname{Re}\mu,\ \nu>0$	$e^{ax+by}\dfrac{x^{\mu-1}y^{\nu-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}$
2.89	$\left[\dfrac{1}{p^\nu}-\dfrac{1}{(p+q)^\nu}+\dfrac{1}{q^\nu}\right]$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$\begin{cases} \dfrac{y^\nu}{\Gamma(\nu+1)} & \text{при } y>x, \\ \dfrac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} & \text{при } y<x \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.90	$\dfrac{p^\nu + q^\nu}{(pq)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\dfrac{x^\nu + y^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$
2.91	$\dfrac{p^\nu q}{(pq+a)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\dfrac{y^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} J_0(2\sqrt{axy})$
2.92	$\dfrac{p^\nu - q^\nu}{p^{\nu-1}q^{\nu-1}(p-q)}$ $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\dfrac{(x+y)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}$
2.93	$pq\,\dfrac{(pq+1)^\nu + (pq-1)^\nu}{(p^2q^2-1)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\dfrac{(xy)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\nu)}\left[J_{\nu-1}(2\sqrt{xy}) + I_{\nu-1}(2\sqrt{xy})\right]$
2.94	$pq\,\dfrac{(pq+1)^\nu - (pq-1)^\nu}{(p^2q^2-1)^\nu}$ $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\dfrac{(xy)^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma(\nu)}\left[I_{\nu-1}(2\sqrt{xy}) - J_{\nu-1}(2\sqrt{xy})\right]$
2.95	$pq\,\dfrac{(p+\sqrt{p^2-q})^\nu - (p-\sqrt{p^2-q})^\nu}{\sqrt{p^2-q}}$ $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert < 1$	$\dfrac{\sin\nu\pi}{2^\nu\pi}\cdot\dfrac{x^\nu e^{-\frac{x^2}{4y}}}{y^{\nu+1}}$
2.96	$pq\,\dfrac{(p+\sqrt{p^2-q^2})^\nu - (p-\sqrt{p^2-q^2})^\nu}{q^\nu\sqrt{p^2-q^2}}$ $\lvert\operatorname{Re}\nu\rvert < 1$	$\begin{cases} \dfrac{\sin\nu\pi}{\pi}\times \\ \times\dfrac{(y+\sqrt{y^2-x^2})^\nu + (y-\sqrt{y^2-x^2})^\nu}{x^\nu\sqrt{y^2-x^2}} & \text{при } y > x, \\ 0 & \text{при } y < x \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.97	$\dfrac{pq[1+(q-1)p]^n}{p^{\nu-a}(pq+1)^{n+a+1}}$ $\operatorname{Re}\nu,\ a > -1$	$\dfrac{n!\,y^a}{\Gamma(n+a+1)}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xy})\, L_n^{(a)}(y)$
2.98	$\dfrac{pq}{(p^2+q^2+k^2)}\times\left[\dfrac{p}{\sqrt{p^2+k^2}}+\dfrac{q}{\sqrt{p^2+k^2}}\right]$	$J_0(k\sqrt{x^2+y^2})$
2.99	$\dfrac{\sqrt{pq}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^{\nu+1}}$	$\dfrac{(xy)^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)(x+y)^{\frac{\nu+1}{2}}}$
2.100	$\dfrac{(p-1)^n q^n - (q-1)^n p^n}{(q-p)p^{n-1}q^{n-1}}$	$L_n'(x+y)$
2.101	$\left(1-\dfrac{1}{2p}-\dfrac{1}{2q}\right)^m$	$L_m\left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}\right)$ *)
2.102	$\dfrac{1}{\sqrt{pq}}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1\right)^m$	$\dfrac{m!}{\pi(2m+1)!} H_{2m+1}(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ *)
2.103	$\sqrt{pq}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1\right)^m$	$\dfrac{m!}{\pi(2m)!}\,\dfrac{H_{2m}(\sqrt{x}, \sqrt{y})}{\sqrt{xy}}$ *)
2.104	$\dfrac{1}{p^\alpha q^\beta}\left(1-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)^m$	$\dfrac{(m!)^2 x^\alpha y^\beta L_m^{\alpha,\beta}(x, y)}{\Gamma(m+\alpha+1)\Gamma(m+\beta+1)}$ *)
2.105	$\dfrac{\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{\sqrt{1+(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}}$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}\, e^{-\frac{xy}{x+y}}$

*) Здесь $L_m(x, y)$, $H_m(x, y)$, $L_m^{\alpha,\beta}(x, y)$ введены по аналогии с общепринятыми обозначениями соответствующих многочленов одного переменного.

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.106	$\dfrac{\sqrt{pq}}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^{\nu+1}}$	$\dfrac{(xy)^{\frac{\nu}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)(x+y)^{\frac{\nu+1}{2}}}$
2.107	$\dfrac{\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^4+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}}\sin\dfrac{xy}{x+y}$
2.108	$\dfrac{\sqrt{pq}(\sqrt{p}+\sqrt{q})^3}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^4+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(x+y)}}\cos\dfrac{xy}{x+y}$
2.109	$\dfrac{\sqrt{pq}\,(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{[(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2+1]^{3/2}}$	$\dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\sqrt{xy}}{(x+y)}\,e^{-\frac{xy}{x+y}}$
2.110	$\dfrac{pq\,[\sqrt{p^2q^2+1}-pq]}{\sqrt{p^2q^2+1}}$	$J_0(2\sqrt{xy})\,I_1(2\sqrt{xy})$
2.111	$\sqrt{\dfrac{pq}{pq+1}}$	$J_0^2(\sqrt{xy})$
2.112	$\dfrac{\pi pq}{\sqrt{pq+1}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}$
2.113	$\Gamma(\nu+1)\cdot\dfrac{p^{\mu(\nu+1)-\lambda}\cdot q}{(1+p^{\mu}q)^{\nu+1}}$ $\operatorname{Re}\nu>-1$	$x^{\lambda}y^{\nu}J_{\lambda}^{\mu}(x^{\mu}y)=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^r x^{\lambda+\mu r}y^{\nu+r}}{r!\,\Gamma(1+\lambda+\mu r)}$
2.114	$\dfrac{\pi\Gamma(2n+2)}{\Gamma(n+1)}\times$ $\times\dfrac{pq^{n+1}}{(4pq+1)^{n+\frac{3}{2}}}$	$x^n\sin\sqrt{xy}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
2.115	$\dfrac{2\pi\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)}\times$ $\times\dfrac{pq^{n+1}}{(4pq+1)^{n+\frac{1}{2}}}$	$\dfrac{x^n\cos\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}$
2.116	$\dfrac{p\sqrt{q}}{\sqrt{p+\sqrt{q}}}$	$\dfrac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{\pi\sqrt{xy}}$
2.117	$\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\alpha}\dfrac{\sqrt{pq}}{\sqrt{pq+1}}$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha}J_{\alpha}(\sqrt{xy})\,J_{-\alpha}(\sqrt{xy})$
2.118	$\dfrac{p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}-\alpha}}{(pq+1)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\,y^{\alpha}J_{\alpha}^2(\sqrt{xy})$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
3.1	$p\left(1-e^{-\frac{1}{p+q}}\right)$	$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}J_1(2\sqrt{x}) & \text{при } y>x,\\ 0 & \text{при } y<x\end{cases}$
3.2	$\dfrac{pq\left(e^{-\frac{1}{p}}-e^{-\frac{1}{q}}\right)}{p-q}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}J_1(2\sqrt{x+y})$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
3.3	$e^{-\frac{1}{p+q}}$	$\begin{cases} J_0(2\sqrt{x}) & \text{при } y > x, \\ J_0(2\sqrt{y}) & \text{при } y < x \end{cases}$
3.4	$e^{\frac{1}{pq}}$	$J_{0,0}\left(-3\sqrt[3]{xy}\right)$
3.5	$e^{-\frac{1}{pq}}$	$J_{0,0}\left(3\sqrt[3]{xy}\right)$
3.6	$\dfrac{q(e^{-p}-e^{-q})}{p-q}$	$\begin{cases} -1 & \text{при } 1-x<y<1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.7	$\dfrac{q\left(e^{-\frac{1}{p}}-e^{-\frac{1}{q}}\right)}{p-q}$	$J_0(2\sqrt{y})-J_0(2\sqrt{x+y})$
3.8	$\dfrac{pq}{(p-a)}\,\dfrac{(e^{-(p-a)}-e^{-(q-b)})}{(p-a)-(q-b)}$	$\begin{cases} -e^{ax+by} & \text{при } 1-x<y<1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.9	$-\dfrac{e^{-p}-e^{-q}}{p-q}$	$\begin{cases} 1 & \text{при } y>1 \text{ и } x>1, \\ x & \text{при } y>1 \text{ и } x<1, \\ y & \text{при } y<1 \text{ и } x>1, \\ x+y-1 & \text{при } 1-x<y<1 \text{ и } x<1, \\ 0 & \text{при } y<1-x \end{cases}$
3.10	$\dfrac{qe^{-ap}-pe^{-aq}}{p-q}$ $(a \geqslant 0)$	$\begin{cases} -1 & \text{при } y>a-x, \\ 0 & \text{при } y<a-x \end{cases}$
3.11	$\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{e^{-p}-e^{-q}}{p-q}$	$\begin{cases} 1-x-y & \text{при } 1-x<y<1, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.12	$\dfrac{pe^{-\frac{1}{q}}-qe^{-\frac{1}{p}}}{p-q}$	$J_0(2\sqrt{x+y})$
3.13	$\dfrac{q\left[e^{-n\pi p}-(-1)^n e^{-n\pi q}\right]}{(p-q)^2+1}$	$\begin{cases} \sin y & \text{при } n\pi-x<y<n\pi, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
3.14	$\dfrac{q(q-p)\left[e^{-n\pi p}-(-1)^n e^{-n\pi q}\right]}{(p-q)^2+1}$	$\begin{cases} \cos y & \text{при } n\pi-x<y<n\pi, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.15	$\dfrac{pq(q-2p)}{p^2+1}\times \times\dfrac{\left[(-1)^n e^{-n\pi p}-e^{-n\pi q}\right]}{(p-q)^2+1}$	$\begin{cases} \sin x & \text{при } n\pi-x<y<n\pi, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.16	$\dfrac{pq(1+pq-p^2)}{p^2+1}\times \times\dfrac{\left[(-1)^n e^{-n\pi p}-e^{-n\pi q}\right]}{(p-q)^2+1}$	$\begin{cases} \cos x & \text{гри } n\pi-x<y<n\pi, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.17	$\dfrac{q\left[e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi p}-(-1)^n(q-p)\,e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi q}\right]}{(p-q)^2+1}$	$\begin{cases} \sin y & \text{при } \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-x< <y<\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.18	$\dfrac{q\left[(q-p)\,e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi p}+(-1)^n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi q}\right]}{(p-q)^2+1}$	$\begin{cases} \cos y & \text{при } \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-x< <y<\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.19	$\dfrac{pq\left[(-1)^n(1+pq-p^2)\,e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi p}-(q-2p)\,e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi q}\right]}{(p^2+1)\left[(p-q)^2+1\right]}$	$\begin{cases} \sin x & \text{при } \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-x< <y<\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3.20	$\dfrac{-pq\left[(-1)^n(2\quad p)\,e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi p}+(1+pq-p^2)\,e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi q}\right]}{(p^2+1)\left[(p-q)^2+1\right]}$	$\begin{cases} \cos x & \text{при } \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-x< <y<\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
3.21	$\sqrt{pq}\,e^{-\sqrt{pq}}$	$\begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{4xy-1}} & \text{при} \quad y > \dfrac{1}{4x}, \\ 0 & \text{при} \quad y < \dfrac{1}{4x} \end{cases}$
3.22	$\dfrac{q}{\sqrt{p}}\,e^{-\sqrt{pq}}$	$\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}y^{3/2}} & \text{при} \quad y > \dfrac{1}{4x}, \\ 0 & \text{при} \quad y < \dfrac{1}{4x} \end{cases}$
3.23	$\sqrt{p}\,e^{-\sqrt{pq}}$	$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} & \text{при} \quad y > \dfrac{1}{4x}, \\ 0 & \text{при} \quad y < \dfrac{1}{4x} \end{cases}$
3.24	$\dfrac{qe^{-\sqrt{pq}}}{p^{\nu-1}}$ $\operatorname{Re}\nu > \dfrac{1}{2}$	$\begin{cases} \dfrac{\left(x-\dfrac{1}{4y}\right)^{\nu-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu-\dfrac{1}{2}\right)y^{3/2}} & \text{при} \quad y > \dfrac{1}{4x}, \\ 0 & \text{при} \quad y < \dfrac{1}{4x} \end{cases}$
3.25	$\dfrac{\sqrt{q}\,e^{-\sqrt{pq}}}{p^{\nu-1}}$ $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\nu)\sqrt{\pi y}}\left(x-\dfrac{1}{4y}\right)^{\nu-1} & \text{при} \quad y > \dfrac{1}{4x}, \\ 0 & \text{при} \quad y < \dfrac{1}{4x} \end{cases}$
3.26	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\,\dfrac{e^{-\frac{1}{\sqrt{pq}}}}{(pq)^{\nu-1}}$ $\operatorname{Re}\nu > 0$	$\dfrac{(4xy)^{\frac{2\nu-1}{4}}}{\sqrt{\pi y}}\,J_{2\nu-1}\left[2(4xy)^{\frac{1}{4}}\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
3.27	$\dfrac{pe^{-p}}{p+\ln q}$	$\begin{cases} \dfrac{y^{x-1}}{\Gamma(x)} & \text{при} \quad x > 1, \\ 0 & \text{при} \quad x < 1 \end{cases}$
3.28	$\dfrac{p}{q^n}\cdot\dfrac{q-e^{-p}}{p+\ln q}$ $n > 0$	$\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x > 1, \\ \dfrac{y^{x+n-1}}{\Gamma(x+n)} & \text{при} \quad x < 1 \end{cases}$
3.29	$\dfrac{1}{(pq)^{n-1}}\,e^{-\frac{1}{pq}}$	$(xy)^{\frac{n-1}{3}}\,J_{n-1,\,n-1}\left(3\sqrt[3]{xy}\right)$
3.30	$-\dfrac{1}{(pq)^n}\ln(pq)\,e^{-\frac{1}{pq}}$	$\dfrac{1}{3}(xy)^{\frac{n}{3}}\ln(xy)\,J_{n,\,n}\left(3\sqrt[3]{xy}\right) + (xy)^{\frac{n}{3}}\dfrac{d}{dn}J_{n,n}\left(3\sqrt[3]{xy}\right)$
3.31	$\dfrac{e^{-\frac{1}{pq}}}{p^m q^n}$	$x^{\frac{2m-n}{3}}y^{\frac{2n-m}{3}}J_{m,\,n}\left(3\sqrt[3]{xy}\right)$
3.32	$e^{\frac{1}{p^2q}}$	$\operatorname{ber}^2\left(2\sqrt{x\sqrt{y}}\right)+\operatorname{bei}^2\left(2\sqrt{x\sqrt{y}}\right)$
3.33	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{1}{4p^2q}}$	$\operatorname{bei}\left(2\sqrt{x\sqrt{2y}}\right)$
3.34	$\sqrt{\pi q}\,e^{-\frac{1}{4p^2q}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ber}\left(2\sqrt{x\sqrt{2y}}\right)$
3.35	$\pi\sqrt{2pq}\,e^{-2\sqrt{q\sqrt{p}}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\,e^{-\frac{1}{xy^2}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
3.36	$\pi 2^{\frac{1}{4}-\mu} p^{\frac{1}{4}-\mu} \times$ $\times q^{\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{q\sqrt{p}}}$	$x^{\mu-\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2xy^2}} D_{-2\mu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{xy^2}}\right)$
3.37	$\frac{(m+1)\,pq-1}{p^{m+2}q^{n+1}} e^{-\frac{1}{pq}}$	$x^{\frac{2m-n}{3}+1} y^{\frac{2n-m}{3}} J_{m,\,n}\left(3\sqrt[3]{xy}\right)$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
4.1	$q\ln\left(1+\frac{p}{q}\right)$	$\begin{cases} \frac{1}{y} & \text{при } y > x, \\ 0 & \text{при } y < x \end{cases}$
4.2	$p\sqrt{q}\ln\frac{p+\sqrt{q}-a}{p+\sqrt{q}}$	$\frac{e^{-\frac{x^2}{4y}}}{x\sqrt{\pi y}}\left(1-e^{ax}\right)$
4.3	$\frac{pq}{p-q}\ln\frac{q}{p}$	$\frac{1}{x+y}$
4.4	$\ln(p+q)$	$\begin{cases} \Gamma'(1)-\ln x & \text{при } y > x \\ \Gamma'(1)-\ln y & \text{при } y < x \end{cases}$
4.5	$\ln(p+q+1)$	$-\mathrm{Ei}(-x)$ при $y > x$ $-\mathrm{Ei}(-y)$ при $y < x$
4.6	$\ln pq$	$2\Gamma'(1)-\ln(xy)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
4.7	$\ln(pq+a)$	$2Ji_0\left(2\sqrt{axy}\right)+\ln a$
4.8	$\ln[(p+1)(q+1)]$	$-\mathrm{Ei}(-x)-\mathrm{Ei}(-y)$
4.9	$\ln\frac{(p+1)(q+1)}{p+q+1}$	$-\mathrm{Ei}(-y)$ при $y > x$, $-\mathrm{Ei}(-x)$ при $y < x$
4.10	$\ln\frac{(p+1)(q+1)}{(p+q+1)^2}$	$\begin{cases} \mathrm{Ei}(-x)-\mathrm{Ei}(-y) & \text{при } y > x, \\ \mathrm{Ei}(-y)-\mathrm{Ei}(-x) & \text{при } y < x \end{cases}$
4.11	$\frac{p\ln(p+q)}{p+q}$	$\begin{cases} \Gamma'(1)-\ln x & \text{при } y > x, \\ 0 & \text{при } y < x \end{cases}$
4.12	$\frac{q\ln p-p\ln q}{p-q}$	$\ln(x+y)-\Gamma'(1)$
4.13	$\frac{p^2\ln\frac{p}{q}+\frac{\pi}{2}pq}{p^2+q^2}$	$\ln\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$
4.14	$\frac{pq\ln\frac{q}{p}+\frac{\pi}{2}p^2}{p^2+q^2}$	$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
4.15	$\Gamma'(1)-\ln p+$ $+\frac{p^2\ln\frac{p}{q}+pq\,\frac{\pi}{2}}{p^2+q^2}$	$\ln\sqrt{x^2+y^2}$
4.16	$\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}\times$ $\times\ln\frac{p+q+\sqrt{p^2+q^2}}{p+q-\sqrt{p^2+q^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
4.17	$\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2-a^2}} \times \ln \frac{p+q+a+\sqrt{p^2+q^2-a^2}}{p+q+a-\sqrt{p^2+q^2-a^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}$
4.18	$\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2-a^2}} \times \ln \frac{pq-a\sqrt{p^2+q^2-a^2}}{pq+a\sqrt{p^2+q^2-a^2}}$	$\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sh}\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)$
4.19	$\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2-a^2}} \times \ln \left\{ \frac{p^2+pq+q^2+(p+q) \times \sqrt{p^2+q^2-a^2}-a^2}{p^2+pq+q^2-(p+q) \times \sqrt{p^2+q^2-a^2}-a^2} \right\}$	$\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{ch}\left(a\sqrt{x^2+y^2}\right)$
4.20	$\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \ln \frac{p+q+\sqrt{p^2+q^2}}{p+q-\sqrt{p^2+q^2}}$	$\operatorname{ash} \frac{x}{y}$
4.21	$\frac{q}{\ln pq}$	$x \int\limits_0^\infty \frac{(xy)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)\,\Gamma(\xi+1)}\, d\xi$
4.22	$\frac{q}{p^{n-1} \ln pq}$	$x^n \int\limits_0^\infty \frac{(xy)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)\,\Gamma(\xi+n)}\, d\xi$
4.23	$\frac{p}{p+\ln q}$	$\frac{y^x}{\Gamma(x+1)}$
4.24	$\frac{p}{q(p+\ln q)}$	$\frac{y^{x+1}}{\Gamma(x+2)}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
4.25	$\frac{p}{q^n(p+\ln q)}$	$\frac{y^{x+n}}{\Gamma(x+n+1)}$
4.26	$\frac{pq}{(p+\ln q)^2}$	$\frac{xy^{x-1}}{\Gamma(x)}$
4.27	$\frac{p}{(p+\ln q)^2}$	$\frac{y^x}{\Gamma(x)}$
4.28	$\frac{p}{(p+\ln q)^{n+1}}$	$\frac{x^n y^x}{n!\,\Gamma(x+1)}$
4.29	$\frac{p}{q^n(p+\ln q)^{m+1}}$	$\frac{x^m y^{x+n}}{m!\,\Gamma(x+n+1)}$

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
5.1	$\frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p+q}$	$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}$
5.2	$\frac{pq}{\sqrt{p^2-q^2}} \operatorname{sh}\left(\nu \operatorname{arch} \frac{p}{q}\right)$ $\lvert \operatorname{Re} \nu \rvert < 1$	$\begin{cases} \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \frac{\operatorname{ch}\left[\nu \operatorname{arch} \frac{y}{x}\right]}{\sqrt{y^2-x^2}} & \text{при } y > x, \\ 0 & \text{при } y < x \end{cases}$
5.3	$\frac{pq^{\frac{\nu}{2}+1}}{\sqrt{p^2-q}} \operatorname{sh}\left(\nu \operatorname{arch} \frac{p}{\sqrt{q}}\right)$ $\lvert \operatorname{Re} \nu \rvert < 1$	$\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \frac{x^\nu e^{-\frac{x^2}{4y}}}{(2y)^{\nu+1}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
5.4	$\dfrac{pqe^{-(p+q)}}{(p-a)(p-q-a)}\times$ $\times \operatorname{sh}(p-q-a)$	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{a(x-1)} & \text{при } 2-x<y<2, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
5.5	$\dfrac{qe^{-(p+q)}}{p-q+a} \operatorname{sh}(p-q+a)$	$\begin{cases} \frac{1}{2} e^{a(y-1)} & \text{при } 2-x<y<2, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
5.6	$\sqrt{q} e^{-\sqrt{pq}} \operatorname{sh} \sqrt{pq}$	$\begin{cases} 0 & \text{при } y>\frac{1}{x}, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} & \text{при } y<\frac{1}{x} \end{cases}$
5.7	$\dfrac{p\sqrt{q}}{p^2-q}\left[\dfrac{p}{\operatorname{sh}\sqrt{q}}-\dfrac{\sqrt{q}}{\operatorname{sh} p}\right]$	$\vartheta_0\left(\frac{x}{2}, y\right)=\vartheta_3\left(\frac{x+1}{2}, y\right)$
5.8	$\dfrac{p^2q^2}{p+\operatorname{arsh} q}$ $\operatorname{Re}(p+\operatorname{arsh} q)>0$	$\begin{cases} \frac{x}{y} J_x(y) & \text{при } x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
5.9	$\dfrac{(p^2\sqrt{q} \operatorname{cth} \sqrt{q}-pq \operatorname{cth} p)\, pq}{p^2-q}$	$\begin{cases} Q_3\left(\frac{1}{2} x, \pi y\right) & \text{при } x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
6.1	$\sqrt{pq}\, I_0\left(2\sqrt[4]{pq}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi xy}} I_0\left(\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}\right)$
6.2	$\dfrac{\pi}{2} pq\,[H_0(\sqrt{pq})-Y_0(\sqrt{pq})]$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}\, \dfrac{1}{1+4xy}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
6.3	$\dfrac{\pi}{2} q\left[H_1\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}\right)-Y_1\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}\right)\right]-q$	$\dfrac{1}{\pi y} K_1\left(\dfrac{x}{y}\right)$
6.4	$\sqrt{pq}\, J_0\left(\dfrac{1}{2\sqrt{pq}}\right)$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}} \operatorname{ber}(2\sqrt[4]{xy})$
6.5	$\sqrt{\dfrac{q}{p}}\, K_1\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}\right)$	$J_0\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)$
6.6	$\dfrac{\pi}{2}\dfrac{q}{p}\left[H_1\left(\dfrac{q}{p}\right)-Y_1\left(\dfrac{q}{p}\right)-\dfrac{2}{\pi}\right]$	$J_1\left(\dfrac{x}{y}\right)$
6.7	$\dfrac{\pi}{2} pq\,[H_0(pq)-Y_0(pq)]$	$J_0(xy)$
6.8	$\dfrac{p^{\frac{\nu}{2}+1}}{q^{\frac{\nu}{2}-1}} K_\nu(\sqrt{pq})$	$\begin{cases} \frac{1}{(2x)^{\nu+1}} & \text{при } y>\frac{1}{4x}, \\ 0 & \text{при } y<\frac{1}{4x} \end{cases}$
6.9	$4p^{k+\frac{1}{2}} q \cdot K_{2m}\left(\sqrt{2q\sqrt{p}\, e^{\frac{1}{4}\pi i}}\right)\times$ $\times K_{2m}\left(\sqrt{2q\sqrt{p}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i}}\right)$	$x^{-k} e^{-\frac{1}{2xy^2}} W_{k, m}\left(\dfrac{1}{xy^2}\right)$
6.10	$4\sqrt{\pi p} \cdot q K_{2m}\left(\sqrt{2q\sqrt{p}\, e^{\frac{1}{4}\pi i}}\right)\times$ $\times K_{2m}\left(\sqrt{2q\sqrt{p}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i}}\right)$	$\dfrac{e^{-\frac{1}{2xy^2}} K_m\left(\frac{1}{2xy^2}\right)}{y\sqrt{x}}$
6.11	$4p^{m+1} q K_{2m}\left(\sqrt{2q\sqrt{p}\, e^{\frac{1}{4}\pi i}}\right)\times$ $\times K_{2m}\left(\sqrt{2q\sqrt{p}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i}}\right)$	$\dfrac{1}{x^{2m+1} y^{2m+1}} \cdot e^{-\frac{1}{xy^2}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
6.12	$4pqK_0\left(\sqrt{2q\sqrt{p}e^{\frac{1}{4}\pi i}}\right)\times K_0\left(\sqrt{2q\sqrt{p}e^{-\frac{1}{4}\pi i}}\right)$	$\frac{1}{xy}e^{-\frac{1}{xy^2}}$
6.13	$4q\sqrt{p}K_1\left(\sqrt{2q\sqrt{p}e^{\frac{1}{4}\pi i}}\right)\times K_1\left(\sqrt{2q\sqrt{p}e^{-\frac{1}{4}\pi i}}\right)$	$e^{-\frac{1}{xy^2}}$
6.14	$\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma(2\lambda+1)}{2^{\mu+1}}\times q^{1+\mu}p^{\frac{1}{2}(1+\mu-4\lambda)}\times[H_{-\mu}(q\sqrt{p})-Y_{-\mu}(q\sqrt{p})]$	$e^{-\frac{1}{2}xy^2}x^{\lambda-\frac{1}{2}}y^{-2\lambda-1}\times M_{\mu-\lambda,\lambda}(xy^2)$
6.15	$\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-2m)\Gamma(1+2m)}{2^{2m+\frac{3}{2}}}\times p^{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-2m\right)}q^{\frac{3}{2}+2m}\times\left[H_{-2m-\frac{1}{2}}(q\sqrt{p})-Y_{-2m-\frac{1}{2}}(q\sqrt{p})\right]$ $-\frac{1}{2}<m<0$	$x^{2m}e^{-xy^2}$

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
7.1	$\frac{q}{p^{n-1}}S(n, pq),\ n>0$	$\frac{1}{(n-1)!}\frac{P(xy, n)}{y^n}$
7.2	$\frac{q}{p^{\nu-2}}S(\nu, pq)$ $\mathrm{Re}\,\nu>0$	$\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-xy}$
7.3	$\frac{q}{p^{\mu-1}}S(\nu, pq)$ $\mathrm{Re}\,\nu>0$ $\mathrm{Re}\,\mu>-1$	$\frac{y^{\frac{\mu-1}{2}}e^{-\frac{xy}{2}}}{(-1)^{\nu-\mu-1}\Gamma(\nu)x^{\frac{\mu+1}{2}}}\times W_{\nu-\frac{\mu+1}{2},\frac{\mu}{2}}(xy)$
7.4	$pq[\cos(2\sqrt{pq})\operatorname{ci}(2\sqrt{pq})+\sin(2\sqrt{pq})\operatorname{si}(2\sqrt{pq})]$	$-\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{(1+xy)^{3/2}}$
7.5	$pqe^{p^2q}\operatorname{Ei}(-p^2q)$	$-\frac{\sin x\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$
7.6	$p^2qe^{p^2q}\operatorname{Ei}(-p^2q)$	$-\cos x\sqrt{y}$
7.7	$qe^{\frac{q}{p}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{q}{p}\right)$	$-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$
7.8	$\frac{q}{p}e^{\frac{q}{p}}\operatorname{Ei}\left(-\frac{q}{p}\right)$	$e^{-\frac{x}{y}}-1$
7.9	$pq[\sin(pq)\operatorname{ci}(pq)-\cos(pq)\operatorname{si}(pq)]$	$\cos xy$
7.10	$pq[\cos(p\sqrt{q})\operatorname{ci}(p\sqrt{q})+\sin(p\sqrt{q})\operatorname{si}(p\sqrt{q})]$	$-xe^{-x^2y}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
7.11	$p\sqrt{q}\,[\sin(p\sqrt{q})\operatorname{ci}(p\sqrt{q}) - \cos(p\sqrt{q})\operatorname{si}(p\sqrt{q})]$	e^{-x^2y}
7.12	$\dfrac{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{q}{p^{2\nu-1}}\,S\left(\nu+\frac{3}{2}, p^2q\right)$	$x^{\nu+1}y^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(x\sqrt{y})$
7.13	$\dfrac{2^{\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\dfrac{q}{p^{2\nu-2}}\cdot S\left(\nu+\frac{1}{2}, p^2q\right)$	$x^{\nu}y^{-\frac{\nu}{2}}J_\nu(x\sqrt{y})$
7.14	$\left(\dfrac{\beta}{p}\right)^{n-1}q\left[\sin\dfrac{pq+\alpha}{\beta}\operatorname{Ci}\left(\dfrac{pq+\alpha}{\beta}\right) - \cos\dfrac{pq+\alpha}{\beta}\operatorname{Si}\left(\dfrac{pq+\alpha}{\beta}\right)\right]$	$y^{-n}U_n(2\beta xy, 2\sqrt{\alpha xy})$
7.15	$e^{-pq}\operatorname{Ei}(pq) - \ln pq - C$	$\operatorname{Ei}(xy)$
7.16	$e^{-pq}pq\operatorname{Ei}(pq)$	e^{xy}
7.17	$pqe^{pq}\operatorname{Ei}(pq)$	e^{-xy}
7.18	$-pqe^{p^2q}\operatorname{Ei}(-p^2q)$	$\dfrac{\sin x\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
7.19	$4\pi\sqrt{pq}\operatorname{Ei}\left(-\sqrt{q\sqrt{p}}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{xy}}\operatorname{Ei}\left(-\dfrac{1}{64xy^2}\right)$
7.20	$-p^2qe^{p^2q}\operatorname{Ei}(-p^2q)$	$\cos(x\sqrt{y})$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
7.21	$K\left(\dfrac{1}{pq}\right)$	$\dfrac{1}{2}\,\dfrac{J_0(2\sqrt{xy})}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{I_0(2\sqrt{xy})}{\sqrt{x}}$
7.22	$\dfrac{pq}{\sqrt{p^2q^2+1}}K\left(\dfrac{1}{\sqrt{p^2q^2+1}}\right)$	$\dfrac{1}{2}\,\dfrac{J_0(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \dfrac{I_0(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}}$

ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
8.1	$pqe^{p^2q}\operatorname{erfc}(p\sqrt{q})$	$\dfrac{\cos x\sqrt{y}}{\pi\sqrt{y}}$
8.2	$\dfrac{p\sqrt{q}}{\sqrt{\pi}} - p^2qe^{p^2q}\operatorname{erfc}(p\sqrt{q})$	$\dfrac{\sin x\sqrt{y}}{\pi}$
8.3	$qe^{p^2q}\operatorname{erfc}(p\sqrt{q})$	$\dfrac{\sin x\sqrt{y}}{\pi y}$
8.4	$\dfrac{p}{q}\,e^{\frac{p^2}{4q}}D_{-2}\left(\dfrac{p}{\sqrt{q}}\right)$	$\begin{cases} x & \text{при} \quad y > \frac{x^2}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad y < \frac{x^2}{2} \end{cases}$
8.5	$e^{\frac{p}{2q}}W_{-1,\frac{1}{2}}\left(\dfrac{p}{q}\right)$	$e^{-\frac{y}{x}}$
8.6	$p\sqrt{q}\,e^{p^2q}\operatorname{erfc}(p\sqrt{q})$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}J_0(x\sqrt{y})$
8.7	$\sqrt{pq}\,e^{\frac{p}{q}}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\dfrac{p}{q}}\right)$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{xy}}e^{-\frac{y}{x}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
8.8	$\sqrt{p}\, e^{\frac{q^2}{p}} \operatorname{erfc}\left(\frac{q}{\sqrt{p}}\right)$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} & \text{при} \quad y > 2\sqrt{x}, \\ 0 & \text{при} \quad y < 2\sqrt{x} \end{cases}$
8.9	$\frac{p}{\sqrt{q}}\, e^{\frac{p^2}{q}} \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{\sqrt{q}}\right)$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{при} \quad y > \frac{x^2}{4}, \\ 0 & \text{при} \quad y < \frac{x^2}{4} \end{cases}$
8.10	$\frac{p}{q\sqrt{q}}\, e^{\frac{p^2}{q}} \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{\sqrt{q}}\right)$	$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(y - \frac{x^2}{4}\right) & \text{при} \ y > \frac{x^2}{4}, \\ 0 & \text{при} \ y < \frac{x^2}{4} \end{cases}$
8.11	$\frac{p}{q^{\frac{\nu}{2}}}\, e^{\frac{p^2}{4q}} D_{-\nu}\left(\frac{p}{\sqrt{q}}\right)$ $\operatorname{Re} \nu > 0$	$\begin{cases} \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{при} \quad y > \frac{x^2}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad y < \frac{x^2}{2} \end{cases}$
8.12	$\frac{1}{(pq)^{\chi-1}}\, e^{-\frac{1}{2pq}} M_{\chi, \mu}\left(\frac{1}{pq}\right)$ $\operatorname{Re}(\chi + \mu) > -\frac{1}{2}$	$\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma\left(\chi+\mu+\frac{1}{2}\right)} (xy)^{\frac{2\chi-1}{3}} \times$ $\times J_{\chi+\mu-\frac{1}{2},\ 2\mu}\left(3\sqrt[3]{xy}\right)$
8.13	$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)}} p^{\frac{1}{4}(m-n+1)} \times$ $\times q^{\frac{1}{2}(n-m+1)} e^{\frac{1}{2} q\sqrt{p}} \times$ $\times W_{-\frac{1}{2}(n+m), -\frac{1}{2}(n-m)}(q\sqrt{p})$ $\operatorname{Re}(n-m) > -3$	$x^{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)} y^{m-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} xy^2} \times$ $\times D_{-n-\frac{1}{2}}(y\sqrt{2x})$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
8.14	$q\sqrt{p}\, D_{-n-1}\left(\frac{1}{2} q\sqrt{p}\right) \times$ $\times D_{-n-1}\left(-\frac{1}{2} q\sqrt{p}\right)$	$\frac{(-1)^n 2\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1)} \times$ $\times \left[\operatorname{ber}^2_{n+\frac{1}{2}}(2y\sqrt{x}) + \right.$ $\left. + \operatorname{bei}^2_{n+\frac{1}{2}}(2y\sqrt{x})\right]$
8.15	$\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) q\sqrt{p} \times$ $\times D_{-m-\frac{1}{2}}\left(q\sqrt{p}\, e^{\frac{1}{4}\pi i}\right) \times$ $\times D_{-m-\frac{1}{2}}\left(q\sqrt{p}\, e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)$	$J_m(y\sqrt{x})\, I_m(y\sqrt{x})$
8.16	$\pi p^{\frac{1}{4}} q e^{q\sqrt{p}} \left[1 - \operatorname{erf}\sqrt{q\sqrt{p}}\right]$	$y^{-\frac{1}{2}} e^{xy^2} [1 - \operatorname{erf}(y\sqrt{x})]$
8.17	$\sqrt{\pi}\, \frac{(-1)^m}{p^{4m} q^{m-\frac{1}{2}}} \times$ $\times e^{-\frac{1}{4p^2 q}} D_{2m}\left(\frac{1}{p\sqrt{q}}\right)$	$x^{2m} y^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ber}_{4m}\left(2\sqrt{x\sqrt{2y}}\right)$
8.18	$\frac{(-1)^m \sqrt{\pi}}{2^{m-\frac{\nu}{2}}} \frac{1}{p^{2\nu} q^{m-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{4p^2 q}} \times$ $\times D_{2m}\left(\frac{1}{p\sqrt{q}}\right)$	$x^{\nu} y^{m-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}} \times$ $\times \left[\operatorname{ber}_{2\nu}\left(2\sqrt{x\sqrt{2y}}\right) \cos\frac{3\nu\pi}{2} + \right.$ $\left. + \operatorname{bei}_{2\nu}\left(2\sqrt{x\sqrt{2y}}\right) \sin\frac{3\nu\pi}{2}\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
8.19	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(-1)^m}{p^{4m}q^m} e^{-\frac{1}{4p^2q}} \times D_{2m+1}\left(\frac{1}{p\sqrt{q}}\right)$	$x^{2m} \operatorname{bei}_{4m}\left(2\sqrt{x\sqrt{2y}}\right)$
8.20	$\frac{(-1)^m\sqrt{\pi}}{2^{m-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{p^{2\nu}q^m} \times e^{-\frac{1}{4p^2q}} \cdot D_{2m+1}\left(\frac{1}{p\sqrt{q}}\right)$	$x^\nu y^{m-\frac{\nu}{2}}\left[\operatorname{bei}_{2m}\left(2\sqrt{x\sqrt{2y}}\right) \times \cos\frac{3\nu\pi}{2} - \operatorname{ber}\left(2\sqrt{x\sqrt{2y}}\right)\sin\frac{3\nu\pi}{2}\right]$
8.21	$\frac{(-1)^m}{2^{\frac{1}{3}(3m+k+1)}} \cdot \frac{1}{p^kq^m} e^{-\frac{1}{4pq}} \times D_{2m+1}\left(\frac{1}{\sqrt{pq}}\right)$	$x^{\frac{1}{6}(4k+1)} y^{\frac{1}{6}(6m-2k+1)} \times J_{\frac{1}{2}(2k+1), \frac{1}{2}}\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}xy}\right)$
8.22	$\frac{(-1)^m}{2^{\frac{1}{6}(6m+2k-1)}} \cdot \frac{1}{p^kq^{m-\frac{1}{2}}} \times e^{-\frac{1}{4pq}} \cdot D_{2m}\left(\frac{1}{\sqrt{pq}}\right)$	$x^{\frac{1}{6}(4k+1)} y^{\frac{1}{6}(6m-2k-2)} \times J_{k, -\frac{1}{2}}\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}xy}\right)$
8.23	$\Gamma(1+n-\mu)\Gamma(2n)p^{1-n} \times q^\mu e^{\frac{1}{2}pq} W_{-n, -\mu+\frac{1}{2}}(pq)$	$x^{n-1}y^{-\mu}M_{\mu, n-\frac{1}{2}}(xy)\, e^{-\frac{1}{2}xy}$
8.24	$\frac{1}{\sqrt{2}} pqe^{\frac{1}{4}p^2q^2} D_{-\frac{3}{2}}(pq)$	$(xy)^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}\left[3\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^2y^2}\right]$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
8.25	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, q\sqrt{p}\, e^{\frac{1}{4}p^2q^2} D_{-1}(pq)$	$x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}\left[3\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^2y^2}\right]$
8.26	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(m+1) \times pqe^{\frac{1}{4}p^2q^2} D_{-(m+1)}(pq)$	$(xy)^{\frac{1}{3}(m+1)} \times J_{\frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{2}m}\left[3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2}{8}}\right]$
8.27	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(m+k) \times qp^ke^{\frac{1}{4}p^2q^2} D_{-(m+k)}(pq)$	$x^{\frac{1}{3}(m+1)} y^{\frac{1}{3}(m+3k-2)} \times J_{\frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{2}m}\left[3\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^2y^2}\right]$
8.28	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma(k+1) \times qp^{\frac{1}{2}k} e^{\frac{1}{4}pq^2} D_{-(k+1)}(q\sqrt{p})$	$y^{k-1}\sin\left(y\sqrt{2x}\right)$
8.29	$\sqrt{\pi}\, pqe^{\frac{1}{2}pq^2} D_{-2}\left(q\sqrt{2p}\right)$	$\sin\left(y\sqrt{x}\right)$
8.30	$q\sqrt{p}\, e^{\frac{1}{4}pq^2} D_{-1}(q\sqrt{p})$	$J_0\left(y\sqrt{2x}\right)$
8.31	$\frac{\Gamma(2m+1)}{2^{\frac{1}{2}m}} q\sqrt{p}\, e^{\frac{1}{4}pq^2} \times D_{-(2m+1)}(q\sqrt{p})$	$x^{\frac{1}{2}m} y^m J_m\left(y\sqrt{2x}\right)$
8.32	$2^{-\frac{1}{2}} qe^{\frac{1}{4}pq^2} D_{-2}(q\sqrt{p})$	$x^{\frac{1}{2}} J_1\left(y\sqrt{2x}\right)$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
8.33	$\frac{\Gamma(2m)}{2^{\frac{1}{2}m}} q e^{\frac{1}{4}pq^2} D_{-2m}(q\sqrt{p})$	$x^{\frac{1}{2}m} y^{m-1} J_m(y\sqrt{2x})$
8.34	$\frac{\Gamma(2m+k)}{2^{\frac{1}{2}m}} q p^{\frac{1}{2}k} e^{\frac{1}{4}pq^2} \times D_{-(2m+k)}(q\sqrt{p})$	$x^{\frac{1}{2}m} y^{m+k-1} J_m(y\sqrt{2x})$
8.35	$\Gamma(n+k-1)\, q p^{\frac{mk}{n-1}} e^{\frac{1}{4}q^2 p^{\frac{2m}{n-1}}} \times D_{-(n+k-1)}\left(q p^{\frac{m}{n-1}}\right)$	$x^m y^{n+k-2} J_m^{\frac{2m}{n-1}}\left(\frac{1}{2} y^2 x^{\frac{2m}{n-1}}\right)$
8.36	$\Gamma(\nu)\, p^{\mu(1+\nu)-\lambda} q e^{\frac{1}{4}p^{2\mu}q^2} \times D_{-\nu}(p^\mu q)$	$x^{\lambda-\mu} y^{\nu-1} J^{2\mu}_{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{2} y^2 x^{2\mu}\right)$
8.37	$\frac{1}{q^{b-c}p^a} \times {}_2F_1\left(c, a+1; a+b+2; \frac{p-q}{p}\right)$ $a > -1,\ b > -1,\ c < a+b+2$	$\frac{\Gamma(a+b+2)\times}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(a+b+2-c)} \times \frac{x^a y^b}{(x+y)^c}$
8.38	${}_mF_n\left(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n; \frac{1}{pq}\right)$ $n \geqslant m-3$	${}_mF_{n+2}(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n, 1, 1; xy)$
8.39	$\sqrt{pq}\, {}_0F_1(1, \sqrt{pq})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi xy}}\, {}_0F_1\left(1; \frac{1}{16xy}\right)$

РАЗНЫЕ ФУНКЦИИ

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
9.1	$q\sqrt{p}\, Q_\nu(pq)$ $\mathrm{Re}\,\nu > -1$	$\sqrt{\frac{\pi}{2y}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{2ixy}) \times J_{\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{-2ixy})$
9.2	$p^\nu q e^{pq} Q(pq, 1-\nu)$ $\mathrm{Re}\,\nu > 0$	$\frac{y^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-xy}$
9.3	$pq e^{(p+1)(q+1)} \times \mathrm{Ei}\{(p+1)(q+1)\}$	$e^{-xy-x-y}$
9.4	$\frac{p}{q^{\mu-1}} P_\nu\left(\frac{p}{q}\right)$ $-1 < \mathrm{Re}\,\nu < 0$	$\begin{cases} -\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\frac{(y^2-x^2)^{\frac{\mu-1}{2}}}{x} P_\nu^{1-\mu}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{при } y > x, \\ 0 & \text{при } y < x \end{cases}$
9.5	$\frac{pq}{\sqrt{p^2q^2+1}} B\left(\frac{1}{\sqrt{p^2q^2+1}}\right)$	$\frac{1}{4}\frac{J_0(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \frac{I_0(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\frac{J_2(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \frac{I_2(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}}$
9.6	$\frac{pq}{(p^2q^2+1)^{3/2}} \times C\left(\frac{1}{\sqrt{p^2q^2+1}}\right)$	$-\frac{1}{2}\frac{J_2(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \frac{I_2(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}}$
9.7	$\frac{pq}{\sqrt{p^2q^2+1}} \times D\left(\frac{1}{\sqrt{p^2q^2+1}}\right)$	$\frac{1}{4}\frac{J_0(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \frac{I_0(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4}\frac{J_2(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}} \overset{x}{*} \frac{I_2(2\sqrt{ixy})}{\sqrt{x}}$

Продолжение

№	$F(p, q)$	$f(x, y)$
9.8	$\lambda(qe^p, a)$	$\begin{cases} \dfrac{y^x - y^a}{\ln y} & \text{при} \quad x > a > 0 \\ 0 & \text{при} \quad x < a \end{cases}$
9.9	$\nu\left(\dfrac{e^{-p}}{q}\right)$	$\displaystyle\int_0^x \frac{y^s\,ds}{[\Gamma(1+s)]^2}$
9.10	$\displaystyle\int_0^\alpha \frac{\Gamma^2(s+1)}{(pq)^s}\,ds$	$\dfrac{(xy)^\alpha - 1}{\ln xy}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-дер-Поль Б. и Бреммер Х., Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, ИЛ, 1952.
2. Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, Гостехиздат, 1951.
3. Лаврентьев М. А. и Шабот Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958 (Глава VI).
4. Лыков А. В., Теория теплопроводности, Гостехиздат, М., 1952.
5. Лыков А. В., Тепло- и массообмен в процессах сушки, Госэнергоиздат, М.—Л., 1956.
6. Микусинский Ян, Операторное исчисление, ИЛ, 1956.
7. Лурье А. Н., Операционное исчисление, Гостехиздат, 1950.
8. Amerio L., Sulla trasformata doppia di Laplace. Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci, fis. mat. natur. 12 (1941), 707—780.
9. Bernstein D. L., The double Laplace integral, Duke Math. Journ. 8 (1941), 460—496.
10. Bose S. K., Generalised Laplase integral of two variables, Ganita 3 (1952), 23—35.
11. Chakrabarty N. K., Sur le calcul symbolique a deux variables. Ann. Soc. Sci, Bruxelles, 67 (1953), 23—28, 203—218.
12. Chakrabarty N. K., On some theorems and inequalites in operational calculus with two variables. Bull. Calcutta Math. Soc. 46 (1951), № 4, 221—235.
13. Chakrabarty N. K., On symbolic calculus of two variables, Acta Mathematica 93 (1955), 1—14.
14. Coon G. A., Bernstein D. L., Some properties of the double Laplace transformation Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), № 1, 135—176.
15. Cheng Min-teh., On a theorem of Nicolesco and generalized Laplase operators. Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 77—86.
16. Churchill R. V., Modern operational mathematics in engineering, New York and London, 1944, 210—214.
17. Delavault H., Sur un probleme de la théorie de la chaleur et sa solution au moyen de la transformation de Hankel, Comptes Rendus Acad. Sci, 237 (1953), 2484—2485.
18. Delavault H,. Sur un problème de la théorie de la chaleur et sa solution au moyen des transformations de Fourier et de Laplace, Comptes Rendus Acad. Sci, 237 (1953), 1067—1068.

19. Delerue P., Sur le calcul symbolique á n variables et sur les fonctions hyperbesseliennes., Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 67 (1953), 83—105, 229—275.
20. Delerue P., Sur quelques images en calcul symbolique á 3 et n variables, Bull. Sci. Math., 1952.
21. Delerue P., Le calcul symbolique á 2 ou n variables et équations integrales. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, oct. 1956, p. 96.
22. Doetsch G., L'application de la transformation bidimensionalle de Laplace dans la théorie des équations aux derivées partielles. Premier colloque sur les équations aux dérivées partielles, Paris, 1954, 63—78.
23. Duranona A. y Vedia and C. A. Trejo, Recintos de convergencia de las integrales dobles de Laplace—Stieltjes. Universidad Nacional La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., 1 (1936), 315—327.
24. Duranona A. y Vedia and C. A. Trejo, Über die Umkehrung des Laplace — Stieltjesschen doppelintegrals. Universidad Nacional La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., 1 (1938), 451—464.
25. Erdelyi A., Untersuchungen über Produkte von Whittakerschen Funktionen. Monatshefte Math. Phys., 46 (1937), 132—156.
26. Erdelyi A. Beitrag zur Theorie der konfluenten hypergeometrischen Funktionen von mehreren Veränderlichen. Sitz. Ber. Akad. Wiss., Wien, math-nat. Kl. 2-a, 146 (1937) 431—467.
27. Faedo S., Sulle trasformate multiple di Laplace. Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur. (7), 2 (1941), 722—727.
28. Gilly J., Les parties finies d'integrals et la transformation de Laplace — Carson, Revue Scientifique 83 (1945), 259—270.
29. Giorgi G., Medodi moderni di Calcolo operatorio funzionale, Rend. del Sem. Mat. 8, Milan, 1934, 189—214.
30. Haviland E. K., On the inversion formula for Fourier—Stieltjes transforms in more than one dimension. Amer. J. Math., 57 (1935), 382—388.
31. Heins A. E., Note on the equation of heat conduction, Bull. Amer. Math. Soc., 41, 253—258.
32. Heins A. E., Applications of the Fourier transform theorem. J. Math. Massachusetts, 14, 137—142.
33. Humbert P., Le calcul symbolique à deux variables. Comptes Rendus Acad. Sci., Paris, 199 (1934), 657—660.
34. Humbert P., McLachlan et L. Poli, Supplément au formulaire. Mem. Sci. Math. Fasc., 113, Paris.
35. Humbert P., Le calcul symbolique à deux variables. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, A 56 (1936), 26—43.
36. Jaeger J. C. The solution of boundary value problems by a double Laplace transformation, Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 687—693.
37. Koschmieder L., Operationenrechnung in zwei Veränderlichen und bilineare Formel der Laguerreschen Polynome, Sitz. Ber. Akad. Wiss., Wien, math.-nat. Kl. IIa, 145 (1936), 651—655.

38. Küstermann W., Ueber Fouriersche Doppelreihen und das Poissonsche Doppelintegral, Jnaugural-Dissertation, München, 1913, 1—61.
39. McLachlan, Humbert P., Formulaire pour le calcul symbolique, Mem. Sci. math. Fasc., 100, Paris, 1947, p. 67.
40. Laplace P. S., Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812.
41. Picone M., Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti. Atti Accad. Sci. Torino, 75 (1940), 1—14.
42. Pistoia A., Alcuni teoremi tauberiani per la trasformata doppia di Laplace. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti. Cl. Sci. Matem. e Natur. (3), 16 (85) (1952), 170—190.
43. Pistoia A., Sulla operazione di composizione secondo una varieta lineare per la trasformata multipla di Laplace. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. mat. natur. 84 (1951), 241—249.
44. Plancherel M., Note sur les transformations lineares et les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables. Comment. math. helv. 9 (1937), 249—262.
45. Plancherel M. et Polya G., Fonctieres entieres et integrales de Fourier multiples. Comment. math. helv. 9 (1937), 224—248.
46. Plancherel M. et Polya. G., Fonctions entieres et integrales de Fourier multiples, Comment. math. helv. 10 (1937), 110—163.
47. Plancherel M., Quelques remarques sur les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables. Vierteljschr. Naturforsch Ges. Zurich 85 (1940), 20—26.
48. Poli L., Le calcul symbolique á deux variables. Revue Scientifique. 85 (1947), 616—617.
49. Poli L. et Delerue P., Le calcul symbolique á deux variables et ses applications. Mem. Sci. Math. f. 127, (1954), p. 77.
50. Poli L., Calcul symbolique et equations aux derivees partielles. Cahiers Rhodaniens, 4 (1952), 13—27.
51. Van der Pol B. and K. F. Niessen, On simultaneous operational calculus, Phil. Mag. 11 (1931), 368—376.
52. Reed J. S., The Mellin type of double integral, Duke Math. J. 11 (1944), 565—572.
53. Ruell U., L'integrale di Fourier per funzioni di piu variabili. Istituto Elettrotec. Accad. Navale, Livorno, № 157 (1940), p. 47.
54. Schwartz L., Theorie des distributions, Paris (1951).
55. Srivastava H. M., On some séquences of Laplace Transforms, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 67 (1953), 218—229.
56. Vasilache S., Asupra existentei unei solutii a ecuatiei integrali definite prin transformata lui Laplace cu doua variabile independente. Acad. Republ. Popul., Romane, Bul. Sti., Sect. Mat. Fiz. 3 (1951), 209—217.
57. Vasilache S., Asupra catorva formule fundamentale ale transformatei lui Laplace cu doua variabile. Acad. Republ., Popular. Romane, Bul. Sti., Sect. Mat. Fiz. 3 (1951), 429—432.

58. Vasilache S., Asupra catorva formule din teoria transformatei lui Laplace cu doua variabile. Comun. Acad. Repub. Pop. Romane, 2 (1952), 193—198.
59. Vignaux J. C., Sobre la transformata de Abel—Laplace de dos variables. Ann. Soc. Cient. Arg., 116 (1932), 76—78.
60. Vignaux J. C., Un teorema sulle integrali doppi di Abel—Laplace, Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei, (6), 17 (1933), 1055—1059.
61. Vignaux J. C., Sur l'extension du theorème de Dirichlet aux integrales doubles convergentes. Bull. Soc. R. Sci. Liège, 2 (1933), 109—112.
62. Voelker D, Döetsch G., Die Zweidimensionale Laplace—Transformation, Basel, 1950.