Г. Б. ДВАЙТ

ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

TABLES OF INTEGRALS

AND OTHER MATHEMATICAL DATA

HERBERT BRISTOL DWIGHT

FOURTH EDITION

NEW YORK
THE MACMILLAN COMPANY
1961

Г. Б. ДВАЙТ

ТАБЛИЦЫ ИНТЕГРАЛОВ

И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Перевод с английского
Н. В. ЛЕВИ

Под редакцией
К. А. СЕМЕНДЯЕВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.2 (03)
Д22
УДК 517.3 (083.3)

АННОТАЦИЯ

Книга содержит весьма подробные таблицы неопределенных и определенных интегралов, а также большое число других математических формул: разложения в ряды, тригонометрические и другие тождества, справочный материал по специальным функциям.

В настоящем издании учтены все дополнения и исправления, внесенные в четвертое американское издание, и исправлены замеченные опечатки.

Г. Б. Двайт

Таблицы интегралов и другие математические формулы.

М., 1966 г., 228 стр. с илл.

Редактор *А. З. Рывкин.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.* Корректор *А. Д. Халанская.*

Печать с матриц. Подписано к печати 22/VIII 1966 г. Бумага $60\times90^1/_{16}$. Физ. печ. л. 14,25. Условн.-печ. л. 14,25. Уч.-изд. л. 10,48. Тираж 40 000 экз. Цена книги 62 коп. Заказ № 715.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

$\frac{2\text{-}2\text{-}3}{195\text{-}66}$

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Таблицы Двайта представляют собой довольно обширные таблицы неопределенных интегралов, к которым добавлено еще много разнообразных формул (разложения в ряды, тождественные соотношения, определенные интегралы и т. п.).

В Советском Союзе таблицы Двайта были выпущены Издательством иностранной литературы в 1948 г. на английском языке фотомеханическим способом. В настоящем издании текст переведен на русский язык, американские обозначения заменены принятыми в СССР. Перевод сделан с четвертого американского издания (1961 г.), причем восстановлена глава, посвященная дифференциальным уравнениям, опущенная в издании 1948 г.

Список литературы составлен заново, в основном из книг на русском языке. В ссылках в тексте число в квадратных скобках означает номер в списке литературы на стр. 227—228. Однако ссылки на литературу, преимущественно учебную, относящуюся к отдельным формулам, в настоящем издании опущены, так же как в издании 1948 г. Кроме того, исключены числовые таблицы, составленные не очень логично, помещение которых в настоящем справочнике недостаточно оправдано.

Второе издание печатается с матриц. Исправлены лишь замеченные опечатки.

К. Семендяев

I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. $$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n!}{(n-r)!\,r!}x^r + \ldots$$

Здесь и далее всюду полагаем $0! = 1$. Если n — целое положительное число, то выражение состоит из конечного числа членов. В противном случае ряд сходится при $x^2 < 1$; причем, если $n > 0$, то ряд сходится также при $x^2 = 1$.

2. Коэффициент при x^r в **1** обозначается $\binom{n}{r}$ или C_n^r.

Величины этих коэффициентов даются в следующей таблице.

Таблица биномиальных коэффициентов C_n^r.

n \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Сумма двух соседних чисел в любой строке равна числу, находящемуся в следующей строке под правым слагаемым.

Подробную таблицу см. [26].

3. $$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!\,r!}x^r + \ldots$$

(См. примечание к **1.**)

4. $$(a \pm x)^n = a^n\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^n.$$

4.2. $$(1 \pm x)^2 = 1 \pm 2x + x^2.$$

4.3. $$(1 \pm x)^3 = 1 \pm 3x + 3x^2 \pm x^3.$$

4.4. $$(1 \pm x)^4 = 1 \pm 4x + 6x^2 \pm 4x^3 + x^4,$$

и так далее, используя коэффициенты из таблицы 2.

5.1. $$(1 \pm x)^{1/4} = 1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \pm \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

5.2. $$(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

5.3. $$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

5.4. $$(1 \pm x)^{3/2} = 1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5 + \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

5.5. $$(1 \pm x)^{5/2} = 1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^5 - \ldots, \qquad [x^2 \leqslant 1].$$

6. $$(1 + x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^r\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}x^r + \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

7. $$(1 - x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}x^r + \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

8. $$(a \pm x)^{-n} = a^{-n}\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^{-n}.$$

9.01. $$(1 \pm x)^{-1/4} = 1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2 \mp \frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 + \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.02. $$(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 \mp \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.03. $$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.04. $$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.05. $$(1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.06. $$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.07. $$(1 \pm x)^{-5/2} = 1 \mp \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots, \qquad [x^2 < 1].$$

9.08. $$(1 \pm x)^{-3} = 1 \mp \frac{1}{1\cdot 2}\{2\cdot 3x \mp 3\cdot 4x^2 + 4\cdot 5x^3 \mp 5\cdot 6x^4 + \ldots\}, \qquad [x^2 < 1].$$

9.09. $$(1 \pm x)^{-4} = 1 \mp \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\{2\cdot 3\cdot 4x \mp 3\cdot 4\cdot 5x^2 + 4\cdot 5\cdot 6x^3 \mp 5\cdot 6\cdot 7x^4 + \ldots\}, \qquad [x^2 < 1].$$

9.10. $$(1 \pm x)^{-5} = 1 \mp \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5x \mp 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^2 + 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7x^3 \mp 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^4 + \ldots\}, \qquad [x^2 < 1].$$

10.

$2! =$	2	$1/2! =$	0,5
$3! =$	6	$1/3! =$	0,16666 66667
$4! =$	24	$1/4! =$	0,04166 66667
$5! =$	120	$1/5! =$	0,00833 33333
$6! =$	720	$1/6! =$	0,00138 88889
$7! =$	5040	$1/7! =$	$0,19841\,26984 \cdot 10^{-3}$
$8! =$	40320	$1/8! =$	$0,24801\,58730 \cdot 10^{-4}$
$9! =$	3 62880	$1/9! =$	$0,27557\,31922 \cdot 10^{-5}$
$10! =$	36 28800	$1/10! =$	$0,27557\,31922 \cdot 10^{-6}$
$11! =$	399 16800	$1/11! =$	$0,25052\,10839 \cdot 10^{-7}$
$12! =$	4790 01600	$1/12! =$	$0,20876\,75699 \cdot 10^{-8}$

Более подробную таблицу см. [18].

11. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}.$$

Эта формула позволяет получать приближенные значения $n!$ при больших n. Результат получается с избытком в $0,7\%$ для $n=12$ и $0,4\%$ для $n=20$ (см. также 851.4 и 850.4).

12.

n	2^n	n	2^n	n	2^{-n}	
2	4	15	32 768	2	0,25	
3	8	16	65 536	3	0,125	
4	16	17	131 072	4	0,0625	
5	32	18	262 144	5	0,03125	
6	64	19	524 288	6	0,015625	
7	128	20	1 048 576	7	0,78125	$\cdot 10^{-2}$
8	256	21	2 097 152	8	0,39062 5	$\cdot 10^{-2}$
9	512	22	4 194 304	9	0,19531 25	$\cdot 10^{-2}$
10	1 024	23	8 388 608	10	0,97656 25	$\cdot 10^{-3}$
11	2 048	24	16 777 216	11	0,48828 125	$\cdot 10^{-3}$
12	4 096	25	33 554 432	12	0,24414 0625	$\cdot 10^{-3}$
13	8 192	26	67 108 864	13	0,12207 03125	$\cdot 10^{-3}$
14	16 384	27	134 217 728	14	0,61035 15625	$\cdot 10^{-4}$

15.1. $(a+b+c)^2\equiv a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

15.2. $(a+b-c)^2\equiv a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca.$

15.3. $(a-b-c)^2\equiv a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca.$

16. $$(a+b+c+d)^2\equiv a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+\\+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

17. $$(a+b+c)^3\equiv a^3+b^3+c^3+6abc+\\+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2).$$

20.1. $a+x\equiv(a^2-x^2)/(a-x).$

20.11. $1+x\equiv(1-x^2)/(1-x).$

20.2. $a^2+ax+x^2\equiv(a^3-x^3)/(a-x).$

20.3. $$a^3+a^2x+ax^2+x^3\equiv(a^4-x^4)/(a-x)\equiv\\\equiv(a^2+x^2)(a+x).$$

20.4. $a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4\equiv(a^5-x^5)/(a-x).$

20.5. $$a^5+a^4x+a^3x^2+a^2x^3+ax^4+x^5\equiv\\\equiv(a^6-x^6)/(a-x)\equiv(a^3+x^3)(a^2+ax+x^2).$$

21.1. $a-x\equiv(a^2-x^2)/(a+x).$

21.2. $a^2-ax+x^2\equiv(a^3+x^3)/(a+x).$

21.3. $$a^3-a^2x+ax^2-x^3\equiv(a^4-x^4)/(a+x)\equiv(a^2+x^2)(a-x).$$

21.4. $$a^4-a^3x+a^2x^2-ax^3+x^4\equiv(a^5+x^5)/(a+x).$$

21.5. $$a^5-a^4x+a^3x^2-a^2x^3+ax^4-x^5\equiv(a^6-x^6)/(a+x)\equiv(a^3-x^3)(a^2-ax+x^2).$$

22. $$a^4+a^2x^2+x^4\equiv(a^6-x^6)/(a^2-x^2)\equiv(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2).$$

22.1. $$a^4-a^2x^2+x^4\equiv(a^6+x^6)/(a^2+x^2).$$

23. $$a^4+x^4\equiv(a^2+x^2)^2-2a^2x^2\equiv(a^2+ax\sqrt{2}+x^2)(a^2-ax\sqrt{2}+x^2).$$

25. *Арифметическая прогрессия первого порядка* (с постоянными первыми разностями) из n членов

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\ \ldots\ +\{a+(n-1)d\}\equiv na+\frac{1}{2}n(n-1)d\equiv\frac{n}{2}\ (1\text{-й член}+n\text{-й член}).$$

26. *Геометрическая прогрессия* из n членов

$$a+ar+ar^2+ar^3+\ \ldots\ +ar^{n-1}\equiv a(1-r^n)/(1-r)\equiv a(r^n-1)/(r-1).$$

26.1. Если $r^2<1$, предел суммы бесконечного числа членов будет $a/(1-r)$.

27. Обратные величины членов арифметической прогрессии первого порядка образуют (по определению) *гармоническую прогрессию.* Так,

$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a+d},\quad \frac{1}{a+2d},\quad \ldots,\quad \frac{1}{a+(n-1)d}$$

есть гармоническая прогрессия.

28.1. *Средняя арифметическая* n величин:

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n).$$

28.2. *Средняя геометрическая* n величин:

$$(a_1a_2a_3\ldots a_n)^{1/n}.$$

28.3. H — *средняя гармоническая* n величин определяется следующим образом:

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

28.4. Средняя арифметическая некоторого числа положительных величин больше или равна их средней геометрической, которая в свою очередь больше или равна их средней гармонической.

29. *Арифметическая прогрессия k-го порядка* (k-е разности постоянны).

Последовательность: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$.

Первые разности: $d_1', d_2', d_3', \ldots$,

где $d_1' = u_2 - u_1$, $d_2' = u_3 - u_2$ и т. д.

Вторые разности: $d_1'', d_2'', d_3'', \ldots$,

где $d_1'' = d_2' - d_1'$ и т. д.

Сумма n членов последовательности равна

$$\frac{n!}{(n-1)!\,1!}u_1 + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}d_1' + \frac{n!}{(n-3)!\,3!}d_1'' + \ldots$$

29.01. Если таблица функции u_n дана для равноотстоящих значений аргумента с интервалом h, а именно $f(a) = u_1$, $f(a+h) = u_2$, $f(a+2h) = u_3$ и т. д., то

$$f(a+ph) = u_1 + pd_1' + \frac{p(p-1)}{2!}d_1'' + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}d_1''' + \ldots,$$

где $p<1$, а d_1', d_1'' и т. д. даны в **29.** Коэффициенты при d_1', d_1'', d_1''' и т. д. называются *интерполяционными коэффициентами Грегори — Ньютона.*

Численные значения этих коэффициентов см. [25].

29.1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1).$

29.2.
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) =$$
$$= \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1).$$

29.3.
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2 =$$
$$= \frac{n^2}{4}(n^2 + 2n + 1).$$

29.4.
$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 =$$
$$= \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1) =$$
$$= \frac{n}{30}(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1).$$

29.9. $$\sum_{u=1}^{n} u^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{B_1}{2!} pn^{p-1} - \\ - \frac{B_2}{4!} p(p-1)(p-2) n^{p-3} + \ldots,$$

отбрасывая члены с n^0 и последующие. Величины B_1, $B_2, \ldots$ см. **45.**

Приведенные формулы можно использовать для нахождения суммы рядов, n-й член которых выражается через n, n^2, n^3 и т. д.

30.1. $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

30.2. $$1 + 8 + 16 + 24 + 32 + \ldots + 8(n-1) = (2n-1)^2.$$

33.1. $$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

33.2. $$1 + ax + (a+b)x^2 + (a+2b)x^3 + \ldots = \\ = 1 + \frac{ax + (b-a)x^2}{(1-x)^2}.$$

33.3. $$1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

33.4. $$1 + 3^2x + 5^2x^2 + 7^2x^3 + \ldots = \frac{1+6x+x^2}{(1-x)^3}.$$

35. $$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx$$

$[a,\ b > 0]$.

35.1. $$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}.$$ [См. **120** и **48.31.**]

35.2. $$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \ldots = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2\right).$$

[См. **165.01.**]

35.3. $$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \ldots = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right).$$

[См. **165.11.**]

35.4. $$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \ldots = \\ = \frac{1}{4\sqrt{2}} \{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)\}.$$ [См. **170.**]

38. Степенной ряд для $f(h)$ имеет вид:

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\frac{h^3}{3!}f'''(0)+\ldots$$

(Ряд Маклорена.)

38.1. $$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\frac{h^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n,$$

где при некотором значении θ, заключенном между 0 и 1,

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\theta h), \quad \text{или} \quad \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta h).$$

39. $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\ldots$$

(Ряд Тейлора.)

39.1. $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n,$$

где при некотором значении θ, заключенном между 0 и 1,

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h), \quad \text{или} \quad \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(x+\theta h).$$

40. $$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\left\{h\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\right\}+\frac{1}{2!}\left\{h^2\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f(x,\ y)}{\partial y^2}\right\}+\frac{1}{3!}\left\{h^3\frac{\partial^3 f(x,\ y)}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3 f(x,\ y)}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3 f(x,\ y)}{\partial x\,\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3 f(x,\ y)}{\partial y^3}\right\}+\ldots+R_n,$$

где при некоторых значениях θ_1 и θ_2, заключенных между 0 и 1,

$$R_n=\frac{1}{n!}\left\{h^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}+nh^{n-1}k\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}+\frac{n(n-1)}{2!}h^{n-2}k^2\frac{\partial^n}{\partial x^{n-2}\partial y^2}+\ldots+k^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}\right\}f(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k).$$

42.1. Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

42.2. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

42.3. Число делится на 2^n, если число, составленное из n его последних цифр, делится на 2^n.

Числа Бернулли и числа Эйлера

45.

Числа Бернулли	$\lg B_n$	Числа Эйлера	$\lg E_n$
$B_1=\frac{1}{6}$	$\bar{1},221\,8487$	$E_1=1$	0
$B_2=\frac{1}{30}$	$\bar{2},522\,8787$	$E_2=5$	$0,698\,9700$
$B_3=\frac{1}{42}$	$\bar{2},376\,7507$	$E_3=61$	$1,785\,3298$
$B_4=\frac{1}{30}$	$\bar{2},522\,8787$	$E_4=1\,385$	$3,141\,4498$
$B_5=\frac{5}{66}$	$\bar{2},879\,4261$	$E_5=50\,521$	$4,703\,4719$
$B_6=\frac{691}{2730}$	$\bar{1},403\,3154$	$E_6=2\,702\,765$	$6,431\,8083$
$B_7=\frac{7}{6}$	$0,066\,9468$	$E_7=199\,360\,981$	$8,299\,6402$
$B_8=\frac{3617}{510}$	$0,850\,7783$		
$B_9=\frac{43\,867}{798}$	$1,740\,1350$		
$B_{10}=\frac{174611}{330}$	$2,723\,5577$		
$B_{11}=\frac{854513}{138}$	$3,791\,8396$		

Существуют различные обозначения для чисел Бернулли и Эйлера. Принятые здесь обозначения определяются формулами 47.1 и 47.4.

46.1. $$E_n=\frac{(2n)!}{(2n-2)!\,2!}E_{n-1}-\frac{(2n)!}{(2n-4)!\,4!}E_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1},$$

принимая $0!=1$ и $E_0=1$.

46.2. $$B_n=\frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left[\frac{(2n-1)!}{(2n-2)!\,1!}E_{n-1}-\frac{(2n-1)!}{(2n-4)!\,3!}E_{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}\right].$$

47.1. $$B_n=\frac{(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\left[1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots\right].$$

47.2. $$B_n=\frac{(2n)!}{\pi^{2n}(2^{2n-1}-1)}\left[1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\ldots\right].$$

47.3. $$B_n=\frac{2\,(2n)!}{\pi^{2n}(2^{2n}-1)}\left[1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\ldots\right].$$

47.4. $$E_n=\frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left[1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\right].$$

48.001. $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\infty.$$

48.002. $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\pi^2B_1=\frac{\pi^2}{6}=$$ (См. **45.**)
$$=\zeta(2)=1{,}64493\,40668.$$

48.003. $$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\zeta(3)=1{,}20205\,69032.$$

48.004. $$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{3}B_2=\frac{\pi^4}{90}=$$ (См. **45.**)
$$=\zeta(4)=1{,}08232\,32337.$$

48.005. $$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\ldots=\zeta(5)=1{,}03692\,77551.$$

48.006. $$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{2\pi^6}{4^5}B_3=\frac{\pi^6}{945}=$$ (См. **45.**)
$$=\zeta(6)=1{,}01734\,30620.$$

48.007. $$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\ldots=\zeta(7)=1{,}00834\,92774.$$

48.008. $$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots=\frac{\pi^8}{315}B_4=\frac{\pi^8}{9450}=$$ (См. **45.**)
$$=\zeta(8)=1{,}00407\,73562.$$

48.08. $$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}B_n$$
[n — целое, положительное]. (См. **45, 47.1.**)

48.09. $$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots=\zeta(p),$$ дзета-функция Римана.

Таблицу численных значений этой функции см. [16].

48.11. $$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots=\infty.$$

48.12. $$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{3\pi^2}{4}B_1=\frac{\pi^2}{8}.$$ (См. **45.**)

48.13. $$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{7}{8}\zeta(3)=1{,}05179\,97903.$$
(См. **48.09.**)

48.14. $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{5\pi^4}{16}B_2=\frac{\pi^4}{96}=\frac{15}{16}\zeta(4)=$ (См. **45.**)

$=1,01467\,80316.$

48.18. $1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\ldots=\frac{(2^{2n}-1)\,\pi^{2n}}{2\cdot(2n)\,!}B_n.$ (См. **45, 47.3.**)

48.19. $1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\zeta(p).$ (См. **48.09.**)

48.21. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2.$ (См. **601.01.**)

48.22. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{2}B_1=\frac{\pi^2}{12}.$ (См. **45.**)

48.23. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\zeta(3)=0,90154\,26774.$

(См. **48.09.**)

48.24. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{(2^3-1)\,\pi^4}{4\,!}B_2=\frac{7\pi^4}{720}=$ (См. **45.**)

$=\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\zeta(4)=0,94703\,28295.$

48.28. $1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\ldots=\frac{(2^{2n-1}-1)\,\pi^{2n}}{(2n)\,!}B_n.$ (См. **45, 47.2.**)

48.29. $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p).$ (См. **48.09.**)

(Для $p=1$ см. **48.21.**)

48.31. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}E_0=\frac{\pi}{4}.$ (Согласно **46.1** $E_0=1.$)

48.32. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots=G=0,91596\,55942.$

48.33. $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{32}E_1=\frac{\pi^3}{32}.$ (См. **45.**)

48.34. $1-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{7^4}+\ldots=0,98894\,455.$

48.36. $1-\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{7^6}+\ldots=0,99868\,522.$

48.38. $1-\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}-\frac{1}{7^8}+\ldots=0,999850.$

48.39. $1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\ldots=\frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}\,(2n)\,!}E_n.$ [См. **45, 47.4.**]

Обращение рядов

50. Пусть известен ряд

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + \ldots, \qquad [a \neq 0],$$

тогда коэффициентами ряда

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + \ldots$$

будут

$$A = \frac{1}{a}, \qquad B = -\frac{b}{a^3}, \qquad C = \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac),$$

$$D = \frac{1}{a^7}(5abc - a^2d - 5b^3),$$

$$E = \frac{1}{a^9}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c),$$

$$F = \frac{1}{a^{11}}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5),$$

$$G = \frac{1}{a^{13}}(8a^4bf + 8a^4ce + 4a^4d^2 + 120a^2b^3d + 180a^2b^2c^2 + 132b^6 - a^5g - 36a^3b^2e - 72a^3bcd - 12a^3c^3 - 330ab^4c).$$

Степени $S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots$

51.1. $$S^2 = a^2 + 2abx + (b^2 + 2ac)x^2 + 2(ad + bc)x^3 + (c^2 + 2ae + 2bd)x^4 + 2(af + be + cd)x^5 + \ldots$$

51.2. $$S^{1/2} = a^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\frac{c}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{1}{4}\frac{bc}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{1}{4}\frac{bd}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{c^2}{a^2} + \frac{3}{16}\frac{b^2c}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

51.3. $$S^{-1/2} = a^{-1/2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{b}{a}x + \left(\frac{3}{8}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{3}{4}\frac{bc}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{a} - \frac{5}{16}\frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{3}{4}\frac{bd}{a^2} + \frac{3}{8}\frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{e}{a} - \frac{15}{16}\frac{b^2c}{a^3} + \frac{35}{128}\frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

51.4. $$S^{-1} = a^{-1}\left[1 - \frac{b}{a}x + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)x^2 + \left(\frac{2bc}{a^2} - \frac{d}{a} - \frac{b^3}{a^3}\right)x^3 + \left(\frac{2bd}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{e}{a} - 3\frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}\right)x^4 + \ldots\right].$$

51.5. $$S^{-2}=a^{-2}\left[1-2\frac{b}{a}x+\left(3\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)x^2+\right.$$
$$+\left(6\frac{bc}{a^2}-2\frac{d}{a}-4\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+$$
$$\left.+\left(6\frac{bd}{a^2}+3\frac{c^2}{a^2}-2\frac{e}{a}-12\frac{b^2c}{a^3}+5\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ldots\right].$$

Корни квадратного уравнения

55.1. Корни $ax^2+bx+c=0$:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}},$$
$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Чтобы избежать потери точности при вычитании, следует пользоваться той из двух формул, которая требует арифметического сложения.

55.2. Если один из корней α вычислен точно, то

$$\beta=-\alpha-\frac{b}{a}\quad\text{или}\quad\beta=\frac{c}{a\alpha}.$$

Квадратные корни из комплексных чисел

58.1. $$\sqrt{x+iy}=\pm\left[\sqrt{\frac{r+x}{2}}+i\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right].$$

58.2. $$\sqrt{x-iy}=\pm\left[\sqrt{\frac{r+x}{2}}-i\sqrt{\frac{r-x}{2}}\right].$$

Здесь x может быть положительным или отрицательным, y — положительно,

$$r=+\sqrt{x^2+y^2},\qquad i=\sqrt{-1}.$$

Квадратные корни из $(r+x)/2$ и $(r-x)/2$ следует считать положительными.

58.3. Другой метод — представить $x+iy$ в форме

$$re^{i(\theta+2\pi k)}$$ (см. **604.05**),

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$, а k — целое число или 0. Тогда

$$\sqrt{x+iy}=\sqrt{re^{i\theta}}=\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}=\pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

59.1. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} \\ a_{2p} & a_{2q} \end{vmatrix} \equiv a_{1p}\, a_{2q} - a_{2p}\, a_{1q}.$$

59.2. Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix} \equiv a_{1p} \begin{vmatrix} a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix} - a_{1q} \begin{vmatrix} a_{2p} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3r} \end{vmatrix} + a_{1r} \begin{vmatrix} a_{2p} & a_{2q} \\ a_{3p} & a_{3q} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv a_{1p}(a_{2q}\, a_{3r} - a_{3q}\, a_{2r}) - a_{1q}(a_{2p}\, a_{3r} - a_{3p}\, a_{2r}) + \\ + a_{1r}(a_{2p}\, a_{3q} - a_{3p}\, a_{2q}).$$

59.3. Если дана система трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{1p}x + a_{1q}y + a_{1r}z &= u \\ a_{2p}x + a_{2q}y + a_{2r}z &= v, \\ a_{3p}x + a_{3q}y + a_{3r}z &= w, \end{aligned}$$

то

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & a_{1q} & a_{1r} \\ v & a_{2q} & a_{2r} \\ w & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{1p} & u & a_{1r} \\ a_{2p} & v & a_{2r} \\ a_{3p} & w & a_{3r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & u \\ a_{2p} & a_{2q} & v \\ a_{3p} & a_{3q} & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1p} & a_{1q} & a_{1r} \\ a_{2p} & a_{2q} & a_{2r} \\ a_{3p} & a_{3q} & a_{3r} \end{vmatrix}}.$$

Корни системы линейных уравнений с бо́льшим числом неизвестных, если число уравнений равно числу неизвестных, выражаются аналогичными формулами, если знаменатель отличен от нуля.

Алгебраические функции — Производные

60. $$\frac{d(au)}{dx}=a\frac{du}{dx},$$ где a — постоянная.

61. $$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

62. $$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

63. $$\frac{d(uvw)}{dx}=uv\frac{dw}{dx}+vw\frac{du}{dx}+wu\frac{dv}{dx}.$$

64. $$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}.$$

64.1. $$\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

64.2. $$\frac{d(1/x)}{dx}=-\frac{1}{x^2}.$$

64.3. $$\frac{d(x^{-n})}{dx}=-nx^{-(n+1)}.$$

65. $$\frac{d(u/v)}{dx}=\frac{1}{v}\frac{du}{dx}-\frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}.$$

66. $$\frac{df(u)}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

67. $$\frac{d^2f(u)}{dx^2}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2f(u)}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

68. $$\frac{d^n(uv)}{dx^n}=v\frac{d^nu}{dx^n}+n\frac{dv}{dx}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{d^kv}{dx^k}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}+\ldots+\frac{ud^nv}{dx^n}.$$

69.1. $$\frac{d}{dq}\int_p^q f(x)\,dx=f(q)$$ (p — постоянно).

69.2. $$\frac{d}{dp}\int_p^q f(x)\,dx=-f(p)$$ (q — постоянно).

69.3. $$\frac{d}{dc}\int_p^q f(x,\ c)\,dx=\int_p^q\frac{\partial}{\partial c}f(x,\ c)\,dx+f(q,\ c)\frac{dq}{dc}-f(p,\ c)\frac{dp}{dc}.$$

72. Если $\varphi(a)=0$ и $\psi(a)=0$, или если $\varphi(a)=\infty$ и $\psi(a)=\infty$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Если также $\varphi'(a)=0$ и $\psi'(a)=0$, или если $\varphi'(a)=\infty$ и $\psi'(a)=\infty$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$$ и т. д. *).

*) Более точную формулировку см., например, [1]. (*Прим. ред.*)

72.1. Если функция имеет вид $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$, то ее нужно алгебраическим или каким-либо другим преобразованием привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

72.2. Если функция имеет вид 0^0, ∞^0 или 1^∞, то ее надо сначала логарифмированием привести к виду $0\cdot\infty$, а затем к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

79. Общая формула интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\frac{du}{dv}\,dv.$$

Рациональные алгебраические функции — Интегралы *)

Интегралы, содержащие x^n

80. $\int dx = x.$

81.1. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$

81.2. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$

81.9. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $[n\neq-1]$.

82.1. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$. (См. примечание перед **600.**)

В этом случае нельзя интегрировать от отрицательного значения x до положительного. При отрицательном x надо взять $\ln|x|$, поскольку $\ln(-1)\equiv(2k+1)\pi i$ войдет в постоянную интегрирования (см. 409.03). (См. рисунок на стр. 23).

82.2. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$

82.3. $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}.$

82.4. $\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}.$

82.5. $\int \frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4x^4}.$

82.9. $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ $[n\neq 1]$.

---

*) Здесь и далее произвольная постоянная интегрирования опущена.

Интегралы, содержащие $X=a+bx$

83. $$\int (a+bx)^n\,dx=\frac{1}{b}\int X^n\,dX=\frac{X^{n+1}}{b(n+1)} \qquad [n\neq -1].$$

84.1. $\int x^m(a+bx)^n\,dx$ можно интегрировать почленно после разложения $(a+bx)^n$ по формуле бинома Ньютона, если n целое положительное.

84.2. Когда m целое положительное и если $m<n$ или n дробное, может быть, лучше использовать формулу

$$\int x^mX^n\,dx=\frac{1}{b^{m+1}}\int (X-a)^mX^n\,dX$$

и разложить $(X-a)^m$ по формуле бинома Ньютона.

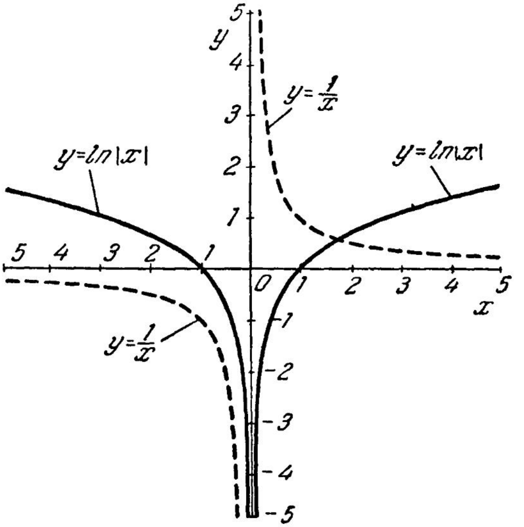

Рис. 82.1. Графики функций $y=1/x$ (пунктирная линия) и $y=\ln|x|$ (сплошная линия).

85. Интегрирование рациональных дробей — см. соответствующий раздел в учебниках интегрального исчисления.

89. Общая формула для **90—95**:

$$\int \frac{x^m\,dx}{X^n}=\frac{1}{b^{m+1}}\int\frac{(X-a)^m\,dX}{X^n}=\frac{1}{b^{m+1}}\left[\sum_{s=0}^{m}\frac{m!\,(-a)^sX^{m-n-s+1}}{(m-s)!\,s!\,(m-n-s+1)}\right],$$

за исключением $m-n-s+1=0$. В этом случае соответствующий член суммы в квадратных скобках должен быть заменен на

$$\frac{m!\,(-a)^{m-n+1}}{(m-n+1)!\,(n-1)!}\ln|X|.$$

Все буквы означают действительные величины. При наличии $\ln|X|$ нельзя интегрировать на интервале, содержащем точку $X=0$. Если X — отрицательная величина, то надо брать $\ln|X|$, так как $\ln(-1)\equiv(2k+1)\pi i$ войдет в постоянную интегрирования.

90. $$\int\frac{dx}{X^n}=\frac{-1}{(n-1)\,bX^{n-1}}\qquad [n\neq 1].$$

90. 1. $\int\frac{dx}{X}=\frac{1}{b}\ln|X|$. [См. примечание к **89**].

90. 2. $\int\frac{dx}{X^2}=-\frac{1}{bX}$. **90.3.** $\int\frac{dx}{X^3}=-\frac{1}{2bX^2}$.

90. 4. $\int\frac{dx}{X^4}=-\frac{1}{3bX^3}$. **90.5.** $\int\frac{dx}{X^5}=-\frac{1}{4bX^4}$.

91. $$\int\frac{x\,dx}{X^n}=\frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)\,X^{n-2}}+\frac{a}{(n-1)\,X^{n-1}}\right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

91. 1. $\int\frac{x\,dx}{X}=\frac{1}{b^2}[X-a\ln|X|]$.

91. 2. $\int\frac{x\,dx}{X^2}=\frac{1}{b^2}\left[\ln|X|+\frac{a}{X}\right]$.

91. 3. $\int\frac{x\,dx}{X^3}=\frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{X}+\frac{a}{2X^2}\right]$.

91. 4. $\int\frac{x\,dx}{X^4}=\frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{2X^2}+\frac{a}{3X^3}\right]$.

91. 5. $\int\frac{x\,dx}{X^5}=\frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{3X^3}+\frac{a}{4X^4}\right]$.

92. $$\int\frac{x^2\,dx}{X^n}=\frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)\,X^{n-3}}+\frac{2a}{(n-2)\,X^{n-2}}-\frac{a^2}{(n-1)\,X^{n-1}}\right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

92. 1. $\int\frac{x^2\,dx}{X}=\frac{1}{b^3}\left[\frac{X^2}{2}-2aX+a^2\ln|X|\right]$.

Другое выражение, отличающееся на постоянную:

$$\frac{x^2}{2b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{a^2}{b^3}\ln|a+bx|.$$

92.2. $$\int \frac{x^2\,dx}{X^2}=\frac{1}{b^3}\left[X-2a\ln|X|-\frac{a^2}{X}\right].$$

92.3. $$\int \frac{x^2\,dx}{X^3}=\frac{1}{b^3}\left[\ln|X|+\frac{2a}{X}-\frac{a^2}{2X^2}\right].$$

92.4. $$\int \frac{x^2\,dx}{X^4}=\frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{X}+\frac{2a}{2X^2}-\frac{a^2}{3X^3}\right].$$

92.5. $$\int \frac{x^2\,dx}{X^5}=\frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{2X^2}+\frac{2a}{3X^3}-\frac{a^2}{4X^4}\right].$$

92.6. $$\int \frac{x^2\,dx}{X^6}=\frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{3X^3}+\frac{2a}{4X^4}-\frac{a^2}{5X^5}\right].$$

92.7. $$\int \frac{x^2\,dx}{X^7}=\frac{1}{b^3}\left[-\frac{1}{4X^4}+\frac{2a}{5X^5}-\frac{a^2}{6X^6}\right].$$

93. $$\int \frac{x^3\,dx}{X^n}=\frac{1}{b^4}\left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}}+\frac{3a}{(n-3)X^{n-3}}-\right.$$
$$\left.-\frac{3a^2}{(n-2)X^{n-2}}+\frac{a^3}{(n-1)X^{n-1}}\right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени X равен нулю, см. 89).

93.1. $$\int \frac{x^3\,dx}{X}=\frac{1}{b^4}\left[\frac{X^3}{3}-\frac{3aX^2}{2}+3a^2X-a^3\ln|X|\right]=$$
$$=\frac{x^3}{3b}-\frac{ax^2}{2b^2}+\frac{a^2x}{b^3}-\frac{a^3}{b^4}\ln|a+bx|+\text{const}.$$

93.2. $$\int \frac{x^3\,dx}{X^2}=\frac{1}{b^4}\left[\frac{X^2}{2}-3aX+3a^2\ln|X|+\frac{a^3}{X}\right].$$

93.3. $$\int \frac{x^3\,dx}{X^3}=\frac{1}{b^4}\left[X-3a\ln|X|-\frac{3a^2}{X}+\frac{a^3}{2X^2}\right].$$

93.4. $$\int \frac{x^3\,dx}{X^4}=\frac{1}{b^4}\left[\ln|X|+\frac{3a}{X}-\frac{3a^2}{2X^2}+\frac{a^3}{3X^3}\right].$$

93.5. $$\int \frac{x^3\,dx}{X^5}=\frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{X}+\frac{3a}{2X^2}-\frac{3a^2}{3X^3}+\frac{a^3}{4X^4}\right].$$

93.6. $$\int \frac{x^3\,dx}{X^6}=\frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{2X^2}+\frac{3a}{3X^3}-\frac{3a^2}{4X^4}+\frac{a^3}{5X^5}\right].$$

93.7. $$\int \frac{x^3\,dx}{X^7}=\frac{1}{b^4}\left[-\frac{1}{3X^3}+\frac{3a}{4X^4}-\frac{3a^2}{5X^5}+\frac{a^3}{6X^6}\right].$$

94. $$\int \frac{x^4\,dx}{X^n}=\frac{1}{b^5}\left[\frac{-1}{(n-5)X^{n-5}}+\frac{4a}{(n-4)X^{n-4}}-\right.$$
$$\left.-\frac{6a^2}{(n-3)X^{n-3}}+\frac{4a^3}{(n-2)X^{n-2}}-\frac{a^4}{(n-1)X^{n-1}}\right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени при X равен нулю, см. 89).

94. 1. $$\int \frac{x^4\,dx}{X} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^4}{4} - \frac{4aX^3}{3} + \frac{6a^2X^2}{2} - 4a^3X + a^4 \ln|X|\right] = \\ = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^5}\ln|a+bx| + \text{const}.$$

94. 2. $$\int \frac{x^4\,dx}{X^2} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^3}{3} - \frac{4aX^2}{2} + 6a^2X - 4a^3\ln|X| - \frac{a^4}{X}\right].$$

94. 3. $$\int \frac{x^4\,dx}{X^3} = \frac{1}{b^5}\left[\frac{X^2}{2} - 4aX + 6a^2\ln|X| + \frac{4a^3}{X} - \frac{a^4}{2X^2}\right].$$

94. 4. $$\int \frac{x^4\,dx}{X^4} = \frac{1}{b^5}\left[X - 4a\ln|X| - \frac{6a^2}{X} + \frac{4a^3}{2X^2} - \frac{a^4}{3X^3}\right].$$

94. 5. $$\int \frac{x^4\,dx}{X^5} = \frac{1}{b^5}\left[\ln|X| + \frac{4a}{X} - \frac{6a^2}{2X^2} + \frac{4a^3}{3X^3} - \frac{a^4}{4X^4}\right].$$

94. 6. $$\int \frac{x^4\,dx}{X^6} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{X} + \frac{4a}{2X^2} - \frac{6a^2}{3X^3} + \frac{4a^3}{4X^4} - \frac{a^4}{5X^5}\right].$$

94. 7. $$\int \frac{x^4\,dx}{X^7} = \frac{1}{b^5}\left[-\frac{1}{2X^2} + \frac{4a}{3X^3} - \frac{6a^2}{4X^4} + \frac{4a^3}{5X^5} - \frac{a^4}{6X^6}\right].$$

95. $$\int \frac{x^5\,dx}{X^n} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{-1}{(n-6)X^{n-6}} + \frac{5a}{(n-5)X^{n-5}} - \right. \\ - \frac{10a^2}{(n-4)X^{n-4}} + \frac{10a^3}{(n-3)X^{n-3}} - \\ \left. - \frac{5a^4}{(n-2)X^{n-2}} + \frac{a^5}{(n-1)X^{n-1}}\right]$$

(кроме случая, когда какой-либо из показателей степени при X равен нулю, см. 89).

95. 1. $$\int \frac{x^5\,dx}{X} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^5}{5} - \frac{5aX^4}{4} + \frac{10a^2X^3}{3} - \frac{10a^3X^2}{2} + 5a^4X - a^5\ln|X|\right] = \\ = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^4}{4b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x^2}{2b^4} + \frac{a^4x}{b^5} - \frac{a^5}{b^6}\ln|a+bx| + \text{const}.$$

95. 2. $$\int \frac{x^5\,dx}{X^2} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^4}{4} - \frac{5aX^3}{3} + \frac{10a^2X^2}{2} - 10a^3X + 5a^4\ln|X| + \frac{a^5}{X}\right].$$

95. 3. $$\int \frac{x^5\,dx}{X^3} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^3}{3} - \frac{5aX^2}{2} + 10a^2X - 10a^3\ln|X| - \frac{5a^4}{X} + \frac{a^5}{2X^2}\right].$$

95. 4. $$\int \frac{x^5\,dx}{X^4} = \frac{1}{b^6}\left[\frac{X^2}{2} - 5aX + 10a^2\ln|X| + \frac{10a^3}{X} - \frac{5a^4}{2X^2} + \frac{a^5}{3X^3}\right].$$

95. 5. $$\int \frac{x^5\,dx}{X^5} = \frac{1}{b^6}\left[X - 5a\ln|X| - \frac{10a^2}{X} + \frac{10a^3}{2X^2} - \frac{5a^4}{3X^3} + \frac{a^5}{4X^4}\right].$$

95. 6. $$\int \frac{x^5\,dx}{X^6} = \frac{1}{b^6}\left[\ln|X| + \frac{5a}{X} - \frac{10a^2}{2X^2} + \frac{10a^3}{3X^3} - \frac{5a^4}{4X^4} + \frac{a^5}{5X^5}\right].$$

95.7. $\int \frac{x^5\,dx}{X^7}=\frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{X}+\frac{5a}{2X^2}-\frac{10a^2}{3X^3}+\frac{10a^3}{4X^4}-\frac{5a^4}{5X^5}+\frac{a^5}{6X^6}\right].$

95.8. $\int \frac{x^5\,dx}{X^8}=\frac{1}{b^6}\left[-\frac{1}{2X^2}+\frac{5a}{3X^3}-\frac{10a^2}{4X^4}+\frac{10a^3}{5X^5}-\frac{5a^4}{6X^6}+\frac{a^5}{7X^7}\right].$

100. Общая формула для **101—105**

$$\int \frac{dx}{x^m X^n}=\frac{-1}{a^{m+n-1}}\int \frac{\left(\frac{X}{x}-b\right)^{m+n-2}}{\left(\frac{X}{x}\right)^n}\,d\left(\frac{X}{x}\right)=$$

$$=\frac{-1}{a^{m+n-1}}\left[\sum_{s=0}^{m+n-2}\frac{(m+n-2)!\,X^{m-s-1}(-b)^s}{(m+n-s-2)!\,s!\,(m-s-1)\,x^{m-s-1}}\right],$$

кроме $m-s-1=0$, когда соответствующий член в квадратных скобках заменяется на

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,(n-1)!}(-b)^{m-1}\ln\left|\frac{X}{x}\right|.$$

101.1. $\int \frac{dx}{xX}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{X}{x}\right|.$

101.2. $\int \frac{dx}{xX^2}=-\frac{1}{a^2}\left[\ln\left|\frac{X}{x}\right|+\frac{bx}{X}\right].$

101.3. $\int \frac{dx}{xX^3}=-\frac{1}{a^3}\left[\ln\left|\frac{X}{x}\right|+\frac{2bx}{X}-\frac{b^2x^2}{2X^2}\right].$

101.4. $\int \frac{dx}{xX^4}=-\frac{1}{a^4}\left[\ln\left|\frac{X}{x}\right|+\frac{3bx}{X}-\frac{3b^2x^2}{2X^2}+\frac{b^3x^3}{3X^3}\right].$

101.5. $\int \frac{dx}{xX^5}=-\frac{1}{a^5}\left[\ln\left|\frac{X}{x}\right|+\frac{4bx}{X}-\frac{6b^2x^2}{2X^2}+\frac{4b^3x^3}{3X^3}-\frac{b^4x^4}{4X^4}\right].$

Другие выражения, отличающиеся на постоянную:

101.92. $\int \frac{dx}{xX^2}=\frac{1}{aX}-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{X}{x}\right|.$

101.93. $\int \frac{dx}{xX^3}=\frac{1}{2aX^2}+\frac{1}{a^2X}-\frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{X}{x}\right|.$

101.94. $\int \frac{dx}{xX^4}=\frac{1}{3aX^3}+\frac{1}{2a^2X^2}+\frac{1}{a^3X}-\frac{1}{a^4}\ln\left|\frac{X}{x}\right|.$

101.95. $\int \frac{dx}{xX^5}=\frac{1}{4aX^4}+\frac{1}{3a^2X^3}+\frac{1}{2a^3X^2}+\frac{1}{a^4X}-\frac{1}{a^5}\ln\left|\frac{X}{x}\right|.$

102.1. $\int \frac{dx}{x^2X}=-\frac{1}{a^2}\left[\frac{X}{x}-b\ln\left|\frac{X}{x}\right|\right].$

102.2. $\int \frac{dx}{x^2X^2}=-\frac{1}{a^3}\left[\frac{X}{x}-2b\ln\left|\frac{X}{x}\right|-\frac{b^2x}{X}\right].$

На этой странице $X=a+bx$.

102.3. $$\int\frac{dx}{x^2X^3}=-\frac{1}{a^4}\left[\frac{X}{x}-3b\ln\left|\frac{X}{x}\right|-\frac{3b^2x}{X}+\frac{b^3x^2}{2X^2}\right].$$

102.4. $$\int\frac{dx}{x^2X^4}=-\frac{1}{a^5}\left[\frac{X}{x}-4b\ln\left|\frac{X}{x}\right|-\frac{6b^2x}{X}+\frac{4b^3x^2}{2X^2}-\frac{b^4x^3}{3X^3}\right].$$

•Другие выражения, отличающиеся на постоянную:

102.91. $$\int\frac{dx}{x^2X}=-\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{X}{x}\right|.$$

102.92. $$\int\frac{dx}{x^2X^2}=-b\left[\frac{1}{a^2X}+\frac{1}{a^2bx}-\frac{2}{a^3}\ln\left|\frac{X}{x}\right|\right].$$

102.93. $$\int\frac{dx}{x^2X^3}=-b\left[\frac{1}{2a^2X^2}+\frac{2}{a^3X}+\frac{1}{a^3bx}-\frac{3}{a^4}\ln\left|\frac{X}{x}\right|\right].$$

102.94. $$\int\frac{dx}{x^2X^4}=-b\left[\frac{1}{3a^2X^3}+\frac{2}{2a^3X^2}+\frac{3}{a^4X}+\frac{1}{a^4bx}-\frac{4}{a^5}\ln\left|\frac{X}{x}\right|\right].$$

103.1. $$\int\frac{dx}{x^3X}=-\frac{1}{a^3}\left[\frac{X^2}{2x^2}-\frac{2bX}{x}+b^2\ln\left|\frac{X}{x}\right|\right]=$$
$$=-\frac{1}{2ax^2}+\frac{b}{a^2x}-\frac{b^2}{a^3}\ln\left|\frac{X}{x}\right|+\mathrm{const}.$$

103.2. $$\int\frac{dx}{x^3X^2}=-\frac{1}{a^4}\left[\frac{X^2}{2x^2}-\frac{3bX}{x}+3b^2\ln\left|\frac{X}{x}\right|+\frac{b^3x}{X}\right].$$

103.3. $$\int\frac{dx}{x^3X^3}=-\frac{1}{a^5}\left[\frac{X^2}{2x^2}-\frac{4bX}{x}+6b^2\ln\left|\frac{X}{x}\right|+\frac{4b^3x}{X}-\frac{b^4x^2}{2X^2}\right].$$

104.1. $$\int\frac{dx}{x^4X}=-\frac{1}{a^4}\left[\frac{X^3}{3x^3}-\frac{3bX^2}{2x^2}+\frac{3b^2X}{x}-b^3\ln\left|\frac{X}{x}\right|\right]=$$
$$=-\frac{1}{3ax^3}+\frac{b}{2a^2x^2}-\frac{b^2}{a^3x}+\frac{b^3}{a^4}\ln\left|\frac{X}{x}\right|+\mathrm{const}.$$

104.2. $$\int\frac{dx}{x^4X^2}=-\frac{1}{a^5}\left[\frac{X^3}{3x^3}-\frac{4bX^2}{2x^2}+\frac{6b^2X}{x}-4b^3\ln\left|\frac{X}{x}\right|-\frac{b^4x}{X}\right].$$

105.1. $$\int\frac{dx}{x^5X}=-\frac{1}{4ax^4}+\frac{b}{3a^2x^3}-\frac{b^2}{2a^3x^2}+\frac{b^3}{a^4x}-\frac{b^4}{a^5}\ln\left|\frac{X}{x}\right|.$$

Интегралы, содержащие линейные множители

110. $$\int\frac{(a+x)\,dx}{(c+x)}=x+(a-c)\ln|c+x|.$$

110.1. $$\int\frac{(a+fx)\,dx}{(c+gx)}=\frac{fx}{g}+\frac{ag-cf}{g^2}\ln|c+gx|.$$

111. $$\int \frac{dx}{(a+x)(c+x)}=\frac{1}{a-c}\ln\left|\frac{c+x}{a+x}\right| \qquad [a\neq c].$$

Если $a=c$, см. 90.2.

111.1. $$\int \frac{dx}{(a+fx)(c+gx)}=\frac{1}{ag-cf}\ln\left|\frac{c+gx}{a+fx}\right| \qquad [ag\neq cf].$$

Если $ag=cf$, см. 90.2.

111.2. $$\int \frac{x\,dx}{(a+x)(c+x)}=\frac{1}{(a-c)}\{a\ln|a+x|-c\ln|c+x|\}.$$

112. $$\int \frac{dx}{(a+x)(c+x)^2}=\frac{1}{(c-a)(c+x)}+\frac{1}{(c-a)^2}\ln\left|\frac{a+x}{c+x}\right|.$$

112.1. $$\int \frac{x\,dx}{(a+x)(c+x)^2}=\frac{c}{(a-c)(c+x)}-\frac{a}{(a-c)^2}\ln\left|\frac{a+x}{c+x}\right|.$$

112.2. $$\int \frac{x^2dx}{(a+x)(c+x)^2}=\frac{c^2}{(c-a)(c+x)}+\frac{a^2}{(c-a)^2}\ln|a+x|+$$
$$+\frac{c^2-2ac}{(c-a)^2}\ln|c+x|.$$

113. $$\int \frac{dx}{(a+x)^2(c+x)^2}=\frac{-1}{(a-c)^2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{c+x}\right)+\frac{2}{(a-c)^3}\ln\left|\frac{a+x}{c+x}\right|.$$

113.1. $$\int \frac{x\,dx}{(a+x)^2(c+x)^2}=\frac{1}{(a-c)^2}\left(\frac{a}{a+x}+\frac{c}{c+x}\right)+\frac{a+c}{(a-c)^3}\ln\left|\frac{a+x}{c+x}\right|.$$

113.2. $$\int \frac{x^2dx}{(a+x)^2(c+x)^2}=\frac{-1}{(a-c)^2}\left(\frac{a^2}{a+x}+\frac{c^2}{c+x}\right)+\frac{2ac}{(a-c)^3}\ln\left|\frac{a+x}{c+x}\right|.$$

Интегралы, содержащие $X=a^2+x^2$

120. $$\int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x$$ (см. рисунок на стр. 30).

120.01. $$\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}.$$

120.1. $$\int \frac{dx}{X}=\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

120.2. $$\int \frac{dx}{X^2}=\frac{x}{2a^2X}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

120.3. $$\int \frac{dx}{X^3}=\frac{x}{4a^2X^2}+\frac{3x}{8a^4X}+\frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

120.4. $$\int \frac{dx}{X^4}=\frac{x}{6a^2X^3}+\frac{5x}{24a^4X^2}+\frac{5x}{16a^6X}+\frac{5}{16a^7}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$$

120.9. $$\int \frac{dx}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}=\frac{x}{2na^2(a^2+b^2x^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(a^2+b^2x^2)^n}.$$

121. Интегралы вида

$$\int \frac{x^{2m+1}dx}{(a^2 \pm x^2)^n}$$

подстановкой $x^2 = z$ приводятся к

$$\frac{1}{2}\int \frac{z^m dz}{(a^2 \pm z)^n},$$

о которых см. **89—105** (для m положительного, отрицательного или равного 0).

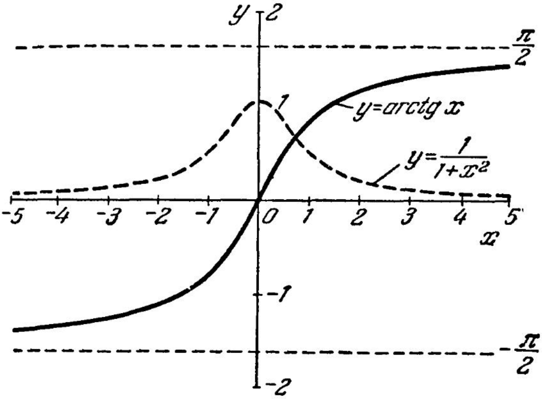

Рис. 120. Графики функций $y = \frac{1}{1+x^2}$ (пунктирная линия) и $y = \operatorname{arctg} x$ (сплошная линия).

121.1. $\int \frac{x\,dx}{X} = \int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2).$

121.2. $\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{1}{2X}.$ **121.3.** $\int \frac{x\,dx}{X^3} = -\frac{1}{4X^2}.$

121.4. $\int \frac{x\,dx}{X^4} = -\frac{1}{6X^3}.$

121.9. $\int \frac{x\,dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2nX^n}$ $[n \neq 0].$

122.1. $\int \frac{x^2dx}{X} = x - a\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

122.2. $\int \frac{x^2dx}{X^2} = -\frac{x}{2X} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

122.3. $\int \frac{x^2dx}{X^3} = -\frac{x}{4X^2} + \frac{x}{8a^2X} + \frac{1}{8a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

122.4. $\int \frac{x^2dx}{X^4} = -\frac{x}{6X^3} + \frac{x}{24a^2X^2} + \frac{x}{16a^4X} + \frac{1}{16a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

122.9. $\int \frac{x^2dx}{X^{n+1}} = \frac{-x}{2nX^n} + \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{X^n}.$

123.1. $\int \frac{x^3dx}{X} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln X.$

123.2. $\int \frac{x^3dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2}\ln X.$

123.3. $\int \frac{x^3dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}.$

123.4. $\int \frac{x^3dx}{X^4} = -\frac{1}{4X^2} + \frac{a^2}{6X^3}.$

123.9. $\int \frac{x^3dx}{X^{n+1}} = \frac{-1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}$ $[n>1]$.

124.1. $\int \frac{x^4dx}{X} = \frac{x^3}{3} - a^2x + a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

124.2. $\int \frac{x^4dx}{X^2} = x + \frac{a^2x}{2X} - \frac{3a}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

124.3. $\int \frac{x^4dx}{X^3} = \frac{a^2x}{4X^2} - \frac{5x}{8X} + \frac{3}{8a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

124.4. $\int \frac{x^4dx}{X^4} = \frac{a^2x}{6X^3} - \frac{7x}{24X^2} + \frac{x}{16a^2X} + \frac{1}{16a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

125.1. $\int \frac{x^5dx}{X} = \frac{x^4}{4} - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^4}{2}\ln X.$

125.2. $\int \frac{x^5dx}{X^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^4}{2X} - a^2\ln X.$

125.3. $\int \frac{x^5dx}{X^3} = \frac{a^2}{X} - \frac{a^4}{4X^2} + \frac{1}{2}\ln X.$

125.4. $\int \frac{x^5dx}{X^4} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{2X^2} - \frac{a^4}{6X^3}.$

125.9. $\int \frac{x^5dx}{X^{n+1}} = \frac{-1}{2(n-2)X^{n-2}} + \frac{a^2}{(n-1)X^{n-1}} - \frac{a^4}{2nX^n}$ $[n>2]$.

126.1. $\int \frac{x^6dx}{X} = \frac{x^5}{5} - \frac{a^2x^3}{3} + a^4x - a^5\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

127.1. $\int \frac{x^7dx}{X} = \frac{x^6}{6} - \frac{a^2x^4}{4} + \frac{a^4x^2}{2} - \frac{a^6}{2}\ln X.$

128.1. $\int \frac{x^8dx}{X} = \frac{x^7}{7} - \frac{a^2x^5}{5} + \frac{a^4x^3}{3} - a^6x + a^7\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

На этой странице $X=a^2+x^2$.

131.1. $\int \frac{dx}{xX}=\int \frac{dx}{x(a^2+x^2)}=\frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{a^2+x^2}$.

131.2. $\int \frac{dx}{xX^2}=\frac{1}{2a^2X}+\frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$.

131.3. $\int \frac{dx}{xX^3}=\frac{1}{4a^2X^2}+\frac{1}{2a^4X}+\frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}$.

131.4. $\int \frac{dx}{xX^4}=\frac{1}{6a^2X^3}+\frac{1}{4a^4X^2}+\frac{1}{2a^6X}+\frac{1}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}$.

132.1. $\int \frac{dx}{x^2X}=-\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

132.2. $\int \frac{dx}{x^2X^2}=-\frac{1}{a^4x}-\frac{x}{2a^4X}-\frac{3}{2a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

132.3. $\int \frac{dx}{x^2X^3}=-\frac{1}{a^6x}-\frac{x}{4a^4X^2}-\frac{7x}{8a^6X}-\frac{15}{8a^7}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

133.1. $\int \frac{dx}{x^3X}=-\frac{1}{2a^2x^2}-\frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}$.

133.2. $\int \frac{dx}{x^3X^2}=-\frac{1}{2a^4x^2}-\frac{1}{2a^4X}-\frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{X}$.

133.3. $\int \frac{dx}{x^3X^3}=-\frac{1}{2a^6x^2}-\frac{1}{a^6X}-\frac{1}{4a^4X^2}-\frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}$.

134.1. $\int \frac{dx}{x^4X}=-\frac{1}{3a^2x^3}+\frac{1}{a^4x}+\frac{1}{a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

134.2. $\int \frac{dx}{x^4X^2}=-\frac{1}{3a^4x^3}+\frac{2}{a^6x}+\frac{x}{2a^6X}+\frac{5}{2a^7}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

135.1. $\int \frac{dx}{x^5X}=-\frac{1}{4a^2x^4}+\frac{1}{2a^4x^2}+\frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}$.

135.2. $\int \frac{dx}{x^5X^2}=-\frac{1}{4a^4x^4}+\frac{1}{a^6x^2}+\frac{1}{2a^6X}+\frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}$.

136. $$\int \frac{dx}{(f+gx)(a^2+x^2)}=\frac{1}{(f^2+a^2g^2)}\Big[g\ln|f+gx|-$$
$$-\frac{g}{2}\ln(a^2+x^2)+\frac{f}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big].$$

Интегралы, содержащие $X=a^2-x^2$

140. $\int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. (См. примечание к **140.1.**)

Функция $1/(1-x^2)$ и интеграл от нее могут быть определены и для отрицательных значений x. См. рис. 140.

140.01. $\int \frac{dx}{x^2-1}=-\int \frac{dx}{1-x^2}$. [См. **140**].

140.02. $\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right|$.

Заметим, что

$$\frac{1}{2ab}\ln\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{1}{ab}\operatorname{Arth}\frac{bx}{a} \quad [b^2x^2<a^2],$$

$$\frac{1}{2ab}\ln\frac{bx+a}{bx-a}=\frac{1}{ab}\operatorname{Arcth}\frac{bx}{a} \quad [b^2x^2>a^2].$$

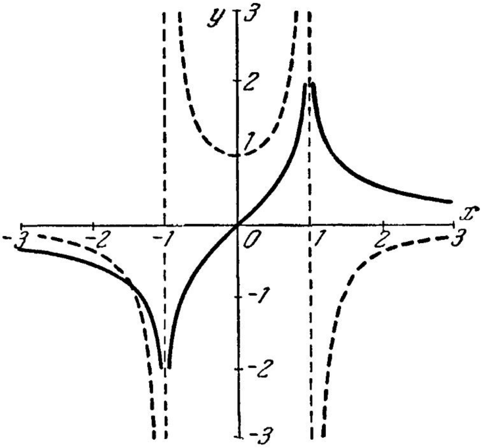

Рис. 140. Графики функций $y=\frac{1}{1-x^2}$ (пунктирная линия) и $y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ (сплошная линия).

140.1. $\int \frac{dx}{X}=\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$. [См. замечание к **140.02**].

140.2. $\int \frac{dx}{X^2}=\frac{x}{2a^2X}+\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

140.3. $\int \frac{dx}{X^3}=\frac{x}{4a^2X^2}+\frac{3x}{8a^4X}+\frac{3}{16a^5}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

140.4. $\int \frac{dx}{X^4} = \frac{x}{6a^2X^3} + \frac{5x}{24a^4X^2} + \frac{5x}{16a^6X} + \frac{5}{32a^7} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

140.9. $\int \frac{dx}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2-b^2x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(a^2-b^2x^2)^n}.$

141.1. $\int \frac{x\,dx}{X} = \int \frac{x\,dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2}\ln|a^2-x^2|.$

141.2. $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{1}{2X}.$ **141.3.** $\int \frac{x\,dx}{X^3} = \frac{1}{4X^2}.$

141.4. $\int \frac{x\,dx}{X^4} = \frac{1}{6X^3}.$ **141.9.** $\int \frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \frac{1}{2nX^n}$ $[n \neq 0].$

142.1. $\int \frac{x^2dx}{X} = -x + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

142.2. $\int \frac{x^2dx}{X^2} = \frac{x}{2X} - \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

142.3. $\int \frac{x^2dx}{X^3} = \frac{x}{4X^2} - \frac{x}{8a^2X} - \frac{1}{16a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

142.4. $\int \frac{x^2dx}{X^4} = \frac{x}{6X^3} - \frac{x}{24a^2X^2} - \frac{x}{16a^4X} - \frac{1}{32a^5}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

142.9. $\int \frac{x^2dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2nX^n} - \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{X^n}.$

143.1. $\int \frac{x^3dx}{X} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln|X|.$

143.2. $\int \frac{x^3dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2}\ln|X|.$

143.3. $\int \frac{x^3dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}.$ **143.4.** $\int \frac{x^3dx}{X^4} = -\frac{1}{4X^2} + \frac{a^2}{6X^3}.$

143.9. $\int \frac{x^3dx}{X^{n+1}} = \frac{-1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n}$ $[n > 1].$

144.1. $\int \frac{x^4dx}{X} = -\frac{x^3}{3} - a^2x + \frac{a^3}{2}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

144.2. $\int \frac{x^4dx}{X^2} = x + \frac{a^2x}{2X} - \frac{3a}{4}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

144.3. $\int \frac{x^4dx}{X^3} = \frac{a^2x}{4X^2} - \frac{5x}{8X} + \frac{3}{16a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

144.4. $\int \frac{x^4dx}{X^4} = \frac{a^2x}{6X^3} - \frac{7x}{24X^2} + \frac{x}{16a^2X} + \frac{1}{32a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

145.1. $\int \frac{x^5dx}{X} = -\frac{x^4}{4} - \frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^4}{2}\ln|X|.$

145.2. $\int \frac{x^5 dx}{X^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^4}{2X} + a^2 \ln|X|.$

145.3. $\int \frac{x^5 dx}{X^3} = -\frac{a^2}{X} + \frac{a^4}{4X^2} - \frac{1}{2} \ln|X|.$

145.4. $\int \frac{x^5 dx}{X^4} = \frac{1}{2X} - \frac{a^2}{2X^2} + \frac{a^4}{6X^3}.$

145.9. $\int \frac{x^5 dx}{X^{n+1}} = \frac{1}{2(n-2)X^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^4}{2nX^n}$ $[n>2].$

146.1. $\int \frac{x^6 dx}{X} = -\frac{x^5}{5} - \frac{a^2x^3}{3} - a^4x + \frac{a^5}{2} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

147.1. $\int \frac{x^7 dx}{X} = -\frac{x^6}{6} - \frac{a^2x^4}{4} - \frac{a^4x^2}{2} - \frac{a^6}{2} \ln|X|.$

148.1. $\int \frac{x^8 dx}{X} = -\frac{x^7}{7} - \frac{a^2x^5}{5} - \frac{a^4x^3}{3} - a^6x + \frac{a}{2} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

151.1. $\int \frac{dx}{xX} = \int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln\left|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right|.$

151.2. $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4} \ln\left|\frac{x^2}{X}\right|.$

151.3. $\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6} \ln\left|\frac{x^2}{X}\right|.$

151.4. $\int \frac{dx}{xX^4} = \frac{1}{6a^2X^3} + \frac{1}{4a^4X^2} + \frac{1}{2a^6X} + \frac{1}{2a^8} \ln\left|\frac{x^2}{X}\right|.$

152.1. $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

152.2. $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} + \frac{x}{2a^4X} + \frac{3}{4a^5} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

152.3. $\int \frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} + \frac{x}{4a^4X^2} + \frac{7x}{8a^6X} + \frac{15}{16a^7} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

153.1. $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^4} \ln\left|\frac{x^2}{X}\right|.$

153.2. $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{a^6} \ln\left|\frac{x^2}{X}\right|.$

153.3. $\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} + \frac{1}{a^6X} + \frac{1}{4a^4X^2} + \frac{3}{2a^8} \ln\left|\frac{x^2}{X}\right|.$

154.1. $\int \frac{dx}{x^4X} = -\frac{1}{3a^2x^3} - \frac{1}{a^4x} + \frac{1}{2a^5} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

154.2. $\int \frac{dx}{x^4X^2} = -\frac{1}{3a^4x^3} - \frac{2}{a^6x} + \frac{x}{2a^6X} + \frac{5}{4a^7} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$

155.1. $$\int \frac{dx}{x^5X} = -\frac{1}{4a^2x^4} - \frac{1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^6}\ln\left|\frac{x^2}{X}\right|.$$

155.2. $$\int \frac{dx}{x^5X^2} = -\frac{1}{4a^4x^4} - \frac{1}{a^6x^2} + \frac{1}{2a^6X} + \frac{3}{2a^8}\ln\left|\frac{x^2}{X}\right|.$$

В 155.1 и 155.2 $X=a^2-x^2$.

156. $$\int \frac{dx}{(f+gx)(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2g^2-f^2}\left[g\ln|f+gx| - \frac{g}{2}\ln|a^2-x^2| - \frac{f}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right].$$

Интегралы, содержащие $X=ax^2+bx+c$

160.01. $$\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad [4ac>b^2],$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| \qquad [b^2>4ac],$$

$$= \frac{1}{a(p-q)}\ln\left|\frac{x-p}{x-q}\right| \qquad [b^2>4ac],$$

где p и q — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$,

$$= -\frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{Arth}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$[b^2>4ac, \quad (2ax+b)^2<b^2-4ac],$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\operatorname{Arcth}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$[b^2>4ac, \quad (2ax+b)^2>b^2-4ac],$$

$$= -\frac{2}{2ax+b} \qquad [b^2=4ac].$$

(Положить $2ax+b=z$.)

160.02. $$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)X} + \frac{2a}{4ac-b^2}\int\frac{dx}{X}.$$ [См. **160.01.**]

160.03. $$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{2(4ac-b^2)X^2} + \frac{3a(2ax+b)}{(4ac-b^2)^2X} + \frac{6a^2}{(4ac-b^2)^2}\int\frac{dx}{X}.$$ [См. **160.01.**]

160.09. $$\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)X^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{X^{n-1}}.$$

160.11. $$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X}.$$ [См. **160.01.**]

160.12. $$\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{(4ac-b^2)X} - \frac{b}{4ac-b^2}\int\frac{dx}{X}.$$ [См. **160.01.**]

160.19. $$\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)(4ac-b^2)X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{X^{n-1}}.$$

160.21. $$\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln|X| + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{X}.$$ [См. **160.01.**]

160.22. $$\int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a(4ac-b^2)X} + \frac{2c}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{X}.$$ [См. **160.01.**]

160.27. $$\int \frac{x^m dx}{X} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)a} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{m-2}dx}{X} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{m-1}dx}{X}.$$

160.28. $$\int \frac{x^m dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)aX^{n-1}} + \\ + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-2}dx}{X^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-1}dx}{X^n}$$ $[m \neq 2n-1]$.

160.29. При $m=2n-1$
$$\int \frac{x^{2n-1}dx}{X^n} = \frac{1}{a}\int \frac{x^{2n-3}dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{2n-3}dx}{X^n} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{2n-2}dx}{X^n}.$$

161.11. $$\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c}\ln\left|\frac{x^2}{X}\right| - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X}.$$ [См. **160.01.**]

161.19. $$\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)X^{n-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{xX^{n-1}}.$$

161.21. $$\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2}\ln\left|\frac{X}{x^2}\right| - \frac{1}{cx} + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{X}.$$ [См. **160.01.**]

161.29. $$\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \\ - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} - \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}X^n}$$ $[m>1]$.

Интегралы, содержащие $a^3 \pm x^3$

165.01. $$\int \frac{dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a+x)^2}{a^2-ax+x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$$

165.02. $$\int \frac{dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{x}{3a^3(a^3+x^3)} + \frac{2}{3a^3}\int \frac{dx}{a^3+x^3}.$$

165.11. $$\int \frac{x\,dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2-ax+x^2}{(a+x)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}.$$

165.12. $$\int \frac{x\,dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(a^3+x^3)} + \frac{1}{3a^3}\int \frac{x\,dx}{a^3+x^3}.$$

165.21. $$\int \frac{x^2dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{3}\ln|a^3+x^3|.$$

165.22. $\int \frac{x^2 dx}{(a^3+x^3)^2} = -\frac{1}{3(a^3+x^3)}.$

165.31. $\int \frac{x^3 dx}{a^3+x^3} = x - a^3 \int \frac{dx}{a^3+x^3}.$ [См. **165.01.**]

165.32. $\int \frac{x^3 dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{-x}{3(a^3+x^3)} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{a^3+x^3}.$ [См. **165.01.**]

165.41. $\int \frac{x^4 dx}{a^3+x^3} = \frac{x^2}{2} - a^3 \int \frac{x\,dx}{a^3+x^3}.$ [См. **165.11.**]

165.42. $\int \frac{x^4 dx}{(a^3+x^3)^2} = -\frac{x^2}{3(a^3+x^3)} + \frac{2}{3} \int \frac{x\,dx}{a^3+x^3}.$ [См. **165.11.**]

165.51. $\int \frac{x^5 dx}{a^3+x^3} = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3} \ln|a^3+x^3|.$

165.52. $\int \frac{x^5 dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{a^3}{3(a^3+x^3)} + \frac{1}{3} \ln|a^3+x^3|.$

166.11. $\int \frac{dx}{x(a^3+x^3)} = \frac{1}{3a^3} \ln\left|\frac{x^3}{a^3+x^3}\right|.$

166.12. $\int \frac{dx}{x(a^3+x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3+x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln\left|\frac{x^3}{a^3+x^3}\right|.$

166.21. $\int \frac{dx}{x^2(a^3+x^3)} = -\frac{1}{a^3 x} - \frac{1}{a^3} \int \frac{x\,dx}{a^3+x^3}.$ [См. **165.11.**]

166.22. $\int \frac{dx}{x^2(a^3+x^3)^2} = -\frac{1}{a^6 x} - \frac{x^2}{3a^6(a^3+x^3)} -$

$- \frac{4}{3a^6} \int \frac{x\,dx}{a^3+x^3}.$ [См. **165.11.**]

166.31. $\int \frac{dx}{x^3(a^3+x^3)} = -\frac{1}{2a^3x^2} - \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{a^3+x^3}.$ [См. **165.01.**]

166.32. $\int \frac{dx}{x^3(a^3+x^3)^2} = -\frac{1}{2a^6x^2} - \frac{x}{3a^6(a^3+x^3)} -$

$- \frac{5}{3a^6} \int \frac{dx}{a^3+x^3}.$ [См. **165.01.**]

166.41. $\int \frac{dx}{x^4(a^3+x^3)} = -\frac{1}{3a^3x^3} + \frac{1}{3a^6} \ln\left|\frac{a^3+x^3}{x^3}\right|.$

166.42. $\int \frac{dx}{x^4(a^3+x^3)^2} = -\frac{1}{3a^6x^3} - \frac{1}{3a^6(a^3+x^3)} + \frac{2}{3a^9} \ln\left|\frac{a^3+x^3}{x^3}\right|.$

168.01. $\int \frac{dx}{a^3-x^3} = \frac{1}{6a^2} \ln \frac{a^2+ax+x^2}{(a-x)^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+a}{a\sqrt{3}}.$

168.02. $\int \frac{dx}{(a^3-x^3)^2} = \frac{x}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{2}{3a^3} \int \frac{dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.01.**]

168.11. $\int \frac{x\,dx}{a^3-x^3} = \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2+ax+x^2}{(a-x)^2} - \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+a}{a\sqrt{3}}.$

168.12. $\int \frac{x\,dx}{(a^3-x^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^3} \int \frac{x\,dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.11.**]

168.21. $\int \frac{x^2dx}{a^3-x^3} = -\frac{1}{3} \ln |a^3-x^3|.$

168.22. $\int \frac{x^2dx}{(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3(a^3-x^3)}.$

168.31. $\int \frac{x^3dx}{a^3-x^3} = -x + a^3 \int \frac{dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.01.**]

168.32. $\int \frac{x^3dx}{(a^3-x^3)^2} = \frac{x}{3(a^3-x^3)} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.01.**]

168.41. $\int \frac{x^4dx}{a^3-x^3} = -\frac{x^2}{2} + a^3 \int \frac{x\,dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.11.**]

168.42. $\int \frac{x^4dx}{(a^3-x^3)^2} = \frac{x^2}{3(a^3-x^3)} - \frac{2}{3} \int \frac{x\,dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.11.**]

168.51. $\int \frac{x^5dx}{a^3-x^3} = -\frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3} \ln |a^3-x^3|.$

168.52. $\int \frac{x^5dx}{(a^3-x^3)^2} = \frac{a^3}{3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3} \ln |a^3-x^3|.$

169.11. $\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)} = \frac{1}{3a^3} \ln \left| \frac{x^3}{a^3-x^3} \right|.$

169.12. $\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln \left| \frac{x^3}{a^3-x^3} \right|.$

169.21. $\int \frac{dx}{x^2(a^3-x^3)} = -\frac{1}{a^3x} + \frac{1}{a^3} \int \frac{x\,dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.11.**]

169.22. $\int \frac{dx}{x^2(a^3-x^3)^2} = -\frac{1}{a^6x} + \frac{x^2}{3a^6(a^3-x^3)} + \frac{4}{3a^6} \int \frac{x\,dx}{a^3-x^3}.$

[См. **168.11.**]

169.31. $\int \frac{dx}{x^3(a^3-x^3)} = -\frac{1}{2a^3x^2} + \frac{1}{a^3} \int \frac{dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.01.**]

169.32. $\int \frac{dx}{x^3(a^3-x^3)^2} = -\frac{1}{2a^6x^2} + \frac{x}{3a^6(a^3-x^3)} +$

$+ \frac{5}{3a^6} \int \frac{dx}{a^3-x^3}.$ [См. **168.01.**]

169.41. $\int \frac{dx}{x^4(a^3-x^3)} = -\frac{1}{3a^3x^3} + \frac{1}{3a^6} \ln \left| \frac{x^3}{a^3-x^3} \right|.$

169.42. $\int \frac{dx}{x^4(a^3-x^3)^2} = -\frac{1}{3a^6x^3} + \frac{1}{3a^6(a^3-x^3)} + \frac{2}{3a^9} \ln \left| \frac{x^3}{a^3-x^3} \right|.$

Интегралы, содержащие $a^4 \pm x^4$

170. $$\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$$

170.1. $$\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}.$$

170.2. $$\int \frac{x^2dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$$

170.3. $$\int \frac{x^3dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4} \ln (a^4+x^4).$$

171. $$\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

171.1. $$\int \frac{x\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^2} \ln \left| \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} \right|.$$

171.2. $$\int \frac{x^2dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

171.3. $$\int \frac{x^3dx}{a^4-x^4} = -\frac{1}{4} \ln |a^4-x^4|.$$

173. $$\int \frac{dx}{x(a+bx^m)} = \frac{1}{am} \ln \left| \frac{x^m}{a+bx^m} \right|.$$

Иррациональные алгебраические функции—Интегралы

Интегралы, содержащие $x^{1/2}$

180. $$\int x^{p/2}dx = \frac{2}{p+2} x^{(p+2)/2},$$

180.1. $$\int x^{1/2}dx = \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x^{3/2}.$$

180.3. $$\int x^{3/2}dx = \frac{2}{5} x^{5/2}.$$ **180.5.** $$\int x^{5/2}dx = \frac{2}{7} x^{7/2}.$$

181. $$\int \frac{dx}{x^{p/2}} = -\frac{2}{(p-2)\,x^{(p-2)/2}}.$$

181.1. $$\int \frac{dx}{x^{1/2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2x^{1/2}.$$ **181.3.** $$\int \frac{dx}{x^{3/2}} = -\frac{2}{x^{1/2}}.$$

181.5. $$\int \frac{dx}{x^{5/2}} = -\frac{2}{3x^{3/2}}.$$ **181.7.** $$\int \frac{dx}{x^{7/2}} = -\frac{2}{5x^{5/2}}.$$

185.11. $$\int \frac{x^{1/2}dx}{a^2+b^2x} = \frac{2x^{1/2}}{b^2} - \frac{2a}{b^3}\operatorname{arctg}\frac{bx^{1/2}}{a}.$$

185.13. $$\int \frac{x^{3/2}dx}{a^2+b^2x} = \frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{b^2} - \frac{2a^2x^{1/2}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5}\operatorname{arctg}\frac{bx^{1/2}}{a}.$$

185.21. $$\int \frac{x^{1/2}dx}{(a^2+b^2x)^2} = -\frac{x^{1/2}}{b^2(a^2+b^2x)} + \frac{1}{ab^3}\operatorname{arctg}\frac{bx^{1/2}}{a}.$$

185.23. $$\int \frac{x^{3/2}dx}{(a^2+b^2x)^2} = \frac{2x^{3/2}}{b^2(a^2+b^2x)} + \frac{3a^2x^{1/2}}{b^4(a^2+b^2x)} - \frac{3a}{b^5}\operatorname{arctg}\frac{bx^{1/2}}{a}.$$

186.11. $$\int \frac{dx}{(a^2+b^2x)\,x^{1/2}} = \frac{2}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx^{1/2}}{a}.$$

186.13. $$\int \frac{dx}{(a^2+b^2x)\,x^{3/2}} = -\frac{2}{a^2x^{1/2}} - \frac{2b}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{bx^{1/2}}{a}.$$

186.21. $$\int \frac{dx}{(a^2+b^2x)^2x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{a^2(a^2+b^2x)} + \frac{1}{a^3b}\operatorname{arctg}\frac{bx^{1/2}}{a}.$$

186.23. $$\int \frac{dx}{(a^2+b^2x)^2x^{3/2}} = -\frac{2}{a^2(a^2+b^2x)\,x^{1/2}} - \frac{3b^2x^{1/2}}{a^4(a^2+b^2x)} - \frac{3b}{a^5}\operatorname{arctg}\frac{bx^{1/2}}{a}.$$

187.11. $$\int \frac{x^{1/2}dx}{a^2-b^2x} = -\frac{2x^{1/2}}{b^2} + \frac{a}{b^3}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$$

187.13. $$\int \frac{x^{3/2}dx}{a^2-b^2x} = -\frac{2}{3}\frac{x^{3/2}}{b^2} - \frac{2a^2x^{1/2}}{b^4} + \frac{a^3}{b^5}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$$

187.21. $$\int \frac{x^{1/2}dx}{(a^2-b^2x)^2} = \frac{x^{1/2}}{b^2(a^2-b^2x)} - \frac{1}{2ab^3}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$$

187.23. $$\int \frac{x^{3/2}dx}{(a^2-b^2x)^2} = \frac{3a^2x^{1/2}-2b^2x^{3/2}}{b^4(a^2-b^2x)} - \frac{3a}{2b^5}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$$

188.11. $$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x)\,x^{1/2}} = \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$$

188.13. $$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x)\,x^{3/2}} = -\frac{2}{a^2x^{1/2}} + \frac{b}{a^3}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$$

188.21. $$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x)^2x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{a^2(a^2-b^2x)} + \frac{1}{2a^3b}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$$

188.23. $$\int \frac{dx}{(a^2-b^2x)^2x^{3/2}} = \frac{-2}{a^2(a^2-b^2x)\,x^{1/2}} + \frac{3b^2x^{1/2}}{a^4(a^2-b^2x)} + \frac{3b}{2a^5}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$$

189.1. $$\int \frac{x^{1/2}dx}{a^4+x^2} = \frac{-1}{2a\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$$

189.2. $$\int \frac{dx}{(a^4+x^2)\,x^{1/2}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\ln\frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$$

189.3. $$\int \frac{x^{1/2}dx}{a^4-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x^{1/2}}{a-x^{1/2}}\right| - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x^{1/2}}{a}.$$

189.4. $$\int \frac{dx}{(a^4-x^2)\,x^{1/2}} = \frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{a+x^{1/2}}{a-x^{1/2}}\right| + \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x^{1/2}}{a}.$$

Интегралы, содержащие $X^{1/2}=(a+bx)^{1/2}$

190. $$\int \frac{x^q dx}{X^{p/2}} = \frac{1}{b^{q+1}}\int \frac{(X-a)^q\,dX}{X^{p/2}} \qquad [q>0].$$

При целом положительном q разложить числитель по формуле бинома Ньютона.

191. $$\int \frac{dx}{X^{p/2}} = \frac{-2}{(p-2)\,bX^{(p-2)/2}}.$$

191.01. $$\int \frac{dx}{X^{1/2}} = \frac{2}{b}X^{1/2}.$$

191.03. $$\int \frac{dx}{X^{3/2}} = \frac{-2}{bX^{1/2}}.$$

191.05. $$\int \frac{dx}{X^{5/2}} = \frac{-2}{3bX^{3/2}}.$$

191.1. $$\int \frac{x\,dx}{X^{p/2}} = \frac{2}{b^2}\left[\frac{-1}{(p-4)\,X^{(p-4)/2}} + \frac{a}{(p-2)\,X^{(p-2)/2}}\right].$$

191.11. $$\int \frac{x\,dx}{X^{1/2}} = \frac{2}{b^2}\left(\frac{X^{3/2}}{3} - aX^{1/2}\right).$$

191.13. $$\int \frac{x\,dx}{X^{3/2}} = \frac{2}{b^2}\left(X^{1/2} + \frac{a}{X^{1/2}}\right).$$

191.15. $$\int \frac{x\,dx}{X^{5/2}} = \frac{2}{b^2}\left(\frac{-1}{X^{1/2}} + \frac{a}{3X^{3/2}}\right).$$

191.17. $$\int \frac{x\,dx}{X^{7/2}} = \frac{2}{b^2}\left(\frac{-1}{3X^{3/2}} + \frac{a}{5X^{5/2}}\right).$$

191.2. $$\int\frac{x^2dx}{X^{p/2}}=\frac{2}{b^3}\left[\frac{-1}{(p-6)\,X^{(p-6)/2}}+\frac{2a}{(p-4)\,X^{(p-4)/2}}-\frac{a^2}{(p-2)\,X^{(p-2)/2}}\right].$$

191.21. $$\int\frac{x^2dx}{X^{1/2}}=\frac{2}{b^3}\left(\frac{X^{5/2}}{5}-\frac{2aX^{3/2}}{3}+a^2X^{1/2}\right).$$

191.23. $$\int\frac{x^2dx}{X^{3/2}}=\frac{2}{b^3}\left(\frac{X^{3/2}}{3}-2aX^{1/2}-\frac{a^2}{X^{1/2}}\right).$$

191.25. $$\int\frac{x^2dx}{X^{5/2}}=\frac{2}{b^3}\left(X^{1/2}+\frac{2a}{X^{1/2}}-\frac{a^2}{3X^{3/2}}\right).$$

191.27. $$\int\frac{x^2dx}{X^{7/2}}=\frac{2}{b^3}\left(\frac{-1}{X^{1/2}}+\frac{2a}{3X^{3/2}}-\frac{a^2}{5X^{5/2}}\right).$$

192.1. $$\int\frac{dx}{xX^{p/2}}=\frac{2}{(p-2)\,aX^{(p-2)/2}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{xX^{(p-2)/2}}\qquad [p>1].$$

192.11. $$\int\frac{dx}{xX^{1/2}}=\frac{1}{a^{1/2}}\ln\left|\frac{X^{1/2}-a^{1/2}}{X^{1/2}+a^{1/2}}\right|\qquad [a>0,\ X>0],$$

$$=-\frac{2}{a^{1/2}}\operatorname{Arth}\frac{X^{1/2}}{a^{1/2}}\qquad [a>X>0],$$

$$=-\frac{2}{a^{1/2}}\operatorname{Arcth}\frac{X^{1/2}}{a^{1/2}}\qquad [X>a>0],$$

$$=\frac{2}{(-a)^{1/2}}\operatorname{arctg}\frac{X^{1/2}}{(-a)^{1/2}}\qquad [a<0,\ X>0].$$

(Положить $X^{1/2}=z$. См. **120.1** и **140.1.**)

192.13. $$\int\frac{dx}{xX^{3/2}}=\frac{2}{aX^{1/2}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. **192.11.**]

192.15. $$\int\frac{dx}{xX^{5/2}}=\frac{2}{3aX^{3/2}}+\frac{2}{a^2X^{1/2}}+\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. **192.11.**]

192.17. $$\int\frac{dx}{xX^{7/2}}=\frac{2}{5aX^{5/2}}+\frac{2}{3a^2X^{3/2}}+\frac{2}{a^3X^{1/2}}+\frac{1}{a^3}\int\frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. **192.11.**]

192.2. $$\int\frac{dx}{x^2X^{p/2}}=\frac{-1}{axX^{(p-2)/2}}-\frac{pb}{2a}\int\frac{dx}{xX^{p/2}}.$$

192.21. $$\int\frac{dx}{x^2X^{1/2}}=\frac{-X^{1/2}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. **192.11.**]

192.23. $$\int\frac{dx}{x^2X^{3/2}}=\frac{-1}{axX^{1/2}}-\frac{3b}{a^2X^{1/2}}-\frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. **192.11.**]

192.25. $$\int \frac{dx}{x^2X^{5/2}} = \frac{-1}{axX^{3/2}} - \frac{5b}{3a^2X^{3/2}} - \frac{5b}{a^3X^{1/2}} - \frac{5b}{2a^3}\int \frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. 192.11.]

192.9. $$\int \frac{dx}{x^pX^{1/2}} = \frac{-X^{1/2}}{(p-1)\,ax^{p-1}} - \frac{(2p-3)\,b}{(2p-2)\,a}\int \frac{dx}{x^{p-1}X^{1/2}}.$$

193. $$\int X^{p/2}dx = \frac{2X^{(p+2)/2}}{(p+2)\,b}.$$

193.01. $$\int X^{1/2}dx = \frac{2X^{3/2}}{3b}.$$ **193.03.** $$\int X^{3/2}dx = \frac{2X^{5/2}}{5b}.$$

193.1. $$\int xX^{p/2}dx = \frac{2}{b^2}\left(\frac{X^{(p+4)/2}}{p+4} - \frac{aX^{(p+2)/2}}{p+2}\right).$$

193.11. $$\int xX^{1/2}dx = \frac{2}{b^2}\left(\frac{X^{5/2}}{5} - \frac{aX^{3/2}}{3}\right).$$

193.13. $$\int xX^{3/2}dx = \frac{2}{b^2}\left(\frac{X^{7/2}}{7} - \frac{aX^{5/2}}{5}\right).$$

193.2. $$\int x^2X^{p/2}dx = \frac{2}{b^3}\left(\frac{X^{(p+6)/2}}{p+6} - \frac{2aX^{(p+4)/2}}{p+4} + \frac{a^2X^{(p+2)/2}}{p+2}\right).$$

193.21. $$\int x^2X^{1/2}dx = \frac{2}{b^3}\left(\frac{X^{7/2}}{7} - \frac{2aX^{5/2}}{5} + \frac{a^2X^{3/2}}{3}\right).$$

194.1. $$\int \frac{X^{p/2}dx}{x} = \frac{2X^{p/2}}{p} + a\int \frac{X^{(p-2)/2}dx}{x}.$$

194.11. $$\int \frac{X^{1/2}dx}{x} = 2X^{1/2} + a\int \frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. 192.11.]

194.13. $$\int \frac{X^{3/2}dx}{x} = \frac{2X^{3/2}}{3} + 2aX^{1/2} + a^2\int \frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. 192.11.]

194.15. $$\int \frac{X^{5/2}dx}{x} = \frac{2X^{5/2}}{5} + \frac{2aX^{3/2}}{3} + 2a^2X^{1/2} + a^3\int \frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. 192.11.]

194.2. $$\int \frac{X^{p/2}dx}{x^2} = -\frac{X^{(p+2)/2}}{ax} + \frac{pb}{2a}\int \frac{X^{p/2}dx}{x}.$$

194.21. $$\int \frac{X^{1/2}dx}{x^2} = -\frac{X^{1/2}}{x} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. 192.11.]

194.31. $$\int \frac{X^{1/2}dx}{x^3} = -\frac{(2a+bx)\,X^{1/2}}{4ax^2} - \frac{b^2}{8a}\int \frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. 192.11.]

Интегралы, содержащие $X^{1/2}=(a+bx)^{1/2}$ и $U^{1/2}=(f+gx)^{1/2}$

Здесь всюду $k=ag-bf$.

195.01. $$\int\frac{dx}{X^{1/2}U^{1/2}}=\frac{2}{\sqrt{-bg}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-gX}{bU}}\qquad\begin{bmatrix}b>0\\ g<0\end{bmatrix},$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{-bg}}\arcsin\frac{2bgx+ag+bf}{bf-ag}\qquad\begin{bmatrix}b>0\\ g<0\end{bmatrix},$$
$$=\frac{2}{\sqrt{bg}}\ln\left\{\sqrt{bgX}+b\sqrt{U}\right\}\qquad[bg>0].$$

195.02. $$\int\frac{dx}{X^{1/2}U}=\frac{2}{\sqrt{-kg}}\operatorname{arctg}\frac{gX^{1/2}}{\sqrt{-kg}}\qquad[kg<0],$$
$$=\frac{1}{\sqrt{kg}}\ln\left|\frac{gX^{1/2}-\sqrt{kg}}{gX^{1/2}+\sqrt{kg}}\right|\qquad[kg>0].$$

195.03. $$\int\frac{dx}{X^{1/2}U^{3/2}}=-\frac{2X^{1/2}}{kU^{1/2}}.$$

195.04. $$\int\frac{U^{1/2}dx}{X^{1/2}}=\frac{X^{1/2}U^{1/2}}{b}-\frac{k}{2b}\int\frac{dx}{X^{1/2}U^{1/2}}.$$ [См. **195.01.**]

195.09. $$\int\frac{U^n dx}{X^{1/2}}=\frac{2}{(2n+1)b}\left(X^{1/2}U^n-nk\int\frac{U^{n-1}dx}{X^{1/2}}\right).$$

196.01. $$\int X^{1/2}U^{1/2}dx=\frac{k+2bU}{4bg}X^{1/2}U^{1/2}-\frac{k^2}{8bg}\int\frac{dx}{X^{1/2}U^{1/2}}.$$ [См. **195.01.**]

196.02. $$\int\frac{x\,dx}{X^{1/2}U^{1/2}}=\frac{X^{1/2}U^{1/2}}{bg}-\frac{ag+bf}{2bg}\int\frac{dx}{X^{1/2}U^{1/2}}.$$ [См. **195.01.**]

196.03. $$\int\frac{dx}{X^{1/2}U^n}=-\frac{1}{(n-1)k}\left\{\frac{X^{1/2}}{U^{n-1}}+\left(n-\frac{3}{2}\right)b\int\frac{dx}{X^{1/2}U^{n-1}}\right\}.$$

196.04. $$\int X^{1/2}U^n dx=\frac{1}{(2n+3)g}\left(2X^{1/2}U^{n+1}+k\int\frac{U^n dx}{X^{1/2}}\right).$$ [См. **195.09.**]

196.05. $$\int\frac{X^{1/2}dx}{U^n}=\frac{1}{(n-1)g}\left(-\frac{X^{1/2}}{U^{n-1}}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{X^{1/2}U^{n-1}}\right).$$ [См. **196.03.**]

197. $$\int\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\int f\left(\frac{au^2}{1-bu^2}\right)\frac{du}{(1-bu^2)},$$
где $u=\dfrac{x}{\sqrt{a+bx^2}}$.

Интегралы, содержащие $r=(x^2+a^2)^{1/2}$

200.01. $\displaystyle\int\frac{dx}{r}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+r|.$

Заметим, что

$$\ln\left|\frac{x+r}{a}\right|=\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{r+x}{r-x}\right|.$$

Надо брать положительные значения r и a.

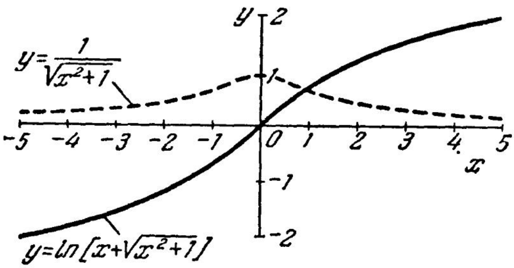

Рис. 200.01. Графики функций $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (пунктирная линия) и $y=\ln[x+\sqrt{x^2+1}]$ (сплошная линия).

200.03. $\displaystyle\int\frac{dx}{r^3}=\frac{1}{a^2}\frac{x}{r}.$

200.05. $\displaystyle\int\frac{dx}{r^5}=\frac{1}{a^4}\left[\frac{x}{r}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3}\right].$

200.07. $\displaystyle\int\frac{dx}{r^7}=\frac{1}{a^6}\left[\frac{x}{r}-\frac{2}{3}\frac{x^3}{r^3}+\frac{1}{5}\frac{x^5}{r^5}\right].$

200.09. $\displaystyle\int\frac{dx}{r^9}=\frac{1}{a^8}\left[\frac{x}{r}-\frac{3}{3}\frac{x^3}{r^3}+\frac{3}{5}\frac{x^5}{r^5}-\frac{1}{7}\frac{x^7}{r^7}\right].$

200.11. $\displaystyle\int\frac{dx}{r^{11}}=\frac{1}{a^{10}}\left[\frac{x}{r}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{r^3}+\frac{6}{5}\frac{x^5}{r^5}-\frac{4}{7}\frac{x^7}{r^7}+\frac{1}{9}\frac{x^9}{r^9}\right].$

200.13. $\displaystyle\int\frac{dx}{r^{13}}=\frac{1}{a^{12}}\left[\frac{x}{r}-\frac{5}{3}\frac{x^3}{r^3}+\frac{10}{5}\frac{x^5}{r^5}-\frac{10}{7}\frac{x^7}{r^7}+\frac{5}{9}\frac{x^9}{r^9}-\frac{1}{11}\frac{x^{11}}{r^{11}}\right].$

200.15. $\displaystyle\int\frac{dx}{r^{15}}=\frac{1}{a^{14}}\left[\frac{x}{r}-\frac{6}{3}\frac{x^3}{r^3}+\frac{15}{5}\frac{x^5}{r^5}-\frac{20}{7}\frac{x^7}{r^7}+\frac{15}{9}\frac{x^9}{r^9}-\frac{6}{11}\frac{x^{11}}{r^{11}}+\frac{1}{13}\frac{x^{13}}{r^{13}}\right].$

Интегралы **200.03—200.15** находят посредством подстановки:

$$z^2=\frac{x^2}{x^2+a^2};\quad \text{тогда } dx=\frac{a\,dz}{(1-z^2)^{3/2}}.$$

201.01. $\int \frac{x\,dx}{r} = r.$ **201.03.** $\int \frac{x\,dx}{r^3} = -\frac{1}{r}.$

201.05. $\int \frac{x\,dx}{r^5} = -\frac{1}{3r^3}.$ **201.07.** $\int \frac{x\,dx}{r^7} = -\frac{1}{5r^5}.$

201.9. $\int \frac{x\,dx}{r^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-1)\,r^{2p-1}}.$

202.01. $\int \frac{x^2dx}{r} = \frac{xr}{2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+r|.$ (См. замечание в 200.01.)

202.03. $\int \frac{x^2dx}{r^3} = -\frac{x}{r} + \ln|x+r|.$

202.05. $\int \frac{x^2dx}{r^5} = \frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{r^3}.$

202.07. $\int \frac{x^2dx}{r^7} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{r^5}\right].$

202.09. $\int \frac{x^2dx}{r^9} = \frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3} - \frac{2}{5}\frac{x^5}{r^5} + \frac{1}{7}\frac{x^7}{r^7}\right].$

202.11. $\int \frac{x^2dx}{r^{11}} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3} - \frac{3}{5}\frac{x^5}{r^5} + \frac{3}{7}\frac{x^7}{r^7} - \frac{1}{9}\frac{x^9}{r^9}\right].$

202.13. $\int \frac{x^2dx}{r^{13}} = \frac{1}{a^{10}}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3} - \frac{4}{5}\frac{x^5}{r^5} + \frac{6}{7}\frac{x^7}{r^7} - \frac{4}{9}\frac{x^9}{r^9} + \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{r^{11}}\right].$

202.15. $\int \frac{x^2dx}{r^{15}} = \frac{1}{a^{12}}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3} - \frac{5}{5}\frac{x^5}{r^5} + \frac{10}{7}\frac{x^7}{r^7} - \frac{10}{9}\frac{x^9}{r^9} + \right.$

$\left. + \frac{5}{11}\frac{x^{11}}{r^{11}} - \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{r^{13}}\right].$

203.01. $\int \frac{x^3dx}{r} = \frac{r^3}{3} - a^2r.$

203.03. $\int \frac{x^3dx}{r^3} = r + \frac{a^2}{r}.$

203.05. $\int \frac{x^3dx}{r^5} = -\frac{1}{r} + \frac{a^2}{3r^3}.$

203.07. $\int \frac{x^3dx}{r^7} = -\frac{1}{3r^3} + \frac{a^2}{5r^5}.$

203.9. $\int \frac{x^3dx}{r^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-3)\,r^{2p-3}} + \frac{a^2}{(2p-1)\,r^{2p-1}}.$

204.01. $\int \frac{x^4dx}{r} = \frac{x^3r}{4} - \frac{3}{8}a^2xr + \frac{3}{8}a^4\ln|x+r|.$

(См. замечание в 200.01.)

204.03. $\int \frac{x^4dx}{r^3} = \frac{xr}{2} + \frac{a^2x}{r} - \frac{3}{2}a^2 \ln|x+r|.$

204.05. $\int \frac{x^4dx}{r^5} = -\frac{x}{r} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{r^3} + \ln|x+r|.$

204.07. $\int \frac{x^4dx}{r^7} = \frac{1}{5a^2}\frac{x^5}{r^5}.$

204.09. $\int \frac{x^4dx}{r^9} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{r^5} - \frac{1}{7}\frac{x^7}{r^7}\right].$

204.11. $\int \frac{x^4dx}{r^{11}} = \frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{r^5} - \frac{2}{7}\frac{x^7}{r^7} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{r^9}\right].$

204.13. $\int \frac{x^4dx}{r^{13}} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{r^5} - \frac{3}{7}\frac{x^7}{r^7} + \frac{3}{9}\frac{x^9}{r^9} - \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{r^{11}}\right].$

204.15. $\int \frac{x^4dx}{r^{15}} = \frac{1}{a^{10}}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{r^5} - \frac{4}{7}\frac{x^7}{r^7} + \frac{6}{9}\frac{x^9}{r^9} - \frac{4}{11}\frac{x^{11}}{r^{11}} + \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{r^{13}}\right].$

205.01. $\int \frac{x^5dx}{r} = \frac{r^5}{5} - \frac{2}{3}a^2r^3 + a^4r.$

205.03. $\int \frac{x^5dx}{r^3} = \frac{r^3}{3} - 2a^2r - \frac{a^4}{r}.$

205.05. $\int \frac{x^5dx}{r^5} = r + \frac{2a^2}{r} - \frac{a^4}{3r^3}.$

205.07. $\int \frac{x^5dx}{r^7} = -\frac{1}{r} + \frac{2a^2}{3r^3} - \frac{a^4}{5r^5}.$

205.9. $$\int \frac{x^5dx}{r^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-5)\,r^{2p-5}} + \frac{2a^2}{(2p-3)\,r^{2p-3}} - \frac{a^4}{(2p-1)\,r^{2p-1}}.$$

206.01. $\int \frac{x^6dx}{r} = \frac{x^5r}{6} - \frac{5}{24}a^2x^3r + \frac{5}{16}a^4xr - \frac{5}{16}a^6 \ln|x+r|.$

(См. замечание в **200.01.**)

206.03. $\int \frac{x^6dx}{r^3} = \frac{x^5}{4r} - \frac{5}{8}\frac{a^2x^3}{r} - \frac{15}{8}\frac{a^4x}{r} + \frac{15}{8}a^4 \ln|x+r|.$

206.05. $\int \frac{x^6dx}{r^5} = \frac{x^5}{2r^3} + \frac{10}{3}\frac{a^2x^3}{r^3} + \frac{5}{2}\frac{a^4x}{r^3} - \frac{5}{2}a^2 \ln|x+r|.$

206.07. $\int \frac{x^6dx}{r^7} = -\frac{23}{15}\frac{x^5}{r^5} - \frac{7}{3}\frac{a^2x^3}{r^5} - \frac{a^4x}{r^5} + \ln|x+r|.$

206.09. $\int \frac{x^6dx}{r^9} = \frac{1}{7a^2}\frac{x^7}{r^7}.$

206.11. $\int \frac{x^6dx}{r^{11}} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{r^7} - \frac{1}{9}\frac{x^9}{r^9}\right].$

206.13. $\int \frac{x^6dx}{r^{13}} = \frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{r^7} - \frac{2}{9}\frac{x^9}{r^9} + \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{r^{11}}\right].$

206.15. $\int \frac{x^6dx}{r^{15}} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{r^7} - \frac{3}{9}\frac{x^9}{r^9} + \frac{3}{11}\frac{x^{11}}{r^{11}} - \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{r^{13}}\right].$

207.01. $\int \frac{x^7dx}{r} = \frac{1}{7}r^7 - \frac{3}{5}a^2r^5 + \frac{3}{3}a^4r^3 - a^6r.$

207.03. $\int \frac{x^7dx}{r^3} = \frac{1}{5}r^5 - \frac{3}{3}a^2r^3 + 3a^4r + \frac{a^6}{r}.$

207.05. $\int \frac{x^7dx}{r^5} = \frac{1}{3}r^3 - 3a^2r - \frac{3a^4}{r} + \frac{a^6}{3r^3}.$

207.07. $\int \frac{x^7dx}{r^7} = r + \frac{3a^2}{r} - \frac{3a^4}{3r^3} + \frac{a^6}{5r^5}.$

207.9.
$$\int \frac{x^7dx}{r^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-7)\,r^{2p-7}} + \frac{3a^2}{(2p-5)\,r^{2p-5}} - \frac{3a^4}{(2p-3)\,r^{2p-3}} + \frac{a^6}{(2p-1)\,r^{2p-1}}.$$

221.01. $\int \frac{dx}{xr} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$ (См. рисунок на стр. 50).

Заметим, что

$$-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right| = -\frac{1}{a}\operatorname{Arcsch}\left|\frac{x}{a}\right| = -\frac{1}{a}\operatorname{Arsh}\left|\frac{a}{x}\right| = -\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{r+a}{r-a}\right).$$

Надо брать положительные значения a и r.

221.03. $\int \frac{dx}{xr^3} = \frac{1}{a^2r} - \frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

221.05. $\int \frac{dx}{xr^5} = \frac{1}{3a^2r^3} + \frac{1}{a^4r} - \frac{1}{a^5}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

221.07. $\int \frac{dx}{xr^7} = \frac{1}{5a^2r^5} + \frac{1}{3a^4r^3} + \frac{1}{a^6r} - \frac{1}{a^7}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

221.09. $\int \frac{dx}{xr^9} = \frac{1}{7a^2r^7} + \frac{1}{5a^4r^5} + \frac{1}{3a^6r^3} + \frac{1}{a^8r} - \frac{1}{a^9}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

222.01. $\int \frac{dx}{x^2r} = -\frac{r}{a^2x}.$

222.03. $\int \frac{dx}{x^2r^3} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{r}{x} + \frac{x}{r}\right).$

222.05. $\int \frac{dx}{x^2r^5} = -\frac{1}{a^6}\left(\frac{r}{x} + \frac{2x}{r} - \frac{x^3}{3r^3}\right).$

222.07. $\int \frac{dx}{x^2r^7} = -\frac{1}{a^8}\left(\frac{r}{x} + \frac{3x}{r} - \frac{3x^3}{3r^3} + \frac{x^5}{5r^5}\right).$

222.09. $\int \frac{dx}{x^2r^9} = -\frac{1}{a^{10}}\left(\frac{r}{x} + \frac{4x}{r} - \frac{6x^3}{3r^3} + \frac{4x^5}{5r^5} - \frac{x^7}{7r^7}\right).$

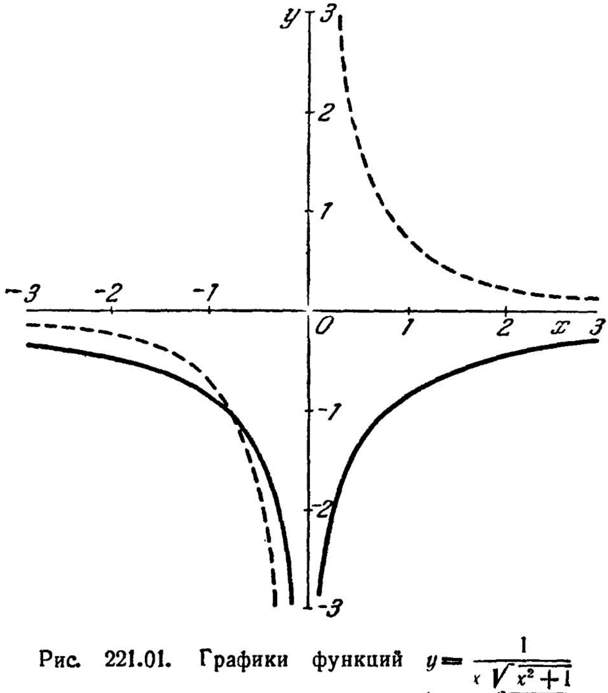

Рис. 221.01. Графики функций $y = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ (пунктирная линия) и $y = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$ (сплошная линия).

223.01. $\int \frac{dx}{x^3r} = -\frac{r}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

Как и в **221.01** имеем

$$\ln\left|\frac{a+r}{x}\right| = \operatorname{Arcsch}\left|\frac{x}{a}\right| = \operatorname{Arsh}\left|\frac{a}{x}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{r+a}{r-a}\right|.$$

223.03. $\int \frac{dx}{x^3r^3} = -\frac{1}{2a^2x^2r} - \frac{3}{2a^4r} + \frac{3}{2a^5}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

223.05. $\int \frac{dx}{x^3r^5} = -\frac{1}{2a^2x^2r^3} - \frac{5}{6a^4r^3} - \frac{5}{2a^6r} + \frac{5}{2a^7}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

224.01. $\int \frac{dx}{x^4r} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{r}{x} - \frac{r^3}{3x^3}\right).$

224.03. $\int \frac{dx}{x^4r^3} = \frac{1}{a^6}\left(\frac{x}{r} + \frac{2r}{x} - \frac{r^3}{3x^3}\right).$

224.05. $\int \frac{dx}{x^4r^5} = \frac{1}{a^8}\left(-\frac{x^3}{3r^3} + \frac{3x}{r} + \frac{3r}{x} - \frac{r^3}{3x^3}\right).$

В 222 и 224 положим

$$z^2 = \frac{x^2}{r^2};$$

тогда

$$dx = \frac{a\,dz}{(1-z^2)^{3/2}}.$$

225.01. $\int \frac{dx}{x^5r} = -\frac{r}{4a^2x^4} + \frac{3}{8}\frac{r}{a^4x^2} - \frac{3}{8a^5}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

225.03. $\int \frac{dx}{x^5r^3} = -\frac{1}{4a^2x^4r} + \frac{5}{8a^4x^2r} + \frac{15}{8a^6r} - \frac{15}{8a^7}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

226.01. $\int \frac{dx}{x^6r} = \frac{1}{a^6}\left(-\frac{r}{x} + \frac{2r^3}{3x^3} - \frac{r^5}{5x^5}\right).$

226.03. $\int \frac{dx}{x^6r^3} = \frac{1}{a^8}\left(-\frac{x}{r} - \frac{3r}{x} + \frac{3r^3}{3x^3} - \frac{r^5}{5x^5}\right).$

230.01. $\int r\,dx = \frac{xr}{2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+r|.$

Как и в **200.01**, имеем

$$\ln\left|\frac{x+r}{a}\right| = \operatorname{Arcsch}\frac{x}{a} = \operatorname{Arsh}\frac{a}{x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{r+x}{r-x}\right|.$$

230.03. $\int r^3\,dx = \frac{1}{4}xr^3 + \frac{3}{8}a^2xr + \frac{3}{8}a^4\ln|x+r|.$

230.05. $\int r^5\,dx = \frac{1}{6}xr^5 + \frac{5}{24}a^2xr^3 + \frac{5}{16}a^4xr + \frac{5}{16}a^6\ln|x+r|.$

231.01. $\int xr\,dx = \frac{r^3}{3}.$

231.03. $\int xr^3\,dx = \frac{r^5}{5}.$

231.9. $\int xr^{2p+1}dx = \frac{r^{2p+3}}{2p+3}.$

232.01. $\int x^2r\,dx = \frac{xr^3}{4} - \frac{a^2xr}{8} - \frac{a^4}{8}\ln|x+r|.$

232.03. $\int x^2r^3\,dx=\frac{xr^5}{6}-\frac{a^2xr^3}{24}-\frac{a^4xr}{16}-\frac{a^6}{16}\ln|x+r|.$

233.01. $\int x^3r\,dx=\frac{r^5}{5}-\frac{a^2r^3}{3}.$

233.03. $\int x^3r^3\,dx=\frac{r^7}{7}-\frac{a^2r^5}{5}.$

233.9. $\int x^3r^{2p+1}\,dx=\frac{r^{2p+5}}{2p+5}-\frac{a^2r^{2p+3}}{2p+3}.$

234.01. $\int x^4r\,dx=\frac{x^3r^3}{6}-\frac{a^2xr^3}{8}+\frac{a^4xr}{16}+\frac{a^6}{16}\ln|x+r|.$

Как и в **200.01**, имеем

$$\ln\left|\frac{x+r}{a}\right|=\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}=\operatorname{Arcsch}\frac{a}{x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{r+x}{r-x}\right|.$$

234.03. $\int x^4r^3\,dx=\frac{x^3r^5}{8}-\frac{a^2xr^5}{16}+\frac{a^4xr^3}{64}+\frac{3}{128}a^6xr+$

$$+\frac{3}{128}a^8\ln|x+r|.$$

235.01. $\int x^5r\,dx=\frac{r^7}{7}-\frac{2a^2r^5}{5}+\frac{a^4r^3}{3}.$

235.03. $\int x^5r^3\,dx=\frac{r^9}{9}-\frac{2a^2r^7}{7}+\frac{a^4r^5}{5}.$

235.9. $\int x^5r^{2p+1}\,dx=\frac{r^{2p+7}}{2p+7}-\frac{2a^2r^{2p+5}}{2p+5}+\frac{a^4r^{2p+3}}{2p+3}.$

241.01. $\int\frac{r\,dx}{x}=r-a\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$ (См. замечание в **221.01.**)

241.03. $\int\frac{r^3\,dx}{x}=\frac{r^3}{3}+a^2r-a^3\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

241.05. $\int\frac{r^5\,dx}{x}=\frac{r^5}{5}+\frac{a^2r^3}{3}+a^4r-a^5\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

241.07. $\int\frac{r^7\,dx}{x}=\frac{r^7}{7}+\frac{a^2r^5}{5}+\frac{a^4r^3}{3}+a^6r-a^7\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|.$

242.01. $\int\frac{r\,dx}{x^2}=-\frac{r}{x}+\ln|x+r|.$ (См. замечание в **200.01.**)

242.03. $\int\frac{r^3\,dx}{x^2}=-\frac{r^3}{x}+\frac{3}{2}xr+\frac{3}{2}a^2\ln|x+r|.$

242.05. $\int\frac{r^5\,dx}{x^2}=-\frac{r^5}{x}+\frac{5}{4}xr^3+\frac{15}{8}a^2xr+\frac{15}{8}a^4\ln|x+r|.$

243.01. $\int \frac{r\,dx}{x^3} = -\frac{r}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$. (См. замечание в **221.01.**)

243.03. $\int \frac{r^3\,dx}{x^3} = -\frac{r^3}{2x^2} + \frac{3}{2}r - \frac{3}{2}a\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$.

243.05. $\int \frac{r^5\,dx}{x^3} = -\frac{r^5}{2x^2} + \frac{5}{6}r^3 + \frac{5}{2}a^2r - \frac{5}{2}a^3\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$.

244.01. $\int \frac{r\,dx}{x^4} = -\frac{r^3}{3a^2x^3}$.

244.03. $\int \frac{r^3\,dx}{x^4} = -\frac{r^3}{3x^3} - \frac{r}{x} + \ln|x+r|$. (См. замечание в **200.01.**)

244.05. $\int \frac{r^5\,dx}{x^4} = -\frac{a^2r^3}{3x^3} - \frac{2a^2r}{x} + \frac{xr}{2} + \frac{5}{2}a^2\ln|x+r|$.

245.01. $\int \frac{r\,dx}{x^5} = -\frac{r}{4x^4} - \frac{r}{8a^2x^2} + \frac{1}{8a^3}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$.

245.03. $\int \frac{r^3\,dx}{x^5} = -\frac{r^3}{4x^4} - \frac{3}{8}\frac{r^3}{a^2x^2} + \frac{3}{8}\frac{r}{a^2} - \frac{3}{8a}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$.

246.01. $\int \frac{r\,dx}{x^6} = \frac{r^3}{5a^2x^3}\left(\frac{2}{3a^2} - \frac{1}{x^2}\right)$.

246.03. $\int \frac{r^3\,dx}{x^6} = -\frac{r^5}{5a^2x^5}$.

247.01. $\int \frac{r\,dx}{x^7} = -\frac{r}{6x^6} - \frac{r}{24a^2x^4} + \frac{r}{16a^4x^2} - \frac{1}{16a^5}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$.

248.01. $\int \frac{r\,dx}{x^8} = \frac{r^3}{7a^2x^3}\left(-\frac{1}{x^4} + \frac{4}{5a^2x^2} - \frac{8}{15a^4}\right)$.

Интегралы, содержащие $s=(x^2-a^2)^{1/2}$

260.01. $\int \frac{dx}{s} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+s|$,

$[x^2>a^2]$(см. рисунок на стр. 54).

Заметим, что $\ln\left|\frac{x+s}{a}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+s}{x-s}\right) = \operatorname{Arch}\left|\frac{x}{a}\right|$.

Для положительных значений x надо брать положительное значение $\operatorname{Arch}\left|\frac{x}{a}\right|$, для отрицательных—отрицательное. s надо всегда считать положительным.

260.03. $\int \frac{dx}{s^3} = -\frac{1}{a^2}\frac{x}{s}$.

260.05. $\int \frac{dx}{s^5} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{x}{s} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{s^3}\right].$

260.07. $\int \frac{dx}{s^7} = -\frac{1}{a^6}\left[\frac{x}{s} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{s^3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{s^5}\right].$

260.09. $\int \frac{dx}{s^9} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{x}{s} - \frac{3}{3}\frac{x^3}{s^3} + \frac{3}{5}\frac{x^5}{s^5} - \frac{1}{7}\frac{x^7}{s^7}\right].$

260.11. $\int \frac{dx}{s^{11}} = -\frac{1}{a^{10}}\left[\frac{x}{s} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{s^3} + \frac{6}{5}\frac{x^5}{s^5} - \frac{4}{7}\frac{x^7}{s^7} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{s^9}\right].$

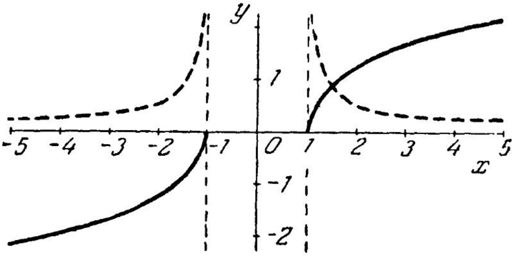

Рис. 260.01. Графики функций $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (пунктирная линия) и $y = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$ (сплошная линия).

260.13. $\int \frac{dx}{s^{13}} = \frac{1}{a^{12}}\left[\frac{x}{s} - \frac{5}{3}\frac{x^3}{s^3} + \frac{10}{5}\frac{x^5}{s^5} - \frac{10}{7}\frac{x^7}{s^7} + \frac{5}{9}\frac{x^9}{s^9} - \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{s^{11}}\right].$

260.15. $$\int \frac{dx}{s^{15}} = -\frac{1}{a^{14}}\left[\frac{x}{s} - \frac{6}{3}\frac{x^3}{s^3} + \frac{15}{5}\frac{x^5}{s^5} - \frac{20}{7}\frac{x^7}{s^7} + \frac{15}{9}\frac{x^9}{s^9} - \frac{6}{11}\frac{x^{11}}{s^{11}} + \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{s^{13}}\right].$$

Интегралы **260.03—260.15** находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{x^2-a^2}; \text{ тогда } dx = \frac{-a\,dz}{(z^2-1)^{3/2}}.$$

261.01. $\int \frac{x\,dx}{s} = s.$ **261.03.** $\int \frac{x\,dx}{s^3} = -\frac{1}{s}.$

261.05. $\int \frac{x\,dx}{s^5} = -\frac{1}{3s^3}.$ **261.07.** $\int \frac{x\,dx}{s^7} = -\frac{1}{5s^5}.$

261.9. $\int \frac{x\,dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-1)\,s^{2p-1}}.$

262.01. $\int \frac{x^2\,dx}{s} = \frac{xs}{2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+s|.$ (См. замечание в **260.01.**)

262.03. $\int \frac{x^2\,dx}{s^3} = -\frac{x}{s} + \ln|x+s|.$

262.05. $\int \frac{x^2\,dx}{s^5} = -\frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{s^3}.$

262.07. $\int \frac{x^2\,dx}{s^7} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{s^3} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{s^5}\right].$

262.09. $\int \frac{x^2\,dx}{s^9} = -\frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{s^3} - \frac{2}{5}\frac{x^5}{s^5} + \frac{1}{7}\frac{x^7}{s^7}\right].$

262.11. $\int \frac{x^2\,dx}{s^{11}} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{s^3} - \frac{3}{5}\frac{x^5}{s^5} + \frac{3}{7}\frac{x^7}{s^7} - \frac{1}{9}\frac{x^9}{s^9}\right].$

262.13. $\int \frac{x^2\,dx}{s^{13}} = -\frac{1}{a^{10}}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{s^3} - \frac{4}{5}\frac{x^5}{s^5} + \frac{6}{7}\frac{x^7}{s^7} - \frac{4}{9}\frac{x^9}{s^9} + \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{s^{11}}\right].$

262.15. $$\int \frac{x^2\,dx}{s^{15}} = \frac{1}{a^{12}}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{s^3} - \frac{5}{5}\frac{x^5}{s^5} + \frac{10}{7}\frac{x^7}{s^7} - \frac{10}{9}\frac{x^9}{s^9} + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{11}\frac{x^{11}}{s^{11}} - \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{s^{13}}\right].$$

263.01. $\int \frac{x^3\,dx}{s} = \frac{s^3}{3} + a^2 s.$

263.03. $\int \frac{x^3\,dx}{s^3} = s - \frac{a^2}{s}.$

263.05. $\int \frac{x^3\,dx}{s^5} = -\frac{1}{s} - \frac{a^2}{3s^3}.$

263.9. $\int \frac{x^3dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-3)\,s^{2p-3}} - \frac{a^2}{(2p-1)\,s^{2p-1}}.$

264.01. $\int \frac{x^4dx}{s} = \frac{x^3 s}{4} + \frac{3}{8}a^2 xs + \frac{3}{8}a^4 \ln|x+s|.$

(См. замечание в **260.01.**)

264.03. $\int \frac{x^4dx}{s^3} = \frac{xs}{2} - \frac{a^2 x}{s} + \frac{3}{2}a^2 \ln|x+s|.$

264.05. $\int \frac{x^4dx}{s^5} = -\frac{x}{s} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{s^3} + \ln|x+s|.$

264.07. $\int \frac{x^4dx}{s^7} = -\frac{1}{5a^2}\frac{x^5}{s^5}.$

264.09. $\int \frac{x^4dx}{s^9} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{s^5} - \frac{1}{7}\frac{x^7}{s^7}\right].$

264.11. $\int \frac{x^4dx}{s^{11}} = -\frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{s^5} - \frac{2}{7}\frac{x^7}{s^7} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{s^9}\right].$

264.13. $\int \frac{x^4dx}{s^{13}} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{s^5} - \frac{3}{7}\frac{x^7}{s^7} + \frac{3}{9}\frac{x^9}{s^9} - \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{s^{11}}\right].$

264.15. $\int \frac{x^4dx}{s^{15}} = -\frac{1}{a^{10}}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{s^5} - \frac{4}{7}\frac{x^7}{s^7} + \frac{6}{9}\frac{x^9}{s^9} - \frac{4}{11}\frac{x^{11}}{s^{11}} + \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{s^{13}}\right].$

265.01. $\int \frac{x^5dx}{s} = \frac{s^5}{5} + \frac{2}{3}a^2s^3 + a^4s.$

265.03. $\int \frac{x^5dx}{s^3} = \frac{s^3}{3} + 2a^2s - \frac{a^4}{s}.$

265.05. $\int \frac{x^5dx}{s^5} = s - \frac{2a^2}{s} - \frac{a^4}{3s^3}.$

265.07. $\int \frac{x^5dx}{s^7} = -\frac{1}{s} - \frac{2a^2}{3s^3} - \frac{a^4}{5s^5}.$

265.9. $\int \frac{x^5dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-5)s^{2p-5}} - \frac{2a^2}{(2p-3)s^{2p-3}} - \frac{a^4}{(2p-1)s^{2p-1}}.$

266.01. $\int \frac{x^6dx}{s} = \frac{x^5s}{6} + \frac{5}{24}a^2x^3s + \frac{5}{16}a^4xs + \frac{5}{16}a^6\ln|x+s|.$

(См. замечание в **260.01.**)

266.03. $\int \frac{x^6dx}{s^3} = \frac{x^5}{4s} + \frac{5}{8}\frac{a^2x^3}{s} - \frac{15}{8}\frac{a^4x}{s} + \frac{15}{8}a^4\ln|x+s|.$

266.05. $\int \frac{x^6dx}{s^5} = \frac{x^5}{2s^3} - \frac{10}{3}\frac{a^2x^3}{s^3} + \frac{5}{2}\frac{a^4x}{s^3} + \frac{5}{2}a^2\ln|x+s|.$

266.07. $\int \frac{x^6dx}{s^7} = -\frac{23}{15}\frac{x^5}{s^5} + \frac{7}{3}\frac{a^2x^3}{s^5} - \frac{a^4x}{s^5} + \ln|x+s|.$

266.09. $\int \frac{x^6dx}{s^9} = -\frac{1}{7a^2}\frac{x^7}{s^7}.$

266.11. $\int \frac{x^6dx}{s^{11}} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{s^7} - \frac{1}{9}\frac{x^9}{s^9}\right].$

266.13. $\int \frac{x^6dx}{s^{13}} = -\frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{s^7} - \frac{2}{9}\frac{x^9}{s^9} + \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{s^{11}}\right].$

266.15. $\int \frac{x^6dx}{s^{15}} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{s^7} - \frac{3}{9}\frac{x^9}{s^9} + \frac{3}{11}\frac{x^{11}}{s^{11}} - \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{s^{13}}\right].$

267.01. $\int \frac{x^7dx}{s} = \frac{1}{7}s^7 + \frac{3}{5}a^2s^5 + \frac{3}{3}a^4s^3 + a^6s.$

267.03. $\int \frac{x^7dx}{s^3} = \frac{1}{5}s^5 + \frac{3}{3}a^2s^3 + 3a^4s - \frac{a^6}{s}.$

267.05. $\int \frac{x^7dx}{s^5} = \frac{1}{3}s^3 + 3a^2s - \frac{3a^4}{s} - \frac{a^6}{3s^3}.$

267.07. $\int \frac{x^7 dx}{s^7} = s - \frac{3a^2}{s} - \frac{3a^4}{3s^3} - \frac{a^6}{5s^5}.$

267.9. $\int \frac{x^7 dx}{s^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-7)s^{2p-7}} - \frac{3a^2}{(2p-5)s^{2p-5}} -$

$$-\frac{3a^4}{(2p-3)s^{2p-3}} - \frac{a^6}{(2p-1)s^{2p-1}}.$$

281.01. $\int \frac{dx}{xs} = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left|\frac{a}{x}\right| = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| \quad [x^2>a^2].$

281.03. $\int \frac{dx}{xs^3} = -\frac{1}{a^2 s} - \frac{1}{a^3}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

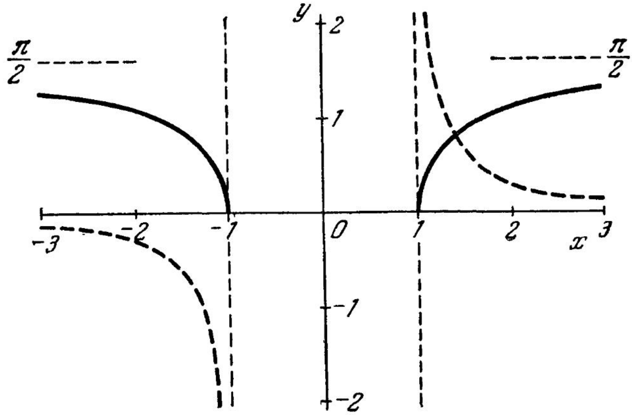

Рис. 281.01. Графики функций $y=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (пунктирная линия) и $y=\arccos\left|\frac{1}{x}\right|$ (сплошная линия).

281.05. $\int \frac{dx}{xs^5} = -\frac{1}{3a^2s^3} + \frac{1}{a^4 s} + \frac{1}{a^5}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

281.07. $\int \frac{dx}{xs^7} = -\frac{1}{5a^2s^5} + \frac{1}{3a^4s^3} - \frac{1}{a^6 s} - \frac{1}{a^7}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

281.09. $\int \frac{dx}{xs^9} = -\frac{1}{7a^2s^7} + \frac{1}{5a^4s^5} - \frac{1}{3a^6s^3} + \frac{1}{a^8 s} + \frac{1}{a^9}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

282.01. $\int \frac{dx}{x^2 s} = \frac{s}{a^2 x}.$

282.03. $\int \frac{dx}{x^2 s^3} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{s}{x} + \frac{x}{s}\right).$

282.05. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2s^5}=\frac{1}{a^6}\left(\frac{s}{x}+\frac{2x}{s}-\frac{x^3}{3s^3}\right).$

282.07. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2s^7}=-\frac{1}{a^8}\left(\frac{s}{x}+\frac{3x}{s}-\frac{3x^3}{3s^3}+\frac{x^5}{5s^5}\right).$

282.09. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2s^9}=\frac{1}{a^{10}}\left(\frac{s}{x}+\frac{4x}{s}-\frac{6x^3}{3s^3}+\frac{4x^5}{5s^5}-\frac{x^7}{7s^7}\right).$

283.01. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3s}=\frac{s}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

(См. замечание к **281.01.**)

283.03. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3s^3}=\frac{1}{2a^2x^2s}-\frac{3}{2a^4s}-\frac{3}{2a^5}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

283.05. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3s^5}=\frac{1}{2a^2x^2s^3}-\frac{5}{6a^4s^3}+\frac{5}{2a^6s}+\frac{5}{2a^7}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

284.01. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4s}=\frac{1}{a^4}\left(\frac{s}{x}-\frac{s^3}{3x^3}\right).$

284.03. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4s^3}=-\frac{1}{a^6}\left(\frac{x}{s}+\frac{2s}{x}-\frac{s^3}{3x^3}\right).$

284.05. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4s^5}=\frac{1}{a^8}\left(-\frac{x^3}{3s^3}+\frac{3x}{s}+\frac{3s}{x}-\frac{s^3}{3x^3}\right).$

Интегралы **282** и **284** находят посредством подстановки:

$$z^2=\frac{x^2}{s^2};\quad \text{тогда}\quad dx=\frac{-a\,dz}{(z^2-1)^{3/2}}.$$

290.01. $\displaystyle\int s\,dx=\frac{xs}{2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+s|.$ (См. замечание к **260.01.**)

290.03. $\displaystyle\int s^3dx=\frac{1}{4}xs^3-\frac{3}{8}a^2xs+\frac{3}{8}a^4\ln|x+s|.$

290.05. $\displaystyle\int s^5dx=\frac{1}{6}xs^5-\frac{5}{24}a^2xs^3+\frac{5}{16}a^4xs-\frac{5}{16}a^6\ln|x+s|.$

291.01. $\displaystyle\int xs\,dx=\frac{s^3}{3}.$ **291.03.** $\displaystyle\int xs^3dx=\frac{s^5}{5}.$

291.9. $\displaystyle\int xs^{2p+1}dx=\frac{s^{2p+3}}{2p+3}.$

292.01. $\displaystyle\int x^2s\,dx=\frac{xs^3}{4}+\frac{a^2xs}{8}-\frac{a^4}{8}\ln|x+s|.$

(См. замечание к **260.01.**)

292.03. $\displaystyle\int x^2s^3dx=\frac{xs^5}{6}+\frac{a^2xs^3}{24}-\frac{a^4xs}{16}+\frac{a^6}{16}\ln|x+s|.$

293.01. $\int x^3 s\,dx = \frac{s^5}{5} + \frac{a^2 s^3}{3}$. **293.03.** $\int x^3 s^3\,dx = \frac{s^7}{7} + \frac{a^2 s^5}{5}$.

293.9. $\int x^3 s^{2p+1}dx = \frac{s^{2p+5}}{2p+5} + \frac{a^2 s^{2p+3}}{2p+3}$.

294.01. $\int x^4 s\,dx = \frac{x^3 s^3}{6} + \frac{a^2 x s^3}{8} + \frac{a^4 x s}{16} - \frac{a^6}{16}\ln|x+s|$.

(См. замечание к **260.01.**)

294.03. $\int x^4 s^3 dx = \frac{x^3 s^5}{8} + \frac{a^2 x s^5}{16} + \frac{a^4 x s^3}{64} - \frac{3}{128}a^6 x s + \frac{3}{128}a^8 \ln|x+s|$.

295.01. $\int x^5 s\,dx = \frac{s^7}{7} + \frac{2a^2 s^5}{5} + \frac{a^4 s^3}{3}$.

295.03. $\int x^5 s^3 dx = \frac{s^9}{9} + \frac{2a^2 s^7}{7} + \frac{a^4 s^5}{5}$.

295.9. $\int x^5 s^{2p+1} dx = \frac{s^{2p+7}}{2p+7} + \frac{2a^2 s^{2p+5}}{2p+5} + \frac{a^4 s^{2p+3}}{2p+3}$.

301.01. $\int \frac{s\,dx}{x} = s - a \arccos\left|\frac{a}{x}\right|$.

301.03. $\int \frac{s^3 dx}{x} = \frac{s^3}{3} - a^2 s + a^3 \arccos\left|\frac{a}{x}\right|$.

301.05. $\int \frac{s^5 dx}{x} = \frac{s^5}{5} - \frac{a^2 s^3}{3} + a^4 s - a^5 \arccos\left|\frac{a}{x}\right|$.

301.07. $\int \frac{s^7 dx}{x} = \frac{s^7}{7} - \frac{a^2 s^5}{5} + \frac{a^4 s^3}{3} - a^6 s + a^7 \arccos\left|\frac{a}{x}\right|$.

302.01. $\int \frac{s\,dx}{x^2} = -\frac{s}{x} + \ln|x+s|$. (См. замечание к **260.01.**)

302.03. $\int \frac{s^3 dx}{x^2} = -\frac{s^3}{x} + \frac{3}{2}xs - \frac{3}{2}a^2 \ln|x+s|$.

302.05. $\int \frac{s^5 dx}{x^2} = -\frac{s^5}{x} + \frac{5}{4}xs^3 - \frac{15}{8}a^2 xs + \frac{15}{8}a^4 \ln|x+s|$.

303.01. $\int \frac{s\,dx}{x^3} = -\frac{s}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|$.

303.03. $\int \frac{s^3 dx}{x^3} = -\frac{s^3}{2x^2} + \frac{3s}{2} - \frac{3}{2}a \arccos\left|\frac{a}{x}\right|$.

303.05. $\int \frac{s^5 dx}{x^3} = -\frac{s^5}{2x^2} + \frac{5}{6}s^3 - \frac{5}{2}a^2 s + \frac{5}{2}a^3 \arccos\left|\frac{a}{x}\right|$.

304.01. $\int \frac{s\,dx}{x^4} = \frac{s^3}{3a^2 x^3}$.

304.03. $\int \frac{s^3\,dx}{x^4} = -\frac{s^3}{3x^3} - \frac{s}{x} + \ln|x+s|.$ (См. замечание к **260.01.**)

304.05. $\int \frac{s^5\,dx}{x^4} = \frac{a^2s^3}{3x^3} + \frac{2a^2s}{x} + \frac{xs}{2} - \frac{5}{2}a^2\ln|x+s|.$

305.01. $\int \frac{s\,dx}{x^5} = -\frac{s}{4x^4} + \frac{s}{8a^2x^2} + \frac{1}{8a^3}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

305.03. $\int \frac{s^3\,dx}{x^5} = -\frac{s^3}{4x^4} + \frac{3}{8}\frac{s^3}{a^2x^2} - \frac{3}{8}\frac{s}{a^2} + \frac{3}{8a}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

306.01. $\int \frac{s\,dx}{x^6} = \frac{s^3}{5a^2x^3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3a^2}\right).$

306.03. $\int \frac{s^3\,dx}{x^6} = \frac{s^5}{5a^2x^5}.$

307.01. $\int \frac{s\,dx}{x^7} = -\frac{s}{6x^6} + \frac{s}{24a^2x^4} + \frac{s}{16a^4x^2} + \frac{1}{16a^5}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|.$

308.01. $\int \frac{s\,dx}{x^8} = \frac{s^3}{7a^2x^3}\left(\frac{1}{x^4} + \frac{4}{5a^2x^2} + \frac{8}{15a^4}\right).$

Интегралы, содержащие $t = (a^2 - x^2)^{1/2}$

320.01. $\int \frac{dx}{t} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$ $[x^2 < a^2].$

Надо брать положительные значения t и a.

320.03. $\int \frac{dx}{t^3} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{t}.$ **320.05.** $\int \frac{dx}{t^5} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{x}{t} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{t^3}\right].$

320.07. $\int \frac{dx}{t^7} = \frac{1}{a^6}\left[\frac{x}{t} + \frac{2}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{t^5}\right].$

320.09. $\int \frac{dx}{t^9} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{x}{t} + \frac{3}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{3}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{1}{7}\frac{x^7}{t^7}\right].$

320.11. $\int \frac{dx}{t^{11}} = \frac{1}{a^{10}}\left[\frac{x}{t} + \frac{4}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{6}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{4}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{t^9}\right].$

320.13. $\int \frac{dx}{t^{13}} = \frac{1}{a^{12}}\left[\frac{x}{t} + \frac{5}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{10}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{10}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{5}{9}\frac{x^9}{t^9} + \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{t^{11}}\right].$

320.15. $\int \frac{dx}{t^{15}} = \frac{1}{a^{14}}\left[\frac{x}{t} + \frac{6}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{15}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{20}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{15}{9}\frac{x^9}{t^9} + \frac{6}{11}\frac{x^{11}}{t^{11}} + \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{t^{13}}\right].$

Интегралы **320.03—320.15** находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}; \text{ тогда } dx = \frac{a\,dz}{(1+z^2)^{3/2}}.$$

321.01. $\int \frac{x\,dx}{t} = -t.$ **321.03.** $\int \frac{x\,dx}{t^3} = \frac{1}{t}.$

321.05. $\int \frac{x\,dx}{t^5} = \frac{1}{3t^3}.$ **321.07.** $\int \frac{x\,dx}{t^7} = \frac{1}{5t^5}.$

321.9. $\int \frac{x\,dx}{t^{2p+1}} = \frac{1}{(2p-1)\,t^{2p-1}}.$

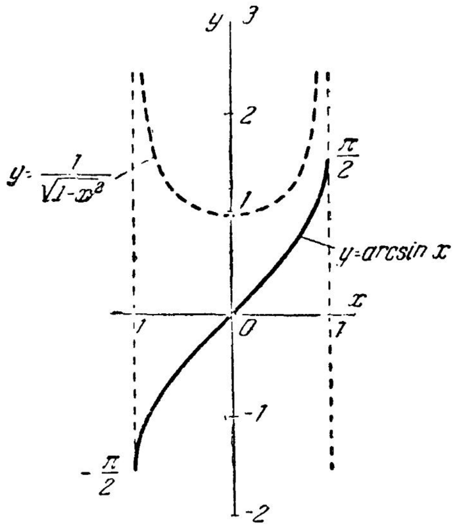

Рис. 320.01. Графики функций $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (пунктирная линия) и $y=\arcsin x$ (сплошная линия).

322.01. $\int \frac{x^2\,dx}{t} = -\frac{xt}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

322.03. $\int \frac{x^2\,dx}{t^3} = \frac{x}{t} - \arcsin\frac{x}{a}.$ **322.05.** $\int \frac{x^2\,dx}{t^5} = \frac{1}{3a^2}\frac{x^3}{t^3}.$

322.07. $\int \frac{x^2\,dx}{t^7} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{t^5}\right].$

322.09. $\int \frac{x^2\,dx}{t^9} = \frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{2}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{1}{7}\frac{x^7}{t^7}\right].$

322.11. $\int \frac{x^2\,dx}{t^{11}} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{3}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{3}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{t^9}\right].$

322.13. $\int \frac{x^2\,dx}{t^{13}} = \frac{1}{a^{10}}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{4}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{6}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{4}{9}\frac{x^9}{t^9} + \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{t^{11}}\right].$

322.15. $\int \frac{x^2\,dx}{t^{15}} = \frac{1}{a^{12}}\left[\frac{1}{3}\frac{x^3}{t^3} + \frac{5}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{10}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{10}{9}\frac{x^9}{t^9} + \frac{5}{11}\frac{x^{11}}{t^{11}} + \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{t^{13}}\right].$

323.01. $\int \frac{x^3\,dx}{t} = \frac{t^3}{3} - a^2 t.$ **323.03.** $\int \frac{x^3\,dx}{t^3} = t + \frac{a^2}{t}.$

323.05. $\int \frac{x^3\,dx}{t^5} = -\frac{1}{t} + \frac{a^2}{3t^3}.$

323.9. $\int \frac{x^3\,dx}{t^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-3)\,t^{2p-3}} + \frac{a^2}{(2p-1)\,t^{2p-1}}.$

324.01. $\int \frac{x^4\,dx}{t} = -\frac{x^3 t}{4} - \frac{3}{8}a^2 x t + \frac{3}{8}a^4 \arcsin\frac{x}{a}.$

324.03. $\int \frac{x^4\,dx}{t^3} = \frac{xt}{2} + \frac{a^2 x}{t} - \frac{3}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a}.$

324.05. $\int \frac{x^4\,dx}{t^5} = -\frac{x}{t} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{t^3} + \arcsin\frac{x}{a}.$

324.07. $\int \frac{x^4\,dx}{t^7} = \frac{1}{5a^2}\frac{x^5}{t^5}.$ **324.09.** $\int \frac{x^4\,dx}{t^9} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{1}{7}\frac{x^7}{t^7}\right].$

324.11. $\int \frac{x^4\,dx}{t^{11}} = \frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{2}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{t^9}\right].$

324.13. $\int \frac{x^4\,dx}{t^{13}} = \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{3}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{3}{9}\frac{x^9}{t^9} + \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{t^{11}}\right].$

324.15. $\int \frac{x^4\,dx}{t^{15}} = \frac{1}{a^{10}}\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{t^5} + \frac{4}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{6}{9}\frac{x^9}{t^9} + \frac{4}{11}\frac{x^{11}}{t^{11}} + \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{t^{13}}\right].$

325.01. $\int \frac{x^5\,dx}{t} = -\frac{t^5}{5} + \frac{2a^2 t^3}{3} - a^4 t.$

325.03. $\int \frac{x^5\,dx}{t^3} = -\frac{t^3}{3} + 2a^2 t + \frac{a^4}{t}.$

325.05. $\int \frac{x^5\,dx}{t^5} = -t - \frac{2a^2}{t} + \frac{a^4}{3t^3}.$ **325.07.** $\int \frac{x^5\,dx}{t^7} = \frac{1}{t} - \frac{2a^2}{3t^3} + \frac{a^4}{5t^5}.$

325.9. $\int \frac{x^5\,dx}{t^{2p+1}} = \frac{1}{(2p-5)\,t^{2p-5}} - \frac{2a^2}{(2p-3)\,t^{2p-3}} + \frac{a^4}{(2p-1)\,t^{2p-1}}.$

326.01. $\int \frac{x^6\,dx}{t} = -\frac{x^5 t}{6} - \frac{5}{24}a^2 x^3 t - \frac{5}{16}a^4 x t + \frac{5}{16}a^6 \arcsin\frac{x}{a}.$

326.03. $\int \frac{x^6\,dx}{t^3} = -\frac{x^5}{4t} - \frac{5}{8}\frac{a^2 x^3}{t} + \frac{15}{8}\frac{a^4 x}{t} - \frac{15}{8}a^4 \arcsin\frac{x}{a}.$

326.05. $\int \frac{x^6\,dx}{t^5} = -\frac{x^5}{2t^3} + \frac{10}{3}\frac{a^2 x^3}{t^3} - \frac{5}{2}\frac{a^4 x}{t^3} + \frac{5}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{a}.$

326.07. $\int \frac{x^6\,dx}{t^7} = \frac{23}{15}\frac{x^5}{t^5} - \frac{7}{3}\frac{a^2x^3}{t^5} + \frac{a^4x}{t^5} - \arcsin\frac{x}{a}$.

326.09. $\int \frac{x^6\,dx}{t^9} = \frac{1}{7a^2}\frac{x^7}{t^7}$. **326.11.** $\int \frac{x^6\,dx}{t^{11}} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{1}{9}\frac{x^9}{t^9}\right]$.

326.13. $\int \frac{x^6\,dx}{t^{13}} = \frac{1}{a^6}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{2}{9}\frac{x^9}{t^9} + \frac{1}{11}\frac{x^{11}}{t^{11}}\right]$.

326.15. $\int \frac{x^6\,dx}{t^{15}} =$

$= \frac{1}{a^8}\left[\frac{1}{7}\frac{x^7}{t^7} + \frac{3}{9}\frac{x^9}{t^9} + \frac{3}{11}\frac{x^{11}}{t^{11}} + \frac{1}{13}\frac{x^{13}}{t^{13}}\right]$.

327.01. $\int \frac{x^7\,dx}{t} = \frac{1}{7}t^7 - \frac{3}{5}a^2t^5 + \frac{3}{3}a^4t^3 - a^6t$.

327.03. $\int \frac{x^7\,dx}{t^3} = \frac{1}{5}t^5 - \frac{3}{3}a^2t^3 + 3a^4t + \frac{a^6}{t}$.

327.05. $\int \frac{x^7\,dx}{t^5} = \frac{1}{3}t^3 - 3a^2t - \frac{3a^4}{t} + \frac{a^6}{3t^3}$.

327.07. $\int \frac{x^7\,dx}{t^7} = t + \frac{3a^2}{t} - \frac{3a^4}{3t^3} + \frac{a^6}{5t^5}$.

327.9. $\int \frac{x^7\,dx}{t^{2p+1}} = -\frac{1}{(2p-7)t^{2p-7}} +$

$+ \frac{3a^2}{(2p-5)t^{2p-5}} - \frac{3a^4}{(2p-3)t^{2p-3}} +$

$+ \frac{a^6}{(2p-1)t^{2p-1}}$.

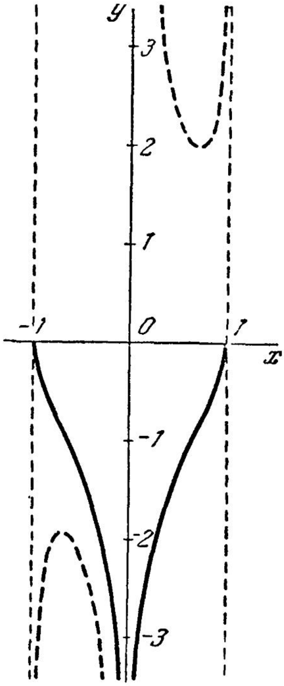

Рис. 341.01. Графики функций $y = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ (пунктирная линия) и $y = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$ (сплошная линия).

341.01. $\int \frac{dx}{xt} = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|$ $[x^2<a^2]$.

Заметим, что

$-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right| = -\frac{1}{a}\operatorname{Arsch}\left|\frac{x}{a}\right| =$

$= -\frac{1}{a}\operatorname{Arch}\left|\frac{a}{x}\right| = -\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+t}{a-t}\right)$.

Надо брать положительные значения Arsch, Arch, a и t.

341.03. $\int \frac{dx}{xt^3} = \frac{1}{a^2t} - \frac{1}{a^3}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|$.

341.05. $\int \frac{dx}{xt^5} = \frac{1}{3a^2t^3} + \frac{1}{a^4t} - \frac{1}{a^5}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|$.

341.07. $\int \frac{dx}{xt^7} = \frac{1}{5a^2t^5} + \frac{1}{3a^4t^3} + \frac{1}{a^6t} - \frac{1}{a^7} \ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

341.09. $\int \frac{dx}{xt^9} = \frac{1}{7a^2t^7} + \frac{1}{5a^4t^5} + \frac{1}{3a^6t^3} + \frac{1}{a^8t} - \frac{1}{a^9} \ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

342.01. $\int \frac{dx}{x^2t} = -\frac{t}{a^2x}.$

342.03. $\int \frac{dx}{x^2t^3} = \frac{1}{a^4}\left(-\frac{t}{x} + \frac{x}{t}\right).$

342.05. $\int \frac{dx}{x^2t^5} = \frac{1}{a^6}\left(-\frac{t}{x} + \frac{2x}{t} + \frac{x^3}{3t^3}\right).$

342.07. $\int \frac{dx}{x^2t^7} = \frac{1}{a^8}\left(-\frac{t}{x} + \frac{3x}{t} + \frac{3x^3}{3t^3} + \frac{x^5}{5t^5}\right).$

342.09. $\int \frac{dx}{x^2t^9} = \frac{1}{a^{10}}\left(-\frac{t}{x} + \frac{4x}{t} + \frac{6x^3}{3t^3} + \frac{4x^5}{5t^5} + \frac{x^7}{7t^7}\right).$

343.01. $\int \frac{dx}{x^3t} = -\frac{t}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3} \ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$ [См. 341.01.]

343.03. $\int \frac{dx}{x^3t^3} = -\frac{1}{2a^2x^2t} + \frac{3}{2a^4t} - \frac{3}{2a^5} \ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

343.05. $\int \frac{dx}{x^3t^5} = -\frac{1}{2a^2x^2t^3} + \frac{5}{6a^4t^3} + \frac{5}{2a^6t} - \frac{5}{2a^7} \ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

344.01. $\int \frac{dx}{x^4t} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{t}{x} + \frac{t^3}{3x^3}\right).$

344.03. $\int \frac{dx}{x^4t^3} = -\frac{1}{a^6}\left(-\frac{x}{t} + \frac{2t}{x} + \frac{t^3}{3x^3}\right).$

344.05. $\int \frac{dx}{x^4t^5} = -\frac{1}{a^8}\left(-\frac{x^3}{3t^3} - \frac{3x}{t} + \frac{3t}{x} + \frac{t^3}{3x^3}\right).$

Интегралы 342 и 344 находят посредством подстановки:

$$z^2 = \frac{x^2}{t^2}, \quad \text{тогда} \quad dx = \frac{a\,dz}{(1+z^2)^{3/2}}.$$

345.01. $\int \frac{dx}{x^5t} = -\left[\frac{t}{4a^2x^4} + \frac{3}{8}\frac{t}{a^4x^2} + \frac{3}{8a^5} \ln\left|\frac{a+t}{x}\right|\right].$

345.03. $\int \frac{dx}{x^5t^3} = -\left[\frac{1}{4a^2x^4t} + \frac{5}{8a^4x^2t} - \frac{15}{8a^6t} + \frac{15}{8a^7} \ln\left|\frac{a+t}{x}\right|\right].$

346.01. $$\int \frac{dx}{x^6 t} = -\frac{1}{a^6}\left(\frac{t}{x}+\frac{2t^3}{3x^3}+\frac{t^5}{5x^5}\right).$$

346.03. $$\int \frac{dx}{x^6 t^3} = -\frac{1}{a^8}\left(-\frac{x}{t}+\frac{3t}{x}+\frac{3t^3}{3x^3}+\frac{t^5}{5x^5}\right).$$

350.01. $$\int t\,dx = \frac{xt}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

350.03. $$\int t^3\,dx = \frac{xt^3}{4}+\frac{3}{8}a^2xt+\frac{3}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}.$$

350.05. $$\int t^5 dx = \frac{xt^5}{6}+\frac{5}{24}a^2xt^3+\frac{5}{16}a^4xt+\frac{5}{16}a^6\arcsin\frac{x}{a}.$$

351.01. $$\int xt\,dx = -\frac{t^3}{3}.$$ **351.03.** $$\int xt^3\,dx = -\frac{t^5}{5}.$$

351.9. $$\int xt^{2p+1}dx = -\frac{t^{2p+3}}{2p+3}.$$

352.01. $$\int x^2t\,dx = -\frac{xt^3}{4}+\frac{a^2xt}{8}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}.$$

352.03. $$\int x^2t^3dx = -\frac{xt^5}{6}+\frac{a^2xt^3}{24}+\frac{a^4xt}{16}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{a}.$$

353.01. $$\int x^3t\,dx = \frac{t^5}{5}-\frac{a^2t^3}{3}.$$ **353.03.** $$\int x^3t^3dx = \frac{t^7}{7}-\frac{a^2t^5}{5}.$$

353.9. $$\int x^3t^{2p+1}dx = \frac{t^{2p+5}}{2p+5}-\frac{a^2t^{2p+3}}{2p+3}.$$

354.01. $$\int x^4t\,dx = -\frac{x^3t^3}{6}-\frac{a^2xt^3}{8}+\frac{a^4xt}{16}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{a}.$$

354.03. $$\int x^4t^3dx = -\frac{x^3t^5}{8}-\frac{a^2xt^5}{16}+\frac{a^4xt^3}{64}+\frac{3}{128}a^6xt+\frac{3}{128}a^8\arcsin\frac{x}{a}.$$

355.01. $$\int x^5t\,dx = -\frac{t^7}{7}+\frac{2a^2t^5}{5}-\frac{a^4t^3}{3}.$$

355.03. $$\int x^5t^3\,dx = -\frac{t^9}{9}+\frac{2a^2t^7}{7}-\frac{a^4t^5}{5}.$$

355.9. $$\int x^5t^{2p+1}dx = -\frac{t^{2p+7}}{2p+7}+\frac{2a^2t^{2p+5}}{2p+5}-\frac{a^4t^{2p+3}}{2p+3}.$$

361.01. $$\int \frac{t\,dx}{x} = t-a\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$$ (См. замечание к **341.01.**)

361.03. $$\int \frac{t^3dx}{x} = \frac{t^3}{3}+a^2t-a^3\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$$

На этой странице $t=(a^2-x^2)^{1/2}$

361.05. $\int \frac{t^5\,dx}{x}=\frac{t^5}{5}+\frac{a^2t^3}{3}+a^4t-a^5\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

361.07. $\int \frac{t^7\,dx}{x}=\frac{t^7}{7}+\frac{a^2t^5}{5}+\frac{a^4t^3}{3}+a^6t-a^7\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

362.01. $\int \frac{t\,dx}{x^2}=-\frac{t}{x}-\arcsin\frac{x}{a}.$

362.03. $\int \frac{t^3\,dx}{x^2}=-\frac{t^3}{x}-\frac{3}{2}xt-\frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}.$

362.05. $\int \frac{t^5\,dx}{x^2}=-\frac{t^5}{x}-\frac{5}{4}xt^3-\frac{15}{8}a^2xt-\frac{15}{8}a^4\arcsin\frac{x}{a}.$

363.01. $\int \frac{t\,dx}{x^3}=-\frac{t}{2x^2}+\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$ (См. замечание к **341.01.**)

363.03. $\int \frac{t^3\,dx}{x^3}=-\frac{t^3}{2x^2}-\frac{3t}{2}+\frac{3a}{2}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

363.05. $\int \frac{t^5\,dx}{x^3}=-\frac{t^5}{2x^2}-\frac{5}{6}t^3-\frac{5}{2}a^2t+\frac{5}{2}a^3\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

364.01. $\int \frac{t\,dx}{x^4}=-\frac{t^3}{3a^2x^3}.$

364.03. $\int \frac{t^3\,dx}{x^4}=-\frac{t^3}{3x^3}+\frac{t}{x}+\arcsin\frac{x}{a}.$

364.05. $\int \frac{t^5\,dx}{x^4}=-\frac{a^2t^3}{3x^3}+\frac{2a^2t}{x}+\frac{xt}{2}+\frac{5}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}.$

365.01. $\int \frac{t\,dx}{x^5}=-\frac{t}{4x^4}+\frac{t}{8a^2x^2}+\frac{1}{8a^3}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

365.03. $\int \frac{t^3\,dx}{x^5}=-\frac{t^3}{4x^4}+\frac{3}{8}\frac{t^3}{a^2x^2}+\frac{3}{8}\frac{t}{a^2}-\frac{3}{8a}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

366.01. $\int \frac{t\,dx}{x^6}=-\frac{t^3}{5a^2x^3}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3a^2}\right).$

366.03. $\int \frac{t^3\,dx}{x^6}=-\frac{t^5}{5a^2x^5}.$

367.01. $\int \frac{t\,dx}{x^7}=-\frac{t}{6x^6}+\frac{t}{24a^2x^4}+\frac{t}{16a^4x^2}+\frac{1}{16a^5}\ln\left|\frac{a+t}{x}\right|.$

368.01. $\int \frac{t\,dx}{x^8}=-\frac{t^3}{7a^2x^3}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{4}{5a^2x^2}+\frac{8}{15a^4}\right).$

Интегралы от биномиальных дифференциалов. Формулы приведения

370. $$\int x^m (ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{m+np+1}\left[x^{m+1}u^p + npb\int x^m u^{p-1}dx\right].$$

371. $$\int x^m (ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{bn(p+1)}\left[-x^{m+1}u^{p+1} + (m+n+np+1)\int x^m u^{p+1}dx\right].$$

372. $$\int x^m (ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{(m+1)b}\left[x^{m+1}u^{p+1} - a(m+n+np+1)\int x^{m+n}u^p dx\right].$$

373. $$\int x^m (ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{a(m+np+1)}\left[x^{m-n+1}u^{p+1} - (m-n+1)b\int x^{m-n}u^p dx\right].$$

Здесь $u=ax^n+b$ и a, b, p, m, n могут быть любыми, лишь бы не обращались в нуль знаменатели при последовательном применении формулы.

Интегралы, содержащие $X^{1/2}=(ax^2+bx+c)^{1/2}$

380.001. $$\int\frac{dx}{X^{1/2}} = \frac{1}{a^{1/2}}\ln|2(aX)^{1/2}+2ax+b| \quad [a>0],$$
$$= \frac{1}{a^{1/2}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax+b}{(4ac-b^2)^{1/2}} \quad \begin{bmatrix} a>0, \\ 4ac>b^2 \end{bmatrix},$$
$$= \frac{1}{a^{1/2}}\ln|2ax+b| \quad [a>0,\ b^2=4ac,\ 2ax+b>0],$$
$$= -\frac{1}{a^{1/2}}\ln|2ax+b| \quad [a>0,\ b^2=4ac,\ 2ax+b<0],$$
$$= \frac{-1}{(-a)^{1/2}}\arcsin\frac{(2ax+b)}{(b^2-4ac)^{1/2}} \quad \begin{bmatrix} a<0, \quad b^2>4ac, \\ |2ax+b|<(b^2-4ac)^{1/2} \end{bmatrix}.$$

380.003. $$\int\frac{dx}{X^{3/2}} = \frac{4ax+2b}{(4ac-b^2)X^{1/2}}.$$

380.005. $$\int\frac{dx}{X^{5/2}} = \frac{4ax+2b}{3(4ac-b^2)X^{1/2}}\left(\frac{1}{X}+\frac{8a}{4ac-b^2}\right).$$

380.009. $$\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{4ax+2b}{(2n-1)(4ac-b^2)X^{(2n-1)/2}} + \frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}.$$

380.011. $$\int \frac{x\,dx}{X^{1/2}} = \frac{X^{1/2}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{1/2}}.$$ [См. **380.001.**]

380.013. $$\int \frac{x\,dx}{X^{3/2}} = -\frac{2bx+4c}{(4ac-b^2)X^{1/2}}.$$

380.019. $$\int \frac{x\,dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}.$$

380.021. $$\int \frac{x^2 dx}{X^{1/2}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right) X^{1/2} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{X^{1/2}}.$$ [См. **380.001.**]

380.111. $$\int \frac{dx}{xX^{1/2}} = -\frac{1}{c^{1/2}} \ln\left|\frac{2(cX)^{1/2}}{x} + \frac{2c}{x} + b\right| \quad [c>0],$$
$$= -\frac{1}{c^{1/2}} \operatorname{Arsh} \frac{bx+2c}{|x|(4ac-b^2)^{1/2}} \quad \left[\begin{matrix} c>0, \\ 4ac>b^2 \end{matrix}\right],$$
$$= -\frac{1}{c^{1/2}} \ln\left|\frac{bx+2c}{x}\right| \quad [c>0,\ b^2=4ac,\ bx+2c>0],$$
$$= \frac{1}{c^{1/2}} \ln\left|\frac{bx+2c}{x}\right| \quad [c>0,\ b^2=4ac,\ bx+2c<0],$$
$$= \frac{1}{(-c)^{1/2}} \arcsin \frac{bx+2c}{|x|(b^2-4ac)^{1/2}} \quad \left[\begin{matrix} c<0, \\ b^2>4ac \end{matrix}\right].$$

380.119. $$\int \frac{dx}{xX^{(2n+1)/2}} = \frac{1}{(2n-1)cX^{(2n-1)/2}} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{xX^{(2n-1)/2}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}.$$

380.121. $$\int \frac{dx}{x^2 X^{1/2}} = -\frac{X^{1/2}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{xX^{1/2}}.$$ [См. **380.111.**]

380.201. $$\int X^{1/2} dx = \frac{2ax+b}{4a} X^{1/2} + \frac{4ac-b^2}{8a} \int \frac{dx}{X^{1/2}}.$$ [См. **380.001.**]

380.209. $$\int X^{(2n+1)/2} dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)} + \frac{(4ac-b^2)(2n+1)}{8a(n+1)} \int X^{(2n-1)/2} dx.$$

380.211. $$\int xX^{1/2} dx = \frac{X^{3/2}}{3a} - \frac{b(2ax+b)}{8a^2} X^{1/2} - \frac{b(4ac-b^2)}{16a^2} \int \frac{dx}{X^{1/2}}.$$ [См. **380.001.**]

380.219. $\int xX^{(2n+1)/2}dx=\frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a}-\frac{b}{2a}\int X^{(2n+1)/2}dx.$

380.311. $\int \frac{X^{1/2}dx}{x}=X^{1/2}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{X^{1/2}}+c\int\frac{dx}{xX^{1/2}}.$

[См. **380.001** и **380.111.**]

380.319. $\int \frac{X^{(2n+1)/2}dx}{x}=\frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1}+\frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}dx+c\int\frac{X^{(2n-1)/2}dx}{x}.$

380.321. $\int \frac{X^{1/2}dx}{x^2}=-\frac{X^{1/2}}{x}+a\int\frac{dx}{X^{1/2}}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{xX^{1/2}}.$

[См. **380.001** и **380.111.**]

383.1. $\int \frac{dx}{x(ax^2+bx)^{1/2}}=-\frac{2}{bx}(ax^2+bx)^{1/2}.$

383.2. $\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{1/2}}=\arcsin\frac{x-a}{a}.$

383.3. $\int \frac{x\,dx}{(2ax-x^2)^{1/2}}=-(2ax-x^2)^{1/2}+a\arcsin\left(\frac{x-a}{a}\right).$

383.4. $\int (2ax-x^2)^{1/2}dx=\frac{x-a}{2}(2ax-x^2)^{1/2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}.$

384.1. $\int \frac{dx}{x(x^n+a^2)^{1/2}}=-\frac{2}{na}\ln\left|\frac{a+(x^n+a^2)^{1/2}}{x^{n/2}}\right|.$

384.2. $\int \frac{dx}{x(x^n-a^2)^{1/2}}=\frac{2}{na}\arccos\left|\frac{a}{x^{n/2}}\right|.$

384.3. $\int \frac{x^{1/2}dx}{(a^3-x^3)^{1/2}}=\frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2}.$

387. $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}\,\sqrt{ag-bf}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\,\sqrt{fx^2+g}} \qquad [ag>bf],$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{b}\,\sqrt{bf-ag}}\ln\left|\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\,\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}}\right| \qquad [bf>ag].$$

II

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

400.01. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$

400.02. $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}.$

400.03. $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}.$

400.04. $\operatorname{tg} A = \sin A / \cos A.$

400.05. $\operatorname{ctg} A = \cos A / \sin A = 1 / \operatorname{tg} A.$

400.06. $\sec A = 1 / \cos A.$

400.07. $\csc A = 1 / \sin A.$

400.08. $\sin(-A) = -\sin A.$

400.09. $\cos(-A) = \cos A.$

400.10. $\operatorname{tg}(-A) = -\operatorname{tg} A.$

400.11. $\sec^2 A - \operatorname{tg}^2 A = 1.$

400.12. $\sec A = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}.$

400.13. $\operatorname{tg} A = \sqrt{\sec^2 A - 1}.$

400.14. $\csc^2 A - \operatorname{ctg}^2 A = 1.$

400.15. $\csc A = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 A}.$

400.16. $\operatorname{ctg} A = \sqrt{\csc^2 A - 1}.$

Заметим, что для действительных значений A знак вышеуказанных радикалов зависит от того, в какой четверти находится угол A.

401.01. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$

401.02. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$

401.03. $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$

401.04. $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$

401.05. $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$.

401.06. $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$.

401.07. $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$.

401.08. $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$.

401.09. $\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$.

401.10. $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$.

401.11. $\cos A-\cos B=2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$.

401.12. $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B)$.

401.13. $\cos^2 A-\cos^2 B=\sin(A+B)\sin(B-A)$.

401.14. $\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 B-\sin^2 A$.

401.15. $\sec^2 A+\csc^2 A=\sec^2 A\csc^2 A=\frac{1}{\sin^2 A\cos^2 A}$.

401.2. $p\cos A+q\sin A=r\sin(A+\theta)$,

где

$$r=\sqrt{p^2+q^2},\quad \sin\theta=p/r,\quad \cos\theta=q/r$$

или

$$p\cos A+q\sin A=r\cos(A-\varphi),$$

где

$$r=\sqrt{p^2+q^2},\quad \cos\varphi=p/r,\quad \sin\varphi=q/r.$$

Заметим, что p и q могут быть положительными и отрицательными.

402.01. $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$.

402.02. $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C-$
$-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C$.

402.03. $4\sin A\sin B\sin C=\sin(A+B-C)+\sin(B+C-A)+$
$+\sin(C+A-B)-\sin(A+B+C)$.

402.04. $4\sin A\cos B\cos C=\sin(A+B-C)-\sin(B+C-A)+$
$+\sin(C+A-B)+\sin(A+B+C)$.

402.05. $4\sin A\sin B\cos C=-\cos(A+B-C)+\cos(B+C-A)+$
$+\cos(C+A-B)-\cos(A+B+C)$.

402.06. $4\cos A\cos B\cos C=\cos(A+B-C)+\cos(B+C-A)+$
$+\cos(C+A-B)+\cos(A+B+C)$.

403.02. $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,A}{1+\mathrm{tg}^2 A}$.

403.03. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$.

403.04. $\sin 4A = \cos A\,(4\sin A - 8\sin^3 A)$.

403.05. $\sin 5A = 5\sin A - 20\sin^3 A + 16\sin^5 A$.

403.06. $\sin 6A = \cos A\,(6\sin A - 32\sin^3 A + 32\sin^5 A)$.

403.07. $\sin 7A = 7\sin A - 56\sin^3 A + 112\sin^5 A - 64\sin^7 A$.

403.10. Для целого положительного четного n

$$\sin nA = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\cos A\left[2^{n-1}\sin^{n-1} A - \frac{(n-2)}{1!}2^{n-3}\sin^{n-3} A + \frac{(n-3)(n-4)}{2!}2^{n-5}\sin^{n-5} A - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}2^{n-7}\sin^{n-7} A + \ldots\right],$$

ряд обрывается, когда коэффициент обращается в нуль.

403.11. Другой ряд:

$$\sin nA = n\cos A\left[\sin A - \frac{(n^2-2^2)}{3!}\sin^3 A + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5 A - \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{7!}\sin^7 A + \ldots\right]$$

[n четное и >0].

403.12. Для нечетного целого $n > 1$

$$\sin nA = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[2^{n-1}\sin^n A - \frac{n}{1!}2^{n-3}\sin^{n-2} A + \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\sin^{n-4} A - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}2^{n-7}\sin^{n-6} A + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}2^{n-9}\sin^{n-8} A - \ldots\right],$$

ряд обрывается, когда коэффициент обращается в нуль.

403.13. Другой ряд:

$$\sin nA = n\sin A - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3 A + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 A - \ldots$$

[n нечетное и >0].

403.22. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A =$
$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{1 + \operatorname{tg}^2 A} = \frac{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{tg} A}.$$

403.23. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

403.24. $\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1.$

403.25. $\cos 5A = 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A.$

403.26. $\cos 6A = 32\cos^6 A - 48\cos^4 A + 18\cos^2 A - 1.$

403.27. $\cos 7A = 64\cos^7 A - 112\cos^5 A + 56\cos^3 A - 7\cos A.$

403.3. $\cos nA = 2^{n-1}\cos^n A - \frac{n}{1!}2^{n-3}\cos^{n-2} A +$
$$+ \frac{n(n-3)}{2!}2^{n-5}\cos^{n-4} A - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}2^{n-7}\cos^{n-6} A +$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}2^{n-9}\cos^{n-8} A - \ldots$$

Формула обрывается, когда коэффициент обращается в нуль (n целое и > 2).

403.4. $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos A)}$. **403.5.** $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos A)}$.

404.12. $\sin^2 A = \frac{1}{2}(-\cos 2A + 1).$

404.13. $\sin^3 A = \frac{1}{4}(-\sin 3A + 3\sin A).$

404.14. $\sin^4 A = \frac{1}{8}\left(\cos 4A - 4\cos 2A + \frac{6}{2}\right).$

404.15. $\sin^5 A = \frac{1}{16}(\sin 5A - 5\sin 3A + 10\sin A).$

404.16. $\sin^6 A = \frac{1}{32}\left(-\cos 6A + 6\cos 4A - 15\cos 2A + \frac{20}{2}\right).$

404.17. $\sin^7 A = \frac{1}{64}(-\sin 7A + 7\sin 5A - 21\sin 3A + 35\sin A).$

404.22. $\cos^2 A = \frac{1}{2}(\cos 2A + 1).$

404.23. $\cos^3 A = \frac{1}{4}(\cos 3A + 3\cos A).$

404.24. $\cos^4 A = \frac{1}{8}\left(\cos 4A + 4\cos 2A + \frac{6}{2}\right).$

404.25. $\cos^5 A = \frac{1}{16}(\cos 5A + 5\cos 3A + 10\cos A)$.

404.26. $\cos^6 A = \frac{1}{32}\left(\cos 6A + 6\cos 4A + 15\cos 2A + \frac{20}{2}\right)$.

404.27. $\cos^7 A = \frac{1}{64}(\cos 7A + 7\cos 5A + 21\cos 3A + 35\cos A)$.

(Очевидно, **404** можно продолжить, используя биномиальные коэффициенты.)

405.01. $\operatorname{tg}(A+B) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 1}$.

405.02. $\operatorname{tg}(A-B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + 1}$.

405.03. $\operatorname{ctg}(A+B) = \frac{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B - 1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} = \frac{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$.

405.04. $\operatorname{ctg}(A-B) = \frac{\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A} = \frac{1 + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}$.

405.05. $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$. **405.06.** $\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$.

405.07. $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}$.

405.08. $\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(B-A)}{\sin A \sin B}$.

405.09. $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\cos(A-B)}{\cos A \sin B}$.

405.10. $\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} B = \frac{\cos(A+B)}{\sin A \cos B}$.

406.02. $\operatorname{tg} 2A = \frac{2\operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A} = \frac{2\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg}^2 A - 1} = \frac{2}{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}$.

406.03. $\operatorname{tg} 3A = \frac{3\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3\operatorname{tg}^2 A}$.

406.04. $\operatorname{tg} 4A = \frac{4\operatorname{tg} A - 4\operatorname{tg}^3 A}{1 - 6\operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^4 A}$.

406.12. $\operatorname{ctg} 2A = \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 1}{2\operatorname{ctg} A} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 A}{2\operatorname{tg} A} = \frac{\operatorname{ctg} A - \operatorname{tg} A}{2}$.

406.13. $\operatorname{ctg} 3A = \frac{\operatorname{ctg}^3 A - 3\operatorname{ctg} A}{3\operatorname{ctg}^2 A - 1}$.

406.14. $\operatorname{ctg} 4A = \frac{\operatorname{ctg}^4 A - 6\operatorname{ctg}^2 A + 1}{4\operatorname{ctg}^3 A - 4\operatorname{ctg} A}$.

406.2. $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.$

406.3. $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1-\cos A} = \frac{1+\cos A}{\sin A} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}.$

407.

$\sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ.$

$\sin 15^\circ = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75^\circ.$

$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ.$

$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$

$\sin 36^\circ = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \cos 54^\circ.$

$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ.$

$\sin 54^\circ = \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^\circ.$

$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ.$

$\sin 72^\circ = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \cos 18^\circ.$

$\sin 75^\circ = \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \cos 15^\circ.$

$\sin 90^\circ = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = \cos 0^\circ.$

$\sin 120^\circ = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ $\quad\sin 240^\circ = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\cos 120^\circ = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$ $\quad\cos 240^\circ = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$

$\sin 180^\circ = \sin\pi = 0.$ $\quad\sin 270^\circ = \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$

$\cos 180^\circ = \cos\pi = -1.$ $\quad\cos 270^\circ = \cos\frac{3\pi}{2} = 0.$

408.01. $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, где $i = +\sqrt{-1}.$

Заметим, что в электротехнической литературе вместо i часто употребляется j.

408.02. $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}).$

408.03. $\operatorname{tg} x = -i\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}\right) = -i\left(\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}\right).$

408.04. $e^{ix} = \cos x + i \sin x.$ *(Формула Эйлера.)*

408.05. $e^{z+ix} = e^z (\cos x + i \sin x).$

408.06. $a^{z+ix} = a^z [\cos(x \ln a) + i \sin(x \ln a)].$

408.07. $(\cos x + i \sin x)^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx.$

(Формула Муавра.)

408.08. $(\cos x + i \sin x)^{-n} = \cos nx - i \sin nx.$

408.09. $(\cos x + i \sin x)^{-1} = \cos x - i \sin x.$

408.10. $\sin(ix) = i \operatorname{sh} x.$

408.11. $\cos(ix) = \operatorname{ch} x.$

408.12. $\operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{th} x.$

408.13. $\operatorname{ctg}(ix) = -i \operatorname{cth} x.$

408.14. $\sec(ix) = \operatorname{sech} x.$

408.15. $\csc(ix) = -i \operatorname{csch} x.$

408.16. $\sin(x \pm iy) = \sin x \operatorname{ch} y \pm i \cos x \operatorname{sh} y.$

408.17. $\cos(x \pm iy) = \cos x \operatorname{ch} y \mp i \sin x \operatorname{sh} y.$

408.18. $\operatorname{tg}(x \pm iy) = \frac{\sin 2x \pm i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$

408.19. $\operatorname{ctg}(x \pm iy) = \frac{\sin 2x \mp i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}.$

409.01. $ce^{ix} = ce^{i(x+2k\pi)}$, где k — целое число или нуль.

$= c(\cos x + i \sin x).$

409.02. $1 = e^{0+2k\pi i} = \cos 0 + i \sin 0.$

Заметим, что

$$\cos 2k\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1.$$

409.03. $-1 = e^{0+(2k+1)\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi.$

Заметим, что

$$\ln(-1) = (2k+1)\pi i.$$

409.04. $\sqrt{1} = e^{2k\pi i/2}$. Эта величина может принять два различных значения в зависимости от того, четно или нечетно k. Этими значениями будут соответственно

$e^{2r\pi i} = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad e^{(2r+1)\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$

где r — целое число или нуль.

409.05. $\sqrt{-1} = e^{(2r+1)\pi i/2}$. Этот квадратный корень имеет два значения в зависимости от того, четно или нечетно r; эти значения соответственно

$$\cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i, \quad \cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2 = -i.$$

409.06. $\sqrt[3]{1} = e^{2k\pi i/3}$. Этот корень имеет три различных значения:

$$e^{2r\pi i} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$e^{(2r\pi+2\pi/3)\,i} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega,$$

$$e^{(2r\pi+4\pi/3)\,i} = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2.$$

409.07. $\sqrt[4]{1} = e^{2k\pi i/4}$. Этот корень имеет четыре различных значения:

$$e^{2r\pi i} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$e^{(2r\pi+2\pi/4)\,i} = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i,$$

$$e^{(2r\pi+4\pi/4)\,i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$e^{(2r\pi+6\pi/4)\,i} = \cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2 = -i.$$

(См. **409.04** и **05.**)

409.08. $\sqrt{i} = e^{(4s+1)\pi i/4}$ (получается из **409.05** при $r = 2s$). Этот корень имеет два значения

$$e^{\pi i/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \quad (s \text{ четно}),$$

$$e^{5\pi i/4} = \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \quad (s \text{ нечетно}).$$

409.09. $$\sqrt[n]{1} = e^{2k\pi i/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}$$

принимает n различных значений, соответствующих различным значениям k. Уравнение $\omega^n = 1$ имеет n различных корней:

$$\omega_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1, \qquad \omega_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\omega_2 = \cos 2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin 2\left(\frac{2\pi}{n}\right), \ \ldots, \ \omega_k = \cos k\frac{2\pi}{n} + i \sin k\frac{2\pi}{n},$$

$$\omega_{n-1} = \cos(n-1)\frac{2\pi}{n} + i \sin(n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

Заметим, что согласно **408.07**

$$\omega_2 = \omega_1^2, \qquad \omega_3 = \omega_1^3, \qquad \omega_k = \omega_1^k, \qquad \omega_0 = \omega_1^n.$$

409.10. Все n корней n-й степени из какого-либо числа могут быть получены из любого корня умножением этого корня на n корней из единицы, которые указаны в **409.09.**

410. Формулы для плоского треугольника. Пусть a, b и c — стороны, противолежащие углам A, B и C.

410.01. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$

410.02. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}.$

410.03. $a = b\cos C + c\cos B.$

410.04. $A + B + C = \pi$ радианов $= 180°$.

410.05. $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, где $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

410.06. $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}.$

410.07. $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$

410.08. $\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}.$

410.09. Чтобы найти c по a, b и C при помощи таблиц логарифмов тригонометрических функций, положим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}\frac{C}{2}; \text{ тогда } c = (a-b)\cos\frac{C}{2}\sec\theta.$$

410.10. Площадь треугольника

$$\frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a^2}{2}\,\frac{\sin B\sin C}{\sin A}.$$

410.11. Если $C = 90°$, то $c^2 = a^2 + b^2$. Чтобы найти $c = \sqrt{a^2+b^2}$ при помощи таблиц логарифмов, положим $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$, тогда $c = a\sec\theta$.

Это оказывается полезным в разных случаях.

410.12 В плоском треугольнике

$$\ln a = \ln b - \left(\frac{c}{b}\cos A + \frac{c^2}{2b^2}\cos 2A + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{c^n}{nb^n}\cos nA + \ldots\right) \qquad [c < b],$$
$$= \ln c - \left(\frac{b}{c}\cos A + \frac{b^2}{2c^2}\cos 2A + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{b^n}{nc^n}\cos nA + \ldots\right) \qquad [b < c].$$

[См. 418.]

Ряды

415.01. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad [x^2 < \infty].$

415.02. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad [x^2 < \infty].$

415.03. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$

$\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots \qquad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right].$

[См. **45**].

415.04. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots$

$\dots - \frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1} - \dots \qquad [x^2 < \pi^2].$

[См. **45.**]

415.05. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots$

$\dots + \frac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \qquad \left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right].$

[См. **45**].

415.06. $\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15\,120}x^5 + \frac{127}{604\,800}x^7 + \dots$

$\dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} + \dots \qquad [x^2 < \pi^2].$

[См. **45**].

415.07. $\sin(\theta + x) = \sin\theta + x\cos\theta - \frac{x^2\sin\theta}{2!} -$

$- \frac{x^3\cos\theta}{3!} + \frac{x^4\sin\theta}{4!} + \dots$

415.08. $\cos(\theta + x) = \cos\theta - x\sin\theta - \frac{x^2\cos\theta}{2!} +$

$+ \frac{x^3\sin\theta}{3!} + \frac{x^4\cos\theta}{4!} - \dots$

416.01. $\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots$

$[0 < x < \pi].$

416.02. Постоянная $c = \frac{4c}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \right.$

$\left. + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right) \qquad [0 < x > \pi].$

416.03. $$c=\frac{4c}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{a}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{a}+\right.$$ $$\left.+\frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{a}+\ldots\right)\qquad [0<x<a].$$

416.04. $$\frac{\pi}{4}=\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 7x}{7}+\ldots\qquad \left[-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right].$$

416.05. Постоянная $$c=\frac{4c}{\pi}\left(\cos x-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\frac{\cos 7x}{7}+\ldots\right)$$ $$\left[-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right].$$

416.06. $$c=\frac{4c}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{a}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{a}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{a}-\frac{1}{7}\cos\frac{7\pi x}{a}+\ldots\right)$$ $$\left[-\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2}\right].$$

416.07. $$x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right)\qquad [-\pi<x<\pi].$$

416.08. $$x=\pi-2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right)$$ $$[0<x<2\pi].$$

416.09. $$x=\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\frac{\sin 7x}{7^2}+\ldots\right)$$ $$\left[-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

416.10. $$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{\cos 7x}{7^2}+\ldots\right)$$ $$[0\leqslant x\leqslant\pi].$$

416.11. $$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots\right)$$ $$[-\pi\leqslant x\leqslant\pi].$$

416.12. $$x^2=\frac{\pi^2}{4}-\frac{8}{\pi}\left(\cos x-\frac{\cos 3x}{3^3}+\frac{\cos 5x}{5^3}-\right.$$ $$\left.-\frac{\cos 7x}{7^3}+\ldots\right)\qquad\left[-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right].$$

416.13. $$x^3-\pi^2x=$$ $$=-12\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}-\frac{\sin 4x}{4^3}+\ldots\right)$$ $$[-\pi\leqslant x\leqslant\pi].$$

416.14. $$\sin x = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} - \ldots\right) \qquad \left[-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right].$$

416.15. $$\cos x = \frac{8}{\pi}\left\{\frac{\sin 2x}{1\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 5}\sin 4x + \frac{3}{5\cdot 7}\sin 6x + \ldots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}\sin 2nx + \ldots\right\} \qquad [0 < x < \pi].$$

416.16. $$\sin ax = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 - a^2} - \ldots\right\},$$
где a — не целое число $[-\pi < x < \pi]$.

416.17. $$\cos ax = \frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2a^2} + \frac{\cos x}{1^2 - a^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - a^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - a^2} - \ldots\right\},$$
где a — не целое число. $[-\pi \leqslant x \leqslant \pi]$.

417.1. $$\frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = 1 + \frac{1}{\sin\theta}(a\sin 2\theta + a^2\sin 3\theta + a^3\sin 4\theta + \ldots) \qquad [a^2 < 1].$$

417.2. $$\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = 1 + 2(a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + a^3\cos 3\theta + \ldots) \qquad [a^2 < 1].$$

417.3. $$\frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = 1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + a^3\cos 3\theta + \ldots \qquad [a^2 < 1].$$

417.4. $$\frac{\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = \sin\theta + a\sin 2\theta + a^2\sin 3\theta + \ldots \qquad [a^2 < 1].$$

418. $$\ln(1 - 2a\cos\theta + a^2) =$$
$$= -2\left(a\cos\theta + \frac{a^2}{2}\cos 2\theta + \frac{a^3}{3}\cos 3\theta + \ldots\right) \qquad [a^2 < 1],$$
$$= 2\ln|a| - 2\left(\frac{\cos\theta}{a} + \frac{\cos 2\theta}{2a^2} + \frac{\cos 3\theta}{3a^3} + \ldots\right) \qquad [a^2 > 1].$$

419.1. $$e^{ax}\sin bx = \frac{rx\sin\theta}{1!} + \frac{r^2x^2\sin 2\theta}{2!} + \frac{r^3x^3\sin 3\theta}{3!} + \ldots,$$
где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\theta$ и $b = r\sin\theta$.

419.2. $$e^{ax}\cos bx = 1 + \frac{rx\cos\theta}{1!} + \frac{r^2x^2\cos 2\theta}{2!} + \frac{r^3x^3\cos 3\theta}{3!} + \ldots,$$
где r и θ те же, что и в **419.1.**

420.1. $$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

420.2. $$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

420.3. $$\sin\alpha + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\alpha+2\delta) + \ldots$$
$$\ldots + \sin\{\alpha + (n-1)\delta\} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\delta\right)\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

420.4. $$\cos\alpha + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\alpha+2\delta) + \ldots$$
$$\ldots + \cos\{\alpha + (n-1)\delta\} = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\delta\right)\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

421. Если $\sin\theta = x\sin(\theta+\alpha)$, то
$$\theta + r\pi = x\sin\alpha + \frac{1}{2}x^2\sin 2\alpha + \frac{1}{3}x^3\sin 3\alpha + \ldots \qquad [x^2 < 1],$$
где r — целое число.

422.1. $$\sin\theta = \theta\left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots \qquad [\theta^2 < \infty].$$

422.2. $$\cos\theta = \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\theta^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots \qquad [\theta^2 < \infty].$$

См. также **818.1—818.4.**

Тригонометрические функции — Производные

427.1. $$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x.$$

427.2. $$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$$

427.3. $$\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx} = \sec^2 x.$$

427.4. $$\frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx} = -\csc^2 x.$$

427.5. $$\frac{d\sec x}{dx} = \sec x\,\mathrm{tg}\,x.$$

427.6. $$\frac{d\csc x}{dx} = -\csc x\,\mathrm{ctg}\,x.$$

Тригонометрические функции — Интегралы

При вычислении определенных интегралов часто бывает полезно строить график подынтегральной функции. Некоторые кривые, такие как график тангенса, имеют точки разрыва. Вообще, интегрирование не должно производиться в пределах, между которыми имеется точка разрыва.

429. Подстановки:

	u	du	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	dx
(1)	$\sin x$	$\cos x\,dx$	u	$\sqrt{1-u^2}$	$\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u$	$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
(2)	$\cos x$	$-\sin x\,dx$	$\sqrt{1-u^2}$	u	$\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$	$\arccos u$	$-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
(3)	$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x\,dx$	$\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$	u	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{du}{1+u^2}$
(4)	$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x\,dx$	$\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}$	$\frac{1}{u}$	$\sqrt{u^2-1}$	$\operatorname{arcsec} u$	$\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$
(5)	$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$	$\frac{2u}{1+u^2}$	$\frac{1-u^2}{1+u^2}$	$\frac{2u}{1-u^2}$	$2\operatorname{arctg} u$	$\frac{2du}{1+u^2}$

$\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$ можно заменить соответственно на $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{\sin x}$.

Примечание. a) $\int F(\sin x)\cos x\,dx$, — использовать (1);

b) $\int F(\cos x)\sin x\,dx$, — использовать (2);

c) $\int F(\operatorname{tg} x)\sec^2 x\,dx$, — использовать (3).

Из таблицы следует выбрать подходящую подстановку для замены тригонометрических функций алгебраическими и обратно. Так, например, если встречаются только $\operatorname{tg} x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, следует применять (3).

Интегралы, содержащие $\sin x$

430.10. $\int \sin x\,dx = -\cos x.$

430.101. $\int \sin(a+bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(a+bx).$

430.102. $\int \sin\frac{x}{a}\,dx = -a\cos\frac{x}{a}.$

430.11. $\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x.$

430.12. $\int x^2\sin x\,dx = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x.$

430.13. $\int x^3\sin x\,dx = (3x^2-6)\sin x - (x^3-6x)\cos x.$

430.14. $\int x^4\sin x\,dx = (4x^3-24x)\sin x - (x^4-12x^2+24)\cos x.$

430.15. $\int x^5\sin x\,dx = (5x^4-60x^2+120)\sin x - (x^5-20x^3+120x)\cos x.$

430.16. $\int x^6\sin x\,dx = (6x^5-120x^3+720x)\sin x - (x^6-30x^4+360x^2-720)\cos x.$

430.19. $\int x^m\sin x\,dx = -x^m\cos x + m\int x^{m-1}\cos x\,dx.$

[См. **440.**]

430.20. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\sin x\cos x}{2}.$

430.21. $\int x\sin^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8}.$

430.22. $\int x^2\sin^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\sin 2x - \frac{x\cos 2x}{4}.$

430.23. $\int x^3\sin^2 x\,dx = \frac{x^4}{8} - \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3x}{8}\right)\sin 2x - \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{3}{16}\right)\cos 2x.$

430.30. $\int \sin^3 x\,dx = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x.$

430.31. $\int x\sin^3 x\,dx = \frac{x\cos 3x}{12} - \frac{\sin 3x}{36} - \frac{3}{4}x\cos x + \frac{3}{4}\sin x.$

(Выражая $\sin^3 x$ согласно **404.13.**)

430.40. $\int \sin^4 x\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$

430.50. $$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{5\cos x}{8} + \frac{5\cos 3x}{48} - \frac{\cos 5x}{80}.$$

430.60. $$\int \sin^6 x\,dx = \frac{5x}{16} - \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{3\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192}.$$

430.70. $$\int \sin^7 x\,dx = -\frac{35\cos x}{64} + \frac{7\cos 3x}{64} - \frac{7\cos 5x}{320} + \frac{\cos 7x}{448}.$$

(Интегрируя выражения из **404.**)

431.11. $$\int \frac{\sin x\,dx}{x} = \operatorname{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$$

Таблицу численных значений этой функции см. [22].

431.12. $$\int \frac{\sin x\,dx}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x\,dx}{x}.$$ [См. **441.11.**]

431.13. $$\int \frac{\sin x\,dx}{x^3} = -\frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sin x\,dx}{x}.$$ [См. **431.11.**]

431.14. $$\int \frac{\sin x\,dx}{x^4} = -\frac{\sin x}{3x^3} - \frac{\cos x}{6x^2} + \frac{\sin x}{6x} - \frac{1}{6}\int \frac{\cos x\,dx}{x}.$$ [См. **441.11.**]

431.19. $$\int \frac{\sin x\,dx}{x^m} = -\frac{\sin x}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{1}{m-1}\int \frac{\cos x\,dx}{x^{m-1}}.$$

431.21. $$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x\,d(2x)}{2x}.$$ [См. **441.11.**]

431.31. $$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{x} = \frac{3}{4}\int \frac{\sin x\,dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{\sin 3x\,d(3x)}{3x}.$$ [См. **431.11.**]

431.9. $\int \frac{\sin^n x\,dx}{x^m}$. Выразить $\sin^n x$ согласно **404** и интегрировать почленно согласно **431.1** и **441.1.**

432.10. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| = \lambda\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$ (лямбда-функция). [См. **641** и **603.6.**]

См. рисунок на стр. 86.

432.11. $$\int \frac{x\,dx}{\sin x} = x + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{7x^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31x^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \frac{127x^9}{3\cdot 5\cdot 9!} + \ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n x^{2n+1} + \ldots$$ [См. **45.**]

432.12. $$\int \frac{x^2dx}{\sin x} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3!} + \frac{7x^6}{3\cdot 6\cdot 5!} + \frac{31x^8}{3\cdot 8\cdot 7!} + \frac{127x^{10}}{5\cdot 5\cdot 6\cdot 8!} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+2)(2n)!} B_n x^{2n+2} + \ldots \quad [\text{См. } \mathbf{45.}]$$

432.19. $\int \frac{x^m dx}{\sin x}$. Разложить $\frac{1}{\sin x}$ согласно **415.06**, умножить на x^m и интегрировать $[m > 0]$.

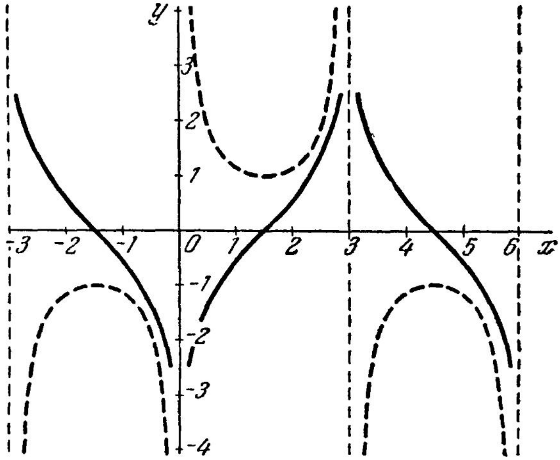

Рис. 432.10. Графики функций $y = \csc x$ (пунктирная линия) и $y = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$ (сплошная линия).

432.20. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x.$$

432.21. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x|.$$

432.30. $$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

432.31. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^3 x} = -\frac{x\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\sin x}. \quad [\text{См. } \mathbf{432.11.}]$$

432.40. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}.$$

432.41. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^4 x} = -\frac{x\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{1}{6\sin^2 x} - \frac{2}{3}x\operatorname{ctg} x + \frac{2}{3}\ln|\sin x|.$$

432.50. $$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

432.60. $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4}{15}\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{8}{15}\operatorname{ctg} x.$$

432.90. $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \operatorname{csc}^n x\,dx = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \qquad [n>1].$$

432.91. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^n x} = -\frac{x\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\sin^{n-2} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\sin^{n-2} x} \qquad [n>2].$$

433.01. $$\int \frac{dx}{1+\sin x} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

433.02. $$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

433.03. $$\int \frac{x\,dx}{1+\sin x} = -x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|.$$

433.04. $$\int \frac{x\,dx}{1-\sin x} = x\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|.$$

433.05. $$\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x} = x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

433.06. $$\int \frac{\sin x\,dx}{1-\sin x} = -x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

433.07. $$\int \frac{dx}{\sin x\,(1+\sin x)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

433.08. $$\int \frac{dx}{\sin x\,(1-\sin x)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

434.01. $$\int \frac{dx}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

434.02. $$\int \frac{dx}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

434.03. $$\int \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

434.04. $$\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\sin x)^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

434.05. $$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{3\sin^2 x-1}{\sin^2 x+1}\right).$$ [См. **436.6.**]

434.06. $\int \frac{dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$ [См. **442.20.**]

435. $\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$

[$m^2 \neq n^2$. Если $m^2 = n^2$, то см. **430.20.**]

436.00. $\int \frac{dx}{a+b\sin x} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad [a^2 > b^2],$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a \operatorname{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}} \right| \quad [b^2 > a^2],$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{Arth} \frac{a \operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

$$\left[b^2 > a^2, \ \left|a \operatorname{tg}\frac{x}{2}+b\right| < \sqrt{b^2-a^2}\right],$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{b^2-a^2}} \operatorname{Arcth} \frac{a \operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

$$\left[b^2 > a^2, \ \left|a \operatorname{tg}\frac{x}{2}+b\right| > \sqrt{b^2-a^2}\right].$$

Подынтегральная функция обращается в бесконечность (если $b^2 > a^2$) при $x = n\pi + (-1)^n \arcsin\left(-\frac{a}{b}\right)$.

436.01. $\int \frac{\sin x \, dx}{a+b\sin x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+b\sin x}.$

436.02. $\int \frac{dx}{\sin x(a+b\sin x)} = \frac{1}{a} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+b\sin x}.$

436.03. $\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^2} = \frac{b\cos x}{(a^2-b^2)(a+b\sin x)} + \frac{a}{a^2-b^2} \int \frac{dx}{a+b\sin x}.$

436.04. $\int \frac{\sin x \, dx}{(a+b\sin x)^2} = \frac{a\cos x}{(b^2-a^2)(a+b\sin x)} + \frac{b}{b^2-a^2} \int \frac{dx}{a+b\sin x}.$

[К **436.01—436.04** см. **436.00.**]

436.5. $\int \frac{dx}{a^2+b^2\sin^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg} x}{a}.$

436.6. Когда $a=b=1$,

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x).$$

Другое выражение, отличающееся на константу, дано в **434.05.**

436.7. $$\int \frac{dx}{a^2-b^2\sin^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg} x}{a} \quad [a^2 > b^2],$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg} x + a}{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg} x - a}\right| \quad [b^2 > a^2].$$

Если $b^2 = a^2$, см. **434.06.**

437.1. $$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1+m^2\sin^2 x}} = -\frac{1}{m} \arcsin \frac{m\cos x}{\sqrt{1+m^2}}.$$

437.2. $$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-m^2\sin^2 x}} = -\frac{1}{m} \ln\left| m\cos x + \sqrt{1-m^2\sin^2 x}\right|.$$

437.3. $$\int (\sin x)\sqrt{1+m^2\sin^2 x}\, dx =$$

$$= -\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+m^2\sin^2 x} - \frac{1+m^2}{2m} \arcsin \frac{m\cos x}{\sqrt{1+m^2}}.$$

437.4. $$\int (\sin x)\sqrt{1-m^2\sin^2 x}\, dx = -\frac{\cos x}{2}\sqrt{1-m^2\sin^2 x} -$$

$$-\frac{1-m^2}{2m} \ln\left| m\cos x + \sqrt{1-m^2\sin^2 x}\right|.$$

Интегралы, содержащие $\cos x$

440.10. $$\int \cos x\, dx = \sin x.$$

440.101. $$\int \cos(a+bx)\, dx = \frac{1}{b}\sin(a+bx).$$

440.102. $$\int \cos\frac{x}{a}\, dx = a\sin\frac{x}{a}.$$

440.11. $$\int x\cos x\, dx = \cos x + x\sin x.$$

440.12. $$\int x^2\cos x\, dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x.$$

440.13. $$\int x^3\cos x\, dx = (3x^2-6)\cos x + (x^3-6x)\sin x.$$

440.14. $$\int x^4\cos x\, dx = (4x^3-24x)\cos x + (x^4-12x^2+24)\sin x.$$

440.15. $\int x^5 \cos x\,dx =$
$$= (5x^4 - 60x^2 + 120)\cos x + (x^5 - 20x^3 + 120x)\sin x.$$

440.16. $\int x^6 \cos x\,dx = (6x^5 - 120x^3 + 720x)\cos x +$
$$+ (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720)\sin x.$$

440.19. $\int x^m \cos x\,dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x\,dx.$ [См. **430.**]

440.20. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = \frac{x}{2} + \frac{\sin x\cos x}{2}.$

440.21. $\int x\cos^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8}.$

440.22. $\int x^2\cos^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\right)\sin 2x + \frac{x\cos 2x}{4}.$

440.23. $\int x^3\cos^2 x\,dx = \frac{x^4}{8} + \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3x}{8}\right)\sin 2x + \left(\frac{3x^2}{8} - \frac{3}{16}\right)\cos 2x.$

440.30. $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}.$

440.31. $\int x\cos^3 x\,dx = \frac{x\sin 3x}{12} + \frac{\cos 3x}{36} + \frac{3}{4}x\sin x + \frac{3}{4}\cos x.$

($\cos^3 x$ выражается согласно **404.23.**)

440.40. $\int \cos^4 x\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$

440.50. $\int \cos^5 x\,dx = \frac{5\sin x}{8} + \frac{5\sin 3x}{48} + \frac{\sin 5x}{80}.$

440.60. $\int \cos^6 x\,dx = \frac{5x}{16} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{\sin 6x}{192}.$

440.70. $\int \cos^7 x\,dx = \frac{35\sin x}{64} + \frac{7\sin 3x}{64} + \frac{7\sin 5x}{320} + \frac{\sin 7x}{448}.$

(Интегрируется выражение из **404.**)

441.11. $\int \frac{\cos x\,dx}{x} = \ln|x| - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \ldots$

Таблицу численных значений см. [22].

441.12. $\int \frac{\cos x\,dx}{x^2} = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x\,dx}{x}.$ [См. **431.11.**]

441.13. $\int \frac{\cos x\,dx}{x^3} = -\frac{\cos x}{2x^2} + \frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x\,dx}{x}.$ [См. **441.11.**]

441.14. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{x^4} = -\frac{\cos x}{3x^3} + \frac{\sin x}{6x^2} + \frac{\cos x}{6x} + \frac{1}{6}\int \frac{\sin x\,dx}{x}.$

[См. **431.11.**]

441.19. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{x^m} = -\frac{\cos x}{(m-1)\,x^{m-1}} - \frac{1}{m-1}\int \frac{\sin x\,dx}{x^{m-1}}.$

441.21. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x\,dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x\,d(2x)}{2x}.$ [См. **441.11.**]

441.31. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x\,dx}{x} = \frac{3}{4}\int \frac{\cos x\,dx}{x} + \frac{1}{4}\int \frac{\cos 3x\,d(3x)}{3x}.$ [См. **441.11.**]

441.9. $\displaystyle\int \frac{\cos^n x\,dx}{x^m}.$

Выразить $\cos^n x$ согласно **404** и интегрировать почленно согласно **441.1.**

442.10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|,$

$\displaystyle= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x},$

$= \lambda(x)$ (лямбда-функция). [См. **640.**]

442.11. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos x} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 2!} + \frac{5x^6}{6\cdot 4!} + \frac{61x^8}{8\cdot 6!} + \frac{1385x^{10}}{10\cdot 8!} + \ldots$

$\displaystyle\ldots + \frac{E_n x^{2n+2}}{(2n+2)\,(2n)!} + \ldots$ [См. **45.**]

442.12. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\cos x} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{5x^7}{7\cdot 4!} + \frac{61x^9}{9\cdot 6!} + \frac{1385x^{11}}{11\cdot 8!} + \ldots$

$\displaystyle\ldots + \frac{E_{n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)\,(2n-2)!} + \ldots$ [См. **45.**]

442.19. $\displaystyle\int \frac{x^m dx}{\cos x}.$ Разложить $\dfrac{1}{\cos x}$ согласно **415.05**, умножить на x^m и интегрировать $[m \neq 0]$.

442.20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x.$

442.21. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x|.$

442.30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|.$

442.31. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^3 x} = \frac{x\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{\cos x}.$ [См. **442.11.**]

442.40. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}.$

442.41. $\int \frac{x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{x\sin x}{3\cos^3 x} - \frac{1}{6\cos^2 x} + \frac{2}{3}x\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\ln|\cos x|.$

442.50. $\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|.$

442.60. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4}{15}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x.$

442.90. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \sec^n x\,dx =$

$$= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \qquad [n > 1].$$

442.91. $\int \frac{x\,dx}{\cos^n x} = \frac{x\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\cos^{n-2} x} +$

$$+ \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} x} \qquad [n > 2].$$

443.01. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

443.02. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

443.03. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x} = x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|.$

443.04. $\int \frac{x\,dx}{1-\cos x} = -x\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|.$

443.05. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x} = x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

443.06. $\int \frac{\cos x\,dx}{1-\cos x} = -x - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

443.07. $\int \frac{dx}{\cos x\,(1+\cos x)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| - \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

443.08. $\int \frac{dx}{\cos x\,(1-\cos x)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

444.01. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}.$

444.02. $\int \frac{dx}{(1-\cos x)^2} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}.$

444.03. $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}.$

444.04. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\cos x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}.$

444.05. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{1-3\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\right).$ [См. **446.6.**]

444.06. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$ [См. **432.20.**]

445. $\displaystyle\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$

[$m^2 \neq n^2$. Если $m^2 = n^2$, то см. **440.20.**]

446.00. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\cos x} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad [a^2 > b^2],$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{(b-a)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{b^2-a^2}}{(b-a)\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{b^2-a^2}}\right| \qquad [b^2 > a^2],$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{Arth}\frac{(b-a)\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

$$\left[b^2 > a^2, \left|(b-a)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| < \sqrt{b^2-a^2}\right],$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{Arcth}\frac{(b-a)\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

$$\left[b^2 > a^2, \left|(b-a)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| > \sqrt{b^2-a^2}\right].$$

Подынтегральная функция обращается в бесконечность (если $b^2 > a^2$) при $x = 2n\pi \pm \arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$.

446.01. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{a+b\cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$

446.02. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+b\cos x)\cos x} = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$

446.03. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{b\sin x}{(b^2-a^2)(a+b\cos x)} - \frac{a}{b^2-a^2}\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$

446.04. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{a\sin x}{(a^2-b^2)(a+b\cos x)} - \frac{b}{a^2-b^2}\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$

[К **446.01—446.04** см. **446.00.**]

446.2. $$\int \frac{dx}{a^2+b^2-2ab\cos x} = \frac{2}{|a^2-b^2|} \operatorname{arctg}\left[\left|\frac{a+b}{a-b}\right| \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] \qquad [a \neq b].$$

[См. **446.00.**]

446.5. $$\int \frac{dx}{a^2+b^2\cos^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{arctg}\frac{a \operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad [a > 0].$$

446.6. При $a = b = 1$

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right).$$

Другое выражение, отличающееся на константу, дается в **444.05.**

446.7. $$\int \frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg}\frac{a \operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad [a^2 > b^2,\ a > 0],$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{a \operatorname{tg} x - \sqrt{b^2-a^2}}{a \operatorname{tg} x + \sqrt{b^2-a^2}}\right| \qquad [b^2 > a^2,\ a > 0].$$

Если $b^2 = a^2$, см. **444.06.**

Интегралы, содержащие $\sin x$ и $\cos x$

450.11. $$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos^2 x}{2} + \text{const.},$$

$$= -\frac{\cos 2x}{4} + \text{const.}$$

450.12. $$\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3}.$$

450.13. $$\int \sin x \cos^3 x \, dx = -\frac{\cos^4 x}{4}.$$

450.19. $$\int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

450.21. $$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3}.$$

450.22. $$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right).$$

450.23. $$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15}\sin^3 x.$$

450.31. $$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{\sin^4 x}{4}.$$

450.81. $\int \sin^m x \cos x\,dx = \dfrac{\sin^{m+1} x}{m+1}$ $[m \neq -1]$.

(При $m=-1$ см. **453.11.**)

450.9. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx =$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x\,dx,$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$$

$[m \neq -n$; см. **480.9**]. [См. также **461.**]

451.11. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos x} = \ln|\operatorname{tg} x|$.

451.12. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

451.13. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \dfrac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x|$.

451.14. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \dfrac{1}{3\cos^3 x} + \dfrac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

451.15. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^5 x} = \dfrac{1}{4\cos^4 x} + \dfrac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x|$.

451.19. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^n x} = \dfrac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \int \dfrac{dx}{\sin x \cos^{n-2} x}$ $[n \neq 1]$.

451.21. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\dfrac{1}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right|$.

451.22. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

451.23. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right|$.

451.24. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \dfrac{1}{3\sin x \cos^3 x} - \dfrac{8}{3}\operatorname{ctg} 2x$.

451.31. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\dfrac{1}{2\sin^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x|$.

451.32. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + \dfrac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

451.33. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} = -\dfrac{2\cos 2x}{\sin^2 2x} + 2\ln|\operatorname{tg} x|$.

451.41. $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x \cos x} = \dfrac{3\cos^2 x - 4}{3\sin^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right|$.

451.91. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos x}$ $[m \neq 1]$.

451.92. $\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^n x} = 2^{n-1} \int \frac{d(2x)}{\sin^n (2x)}$. [См. **432.**]

451.93. $$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} =$$
$$= \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}$$ $[n > 1]$,
$$= -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}$$ $[m > 1]$;

452.11. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| = \ln|\sec x|$. [См. **480.1.**]

452.12. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$.

452.13. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \text{const}$.

452.14. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x}$.

452.19. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x}$ $[n \neq 1]$.

452.21. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos x} = -\sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$.

452.22. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x$. [См. **480.2.**]

452.23. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$.

452.24. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$.

452.29. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$ $[n \neq 1]$.

452.31. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{2} - \ln|\cos x|$.

452.32. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^2 x} = \cos x + \sec x$.

452.33. $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^3 x} = \int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|$. [См. **480.3.**]

452.34. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}.$

452.35. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x} + \text{const}.$

452.39. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} x}$ [$n \neq 1$ или 3].

452.41. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos x} = -\frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|.$

452.7. $\int \frac{\sin^{n-2} x\,dx}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1}$ [$n \neq 1$].

452.8. $\int \frac{\sin^n x\,dx}{\cos^n x} = \int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$

[$n \neq 1$; см. **480.9**].

452.9. $\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x} =$

$= \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^m x\,dx}{\cos^{n-2} x}$ [$n \neq 1$],

$= -\frac{\sin^{m-1} x}{(m-n)\cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\sin^{m-2} x\,dx}{\cos^n x}$ [$m \neq n$],

$= \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2} x\,dx}{\cos^{n-2} x}$ [$n \neq 1$].

453.11. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x|.$ [См. **490.1.**]

453.12. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} = -\csc x.$

453.13. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \text{const}.$

453.14. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3\sin^3 x}.$

453.19. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}$ [$n \neq 1$].

453.21. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin x} = \cos x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$

453.22. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x - x.$ [См. **490.2.**]

453.23. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$

453.24. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x.$

453.29. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$ $[n \neq 1]$.

453.31. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{2} + \ln|\sin x|$.

453.32. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x} = -\sin x - \csc x$.

453.33. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 x} = \int \operatorname{ctg}^3 x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x|$. [См. **490.3.**]

453.34. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x}$.

453.35. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x = \frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^4 x} + \text{const}$.

453.39. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^n x} = \frac{1}{(n-3)\sin^{n-3} x} - \frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}$ $[n \neq 1$ или $3]$.

453.41. $\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin x} = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

453.7. $\int \frac{\cos^{n-2} x\,dx}{\sin^n x} = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1}$ $[n \neq 1]$.

453.8. $\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^n x} = \int \operatorname{ctg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\,dx$

[$n \neq 1$; см. **490.9**].

453.9. $\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} =$

$$= -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^{m-2} x} \quad [m \neq 1],$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x}{(n-m)\sin^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} x\,dx}{\sin^m x} \quad [m \neq n],$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} x\,dx}{\sin^{m-2} x} \quad [m \neq 1].$$

454.01. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos x} = -\ln(1+\cos x)$.

454.02. $\int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x} = \ln(1-\cos x)$.

454.03. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x} = \ln(1+\sin x)$.

454.04. $\int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin x} = -\ln(1-\sin x)$.

454.05. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1}{2(1+\cos x)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

454.06. $$\int \frac{dx}{\sin x\,(1-\cos x)} = -\frac{1}{2\,(1-\cos x)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

454.07. $$\int \frac{dx}{\cos x\,(1+\sin x)} = -\frac{1}{2\,(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|.$$

454.08. $$\int \frac{dx}{\cos x\,(1-\sin x)} = \frac{1}{2\,(1-\sin x)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|.$$

454.09. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\,(1+\cos x)} = \ln\left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right|.$$

454.10. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\,(1-\cos x)} = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\cos x}\right|.$$

454.11. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(1+\sin x)} = -\ln\left|\frac{1+\sin x}{\sin x}\right|.$$

454.12. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(1-\sin x)} = -\ln\left|\frac{1-\sin x}{\sin x}\right|.$$

454.13. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\,(1+\sin x)} = \frac{1}{2\,(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|.$$

454.14. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\,(1-\sin x)} = \frac{1}{2\,(1-\sin x)} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|.$$

454.15. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(1+\cos x)} = -\frac{1}{2\,(1+\cos x)} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

454.16. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x\,(1-\cos x)} = -\frac{1}{2\,(1-\cos x)} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

455.01. $$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|.$$

455.02. $$\int \frac{dx}{\sin x-\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|.$$

455.03. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|.$$ [См. **482.2** и **492.1.**]

455.04. $$\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x-\cos x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x-\cos x|.$$ [См. **482.2** и **492.1.**]

455.05. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|.$$ [См. **482.1** и **492.2.**]

455.06. $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x-\cos x} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x-\cos x|.$$ [См. **482.1** и **492.2.**]

455.07. $$\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

455.08. $\int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

455.09. $\int \frac{dx}{1 + \cos x \pm \sin x} = \pm \ln\left|1 \pm \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$

456.1. $\int \frac{dx}{b \cos x + c \sin x} = \frac{1}{r} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\theta}{2}\right|,$

где $r = \sqrt{b^2 + c^2}$, $\sin\theta = b/r$, $\cos\theta = c/r$.

[См. **401.2** и **432.10.**]

456.2. $\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x} = \int \frac{d(x+\theta)}{a + r \sin(x+\theta)},$

где r и θ даны в **456.1.** [См. **436.00.**]

460.1. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x\right).$ [См. **436.5.**]

460.2. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln\left|\frac{b \operatorname{tg} x + a}{b \operatorname{tg} x - a}\right|.$ [См. **436.7.**]

461. $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$. Если одно из чисел m или n нечетное целое положительное, то следует сделать подстановку

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{и} \quad \sin x \, dx = -d \cos x$$

или

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \text{и} \quad \cos x \, dx = d \sin x.$$

Если оба числа m и n четные целые положительные, то следует сделать подстановки

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

и

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Получив аналогичные выражения, но с аргументом $2x$ вместо x, преобразовать их далее подобным же образом. См. также **450.9.**

465. $\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}$

$[m^2 \neq n^2]$. [При $m^2 = n^2$ см. **450.11.**]

470.1. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{m} \ln\left(m \sin x + \sqrt{1 + m^2 \sin^2 x}\right).$

470.2. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{m} \arcsin(m \sin x).$

470.3. $$\int (\cos x)\sqrt{1+m^2\sin^2 x}\,dx = \frac{\sin x}{2}\sqrt{1+m^2\sin^2 x}+\frac{1}{2m}\ln\left(m\sin x+\sqrt{1+m^2\sin^2 x}\right).$$

470.4. $$\int (\cos x)\sqrt{1-m^2\sin^2 x}\,dx = \frac{\sin x}{2}\sqrt{1-m^2\sin^2 x}+\frac{1}{2m}\arcsin(m\sin x).$$

475.1. $$\int f(x, \sin x)\,dx = -\int f\left(\frac{\pi}{2}-y, \cos y\right)dy,$$
где $y=\frac{\pi}{2}-x.$

475.2. $$\int f(x, \cos x)\,dx = -\int f\left(\frac{\pi}{2}-y, \sin y\right)dy,$$
где $y=\frac{\pi}{2}-x.$

Интегралы, содержащие $\operatorname{tg} x$

480.1. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| = \ln|\sec x|.$ [См. **452.11** и **603.4.**]

480.2. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x.$ [См. **452.22.**]

480.3. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|.$ [См. **452.33.**]

480.4. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x.$

480.9. $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1}-\int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$ [$n \neq 1$; см. **452.8**].

481.1. $$\int x\operatorname{tg} x\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\frac{2}{105}x^7+\frac{17}{2835}x^9+\frac{62}{11\cdot 2835}x^{11}+\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots$$
$\left[x^2<\frac{\pi^2}{4};\right.$ см. **415.03** и **45**$\left.\right]$.

481.2. $$\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{x} = x+\frac{x^3}{9}+\frac{2}{75}x^5+\frac{17}{2205}x^7+\frac{62}{9\cdot 2835}x^9+\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n-1)(2n)!}x^{2n-1}+\ldots$$
$\left[x^2<\frac{\pi^2}{4};\right.$ см. **415.03** и **45**$\left.\right]$.

482.1. $$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \pm\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x \pm \cos x|.$$
[См. **455.05** и **455.06.**]

482.2. $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} x} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|.$

[См. **455.03**, **455.04** и **492.1**.]

483. $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x\, dx}{a \cos x + b \sin x} =$

$= \frac{1}{a^2 + b^2} (ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|).$

Интегралы, содержащие $\operatorname{ctg} x$

490.1. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln |\sin x|.$ [См. **453.11** и **603.1**.]

490.2. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x - x.$ [См. **453.22**.]

490.3. $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln |\sin x|.$ [См. **453.33**.]

490.4. $\int \operatorname{ctg}^4 x\, dx = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x.$

490.9. $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x\, dx$ [$n \neq 1$; см. **453.8**].

491.1. $\int x \operatorname{ctg} x\, dx = x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^5}{225} - \frac{2x^7}{6615} -$

$- \frac{x^9}{9 \cdot 4725} - \ldots - \frac{2^{2n} B_n}{(2n+1)!} x^{2n+1} - \ldots$ [См. **415.04** и **45**.]

491.2. $\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{x} = -\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{135} - \frac{2x^5}{4725} -$

$- \frac{x^7}{7 \cdot 4725} - \ldots - \frac{2^{2n} B_n}{(2n-1)(2n)!} x^{2n-1} - \ldots$ [См. **415.04** и **45**.]

492.1. $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} x} = \int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\operatorname{tg} x \pm 1}.$ [См. **482.2**.]

492.2. $\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{1 \pm \operatorname{ctg} x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1}.$ [См. **482.1**.]

493. $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{ctg} x} = \int \frac{\sin x\, dx}{a \sin x + b \cos x} =$

$= \frac{1}{a^2 + b^2} (ax - b \ln |a \sin x + b \cos x|).$

III.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

500. Приведенные ниже формулы относятся к главным значениям обратных тригонометрических функций: для $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, для $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ от 0 до π. Интегрируя эти функции, следует выбирать пределы таким образом, чтобы между ними не было точек разрыва. Полезно предварительно построить график подынтегральной функции, так как он может состоять из нескольких ветвей.

501. $$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots \qquad [x^2 < 1].$$

(Получается разложением в ряд $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и последующим интегрированием его.)

502. $$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right) \qquad [x^2 < 1].$$

503. $$\operatorname{arccsc} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7x^7} + \ldots \qquad [x^2 > 1].$$

504. $$\operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7x^7} + \ldots\right) \qquad [x^2 > 1].$$

505.1. $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad [x^2 < 1].$$

(Получается разложением в ряд $\frac{1}{1+x^2}$ и последующим интегрированием его.)

505.2. $$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots \qquad [x > 1].$$

505.3. $$\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \ldots \qquad [x < -1].$$

505.4. $$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \ldots\right] \qquad [x^2 < \infty].$$

506.1. $$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \ldots \qquad [x^2 < 1].$$

506.2. $$\operatorname{arcctg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \ldots \qquad [x > 1].$$

506.3. $$\operatorname{arcctg} x = \pi + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{7x^7} + \ldots \qquad [x < -1].$$

507.10. $$\operatorname{Arcsin}(x \pm iy) = n\pi + (-1)^n \arcsin\frac{2x}{p+q} \pm i(-1)^n \operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}.$$

Значения p и q см. **507.11** и **507.12.**

Величина $i = \sqrt{-1}$, а n — целое число или 0. Величина x может быть положительна или отрицательна, а y — положительна.

507.11. Здесь обозначено $p = \sqrt{(1+x)^2 + y^2}$.

507.12. Здесь обозначено $q = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$.

Заметим, что при $y = 0$ и $x > 1$, $q = x - 1$ и $p + q = 2x$. При $y = 0$ и $x < 1$ $q = 1 - x$ и $p + q = 2$.
Иначе:

507.13а. $$\operatorname{Arcsin} A = -i \ln\left(\pm\sqrt{1-A^2} + iA\right) + 2k\pi$$

или

507.13б. $$\operatorname{Arcsin} A = i \ln\left(\pm\sqrt{1-A^2} - iA\right) + 2k\pi,$$

где A может быть комплексной величиной, а k — целое число или 0.

О квадратном корне из комплексной величины см. **58**, а о логарифме см. **604**. Выражения **507.13а** и **507.13б** тождественны. Из них следует выбрать то, в котором не происходит потери точности при вычитании.

507.20. $$\operatorname{Arccos}(x + iy) = \pm\left(\arccos\frac{2x}{p+q} + 2k\pi - i \operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}\right).$$

507.21. $$\operatorname{Arccos}(x - iy) = \pm\left(\arccos\frac{2x}{p+q} + 2k\pi + i \operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}\right),$$

где y положительно. Здесь берется положительное значение $\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}$. Значения p и q см. **507.11** и **507.12.**

Иначе:

507.22а. $\operatorname{Arccos} A = \mp i \ln (A + \sqrt{A^2 - 1}) + 2k\pi$
или

507.22б. $\operatorname{Arccos} A = \pm i \ln (A - \sqrt{A^2 - 1}) + 2k\pi$,
где A может быть комплексной величиной. См. примечание к **507.13.**

507.30. $$\operatorname{Arctg}(x + iy) = \frac{1}{2}\left[(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\frac{1+y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1-y}{x}\right] + \frac{i}{4}\ln\frac{(1+y)^2 + x^2}{(1-y)^2 + x^2}.$$

Иначе:

507.31. $$\operatorname{Arctg}(x + iy) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1 - x^2 - y^2} + k\pi + \frac{i}{4}\ln\frac{(1+y)^2 + x^2}{(1-y)^2 + x^2},$$
где k — целое число или нуль; $\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2-y^2}$ берется в квадранте, определяемом знаками числителя и знаменателя (а не в смысле главного значения).

507.32. $$\operatorname{Arctg}(x + iy) = \frac{i}{2}\ln\frac{1 + y - ix}{1 - y + ix} + 2k\pi.$$ [См. **604.**]

508. Для малых значений $\arccos x$,
$$\arccos x = \left[2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^2 + \frac{4}{45}(1-x)^3 + \frac{1}{35}(1-x)^4 + \ldots\right]^{1/2}.$$

Последним членом можно практически пренебречь. Численное значение квадратного корня можно брать из подробных таблиц квадратных корней (см., например, [18]).

Обратные тригонометрические функции — Производные

512.1. $$\frac{d}{dx}\arcsin\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

512.2. $$\frac{d}{dx}\arccos\frac{x}{a} = \frac{-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

512.3. $$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

512.4. $$\frac{d}{dx}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}.$$

512.5. $$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} = \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad \left[0 < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right].$$

512.6. $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}=\frac{-a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ $\left[\frac{\pi}{2}<\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}<\pi\right]$.

512.7. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}=\frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ $\left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<0\right]$.

512.8. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}=\frac{-a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ $\left[0<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right]$.

($a>0$ всюду, кроме **512.3** и **512.4.**)

Обратные тригонометрические функции — Интегралы ($a>0$)

515. $\int\arcsin\frac{x}{a}\,dx=x\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}$.

516. $\int\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^2dx=x\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)^2-2x+2\sqrt{a^2-x^2}\arcsin\frac{x}{a}$.

517.1. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}$.

517.2. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}$.

517.3. $\int x^3\arcsin\frac{x}{a}\,dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3a^4}{32}\right)\arcsin\frac{x}{a}+$
$+\frac{1}{32}(2x^3+3xa^2)\sqrt{a^2-x^2}$.

517.4. $\int x^4\arcsin\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^5}{5}\arcsin\frac{x}{a}+$
$+\frac{1}{75}(3x^4+4x^2a^2+8a^4)\sqrt{a^2-x^2}$.

517.5. $\int x^5\arcsin\frac{x}{a}\,dx=\left(\frac{x^6}{6}-\frac{5a^6}{96}\right)\arcsin\frac{x}{a}+$
$+\frac{1}{288}(8x^5+10x^3a^2+15xa^4)\sqrt{a^2-x^2}$.

517.6. $\int x^6\arcsin\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^7}{7}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{245}(5x^6+6x^4a^2+$
$+8x^2a^4+16a^6)\sqrt{a^2-x^2}$.

517.9. $\int x^n\arcsin\frac{x}{a}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $[n\neq-1]$.

[См. **321 — 327.**]

518.1. $\int\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a}\,dx=\frac{x}{a}+\frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5}+$
$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7}+\ldots$ $[x^2<a^2]$.

518.2. $\int \frac{1}{x^2} \arcsin \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right|.$

518.3. $\int \frac{1}{x^3} \arcsin \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{2x^2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x}.$

518.4. $\int \frac{1}{x^4} \arcsin \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{3x^3} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{6a^2x^2} -$

$$- \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right|.$$

518.9. $\int \frac{1}{x^n} \arcsin \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}} \arcsin \frac{x}{a} +$

$$+ \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{a^2-x^2}} \quad [n \neq 1]$$ [См. **341—346.**]

520. $\int \arccos \frac{x}{a}\, dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}.$

521. $\int \left(\arccos \frac{x}{a}\right)^2 dx = x \left(\arccos \frac{x}{a}\right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2-x^2} \arccos \frac{x}{a}.$

522.1. $\int x \arccos \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2-x^2}.$

522.2. $\int x^2 \arccos \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2+2a^2) \sqrt{a^2-x^2}.$

522.3. $\int x^3 \arccos \frac{x}{a}\, dx =$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{32} (2x^3 + 3xa^2) \sqrt{a^2-x^2}.$$

522.4. $\int x^4 \arccos \frac{x}{a}\, dx =$

$$= \frac{x^5}{5} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{75} (3x^4 + 4x^2a^2 + 8a^4) \sqrt{a^2-x^2}.$$

522.5. $\int x^5 \arccos \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5a^6}{96}\right) \arccos \frac{x}{a} -$

$$- \frac{1}{288} (8x^5 + 10x^3a^2 + 15xa^4) \sqrt{a^2-x^2}.$$

522.6. $\int x^6 \arccos \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^7}{7} \arccos \frac{x}{a} -$

$$- \frac{1}{245} (5x^6 + 6x^4a^2 + 8x^2a^4 + 16a^6) \sqrt{a^2-x^2}.$$

522.9. $\int x^n \arccos \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$[n \neq -1].$ [См. **321—327.**]

523.1. $$\int \frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln|x|-\frac{x}{a}-\frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7}-\ldots\quad [x^2<a^2].$$

523.2. $$\int \frac{1}{x^2}\arccos\frac{x}{a}\,dx=-\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|.$$

523.3. $$\int \frac{1}{x^3}\arccos\frac{x}{a}\,dx=-\frac{1}{2x^2}\arccos\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x}.$$

523.4. $$\int \frac{1}{x^4}\arccos\frac{x}{a}\,dx=-\frac{1}{3x^3}\arccos\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{6a^2x^2}+\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|.$$

523.9. $$\int \frac{1}{x^n}\arccos\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}}\quad [n\neq1].$$ [См. **341—346.**]

525. $$\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx=x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2).$$

525.1. $$\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{ax}{2}.$$

525.2. $$\int x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{ax^2}{6}+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2).$$

525.3. $$\int x^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{4}(x^4-a^4)\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{ax^3}{12}+\frac{a^3x}{4}.$$

525.4. $$\int x^4\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^5}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{ax^4}{20}+\frac{a^3x^2}{10}-\frac{a^5}{10}\ln(a^2+x^2).$$

525.5. $$\int x^5\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx=\frac{1}{6}(x^6+a^6)\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{ax^5}{30}+\frac{a^3x^3}{18}-\frac{a^5x}{6}.$$

525.6. $$\int x^6\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^7}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{ax^6}{42}+\frac{a^3x^4}{28}-\frac{a^5x^2}{14}+\frac{a^7}{14}\ln(a^2+x^2).$$

525.9. $$\int x^n\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{a^2+x^2}\quad [n\neq-1].$$ [См. **121—128.**]

526.1. $\int \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2a^3} + \frac{x^5}{5^2a^5} - \frac{x^7}{7^2a^7} + \ldots \quad [x^2 < a^2],$

$$= \frac{\pi}{2} \ln|x| + \frac{a}{x} - \frac{a^3}{3^2x^3} + \frac{a^5}{5^2x^5} - \frac{a^7}{7^2x^7} + \ldots \left[\frac{x}{a} > 1\right],$$

$$= -\frac{\pi}{2} \ln|x| + \frac{a}{x} - \frac{a^3}{3^2x^3} + \frac{a^5}{5^2x^5} - \frac{a^7}{7^2x^7} + \ldots \left[\frac{x}{a} < -1\right].$$

526.2. $\int \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2+x^2}{x^2}.$

526.3. $\int \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2}\right) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2ax}.$

526.4. $\int \frac{1}{x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{3x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{6ax^2} + \frac{1}{6a^3} \ln \frac{a^2+x^2}{x^2}.$

526.5. $\int \frac{1}{x^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{x^4}\right) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{12ax^3} + \frac{1}{4a^3x}.$

526.9. $\int \frac{1}{x^n} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)}$

$[n \neq 1]$. [См. **131 — 135.**]

528. $\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2+x^2).$

528.1. $\int x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2) \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$

528.2. $\int x^2 \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln(a^2+x^2).$

528.3. $\int x^3 \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{4}(x^4-a^4) \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^3}{12} - \frac{a^3x}{4}.$

528.4. $\int x^4 \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^5}{5} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^4}{20} - \frac{a^3x^2}{10} + \frac{a^5}{10} \ln(a^2+x^2).$

528.5. $\int x^5 \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{6}(x^6+a^6) \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^5}{30} - \frac{a^3x^3}{18} + \frac{a^5x}{6}.$

528.6. $\int x^6 \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^7}{7} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^6}{42} - \frac{a^3x^4}{28} +$

$$+ \frac{a^5x^2}{14} - \frac{a^7}{14} \ln(a^2+x^2).$$

528.9. $\int x^n \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{a^2+x^2} \quad [n \neq -1].$

[См. **121 — 128.**]

529.1. $$\int \frac{1}{x} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln|x| - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2 a^3} - \frac{x^5}{5^2 a^5} + \frac{x^7}{7^2 a^7} - \ldots \quad [x^2 < a^2],$$
$$= -\frac{a}{x} + \frac{a^3}{3^2 x^3} - \frac{a^5}{5^2 x^5} + \frac{a^7}{7^2 x^7} - \ldots \quad \left[\frac{x}{a} > 1\right],$$
$$= \pi \ln|x| - \frac{a}{x} + \frac{a^3}{3^2 x^3} - \frac{a^5}{5^2 x^5} + \frac{a^7}{7^2 x^7} - \ldots \quad \left[\frac{x}{a} < -1\right].$$

529.2. $$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

529.3. $$\int \frac{1}{x^3} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2ax} + \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

529.4. $$\int \frac{1}{x^4} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{3x^3} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{6ax^2} - \frac{1}{6a^3} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

529.5. $$\int \frac{1}{x^5} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{4x^4} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{12ax^3} - \frac{1}{4a^3 x} - \frac{1}{4a^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

529.9. $$\int \frac{1}{x^n} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{(n-1)\, x^{n-1}} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)} \quad [n \neq 1].$$ [См. 131—135.]

531. $$\int \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - a \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| \quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right],$$
$$= x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + a \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| \quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi\right].$$

531.1. $$\int x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right],$$
$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi\right].$$

531.2. $$\int x^2 \operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} - \frac{ax}{6}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^3}{6}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\left[0 < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right],$$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + \frac{ax}{6}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^3}{6}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \pi\right].$$

531.9. $$\int x^n \operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\left[0 < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right], \quad [n \neq -1],$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \pi\right],$$

$$[n \neq -1].$$

532.1. $$\int \frac{1}{x}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln|x| + \frac{a}{x} + \frac{a^3}{2\cdot3\cdot3x^3} + \frac{1\cdot3a^5}{2\cdot4\cdot5\cdot5x^5} + \frac{1\cdot3\cdot5a^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7x^7} + \ldots \quad \left[0 < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right].$$

532.2. $$\int \frac{1}{x^2}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax}$$

$$\left[0 < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right],$$

$$= -\frac{1}{x}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax}$$

$$\left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \pi\right].$$

532.3. $$\int \frac{1}{x^3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{4ax^2} + \frac{1}{4a^2}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\left[0 < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right],$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{4ax^2} - \frac{1}{4a^2}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|$$

$$\left[\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec}\frac{x}{a} < \pi\right].$$

532.4. $$\int \frac{1}{x^4}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{3x^3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + \frac{(2x^2+a^2)}{9a^2x^3}\sqrt{x^2-a^2} \quad \left[0<\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right],$$
$$= -\frac{1}{3x^3}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} - \frac{(2x^2+a^2)}{9a^2x^3}\sqrt{x^2-a^2} \quad \left[\frac{\pi}{2}<\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}<\pi\right].$$

532.9. $$\int \frac{1}{x^n}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + \frac{a}{n-1}\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-a^2}} \quad \left[0<\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right]\ [n\neq 1],$$
$$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-a^2}} \quad \left[\frac{\pi}{2}<\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}<\pi\right],\ [n\neq 1].$$

В формулах **531—532.9**, $x^2 > a^2$.

534. $$\int \operatorname{arccsc}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arccsc}\frac{x}{a} + a\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|, \quad \left[0<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right],$$
$$= x\operatorname{arccsc}\frac{x}{a} - a\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \quad \left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<0\right].$$

534.1. $$\int x\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\sqrt{x^2-a^2} \quad \left[0<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right],$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\sqrt{x^2-a^2} \quad \left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<0\right].$$

534.2. $$\int x^2\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a} + \frac{ax}{6}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^3}{6}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \quad \left[0<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right],$$
$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a} - \frac{ax}{6}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^3}{6}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| \quad \left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<0\right].$$

534.9. $$\int x^n \operatorname{arccsc}\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}+\frac{a}{n+1}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$\left[0<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right],\quad [n\neq -1],$$
$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}-\frac{a}{n+1}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$\left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<0\right],\quad [n\neq -1].$$

535.1. $$\int \frac{1}{x}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}\,dx=$$
$$=-\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 3}\frac{a^3}{x^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}\frac{a^5}{x^5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7}\frac{a^7}{x^7}+\ldots\right)$$
$$\left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc} x<\frac{\pi}{2}\right].$$

535.2. $$\int \frac{1}{x^2}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}\,dx=-\frac{1}{x}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax}$$
$$\left[0<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right],$$
$$=-\frac{1}{x}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax}$$
$$\left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<0\right].$$

535.3. $$\int \frac{1}{x^3}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{4ax^2}-\frac{1}{4a^2}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|$$
$$\left[0<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right],$$
$$=-\frac{1}{2x^2}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{4ax^2}+\frac{1}{4a^2}\arccos\left|\frac{a}{x}\right|$$
$$\left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<0\right].$$

535.4. $$\int \frac{1}{x^4}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}\,dx=-\frac{1}{3x^3}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}-\frac{(2x^2+a^2)}{9a^3x^3}\sqrt{x^2-a^2}$$
$$\left[0<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}\right],$$
$$=-\frac{1}{3x^3}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}+\frac{(2x^2+a^2)}{9a^3x^3}\sqrt{x^2-a^2}$$
$$\left[-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}<0\right].$$

535.9. $\int \frac{1}{x^n} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a}\, dx =$

$$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < 0\right],\ [n \neq 1],$$

$$= -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\left[0 < \operatorname{arccsc} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}\right],\ [n \neq 1].$$

В формулах **534—535.9** $x^2 > a^2$.

IV.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

550. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad [x^2 < \infty].$

550.1. $a^x = e^{x \ln a} =$

$$= 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \ldots \qquad [x^2 < \infty].$$

550.2. $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad [x^2 < \infty].$

551. $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \frac{B_4 x^8}{8!} + \ldots$

[$x^2 < 4\pi^2$; см. **45**].

552.1. $e^{\sin u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} - \frac{3u^4}{4!} - \frac{8u^5}{5!} - \frac{3u^6}{6!} + \frac{56u^7}{7!} + \ldots \qquad [u^2 < \infty].$

552.2. $e^{\cos u} = e\left[1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{4u^4}{4!} - \frac{31u^6}{6!} + \ldots\right] \qquad [u^2 < \infty].$

552.3. $e^{\operatorname{tg} u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{3u^3}{3!} + \frac{9u^4}{4!} + \frac{37u^5}{5!} + \ldots \qquad \left[u^2 < \frac{\pi^2}{4}\right].$

552.4. $e^{\arcsin u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{2u^3}{3!} + \frac{5u^4}{4!} + \ldots \qquad [u^2 < 1].$

552.5. $e^{\operatorname{arctg} u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} - \frac{7u^4}{4!} + \frac{5u^5}{5!} + \ldots \qquad [u^2 < 1].$

Общий член этого ряда $u_n = \frac{a_n u^n}{n!}$, где

$$a_{n+1} = a_n - n(n-1)\,a_{n-1}.$$

552.6. $e^{-x^2} + e^{-2^2 x^2} + e^{-3^2 x^2} + \ldots =$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{x}\left[\frac{1}{2} + e^{-\pi^2/x^2} + e^{-2^2\pi^2/x^2} + e^{-3^2\pi^2/x^2} + \ldots\right].$$

Второй ряд может сходиться быстрее первого.

553. $\lim\limits_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0$ для любого n.

Показательные функции — Производные

563. $\frac{de^x}{dx}=e^x$. **563.1.** $\frac{de^{ax}}{dx}=ae^{ax}$. **563.2.** $\frac{da^x}{dx}=a^x\ln a$.

563.3. $\frac{da^{cx}}{dx}=ca^{cx}\ln a$. **563.4.** $\frac{da^y}{dx}=a^y(\ln a)\frac{dy}{dx}$,

где a — константа.

563.5. $\frac{du^y}{dx}=yu^{y-1}\frac{du}{dx}+u^y(\ln u)\frac{dy}{dx}$.

563.6. $\frac{dx^y}{dx}=yx^{y-1}+x^y(\ln x)\frac{dy}{dx}$.

563.7. $\frac{dx^x}{dx}=x^x(1+\ln x)$.

Показательные функции — Интегралы

565. $\int e^x\,dx=e^x$. **565.1.** $\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}$.

565.2. $\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}$. **565.3.** $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}$.

566. $\int f(e^{ax})\,dx=\frac{1}{a}\int\frac{f(z)\,dz}{z}$,

где $z=e^{ax}$. Заметим, что

$a^x=e^{x\ln a}$ и $a^{cx}=e^{cx\ln a}$.

567.1. $\int xe^{ax}\,dx=e^{ax}\left[\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right]$.

567.2. $\int x^2e^{ax}\,dx=e^{ax}\left[\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right]$.

567.3. $\int x^3e^{ax}\,dx=e^{ax}\left[\frac{x^3}{a}-\frac{3x^2}{a^2}+\frac{6x}{a^3}-\frac{6}{a^4}\right]$.

567.8. $\int x^ne^{ax}\,dx=\frac{x^ne^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$.

567.9. $\int x^ne^{ax}\,dx=e^{ax}\left[\frac{x^n}{a}-\frac{nx^{n-1}}{a^2}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3}-\dots\right.$

$\left.\dots+(-1)^{n-1}\frac{n!\,x}{a^n}+(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\right]$ $[n\geqslant 0]$.

568.1. $\int\frac{e^{ax}\,dx}{x}=$

$=\ln|x|+\frac{ax}{1!}+\frac{a^2x^2}{2\cdot 2!}+\frac{a^3x^3}{3\cdot 3!}+\dots+\frac{a^nx^n}{n\cdot n!}+\dots$ $[x^2<\infty]$.

568.11. Для $\int \frac{c^x\,dx}{x}$ следует заметить, что $c^x = e^{x\ln c}$.

568.2. $$\int \frac{e^{ax}\,dx}{x^2} = -\frac{e^{ax}}{x} + a\int \frac{e^{ax}\,dx}{x}.$$ [См. **568.1.**]

568.3. $$\int \frac{e^{ax}\,dx}{x^3} = -\frac{e^{ax}}{2x^2} - \frac{ae^{ax}}{2x} + \frac{a^2}{2}\int \frac{e^{ax}\,dx}{x}.$$ [См. **568.1.**]

568.8. $$\int \frac{e^{ax}\,dx}{x^n} = -\frac{e^{ax}}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}\,dx}{x^{n-1}} \qquad [n>1].$$

568.9. $$\int \frac{e^{ax}\,dx}{x^n} = -\frac{e^{ax}}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{ae^{ax}}{(n-1)\,(n-2)\,x^{n-2}} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{a^{n-2}e^{ax}}{(n-1)!\,x} + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\int \frac{e^{ax}dx}{x}$$
$[n>1]$. [См. **568.1.**]

569. $$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) = \ln\frac{e^x}{1+e^x}.$$

569.1. $$\int \frac{dx}{a+be^{px}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap}\ln|a+be^{px}|.$$

570. $$\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}.$$

570.1. $$\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}.$$

575.1. $$\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x - \cos x).$$

575.2. $$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left(a\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right).$$

575.3. $$\int e^{ax}\sin^3 x\,dx =$$
$$= \frac{e^{ax}}{a^2+9}\left[a\sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x + \frac{6\,(a\sin x - \cos x)}{a^2+1}\right].$$

575.9. $$\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1} x}{a^2+n^2}(a\sin x - n\cos x) +$$
$$+\frac{n\,(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2} x\,dx.$$

576.1. $$\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x + \sin x).$$

576.2. $$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left(a\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right).$$

576.3. $$\int e^{ax}\cos^3 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+9}\left[a\cos^3 x + 3\sin x\cos^2 x + \frac{6\,(a\cos x + \sin x)}{a^2+1}\right].$$

576.9. $$\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x) + \frac{n\,(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx.$$

577.1. $$\int e^{ax}\sin nx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\sin nx - n\cos nx).$$

577.2. $$\int e^{ax}\cos nx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\cos nx + n\sin nx).$$

V.

ИНТЕГРАЛЫ ВЕРОЯТНОСТИ

585. Интеграл вероятности $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2/2}\,dt = \operatorname{erf}\frac{x}{\sqrt{2}} =$

[см. 590]

$$= x\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left[1-\frac{x^2}{2\cdot 1!\,3}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!\,5}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!\,7}+\ldots\right] \qquad [x^2<\infty].$$

586. Для больших значений x можно пользоваться следующим асимптотическим рядом:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2/2}\,dt \approx$$

$$\approx 1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{-x^2/2}}{x}\left[1-\frac{1}{x^2}+\frac{1\cdot 3}{x^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{x^8}-\ldots\right].$$

Ошибка окажется меньше последнего взятого члена.

590. Иногда интегралом вероятности называют функцию

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{x^2}{1!\,3}+\frac{x^4}{2!\,5}-\frac{x^6}{3!\,7}+\ldots\right] \qquad [x^2<\infty].$$

591. $\operatorname{erf} x \approx 1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 3}{2^2x^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^6}+\ldots\right].$

592. Другой вид того же ряда:

$$\operatorname{erf} x \approx 1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{2!}{1!\,(2x)^2}+\frac{4!}{2!\,(2x)^4}-\frac{6!}{3!\,(2x)^6}+\ldots\right].$$

Ошибка оказывается меньше последнего взятого члена.

Таблицы значений интеграла вероятности см. [19б].

VI.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этих алгебраических выражениях ln обозначает натуральный, или Неперов, логарифм, а lg — десятичный логарифм.

600. $\ln a = 2{,}3026 \lg a$. **600.1.** $\lg a = 0{,}43429 \ln a$.

601. $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots \qquad [-1 < x \leqslant 1].$$

При $x = 1$ отсюда получается известный ряд:

601.01. $$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

601.1. $$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right] \qquad [-1 \leqslant x < 1].$$

601.2. $$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right], \\ = 2 \operatorname{Arth} x \qquad [x^2 < 1].$$ [См. **708.**]

601.3. $$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots\right], \\ = 2 \operatorname{Arcth} x \qquad [x^2 > 1].$$ [См. **709.**]

601.4. $$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \\ = 2\left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \ldots\right] \qquad [(2x+1)^2 > 1].$$

601.41. $$\ln(x+a) = \ln x + 2\left[\frac{a}{2x+a} + \frac{a^3}{3(2x+a)^3} + \frac{a^5}{5(2x+a)^5} + \ldots\right] \qquad [a^2 < (2x+a)^2].$$

601.5. $$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots \qquad [0 < x \leqslant 2].$$

601.6. $\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \ldots \qquad \left[x > \frac{1}{2}\right].$

601.7. $\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \ldots\right] \qquad [x > 0].$

602.1. $\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right) =$

$= \frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{x^7}{a^7} + \ldots \qquad [x^2 < a^2],$

$= \ln\frac{2x}{a} + \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{a^4}{x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{a^6}{x^6} - \ldots \qquad \left[\frac{x}{a} > 1\right],$

$= -\ln\left|\frac{2x}{a}\right| - \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{a^4}{x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{a^6}{x^6} + \ldots \left[\frac{x}{a} < -1\right],$

$= \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} = \operatorname{Arcsch}\frac{a}{x}.$ [См. **706.**]

602.2. $\ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} - \frac{x}{a}\right) = -\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right).$

Ряд из **602.1** умножить на -1.

602.3. $\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) = \ln\frac{2x}{a} - \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{a^4}{x^4} -$

$- \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{a^6}{x^6} - \ldots \qquad \left[\frac{x}{a} > 1\right].$ [См. **260.01** и **707.**]

602.4. $\ln\left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) =$

$= -\ln\frac{2x}{a} + \frac{1}{2\cdot 2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{a^4}{x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{a^6}{x^6} + \ldots \qquad \left[\frac{x}{a} > 1\right],$

$= -\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right).$ [См. **602.3** и **707.**]

602.5. $\ln\left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1}\right) =$

$= \frac{a}{x} - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{a^3}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{a^5}{x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{a^7}{x^7} + \ldots \qquad [x^2 > a^2],$

$= \ln\frac{2a}{x} + \frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{a^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{x^6}{a^6} - \ldots \qquad \left[\frac{a}{x} > 1\right],$

$= -\ln\left|\frac{2a}{x}\right| - \frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{x^4}{a^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{x^6}{a^6} + \ldots \left[\frac{a}{x} < -1\right],$

$= \operatorname{Arcsch}\frac{x}{a} = \operatorname{Arsh}\frac{a}{x}.$ [См. **602.1** и **711.**]

602.6. $\ln\left(\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1} - \frac{a}{x}\right) = -\ln\left(\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1}\right).$

Ряд из **602.5** умножить на -1.

602.7. $\ln\left(\frac{a}{x}+\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right)=$

$$=\ln\frac{2a}{x}-\frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{a^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{x^4}{a^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{x^6}{a^6}-\ldots \qquad \left[\frac{a}{x}>1\right].$$

602.8. $\ln\left(\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right)=$

$$=-\ln\frac{2a}{x}+\frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}\frac{x^6}{a^6}+\ldots \qquad \left[\frac{a}{x}>1\right],$$

$$=-\ln\left(\frac{a}{x}+\sqrt{\frac{a^2}{x^2}-1}\right).$$ [См. **710.**]

603.1. $$\ln|\sin x|=\ln|x|-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\ldots-\frac{2^{2n-1}B_n x^{2n}}{n\,(2n)!}-\ldots \qquad [x^2<\pi^2].$$

(Интегрируя **415.04.** См. **490.1** и **45.**)

603.2. $$\ln|\sin x|=-\ln 2-\cos 2x-\frac{\cos 4x}{2}-\frac{\cos 6x}{3}-\ldots \qquad [0<x^2<\pi^2].$$

603.3. $$\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\ldots-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n x^{2n}}{n\,(2n)!}-\ldots$$

$\left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right]$. (Интегрируя **415.03.** См. **480.1** и **45.**)

603.4. $$\ln|\cos x|=-\ln 2+\cos 2x-\frac{\cos 4x}{2}+\frac{\cos 6x}{3}-\ldots \qquad [0<x^2<\pi^2/4].$$

603.5. $\ln\cos x=$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sin^2 x+\frac{\sin^4 x}{2}+\frac{\sin^6 x}{3}+\frac{\sin^8 x}{4}+\ldots\right] \qquad \left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right].$$

603.6. $$\ln|\operatorname{tg} x|=\ln|x|+\frac{x^2}{3}+\frac{7}{90}x^4+\frac{62}{2835}x^6+\ldots$$

$$\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n}}{n\,(2n)!}+\ldots \qquad \left[x^2<\frac{\pi^2}{4}\right].$$

[См. **415.06**, **432.10** и **45.**]

604. $\ln(x+iy)=\ln r+i(\theta+2\pi k)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\theta=x/r$, $\sin\theta=y/r$, k — целое число или 0, r — положительно, $i=\sqrt{-1}$.

604.05. $x+iy=re^{i(\theta+2\pi k)}$ [θ в радианах]. [См. **604.**]

604.1. $\ln(-1)=\ln 1+(2k+1)\pi i=(2k+1)\pi i$. [См. **409.03.**]

605. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0.$ [См. **72.**]

Логарифмические функции — Интегралы

Здесь всюду x и a положительны (если нет особой оговорки).

610. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$

610.01. $\int \ln(ax)\,dx = x\ln(ax) - x.$

610.1. $\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$

610.2. $\int x^2\ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}.$

610.3. $\int x^3\ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}.$

610.9. $\int x^p\ln(ax)\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(ax) - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$ $[p \neq -1].$

611.1. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}.$

611.11. $\int \frac{\ln(ax)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\left\{\ln(ax)\right\}^2.$

611.2. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$ **611.3.** $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$

611.9. $\int \frac{\ln(ax)}{x^p}\,dx = -\frac{\ln(ax)}{(p-1)x^{p-1}} - \frac{1}{(p-1)^2x^{p-1}}$ $[p \neq 1].$

612. $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$

612.1. $\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}.$

612.2. $\int x^2(\ln x)^2\,dx = \frac{x^3}{3}(\ln x)^2 - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{2x^3}{27}.$

612.9. $\int x^p(\ln x)^2\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}(\ln x)^2 - \frac{2x^{p+1}}{(p+1)^2}\ln x + \frac{2x^{p+1}}{(p+1)^3}$ $[p \neq -1].$

613.1. $\int \frac{(\ln x)^2\,dx}{x} = \frac{(\ln x)^3}{3}.$

613.2. $\int \frac{(\ln x)^2\,dx}{x^2} = -\frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x}.$

613.3. $\int \frac{(\ln x)^2\,dx}{x^3} = -\frac{(\ln x)^2}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}.$

613.9. $$\int \frac{(\ln x)^2\,dx}{x^p} = -\frac{(\ln x)^2}{(p-1)\,x^{p-1}} - \frac{2\ln x}{(p-1)^2\,x^{p-1}} - \frac{2}{(p-1)^3 x^{p-1}} \qquad [p \neq 1].$$

614. $$\int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x.$$

615. $$\int (\ln x)^q dx = x(\ln x)^q - q\int (\ln x)^{q-1}\,dx \qquad [q \neq -1].$$

616.1. $$\int \frac{(\ln x)^q\,dx}{x} = \frac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} \qquad [q \neq -1].$$

616.2. $$\int x^p(\ln x)^q\,dx = \frac{x^{p+1}(\ln x)^q}{p+1} - \frac{q}{p+1}\int x^p(\ln x)^{q-1}\,dx \qquad [p,\ q \neq -1].$$

616.3. $$\int \frac{(\ln x)^q\,dx}{x^p} = \frac{-(\ln x)^q}{(p-1)\,x^{p-1}} + \frac{q}{p-1}\int \frac{(\ln x)^{q-1}\,dx}{x^p} \qquad [p,\ -q \neq 1].$$

617. $$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

617.1. $$\int \frac{x\,dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + 2\ln x + \frac{(2\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(2\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

617.2. $$\int \frac{x^2 dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + 3\ln x + \frac{(3\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(3\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

617.9. $$\int \frac{x^p dx}{\ln x} = \ln|\ln x| + (p+1)\ln x + \frac{(p+1)^2(\ln x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(p+1)^3(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

$$\left[= \int \frac{e^y dy}{y}, \text{ где } y = (p+1)\ln x; \text{ см. } \mathbf{568.1}\right].$$

618.1. $$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x|.$$

618.2. $$\int \frac{dx}{x^2\ln x} = \ln|\ln x| - \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

618.3. $$\int \frac{dx}{x^3\ln x} = \ln|\ln x| - 2\ln x + \frac{(2\ln x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(2\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

618.9. $$\int \frac{dx}{x^p\ln x} = \ln|\ln x| - (p-1)\ln x + \frac{(p-1)^2(\ln x)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(p-1)^3(\ln x)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$$

619.1. $$\int \frac{dx}{x(\ln x)^q} = \frac{-1}{(q-1)(\ln x)^{q-1}} \qquad [q \neq 1].$$

619.2. $$\int \frac{x^p\,dx}{(\ln x)^q} = \frac{-x^{p+1}}{(q-1)(\ln x)^{q-1}} + \frac{p+1}{q-1}\int \frac{x^p dx}{(\ln x)^{q-1}} \qquad [q \neq 1].$$

619.3. $$\int \frac{dx}{x^p (\ln x)^q} = \frac{-1}{x^{p-1}(q-1)(\ln x)^{q-1}} - \frac{p-1}{q-1}\int \frac{dx}{x^p (\ln x)^{q-1}} \quad [q \neq 1].$$

620. $$\int \ln (a+bx)\, dx = \frac{a+bx}{b} \ln (a+bx) - x.$$

620.1. $$\int x \ln (a+bx)\, dx = \frac{b^2x^2-a^2}{2b^2} \ln (a+bx) + \frac{ax}{2b} - \frac{x^2}{4}.$$

621.1. $$\int \frac{\ln (a+bx)\, dx}{x} =$$
$$= (\ln a) \ln x + \frac{bx}{a} - \frac{b^2x^2}{2^2a^2} + \frac{b^3x^3}{3^2a^3} - \frac{b^4x^4}{4^2a^4} + \ldots \quad [b^2x^2 < a^2],$$
$$= \frac{(\ln bx)^2}{2} - \frac{a}{bx} + \frac{a^2}{2^2b^2x^2} - \frac{a^3}{3^2b^3x^3} + \frac{a^4}{4^2b^4x^4} - \ldots \quad [b^2x^2 > a^2].$$

621.2. $$\int \frac{\ln (a+bx)\, dx}{x^2} = \frac{b}{a} \ln x - \left(\frac{1}{x} + \frac{b}{a}\right) \ln (a+bx).$$

621.9. $$\int \frac{\ln (a+bx)\, dx}{x^p} = -\frac{\ln (a+bx)}{(p-1)\, x^{p-1}} + \int \frac{b\, dx}{(p-1)(a+bx)x^{p-1}}$$
$[p \neq 1]$. [См. **101—105.**]

622. $$\int \frac{\ln x\, dx}{a+bx} = \frac{(\ln x) \ln (a+bx)}{b} - \int \frac{\ln (a+bx)\, dx}{bx}.$$ [См. **621.1.**]

623. $$\int \ln (x^2+a^2)\, dx = x \ln (x^2+a^2) - 2x + 2a \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

623.1. $$\int x \ln (x^2+a^2)\, dx = \frac{1}{2}\left[(x^2+a^2) \ln (x^2+a^2) - x^2\right].$$

623.2. $$\int x^2 \ln (x^2+a^2)\, dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left[x^3 \ln (x^2+a^2) - \frac{2}{3} x^3 + 2xa^2 - 2a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right].$$

623.3. $$\int x^3 \ln (x^2+a^2)\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(x^4-a^4) \ln (x^2+a^2) - \frac{x^4}{2} + x^2a^2\right].$$

623.4. $$\int x^4 \ln (x^2+a^2)\, dx = \frac{1}{5}\left[x^5 \ln (x^2+a^2) - \frac{2}{5} x^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3} x^3a^2 - 2xa^4 + 2a^5 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right].$$

623.5. $$\int x^5 \ln (x^2+a^2)\, dx =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(x^6+a^6) \ln (x^2+a^2) - \frac{x^6}{3} + \frac{x^4a^2}{2} - x^2a^4\right].$$

623.6. $$\int x^6 \ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{7}\left[x^7\ln(x^2+a^2) - \frac{2}{7}x^7 + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{5}x^5a^2 - \frac{2}{3}x^3a^4 + 2xa^6 - 2a^7 \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right].$$

623.7. $$\int x^7 \ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{8}\left[(x^8-a^8)\ln(x^2+a^2) - \right.$$
$$\left. - \frac{x^8}{4} + \frac{x^6a^2}{3} - \frac{x^4a^4}{2} + x^2a^6\right].$$

624. $$\int \ln|x^2-a^2|\,dx = x\ln|x^2-a^2| - 2x + a\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|.$$

624.1. $$\int x\ln|x^2-a^2|\,dx = \frac{1}{2}[(x^2-a^2)\ln|x^2-a^2| - x^2].$$

624.2. $$\int x^2\ln|x^2-a^2|\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\ln|x^2-a^2| - \frac{2}{3}x^3 - \right.$$
$$\left. - 2xa^2 + a^3\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\right].$$

624.3. $$\int x^3\ln|x^2-a^2|\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(x^4-a^4)\ln|x^2-a^2| - \frac{x^4}{2} - x^2a^2\right].$$

624.4. $$\int x^4\ln|x^2-a^2|\,dx = \frac{1}{5}\left[x^5\ln|x^2-a^2| - \frac{2}{5}x^5 - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3}x^3a^2 - 2xa^4 + a^5\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\right].$$

624.5. $$\int x^5\ln|x^2-a^2|\,dx = \frac{1}{6}\left[(x^6-a^6)\ln|x^2-a^2| - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{3} - \frac{x^4a^2}{2} - x^2a^4\right]$$

624.6. $$\int x^6\ln|x^2-a^2|\,dx = \frac{1}{7}\left[x^7\ln|x^2-a^2| - \frac{2}{7}x^7 - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{5}x^5a^2 - \frac{2}{3}x^3a^4 - 2xa^6 + a^7\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\right].$$

624.7. $$\int x^7\ln|x^2-a^2|\,dx = \frac{1}{8}\left[(x^8-a^8)\ln|x^2-a^2| - \right.$$
$$\left. - \frac{x^8}{4} - \frac{x^6a^2}{3} - \frac{x^4a^4}{2} - x^2a^6\right].$$

Эти же выражения могут применяться к интегралам типа $\int x^p \ln(a^2-x^2)\,dx$.

Интегралы, содержащие $r=(x^2+a^2)^{1/2}$

Здесь всюду $r>0$.

625. $\int \ln(x+r)\,dx = x\ln(x+r)-r.$ [См. 730.]

625.1. $\int x\ln(x+r)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)\ln(x+r)-\frac{xr}{4}.$ [См. 730.1.]

625.2. $\int x^2\ln(x+r)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x+r)-\frac{r^3}{9}+\frac{a^2r}{3}.$ [См. 730.2.]

625.3. $\int x^3\ln(x+r)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{3a^4}{32}\right)\ln(x+r)-\frac{x^3r}{16}+\frac{3}{32}a^2xr.$
[См. 730.3.]

625.4. $\int x^4\ln(x+r)\,dx = \frac{x^5}{5}\ln(x+r)-\frac{r^5}{25}+\frac{2}{15}a^2r^3-\frac{a^4r}{5}.$
[См. 730.4.]

625.9. $\int x^p\ln(x+r)\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(x+r)-\frac{1}{p+1}\int\frac{x^{p+1}\,dx}{r}$
$[p\neq -1]$. [См. 201.01—207.01 и 730.9.]

626.1. $\int \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right)dx =$

$$=\frac{x}{a}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 3}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}\frac{x^5}{a^5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7}\frac{x^7}{a^7}+\ldots \quad [x^2<a^2].$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2x}{a}\right)^2-\frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{a^4}{x^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{a^6}{x^6}+\ldots \quad [x/a>1].$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{2x}{a}\right|\right)^2+\frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{a^4}{x^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{a^6}{x^6}-\ldots$$

$[x/a<-1]$. [См. 731.1.]

626.2. $\int\frac{\ln(x+r)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x+r)}{x}-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+r}{x}\right|$, где $r=(x^2+a^2)^{1/2}$.
[См. 731.2.]

626.3. $\int\frac{\ln(x+r)}{x^3}\,dx = -\frac{\ln(x+r)}{2x^2}-\frac{r}{2a^2x}.$ [См. 731.3.]

626.9. $\int\frac{\ln(x+r)}{x^p}\,dx = -\frac{\ln(x+r)}{(p-1)\,x^{p-1}}+\frac{1}{p-1}\int\frac{dx}{x^{p-1}r}$ $[p\neq 1]$.

[См. 221.01—226.01 и 731.9.]

Интегралы, содержащие $s=(x^2-a^2)^{1/2}$

Здесь всюду $s>0$.

627. $\int \ln(x+s)\,dx = x\ln(x+s)-s.$ [См. **732.**]

627.1. $\int x\ln(x+s)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\ln(x+s)-\frac{xs}{4}.$ [См. **732.1.**]

627.2. $\int x^2\ln(x+s)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x+s)-\frac{s^3}{9}-\frac{a^2 s}{3}.$ [См. **732.2.**]

627.3. $\int x^3\ln(x+s)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{3a^4}{32}\right)\ln(x+s)-$

$-\frac{x^3 s}{16}-\frac{3}{32}a^2 xs.$ [См. **732.3.**]

627.4. $\int x^4\ln(x+s)\,dx = \frac{x^5}{5}\ln(x+s)-\frac{s^5}{25}-\frac{2}{15}a^2 s^3-\frac{a^4 s}{5}.$

[См. **732.4.**]

627.9. $\int x^p\ln(x+s)\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(x+s)-\frac{1}{p+1}\int\frac{x^{p+1}\,dx}{s}$ $[p\neq -1].$

[См. **261.01—267.01** и **732.9.**]

628.1. $\int \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2x}{a}\right)^2+\frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{a^4}{x^4}+$

$+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{a^6}{x^6}+\ldots$ $[x/a>1].$ [См. **733.1.**]

628.2. $\int \frac{\ln(x+s)}{x^2}\,dx = -\frac{\ln(x+s)}{x}+\frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right|$

$[0<\operatorname{arcsec}|x/a|<\pi/2].$ [См. **733.2.**]

628.3. $\int \frac{\ln(x+s)}{x^3}\,dx = -\frac{\ln(x+s)}{2x^2}+\frac{s}{2a^2 x}.$ [См. **733.3.**]

628.9. $\int \frac{\ln(x+s)}{x^p}\,dx = -\frac{\ln(x+s)}{(p-1)\,x^{p-1}}+\frac{1}{p-1}\int\frac{dx}{x^{p-1}s}$ $[p\neq 1].$

[См. **281.01—284.01** и **733.9.**]

630.1. $\int \ln\sin x\,dx = x\ln x-x-\frac{x^3}{18}-\frac{x^5}{900}-$

$-\frac{x^7}{19845}-\ldots-\frac{2^{2n-1}B_n x^{2n+1}}{n(2n+1)!}-\ldots$ $[0<x<\pi].$

[См. **45.**] [Интегрируя **603.1.**]

$=-x\ln 2-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 4x}{2\cdot 2^2}-\frac{\sin 6x}{2\cdot 3^2}-\ldots$

$[0<x<\pi].$ [Интегрируя **603.2.**]

630.2. $\int \ln \cos x\, dx = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \frac{17x^9}{22680} - \ldots -$

$- \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} - \ldots \quad [x^2 < \pi^2/4].$ [См. **45.**]

[Интегрируя **603.3.**]

$= -x \ln 2 + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{2 \cdot 2^2} + \frac{\sin 6x}{2 \cdot 3^2} - \ldots$

$[x^2 < \pi^2/4]$. [Интегрируя **603.4.**]

630.3. $\int \ln \operatorname{tg} x\, dx = x \ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} +$

$+ \frac{62x^7}{19845} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots$

$[0 < x < \pi/2]$. [См. **45.**] [Интегрируя **603.6.**]

631.1. $\int \sin \ln x\, dx = \frac{1}{2} x \sin \ln x - \frac{1}{2} x \cos \ln x.$

631.2. $\int \cos \ln x\, dx = \frac{1}{2} x \sin \ln x + \frac{1}{2} x \cos \ln x.$

632. $\int e^{ax} \ln x\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln x - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx.$ [См. **568.1.**]

Лямбда-функция и гудерманиан

640. Если $x = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)$, то θ называют гудерманианом x: $\theta = \operatorname{gd} x = 2 \operatorname{arctg} e^x - \frac{\pi}{2}$.

641.*) $x = \operatorname{gd}^{-1}\theta = \lambda(\theta)$ — лямбда-функция.

642.1. $\operatorname{sh} x = \operatorname{tg}\theta$. **642.2.** $\operatorname{ch} x = \sec\theta$.

642.3. $\operatorname{th} x = \sin\theta$. **642.4.** $\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

642.5. $\frac{d \operatorname{gd} x}{dx} = \operatorname{sech} x$. **642.6.** $\frac{d \operatorname{gd}^{-1} x}{dx} = \sec x \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right]$.

Если имеется таблица θ в зависимости от x, то можно находить гиперболические функции по таблице тригонометрических.

---

*) gd^{-1} означает функцию, обратную гудерманиану.

VII.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

650.01. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

650.02. $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} \quad [x > 0],$
$= -\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} \quad [x < 0].$

650.03. $\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}.$

650.04. $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x.$

650.05. $\operatorname{sech} x = 1/\operatorname{ch} x.$

650.06. $\operatorname{csch} x = 1/\operatorname{sh} x.$

650.07. $\operatorname{th}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1.$

650.08. $\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1.$

650.09. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$

650.10. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x.$

650.11. $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$

651.01. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$

651.02. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$

651.03. $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y).$

651.04. $2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y).$

651.05. $2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y).$

651.06. $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$

651.07. $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \operatorname{ch} \frac{x+y}{2}.$

651.08. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$

651.09. $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}.$

651.10. $\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}(x+y)\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y.$

651.11. $\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$

651.12. $\operatorname{csch}^2 x - \operatorname{sech}^2 x = \operatorname{csch}^2 x \operatorname{sech}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}.$

651.13. $(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x)^n = \operatorname{sh} nx + \operatorname{ch} nx.$

651.14. $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$

652.12. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$

652.13. $\operatorname{sh} 3x = 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x.$

652.22. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{sh}^2 x + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1.$

652.23. $\operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x.$

652.3. $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1).$

652.4. $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1).$

652.5.
$$\operatorname{sh}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - 1)} \qquad [x > 0],$$
$$= -\sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - 1)} \qquad [x < 0].$$

652.6. $\operatorname{ch}\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} x + 1)}.$

653.1. $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$

653.2. $\operatorname{th}\left(\dfrac{x \pm y}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y}.$

653.3. $\operatorname{th} 2x = \dfrac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$

653.4. $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \dfrac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$

653.5. $\operatorname{th}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}.$

653.6. $\operatorname{cth}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}.$

653.7. $\operatorname{cth} 2x = \dfrac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \operatorname{cth} x}.$

653.8. $\operatorname{cth}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}=\frac{\operatorname{ch}x+1}{\operatorname{sh}x}$.

654.1. $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=\frac{1}{2}\left(\ln^{-1}x-\frac{1}{\ln^{-1}x}\right)$, где $\ln^{-1}x=e^{x}$.

Такое обозначение напоминает, что значения этой величины могут быть получены обратной интерполяцией из таблицы натуральных логарифмов, чтобы не пользоваться рядом **550**, медленно сходящимся при больших x. Обратную интерполяцию можно производить и по таблице десятичных логарифмов, если воспользоваться тождеством $\ln^{-1}x=\lg^{-1}(0{,}4343\,x)$.

654.2. $\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=\frac{1}{2}\left(\ln^{-1}x+\frac{1}{\ln^{-1}x}\right)$.

(См. примечание к **654.1.**)

654.3. $\operatorname{th}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

654.4. $\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x=e^{x}$. **654.5.** $\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x=e^{-x}$.

654.6. $\operatorname{sh}(ix)=i\sin x$. **654.7.** $\operatorname{ch}(ix)=\cos x$.

654.8. $\operatorname{th}(ix)=i\operatorname{tg}x$.

655.1. $\operatorname{sh}(x\pm iy)=\operatorname{sh}x\cos y\pm i\operatorname{ch}x\sin y$.

655.2. $\operatorname{ch}(x\pm iy)=\operatorname{ch}x\cos y\pm i\operatorname{sh}x\sin y$.

655.3. $\operatorname{th}(x\pm iy)=\frac{\operatorname{sh}2x\pm i\sin 2y}{\operatorname{ch}2x+\cos 2y}$.

655.4. $\operatorname{cth}(x\pm iy)=\frac{\operatorname{sh}2x\mp i\sin 2y}{\operatorname{ch}2x-\cos 2y}$.

656.1. $\operatorname{sh}0=0$. **656.2.** $\operatorname{ch}0=1$. **656.3.** $\operatorname{th}0=0$.

657.1. $\operatorname{sh}x=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\frac{x^{7}}{7!}+\ldots \qquad [x^{2}<\infty]$.

657.2. $\operatorname{ch}x=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\frac{x^{6}}{6!}+\ldots \qquad [x^{2}<\infty]$.

657.3. $\operatorname{th}x=x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{2}{15}x^{5}-\frac{17}{315}x^{7}+\frac{62}{2835}x^{9}-$

$-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{n}x^{2n-1}+\ldots$

$\left[x^{2}<\frac{\pi^{2}}{4};\ \text{см. } \mathbf{45}\right]$.

657.4. $\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \ldots$

$\ldots + \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{(2n)!} B_n x^{2n-1} + \ldots \quad [x^2 < \pi^2$; см. **45**].

657.5. $\operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5}{4!} x^4 - \frac{61}{6!} x^6 + \frac{1385}{8!} x^8 - \ldots$

$\ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} E_n x^{2n} + \ldots \quad [x^2 < \frac{\pi^2}{4}$; см. **45**].

657.6. $\operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + \ldots$

$\ldots + \frac{2(-1)^n (2^{2n-1} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} + \ldots \quad [x^2 < \pi^2$; см. **45**].

658.1. При x больших положительных

$$\operatorname{th} x = 1 - 2(e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \ldots).$$

При x отрицательных, воспользоваться формулой

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x.$$

658.2. При x больших положительных

$$\operatorname{cth} x = 1 + 2(e^{-2x} + e^{-4x} + e^{-6x} + \ldots).$$

При x отрицательных воспользоваться формулой

$$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x.$$

658.3. При x больших положительных

$$\operatorname{sch} x = 2(e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - \ldots).$$

При x отрицательных, воспользоваться формулой

$$\operatorname{sch}(-x) = \operatorname{sch} x.$$

658.4. При x больших положительных

$$\operatorname{csch} x = 2(e^{-x} + e^{-3x} + e^{-5x} + \ldots).$$

При x отрицательных воспользоваться формулой

$$\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x.$$

Гиперболические функции — Производные

667.1. $\frac{d \operatorname{sh} x}{dx} = \operatorname{ch} x.$ **667.3.** $\frac{d \operatorname{th} x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x.$

667.2. $\frac{d \operatorname{ch} x}{dx} = \operatorname{sh} x.$ **667.4.** $\frac{d \operatorname{cth} x}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x.$

667.5. $\frac{d \operatorname{sech} x}{dx} = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x.$

667.6. $\frac{d \operatorname{csch} x}{dx} = -\operatorname{csch} x \operatorname{cth} x.$

Гиперболические функции — Интегралы

670. Интегралы, содержащие тригонометрические функции, часто можно преобразовать в соответствующие интегралы, содержащие гиперболические функции, заменяя x на ix и пользуясь формулами:

$$\sin(ix) = i \operatorname{sh} x, \quad \cos(ix) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{th} x \text{ и т. д.}$$

[См. **408.10—15.**]

Эта замена бывает полезна и в других видах формул.

Интегралы, содержащие sh x

671.10. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x.$

671.101. $\int \operatorname{sh} \frac{x}{a}\,dx = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$

671.11. $\int x \operatorname{sh} x\,dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$

671.12. $\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx = (x^2 + 2) \operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x.$

671.13. $\int x^3 \operatorname{sh} x\,dx = (x^3 + 6x) \operatorname{ch} x - (3x^2 + 6) \operatorname{sh} x.$

671.19. $\int x^p \operatorname{sh} x\,dx = x^p \operatorname{ch} x - p \int x^{p-1} \operatorname{ch} x\,dx.$ [См. **677.1.**]

671.20. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2}.$

671.21. $\int x \operatorname{sh}^2 x\,dx = \frac{x \operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{8} - \frac{x^2}{4}.$

671.30. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch} x.$

671.40. $\int \operatorname{sh}^4 x\,dx = \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{3x}{8}.$

671.90. $\int \operatorname{sh}^p x\,dx = \frac{1}{p} \operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch} x - \frac{p-1}{p} \int \operatorname{sh}^{p-2} x\,dx.$

672.11. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$

672.12. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{sh} x}{x} + \int \frac{\operatorname{ch} x}{x}\,dx.$ [См. **678.11.**]

672.21. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x}\,dx = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{ch} 2x}{2x}\,d(2x).$ [См. **678.11.**]

673.10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| = -\frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch} x+1}{\operatorname{ch} x-1}$.

673.11. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sh} x} = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{7x^5}{3\cdot 5\cdot 5!} - \frac{31x^7}{3\cdot 7\cdot 7!} + \frac{127x^9}{3\cdot 5\cdot 9!} - \ldots$

$\ldots + (-1)^n \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n x^{2n+1} + \ldots$ [$x^2 < \pi^2$. См. **45**].

673.19. $\int \frac{x^p dx}{\operatorname{sh} x}$. Разложить $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ согласно **657.6,** умножить на x^p и интегрировать [$p \neq 0$].

673.20. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \int \operatorname{csch}^2 x\, dx = -\operatorname{cth} x$.

673.21. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -x\operatorname{cth} x + \ln|\operatorname{sh} x|$.

673.30. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x} = \int \operatorname{csch}^3 x\, dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$.

673.40. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x} = \operatorname{cth} x - \frac{\operatorname{cth}^3 x}{3}$.

673.90. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^p x} = -\frac{\operatorname{ch} x}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x} - \frac{p-2}{p-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{p-2} x}$ [$p > 1$].

675. $\int \operatorname{sh} mx \operatorname{sh} nx\, dx = \frac{\operatorname{sh}(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\operatorname{sh}(m-n)x}{2(m-n)}$

[$m^2 \neq n^2$; при $m^2 = n^2$ см. **671.20**].

Интегралы, содержащие $\operatorname{ch} x$

677.10. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x$.

677.101. $\int \operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}$.

677.11. $\int x\operatorname{ch} x\, dx = x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.

677.12. $\int x^2\operatorname{ch} x\, dx = (x^2+2)\operatorname{sh} x - 2x\operatorname{ch} x$.

677.13. $\int x^3\operatorname{ch} x\, dx = (x^3+6x)\operatorname{sh} x - (3x^2+6)\operatorname{ch} x$.

677.19. $\int x^p\operatorname{ch} x\, dx = x^p\operatorname{sh} x - p\int x^{p-1}\operatorname{sh} x\, dx$. [См. **671.1.**]

677.20. $\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2}$.

677.21. $\int x \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{x \operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{8} + \frac{x^2}{4}$.

677.30. $\int \operatorname{ch}^3 x\, dx = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + \operatorname{sh} x$.

677.40. $\int \operatorname{ch}^4 x\, dx = \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{3x}{8}$.

677.90. $\int \operatorname{ch}^p x\, dx = \frac{1}{p} \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{p-1} x + \frac{p-1}{p} \int \operatorname{ch}^{p-2} x\, dx$.

678.11. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{x}\, dx = \ln |x| + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \ldots$

678.12. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{x^2}\, dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{x} + \int \frac{\operatorname{sh} x}{x}\, dx$. [См. **672.11.**]

678.21. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x\, dx}{x} = \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{ch} 2x}{2x}\, d(2x)$. [См. **678.11.**]

679.10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \operatorname{sech} x\, dx = \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x) = 2 \operatorname{arctg} e^x + \mathrm{const}$.

679.11. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{ch} x} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5x^6}{6 \cdot 4!} - \frac{61 x^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385 x^{10}}{10 \cdot 8!} - \ldots$

$\ldots + \frac{(-1)^n E_n}{(2n+2)(2n)!} x^{2n+2} + \ldots$ $\left[x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right.$. См. **45**].

679.19. $\int \frac{x^p dx}{\operatorname{ch} x}$. Разложить $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ согласно **657.5**, умножить на x^p и интегрировать $[p \neq 0]$.

679.20. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \operatorname{th} x$.

679.21. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x} = x \operatorname{th} x - \ln \operatorname{ch} x$.

679.30. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x)$.

679.40. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x} = \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{th}^3 x}{3}$.

679.90. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^p x} = \frac{\operatorname{sh} x}{(p-1) \operatorname{ch}^{p-1} x} + \frac{p-2}{p-1} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{p-2} x}$ $[p > 1]$.

681. $\int \operatorname{ch} mx \operatorname{ch} nx\, dx = \frac{\operatorname{sh} (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sh} (m-n) x}{2(m-n)}$

[$m^2 \neq n^2$; при $m^2 = n^2$ см. **677.20.**]

682.01. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1} = \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

682.02. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - 1} = -\operatorname{cth} \frac{x}{2}$.

682.03. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} x + 1} = x \operatorname{th} \frac{x}{2} - 2 \ln \operatorname{ch} \frac{x}{2}$.

682.04. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch} x - 1} = -x \operatorname{cth} \frac{x}{2} + 2 \ln \left| \operatorname{sh} \frac{x}{2} \right|$.

682.05. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\operatorname{ch} x + 1} = x - \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

682.06. $\int \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\operatorname{ch} x - 1} = x - \operatorname{cth} \frac{x}{2}$.

682.07. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x + 1)} = \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x) - \operatorname{th} \frac{x}{2}$.

682.08. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x - 1)} = -\operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x) - \operatorname{cth} \frac{x}{2}$.

682.09. $\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x + 1)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}$.

682.10. $\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x - 1)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{cth}^3 \frac{x}{2}$.

682.11. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Arch} \left(\frac{3\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x + 1} \right)$,

для $x>0$ берется положительное значение Arch, а для $x<0$—отрицательное.

682.12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$. [См. **673.20.**]

Интегралы, содержащие sh x и ch x

685.11. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\,dx = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{2} + \text{const} = \frac{\operatorname{ch} 2x}{4} + \text{const}$.

685.12. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}$.

685.13. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{ch}^4 x}{4}$.

685.19. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^p x\,dx = \frac{\operatorname{ch}^{p+1} x}{p+1}$ $[p \neq -1]$.

685.21. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x\,dx = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}$.

685.22. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8}$.

685.31. $\int \mathrm{sh}^3 x \,\mathrm{ch}\, x\, dx = \frac{\mathrm{sh}^4 x}{4}$.

685.91. $\int \mathrm{sh}^p x \,\mathrm{ch}\, x\, dx = \frac{\mathrm{sh}^{p+1} x}{p+1}$ $[p \neq -1]$.

686.11. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x} = \ln |\mathrm{th}\, x|$.

686.12. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}^2 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}\, x} + \ln \left|\mathrm{th}\, \frac{x}{2}\right|$.

686.13. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}^3 x} = \frac{1}{2\mathrm{ch}^2 x} + \ln |\mathrm{th}\, x|$.

686.19. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}^p x} = \frac{1}{(p-1)\,\mathrm{ch}^{p-1} x} + \int \frac{dx}{\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}^{p-2} x}$ $[p \neq 1]$.

686.21. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}\, x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}\, x} - \mathrm{arctg}\,(\mathrm{sh}\, x)$.

686.22. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^2 x} = -2\mathrm{cth}\, 2x$.

686.31. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^3 x\, \mathrm{ch}\, x} = -\frac{1}{2\mathrm{sh}^2 x} - \ln |\mathrm{th}\, x|$.

686.91. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^p x\, \mathrm{ch}\, x} = -\frac{1}{(p-1)\,\mathrm{sh}^{p-1} x} - \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^{p-2} x\, \mathrm{ch}\, x}$ $[p \neq 1]$.

687.11. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x\, dx}{\mathrm{ch}\, x} = \int \mathrm{th}\, x\, dx = \ln \mathrm{ch}\, x$. [См. **691.01.**]

687.12. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x\, dx}{\mathrm{ch}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{ch}\, x} = -\mathrm{sech}\, x$.

687.13. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x\, dx}{\mathrm{ch}^3 x} = -\frac{1}{2\mathrm{ch}^2 x} = \frac{\mathrm{th}^2 x}{2} + \mathrm{const}$.

687.19. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x\, dx}{\mathrm{ch}^p x} = -\frac{1}{(p-1)\,\mathrm{ch}^{p-1} x}$ $[p \neq 1]$.

687.21. $\int \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}\, x}\, dx = \mathrm{sh}\, x - \mathrm{arctg}\,(\mathrm{sh}\, x)$.

687.22. $\int \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = \int \mathrm{th}^2 x\, dx = x - \mathrm{th}\, x$. [См. **691.02.**]

687.29. $\int \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^p x}\, dx = -\frac{\mathrm{sh}\, x}{(p-1)\,\mathrm{ch}^{p-1} x} + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{\mathrm{ch}^{p-2} x}$ $[p \neq 1]$.

687.31. $\int \frac{\mathrm{sh}^3 x}{\mathrm{ch}\, x}\, dx = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{2} - \ln \mathrm{ch}\, x$.

687.32. $\int \frac{\mathrm{sh}^3 x}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sech}\, x$.

687.33. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x}\, dx = \int \operatorname{th}^3 x\, dx = -\frac{\operatorname{th}^2 x}{2} + \ln \operatorname{ch} x.$ [См. **691.03.**]

687.34. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^4 x}\, dx = \frac{1}{3\operatorname{ch}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$

687.39. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^p x}\, dx = \frac{1}{(p-1)\operatorname{ch}^{p-1} x} - \frac{1}{(p-3)\operatorname{ch}^{p-3} x}$ [$p \neq 1$ или 3].

687.7. $\int \frac{\operatorname{sh}^{p-2} x}{\operatorname{ch}^p x}\, dx = \frac{\operatorname{th}^{p-1} x}{p-1}$ [$p \neq 1$].

688.11. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\, dx = \int \operatorname{cth} x\, dx = \ln|\operatorname{sh} x|.$ [См. **692.01.**]

688.12. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\frac{1}{\operatorname{sh} x} = -\operatorname{csch} x.$

688.13. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x}\, dx = -\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2} + \text{const}.$

688.19. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^p x}\, dx = -\frac{1}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x}$ [$p \neq 1$].

688.21. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x}\, dx = \operatorname{ch} x + \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|.$

688.22. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = \int \operatorname{cth}^2 x\, dx = x - \operatorname{cth} x.$ [См. **692.02.**]

688.29. $\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^p x}\, dx = -\frac{\operatorname{ch} x}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x} + \frac{1}{p-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{p-2} x}$ [$p \neq 1$].

688.31. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh} x}\, dx = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{2} + \ln|\operatorname{sh} x|.$

688.32. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = \operatorname{sh} x - \operatorname{csch} x.$

688.33. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^3 x}\, dx = \int \operatorname{cth}^3 x\, dx = -\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2} + \ln|\operatorname{sh} x|.$ [См. **692.03.**]

688.34. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^4 x}\, dx = -\frac{1}{3\operatorname{sh}^3 x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$

688.39. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^p x}\, dx = -\frac{1}{(p-1)\operatorname{sh}^{p-1} x} - \frac{1}{(p-3)\operatorname{sh}^{p-3} x}$ [$p \neq 1$ или 3].

688.7. $\int \frac{\operatorname{ch}^{p-2} x}{\operatorname{sh}^p x}\, dx = -\frac{\operatorname{cth}^{p-1} x}{p-1}$ [$p \neq 1$].

689.01. $\int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch} x + 1} = \ln(\operatorname{ch} x + 1).$

689.02. $\int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch} x - 1} = \ln(\operatorname{ch} x - 1).$

689.03. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x + 1)} = -\frac{1}{2(\operatorname{ch} x + 1)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|.$

689.04. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x - 1)} = \frac{1}{2(\operatorname{ch} x - 1)} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right|.$

689.05. $\int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x + 1)} = \ln \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x + 1} \right).$

689.06. $\int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch} x (\operatorname{ch} x - 1)} = \ln \left(\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x} \right).$

689.07. $\int \operatorname{sh} mx \operatorname{ch} nx\, dx = \frac{\operatorname{ch} (m+n) x}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{ch} (m-n) x}{2(m-n)}$

[$m^2 \neq n^2$; при $m^2 = n^2$ см. **685.11**].

Интегралы, содержащие $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$

691.01. $\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x.$ [См. **687.11.**]

691.02. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx = x - \operatorname{th} x.$ [См. **687.22.**]

691.03. $\int \operatorname{th}^3 x\, dx = -\frac{\operatorname{th}^2 x}{2} + \ln \operatorname{ch} x.$ [См. **687.33.**]

691.09. $\int \operatorname{th}^p x\, dx = -\frac{\operatorname{th}^{p-1} x}{p-1} + \int \operatorname{th}^{p-2} x\, dx$ [$p \neq 1$].

692.01. $\int \operatorname{cth} x\, dx = \ln |\operatorname{sh} x|.$ [См. **688.11.**]

692.02. $\int \operatorname{cth}^2 x\, dx = x - \operatorname{cth} x.$ [См. **688.22.**]

692.03. $\int \operatorname{cth}^3 x\, dx = -\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2} + \ln |\operatorname{sh} x|.$ [См. **688.33.**]

692.09. $\int \operatorname{cth}^p x\, dx = -\frac{\operatorname{cth}^{p-1} x}{p-1} + \int \operatorname{cth}^{p-2} x\, dx$ [$p \neq 1$].

VIII.

ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

700. $$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1}.$$

При положительном x берется положительное значение Arch, при отрицательном x — его отрицательное значение.

700.1. $$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arcsch}\frac{1}{x} = -\operatorname{Arsh}(-x) = \ln\{x+\sqrt{x^2+1}\}.$$

[См. **602.1** и **706.**]

701. $$\operatorname{Arch} x = \pm\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1} = \pm\operatorname{Arth}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \operatorname{Arsech}\frac{1}{x} = \pm\ln\{x+\sqrt{x^2-1}\}$$

$[x>1]$. [См. **602.3** и **707.**]

702. $$\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arcth}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad [x^2<1].$$ [См. **708.**]

703. $$\operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arth}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \qquad [x^2>1].$$ [См. **709.**]

704. $$\operatorname{Arsech} x = \pm\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \qquad [0<x<1].$$ [См. **710.**]

705. $$\operatorname{Arcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right).$$ [См. **711.**]

706. $$\operatorname{Arsh} x = x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots \qquad [x^2<1],$$

$$= \ln(2x) + \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots \qquad [x>1],$$

$$= -\ln|2x| - \frac{1}{2\cdot 2x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} + \ldots$$

$[x<-1]$. [См. **602.1.**]

707. $\operatorname{Arch} x = \pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6} - \ldots\right]$

$[x > 1]$. [См. **602.3** и **602.4.**]

708. $\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \quad [x^2 < 1]$. [См. **601.2.**]

709. $\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots \quad [x^2 > 1]$. [См. **601.3.**]

710. $\operatorname{Arsech} x = \pm\left[\ln\frac{2}{x} - \frac{1}{2\cdot 2}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 - \ldots\right]$

$[0 < x < 1]$. [См. **602.7** и **602.8.**]

711. $\operatorname{Arcsch} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\cdot 3x^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7x^7} + \ldots \quad [x^2 > 1]$,

$= \ln\frac{2}{x} + \frac{1}{2\cdot 2}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 - \ldots$

$[0 < x < 1]$,

$= -\ln\left|\frac{2}{x}\right| - \frac{1}{2\cdot 2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6 + \ldots$

$[-1 < x < 0]$. [См. **602.5.**]

720. $\operatorname{Arsh}(\pm x + iy) = \pm(-1)^n \operatorname{Arch}\frac{s+t}{2} +$

$+ i(-1)^n \arcsin\frac{2y}{s+t} + in\pi,$

здесь берутся положительные значения $\operatorname{Arch}\frac{s+t}{2}$, n — целое число или 0, x положительно, y положительно или отрицательно.

Значения s и t см. **720.1** и **720.2.**

720.1. $s = \sqrt{(1+y)^2 + x^2}$ (положительное значение корня).

720.2. $t = \sqrt{(1-y)^2 + x^2}$ (положительное значение корня).

Заметим, что при $x = 0$ и $y > 1$, $t = y - 1$ и $s + t = 2y$. Если $x = 0$ и $y < 1$, $t = 1 - y$ и $s + t = 2$.
Иначе:

720.3а. $\operatorname{Arsh} A = \ln(\pm\sqrt{1 + A^2} + A) + i2k\pi$
или

720.3б. $\operatorname{Arsh} A = -\ln(\pm\sqrt{1 + A^2} - A) + i2k\pi,$

где A может быть комплексной величиной, а k — целое число или 0.

О квадратном корне из комплексной величины см. 58 а о логарифме см. **604**. Формулы **720.3а** и **720.3б** тождественны.

721.1. $\operatorname{Arch}(x+iy)=\pm\left(\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}+i\arccos\frac{2x}{p+q}+i2k\pi\right).$

721.2. $\operatorname{Arch}(x-iy)=\pm\left(\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}-i\arccos\frac{2x}{p+q}+i2k\pi\right),$

здесь надо брать положительное значение $\operatorname{Arch}\frac{p+q}{2}$;

x положительно или отрицательно, y положительно.

721.3. $p=\sqrt{(1+x)^2+y^2}$ (положительное значение корня).

721.4. $q=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$ (положительное значение корня).

Иначе:

721.5а. $\operatorname{Arch} A=\pm\ln(A+\sqrt{A^2-1})+i2k\pi$

или

721.5б. $\operatorname{Arch} A=\mp\ln(A-\sqrt{A^2-1})+i2k\pi.$

(См. примечание к **720.3.**)

722.1. $$\operatorname{Arth}(x+iy)=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}+\frac{i}{2}\left\{(2k+1)\pi-\operatorname{arctg}\frac{1+x}{y}-\operatorname{arctg}\frac{1-x}{y}\right\}.$$

Иначе:

722.2. $$\operatorname{Arth}(x+iy)=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}+\frac{i}{2}\operatorname{arctg}\frac{2y}{1-x^2-y^2}+i\pi k,$$

где k есть нуль или целое число, а арктангенс берется в квадранте, определяемом знаками числителя и знаменателя (а не в смысле главного значения).

722.3. $\operatorname{Arth}(x+iy)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x+iy}{1-x-iy}.$ [См. **604.**]

Обратные гиперболические функции — Производные

728.1. $\frac{d}{dx}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$

728.2. $\frac{d}{dx}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a}>0,\ \frac{x}{a}>1\right].$

728.3. $\frac{d}{dx}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a}<0,\ \frac{x}{a}>1\right].$

728.4. $\frac{d}{dx}\operatorname{Arth}\frac{x}{a}=\frac{a}{a^2-x^2}$ $[x^2<a^2].$

728.5. $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Arcth}\dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{a^2-x^2}$ $\qquad [x^2>a^2].$

728.6. $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Arsech}\,\dfrac{x}{a}=\dfrac{-a}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ $\qquad \left[\mathrm{Arsech}\,\dfrac{x}{a}>0,\ 0<\dfrac{x}{a}<1\right].$

728.7. $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Arsech}\,\dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ $\qquad \left[\mathrm{Arsech}\,\dfrac{x}{a}<0,\ 0<\dfrac{x}{a}<1\right].$

728.8. $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{Arcsch}\,\dfrac{x}{a}=\dfrac{-a}{x\sqrt{x^2+a^2}}.$

(Всюду, кроме **728.4** и **728.5**, a должно быть положительным.)

Обратные гиперболические функции — Интегралы

Здесь всюду $a>0$

730. $\displaystyle\int \mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\,dx=x\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}-\sqrt{x^2+a^2}.$

730.1. $\displaystyle\int x\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}-\frac{x}{4}\sqrt{x^2+a^2}.$

730.2. $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^3}{3}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}+\frac{2a^2-x^2}{9}\sqrt{x^2+a^2}.$

730.3. $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\,dx=$

$\displaystyle=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3a^4}{32}\right)\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}+\frac{3a^2x-2x^3}{32}\sqrt{x^2+a^2}.$

730.4. $\displaystyle\int x^4\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\,dx=$

$\displaystyle=\frac{x^5}{5}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}-\frac{8a^4-4a^2x^2+3x^4}{75}\sqrt{x^2+a^2}.$

[См. **625 — 625.4.**]

730.9. $\displaystyle\int x^p\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}\,dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{a}-\frac{1}{p+1}\int\frac{x^{p+1}dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $\qquad [p\neq-1].$

[См. **201.01 — 207.01** и **625.9.**]

731.1. $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}\,dx=$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{2x}{a}\right|\right)^2+\frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4^3}\frac{a^4}{x^4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6^3}\frac{a^6}{x^6}-\ldots$ $\qquad \left[\dfrac{x}{a}<-1\right],$

$\displaystyle=\frac{x}{a}-\frac{1}{2\cdot3\cdot3}\frac{x^3}{a^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot5}\frac{x^5}{a^5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7}\frac{x^7}{a^7}+\ldots$ $\qquad [x^2<a^2].$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2x}{a}\right)^2-\frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4^3}\frac{a^4}{x^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6^3}\frac{a^6}{x^6}+\ldots$ $\qquad \left[\dfrac{x}{a}>1\right],$

731.2. $$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{x} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| .$$

731.3. $$\int \frac{1}{x^3} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2a^2 x} .$$

[См. **626.1—626.3.**]

731.9. $$\int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{(p-1)\, x^{p-1}} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1} \sqrt{x^2 + a^2}} \qquad [p \neq 1].$$

[См. **221.01—226.01** и **626.9.**]

732. $$\int \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= x \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0\right].$$

732.1. $$\int x \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0\right].$$

732.2. $$\int x^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{2a^2 + x^2}{9} \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{2a^2 + x^2}{9} \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0\right].$$

732.3. $$\int x^3 \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32}\right) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{3a^2 x + 2x^3}{32} \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3a^4}{32}\right) \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{3a^2 x + 2x^3}{32} \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \left[\operatorname{Arch} \frac{x}{a} < 0\right].$$

732.4. $$\int x^4 \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx =$$
$$= \frac{x^5}{5}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \frac{8a^4+4a^2x^2+3x^4}{75}\sqrt{x^2-a^2} \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= \frac{x^5}{5}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + \frac{8a^4+4a^2x^2+3x^4}{75}\sqrt{x^2-a^2} \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} < 0\right].$$
[См. **627—627.4.**]

732.9. $$\int x^p \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx =$$
$$= \frac{x^{p+1}}{p+1}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \frac{1}{p+1}\int\frac{x^{p+1}\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} > 0,\quad p \neq -1\right],$$
$$= \frac{x^{p+1}}{p+1}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + \frac{1}{p+1}\int\frac{x^{p+1}\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} < 0,\quad p \neq -1\right].$$
[См. **261.01—267.01** и **627.9.**]

733.1. $$\int \frac{1}{x}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2x}{a}\right)^2 + \frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{a^4}{x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{a^6}{x^6} + \ldots \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2x}{a}\right)^2 + \frac{1}{2^3}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{a^4}{x^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{a^6}{x^6} + \ldots\right] \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} < 0\right].$$

733.2. $$\int \frac{1}{x^2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right|$$
$$\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} > 0,\ 0 < \operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| < \frac{\pi}{2}\right],$$
$$= -\frac{1}{x}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right|$$
$$\left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} < 0,\ 0 < \operatorname{arcsec}\left|\frac{x}{a}\right| < \frac{\pi}{2}\right].$$

733.3. $$\int \frac{1}{x^3} \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x} \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= -\frac{1}{2x^2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x} \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} < 0\right].$$ [См. **628.1—628.3.**]

733.9. $$\int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\, dx =$$
$$= -\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1}\sqrt{x^2-a^2}} \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} > 0, \quad p \neq 1\right],$$
$$= -\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \frac{1}{p-1} \int \frac{dx}{x^{p-1}\sqrt{x^2-a^2}} \quad \left[\operatorname{Arch}\frac{x}{a} < 0, \quad p \neq 1\right].$$ [См. **281.01—284.01** и **628.9.**]

От **732** до **733.9** всюду $\frac{x}{a} > 1$.

734. $$\int \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 - x^2).$$

734.1. $$\int x \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^2-a^2}{2} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$$

734.2. $$\int x^2 \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln (a^2 - x^2).$$

734.3. $$\int x^3 \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^4-a^4}{4} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3x}{4}.$$

734.9. $$\int x^p \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{a}{p+1} \int \frac{x^{p+1}\, dx}{a^2-x^2} \quad [p \neq -1].$$ [См. **141.1—148.1.**]

735.1. $$\int \frac{1}{x} \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2a^3} + \frac{x^5}{5^2a^5} + \frac{x^7}{7^2a^7} + \ldots$$

735.2. $$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = -\frac{1}{x} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right).$$

735.3. $$\int \frac{1}{x^3} \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{1}{2ax}.$$

735.4. $$\int \frac{1}{x^4} \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx =$$
$$= -\frac{1}{3x^3} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{1}{6ax^2} - \frac{1}{6a^3} \ln \left(\frac{a^2-x^2}{x^2}\right).$$

735.5. $$\int \frac{1}{x^5} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{x^4}\right) \operatorname{Arth} \frac{x}{a} - \frac{1}{12ax^3} - \frac{1}{4a^3x}.$$

735.9. $$\int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{a}{p-1}\int \frac{dx}{x^{p-1}(a^2-x^2)} \qquad [p \neq 1].$$

[См. **151.1—155.1.**]

В 734—735.9 всюду $x^2 < a^2$.

736. $$\int \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (x^2 - a^2).$$

736.1. $$\int x \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^2-a^2}{2} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$$

736.2. $$\int x^2 \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln (x^2 - a^2).$$

736.3. $$\int x^3 \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^4-a^4}{4} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3x}{4}.$$

736.9. $$\int x^p \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{a}{p+1}\int \frac{x^{p+1}\,dx}{a^2-x^2}$$

$[p \neq -1]$. [См. **141.1—148.1.**]

737.1. $$\int \frac{1}{x} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = -\frac{a}{x} - \frac{a^3}{3^2x^3} - \frac{a^5}{5^2x^5} - \frac{a^7}{7^2x^7} - \ldots$$

737.2. $$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right).$$

737.3. $$\int \frac{1}{x^3} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{1}{2ax}.$$

737.4. $$\int \frac{1}{x^4} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{3x^3} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{1}{6ax^2} - \frac{1}{6a^3} \ln \left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right).$$

737.5. $$\int \frac{1}{x^5} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{x^4}\right) \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} - \frac{1}{12ax^3} - \frac{1}{4a^3x}.$$

737.9. $$\int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{a}{p-1}\int \frac{dx}{x^{p-1}(a^2-x^2)} \qquad [p \neq 1].$$

[См. **151.1—155.1.**]

В 736—737.9 всюду $x^2 > a^2$.

738. $$\int \operatorname{Arsech}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} + a\arcsin\frac{x}{a} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= x\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} - a\arcsin\frac{x}{a} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} < 0\right].$$

738.1. $$\int x\operatorname{Arsech}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\sqrt{a^2-x^2} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\sqrt{a^2-x^2} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} < 0\right].$$

738.2. $$\int x^2\operatorname{Arsech}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} - \frac{ax}{6}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^3}{6}\arcsin\frac{x}{a} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} + \frac{ax}{6}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^3}{6}\arcsin\frac{x}{a} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} < 0\right].$$

738.9. $$\int x^p\operatorname{Arsech}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} + \frac{a}{p+1}\int\frac{x^p\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} > 0 \quad p \neq -1\right],$$
$$= \frac{x^{p+1}}{p+1}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} - \frac{a}{p+1}\int\frac{x^p\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} < 0, \quad p \neq -1\right].$$

[См. **320.01—327.01.**]

739.1. $$\int \frac{1}{x}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{a}{x}\right)\ln\frac{4a}{x} - \frac{1}{2^3}\frac{x^2}{a^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{x^4}{a^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{x^6}{a^6} - \ldots \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{a}{x}\right)\ln\frac{4a}{x} + \frac{1}{2^3}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{x^6}{a^6} + \ldots \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} < 0\right].$$

739.2. $$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{Arsech}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{1}{x}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{ax} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} > 0\right],$$
$$= -\frac{1}{x}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{ax} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} < 0\right].$$

739.9. $$\int \frac{1}{x^p} \operatorname{Arsech}\frac{x}{a}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} - \frac{a}{p-1}\int\frac{dx}{x^p\sqrt{a^2-x^2}} \qquad \left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} > 0,\quad p\neq 1\right],$$
$$= -\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}}\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} + \frac{a}{p-1}\int\frac{dx}{x^p\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$\left[\operatorname{Arsech}\frac{x}{a} < 0,\quad p\neq 1\right].$$ [См. **342.01—346.01.**]

В **738—739.9** всюду $0 < x < a$.

740. $$\int \operatorname{Arcsch}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{Arcsch}\frac{x}{a} + a\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}.$$

740.1. $$\int x\operatorname{Arcsch}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{Arcsch}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\sqrt{x^2+a^2}.$$

740.9. $$\int x^p\operatorname{Arcsch}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\operatorname{Arcsch}\frac{x}{a} + \frac{a}{p+1}\int\frac{x^p\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$[p\neq -1].$$ [См. **200.01—207.01.**]

741.1. $$\int \frac{1}{x}\operatorname{Arcsch}\frac{x}{a}\,dx = -\frac{a}{x} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 3}\frac{a^3}{x^3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5}\frac{a^5}{x^5} + $$
$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7}\frac{a^7}{x^7} - \ldots \qquad [x^2 > a^2],$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{a}{x}\right)\ln\frac{4a}{x} + \frac{1}{2^3}\frac{x^2}{a^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{x^4}{a^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{x^6}{a^6} - \ldots \qquad [0 < x < a],$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a}{x}\right|\ln\left|\frac{4a}{x}\right| - \frac{1}{2^3}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{x^4}{a^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{x^6}{a^6} + \ldots \qquad [-a < x < 0].$$

741.9. $$\int \frac{1}{x^p}\operatorname{Arcsch}\frac{x}{a}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\operatorname{Arcsch}\frac{x}{a} - \frac{a}{p-1}\int\frac{dx}{x^p\sqrt{x^2+a^2}} \qquad [p\neq 1].$$ [См. **222.01—226.01.**]

В **740—741.9** всюду $a > 0$, $x > 0$ (кроме **741.1**).

IX.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

750. Обозначим $u = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ $[k^2 < 1]$,

$$= \int\limits_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \qquad [x = \sin\varphi],$$

$= F(\varphi, k)$ (*эллиптический интеграл первого рода*, см. **770**).

751.1. φ называется *амплитудой*, k — *модулем*.

751.2. $\varphi = \operatorname{am} u$.

751.3. $\sin\varphi = \operatorname{sn} u = x$. **751.4.** $\cos\varphi = \operatorname{cn} u = \sqrt{1-x^2}$.

751.5. $\Delta\varphi$ или $\Delta(\varphi, k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \operatorname{dn} u = \sqrt{1-k^2x^2}$.

751.6. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tn} u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

751.7. *Дополнительный модуль* $k' = \sqrt{1-k^2}$.

752.*) $u = \operatorname{am}^{-1}(\varphi, k) = \operatorname{sn}^{-1}(x, k) = \operatorname{cn}^{-1}\{\sqrt{1-x^2}, k\} =$

$$= \operatorname{dn}^{-1}\{\sqrt{1-k^2x^2}, k\} = \operatorname{tn}^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, k\right].$$

753.1. $\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u$. **754.1.** $\operatorname{am} 0 = 0$.

753.2. $\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u$. **754.2.** $\operatorname{sn} 0 = 0$.

753.3. $\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u$. **754.3.** $\operatorname{cn} 0 = 1$.

753.4. $\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u$. **754.4.** $\operatorname{dn} 0 = 1$.

753.5. $\operatorname{tn}(-u) = -\operatorname{tn} u$. **755.1.** $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$.

---

*) Здесь показатель степени — 1 применяется в смысле обратной функции. (*Прим. ред.*)

755.2. $\mathrm{dn}^2 u + k^2 \mathrm{sn}^2 u = 1.$ **755.3.** $\mathrm{dn}^2 u - k^2 \mathrm{cn}^2 u = k'^2.$

756.1. $\mathrm{sn}(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v \pm \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}.$

756.2. $\mathrm{cn}(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v \mp \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}.$

756.3. $\mathrm{dn}(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v \mp k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}.$

756.4. $\mathrm{tn}(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,v \pm \mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,u}{1 \mp \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}.$

757.1. $\mathrm{sn}\,2u = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^4 u}.$

757.2. $\mathrm{cn}\,2u = \dfrac{\mathrm{cn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^4 u} = \dfrac{2\,\mathrm{cn}^2 u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^4 u} - 1.$

757.3. $\mathrm{dn}\,2u = \dfrac{\mathrm{dn}^2 u - k^2 \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2 u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^4 u} = \dfrac{2\,\mathrm{dn}^2 u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^4 u} - 1.$

757.4. $\mathrm{tn}\,2u = \dfrac{2\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - \mathrm{tn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}.$

758.1. $\mathrm{sn}\,\dfrac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \mathrm{cn}\,u}{1 + \mathrm{dn}\,u}}.$

758.2. $\mathrm{cn}\,\dfrac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{cn}\,u + \mathrm{dn}\,u}{1 + \mathrm{dn}\,u}}.$

758.3. $\mathrm{dn}\,\dfrac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{cn}\,u + \mathrm{dn}\,u}{1 + \mathrm{cn}\,u}}.$

759.1. $\mathrm{sn}(iu,\ k) = i\,\mathrm{tn}(u,\ k').$

759.2. $\mathrm{cn}(iu,\ k) = \dfrac{1}{\mathrm{cn}(u,\ k')}.$

759.3. $\mathrm{dn}(iu,\ k) = \dfrac{\mathrm{dn}(u,\ k')}{\mathrm{cn}(u,\ k')}.$

760.1. $\mathrm{sn}\,u = u - (1 + k^2)\dfrac{u^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4)\dfrac{u^5}{5!} -$

$$- (1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6)\frac{u^7}{7!} + \ldots$$

760.2. $\mathrm{cn}\,u = 1 - \dfrac{u^2}{2!} + (1 + 4k^2)\dfrac{u^4}{4!} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\dfrac{u^6}{6!} +$

$$+ (1 + 408k^2 + 912k^4 + 64k^6)\frac{u^8}{8!} - \ldots$$

760.3. $$\operatorname{dn} u = 1 - k^2\frac{u^2}{2!} + (4+k^2)k^2\frac{u^4}{4!} - (16+44k^2+k^4)k^2\frac{u^6}{6!} + (64+912k^2+408k^4+k^6)k^2\frac{u^8}{8!} - \ldots$$

760.4. $$\operatorname{am} u = u - k^2\frac{u^3}{3!} + (4+k^2)k^2\frac{u^5}{5!} - (16+44k^2+k^4)k^2\frac{u^7}{7!} + (64+912k^2+408k^4+k^6)k^2\frac{u^9}{9!} - \ldots$$

Эллиптические функции — Производные

768.1. $$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

768.2. $$\frac{d}{du}\operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.$$

768.3. $$\frac{d}{du}\operatorname{dn} u = -k^2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Эллиптические функции—Интегралы

770. *Эллиптический интеграл первого рода*

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad [k^2 < 1],$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \qquad [x = \sin\varphi].$$ [См. **750.**]

771. *Эллиптический интеграл второго рода*

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad [x = \sin\varphi].$$

772. *Эллиптический интеграл третьего рода*

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} \qquad [x = \sin\varphi].$$

n называется *параметром.*

Таблицы значений эллиптических интегралов см. [27], [28].

Полные эллиптические интегралы

773.1. $$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6+\ldots\right)$$
$[k^2<1]$.

773.2. $$K=\frac{\pi}{2}(1+m)\left[1+\frac{1^2}{2^2}m^2+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}m^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}m^6+\ldots\right],$$
где $m=(1-k')/(1+k')$.
Этот ряд сходится быстрее, чем **773.1**, поскольку $m^2<k^2$.

773.3. $$K=\ln\frac{4}{k'}+\frac{1^2}{2^2}\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{2}{1\cdot 2}\right)k'^2+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}\right)k'^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}-\frac{2}{5\cdot 6}\right)k'^6+\ldots,$$
где $k'=\sqrt{1-k^2}$.

774.1. $$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}k^4-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6-\ldots\right)$$
$[k^2<1]$.

774.2. $$E=\frac{\pi}{2(1+m)}\left[1+\frac{m^2}{2^2}+\frac{1^2}{2^2\cdot 4^2}m^4+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}m^6+\ldots\right],$$
где $m=(1-k')/(1+k')$.
Этот ряд сходится быстрее, чем **774.1**, поскольку $m^2<k^2$.

774.3. $$E=1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{1}{1\cdot 2}\right)k'^2+\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4}\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)k'^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\left(\ln\frac{4}{k'}-\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{2}{3\cdot 4}-\frac{1}{5\cdot 6}\right)k'^6+\ldots$$

775. $$F(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$
$$=\frac{2\varphi}{\pi}K-\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{2}A_2k^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}A_4k^4+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}A_6k^6+\ldots\right),$$

где

$$A_2=\frac{1}{2},\qquad A_4=\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{1}{4}\sin^2\varphi,$$
$$A_6=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{5}{4\cdot 6}\sin^2\varphi+\frac{1}{6}\sin^4\varphi,$$
$$A_8=\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\frac{5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8}\sin^2\varphi+\frac{7}{6\cdot 8}\sin^4\varphi+\frac{1}{8}\sin^6\varphi,$$

а K находится по формуле **773** или из таблиц.

776. $$F(\varphi,\ k)=\varphi+\frac{1}{2}v_2k^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}v_4k^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}v_6k^6+\ldots,$$

где

$$v_{2n}=\int_0^{\varphi}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$ [См. **430.**]

777. $$E(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$
$$=\frac{2\varphi}{\pi}E+\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{2}A_2k^2+\frac{1}{2\cdot 4}A_4k^4+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}A_6k^6+\ldots\right),$$

где A_2, $A_4,\ldots$ те же, что и в формуле **775**, а E может быть получено из формулы **774** или из таблиц.

780.1. $$\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+k'^2x^2}}=\operatorname{tn}^{-1}(x,\ k)\,^{*)}=F(\operatorname{arctg}x,\ k)$$

$[x>0]$.

781.01. $$\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{sn}^{-1}\left(\frac{x}{b},\ \frac{b}{a}\right)^{*)}=\frac{1}{a}F(\varphi,\ k)$$

$\left[\varphi=\arcsin\frac{x}{b},\quad k=\frac{b}{a}\right]$, $[0<x<b<a]$.

---

*) Здесь через $\operatorname{sn}^{-1}(x)$, $\operatorname{tn}^{-1}(x)$ обозначены функции, обратные $\operatorname{sn}x$ и $\operatorname{tn}x$ (область изменения от 0 до К). (*Прим. ред.*)

781.02. $$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\{K(k)-F(\varphi, k)\}$$

$$\left[\varphi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right), \quad k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right], \quad [0<b<x<a].$$

$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ — полный эллиптический интеграл. Как обычно, интеграл от x_1 до x_2 получается как разность интегралов от b до x_2 и от b до x_1.

781.03. $$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\{K(k)-F(\varphi, k)\}$$

$$[\varphi = \arcsin(a/x), \quad k = b/a], \quad [0<b<a<x].$$

781.04. $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{tn}^{-1}\left\{\frac{x}{b}, \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right\}^{*)} = \frac{1}{a}F(\varphi, k)$$

$$\left[\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{b}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right], \quad [0<b<a;\ 0<x].$$

781.05. $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{K(k)-F(\varphi, k)\}$$

$$\left[\varphi = \arccos\frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right], \quad [0<x<b].$$

781.06. $$\int_b^x \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}F(\varphi, k)$$

$$\left[\varphi = \arccos\frac{b}{x}, \quad k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right], \quad [0<b<x;\ 0<a].$$

781.11. $$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}} = aF(\varphi, k) - aE(\varphi, k)$$

$$[\varphi = \arcsin(x/b), \quad k = b/a], \quad [0<x<b<a].$$

781.12. $$\int_b^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{x^2-b^2}} = aE\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - aE(\varphi, k)$$

$$\left[\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right], \quad [0<b<x<a].$$

---

*) См. подстр. прим. на стр. 155.

781.13. $$\int_a^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}\,\sqrt{x^2-b^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,\sqrt{x^2-b^2}}{x} + aK(k) - aF(\varphi, k) - aE\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + aE(\varphi, k)$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{a}{x},\quad k = \frac{b}{a}\right],\quad [0 < b < a < x].$$

781.14. $$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{b^2+x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} - aE(\varphi, k)$$
$$\left[\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{b},\ k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right],\quad [0 < x;\ 0 < b < a].$$

781.15. $$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{b^2-x^2}} = \sqrt{a^2+b^2}\left[E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi, k)\right] - \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}[K(k) - F(\varphi, k)]$$
$$\left[\varphi = \arccos\frac{x}{b},\quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right],\quad [0 < x < b].$$

781.16. $$\int_b^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{x^2-b^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}\,\sqrt{x^2-b^2}}{x} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}F(\varphi, k) - \sqrt{a^2+b^2}\,E(\varphi, k)$$
$$\left[\varphi = \arccos\frac{b}{x},\ k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right],\quad [0 < b < x;\ 0 < a].$$

781.21. $$\int_0^x \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{b^2-x^2}}\,dx = aE(\varphi, k)\quad [0 < x < b < a],$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{x}{b},\ k = \frac{b}{a}\right].$$

781.22. $$\int_0^x \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = aE(\varphi, k) - \frac{a^2-b^2}{a}F(\varphi, k)$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{x}{b},\ k = \frac{b}{a}\right],\quad [0 < x < b < a].$$

781.23. $$\int_0^x \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} + aF(\varphi, k) - aE(\varphi, k)$$
$$\left[\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{b},\ k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right] \quad [0 < x;\ 0 < b < a].$$

781.24. $$\int_b^x \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{x^2-b^2}}\,dx =$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}\sqrt{x^2-b^2}}{x} + \sqrt{a^2+b^2}\,\{F(\varphi, k) - E(\varphi, k)\}$$
$$\left[\varphi = \arccos\frac{b}{x},\ k = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right] \quad [0 < b < x;\ 0 < a].$$

781.51. $$\int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}}{3} +$$
$$+ \frac{(2+k^2)\,b^3}{3k^3}F(\varphi, k) - \frac{2(1+k^2)\,b^3}{3k^3}E(\varphi, k)$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{x}{b},\ k = \frac{b}{a}\right].$$

781.61. $$\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2-x^2}}{3} +$$
$$+ \left(\frac{b^3}{3k} + \frac{2b^3}{3k^3} - a^3\right)F(\varphi, k) + \left(a^3 + ab^2 - \frac{2b^3}{3k} - \frac{2b^3}{3k^3}\right)E(\varphi, k)$$
$$\left[\varphi = \arcsin\frac{x}{b},\ k = \frac{b}{a}\right].$$

782.01. $$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^u \operatorname{sn}^2 u\,du = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} =$$
$$= \frac{1}{k^2}\{F(\varphi, k) - E(\varphi, k)\} \qquad [x = \sin\varphi].$$

782.02. $$\int_0^\varphi \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^u \operatorname{cn}^2 u\,du = \int_0^x \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}\,dx =$$
$$= \frac{E(\varphi, k)}{k^2} - \frac{1-k^2}{k^2}F(\varphi, k) \qquad [x = \sin\varphi].$$

782.03. $$\int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^u \operatorname{tn}^2 u\, du = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1-k^2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - \frac{E(\varphi, k)}{1-k^2}.$$

782.04. $$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1-k^2}\operatorname{tg}\varphi + F(\varphi, k) - \frac{E(\varphi, k)}{1-k^2}.$$

782.05. $$\int_0^\varphi \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + F(\varphi, k) - E(\varphi, k).$$

782.06. $$\int_0^\varphi \operatorname{tg}^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} + F(\varphi, k) - 2E(\varphi, k).$$

785.1. $$\int \operatorname{sn} u\, du = -\frac{1}{k}\operatorname{Arch}\left(\frac{\operatorname{dn} u}{k'}\right).$$

785.2. $$\int \operatorname{cn} u\, du = \frac{1}{k}\arccos(\operatorname{dn} u).$$

785.3. $$\int \operatorname{dn} u\, du = \arcsin(\operatorname{sn} u) = \operatorname{am} u.$$

786.1. $$\int \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}\right).$$

786.2. $$\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'}\ln\left(\frac{k'\operatorname{sn} u + \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}\right).$$

786.3. $$\int \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \frac{1}{k'}\operatorname{arctg}\left(\frac{k'\operatorname{sn} u - \operatorname{cn} u}{k'\operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u}\right).$$

787.1. $$\int_0^u \operatorname{sn}^2 u\, du = \frac{1}{k^2}\{u - E(\operatorname{am} u, k)\}.$$

787.2. $$\int_0^u \operatorname{cn}^2 u\, du = \frac{1}{k^2}\{E(\operatorname{am} u, k) - k'^2 u\}.$$

787.3. $$\int_0^u \operatorname{dn}^2 u\, du = E(\operatorname{am} u, k).$$

787.4. $$\int_0^u \operatorname{tn}^2 u\, du = \frac{1}{k'^2}\{\operatorname{dn} u \operatorname{tn} u - E(\operatorname{am} u, k)\}.$$

788.1.*) $\int \operatorname{sn}^{-1} x\, dx = x \operatorname{sn}^{-1} x + \frac{1}{k} \operatorname{ch}\left[\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{k'}\right]$.

788.2. $\int \operatorname{cn}^{-1} x\, dx = x \operatorname{cn}^{-1} x - \frac{1}{k} \arccos \sqrt{k'^2 + k^2x^2}$.

788.3. $\int \operatorname{dn}^{-1} x\, dx = x \operatorname{dn}^{-1} x - \arcsin\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{k}\right]$.

789.1. $\frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{k}(E-K)$.

789.2. $\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{1}{k}\left(\frac{E}{k'^2} - K\right)$.

---

*) См. подстр. прим. на стр. 151.

X.

БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

800. Дифференциальное уравнение Бесселя имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{du}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)u=0.$$

Бесселева функция первого рода $J_n(x)$

Обозначим $\frac{d}{dx}J_n(x)$ через J_n' и т. д.

801.1. $xJ_n'=nJ_n-xJ_{n+1}$.

801.2. $xJ_n'=-nJ_n+xJ_{n-1}$.

801.3. $2nJ_n=xJ_{n-1}+xJ_{n+1}$.

801.4. $2J_n'=J_{n-1}-J_{n+1}$.

801.5. $4J_n''=J_{n-2}-2J_n+J_{n+2}$.

801.6. $\frac{d}{dx}(x^nJ_n)=x^nJ_{n-1}$.

801.7. $\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n)=-x^{-n}J_{n+1}$.

801.82. $J_2=\frac{2J_1}{x}-J_0$.

801.83. $J_3=\left(\frac{8}{x^2}-1\right)J_1-\frac{4J_0}{x}$.

801.84. $J_4=\left(1-\frac{24}{x^2}\right)J_0+\frac{8}{x}\left(\frac{6}{x^2}-1\right)J_1$.

801.85. $J_5=\frac{12}{x}\left(1-\frac{16}{x^2}\right)J_0+\left(\frac{384}{x^4}-\frac{72}{x^2}+1\right)J_1$.

801.90. $J_0'=-J_1$.

801.91. $J_1'=J_0-\frac{J_1}{x}$.

801.92. $J_2' = \frac{2J_0}{x} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) J_1.$

801.93. $J_3' = \left(\frac{12}{x^2} - 1\right) J_0 + \left(5 - \frac{24}{x^2}\right) \frac{J_1}{x}.$

801.94. $J_4' = \frac{8}{x}\left(\frac{12}{x^2} - 1\right) J_0 - \left(\frac{192}{x^4} - \frac{40}{x^2} + 1\right) J_1.$

801.95. $J_5' = \left(\frac{960}{x^4} - \frac{84}{x^2} + 1\right) J_0 - \left(\frac{1920}{x^4} - \frac{408}{x^2} + 13\right) \frac{J_1}{x}.$

Таблицы $J_0(x)$ и $J_1(x)$ см. [10, 15; 17, 19з, 20].

802.1. $J_0(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \ldots$

802.21. $J_1(x) = -J_0'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \ldots$

802.22. $J_2(x) = \frac{x^2}{2^2 2!} - \frac{x^4}{2^4 1! 3!} + \frac{x^6}{2^6 2! 4!} - \frac{x^8}{2^8 3! 5!} + \ldots$

802.3. При n целом положительном

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!}\left[1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1\,(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1 \cdot 2\,(n+1)(n+2)} - \ldots\right].$$

802.4. При n целом

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

802.5. Если n — не целое положительное число, то в формуле **802.3** заменить $n!$ через $\Pi(n)$. (См. **853.1.**)

802.61. $J_1'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{2^3 1! 2!} + \frac{5x^4}{2^5 2! 3!} - \frac{7x^6}{2^7 3! 4!} + \ldots$

802.62. $J_2'(x) = \frac{x}{4} - \frac{4x^3}{2^4 1! 3!} + \frac{6x^5}{2^6 2! 4!} - \frac{8x^7}{2^8 3! 5!} + \ldots$

802.69. $J_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{2^n (n-1)!} - \frac{(n+2)\,x^{n+1}}{2^{n+2} 1!\,(n+1)!} +$

$$+ \frac{(n+4)\,x^{n+3}}{2^{n+4} 2!\,(n+2)!} - \frac{(n+6)\,x^{n+5}}{2^{n+6} 3!\,(n+3)!} + \ldots$$

(n целое положительное).

Асимптотические ряды для больших значений x

803.1. $$J_0(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_0(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-Q_0(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$
где

803.11. $$P_0(x)\approx 1-\frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{4!\,(8x)^4}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11^2}{6!\,(8x)^6}+\ldots$$

803.12. $$Q_0(x)\approx-\frac{1^2}{1!\,8x}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2}{5!\,(8x)^5}+\ldots$$

Знак $\approx$ означает асимптотическое равенство.

803.2. $$J_1(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_1(x)\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)-Q_1(x)\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$
где

803.21. $$P_1(x)\approx 1+\frac{1^2\cdot 3\cdot 5}{2!\,(8x)^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 9}{4!\,(8x)^4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\cdot 11\cdot 13}{6!\,(8x)^6}-\ldots$$

Начиная со второго члена знаки чередуются.

803.22. $$Q_1(x)\approx\frac{1\cdot 3}{1!\,8x}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{3!\,(8x)^3}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9\cdot 11}{5!\,(8x)^5}-\ldots$$

803.3. $$J_n(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_n(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-Q_n(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$
где

803.31. $$P_n(x)\approx 1-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8x)^2}+$$
$$+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!\,(8x)^4}-\ldots$$

803.32. $$Q_n(x)\approx\frac{4n^2-1^2}{1!\,8x}-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!\,(8x)^3}+\ldots$$

803.4. $$J_n'(x)=-\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_n^{(1)}(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+Q_n^{(1)}(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$
где согласно **801.4**

803.41. $$P_n^{(1)}(x)\approx 1-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2+3\times 5)}{2!\,(8x)^2}+$$
$$+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2+7\times 9)}{4!\,(8x)^4}-\ldots$$

803.42. $Q_n^{(1)}(x) \approx \frac{4n^2+1\times 3}{1!\,8x} - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2+5\times 7)}{3!\,(8x)^3} + \ldots$

Закон образования следующих членов очевиден. Следует помнить, что приведенные здесь ряды для больших значений x являются асимптотическими, и существует предел точности, которую они могут дать.

804.01. $J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x.$

804.03. $J_{\frac{3}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$

804.05. $J_{\frac{5}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left\{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\sin x - \frac{3}{x}\cos x\right\}.$

804.21. $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x.$

804.23. $J_{-\frac{3}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right).$

804.25. $J_{-\frac{5}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left\{\frac{3}{x}\sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\cos x\right\}.$

Бесселева функция второго рода $Y_n(x)$

Некоторые авторы употребляют вместо $Y_n(x)$ обозначение $N_n(x)$.

805.1. $xY_n' = nY_n - xY_{n+1}.$ **805.2.** $xY_n' = -nY_n + xY_{n-1}.$

805.3. $2nY_n = xY_{n-1} + xY_{n+1}.$ **805.4.** $2Y_n' = Y_{n-1} - Y_{n+1}.$

805.5. $4Y_n'' = Y_{n-2} - 2Y_n + Y_{n+2}.$

805.6. $\frac{d}{dx}(x^n Y_n) = x^n Y_{n-1}.$

805.7. $\frac{d}{dx}(x^{-n} Y_n) = -x^{-n} Y_{n+1}.$

805.82. $Y_2 = \frac{2Y_1}{x} - Y_0.$ **805.83.** $Y_3 = \left(\frac{8}{x^2} - 1\right) Y_1 - \frac{4Y_0}{x}.$

805.84. $Y_4 = \left(1 - \frac{24}{x^2}\right) Y_0 + \frac{8}{x}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right) Y_1.$

805.85. $Y_5 = \frac{12}{x}\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) Y_0 + \left(\frac{384}{x^4} - \frac{72}{x^2} + 1\right) Y_1.$

805.90. $Y_0' = -Y_1.$ **805.91.** $Y_1' = Y_0 - \frac{Y_1}{x}.$

805.92. $Y_2' = \frac{2Y_0}{x} + \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) Y_1.$

805.93. $Y_3' = \left(\frac{12}{x^2} - 1\right) Y_0 + \left(5 - \frac{24}{x^2}\right) \frac{Y_1}{x}.$

805.94. $Y_4' = \frac{8}{x}\left(\frac{12}{x^2} - 1\right) Y_0 - \left(\frac{192}{x^4} - \frac{40}{x^2} + 1\right) Y_1.$

805.95. $Y_5' = \left(\frac{960}{x^4} - \frac{84}{x^2} + 1\right) Y_0 - \left(\frac{1920}{x^4} - \frac{408}{x^2} + 13\right) \frac{Y_1}{x}.$

Таблицы $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$ см. [10, 15, 17].

806.1.
$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \ldots,$$

где C — эйлерова постоянная 0,5772157. (См. **851.1.**)

806.2.
$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) J_1(x) - \frac{2}{\pi x} - \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}\left\{2\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p+1}\right\}.$$

806.3.
$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right),$$

где n целое положительное. При $p = 0$ последнюю скобку следует положить равной $\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

Асимптотические ряды для больших значений x

807.1. $Y_0(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_0(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+Q_0(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right].$

807.2. $Y_1(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_1(x)\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+Q_1(x)\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\right].$

807.3. $Y_n(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_n(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$
$\left.+Q_n(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$ [Ряды для P и Q см. 803.]

807.4. $Y_n'(x)=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[P_n^{(1)}(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$
$\left.-Q_n^{(1)}(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$

[$P_n^{(1)}(x)$ и $Q_n^{(1)}(x)$ см. в 803.41 и 803.42.]

Бесселевы функции от мнимого аргумента первого рода $I_n(x)$

808.1. $xI_n'=nI_n+xI_{n+1}.$ 808.3. $2nI_n=xI_{n-1}-xI_{n+1}.$

808.2. $xI_n'=-nI_n+xI_{n-1}.$ 808.4. $2I_n'=I_{n-1}+I_{n+1}.$

808.5. $4I_n''=I_{n-2}+2I_n+I_{n+2}.$

808.6. $\frac{d}{dx}(x^nI_n)=x^nI_{n-1}.$ 808.7. $\frac{d}{dx}(x^{-n}I_n)=x^{-n}I_{n+1}.$

808.82. $I_2=I_0-\frac{2I_1}{x}.$

808.83. $I_3=\left(\frac{8}{x^2}+1\right)I_1-\frac{4I_0}{x}.$

808.84. $I_4=\left(\frac{24}{x^2}+1\right)I_0-\frac{8}{x}\left(\frac{6}{x^2}+1\right)I_1.$

808.85. $I_5=\left(\frac{384}{x^4}+\frac{72}{x^2}+1\right)I_1-\frac{12}{x}\left(\frac{16}{x^2}+1\right)I_0.$

808.90. $I_0'=I_1.$

808.91. $I_1'=I_0-\frac{I_1}{x}.$

808.92. $I_2'=I_1\left(\frac{4}{x^2}+1\right)-\frac{2I_0}{x}.$

808.93. $I_3'=\left(\frac{12}{x^2}+1\right)I_0-\left(\frac{24}{x^2}+5\right)\frac{I_1}{x}.$

808.94. $$I_4' = \left(\frac{192}{x^4} + \frac{40}{x^2} + 1\right) I_1 - \frac{8}{x}\left(\frac{12}{x^2} + 1\right) I_0.$$

808.95. $$I_5' = \left(\frac{960}{x^4} + \frac{84}{x^2} + 1\right) I_0 - \left(\frac{1920}{x^4} + \frac{408}{x^2} + 13\right) \frac{I_1}{x}.$$

Таблицы $I_0(x)$ и $I_1(x)$ см. [10, 15, 21].

809.1. $$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \ldots,$$
где $i = \sqrt{-1}$.

809.2. $$I_1(x) = i^{-1} J_1(ix) = I_0'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \ldots$$

809.3. При n целом положительном
$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) =$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n!}\left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1 \cdot 2(n+1)(n+2)} + \ldots\right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}.$$

809.4. При n целом
$$I_{-n}(x) = I_n(x).$$

809.5. Если n не целое положительное, то надо в **809.3** заменить $n!$ на $\Pi(n)$.

[См. **853.1**]

Асимптотические ряды для больших значений x

811.1. $$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + \frac{1^2}{1!\,8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \ldots\right].$$

811.2. $$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!\,8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!\,(8x)^2} - \ldots\right].$$

811.3. $$I_n'(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 - \frac{4n^2 + 1 \times 3}{1!\,8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 + 3 \times 5)}{2!\,(8x)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 + 5 \times 7)}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right].$$

Члены ряда **811.3** те же, что и в рядах **803.41** и **803.42**.

Бесселевы функции от мнимого аргумента второго рода $K_n(x)$

814.1. $xK_n' = nK_n - xK_{n+1}$.

814.2. $xK_n' = -nK_n - xK_{n-1}$.

814.3. $2nK_n = xK_{n+1} - xK_{n-1}$.

814.4. $2K_n' = -K_{n-1} - K_{n+1}$.

814.5. $4K_n'' = K_{n-2} + 2K_n + K_{n+2}$.

814.6. $\frac{d}{dx}(x^n K_n) = -x^n K_{n-1}$.

814.7. $\frac{d}{dx}(x^{-n} K_n) = -x^{-n} K_{n+1}$.

814.82. $K_2 = K_0 + \frac{2K_1}{x}$.

814.83. $K_3 = \frac{4K_0}{x} + \left(\frac{8}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.84. $K_4 = \left(\frac{24}{x^2} + 1\right) K_0 + \frac{8}{x}\left(\frac{6}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.85. $K_5 = \frac{12}{x}\left(\frac{16}{x^2} + 1\right) K_0 + \left(\frac{384}{x^4} + \frac{72}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.90. $K_0' = -K_1$.

814.91. $K_1' = -K_0 - \frac{K_1}{x}$.

814.92. $K_2' = -\frac{2K_0}{x} - \left(\frac{4}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.93. $K_3' = -\left(\frac{12}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{24}{x^2} + 5\right) \frac{K_1}{x}$.

814.94. $K_4' = -\frac{8}{x}\left(\frac{12}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{192}{x^4} + \frac{40}{x^2} + 1\right) K_1$.

814.95. $K_5' = -\left(\frac{960}{x^4} + \frac{84}{x^2} + 1\right) K_0 - \left(\frac{1920}{x^4} + \frac{408}{x^2} + 13\right) \frac{K_1}{x}$.

Таблицы $K_0(x)$ и $K_1(x)$ см. [10, 15, 17, 21].

815.1. $$K_0(x) = -\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) I_0(x) +$$
$$+ \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots,$$

где $C = 0{,}5772157$ — эйлерова постоянная. (См. **851.1**)

815.2. $$K_n(x) = (-1)^{n+1}\left(C + \ln\frac{x}{2}\right) I_n(x) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p (n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n} +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right),$$

где n — целое положительное. При $p = 0$ последнюю скобку следует положить равной $\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

Следует заметить, что иногда, особенно в более ранней литературе по бесселевым функциям, буквой K обозначается совсем другое выражение.

815.3. При n целом $K_{-n}(x) = K_n(x)$.

815.4. При n нецелом $K_n(x) = \dfrac{\pi}{2\sin n\pi}\{I_{-n}(x) - I_n(x)\}$.

Асимптотические ряды для больших значений x

816.1.
$$K_0(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}\left[1 - \frac{1^2}{1!\,8x} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right].$$

816.2. $$K_n(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}\left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!\,8x} + \right.$$
$$\left. + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!\,(8x)^2} + \ldots\right].$$

816.3. $$K_n'(x) \approx -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}\left[1 + \frac{4n^2 + 1\times 3}{1!\,8x} + \right.$$
$$\left. + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 + 3\times 5)}{2!\,(8x)^2} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 + 5\times 7)}{3!\,(8x)^3} + \ldots\right].$$

[Из **814.4.**]

Нетрудно видеть, как продолжить этот ряд.

Функции Ганкеля

817.1. $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z).$ 817.2. $K_0(z) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iz).$

817.3. $H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z).$ 817.4. $H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z).$

817.5. $K_n(z) = \frac{\pi i}{2} e^{in\pi/2} H_n^{(1)}(iz).$

Для любых значений x и φ:

818.1. $\cos(x \sin\varphi) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi + \ldots$

818.2. $\sin(x \sin\varphi) = 2J_1(x)\sin\varphi + 2J_3(x)\sin 3\varphi + 2J_5(x)\sin 5\varphi + \ldots$

818.3. $\cos(x \cos\varphi) = J_0(x) - 2J_2(x)\cos 2\varphi + 2J_4(x)\cos 4\varphi - \ldots$

818.4. $\sin(x \cos\varphi) = 2J_1(x)\cos\varphi - 2J_3(x)\cos 3\varphi + 2J_5(x)\cos 5\varphi - \ldots$

Бесселевы функции от аргумента $xi\sqrt{i}$ первого рода

820.1. $\operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x = J_0(xi\sqrt{i}) = I_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{ber}_0 x + i \operatorname{bei}_0 x.$

820.2. $\operatorname{ber}' x = \frac{d}{dx}\operatorname{ber} x$, и т. д.

820.3. $$\operatorname{ber} x = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^8}{(4!)^2} - \ldots$$

820.4. $$\operatorname{bei} x = \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{10}}{(5!)^2} - \ldots$$

820.5. $$\operatorname{ber}' x = -\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1!\,2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^7}{3!\,4!} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{11}}{5!\,6!} + \ldots$$

820.6. $$\operatorname{bei}' x = \frac{1}{2}x - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{2!\,3!} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^9}{4!\,5!} - \ldots$$

821.1. Для больших значений x

$$\operatorname{ber} x \approx \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[L_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)\right],$$

821.2. $$\operatorname{bei} x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[M_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)+ L_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right],$$

где

821.3. $$L_0(x)\approx 1+\frac{1^2}{1!\,8x}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2}\cos\frac{2\pi}{4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3}\cos\frac{3\pi}{4}+\ldots,$$

821.4. $$M_0(x)\approx -\frac{1^2}{1!\,8x}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2}\sin\frac{2\pi}{4}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3}\sin\frac{3\pi}{4}-\ldots$$

821.5. $$\operatorname{ber}' x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[S_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)- T_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

821.6. $$\operatorname{bei}' x = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[T_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)+ S_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right],$$

где

821.7. $$S_0(x)\approx 1-\frac{1\cdot 3}{1!\,8x}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1^2\cdot 3\cdot 5}{2!\,(8x)^2}\cos\frac{2\pi}{4}- \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{3!\,(8x)^3}\cos\frac{3\pi}{4}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 9}{4!\,(8x)^4}\cos\frac{4\pi}{4}-\ldots$$

821.8. $$T_0(x)\approx \frac{1\cdot 3}{1!\,8x}\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1^2\cdot 3\cdot 5}{2!\,(8x)^2}\sin\frac{2\pi}{4}+ \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{3!\,(8x)^3}\sin\frac{3\pi}{4}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 9}{4!\,(8x)^4}\sin\frac{4\pi}{4}+\ldots$$

822.1. При n целом положительном
$$\operatorname{ber}_n x + i\operatorname{bei}_n x = J_n(xi\sqrt{i}) = i^n I_n(x\sqrt{i}).$$

822.2. $$\operatorname{ber}_n x=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

822.3. $$\operatorname{bei}_n x=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p+1}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

822.4. $$\operatorname{ber}'_n x=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}\left(\frac{n}{2}+p\right)\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!}\cos\frac{(n+2p)\,\pi}{4}.$$

822.5. $$\operatorname{bei}'_n x=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p+1}\left(\frac{n}{2}+p\right)\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!}\sin\frac{(n+2p)\,\pi}{4}.$$

823.1. Для больших значений x, при целом положительном n:

$$\operatorname{ber}_n x=\frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[L_n(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-M_n(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

823.2. $$\operatorname{bei}_n x=\frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[M_n(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+L_n(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right],$$

где

823.3. $$L_n(x)\approx 1-\frac{4n^2-1^2}{1!\,8x}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8x)^2}\cos\frac{2\pi}{4}-\ldots$$

823.4. $$M_n(x)\approx\frac{4n^2-1^2}{1!\,8x}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8x)^2}\sin\frac{2\pi}{4}+\ldots$$

823.5. $$\operatorname{ber}'_n x=\frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[S_n(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-T_n(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

823.6. $$\operatorname{bei}'_n x=\frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[T_n(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+S_n(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right],$$

где

823.7. $$S_n(x)\approx 1-\frac{4n^2+1\times 3}{1!\,8x}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2+3\times 5)}{2!\,(8x)^2}\cos\frac{2\pi}{4}-$$
$$-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2+5\times 7)}{3!\,(8x)^3}\cos\frac{3\pi}{4}+\ldots$$

823.8. $$T_n(x)\approx\frac{4n^2+1\times 3}{1!\,8x}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{(4n^2-1^2)(4n^2+3\times 5)}{2!\,(8x)^2}\sin\frac{2\pi}{4}+$$
$$+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2+5\times 7)}{3!\,(8x)^3}\sin\frac{3\pi}{4}-\ldots$$

Бесселевы функции от аргумента $xi\sqrt{i}$ второго рода

824.1. $\operatorname{ker} x + i \operatorname{kei} x = K_0(x\sqrt{i})$.

824.2. $\operatorname{ker}' x = \frac{d}{dx} \operatorname{ker} x$, и т. д.

824.3.
$$\operatorname{ker} x = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \operatorname{ber} x + \frac{\pi}{4} \operatorname{bei} x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^8}{(4!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{12}}{(6!)^2} + \ldots,$$

где $C = 0{,}5772157$. (См. **851.1.**)

824.4.
$$\operatorname{kei} x = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \operatorname{bei} x - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber} x + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{10}}{(5!)^2} - \ldots$$

824.5.
$$\operatorname{ker}' x = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \operatorname{ber}' x - \frac{1}{x} \operatorname{ber} x + \frac{\pi}{4} \operatorname{bei}' x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1!\,2!} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^7}{3!\,4!} - \ldots$$

824.6.
$$\operatorname{kei}' x = \left(\ln \frac{2}{x} - C\right) \operatorname{bei}' x - \frac{1}{x} \operatorname{bei} x - \frac{\pi}{4} \operatorname{ber}' x + \frac{1}{2}x - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{2!\,3!} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^9}{4!\,5!} - \ldots$$

825.1. Для больших значений x

$$\operatorname{ker} x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[L_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right) + M_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

825.2.
$$\operatorname{kei} x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[M_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right) - L_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

См. 821.3 и 821.4 с подстановкой $-x$ вместо x.

825.3.
$$\operatorname{ker}' x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[S_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right) + T_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

825.4.
$$\operatorname{kei}' x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[T_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right) - S_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)\right].$$

См. 821.7 и 821.8 с подстановкой $-x$ вместо x.

826.1. При целом положительном n

$$\operatorname{ker}_n x + i\operatorname{kei}_n x = i^{-n} K_n(x\sqrt{i}).$$

826.2.
$$\operatorname{ker}_n x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{ber}_n x + \frac{\pi}{4}\operatorname{bei}_n x + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times \frac{(-1)^{n+p}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

826.3. $$\operatorname{kei}_n x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{bei}_n x - \frac{\pi}{4}\operatorname{ber}_n x + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4} - \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times \frac{(-1)^{n+p}\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p}}{p!\,(n+p)!}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

826.4. $$\operatorname{ker}_n' x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{ber}_n' x - \frac{\operatorname{ber}_n x}{x} + \frac{\pi}{4}\operatorname{bei}_n' x + \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(2p-n)(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n-1}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4} + \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times \frac{(-1)^{n+p}(n+2p)\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!}\cos\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

826.5. $$\operatorname{kei}_n' x = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)\operatorname{bei}_n' x - \frac{\operatorname{bei}_n x}{x} - \frac{\pi}{4}\operatorname{ber}_n' x + \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+p}(2p-n)(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n-1}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4} - \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\times \frac{(-1)^{n+p}(n+2p)\left(\frac{1}{2}x\right)^{n+2p-1}}{p!\,(n+p)!}\sin\frac{(n+2p)\pi}{4}.$$

827.1. Для больших значений x при целом положительном n:

$$\operatorname{ker}_n x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}}\left[L_n(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right) + M_n(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

827.2. $$\operatorname{kei}_n x = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}}\left[M_n(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right) - L_n(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

[См. 823.3 и 823.4.]

827.3. $$\operatorname{ker}'_n x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[S_n(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)+ \right.$$
$$\left. + T_n(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

827.4. $$\operatorname{kei}'_n x = -\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x/\sqrt{2}} \left[T_n(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)- \right.$$
$$\left. - S_n(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$ [См. **823.7** и **823.8.**]

Нужно заметить, что ряды для больших значений x — это асимптотические разложения, и степень точности, которую они дают, ограничена.

Рекуррентные формулы

828.1. $$\operatorname{ber}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}' x - \operatorname{bei}' x).$$

828.2. $$\operatorname{bei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}' x + \operatorname{bei}' x).$$

828.3. $$\operatorname{ber}_2 x = \frac{2\operatorname{bei}' x}{x} - \operatorname{ber} x.$$ **828.4.** $$\operatorname{bei}_2 x = -\frac{2\operatorname{ber}' x}{x} - \operatorname{bei} x.$$

828.5. $$\operatorname{ber}'_2 x = -\operatorname{ber}' x - \frac{2\operatorname{ber}_2 x}{x}.$$

828.6. $$\operatorname{bei}'_2 x = -\operatorname{bei}' x - \frac{2\operatorname{bei}_2 x}{x}.$$

829.1. $$\operatorname{ber}_{n+1} x = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x - \operatorname{bei}_n x) - \operatorname{ber}_{n-1} x.$$

829.2. $$\operatorname{bei}_{n+1} x = -\frac{n\sqrt{2}}{x}(\operatorname{ber}_n x + \operatorname{bei}_n x) - \operatorname{bei}_{n-1} x.$$

829.3. $$\operatorname{ber}'_n x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}_{n-1} x + \operatorname{bei}_{n-1} x) - \frac{n\operatorname{ber}_n x}{x}.$$

829.4. $$\operatorname{bei}'_n x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{ber}_{n-1} x - \operatorname{bei}_{n-1} x) - \frac{n\operatorname{bei}_n x}{x}.$$

830. Формулы **828—829** годятся и для бесселевых функций второго рода, если заменить ber на ker и bei на kei.

Таблицы значений функций от аргумента $xi\sqrt{i}$ см. [8], [11], [16].

Бесселевы функции — Интегралы

835.1. $\int x^n J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n(x).$

835.2. $\int x^{-n} J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n} J_n(x).$

835.3. $\int x^n I_{n-1}(x)\,dx = x^n I_n(x).$

835.4. $\int x^{-n} I_{n+1}(x)\,dx = x^{-n} I_n(x).$

835.5. $\int x^n K_{n-1}(x)\,dx = -x^n K_n(x).$

835.6. $\int x^{-n} K_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n} K_n(x).$

836.1. $\int\limits_0^x x \operatorname{ber} x\,dx = x \operatorname{bei}' x.$

836.2. $\int\limits_0^x x \operatorname{bei} x\,dx = -x \operatorname{ber}' x.$

836.3. $\int\limits_0^x x \operatorname{ker} x\,dx = x \operatorname{kei}' x.$

836.4. $\int\limits_0^x x \operatorname{kei} x\,dx = -x \operatorname{ker}' x.$

837.1. $\int x(\operatorname{ber}_n^2 x + \operatorname{bei}_n^2 x)\,dx = x(\operatorname{ber}_n x \operatorname{bei}_n' x - \operatorname{bei}_n x \operatorname{ber}_n' x).$

837.2. $\int x(\operatorname{ber}_n'^2 x + \operatorname{bei}_n'^2 x)\,dx = x(\operatorname{ber}_n x \operatorname{ber}_n' x + \operatorname{bei}_n x \operatorname{bei}_n' x).$

XI.

СФЕРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ (МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА)

840. $P_0(\mu)=1.$

$P_1(\mu)=\mu.$

$P_2(\mu)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1).$

$P_3(\mu)=\frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu).$

$P_4(\mu)=\frac{1}{2\cdot 4}(5\cdot 7\mu^4-2\cdot 3\cdot 5\mu^2+1\cdot 3).$

$P_5(\mu)=\frac{1}{2\cdot 4}(7\cdot 9\mu^5-2\cdot 5\cdot 7\mu^3+3\cdot 5\mu).$

$$P_6(\mu)=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}(7\cdot 9\cdot 11\mu^6-3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\mu^4+ \\ +3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\mu^2-1\cdot 3\cdot 5).$$

$$P_7(\mu)=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}(9\cdot 11\cdot 13\mu^7-3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\mu^5+ \\ +3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\mu^3-3\cdot 5\cdot 7\mu).$$

. . . .

Коэффициенты в скобках составлены из биноминальных коэффициентов, а затем других множителей.

841.
$$P_m(\mu)=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 1}{m!}\left[\mu^m-\frac{m(m-1)}{2(2m-1)}\mu^{m-2}+\right. \\ \left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 4(2m-1)(2m-3)}\mu^{m-4}-\ldots\right].$$

При нечетном m ряд кончается членом, содержащим μ, а при четном m — членом, не зависящим от μ.

842. $(m+1)P_{m+1}(\mu)=(2m+1)\mu P_m(\mu)-mP_{m-1}(\mu).$

843. $(\mu^2-1)P'_m(\mu)=m\mu P_m(\mu)-mP_{m-1}(\mu).$

844. Для больших значений m

$$P_m(\cos\theta)\approx\left(\frac{2}{m\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\sin\left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{\pi}{4}\right\}.$$

844.1. $P_m(x) = \frac{1}{2^m\, m!} \frac{d^m}{dx^m}(x^2 - 1)^m.$

844.2. $P_m(1) = 1.$

844.3. $P_{2m}(-x) = P_{2m}(x).$

844.4. $P_{2m+1}(-x) = -P_{2m+1}(x).$

845. Первые производные $P'_m(\mu) = \frac{d}{d\mu} P_m(\mu).$

$$P'_0(\mu) = 0.$$
$$P'_1(\mu) = 1.$$
$$P'_2(\mu) = 3\mu.$$
$$P'_3(\mu) = \frac{1}{2}(3\cdot 5\mu^2 - 1\cdot 3).$$
$$P'_4(\mu) = \frac{1}{2}(5\cdot 7\mu^3 - 3\cdot 5\mu).$$
$$P'_5(\mu) = \frac{1}{2\cdot 4}(5\cdot 7\cdot 9\mu^4 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\mu^2 + 1\cdot 3\cdot 5).$$
$$P'_6(\mu) = \frac{1}{2\cdot 4}(7\cdot 9\cdot 11\mu^5 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot 9\mu^3 + 3\cdot 5\cdot 7\mu).$$
$$P'_7(\mu) = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}(7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\mu^6 - 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\mu^4 + $$
$$+ 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\mu^2 - 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7).$$

Коэффициенты в скобках составлены из биномиальных коэффициентов, а затем других множителей.
Таблицу значений многочленов Лежандра см. [16].

XII.

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

850.1. $\int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \int\limits_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1} dx = \Gamma(n).$

$\Gamma(n)$ — *гамма-функция*. Интеграл имеет конечную величину при $n > 0$.

850.2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$

850.3. $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ [n не целое].

850.4. $\Gamma(n) = (n-1)!$, когда n целое положительное.

850.5. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$

850.6. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$ **850.7.** $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

850.8. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ (2n-3)(2n-1)\sqrt{\pi}/2^n$

(n целое положительное).

851.1 $\ln\Gamma(1+x) = -Cx + \frac{S_2x^2}{2} - \frac{S_3x^3}{3} + \frac{S_4x^4}{4} - \cdots \qquad [x^2 < 1],$

где C — *эйлерова постоянная*:

$$C = \lim_{p\to\infty}\left[-\ln p + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}\right] = 0{,}5772157$$

и

$$S_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots = \zeta(p).$$ [См. 480.]

851.2. $\ln\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x\pi}{\sin x\pi} - Cx - \frac{S_3x^3}{3} - \frac{S_5x^5}{5} - \ldots\ [x^2 < 1].$

851.3. $$\ln \Gamma(1+x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x\pi}{\sin x\pi}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+ \\ +(1-C)\,x-(S_3-1)\frac{x^3}{3}-(S_5-1)\frac{x^5}{5}-\dots$$

Для значений x больше чем $\frac{1}{2}$ использовать **850.2** и **850.3** и эти ряды.

851.4. $$\Gamma(x+1)\approx x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}\left[1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\right. \\ \left.-\frac{139}{51\,840x^3}-\frac{571}{2\,488\,320x^4}+\dots\right].$$

Эта формула дает асимптотическое выражение для $x!$, когда x — большое целое число. [См. **11.**]

851.5. $$\ln\Gamma(x+1)\approx\frac{1}{2}\ln(2\pi)-x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x+ \\ +\frac{B_1}{1\cdot 2x}-\frac{B_2}{3\cdot 4x^3}+\frac{B_3}{5\cdot 6x^5}-\dots$$

[B_1, B_2, ... — числа Бернулли]. [См. **45** и **47.1.**]

Это — асимптотический ряд *Стирлинга.* Абсолютная величина ошибки меньше, чем абсолютная величина первого отброшенного члена.

852.1. $$\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx=-C,$$

где $C=0{,}5772157$, как в **851.1.**

853.11. $\Pi(n)=\Gamma(n+1)$. [См. **850.**]

$\Pi(n)$ иногда называют *гауссовой функцией.*

853.12. При n целом положительном $\Pi(n)=n!$.

853.13. $\Pi(0)=1$.

853.21. $$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}=\mathrm{B}(m,\ n)\ \text{(бета-функция)}$$

$[m,\ n>0]$.

854.11. $$\int_0^1\frac{x^p\,dx}{1+x}=(-1)^p\left\{\ln 2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{(-1)^p}{p}\right\}$$

$[p=1,\ 2,\ \dots]$.

854.12. $$\int_0^1\frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}-\frac{1}{p+3q}+\dots\qquad [p,\ q>0].$$

[См. **35.**]

854.21. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

854.22. $$\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

855.11. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x)^p} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad [0<p<1].$$

855.12. $$\int_0^1 \frac{x^p+x^{-p}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\cos\dfrac{p\pi}{2}} \qquad [-1<p<1].$$

855.13. $$\int_0^1 \frac{x^p+x^{-p}}{x^q+x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2q\cos\left(\dfrac{p}{q}\,\dfrac{\pi}{2}\right)} \qquad [-q<p<q].$$

855.14. $$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^q)^{1/q}} = \frac{\pi}{q\sin\dfrac{\pi}{q}} \qquad [q>1].$$

855.15. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x^q)^{p/q}} = \frac{\pi}{q\sin\dfrac{p\pi}{q}} \qquad [0<p<q].$$

855.21. $$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad [m,\ n>0].$$

855.31. $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (m-1)}{3\cdot5\cdot7\ \ldots\ m} \qquad [m\text{ — нечетное целое} > 1],$$

$$= \frac{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (m-1)}{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ m}\,\frac{\pi}{2} \qquad [m\text{ — четное положительное целое}],$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+1\right)} \qquad [m\text{ — произвольное} > -1].$$

[Положить $\sin x = y$ в **858.44** или **858.45.**]

855.32. $$\int_0^1 x^m \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{m+2}\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

[m — произвольное > -1]. [См. **855.31.**]

855.33. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \qquad [n>0].$$

855.34. $$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \qquad [m+1,\ n>0].$$

855.41. $$\int_0^1 x^m(1-x^2)^p\,dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(p+\frac{m+3}{2}\right)} \qquad [p+1,\ m+1>0].$$

855.42. $$\int_0^1 x^m(1-x^n)^p\,dx = \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma\left(p+1+\frac{m+1}{n}\right)}$$

$[p+1,\ m+1,\ n>0]$.

855.51. $$\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = a^{m+n-1}\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad [a,\ m,\ n>0].$$

856.01. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^q} = \frac{\pi}{\sin q\pi} \qquad [0<q<1].$$

Положить $q=1-p$. Тогда

856.02. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(\pi-p\pi)} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad [0<p<1].$$

856.03. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$$

856.04. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{a+x} = \frac{\pi a^{p-1}}{\sin p\pi} \qquad [a>0,\ \ 0<p<1].$$

856.05. $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^p}=\frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}} \qquad [p>1].$$

856.06. $$\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{(1+ax)^2}=\frac{p\pi}{a^{p+1}\sin p\pi} \qquad [a>0,\ 0<p<1].$$

856.07. $$\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}} \qquad [-1<p<1].$$

856.08. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^q}=\frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}} \qquad [0<p<q].$$

856.11. $$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x)^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad [m,\ n>0].$$

856.12. $$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}\,dx}{(a+bx)^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{a^n b^m\,\Gamma(m+n)} \qquad [a,\ b,\ m,\ n>0].$$

856.21. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \dots\ (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ \dots\ (2n-2)}\,\frac{\pi}{2a^{2n-1}} \qquad [a>0;\ n=2,\ 3,\ \dots].$$

856.31. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)\,(b^2+x^2)}=\frac{\pi}{2ab\,(a+b)} \qquad [a,\ b>0].$$

856.32. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)\,(a^n+x^n)}=\frac{\pi}{4a^{n+1}} \qquad [a>0].$$

856.33. $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x}=0.$$

857.01. $$\int_0^\infty \frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arcctg}\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}$$

[$a,\ ac-b^2>0$; см. **500.**]

857.02. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}=\frac{1}{b\sqrt{c}+c\sqrt{a}} \qquad [a,\ c,\ b\sqrt{c}+c\sqrt{a}>0].$$

857.03. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}} = \frac{1}{a\sqrt{c}+b\sqrt{a}} \qquad [a,\ c,\ a\sqrt{c}+b\sqrt{a}>0].$$

857.11. $$\int_0^\infty \frac{dx}{ax^4+2bx^2+c} = \frac{\pi}{2\sqrt{ch}},$$
где $h=2(b+\sqrt{ac})$ $\qquad [a,\ c,\ h>0]$

858.1. $$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

858.2. $$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

858.3. $$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Среднее значение $\sin^2 x$ или $\cos^2 x$ на любом интервале, концы которого кратны $\frac{\pi}{2}$, равно $\frac{1}{2}$.

858.41. $$\int_0^{\pi/2} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{4} \qquad [m=1,\ 2,\ \ldots].$$

858.42. $$\int_0^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad [m=1,\ 2,\ \ldots].$$

858.43. $$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi \qquad [m=1,\ 2,\ \ldots].$$

858.44. $$\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^p x\,dx =$$

$$= \frac{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (p-1)}{3\cdot 5\cdot 7\ \ldots\ p}$$ [p — нечетное целое число >1],

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ p}\,\frac{\pi}{2}$$ [p — четное целое положительное число],

$$= \frac{\pi^{1/2}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}$$ [p — произвольное >-1].

Полагая $m=0$ в **858.502**, получим тот же результат, что и в **858.44**, несколько в другой форме.

858.45. $$\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^p x\,dx = \frac{\pi\Gamma(p+1)}{2^{p+1}\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\right\}^2} \qquad [p>-1].$$

858.46. $$\int_0^{\pi} \sin^p x\,dx = \frac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \qquad [p>-1],$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx.$$

[См. 858.44. Можно использовать также и 858.45.]

858.47. $$\int_0^{\pi} x\sin^p x\,dx = \frac{\pi^{3/2}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \qquad [p>-1],$$
$$= \pi\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,dx.$$

[См. 858.44. Можно использовать также и 858.45.]

858.48. $$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^p x\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}} \qquad [p^2<1].$$

858.491. $$\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x} = 2G = 2\cdot 0{,}915\,9656. \qquad \text{[См. 48.32.]}$$

858.492. $$\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

858.493. $$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2\,dx}{\sin^2 x} = \pi\ln 2.$$

858.501. $$\int_0^{\pi/2} \cos^m x\cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \qquad [m+1>0].$$

858.502. $$\int_0^{\pi/2} \cos^p x \cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}$$
$[p+1,\ p+m+2,\ p-m+2>0]$.

858.503. $$\int_0^{\pi} \sin^m x \sin mx\,dx = \frac{\pi}{2^m} \sin\frac{m\pi}{2} \qquad [m+1>0].$$

858.504. $$\int_0^{\pi} \sin^p x \sin mx\,dx = \frac{\pi}{2^p} \frac{\sin\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}$$
$[p+1,\ p+m+2,\ p-m+2>0]$.

858.505. $$\int_0^{\pi} \sin^m x \cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^m} \cos\frac{m\pi}{2} \qquad [m+1>0].$$

858.506. $$\int_0^{\pi} \sin^p x \cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^p} \frac{\cos\frac{m\pi}{2}\,\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+m}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-m}{2}+1\right)}$$
$[p+1,\ p+m+2,\ p-m+2>0]$.

858.511. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b+1} x\,dx = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!\,2}.$$

858.512. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a+1} x \cos^{2b} x\,dx = \frac{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2a)\cdot1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2b-1)}{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2a+2b+1)}.$$

858.513. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a} x \cos^{2b+1} x\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2a-1)\cdot2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2b)}{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2a+2b+1)}.$$

858.514. $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a} x \cos^{2b} x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2a-1)\cdot1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2b-1)}{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2a+2b)}.$$

В **858.511—.514** a и b — целые положительные числа.

858.515. $$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)}$$
[p и q произвольные числа >-1].

858.516. $\int\limits_0^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0 \qquad [m \neq n],$

$= \frac{\pi}{2} \qquad [m = n]$

[m и n — целые числа].

858.517. $\int\limits_0^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0 \qquad [m \neq n],$

$= \frac{\pi}{2} \qquad [m = n]$

[m и n — целые числа].

858.518. $\int\limits_0^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \qquad [m = n],$

$= 0 \qquad [m \neq n;\ (m+n)$ четно$]$,

$= \frac{2m}{m^2 - n^2} \qquad [m \neq n;\ (m+n)$ нечетно$]$

[m и n — целые числа].

858.520. $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \sin x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \cos x} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{\arccos a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

В формулах **858.520—858.535** $0 < a < 1$ и, следовательно, углы $\arcsin a$ и $\arccos a$ лежат в первом квадранте.

858.521. $$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - a \sin x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - a \cos x} = \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.522. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a \sin x} = \frac{\pi - 2\arcsin a}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2\arccos a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.523. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 - a \sin x} = \frac{\pi + 2\arcsin a}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

[См. примечание к **858.520.**]

858.524. $$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1 \pm a \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

858.525. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1\pm a\sin x}=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1\pm a\cos x}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$

858.530. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(1+a\sin x)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(1+a\cos x)^2}=\frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}}-\frac{a}{1-a^2}.$

[См. примечание к **858.520.**]

858.531. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(1-a\sin x)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(1-a\cos x)^2}=\frac{\frac{\pi}{2}+\arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}}+\frac{a}{1-a^2}.$

[См. примечание к **858.520.**]

858.532. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1+a\sin x)^2}=\frac{\pi-2\arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}}-\frac{2a}{1-a^2}.$

[См. примечание к **858.520.**]

858.533. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1-a\sin x)^2}=\frac{\pi+2\arcsin a}{(1-a^2)^{3/2}}+\frac{2a}{1-a^2}.$

[См. примечание к **858.520.**]

858.534. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1\pm a\cos x)^2}=\frac{\pi}{(1-a^2)^{3/2}}.$

858.535. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1\pm a\sin x)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1\pm a\cos x)^2}=\frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}}.$

858.536. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos mx\,dx}{1+a\cos x}=\frac{\pi\left(\sqrt{1-a^2}-1\right)^m}{a^m\sqrt{1-a^2}}\quad[0<a<1;\ m=0,1,2,\ldots].$

858.537. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{ab}\qquad[a,\ b>0].$

858.540. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\cos^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}.$

858.541. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-a^2\sin^2 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-a^2\cos^2 x}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}\qquad[a^2<1].$

858.542. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+a^2\sin^2 x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+a^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{2+a^2}{(1+a^2)^{3/2}}.$$

858.543. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a^2\sin^2 x)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1-a^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{2-a^2}{(1-a^2)^{3/2}} \qquad [a^2<1].$$

858.544. $$\int_0^{\pi} \frac{x\sin mx\,dx}{1+\cos^2 mx} = \frac{\pi^2}{4m^2} \qquad [m>0].$$

858.545. $$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\cos\varphi\sin x} = \frac{\pi\varphi}{\sin\varphi}.$$

858.546. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{a+\sqrt{a^2-b^2}} \qquad [a,\ a^2-b^2>0].$$

858.550. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \qquad [ab>0].$$

858.551. $$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{ab} \qquad [ab>0].$$

858.552. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2+b^2\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\pi}{2a(a+b)} \qquad [a,\ b>0].$$

858.553. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2b(a+b)} \qquad [a,\ b>0].$$

858.554. $$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{a^2+b^2}{a^3b^3} \qquad [ab>0].$$

858.555. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3b} \qquad [ab>0].$$

858.556. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^3} \qquad [ab>0].$$

858.560. $\int\limits_0^\infty \sin(a^2x^2)\,dx = \int\limits_0^\infty \cos(a^2x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{2}}$ $[a > 0]$.

858.561. $\int\limits_0^\infty \sin\frac{\pi x^2}{2}\,dx = \int\limits_0^\infty \cos\frac{\pi x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}$.

[*Интегралы Френеля.*]

858.562. $\int\limits_0^\infty \sin(x^p)\,dx = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\sin\frac{\pi}{2p}$ $[p > 1]$.

858.563. $\int\limits_0^\infty \cos(x^p)\,dx = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\cos\frac{\pi}{2p}$ $[p > 1]$.

858.564. $\int\limits_0^\infty \sin a^2x^2 \cos mx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{m^2}{4a^2}\right)$ $[a > 0]$.

858.565. $\int\limits_0^\infty \cos a^2x^2 \cos mx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{m^2}{4a^2}\right)$ $[a > 0]$.

858.601. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, 0 или $-\frac{\pi}{2}$ в зависимости от того, будет ли m положительным, нулем или отрицательным.

858.611. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx - \cos nx}{x}\,dx = \ln\frac{n}{m}$ $[m,\ n > 0]$.

858.621. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} mx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, 0 или $-\frac{\pi}{2}$ в зависимости от того, будет ли m положительным, нулем или отрицательным.

858.630. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 mx}{x}\,dx = \infty$.

858.631. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 mx - \sin^2 nx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{m}{n}$ $[m,\ n \neq 0]$.

858.632. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 mx - \cos^2 nx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{n}{m}$ $\quad [m,\ n \neq 0]$.

858.641. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 mx}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$ $\quad [m > 0]$.

858.649. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2p+1} mx}{x}\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2p-1)}{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2p)}\,\frac{\pi}{2}$

$[p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ m > 0]$.

858.650. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{x^2}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2}\,dx = \infty.$

858.651. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}\,dx = (n-m)\,\frac{\pi}{2}$ $\quad [n > m > 0]$.

858.652. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x^2}\,dx = |\,m\,|\,\frac{\pi}{2}.$ [См. 858.711.]

858.653. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 mx}{x^2}\,dx = \frac{3}{4}\,m\ln 3.$

858.654. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 mx}{x^2}\,dx = |\,m\,|\,\frac{\pi}{4}.$

858.659. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2p} mx}{x^2}\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\ \ldots\ (2p-3)}{2\cdot4\cdot6\ \ldots\ (2p-2)}\,\frac{|\,m\,|\,\pi}{2}$ $\quad [p = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots]$.

858.661. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 mx}{x^3}\,dx = \frac{3}{8}\,m^2\pi$ $\quad [m > 0]$.

858.701. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx \cos nx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ $\quad [m > n > 0]$,

$= \frac{\pi}{4}$ $\quad [m = n > 0]$,

$= 0$ $\quad [n > m > 0]$.

858.702. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx \sin nx}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{m+n}{m-n}$ $[m > n > 0]$.

858.703. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx \cos nx}{x}\,dx = \infty.$

858.704. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin mx}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$ $[2a > m > 0]$,

$= \frac{\pi}{8}$ $[2a = m > 0]$,

$= 0$ $[m > 2a > 0]$.

858.711. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx \sin nx}{x^2}\,dx = \frac{m\pi}{2}$ $[n \geqslant m > 0]$,

$= \frac{n\pi}{2}$ $[m \geqslant n > 0]$.

858.712. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin mx}{x^2}\,dx = \frac{m+2a}{4}\ln|m+2a| +$

$+ \frac{m-2a}{4}\ln|m-2a| - \frac{m}{2}\ln m$ $[m > 0]$.

858.713. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \cos mx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(a - \frac{m}{2}\right)$ $\left[a > \frac{m}{2} > 0\right]$,

$= 0$ $\left[\frac{m}{2} \geqslant a \geqslant 0\right]$.

858.721. $\int\limits_0^\infty \frac{1-\cos mx}{x^2}\,dx = \frac{\pi|m|}{2}.$

858.731. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 ax \sin mx}{x^3}\,dx = \frac{\pi am}{2} - \frac{\pi m^2}{8}$ $\left[a \geqslant \frac{m}{2} > 0\right]$,

$= \frac{\pi a^2}{2}$ $\left[\frac{m}{2} \geqslant a > 0\right]$.

858.801. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}}$ $[m > 0]$.

858.802. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{x\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{2\pi m}$ $[m > 0]$.

858.811. $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x^p}\,dx = \frac{\pi m^{p-1}}{2\sin\frac{p\pi}{2}\,\Gamma(p)}$ $[0<p<2;\ m>0]$.

К тому же численному результату приводит другая формула:

858.812. $\int_0^\infty x^{q-1}\sin mx\,dx = \frac{\Gamma(q)}{m^q}\sin\frac{q\pi}{2}$

$[0<q^2<1;\ m>0]$.

Для q, близкого к нулю и равного нулю, пользоваться формулами **858.601** или **858.811**.

858.813. $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^p}\,dx = \frac{\pi m^{p-1}}{2\cos\frac{p\pi}{2}\,\Gamma(p)}$ $[0<p<1;\ m>0]$.

К тому же численному результату приводит другая формула:

858.814. $\int_0^\infty x^{q-1}\cos mx\,dx = \frac{\Gamma(q)}{m^q}\cos\frac{q\pi}{2}$ $[0<q<1;\ m>0]$.

858.821. $\int_0^\infty \frac{\sin mx\cos nx}{\sqrt{x}}\,dx =$

$= \left\{\frac{1}{\sqrt{m+n}}+\frac{1}{\sqrt{m-n}}\right\}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ $[m>n>0]$,

$= \left\{\frac{1}{\sqrt{m+n}}-\frac{1}{\sqrt{n-m}}\right\}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ $[n>m>0]$.

858.822. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{m\pi}$ $[m>0]$.

858.823. $\int_0^\infty \frac{\sin^3 mx}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{(3\sqrt{3}-1)}{4}\sqrt{\frac{\pi}{6m}}$ $[m>0]$.

858.824. $\int_0^\infty \frac{\sin^3 mx}{x\sqrt{x}}\,dx = \frac{(3-\sqrt{3})}{4}\sqrt{2m\pi}$ $[m>0]$.

858.831. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{\pi^2}{4}$.

858.832. $\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{a}{x}\sin mx\,dx = \frac{\pi}{2m}(1-e^{-am})$ $[a,\ m>0]$.

858.841. $\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = K(k)$ $[0<k<1]$.

858.842. $\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x\sqrt{1-k^2\cos^2 x}} = K(k)$ $[0<k<1]$.

858.843. $\int_0^\infty \frac{\sin x\cos x\,dx}{x\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{k^2}\{E(k)-(1-k^2)K(k)\}$ $[0<k<1]$.

Для **858.841—.843** см. **773.1, 774.1.**

859.001. $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}$ $[a>0;\ m\geqslant 0]$.

859.002. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4a}(1-e^{-2ma})$ $[a>0;\ m\geqslant 0]$.

859.003. $\int_0^\infty \frac{\cos^2 mx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4a}(1+e^{-2ma})$ $[a>0;\ m\geqslant 0]$.

859.004. $\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma}$ $[a\geqslant 0;\ m>0]$.

859.005. $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(a^2+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ma})$ $[a>0;\ m\geqslant 0]$.

859.006. $\int_0^\infty \frac{\sin mx\sin nx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}\operatorname{sh} na$ $[a>0;\ m\geqslant n\geqslant 0]$.

859.007. $\int_0^\infty \frac{\cos mx\cos nx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}\operatorname{ch} na$ $[a>0;\ m\geqslant n\geqslant 0]$.

859.008. $\int_0^\infty \frac{x\sin mx\cos nx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma}\operatorname{ch} na$ $[a>0;\ m>n>0]$,

$= -\frac{\pi}{2}e^{-na}\operatorname{sh} ma$ $[a>0;\ n>m>0]$.

859.011. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)\,e^{-ma} \qquad [a,\ m>0].$$

859.012. $$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi m}{4a}\,e^{-ma} \qquad [a,\ m>0].$$

859.013. $$\int_0^\infty \frac{x^2\cos mx}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)\,e^{-ma} \qquad [a,\ m>0].$$

859.014. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(a^2+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a^4}\left(1-\frac{2+ma}{2}\,e^{-ma}\right) \qquad [a,\ m>0].$$

859.021. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\,dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \left(\frac{e^{-mb}}{b}-\frac{e^{-ma}}{a}\right)\frac{\pi}{2(a^2-b^2)}$$

$$[a,\ b,\ m>0;\ a\neq b].$$

859.022. $$\int_0^\infty \frac{x\sin mx\,dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \left(\frac{e^{-mb}-e^{-ma}}{a^2-b^2}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$[a,\ b,\ m>0;\ a\neq b].$$

859.031. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^4+4a^4}\,dx = \frac{\pi e^{-ma}}{8a^3}(\sin ma+\cos ma).$$

859.032. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^4+4a^4)}\,dx = \frac{\pi}{8a^4}(1-e^{-ma}\cos ma).$$

859.033. $$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^4+4a^4}\,dx = \frac{\pi}{4a^2}\,e^{-ma}\sin ma.$$

859.034. $$\int_0^\infty \frac{x^2\cos mx}{x^4+4a^4}\,dx = \frac{\pi}{4a}\,e^{-ma}(\cos ma-\sin ma).$$

859.035. $$\int_0^\infty \frac{x^3\sin mx}{x^4+4a^4}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-ma}\cos ma.$$

Для **859.031—.035** $a,\ m>0$.

859.041. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = K_0(ma)$. [См. **815.1.**] $[ma>0]$.

859.042. $\int\limits_0^1 \frac{\cos mx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}J_0(m)$.

859.043. $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{a\pm b\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{a+b}}K\left(\sqrt{\frac{2b}{a+b}}\right)$ $[0<b<a]$.

$\left[\frac{2b}{a+b}=k^2=\sin^2\theta.\right.$ См. **773.1.**$\left.\right]$

859.100. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2a\sin x+a^2} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2a\cos x+a^2} =$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|} = \frac{\arccos\frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|}.$$

[См. примечание к **859.112.**]

859.101. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-2a\sin x+a^2} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} =$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|}.$$

[См. примечание к **859.112.**]

859.111. $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1+2a\sin x+a^2} = \frac{\pi-2\arcsin\frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|} = \frac{2\arccos\frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|}.$

[См. примечание к **859.112.**]

859.112. $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{1-2a\sin x+a^2} = \frac{\pi+2\arcsin\frac{2a}{1+a^2}}{|1-a^2|}.$

В **859.100—.112** $a>0$; $a\neq 1$; arcsin и arccos везде в первом квадранте.

859.113. $\int\limits_0^\pi \frac{dx}{a^2\pm 2ab\cos x+b^2} = \frac{\pi}{|a^2-b^2|}$ $[a^2\neq b^2]$.

859.121. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{2}{a}\operatorname{Arth} a=\frac{1}{a}\ln\frac{1+a}{1-a} \qquad [a^2<1],$$
$$=\frac{2}{a}\operatorname{Arcth} a=\frac{1}{a}\ln\frac{a+1}{a-1} \qquad [a^2>1].$$

859.122. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi a^m}{1-a^2} \qquad [a^2<1;\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots],$$
$$=\frac{\pi}{a^m(a^2-1)} \qquad [a^2>1;\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots].$$

859.123. $$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{a}\ln(1+a) \qquad [a^2\leqslant 1],$$
$$=\frac{\pi}{a}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right) \qquad [a^2\geqslant 1].$$

859.124. $$\int_0^{\pi} \frac{(a-b\cos x)\,dx}{a^2-2ab\cos x+b^2}=\frac{\pi}{a} \qquad [a>b>0],$$
$$=0 \qquad [b>a>0].$$

859.131. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{a^2-2ab\cos x+b^2}=\frac{\pi}{2a^2} \qquad [a>b>0],$$
$$=\frac{\pi}{2b^2} \qquad [b>a>0].$$

859.132. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1+a^2}{1-a^2}\right) \qquad [a^2<1],$$
$$=\frac{\pi}{2a^2}\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right) \qquad [a^2>1].$$

859.141. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\sin mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi a^{m-1}}{2} \qquad [a^2<1;\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots],$$
$$=\frac{\pi}{2a^{m+1}} \qquad [a^2>1;\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots].$$

859.142. $$\int_0^{\pi} \frac{\cos x\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi a^{m-1}}{2}\left(\frac{1+a^2}{1-a^2}\right) \qquad [a^2<1;\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots],$$
$$=\frac{\pi}{2a^{m+1}}\left(\frac{a^2+1}{a^2-1}\right) \qquad [a^2>1;\ m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots].$$

859.151. $$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{a^2-2ab\cos x+b^2}}=\frac{2}{a} \qquad [a>b>0],$$
$$=\frac{2}{b} \qquad [b>a>0].$$

859.161. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2}=\frac{\varphi}{2\sin\varphi} \qquad [-\pi<\varphi<\pi].$$

При $\varphi=0$:

859.162. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x+x^2}=\frac{1}{2}. \qquad [\text{См. } \mathbf{90.2.}]$$

859.163. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+2x\cos\varphi+x^2}=\frac{\varphi}{\sin\varphi} \qquad [-\pi<\varphi<\pi].$$

При $\varphi=0$:

859.164. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+2x+x^2}=1. \qquad [\text{См. } \mathbf{90.2.}]$$

859.165. $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1-2x^2\cos\varphi+x^4}=\frac{\pi}{4\sin\frac{\varphi}{2}} \qquad [0<\varphi<\pi].$$

859.166. $$\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1+2x\cos\varphi+x^2}=\frac{\pi\sin p\varphi}{\sin p\pi\sin\varphi} \qquad [0<p<1;\ 0<\varphi<\pi].$$

860.01. $$\int_0^{\infty} e^{-ax}\,dx=\frac{1}{a} \quad [a>0].$$ **860.02.** $$\int_0^{\infty} xe^{-ax}dx=\frac{1}{a^2} \quad [a>0].$$

860.03. $$\int_0^{\infty} x^2e^{-ax}dx=\frac{2}{a^3} \qquad [a>0].$$

860.04. $$\int_0^{\infty} x^{1/2}e^{-ax}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}} \qquad [a>0].$$

860.05. $$\int_0^{\infty} x^{-1/2}e^{-ax}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \qquad [a>0].$$

860.06. $$\int_0^\infty x^{p-\frac{1}{2}} e^{-ax} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)}{2^p} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{p+\frac{1}{2}}}$$

$[a > 0;\ p = 1, 2, \ldots]$. [См. **860.07**, второй вид ответа.]

860.07. $$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad [a > 0;\ n = 1, 2, \ldots],$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \qquad [a > 0;\ n+1 > 0].$$

860.11. $$\int_0^\infty e^{-r^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad [r > 0].$$

860.12. $$\int_0^\infty x e^{-r^2x^2} dx = \frac{1}{2r^2}.$$

860.13. $$\int_0^\infty x^2 e^{-r^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4r^3} \qquad [r > 0].$$

860.15. $$\int_0^\infty x^{2a+1} e^{-r^2x^2} dx = \frac{a!}{2r^{2a+2}} \qquad [r > 0;\ a = 1, 2, \ldots].$$

860.16. $$\int_0^\infty x^{2a} e^{-r^2x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2a-1)}{2^{a+1} r^{2a+1}} \sqrt{\pi} \qquad [r > 0;\ a = 1, 2, \ldots].$$

860.17. $$\int_0^\infty x^n e^{-r^2x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2r^{n+1}} \qquad [n+1,\ r > 0]$$

(положив $m = 2$ в **860.19**).

860.18. $$\int_0^\infty e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \qquad [r,\ m > 0]$$

(положив $n = 0$ в **860.19**).

860.19. $$\int_0^\infty x^n e^{-(rx)^m} dx = \frac{1}{mr^{n+1}} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) \qquad [n+1,\ r,\ m > 0].$$

Все предыдущие формулы **860** могут быть получены из этой при соответствующих значениях n, r и m.

860.21. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\,dx = \infty.$

860.22. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$ $[a,\ b > 0].$

860.23. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^c} - e^{-bx^c}}{x}\,dx = \frac{1}{c}\ln\frac{b}{a}$ $[a,\ b,\ c > 0].$

860.24. $\int\limits_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2}\,dx = \sqrt{a\pi}$ $[a > 0].$

860.25. $\int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2 - \frac{b^2}{x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,e^{-2ab}$ $[a,\ b > 0].$

860.30. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{e^{ax} - 1} = \infty$ $[a > 0].$

860.31. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{ax} - 1} = \frac{\pi^2}{6a^2}$ $[a > 0].$

860.32. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{e^{ax} - 1} = \frac{2\zeta(3)}{a^3} = \frac{2\cdot 1,202057}{a^3}$ $[a > 0].$

[См. **48.003.**]

860.33. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{e^{ax} - 1} = \frac{\pi^4}{15a^4}$ $[a > 0].$

860.37. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n-1}dx}{e^{ax} - 1} = \frac{(2n-1)!}{a^{2n}}\,\zeta(2n) = \frac{2^{2n-2}\pi^{2n}}{na^{2n}}\,B_n$

$[a > 0;\ n = 1,\ 2,\ \ldots].$ [См. **45.**]

860.38. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n}dx}{e^{ax} - 1}.$ [См. **860.39.**]

860.39. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{e^{ax}-1}=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\left[1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\right]=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\zeta(p)$$

$[a>0, p>1$; p не обязательно целое число$]$. [См. **48.09.**]

Таблицу ζ-функции Римана, содержащую и дробные значения аргумента p, см. [16].

860.40. $$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax}+1}=\frac{\ln 2}{a} \qquad [a>0].$$ [См. **601.01.**]

860.41. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^{ax}+1}=\frac{\pi^2}{12a^2} \qquad [a>0].$$ [См. **48.22.**]

860.42. $$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^{ax}+1}=\frac{2!}{a^3}\frac{3}{4}\zeta(3)=\frac{3\cdot 1,202057}{2a^3} \qquad [a>0].$$

[См. **48.003** и **48.23.**]

860.43. $$\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^{ax}+1}=\frac{7}{120}\frac{\pi^4}{a^4} \qquad [a>0].$$

860.47. $$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}dx}{e^{ax}+1}=\frac{2^{2n-1}-1}{2n}\frac{\pi^{2n}}{a^{2n}}B_n \qquad [a>0;\ n=1,\ 2,\ \ldots].$$

[См. **45** и **48.28.**]

860.48. $$\int_0^\infty \frac{x^{2n}dx}{e^{ax}+1}.$$ [См. **860.49.**]

860.49. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{e^{ax}+1}=\frac{\Gamma(p)}{a^p}\left(1-\frac{2}{2^p}\right)\zeta(p)$$

$[a,\ p>0$; p не обязательно целое число$]$.

[См. **48.29.**] [Для $p=1$ см. **860.40.**]

860.500. $$\int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{sh} ax}=\int_0^\infty \frac{2dx}{e^{ax}-e^{-ax}}=\infty.$$

860.501. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\operatorname{sh} ax}=\frac{\pi^2}{4a^2} \qquad [a>0].$$

860.502. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{\operatorname{sh} ax} = 2\,(2!)\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots\right)/a^3,$

$= \frac{7}{2a^3}\zeta(3) = 4\cdot 1{,}05180/a^3.$ [См. 48.13.]

860.503. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{\pi^4}{8a^4}$ $[a>0]$.

860.504. $\int\limits_0^\infty \frac{x^4dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{93}{2}\cdot 1{,}03693/a^5.$

860.507. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n-1}dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{\pi^{2n}(2^{2n}-1)}{2na^{2n}}B_n$ $[a>0;\ n=1,\ 2,\ \ldots]$.

[См. 45 и 48.18.]

860.508. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n}dx}{\operatorname{sh} ax}$. [См. 860.509.]

860.509. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{2\Gamma(p)}{a^p}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\zeta(p)$

$[a>0;\ p>1;\ p$ не обязательно целое число$]$.
[См. 48.19.]

860.511. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \infty.$

860.512. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{\pi^2}{6a^3}$ $[a>0]$.

860.513. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{3}{2}\cdot 1{,}202057/a^4.$ [См. 48.003]

860.514. $\int\limits_0^\infty \frac{x^4dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{\pi^4}{30a^5}$ $[a>0]$.

860.518. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n}dx}{\operatorname{sh}^2 ax} = \frac{\pi^{2n}}{a^{2n+1}}B_n$ $[a>0]$. [См. 45.]

860.519. $$\int_0^\infty \frac{x^p dx}{\text{sh}^2 ax} = \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p-1}a^{p+1}}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots\right) = \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p-1}a^{p+1}}\zeta(p)$$

[$a > 0$; $p > 1$; p не обязательно целое число]. [См. **48.09.**]

860.530. $$\int_0^\infty \frac{dx}{\text{ch}\, ax} = \int_0^\infty \frac{2dx}{e^{ax}+e^{-ax}} = \frac{\pi}{2a}$$ [$a > 0$]. [См. **679.10.**]

860.531. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\text{ch}\, ax} = 2G/a^2 = 2\cdot 0{,}9159656/a^2.$$ [См. **48.32.**]

860.532. $$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\text{ch}\, ax} = \frac{\pi^3}{8a^3}$$ [$a > 0$].

860.533. $$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\text{ch}\, ax} = 12\cdot 0{,}98894455/a^4.$$ [См. **48.34.**]

860.534. $$\int_0^\infty \frac{x^4 dx}{\text{ch}\, ax} = \frac{5}{32}\frac{\pi^5}{a^5}$$ [$a > 0$].

860.538. $$\int_0^\infty \frac{x^{2n} dx}{\text{ch}\, ax} = \frac{\pi^{2n+1}}{(2a)^{2n+1}} E_n$$ [$a > 0$; $n = 0, 1, 2, \ldots$]. [См. **45.**]

860.539. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{\text{ch}\, ax} = \frac{2\Gamma(p)}{a^p}\left(1-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{7^p}+\ldots\right)$$ [a, $p > 0$].

Для целых значений p см. **48.31—.39**. Для p нецелых сумму ряда приходится находить численно.

860.541. $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\text{ch}^2 ax} = \frac{\ln 2}{a^2}.$$

860.542. $$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\text{ch}^2 ax} = \frac{\pi^2}{12a^3}$$ [$a > 0$].

860.543. $$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{\text{ch}^2 ax} = \frac{9}{8}\cdot 1{,}202057/a^4 = \frac{9}{8}\frac{\zeta(3)}{a^4}.$$

860.544. $\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{7}{240}\,\frac{\pi^4}{a^5}$ $[a > 0]$.

860.548. $\int_0^\infty \frac{x^{2n}\,dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{(2^{2n-1}-1)}{2^{2n-1}a^{2n+1}}\,\pi^{2n} B_n$ $[a > 0;\ n = 1,\ 2,\ \ldots]$.

[См. **45.**]

860.549. $\int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{\operatorname{ch}^2 ax} = \frac{\left(1 - \frac{2}{2^p}\right)}{2^{p-1}}\,\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\,\zeta(p)$ $[a > 0;\ p > 1]$.

При $p = 1$ см. **860.541.** [См. **48.29.**]

860.80. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin mx\,dx = \frac{m}{a^2 + m^2}$ $[a > 0]$.

860.81. $\int_0^\infty xe^{-ax} \sin mx\,dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2}$ $[a > 0]$.

860.82. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin mx\,dx = \frac{2m\,(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3}$ $[a > 0]$.

860.89. $\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \sin mx\,dx = \frac{\Gamma(p) \sin p\theta}{(a^2 + m^2)^{p/2}}$ $[p,\ a,\ m > 0]$,

где $\sin\theta = m/r$, $\cos\theta = a/r$, $r = (a^2 + m^2)^{1/2}$.

860.90. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos mx\,dx = \frac{a}{a^2 + m^2}$ $[a > 0]$.

860.91. $\int_0^\infty xe^{-ax} \cos mx\,dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2}$ $[a > 0]$.

860.92. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos mx\,dx = \frac{2a\,(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3}$ $[a > 0]$.

860.99. $\int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos mx\,dx = \frac{\Gamma(p) \cos p\theta}{(a^2 + m^2)^{p/2}}$

$[a,\ p > 0]$, определение θ см. в **860.89.**

861.01. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \sin mx\, dx = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} \qquad [a > 0].$$

861.02. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \cos mx\, dx = \infty.$$

861.03. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} (1 - \cos mx)\, dx = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right) \qquad [a > 0].$$

861.04. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} (\cos mx - \cos nx)\, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + n^2}{a^2 + m^2} \qquad [a > 0].$$

861.05. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + m^2}{a^2 + m^2} \qquad [a,\ b > 0].$$

861.06. $$\int_0^\infty e^{-ax} \cos^2 mx\, dx = \frac{a^2 + 2m^2}{a (a^2 + 4m^2)} \qquad [a > 0].$$

861.10. $$\int_0^\infty e^{-ax} \sin^2 mx\, dx = \frac{2m^2}{a (a^2 + 4m^2)} \qquad [a > 0].$$

861.11. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{4} \ln \left(1 + \frac{4m^2}{a^2}\right) \qquad [a > 0].$$

861.12. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x^2} \sin^2 mx\, dx = m \operatorname{arctg} \frac{2m}{a} - \frac{a}{4} \ln \left(1 + \frac{4m^2}{a^2}\right) \qquad [a > 0].$$

861.13. $$\int_0^\infty e^{-ax} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{2amn}{\{a^2 + (m - n)^2\} \{a^2 + (m + n)^2\}} \qquad [a > 0].$$

861.14. $$\int_0^\infty e^{-ax} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{m (a^2 + m^2 - n^2)}{\{a^2 + (m - n)^2\} \{a^2 + (m + n)^2\}} \qquad [a > 0].$$

861.15. $$\int_0^\infty e^{-ax} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{a (a^2 + m^2 + n^2)}{\{a^2 + (m - n)^2\} \{a^2 + (m + n)^2\}} \qquad [a > 0].$$

861.16. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{4} \ln \frac{a^2+(m+n)^2}{a^2+(m-n)^2} \quad [a>0].$$

861.20. $$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos mx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad [a>0].$$

861.21. $$\int_0^\infty xe^{-a^2x^2} \sin mx \, dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad [a>0].$$

861.22. $$\int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2}}{x} \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{m}{2a}\right) \quad [a>0].$$

[См. **590.**] Таблицы см. [19б].

861.31. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cos mx \, dx = \frac{(a+\sqrt{a^2+m^2})^{1/2}\sqrt{\pi}}{(a^2+m^2)^{1/2}\sqrt{2}} \quad [a>0].$$

861.32. $$\int_0^\infty e^{-ax} \sin \sqrt{mx} \, dx = \frac{\sqrt{\pi m}}{2a\sqrt{a}} e^{-\frac{m}{4a}} \quad [a,\ m>0].$$

861.33. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{mx} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{m}{4a}} \quad [a,\ m>0].$$

861.41. $$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(px+q) \, dx = \frac{a \sin q + p \cos q}{a^2+p^2} \quad [a>0].$$

861.42. $$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(px+q) \, dx = \frac{a \cos q - p \sin q}{a^2+p^2} \quad [a>0].$$

861.51. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

861.61. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{\operatorname{sh} ax} \, dx = \int_0^\infty \frac{2 \sin mx}{e^{ax}-e^{-ax}} \, dx = \frac{\pi}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi m}{2a} \quad [a>0].$$

861.62. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{\operatorname{ch} ax} \, dx = \frac{\pi}{2a \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2a}} \quad [a>0].$$

861.63. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} qx}\,dx = \frac{\pi}{2q}\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2q} \qquad [-q<p<q;\ q>0].$$

861.64. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} qx}\,dx = \frac{\pi}{2q\cos\frac{\pi p}{2q}} \qquad [-q<p<q;\ q>0].$$

861.65. $$\int_0^\infty \operatorname{th} qx \sin mx\,dx = \frac{\pi}{2q\operatorname{sh}\frac{\pi m}{2q}} \qquad [q>0].$$

861.66. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{\operatorname{th} qx}\,dx = \frac{\pi}{2q\operatorname{th}\frac{\pi m}{2q}} \qquad [q>0].$$

861.71. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx\cos nx}{\operatorname{sh} ax}\,dx = \frac{\pi\operatorname{sh}\frac{m\pi}{a}}{2a\left(\operatorname{ch}\frac{m\pi}{a}+\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}\right)} \qquad [a>0].$$

861.72. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx\cos nx}{\operatorname{ch} ax}\,dx = \frac{\pi\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2a}\operatorname{ch}\frac{n\pi}{2a}}{a\left(\operatorname{ch}\frac{m\pi}{a}+\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}\right)} \qquad [a>0].$$

861.73. $$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{\operatorname{ch}^2 ax}\,dx = \frac{\pi m}{2a^2\operatorname{sh}\frac{\pi m}{2a}} \qquad [a>0].$$

861.81. $$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{\operatorname{ch} ax}\,dx = \frac{\pi^2}{4a^2}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi m}{2a}}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi m}{2a}\right)} \qquad [a>0].$$

861.82. $$\int_0^\infty \frac{x\cos mx}{\operatorname{sh} ax}\,dx = \frac{\pi^2}{4a^2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi m}{2a}\right)} \qquad [a>0].$$

861.83. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{th} ax}{x}\cos mx\,dx = \ln\operatorname{cth}\frac{\pi m}{4a} \qquad [a,\ m>0].$$

862.01. $$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sh} bx\,dx=\frac{b}{a^2-b^2}\qquad [a>b\geqslant 0].$$

862.02. $$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{ch} bx\,dx=\frac{a}{a^2-b^2}\qquad [a>b\geqslant 0].$$

862.03. $$\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sh} bx\,dx=\frac{b\sqrt{\pi}}{4a^3}\,e^{\frac{b^2}{4a^2}}\qquad [a>0].$$

862.04. $$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sh}(b\sqrt{x})\,dx=\frac{b\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}}\qquad [a>0].$$

862.11. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{ax}+1}\,dx=\frac{1}{2m}-\frac{\pi}{2a\operatorname{sh}(\pi m/a)}\qquad [a>m>0].$$

862.12. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{ax}-1}\,dx=\frac{\pi}{2a\operatorname{th}(\pi m/a)}-\frac{1}{2m}\qquad [a>m>0].$$

862.21. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} px}{e^{ax}+1}\,dx=\frac{\pi}{2a\sin(\pi p/a)}-\frac{1}{2p}\qquad [a>p>0].$$

862.22. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} px}{e^{ax}-1}\,dx=\frac{1}{2p}-\frac{\pi}{2a\operatorname{tg}(\pi p/a)}\qquad [a>p>0].$$

862.31. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx\,dx}{(1+x^2)\operatorname{sh}\pi x}=-\frac{m}{2e^m}+(\operatorname{sh} m)\ln(1+e^{-m})\qquad [m>0].$$

862.32. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}\frac{\pi x}{2}}{1+x^2}\sin mx\,dx=\frac{m}{e^m}-(\operatorname{sh} m)\ln(1-e^{-2m})\qquad [m>0].$$

862.33. $$\int_0^\infty \frac{\sin mx\,dx}{(1+x^2)\operatorname{th}\frac{\pi x}{2}}=-(\operatorname{sh} m)\ln\operatorname{th}\frac{m}{2}\qquad [m>0].$$

862.41. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{sh} qx}\cos mx\,dx=\frac{\pi}{2q}\,\frac{\sin\frac{p\pi}{q}}{\cos\frac{p\pi}{q}+\operatorname{ch}\frac{m\pi}{q}}$$
$$[-q\leqslant p\leqslant q;\ q>0].$$

862.42. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{sh} qx} \sin mx\, dx = \frac{\pi}{2q} \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{q}}{\cos \frac{p\pi}{q} + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{q}} \qquad [-q \leqslant p \leqslant q;\ q > 0].$$

862.43. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{ch} qx} \sin mx\, dx = \frac{\pi}{q} \frac{\sin \frac{p\pi}{2q} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2q}}{\cos \frac{p\pi}{q} + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{q}} \qquad [-q \leqslant p \leqslant q;\ q > 0].$$

862.44. $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} px}{\operatorname{ch} qx} \cos mx\, dx = \frac{\pi}{q} \frac{\cos \frac{p\pi}{2q} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2q}}{\cos \frac{p\pi}{q} + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{q}} \qquad [-q \leqslant p \leqslant q;\ q > 0].$$

863.01. $$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q dx = \Gamma(q+1) \qquad [q+1 > 0].$$ [См. 850.1.]

863.02. $$\int_0^1 x^p \ln \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{(p+1)^2} \qquad [p+1 > 0].$$

863.03. $$\int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^2 dx = \frac{2}{(p+1)^3} \qquad [p+1 > 0].$$

863.04. $$\int_0^1 x^p \left(\ln \frac{1}{x}\right)^q dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(p+1)^{q+1}} \qquad [p+1,\ q+1 > 0].$$

863.05. $$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{1/2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

863.06. $$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{-1/2} dx = \sqrt{\pi}.$$

863.10. $$\int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x}\, dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

863.11. $\int\limits_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{1-x}\, dx = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2}.$

863.12. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 \ln \frac{1}{x}}{1-x}\, dx = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}.$

863.20. $\int\limits_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+x}\, dx = \frac{\pi^2}{12}.$

863.21. $\int\limits_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{1+x}\, dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$

863.22. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 \ln \frac{1}{x}}{1+x}\, dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4}.$

863.30. $\int\limits_0^1 \frac{1+x}{1-x} \ln \frac{1}{x}\, dx = \frac{\pi^2}{3} - 1.$

863.31. $\int\limits_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{8}.$

863.32. $\int\limits_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{24}.$

863.33. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 \ln \frac{1}{x}}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{8} - 1.$

863.34. $\int\limits_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+x^2}\, dx = G = 0{,}9159656.$ [См. **48.32.**]

863.35. $\int\limits_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{(1+x)^2}\, dx = \ln 2.$

863.36. $$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \ln \frac{1}{x}\, dx = \frac{2\pi^2}{27}.$$

863.37. $$\int_0^1 \frac{1+x}{1-x^2} \ln \frac{1}{x}\, dx = \frac{4\pi^2}{27}.$$

863.41. $$\int_0^1 \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

863.42. $$\int_0^1 \frac{x \ln \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 1 - \ln 2.$$

863.43. $$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right) \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right).$$

863.51. $$\int_0^1 \frac{x^p\, dx}{\ln x} = \infty.$$

863.52. $$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x}\, dx = \ln \frac{p+1}{q+1} \qquad [p+1,\ q+1 > 0].$$

863.53. $$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\ln x} x^r\, dx = \ln \frac{p+r+1}{q+r+1}$$
$$[p+r+1,\ q+r+1 > 0].$$

863.54. $$\int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)}{\ln x}\, dx = \ln \frac{(p+q+1)}{(p+1)(q+1)}$$
$$[p+1,\ q+1,\ p+q+1 > 0].$$

863.55. $$\int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \frac{dx}{\ln x} = \ln \frac{2}{\pi}.$$

863.61. $$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi^3}{16}.$$

863.71. $$\int_0^1 \ln(1-x)\, dx = -1.$$ **863.72.** $$\int_0^1 x \ln(1-x)\, dx = -\frac{3}{4}.$$

863.73. $\int\limits_0^1 x^p \ln(1-x)\,dx = -\frac{1}{p+1}\sum_{n=1}^{p+1}\frac{1}{n}$ $[p=0, 1, 2, \ldots]$.

863.74. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$.

863.81. $\int\limits_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1$.

863.82. $\int\limits_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{4}$.

863.83. $\int\limits_0^1 x^{2p}\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2p+1}\left\{2\ln 2 - \sum_{n=1}^{2p+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$

$[p=0, 1, 2, \ldots]$.

863.84. $\int\limits_0^1 x^{2p-1}\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $[p=1, 2, \ldots]$.

863.85. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$.

863.91. $\int\limits_0^1 \ln x \ln(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

863.92. $\int\limits_0^1 \ln x \ln(1+x)\,dx = 2 - 2\ln 2 - \frac{\pi^2}{12}$.

863.93. $\int\limits_0^1 x\ln x \ln(1-x)\,dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}$.

863.94. $\int\limits_0^1 x\ln x \ln(1+x)\,dx = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}$.

864.01. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 - G = \frac{\pi}{8}\ln 2 - 0{,}9159656$.

[См. **48.32.**]

864.02. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

864.03. $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ln\frac{1+x}{x}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 + G.$ [См. **48.32.**]

864.04. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 - G.$ [См. **48.32.**]

864.11. $\int\limits_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = 2\ln 2.$

864.12. $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = \frac{\pi^2}{4}.$

864.21. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^p)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6p}$ $[p>0]$.

864.22. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^p)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p}$ $[p>0]$.

864.31. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -2G - \frac{\pi}{2}\ln 2.$ [См. **48.32.**]

864.32. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2G - \frac{\pi}{2}\ln 2.$ [См. **48.32.**]

864.33. $\int\limits_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\pi^2}{12} + (\ln 2)^2\right\}.$

864.41. $\int\limits_0^1 (1-x)\,e^{-x}\ln\frac{1}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{e}.$

864.51. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1-x}\ln\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{\sin^2 p\pi}$ $[0<p<1]$.

864.52. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} \ln \frac{1}{x}\, dx = \frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $[0 < p < 1]$.

864.53. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$.

864.54. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{2a} \ln a$ $[a > 0]$.

864.55. $\int\limits_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi^3}{8}$.

864.61. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} \ln 2 + G$. [См. **48.32.**]

864.62. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{b} \ln(1+ab)$ $[a, b > 0]$.

864.63. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2)}{b^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{b} \ln(a+b)$ $[a, b > 0]$.

864.71. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{2-p}}\, dx = \frac{\pi}{(1-p)\sin p\pi}$ $[0 < p < 1]$.

864.72. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{1+q}}\, dx = \frac{\pi}{q \sin \pi q}$ $[0 < q < 1]$.

864.73. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x^p)}{x^q}\, dx = \frac{\pi}{(q-1)\sin\frac{\pi(q-1)}{p}}$ $[0 < q-1 < p]$.

864.74. $\int\limits_0^\infty \frac{\ln|x^p-1|}{x^q}\, dx = \frac{\pi}{(q-1)\operatorname{tg}\frac{\pi(q-1)}{p}}$

$[0 < q-1 < p]$.

865.01. $\int\limits_0^{\pi/4} \ln \sin x\, dx = -\frac{\pi}{4} \ln 2 - \frac{G}{2}$. [См. **48.32.**]

865.02. $\int\limits_0^{\pi/4} \ln \cos x\, dx = -\frac{\pi}{4} \ln 2 + \frac{G}{2}$. [См. 48.32.]

865.03. $\int\limits_0^{\pi/4} \ln \operatorname{tg} x\, dx = -G$. [См. 48.32.]

865.04. $\int\limits_0^{\pi/4} \ln (1 + \operatorname{tg} x)\, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$.

865.05. $\int\limits_0^{\pi/4} \ln (1 - \operatorname{tg} x)\, dx = \frac{\pi}{8} \ln 2 - G$. [См. 48.32.]

865.11. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x\, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

865.12. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \operatorname{tg} x\, dx = 0$.

865.21. $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x) \ln \sin x\, dx = \ln 2 - 1$.

865.22. $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos x) \ln \cos x\, dx = \ln 2 - 1$.

865.23. $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos x) \ln \sin x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} (\sin x) \ln \cos x\, dx = -1$.

865.24. $\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x) \ln \sin x\, dx = -\frac{\pi^2}{24}$.

865.25. $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin^2 x) \ln \sin x\, dx = \frac{\pi}{8} (1 - 2 \ln 2)$.

865.26. $\int\limits_0^{\pi/2} (\cos 2nx) \ln \sin x\, dx = -\frac{\pi}{4n}$ $[n > 0]$.

865.27. $$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \cos x}{\sin x}\, dx = -\frac{\pi^2}{8}.$$

865.31. $$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos x)\, dx = 2G - \frac{\pi \ln 2}{2}.$$ [См. **48.32.**]

865.32. $$\int_0^{\pi/2} \ln(1-\cos x)\, dx = -2G - \frac{\pi \ln 2}{2}.$$ [См. **48.32.**]

865.33. $$\int_0^{\pi/2} \ln(1+\operatorname{tg} x)\, dx = G + \frac{\pi \ln 2}{4}.$$ [См. **48.32.**]

865.34. $$\int_0^{\pi/2} \ln(1+p\sin^2 x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \ln(1+p\cos^2 x)\, dx = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1+p}}{2} \quad [(1+p) \geqslant 0].$$

865.35. $$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx = \pi \ln \frac{a+b}{2} \quad [a, b > 0].$$

865.36. $$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2\operatorname{tg}^2 x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 + b^2\operatorname{ctg}^2 x)\, dx = \pi \ln(a+b) \quad [a, b > 0].$$

865.37. $$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\right) \frac{dx}{\sin x} = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{a+b\cos x}{a-b\cos x}\right) \frac{dx}{\cos x} = \pi \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \quad [b^2 \leqslant a^2].$$

865.41. $$\int_0^{\pi} \ln \sin x\, dx = -\pi \ln 2.$$

865.42. $$\int_0^{\pi} x \ln \sin x\, dx = -\frac{\pi^2 \ln 2}{2}.$$

865.43. $$\int_0^{\pi} \ln(1 \pm \cos x)\,dx = -\pi \ln 2.$$

865.44. $$\int_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi \ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right\} \qquad [a \geqslant b > 0].$$

865.45. $$\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi \arcsin a \qquad [0 < a < 1].$$

865.51. $$\int_0^{1} (\cos mx)\ln x\,dx = -\frac{\operatorname{Si}(m)}{m}. \qquad [\text{См. } \mathbf{431.11.}]$$

Таблицы см. [22].

865.52. $$\int_0^{1} x^{p-1}\sin(q\ln x)\,dx = \frac{-q}{p^2+q^2} \qquad [p > 0].$$

865.53. $$\int_0^{1} x^{p-1}\cos(q\ln x)\,dx = \frac{p}{p^2+q^2} \qquad [p > 0].$$

865.54. $$\int_0^{1} \frac{x^p\sin(q\ln x)}{\ln x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{q}{p+1} \qquad [p+1 > 0].$$

865.61. $$\int_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)\cos mx\,dx = \frac{\pi}{m}(1-e^{-am}) \qquad [a,\ m > 0].$$

865.62. $$\int_0^{\infty} \ln\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right)\cos mx\,dx = \frac{\pi}{m}(e^{-bm}-e^{-am}) \qquad [a,\ b,\ m > 0].$$

865.63. $$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x}\ln\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}(\ln m + C) \qquad [m > 0].$$

[См. **851.1.**]

865.64. $$\int_0^{\infty} \frac{\ln(\sin^2 mx)}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{a}\ln\left(\frac{\operatorname{sh} ma}{e^{ma}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{a}\ln\left(\frac{1-e^{-2ma}}{2}\right) \qquad [m,\ a > 0].$$

865.65. $$\int_0^\infty \frac{\ln(\cos^2 mx)}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{a}\ln\left(\frac{\operatorname{ch} ma}{e^{ma}}\right) \qquad [m,\ a>0].$$

865.66. $$\int_0^\infty \frac{\ln(\operatorname{tg}^2 mx)}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{a}\ln \operatorname{th} ma \qquad [m,\ a>0].$$

865.71. $$\int_0^\pi \ln(1\pm 2a\cos x + a^2)\,dx = 2\pi\ln a \qquad [a>1],$$
$$= 0 \qquad [a^2\leqslant 1].$$

865.72. $$\int_0^\pi \ln(a^2\pm 2ab\cos x + b^2)\,dx = 2\pi\ln a \qquad [a\geqslant b>0],$$
$$= 2\pi\ln b \qquad [b\geqslant a>0].$$

865.73. $$\int_0^{2\pi} \ln(a^2\pm 2ab\cos x + b^2)\,dx = 4\pi\ln a \qquad [a\geqslant b>0],$$
$$= 4\pi\ln b \qquad [b\geqslant a>0].$$

865.74. $$\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x + a^2)\cos mx\,dx = -\frac{\pi}{m}a^m$$
$$[0<a<1;\ m=1,\ 2,\ \ldots].$$

865.75. $$\int_0^\infty \frac{\ln(1\pm 2p\cos mx + p^2)}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{a}\ln(1\pm pe^{-ma})$$
$$[0<p\leqslant 1;\ m,\ a>0],$$
$$= \frac{\pi}{a}\ln(p\pm e^{-ma})$$
$$[p\geqslant 1;\ m,\ a>0].$$

865.81. $$\int_0^\infty \ln(1+e^{-x})\,dx = \frac{\pi^2}{12}.$$

865.82. $$\int_0^\infty \ln(1-e^{-x})\,dx = -\frac{\pi^2}{6}.$$

865.83. $$\int_0^\infty \ln\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx = \int_0^\infty \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}\, dx = -\frac{\pi^2}{4}.$$

865.901. $$\int_0^\infty e^{-ax} \ln \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{a}(\ln a + C) \qquad [a>0].$$ [См. **852.1.**]

Относительно постоянной C см. **851.1.** $C = 0{,}5772157.$

865.902. $$\int_0^\infty xe^{-ax} \ln \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{a^2}(\ln a - 1 + C) \qquad [a>0].$$

865.903. $$\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \ln \frac{1}{x}\, dx = \frac{2}{a^3}\left(\ln a - \frac{3}{2} + C\right) \qquad [a>0].$$

865.904. $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \ln \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}(\ln a + 2\ln 2 + C) \qquad [a>0].$$

865.905. $$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+px} - e^{-ax}\right) dx = \ln \frac{a}{p} + C \qquad [a,\ p>0].$$

865.906. $$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+p^2x^2} - e^{-ax}\right) dx = \ln \frac{a}{p} + C \qquad [a,\ p>0].$$

865.907. $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{xe^x}\right) dx = C.$$

865.908. $$\int_0^1 \ln\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx = -C.$$

865.909. $$\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = C.$$

865.911. $$\int_0^\infty \left(\ln \frac{1}{x}\right) e^{-ax} \sin mx\, dx =$$
$$= \frac{1}{(a^2+m^2)}\left\{\frac{m}{2}\ln(a^2+m^2) - a \operatorname{arctg} \frac{m}{a} + mC\right\}$$
$[m,\ a>0].$ [См. **851.1.**]

865.912. $$\int_0^\infty \left(\ln \frac{1}{x}\right) e^{-ax} \cos mx\, dx =$$
$$= \frac{1}{a^2+m^2} \left\{ \frac{a}{2} \ln (a^2+m^2) + m \operatorname{arctg} \frac{m}{a} + aC \right\}$$
$[m, a > 0]$. [См. **851.1.**]

865.913. $$\int_0^\infty \frac{\left(\ln \frac{1}{x}\right) e^{-ax} \sin mx}{x} dx = \left\{ \frac{1}{2} \ln (a^2+m^2) + C \right\} \operatorname{arctg} \frac{m}{a}$$
$[m, a > 0]$. [См. **851.1.**]

Значительная доля интегралов в **850—865** может быть найдена в [6]. См. также [3]—[7].

866.01. $$\int_0^\pi \cos (x \sin \varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi \cos (x \cos \varphi)\, d\varphi = \pi J_0 (x).$$

866.02. $$\int_0^\pi \cos (n\varphi - x \sin \varphi)\, d\varphi = \pi J_n (x),$$

где n — нуль или целое положительное число.

(*Интегралы Бесселя.*)

866.03. $$\int_0^\pi e^{p \cos x} dx = \pi J_0 (p),$$ как в **809.1.**

Таблицы к **866** см. [20] и [21].

880. Правило Симпсона. Если известны значения $y = f(x)$ для равноотстоящих значений x с шагом h, то численное значение интеграла приближенно выражается формулой:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}],$$

где $h = x_1 - x_0$ — постоянная разность между соседними значениями x, т. е. $2nh = b - a$. Коэффициенты равны поочередно 4 или 2, как указано. Приближение обычно тем точнее, чем больше n. Таким методом можно получить численный результат, когда аналитическое выражение для интеграла не может быть найдено. Используя таблицу $f(x)$ и арифмометр, можно провести это вычисление без промежуточных записей.

881. Погрешность приведенной выше приближенной формулы равна

$$\frac{nh^5 f^{IV}(x)}{90} = \frac{(b-a)\,h^4 f^{IV}(x)}{180},$$

где для оценки величины $h^4 f^{IV}(x)$ может быть взята наибольшая четвертая разность в интервале (a, b).

882. Другая формула, которая во многих случаях более точна, чем формула **880**. По ней тоже можно производить вычисление на арифмометре без промежуточных записей:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{4,5}[1,4y_0 + 6,4y_1 + 2,4y_2 + 6,4y_3 + 2,8y_4 +$$
$$+ 6,4y_5 + 2,4y_6 + 6,4y_7 + 2,8y_8 + \ldots +$$
$$+ 6,4y_{4n-3} + 2,4y_{4n-2} + 6,4y_{4n-1} + 1,4y_{4n}],$$

где $4nh = b - a$.

XIII.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

890.1. Разделение переменных. Если уравнение может быть представлено в виде $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$, то и левая и правая его части могут быть проинтегрированы.

890.2. Разделение переменных при помощи подстановки. Однородные уравнения. Если уравнение имеет вид

$$f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy = 0,$$

где функции однородны по x и y и притом одинаковой степени, то надо положить $y = ux$. Тогда

$$\frac{dx}{x} = -\frac{f_2(1, u)\,du}{f_1(1, u) + uf_2(1, u)}.$$

Если удобнее, то можно положить $x = uy$.

890.3. Разделение переменных при помощи подстановки в уравнениях вида

$$f_1(xy)\,y\,dx + f_2(xy)\,x\,dy = 0,$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Пусть $u = xy$. Тогда

$$\frac{dx}{x} = \frac{f_2(u)\,du}{u\left\{f_2(u) - f_1(u)\right\}}.$$

890.4. Уравнение вида

$$(ax + by + c)\,dx + (fx + gy + h)\,dy = 0$$

может быть сделано однородным, если положить $x = x' + m$ и $y = y' + n$. Величины m и n могут быть найдены из системы двух совместных уравнений, которые получаются из требования однородности. Этот метод непригоден, если

$$\frac{ax + by}{fx + gy} = \text{const},$$

но в таком случае можно сделать подстановку $ax + by = u$ и исключить x или y.

890.5. Уравнение в полных дифференциалах. Если для уравнения $M\,dx+N\,dy=0$ удовлетворено условие

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

то это — *уравнение в полных дифференциалах*. Оно интегрируется так: находят интеграл $\int M\,dx$, считая y постоянным, и, добавляя неизвестную функцию $f(y)$, дифференцируют результат по y. Полученное выражение приравнивают N; из полученного уравнения определяют неизвестную функцию $f(y)$. Таким образом, решение будет иметь вид:

$$\int M\,dx+f(y)+C=0.$$

Если удобнее, то можно поменять ролями M и N и соответственно x и y.

891.1. Линейные уравнения первого порядка. Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно содержит только первую степень функции и ее производных. Линейное уравнение первого порядка имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \quad \text{или} \quad dy+Py\,dx=Q\,dx,$$

где P и Q не зависят от y, но могут содержать x. Решение такого уравнения:

$$y=e^{-\int P\,dx}\left[\int e^{\int P\,dx}\,Q\,dx+C\right].$$

891.2 Уравнение Бернулли. Если уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n,$$

где P и Q не содержат y, то его можно сделать линейным при помощи подстановки $u=y^{1-n}$. Прежде чем делать эту подстановку, надо разделить уравнение на y^n.

892. Нелинейные уравнения первого порядка. Полагаем

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

Если удается разрешить заданное уравнение относительно p и проинтегрировать каждое из полученных уравнений в отдельности, то тем самым будет получено решение исходного уравнения.

893.1. Уравнения второго порядка, явно не содержащие y. Полагаем

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

Уравнение превратится в уравнение первого порядка, содержащее p и x. Его можно решить каким-либо из рассмотренных выше методов.

893.2. Уравнения второго порядка, явно не содержащие x. Полагаем

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}.$$

Получается уравнение первого порядка, содержащее p и y, и его можно решить каким-либо из рассмотренных выше методов.

894. Чтобы решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=0,$$

где A и B постоянные, надо найти корни вспомогательного уравнения $p^2+Ap+B=0$. Если его корни a и b действительны и не равны между собой, то решение заданного уравнения будет $y=he^{ax}+ke^{bx}$, где h и k — произвольные постоянные. Если его корни — комплексные величины: $m+in$ и $m-in$, то

$$y=e^{mx}(h\cos nx+k\sin nx).$$

Если оно имеет два равных корня a, a, то

$$y=e^{ax}(hx+k).$$

895. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^ny}{dx^n}+A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+Ky=0.$$

Решением его будет сумма членов вида he^{ax}, где каждое a есть один из различных действительных корней вспомогательного уравнения

$$p^n+Ap^{n-1}+Bp^{n-2}+\ldots+K=0.$$

Если a — двукратный корень вспомогательного уравнения, то соответствующий член будет $e^{ax}(hx+k)$.

Если a — трехкратный корень, то соответствующий член будет $e^{ax}(hx^2+kx+l)$ и т. д.

Когда имеется пара комплексных корней $m+in$ и $m-in$, то в решении появится член

$$e^{mx}(h\cos nx+k\sin nx).$$

Если это — пара двукратных корней, то соответствующий член в решении будет

$$e^{mx}\{(hx+k)\cos nx+(sx+t)\sin nx\}$$

и т. д.

896. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами с правой частью

$$\frac{d^n y}{dx^n}+A\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+Ky=X,$$

где X содержит x.

Сначала полагаем $X=0$ и решаем полученное уравнение **894** или **895**. Затем нужно прибавить к этому решению частный интеграл, который удовлетворяет заданному уравнению и который не должен содержать постоянных интегрирования, так как такие постоянные уже вошли в решение.

897. Уравнение Эйлера второго порядка

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+Ax\frac{dy}{dx}+By=f(x)$$

преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dv^2}+(A-1)\frac{dy}{dv}+By=f(e^v)$$

при помощи подстановки $x=e^v$.

898. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R.$$

Чтобы его решить, нужно сначала решить уравнения

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

и представить решения в виде $u=C_1$, $v=C_2$. Тогда искомым решением будет

$$\varphi(u,\ v)=0,$$

где φ — произвольная функция.

ЛИТЕРАТУРА

А. Общие руководства и справочники

1. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1—3, Физматгиз, 1958—1960.

2. Араманович И. Г., Гутер Р. С. и др., Математический анализ (дифференцирование и интегрирование), Серия «Справочная математическая библиотека» под общей редакцией Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского, Физматгиз, 1961.

3. Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е, перераб. при участии Ю. В. Геронимуса и М. Ю. Цейтлина, Физматгиз, 1962.

4. Смолянский М. Л., Таблицы неопределенных интегралов, изд. 2-е, Физматгиз, 1963.

5. Гарди Г., Интегрирование элементарных функций, перев. с англ., ОНТИ, 1935.

6. Bierens de Haan D., Nouvelles tables d'intégrales définies, Edition 1867, corrected, N. Y. Hafner, 1957.

7. Lindman C. F., Examen des Nouvelles tables d'intégrales définies, de Bierens de Haan, N. Y. Hafner, 1957.

8. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. I и II, Физматгиз, 1963.

9. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, изд. 2-е, перераб. и дополн., Физматгиз, 1963.

10. Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2, ИЛ, 1949.

11. Грей Э. и Мэтьюс Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.

12. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.

13. Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.

14. Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, изд-во АН СССР, 1941.

Б. Таблицы

15. Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, изд. 3-е, Физматгиз, 1962.

16. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции (формулы, графики, таблицы), перев. с 6-го нем. изд. под ред. Л. И. Седова, Физматгиз, 1964.

17. Хаяши К., Многозначные таблицы круговых, гиперболических и других функций, изд-во ВЦ АН СССР, 1965.

18. Комри Л., Шестизначные таблицы Чемберса, Физматгиз, 1964.

19. Библиотека математических таблиц, изд-во ВЦ АН СССР.

а) Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла.

б) Таблицы вероятностных функций, т. 1 и 2.

в) Таблицы функций Бесселя дробного индекса $\left(J_\nu \text{ и } I_\nu \text{ для } \nu = \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{3}{4}\right)$, т. 1 и 2.

г) Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере.

д) Таблицы натуральных логарифмов, т. 1 и 2.

е) Многозначные таблицы элементарных функций ($\sin x$, $\cos x$, e^x, e^{-x}).

ж) Таблицы обратных тригонометрических функций.

з) Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса.

и) Таблицы антилогарифмов 10^x.

20. Фаддеева В. Н. и Гавурин М. К., Таблицы функций Бесселя $J_n(x)$ целых номеров от 0 до 120, Гостехиздат, 1950.

21. Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента, изд-во АН СССР, 1950.

22. Таблицы интегрального синуса и косинуса, изд-во АН СССР, 1954.

23. Таблицы интегральной показательной функции, изд-во АН СССР, 1954.

24. Таблицы e^x и e^{-x}, изд-во АН СССР, 1955.

25. Кармазина Л., Н., Курочкина Л. В., Таблицы интерполяционных коэффициентов, изд-во АН СССР, 1956.

26. Table of binomial coefficients, Royal Society, Mathematical tables, Cambridge University Press, 1954.

27. Самойлова-Яхонтова Н. С., Таблицы эллиптических интегралов, ОНТИ, 1935.

28. Беляков В. Л., Кравцова Р. И., Раппопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, т. 1, изд-во АН СССР, 1962.

29. Шулер М., Гебелейн Х., Таблицы эллиптических функций, изд-во ВЦ АН СССР, 1960.