Ergebnisse der Mathematik
und ihrer Grenzgebiete

UNIVALENT FUNCTIONS AND CONFORMAL MAPPING

by

James A. Jenkins

SPRINGER-VERLAG
BERLIN·GÖTTINGEN·HEIDELBERG
1958

ДЖ. ДЖЕНКИНС

ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ И КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Перевод с английского
В. П. ХАВИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1962

АННОТАЦИЯ

Небольшая монография из известиой серии «Ergebnisse» содержит обзор результатов ряда исследователей, и в том числе самого автора — видного американского аналитика, по современной геометрической теории функций комплексного перемениого. Особое место занимает изложение вариацииных методов, и в особеиности так называемого метода экстремальных длин, нашедшего в последние годы важиые примеиения в теории функций. Все основные результаты приведены с доказательствами; в книге имеется обшириая библиография.

Книга доступна студеитам университетов, представляет несомненный интерес для специалистов по теории функций комплексного переменного и для математиков, работающих в смежных областях.

Редакция литературы по математическим наукам

Моим родителям

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта монография посвящена применению метода экстремальных метрик к теории однолистных функций. Поэтому мы не пытались излагать другие методы исследования, если не считать вводной главы, в которой дан краткий обзор развития этой теории. Тем не менее сила излагаемого метода такова, что он позволяет получить бо́льшую часть известных ранее результатов теории однолистных функций. Нужно заметить, что здесь метод экстремальных метрик использован для приложений в теории однолистных функций, а многочисленных других его приложений, в частности, к теории квазиконформных отображений, мы не касаемся. Заметим еще, что мы не пытались составить исчерпывающую библиографию, и ссылки сделаны лишь на те источники, которые цитировались в тексте.

Центральной темой нашей работы является общая теорема о коэффициентах, содержащая в качестве частных случаев значительное число известных результатов об однолистных функциях. В последней главе мы даем также некоторые приложения метода симметризации.

Джеймс А. Дженкинс

Нотр-Дам, июнь 1957 г.

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

1.1. В настоящее время изучение однолистных функций состоит в исследовании некоторых семейств функций, регулярных или мероморфных и однолистных в заданных односвязных или многосвязных областях, причем особенно интересуются значениями, которые эти функции принимают, и экстремальными задачами для коэффициентов степенных разложений самих функций и их производных. Такие задачи часто оказываются тесно связанными с вопросами теории конформных отображений и во многих случаях из этих вопросов и возникают. Дадим сначала

Определение 1.1. Пусть функция $f(z)$ регулярна или мероморфна в области D на z-сфере. Тогда $f(z)$ называется *однолистной*, если для $z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2$ имеем

$$f(z_1) \neq f(z_2).$$

В большей части нашей работы без ограничения общности можно рассматривать функции, нормированные определенным образом. Так, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением следующих семейств функций.

Определение 1.2. Пусть S обозначает семейство функций $f(z)$, регулярных и однолистных при $|z|<1$, удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

Определение 1.3. Пусть D — область на z-сфере, содержащая бесконечно удаленную точку. Пусть $\Sigma(D)$ обозначает семейство функций $f(z)$, мероморфных и однолистных в D, имеющих в окрестности точки $z=\infty$ лорановское разложение вида

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots, \qquad (1.1)$$

Пусть $\Sigma'(D)$ обозначает подкласс класса $\Sigma(D)$, состоящий из функций, для которых в разложении (1.1) $a_0 = 0$. Если, далее, D содержит начало координат, то пусть $\Sigma_0(D)$ обозначает подкласс класса $\Sigma(D)$, состоящий из тех функций $f(z)$, которые удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Если, в частности, D — односвязная область $|z| > 1$, то первые два класса мы будем обозначать просто через Σ и Σ'.

1.2. Первым существенным результатом в теории однолистных функций можно считать следующий результат, полученный Кёбе в 1907 году [109, стр. 204]:

I. *Существует абсолютная постоянная* $\varkappa > 0$, *такая, что если* $f \in S$, *то множество значений функции* $w = f(z)$ *при* $|z| < 1$ *заполняет круг* $|w| < \varkappa$, *причем* $\varkappa$ *— наибольшее из чисел, для которых это справедливо.*

Кёбе высказал предположение, что $\varkappa$ в действительности равняется $\frac{1}{4}$. Кроме того, он доказал следующее [109, стр. 204]:

II. *Существуют такие положительные числа* $m_1(r)$, $M_1(r)$, *зависящие только от* r, *что для* $f \in S$, $|z| = r$

$$m_1(r) \leqslant |f(z)| \leqslant M_1(r).$$

В действительности теорема I и оценка снизу в теореме II неявно содержатся в более ранних результатах Гурвица [76], но в них не указана явно связь с однолистными функциями. Однако первым результатом, который привлек к себе большое внимание, была, по-видимому, теорема Кёбе об искажении. Эту теорему он сформулировал в следующем виде [110, стр. 73]:

III. *Существует число* $M(r)$, *зависящее только от* r *и такое, что для* $f \in S$, $|z_1|, |z_2| \leqslant r$

$$\frac{1}{M(r)} \leqslant \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqslant M(r).$$

Этот результат можно сформулировать и так:

IV. *Существуют положительные числа* $m_2(r)$, $M_2(r)$, *зависящие только от* r *и такие, что для* $f \in S$, $|z| \leqslant r$

$$m_2(r) \leqslant |f'(z)| \leqslant M_2(r).$$

В 1913 году Племей [138] в кратком сообщении привел явные оценки:

$$\left\{\frac{1-|z|}{1+|z|}\right\}^k \leqslant (1-z\bar{z})\,|f'(z)| \leqslant \left\{\frac{1+|z|}{1-|z|}\right\}^k,$$

$$\frac{1}{2k}\left\{1-\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^k\right\} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1}{2k}\left\{\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^k - 1\right\},$$

где в обоих случаях $f \in S$, а k — абсолютная постоянная, не превосходящая 5. Предполагалось, что наилучшее возможное значение k равно 2. Аналогичные результаты были получены Пиком [135] в 1916 году.

В 1914 году Гронуолл [67] впервые использовал принцип площадей и доказал теорему площадей:

V. *Если* $f \in \Sigma$ *и имеет в окрестности точки* $z = \infty$ *разложение* (1.1), *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \leqslant 1.$$

Гронуолл изучил в этой работе также различные другие задачи. В 1916 году [68] он без доказательства высказал теорему о том, что наилучшие границы в теоремах II и IV таковы:

$$m_1(r) = \frac{r}{(1+r)^2}, \quad M_1(r) = \frac{r}{(1-r)^2},$$

$$m_2(r) = \frac{1-r}{(1+r)^3}, \quad M_2(r) = \frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

В том же году Бибербах [21, 22] доказал, что истинное значение $\varkappa$ в утверждении I равно $\frac{1}{4}$, а экстремальной функцией является $z\,(1+e^{i\alpha}z)^{-2}$, где α — вещественное число. Отсюда без труда выводятся точные границы в II и IV. Он доказал также следующие теоремы о коэффициентах функций класса S:

VI. *Если* $f \in S$ *и имеет в окрестности начала разложение*

$$f(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots + A_n z^n + \ldots, \quad (1.2)$$

то

$$|A_2| \leqslant 2,$$

причем равенство имеет место только для функций $z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2}$, *где* α — *вещественное число.*

VII. *Существуют постоянные* k_n, *зависящие только от* n *и такие, что если* $f \in S$ *и имеет в окрестности начала разложение* (1.2), *то*

$$|A_n| \leqslant k_n.$$

Бибербах получил также качественные результаты относительно области возможных положений точки $(A_2, A_3, \ldots, A_n)$ в $(n-1)$-мерном комплексном координатном пространстве. Он высказал предположение [22, стр. 946], что наименьшее возможное значение k_n равно n.

Фабер [166] также получил наилучшее значение постоянной в теореме I и в то же время дал эквивалентную теорему о диаметре для функций класса Σ:

VIII. Если $f \in \Sigma$ *и не принимает при* $|z| > 1$ *значений* a *и* b, *то*

$$|a - b| \leqslant 4,$$

причем равенство возможно лишь для функций $z + c + e^{2i\alpha}/z$, *где* α — *вещественное число,* c — *постоянная.*

И Бибербах, и Фабер использовали принцип площадей. Нужно заметить, что Бибербах использовал подобные рассмотрения ранее в другой связи [20].

В 1919 году Лёвнер [125] получил результаты, аналогичные II и IV (в их точной форме), для функций класса Σ' и рассмотрел другие задачи для этого класса.

В том же году Бибербах [23] доказал теорему вращения:

IX. *Если* $f \in S$, *то при* $|z| = r$

$$|\arg f'(z)| \leqslant 2 \log \frac{1+r}{1-r},$$

где рассматривается ветвь $\arg f'(z)$, *принимающая в начале нулевое значение.*

Однако эта оценка не является наилучшей.

Сегё [154, 155] усилил теорему I, доказав следующее утверждение:

X. *Пусть* $f \in S$, *и пусть* f *не принимает при* $|z| < 1$ *значений* c, c', *причем* $\arg c' = \arg c + \pi$. *Тогда*

$$\max(|c|, |c'|) \geqslant \frac{1}{2}$$

и равенство имеет место только для функций $z(1 + e^{i\theta} z^2)^{-1}$, *где* θ — *вещественное число.*

Многие авторы получали конкретные последовательности чисел, которые могут служить верхними границами в теореме VII (хотя, конечно, не наилучшими), но Литтльвуд [127] первый указал последовательность границ, имеющую правильный порядок роста:

XI. *Если* $f \in S$ *и имеет в окрестности начала разложение* (1.2), *то*

$$|A_n| < en, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Усовершенствовав технику Литтльвуда, Ландау [122] доказал:

XII. *Если* k_n *обозначает наилучшую границу в теореме* VII, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{k_n}{n} < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) e.$$

В дальнейшем был дан целый ряд различных доказательств, модификаций и новых формулировок предшествующих результатов, но именно эти результаты и составляют основу теории однолистных функций, построенной к настоящему времени классическими элементарными методами. Для дальнейшего продвижения необходимо одно из двух: либо ограничиться рассмотрением некоторых подклассов семейств, рассмотренных выше, либо развить более мощные методы, применимые к полным семействам.

1.3. Первый подкласс S, о котором пойдет речь, — это подкласс выпуклых функций, введенный Стьюди [161]; он состоит из функций, отображающих круг $|z| < 1$ на выпуклые области. Эти функции изучались

также Гронуоллом [68, 69], Лёвнером [124] и другими. Затем рассматривался класс звездных функций, впервые изученный Александером [2], а позже Неванлинной [132] и другими. Эти функции отображают круг $|z|<1$ на область, звездообразную относительно начала. Пик [136] начал изучение подкласса функций $f(z) \in S$, допускающих равномерную оценку $|f(z)| \leqslant M$. Для этих классов функций были получены оценки, аналогичные оценкам п. 1.1, причем во многих случаях результаты оказываются более сильными, чем соответствующие результаты для полного класса S. По-видимому, наиболее эффективный из этих результатов принадлежит Неванлинне [132]:

XIII. *Если звездная функция $f \in S$ имеет в окрестности начала разложение* (1.2), *то*

$$|A_n| \leqslant n,$$

причем равенство имеет место только для функций $z(1+e^{i\alpha}z)^{-2}$, где α — вещественное число.

Дьедонне [105], Рогозинский [149] и Сас [152] доказали, что такие же оценки справедливы для функций из S с вещественными коэффициентами A_n. В этом случае равенство возможно только для функций $z(1 \pm z)^{-2}$. Рогозинский изучал более широкий класс типично вещественных функций.

Другие авторы рассматривали подклассы S, состоящие из функций, отображающих круг $|z|<1$ на области, которые обладают некоторой симметрией относительно вращения вокруг начала координат. В частности, Литтльвуд и Пэли [128] доказали следующее:

XIV. *Если $f \in S$ нечетна и имеет в окрестности начала разложение*

$$f(z) = z + A_3 z^3 + A_5 z^5 + \ldots + A_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots, \quad (1.3)$$

то существует постоянная K, не зависящая от f и n, такая, что

$$|A_{2n+1}| \leqslant K, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Эти авторы предполагали, что наименьшее возможное значение K равно 1, но Фекете и Сегё обнаружили, что это неверно, доказав следующую теорему [169]:

XV. *В условиях XIV*

$$|A_5| \leqslant \frac{1}{2} + e^{-2/3},$$

причем эта оценка не может быть улучшена.

Впоследствии были рассмотрены многочисленные другие подклассы класса S. Во многих случаях определения этих классов сразу приводили к некоторым аналитическим условиям, из которых нужные свойства выводятся довольно легко. Были рассмотрены также аналогичные подклассы класса Σ. Мы в дальнейшем не будем заниматься этими вопросами в настоящей работе.

1.4. Из более мощных методов, разработанных для изучения однолистных функций, ближе всего примыкает к элементарным метод Правица [145]. По существу это — обобщение принципа площадей. Метод Правица и его теоремы оказались очень полезными как вспомогательные средства, хотя этот метод сам по себе привел к явному решению лишь немногих задач теории однолистных функций. Вот некоторые результаты, полученные этим методом [39, 86].

XVI. *Если* $f \in \Sigma$ *и имеет разложение* (1.1) *в окрестности* $z = \infty$, *то*

$$|a_2| \leqslant \frac{2}{3},$$

причем равенство имеет место лишь для функций

$$z(1 + e^{i\theta} z^{-3})^{2/3} + c,$$

где c — *постоянная,* θ — *вещественное число.*

Если $f \in \Sigma'$ *и ее обратная функция* $\Phi(w)$ *имеет в окрестности бесконечно удаленной точки разложение*

$$\Phi(w) = w + \frac{b_1}{w} + \ldots + \frac{b_n}{w^n} + \ldots,$$

то

$$|b_3| \leqslant 1,$$

причем равенство имеет место только для функций $f(z) = z + e^{i\alpha}/z$, *где* α — *вещественное число.*

Первым глубоким методом, применявшимся в теории однолистных функций, был параметрический метод, принадлежащий Лёвнеру [126]. Грёч [49—66] был первым, кто разрабатывал теорию однолистных функций единообразно и единым методом, а именно методом экстремальной метрики. Несколько лет спустя Грунский [72] изучил ряд тех же проблем методом контурного интегрирования. Наконец, Шиффер [184—187] развил вариационный метод решения экстремальных задач для однолистных функций. Эти четыре метода очень важны, поэтому в следующих разделах мы дадим краткую характеристику каждого из них.

1.5. Метод Лёвнера применяется главным образом к семейству функций $f(z)$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, таких, что $f(0) = 0, |f(z)| < 1$, и в особенности к тем функциям этого семейства, которые отображают $|z| < 1$ на область, полученную из $|w| < 1$ удалением жордановой дуги, направленной из граничной точки внутрь круга. Можно показать, что множество таких функций плотно во всем семействе. Связывая длину удаляемой дуги с параметром t, удается установить, что соответствующая отображающая функция удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению. Отсюда можно получить параметрическое представление коэффициентов тейлоровского разложения в начале координат. Наконец, с помощью перехода к пределу можно прийти к результатам для функций класса S. Лёвнер использовал этот метод для получения следующих результатов:

XVII. *Если* $f \in S$ *и имеет в окрестности начала разложение* (1.2), *то*

$$|A_3| \leqslant 3,$$

причем равенство возможно только для функций $z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2}$, *где* α *— вещественное число.*

XVIII. *Если* $f \in S$ *и ее обратная функция* $\Phi(w)$ *имеет в окрестности начала разложение*

$$\Phi(w) = w + B_2 w^2 + \ldots + B_n w^n + \ldots,$$

то

$$|B_n| \leqslant \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)}{1\cdot 2 \ldots (n+1)} \cdot 2^n, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

причем равенство имеет место только для функций $f(z) = z(1+e^{i\alpha}z)^{-2}$, *где* α — *вещественное число.*

В течение примерно двадцати лет не было найдено другого доказательства теоремы XVII, но затем их появилось несколько [41, 85, 179]. Все они, однако, находятся на неэлементарном уровне.

Через несколько лет после статьи Лёвнера Голузин [34, 35] обратился к параметрическому методу и использовал его для того, чтобы единообразно вывести основные результаты теории однолистных функций. Он получил также некоторые новые результаты, наиболее значительным из которых является точная форма теоремы вращения:

XIX. *Если* $f \in S$, *то для* $|z| = r$

$$|\arg f'(z)| \leqslant 4 \arcsin r, \quad r \leqslant 2^{-1/2},$$

$$|\arg f'(z)| \leqslant \pi + \log \frac{r^2}{1-r^2}, \quad 2^{-1/2} < r < 1,$$

где рассматривается ветвь $\arg f'(z)$, *равная нулю в начале, а* $\arcsin r$ — *главное значение.*

Примерно в то же время Пешль [134] возобновил общее изучение проблемы коэффициентов, т. е. проблемы определения области возможных положений точки $(A_2, A_3, \ldots, A_n)$, соответствующей разложениям (1.2) для функций из S. Он пользовался несколько обобщенной формой метода Лёвнера и наряду с некоторыми качественными результатами получил частичную характеристику области значений (A_2, A_3) в явном виде.

Методом Лёвнера были получены и другие интересные результаты. Упомянем только, что именно этим методом пользовались Фекете и Сегё для доказательства теоремы XV и что Шеффер и Спенсер [180] использовали его для нахождения точной оценки $|A_3|$ в разложении (1.2) функций класса S, удовлетворяющих дополнительному условию $|f(z)| < M$ $(M > 1)$. Робинсон [148] также применял этот метод, чтобы полностью исследовать соотношения между $|f'(0)|, |z|, |f(z)|$ и $|f'(z)|$ для функций $f(z)$,

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$, $|f(z)| < 1$. Метод Лёвнера постоянно используется в работах по теории однолистных функций. Он часто приводит к успеху при получении явных оценок, но, как правило, не обеспечивает описания экстремальных функций и полной информации об их единственности. Метод был также распространен на функции, определенные в областях, отличных от единичного круга, в частности, в круговых кольцах [116], но при этом формальные усложнения оказались столь большими, что здесь было получено мало конкретных результатов.

1.6. Метод экстремальной метрики нашел первые применения в задачах теории функций и конформных отображений, довольно далеких от центральных проблем теории однолистных функций. В своей простейшей форме этот метод включает возможность с помощью неравенства Шварца геометрически установить определенные оценки длины кривых и площади некоторой заметаемой ими области. Доказательства такого типа можно отнести к простым доказательствам, использующим изопериметрический метод. Первыми, по-видимому, использовали этот метод Бор [25], занимавшийся отображениями, «сохранящими отрезки», Гросс [70, 71], получивший свою «звездную теорему» и другие результаты, Фабер [168] и Курант [77], исследовавшие соответствие границ при конформном отображении.

Как уже отмечалось, Грёч первый использовал этот метод как метод теории однолистных функций. Он отмечает, что такое использование было подсказано ему работой Фабера. Подход Грёча, названный им методом полос, представляет собой весьма существенное усовершенствование рассуждений, связывающих длину и площадь, оперирующее с характеристическими конформными инвариантами двусвязных областей и четырехугольников. Грёч без труда получил большинство из известных тогда результатов и в ряде выдающихся работ [49—66] доказал много новых интересных результатов, с равной легкостью решая проблемы для односвязных областей и для областей конечной связности. Значительный вклад

он внес и в теорию бесконечносвязных областей. Мы не будем здесь приводить его конкретных результатов, так как большая часть их излагается в последующих главах. Трудно понять, почему его достижения так долго не получали должного признания. Даже сейчас, когда ясно, что его работы должны быть широко известными, мы обнаруживаем, как его результаты приписываются другим (см., например, [24, стр. 169]). О его блестящих достижениях, возможно, лучше всего говорят те усилия, которые потребовались некоторым математикам, вооруженным наиболее совершенными из современных средств, для переоткрытия его результатов, полученных еще двадцать пять лет назад и ранее.

Вскоре после того, как Грёч начал свою работу, Альфорс [3] нашел поразительное применение метода экстремальной метрики, доказав предположение Данжуа о целых функциях. Использование этого метода было подсказано ему книгой Гурвица—Куранта [77, стр. 351]. Несмотря на то что подход Альфорса тоже представляет собой усовершенствование рассуждений, связывающих длину и площадь, он не столь искусствен, как подход Грёча. Работа Альфорса привлекла к этому методу большое внимание. Интересно, что два главных направления в развитии метода экстремальной метрики берут свое начало в проблеме соответствия границ.

В 1933 году Рёнгель [146] использовал этот метод при решении и обобщении одной задачи Сегё. Бёйрлинг [12] использовал некоторую разновидность метода экстремальной метрики при изучении квазианалитических функций. Голузин [36, 38] использовал его в виде метода полос Грёча для доказательства следующей теоремы об n отрезках:

XX. *Пусть* $f \in S$. *Тогда образ круга* $|z| < 1$ *при отображении* f *содержит множество, состоящее из* n *открытых прямолинейных отрезков с суммой длин, не меньшей* n, *исходящих из начала под равными углами величины* $2\pi/n$.

Этот результат был обобщен Бермантом [14, 15] (использовавшим метод контурного интегрирования, см. п. 1.7) и приведен в более или менее окончательной форме Спенсером [156, 81] снова посредством метода экст-

ремальной метрики. Спенсер использовал этот метод и в своей работе по обобщениям многолистных функций.

Некоторые из наиболее важных результатов в развитии метода экстремальной метрики принадлежат Тейхмюллеру [162—164]. Во-первых, он обнаружил тесную связь этого метода с дифференциальной геометрией. (Однако эта идея неявно, а в некоторых местах даже явно высказывалась в работах Грёча, см. особенно [63, 65].) Еще более важным оказалось основанное на результатах Грёча и собственных работах Тейхмюллера о квазиконформном отображении открытие существенной роли, которую играют квадратичные дифференциалы. В этой связи Тейхмюллер сформулировал важный принцип, объясняющий, каким образом квадратичные дифференциалы связаны с решениями экстремальных задач и как особенности квадратичного дифференциала соответствуют экстремальной задаче[1]). Однако Тейхмюллер не доказал никакого общего результата, реализующего этот принцип в конкретной форме. Главным его вкладом в теорию однолистных функций является доказательство некоторых важных общих неравенств для коэффициентов функций классов S и Σ [163]. Но мы не будем здесь формулировать эти результаты, так как они подробно изложены в гл. VI.

В 1946 году Альфорс и Бёрлинг [6] дали новую важную формулировку метода экстремальной метрики. Их подход приводит к конформным инвариантам (называемым экстремальными длинами или модулями) как к решениям экстремальных задач дифференциальной геометрии. Альфорс и Бёрлинг интересовались в основном изучением общих свойств экстремальных длин и не дали каких-либо прямых приложений к теории однолистных функций, если не считать некоторых косвенных результатов [7]. В более простых задачах их метод действует по существу так же, как метод полос Грёча. Преимущество их подхода заключается, однако, в большой интуитивной естественности и возможности обобщений.

---

[1]) Об этом см. Альфорс Л. и Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, М., 1961.— *Прим. ред.*

Настоящая монография посвящена главным образом приложениям метода экстремальной метрики к теории однолистных функций. Центральная ее тема — общая теорема о коэффициентах, опубликованная в работе [92] и представленная здесь в расширенной форме. Эта теорема дает конкретное выражение принципа Тейхмюллера и приводит к утверждению, включающему практически все элементарные результаты теории однолистных функций (а не только метод, который нужно прилагать заново к каждой частной задаче). Нужно отметить, однако, что имеются и такие приложения принципа Тейхмюллера, которые идут дальше упомянутой общей теоремы о коэффициентах [89, 90, 94, 96, 97].

Метод экстремальной метрики удобен в теории однолистных функций еще и потому, что он с одинаковой легкостью применяется к задачам об односвязных и многосвязных областях. Кроме того, он используется во многих вопросах, о которых мы не можем здесь говорить, например, при изучении общих регулярных функций [84], и в проблеме классификации римановых поверхностей. Наконец, он стал основным методом в теории квазиконформных отображений, и это еще одна плодотворная идея, которой мы обязаны Грёчу [51].

1.7. Метод контурного интегрирования был введен Грунским [72], который использовал его для получения новых доказательств некоторых теорем Грёча. В некоторых случаях он привел также явные оценки для функций классов S и Σ, тогда как Грёч дал соответствующий общий результат для многосвязных областей. Грунский вывел также много общих соотношений для коэффициентов однолистных функций [74]. Метод контурного интегрирования состоит по существу в том, что отправляются от некоторого двойного интеграла, о котором известно, что он положителен. Его преобразуют в криволинейный интеграл, включающий функции, вообще говоря, неаналитические. При подходящих условиях этот интеграл можно заменить интегралом от мероморфной функции, который после использования теоремы о вычетах приводит к соответствующему неравенству. Этот метод определенным образом связан с методом ортогональных функ-

ций, который ранее использовался в других задачах теории функций Сегё [153], Бохнером [26] и Бергманом [13].

Многие авторы, в частности, Голузин и Шиффер, следуя Грунскому, использовали метод контурного интегрирования. Голузин [42, 46] использовал некоторые результаты, полученные этим методом, чтобы доказать следующую теорему:

XXI. *Если* $f \in S$ *и имеет в окрестности начала разложение* (1.2), *то*

$$|A_n| < \frac{3}{4} en.$$

Базилевич [8, 9] использовал аналогичные рассмотрения для получения асимптотических оценок коэффициентов. Их окончательная форма такова:

XXII. *Если* k_n *обозначает наименьшую верхнюю границу в* VII, *то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{k_n}{n} < \frac{1}{2} e.$$

В своем окончательном доказательстве он использовал также метод Лёвнера. Кроме того, Базилевич получил оценки для отдельных коэффициентов. Самые выдающиеся результаты, полученные методом контурного интегрирования, относятся, по-видимому, к так называемому размаху (span) многосвязных областей [72, 188]. Метод применим также к вопросам, выходящим за рамки теории однолистных функций. В этой теории он может служить для исследования некоторых проблем, уже изученных методом экстремальной метрики. В частности, он одинаково хорошо применим как к односвязным, так и к многосвязным областям. Однако он страдает тем недостатком, что его нельзя применить к задачам, соответствующим квадратичному дифференциалу с нулями нечетного порядка. При его использовании необходимы также некоторые предположения о поведении исследуемых функций на границе; чтобы впоследствии освободиться от этих предположений, нужны некоторые аппроксимационные рассмотрения.

1.8. Вариационные методы составляют часть вариационного исчисления, в котором их называют прямыми

методами. Эти методы применяются к экстремальным задачам, для которых некоторым общим образом можно утверждать существование экстремальной функции без какой-либо дополнительной информации о ее природе. Затем каким-нибудь способом вводятся вариации этой функции в классе допустимых функций, и экстремальное свойство функции приводит к некоторым уравнениям или неравенствам. Может оказаться, что из них удастся определить или охарактеризовать экстремальную функцию.

Прямой метод вариационного исчисления был изучен Курантом [118]. Некоторые примеры его использования можно найти у Адамара [1] в теории потенциала и у Жюлиа при исследовании конформных отображений [106]. Дуглас [104] применил вариации при изучении минимальных поверхностей.

Лаврентьев [121] разработал вариационный метод для изучения экстремальных задач теории однолистных функций. Однако некоторые из его заключений, по-видимому, не вполне обоснованы[1]) [119]. Марти [129] использовал очень простой тип вариаций при изучении задачи о максимуме модуля коэффициентов степенных разложений для функций семейства S Бернацкий [17] использовал в некоторых задачах вариационный метод Жюлиа.

Однако орудием, приспособленным для изучения однолистных функций, вариационный метод впервые стал в руках Шиффера, который использовал граничные вариации [184, 185] и позднее внутренние вариации [187]. Они приводят к дифференциальным уравнениям для границ экстремальных областей, соответственно для экстремальных функций. Эти последние уравнения еще раз обнаруживают существенную роль квадратичных дифференциалов. Первые приложения, полученные Шиффером, носили в основном характер качественных результатов для экстремальных функций в задаче о мак-

[1]) Автор, по-видимому, недостаточно знаком с вариационно-геометрическим методом М. А. Лаврентьева, который привел к весьма значительным приложениям как в теории конформных отображений, так и в задачах гидродинамики. — *Прим. ред.*

симуме модуля коэффициентов функций класса S. Он доказал первый результат из XVI [186], но его доказательство в методологическом и техническом отношениях гораздо сложнее доказательства Голузина.

Следуя Шифферу, Шеффер и Спенсер [179—182] и Голузин [43—45, 47] дали различные варианты метода внутренних вариаций. Шеффер и Спенсер занимались главным образом получением глубоких качественных результатов в общей задаче о коэффициентах для функций класса S. Однако им принадлежит [179] также первое новое по сравнению с Лёвнером доказательство теоремы XVII; они в явном виде нашли [182] область возможных значений (A_2, A_3) для функций класса S с разложением (1.2). Шеффер и Спенсер разработали также метод, позволяющий свести решение вопроса об истинности гипотезы Бибербаха в случае $n = 4$ к выполнению большого количества вычислений. По-видимому, эта программа не была доведена до завершения. Используя полученную этими авторами форму вариационного метода, Град [182] определил область значений $\log f'(z)$ для функций класса S. Голузин применял свой вариант этого метода к различным задачам теории однолистных функций. Впоследствии вариационный метод использовали многие авторы. Упомянем среди них Спрингера [160], который впервые получил второй результат в XVI.

Наконец, Шиффер и Гарабедян, пользуясь вариационным методом, достигли значительного успеха в задаче об отыскании точных оценок модулей коэффициентов функций класса S и Σ. В частности, они доказали [30, 31] следующее:

XXIII. *Если* $f \in \Sigma$ *и имеет разложение* (1.1), *то*

$$|a_3| \leqslant 1/2 + e^{-6},$$

причем это неравенство не может быть улучшено.

XXIV. *Если* $f \in S$ *и имеет разложение* (1.2), *то*

$$|A_4| \leqslant 4,$$

причем равенство имеет место только для функций $z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2}$, *где* α — *вещественное число.*

Доказательство теоремы XXIV ведется отчасти способом, указанным Шеффером и Спенсером. Однако использование некоторых дополнительных понятий позволяет уменьшить объем вычислений, хотя он и остается огромным. Существовало довольно смутное предположение, что для $f \in \Sigma$ с разложением (1.1) выполняется неравенство $|a_n| \leqslant \frac{2}{n+1}$. Для опровержения этого предположения заметим, что гораздо раньше Голузин [48] обнаружил существование функций класса Σ, у которых $|a_3| = 1/2 + e^{-6}$.

Вариационный метод имеет то преимущество, что в случаях, когда существование экстремальной функции известно (это устанавливается обычно в теории однолистных функций методами теории нормальных семейств), он часто автоматически доставляет некоторую информацию об этой функции. Недостаток метода граничных вариаций состоит в том, что его использование связано с трудными проблемами топологии точечных множеств. Недостаток метода внутренних вариаций состоит в том, что этот метод предназначен прежде всего для односвязных областей. Его можно распространить на многосвязные области и на римановы поверхности, но при этом возникают новые трудности. Еще более важно то, что во всех задачах, за исключением самых простых из них, информации, которую дает вариационный метод сам по себе, недостаточно для определения экстремальной функции и требуются вспомогательные методы более сложной природы. Существенная информация, доставляемая вариационным методом, часто может быть получена непосредственно из принципа Тейхмюллера.

1.9. Понятие однолистной функции можно легко обобщить. Функция, заданная в некоторой области, называется p-листной, если всякое значение принимается ею в этой области не более чем p раз (p — целое). Бернацкий [18] отмечает, что это понятие впервые использовал Монтель, применявший его главным образом при изучении нормальных семейств и их обобщений [130]. Вскоре после этого многие авторы применяли к p-листным функциям методы, аналогичные элементарным методам

для однолистных функций. Таким образом, они получали обобщения результатов п. 1.2, но только в качественной форме. Были изучены также подклассы p-листных функций, аналогичные подклассам п. 1.3. В другом направлении шел Спенсер, который ввел [157—159] классы функций, p-листных в среднем (в разных смыслах), и получил некоторые результаты для таких классов. Однако первым добился успеха в получении точных оценок p-листных функций Хейман [171, 172]. В его работах существенную роль играет метод симметризации.

Идея симметризации была использована Штейнером в геометрических задачах. Первые ее приложения к теории функций были даны, по-видимому, Фабером [167]. Он применил симметризацию к изучению трансфинитного диаметра и таким образом получил новые доказательства некоторых теорем п. 1.2. Позднее подобный метод применял Бёйрлинг [11] при решении проблемы Карлемана—Мийу. Альфорс и Бёйрлинг развили понятие симметризации в связи с методом экстремальной длины, см. [28]. Однако наиболее эффективный подход к симметризации в задачах теории функций указали Пойа и Сегё [139—141]. Эти авторы применили свой метод к однолистным функциям и ко многим задачам из других областей. В работах Хеймана использован метод Пойа и Сегё [171] и другой метод, связанный с методом Фабера [172]. Хейман [173] обнаружил некоторые очень интересные асимптотические свойства коэффициентов многолистных функций.

Очень эффективным оказывается сочетание метода симметризации Пойа—Сегё с методом экстремальной метрики в приложении к задачам, которые не удавалось решить никаким другим способом [89, 90, 94, 96, 97].

Глава II

МОДУЛИ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ДЛИНЫ

2.1. Одним из наиболее важных приложений метода экстремальной метрики является определение конформных инвариантов. Эти рассмотрения можно проводить для самой общей римановой поверхности.

Определение 2.1. Пусть $\mathfrak{R}$ — риманова поверхность. Будем говорить, что *на* $\mathfrak{R}$ *определена конформно инвариантная метрика* $\rho(z)\,|dz|$, если каждому локальному униформизирующему параметру z поверхности $\mathfrak{R}$ соответствует вещественная неотрицательная измеримая функция $\rho(z)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) если γ — спрямляемая кривая в плоской параметрической окрестности, то интеграл $\int\limits_{\gamma} \rho(z)\,|dz|$ существует (как интеграл Лебега—Стильтьеса) и, возможно, равен $+\infty$;

(2) если окрестность на $\mathfrak{R}$ для локального параметра z^* поверхности $\mathfrak{R}$ пересекается с соответствующей окрестностью для параметра z и параметру z^* соответствует функция $\rho^*(z^*)$, то в любой точке пересечения этих окрестностей имеем

$$\rho^*(z^*) = \rho(z)\left|\frac{dz}{dz^*}\right|.$$

Определение 2.2. Кривая на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ называется *локально спрямляемой,* если для любой компактной дуги этой кривой, целиком лежащей в некоторой окрестности на $\mathfrak{R}$, в которой определен локальный параметр z, соответствующая дуга на плоскости z спрямляема.

Ясно, что для всякой локально спрямляемой кривой γ на римановой поверхности, на которой задана конформно инвариантная метрика $\rho(z)\,|dz|$, интеграл $\int\limits_\gamma \rho(z)\,|dz|$ вполне определен (возможно, он имеет величину $+\infty$).

Определение 2.3. Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых, заданных на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Будем говорить, что *для* Γ *определена проблема модуля,* если имеется непустой класс P конформно инвариантных метрик $\rho(z)\,|dz|$, заданных на $\mathfrak{R}$, для которых $\rho(z)$ интегрируема с квадратом в плоскости z для каждого локального униформизирующего параметра $z(=x+iy)$, так что интеграл

$$A_\rho(\mathfrak{R}) = \iint\limits_{\mathfrak{R}} \rho^2\,dx\,dy$$

имеет смысл, причем $A_\rho(\mathfrak{R})$ и

$$L_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_\gamma \rho\,|dz|$$

не равны одновременно 0 или ∞. В этом случае величину

$$m(\Gamma) = \inf_{\rho\in P} \frac{A_\rho(\mathfrak{R})}{[L_\rho(\Gamma)]^2}$$

мы назовем *модулем семейства* Γ. Модуль Γ может принимать значение 0 или ∞. Величина, обратная к $m(\Gamma)$, называется *экстремальной длиной* $\lambda(\Gamma)$ *семейства* Γ.

Проблема модуля, описанная в определении 2.3, однородна в том смысле, что значение $A_\rho(\mathfrak{R})\,[L_\rho(\Gamma)]^{-2}$ не изменится, если метрику $\rho(z)\,|dz|$ заменить на $K\rho(z)\,|dz|$, где K — любая положительная постоянная. Проблему модуля можно определять другими способами. Пусть сначала P_L — такой подкласс P, что для $\rho\in P_L$ и $\gamma\in\Gamma$

$$\int\limits_\gamma \rho\,|dz| \geqslant 1.$$

Если множество P_L непусто, то

$$m(\Gamma) = \inf_{\rho \in P_L} A_\rho(\mathfrak{R}).$$

Таким образом, мы получаем другое определение модуля семейства кривых, придавая $m(\Gamma)$ значение этой нижней грани, если P_L непусто, и значение ∞, если P непусто, а P_L — пусто. Такое определение называется L-определением модуля. Пусть теперь P_A — подкласс P, состоящий из тех метрик, для которых

$$A_\rho(\mathfrak{R}) \leqslant 1.$$

Если P_A непусто, то

$$m(\Gamma) = \inf_{\rho \in P_A} [L_\rho(\Gamma)]^{-2}.$$

Определение модуля семейства кривых, которое получится, если модулем назвать последнее число в том случае, когда P_A непусто, и ∞, когда P_L пусто, называется A-определением.

Всюду ниже, говоря о проблеме модуля для семейства кривых без дальнейших уточнений, мы будем иметь в виду L-определение.

Определение 2.4. Пусть Γ — семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, для которого определена проблема модуля и $m(\Gamma) \neq \infty$. Если проблема модуля понимается в смысле L-определения, то всякая метрика из P_L называется *допустимой*. Если в P_L существует метрика $\rho^*(z)|dz|$, для которой

$$m(\Gamma) = A_{\rho^*}(\mathfrak{R}),$$

то эта метрика называется *экстремальной*.

Если в роли римановой поверхности $\mathfrak{R}$ выступает плоская область Ω, то, как было отмечено в [7], модуль семейства кривых Γ в Ω зависит лишь от Γ, но не от Ω. Однако во всех известных автору приложениях Γ определяется в зависимости от Ω, так что это замечание не имеет существенных следствий.

2.2. Мы приведем теперь несколько наиболее важных свойств модулей. Самым основным из этих свойств является конформная инвариантность.

Теорема 2.1. *Пусть римановы поверхности* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{R}'$ *конформно эквивалентны,* f *— конформное отображение поверхности* $\mathfrak{R}$ *на* $\mathfrak{R}'$, φ *— обратное отображение. Пусть* Γ *— семейство локально спрямляемых кривых, заданных на* $\mathfrak{R}$, Γ' *— семейство образов кривых* Γ *при отображении* f. *Пусть для* Γ *определена проблема модуля и модуль равен* $m(\Gamma)$. *Тогда проблема модуля определена и для* Γ', *и* $m(\Gamma') = m(\Gamma)$.

Действительно, пусть $\rho(z)\,|dz|$ — метрика класса P на $\mathfrak{R}$. Пусть z' — некоторый локальный параметр для $\mathfrak{R}'$. Точка на $\mathfrak{R}'$, представленная значением параметра z', является образом при отображении f некоторой точки из окрестности для параметра z. Определим функцию

$$\rho'(z') = \rho(\varphi(z'))\,|\varphi'(z')|,$$

где $|\varphi'(z')|$ обозначает производную $\left|\frac{dz}{dz'}\right|$, вычисленную в точке z'. Легко видеть, что последнее равенство порождает конформно инвариантную метрику на $\mathfrak{R}'$, не зависящую от выбора локального параметра z. Кривые из Γ', очевидно, локально спрямляемы. Более того, если $\gamma' = f(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, то

$$\int_{\gamma} \rho(z)\,|dz| = \int_{\gamma'} \rho'(z')\,|dz'| \tag{2.1}$$

и $(z' = x' + iy')$

$$\iint_{\mathfrak{R}} (\rho(z))^2\,dxdy = \iint_{\mathfrak{R}'} (\rho'(z'))^2\,dx'dy'. \tag{2.2}$$

Таким образом, класс P′ конформно инвариантных метрик $\rho'(z')\,|dz'|$ на $\mathfrak{R}'$, для которых $\rho'(z')$ локально интегрируема с квадратом, а $A_{\rho'}(\mathfrak{R}')$ и

$$L_{\rho'}(\Gamma') = \inf_{\gamma' \in \Gamma'} \int_{\gamma'} \rho'\,|dz'|$$

не равны одновременно 0 или ∞, не пуст. Следовательно, модуль $m(\Gamma')$ определен для Γ'.

Обратно, всякой метрике $\rho'(z')|dz'|$, принадлежащей P′, соответствует некоторая метрика $\rho(z)|dz|$ из P, для которой выполнены равенства (2.1) и (2.2). Таким образом,

$$m(\Gamma') = m(\Gamma).$$

Теперь покажем, что если экстремальная метрика существует, то она в существенном единственна.

Теорема 2.2. *Пусть* Γ *— семейство локально спрямляемых кривых, лежащих на римановой поверхности* $\mathfrak{R}$, *для которого определена проблема модуля, и пусть* $m(\Gamma) \neq \infty$. *Пусть проблема модуля ставится в смысле L-определения. Если* $\rho_1^*(z)|dz|$ *и* $\rho_2^*(z)|dz|$ *— экстремальные метрики для этой проблемы, то всюду, за исключением подмножества* $\mathfrak{R}$ *меры нуль, имеем*

$$\rho_2^*(z) = \rho_1^*(z).$$

Заметим, во-первых, что, хотя на $\mathfrak{R}$ в целом не определена никакая мера, имеет смысл говорить о множестве меры нуль на $\mathfrak{R}$, так как это понятие в сепарабельном пространстве имеет локальный характер.

Ясно, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}} (\rho_1^*(z))^2\, dx\, dy = \iint\limits_{\mathfrak{R}} (\rho_2^*(z))^2\, dx\, dy = m(\Gamma).$$

Кроме того, $\frac{1}{2}(\rho_1^*(z) + \rho_2^*(z))\,|dz|$ — допустимая метрика, и

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\rho_1^*(z) + \rho_2^*(z)}{2}\right)^2 dx\, dy + \iint\limits_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\rho_1^*(z) - \rho_2^*(z)}{2}\right)^2 dx\, dy = m(\Gamma),$$

так что

$$\rho_1^*(z) = \rho_2^*(z)$$

всюду, за исключением множества меры нуль.

2.3. Теперь мы вычислим модули для некоторых конкретных семейств кривых.

Определение 2.5. Конфигурация, состоящая из односвязной области D гиперболического типа с четырьмя заданными различными граничными элементами, называется *четырехугольником*. Эти граничные элементы, называемые *вершинами*, разбивают все остальные граничные элементы в естественном смысле граничного соответствия на четыре множества, называемые *сторонами*. Говорят, что открытая кривая в D соединяет две стороны четырехугольника, если ее концы стремятся к граничным элементам, принадлежащим этим сторонам.

Теорема 2.3. *Пусть Q — четырехугольник с вершинами, обозначенными* 1, 2, 3, 4 *в естественном порядке на границе Q. Пусть Γ — класс локально спрямляемых кривых, лежащих в Q и соединяющих стороны* 12 *и* 34. *Этот четырехугольник можно конформно отобразить на прямоугольник R с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 так, чтобы точки* 1, 2, 3, 4 *перешли соответственно в эти вершины. Пусть A_1A_2 имеет длину a, A_2A_3 — длину b. Тогда модуль $m(\Gamma)$ равен a/b.*

Изменяя масштаб, если это необходимо, мы можем считать, что A_1A_2 имеет длину $l = a/b$, A_2A_3 — длину 1. Выберем координаты в z-плоскости ($z = x + iy$) так, чтобы прямоугольник R задавался неравенствами

$$0 < x < l, \quad 0 < y < 1,$$

а точка A_1 находилась в начале координат. По теореме 2.1 достаточно найти модуль семейства локально спрямляемых кривых, соединяющих горизонтальные стороны R. Будем рассматривать L-определение этой проблемы. Евклидова метрика $|dz|$, очевидно, допустима и

$$A_1(R) = l.$$

Пусть теперь $\rho(z)\,|dz|$ — любая допустимая для этой проблемы метрика, и пусть γ_x — пересечение прямой $\operatorname{Re} z = x$ с прямоугольником R. По предположению, для всех x, $0 < x < l$,

$$\int_{\gamma_x} \rho\, dy \geqslant 1.$$

Но так как $\rho \in L^2(R)$, то, по теореме Фубини, мы можем проинтегрировать $\int\limits_{\gamma_x} \rho\, dy$ по x в интервале $(0, l)$; получим

$$\iint\limits_R \rho\, dx\, dy = \int\limits_0^l dx \int\limits_{\gamma_x} \rho\, dy \geqslant l.$$

Теперь заметим, что

$$0 \leqslant \iint\limits_R (\rho - 1)^2\, dx\, dy = \iint\limits_R \rho^2\, dx\, dy - 2 \iint\limits_R \rho\, dx\, dy + \\ + \iint\limits_R dx\, dy, \tag{2.3}$$

т. е.

$$0 \leqslant \iint\limits_R \rho^2\, dx\, dy - l.$$

Значит, l — минимальное значение $A_\rho(R)$ для $\rho \in P_L$. Таким образом, $m(\Gamma) = a/b$, и экстремальной метрикой в R служит евклидова метрика. По теореме 2.2 всякая другая экстремальная метрика может отличаться от нее только на множестве меры нуль. Если $z = \Phi(w)$ отображает Q на R описанным выше способом, то (в существенном единственная) экстремальная метрика в Q — это $|\Phi'(w)|\,|dw|$.

Следствие 2.1. *Пусть Q то же, что и в теореме* 2.3. *Пусть Γ' — класс локально спрямляемых кривых в Q, соединяющих стороны* 23 *и* 41. *Тогда модуль $m(\Gamma')$ равен b/a. Таким образом, $m(\Gamma)m(\Gamma') = 1$.*

Известно, что $m(\Gamma)$ и $m(\Gamma')$ представляют собой характеристический конформный инвариант для Q. Поэтому $m(\Gamma)$ можно назвать модулем Q для класса кривых Γ; аналогично $m(\Gamma')$ — модуль Q для Γ'.

Следствие 2.2. *Пусть четырехугольник Q лежит в плоскости z. Пусть всякая кривая семейства Γ имеет в евклидовой метрике длину, не меньшую d, а всякая кривая семейства Γ' — длину, не меньшую δ. Пусть площадь Q равна A. Тогда*

$$\delta d \leqslant A.$$

Действительно, $d^{-1}|dz|$ — допустимая метрика в проблеме модуля для Г. Таким образом,

$$m(\Gamma) \leqslant d^{-2}A.$$

Аналогично

$$m(\Gamma') \leqslant \delta^{-2}A.$$

Перемножая эти неравенства и используя следствие 2.1, получаем требуемый результат. Нетрудно проверить, что равенство имеет место лишь в том случае, когда Q — прямоугольник с геометрически заданными вершинами.

Следствие 2.2 принадлежит Тейхмюллеру [162]. Недавно Безикович [10] дал доказательство, не использующее конформного отображения. Анализ его доказательства показывает, однако, что оно представляет собой по существу применение изопериметрического метода.

Теорема 2.4. *Пусть D — двусвязная область w-плоскости, ни одна из граничных компонент которой не вырождается в точку. Пусть* Г — *класс спрямляемых жордановых кривых, лежащих в D и разделяющих ее граничные компоненты. Область D можно конформно отобразить на круговое кольцо C в плоскости z, заданное неравенствами*

$$r_1 < |z| < r_2 \quad (0 < r_1 < r_2).$$

Тогда Г *имеет модуль* $m(\Gamma)$, *равный* $\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{r_2}{r_1}$.

По теореме 2.1 достаточно найти модуль для класса спрямляемых жордановых кривых, разделяющих граничные компоненты C.

В этой проблеме модуля допустима метрика $(2\pi|z|)^{-1}|dz|$. Действительно, полагая $z = re^{i\varphi}$, получаем для спрямляемой жордановой кривой γ, разделяющей граничные компоненты C:

$$\int_\gamma (2\pi|z|)^{-1}|dz| = \int_\gamma (2\pi r)^{-1}(dr^2 + r^2\,d\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_\gamma |d\varphi| \geqslant 1.$$

Далее соответствующая площадь равна

$$\iint_C (2\pi r)^{-2} r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}.$$

Пусть теперь $\rho(z)\,|dz|$ — любая допустимая в этой проблеме метрика, и пусть γ_r — окружность $|z| = r$, $r_1 < r < r_2$. Тогда, по условию,

$$\int_{\gamma_r} \rho\, r\, d\varphi \geqslant 1,$$

или

$$\int_{\gamma_r} \rho\, d\varphi \geqslant \frac{1}{r}\,.$$

Ввиду того что $\rho \in L^2(C)$, мы можем, как и выше, проинтегрировать $\int_{\gamma_r} \rho\, d\varphi$ по r в интервале (r_1, r_2). Получим

$$\frac{1}{2\pi}\iint_C \rho\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\gamma_r} \rho\, d\varphi \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Теперь заметим, что

$$0 \leqslant \iint_C \left(\rho - \frac{1}{2\pi r}\right)^2 r\, dr\, d\varphi = \iint_C \rho^2 r\, dr\, d\varphi - 2\cdot\frac{1}{2\pi}\iint_C \rho\, dr\, d\varphi + \\ + \iint_C \frac{1}{4\pi^2 r^2}\, r\, dr\, d\varphi, \qquad (2.4)$$

или

$$0 \leqslant \iint_C \rho^2\, r\, dr\, d\varphi - \frac{1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Значит, $\frac{1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}$ — это наименьшее значение $A_\rho(C)$ для $\rho \in P_L$. Таким образом, $m(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}$, и экстремальная метрика в C — это логарифмическая метрика $(2\pi\,|z|)^{-1}\,|dz|$. Она определена единственным образом, если пренебрегать множествами меры нуль.

Хорошо известно, что $m(\Gamma)$ — характеристический конформный инвариант области D[1]). Его можно поэтому назвать модулем области D для класса кривых Γ.

---

[1]) См., например, Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.— Л., 1950, стр. 376.— *Прим. перев.*

Теорема 2.5. *Пусть D — двусвязная область плоскости w, ни одна из граничных компонент которой не вырождается в точку. Пусть Γ' — класс локально спрямляемых кривых, лежащих в области D и соединяющих ее граничные компоненты. Область D можно конформно отобразить на круговое кольцо C в плоскости z, заданное неравенствами*

$$r_1 < |z| < r_2 \qquad (0 < r_1 < r_2).$$

Тогда Γ' имеет модуль $m(\Gamma')$, равный $2\pi/\log\frac{r_2}{r_1}$.

И здесь достаточно решить соответствующую проблему для C. В этой проблеме модуля допустима метрика $\left(|z|\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}|dz|$. Действительно, полагая $z = re^{i\varphi}$, мы получаем для локально спрямляемой кривой γ в C, соединяющей окружности $|z| = r_1$ и $|z| = r_2$:

$$\int_\gamma \left(|z|\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}|dz| = \int_\gamma \left(r\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}\int_\gamma \frac{|dr|}{r} \geqslant \left(\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} \geqslant 1.$$

Соответствующая площадь равна

$$\iint_C \left(r\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-2} r\,dr\,d\varphi = 2\pi/\log\frac{r_2}{r_1}.$$

Пусть теперь $\rho(z)|dz|$ — любая допустимая в этой проблеме метрика, и пусть γ_φ — отрезок, отсекаемый кольцом C' на радиусе с аргументом φ. По предположению,

$$\int_{\gamma_\varphi}\rho\,dr \geqslant 1.$$

Как и выше, можно проинтегрировать по φ в пределах $(0,2\pi)$; получим

$$\left(\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}\iint_C \rho\,dr\,d\varphi \geqslant 2\pi/\log\frac{r_2}{r_1}.$$

Далее,

$$0 \leqslant \iint\limits_C \left[\rho - \left(r \log \frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}\right]^2 r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_C \rho^2 r\,dr\,d\varphi -$$

$$- 2\left(\log \frac{r_2}{r_1}\right)^{-1} \iint\limits_C \rho\,dr\,d\varphi + \iint\limits_C \left(r \log \frac{r_2}{r_1}\right)^{-2} r\,dr\,d\varphi, \qquad (2.5)$$

или

$$0 \leqslant \iint\limits_C \rho^2 r\,dr\,d\varphi - 2\pi/\log \frac{r_2}{r_1}.$$

Значит, $2\pi/\log \frac{r_2}{r_1}$ — минимальное значение $A_\rho(C)$ для $\rho \in P_L$ Поэтому $m(\Gamma') = 2\pi/\log \frac{r_2}{r_1}$. Экстремальная метрика в C равна $\left(|z| \log \frac{r_2}{r_1}\right)^{-1} |dz|$.

Следствие 2.3. *Для семейств* Γ *и* Γ' *теорем* 2.4 *и* 2.5 *имеем* $m(\Gamma)\,m(\Gamma') = 1$.

Аналог следствия 2.2, очевидно, справедлив и для двусвязных областей.

2.4. Изменяя вычисления п. 2.3, можно получить результаты, очень полезные при доказательстве теорем единственности.

Лемма 2.1. *Пусть прямоугольник* R *в плоскости* z $(z = x + iy)$ *задан неравенствами*

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

γ_x — *пересечение* R *с прямой* $\operatorname{Re} z = x\,(0 < x < a)$. *Пусть функция* $\rho \in L^2(R)$ *такова, что*

$$\int\limits_{\gamma_x} \rho\,dy \geqslant c \qquad (2.6)$$

для почти всех x *из* $(0, a) \setminus (f, g)$, *где* $0 \leqslant f < g \leqslant a$, a *для почти всех* x *из* (f, g)

$$\int\limits_{\gamma_x} \rho\,dy \geqslant d. \qquad (2.7)$$

Тогда

$$\iint\limits_R \rho^2\,dx\,dy \geqslant a(2c-b) + 2(d-c)(g-f).$$

В самом деле, интегрируя (2.7) по x в пределах (f, g), а (2.6) по остальной части интервала $(0, a)$ и складывая, получаем

$$\iint\limits_R \rho\,dx\,dy \geqslant c[a-(g-f)] + d(g-f).$$

Подставляя это в неравенство (2.3), получаем утверждение леммы.

Если, в частности, $a = l$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1+k$, $k > 0$, то получаем неравенство

$$\iint\limits_R \rho^2\,dx\,dy \geqslant l + 2k(g-f),$$

дающее избыток этой площади над модулем прямоугольника R для класса кривых, соединяющих его горизонтальные стороны.

Лемма 2.2. *Пусть круговое кольцо C в плоскости z $(z = re^{i\varphi})$ задано неравенствами*

$$r_1 < |z| < r_2 \qquad (0 < r_1 < r_2),$$

и пусть γ_r — окружность $|z| = r$, $r_1 < r < r_2$. Пусть функция $\rho \in L^2(C)$ такова, что

$$\int\limits_{\gamma_r} \rho\,r\,d\varphi \geqslant c \tag{2.8}$$

для почти всех r из $(r_1, r_2) \setminus (f, g)$, где $r_1 \leqslant f < g \leqslant r_2$, а для почти всех r из (f, g)

$$\int\limits_{\gamma_r} \rho\,r\,d\varphi \geqslant d. \tag{2.9}$$

Тогда

$$\iint\limits_C \rho^2 r\,dr\,d\varphi \geqslant \frac{2c-1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1} + \frac{d-c}{\pi}\log\frac{g}{f}.$$

Действительно, записывая (2.9) в виде

$$\int\limits_{\gamma_r} \rho\, d\varphi \geqslant \frac{d}{r},$$

интегрируя по r в пределах (f, g), записывая (2.8) в виде

$$\int\limits_{\gamma_r} \rho\, d\varphi \geqslant \frac{c}{r},$$

интегрируя по r из остальной части промежутка (r_1, r_2) и складывая, получаем

$$\iint\limits_C \rho\, dr\, d\varphi \geqslant (d-c)\log\frac{g}{f} + c\log\frac{r_2}{r_1}.$$

Подставляя это в неравенство (2.4), получаем утверждение леммы.

В частности, если $c = 1$, $d = 1 + k$, $k > 0$, то мы получаем неравенство

$$\iint\limits_C \rho^2 r\, dr\, d\varphi \geqslant \frac{1}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{\pi}\log\frac{g}{f},$$

дающее избыток этой площади над модулем кольца C для класса кривых, разделяющих граничные компоненты.

Лемма 2.3. *Пусть круговое кольцо C в плоскости z $(z = re^{i\varphi})$ задано неравенствами*

$$r_1 < |z| < r_2 \qquad (0 < r_1 < r_2),$$

и пусть γ_φ — отрезок, отсекаемый кольцом C на луче с аргументом φ. Пусть функция $\rho \in L^2(C)$ такова, что

$$\int\limits_{\gamma_\varphi} \rho\, dr \geqslant c \tag{2.10}$$

для почти всех направлений φ из $(f, f + 2\pi) \setminus (f, g)$, где $f < g \leqslant f + 2\pi$, а для почти всех φ из (f, g)

$$\int\limits_{\gamma_\varphi} \rho\, dr \geqslant d. \tag{2.11}$$

Тогда

$$\iint\limits_C \rho^2 r\, dr\, d\varphi \geqslant 2\pi (2c-1)\left(\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1} + \\ + 2(d-c)(g-f)\left(\log\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}.$$

Действительно, интегрируя (2.11) по φ в пределах от f до g, интегрируя (2.10) по φ в остальной части промежутка $(0, 2\pi)$ и складывая, получаем

$$\iint\limits_C \rho\, dr\, d\varphi \geqslant c[2\pi - (g-f)] + d(g-f).$$

Подставляя это в неравенство (2.5), получаем утверждение леммы.

Если, в частности, $c = 1$, $d = 1+k$, $k > 0$, то мы получаем неравенство

$$\iint\limits_C r\rho^2\, dr\, d\varphi \geqslant 2\pi/\log\frac{r_2}{r_1} + 2k(g-f)/\log\frac{r_2}{r_1},$$

дающее избыток этой площади над модулем кольца C для класса кривых, соединяющих его граничные компоненты.

2.5. Пусть D_1, D_2 — две двусвязные области, m_1, m_2 — их модули (вычисляемые для класса кривых, разделяющих граничные компоненты). Очевидно, что D_1 и D_2 конформно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m_1 = m_2$. Эти модули, однако, дают информацию также и о конформных отображениях одной области в другую. С одной стороны, если $m_1 \geqslant m_2$, то ясно, что можно конформно отобразить D_2 в D_1 так, чтобы образ D_2 разделял граничные компоненты D_1. В этом можно убедиться, используя в качестве конформного инварианта отношение радиусов конформно эквивалентного кругового кольца. Настоящий метод позволяет легко доказать обращение этого результата. В действительности мы можем доказать даже более общий результат.

Теорема 2.6. *Пусть D — двусвязная область с модулем M относительно класса кривых, разделяющих ее*

граничные компоненты. Пусть D_j, $j = 1, \ldots, n$, — *непересекающиеся двусвязные области, лежащие в* D *и разделяющие граничные компоненты* D. *Пусть область* D_j *имеет модуль* M_j *относительно класса кривых, разделяющих ее граничные компоненты.*

Тогда

$$M \geqslant \sum_{j=1}^{n} M_j. \tag{2.12}$$

Пусть область D *конформно эквивалентна круговому кольцу* $C : r_1 < |z| < r_2$ $(0 < r_1 < r_2)$. *Тогда в* (2.12) *имеет место равенство в том и только в том случае, когда области* D_j *получаются при разбиении* D *с помощью* $n - 1$ *кривых, соответствующих окружностям в* C, *концентрическим граничным окружностям кольца.*

Ясно, что область D можно считать совпадающей с C. Тогда метрика $(2\pi|z|)^{-1}|dz|$ экстремальна для проблемы модуля в D. Но она допустима и в проблеме модуля для каждой D_j, поэтому

$$M = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} = \iint\limits_D \frac{1}{4\pi^2 r^2} r\, dr\, d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} \iint\limits_{D_j} \frac{1}{4\pi^2 r^2} r\, dr\, d\varphi \geqslant \sum_{j=1}^{n} M_j.$$

Пусть теперь D_j — образ кольца

$$r_j' < |w| < R_j'$$

при отображении $f_j(w)$. Тогда

$$M_j = \frac{1}{2\pi} \log \frac{R_j'}{r_j'}.$$

Если f_j переводит всякую окружность с центром в начале координат в такую же окружность, то D_j — круговое кольцо, концентрическое с D. Если это не так, то образ некоторой такой окружности имеет длину, большую еди-

ницы в логарифмической метрике. Поэтому для некоторого интервала $f \leqslant r \leqslant g$, $r_j' \leqslant f < g \leqslant R_j'$ и метрики

$$\rho(w)\,|\,dw\,| = (2\pi\,|\,f_j(w)\,|)^{-1}\,|\,f_j'(w)\,|\,|\,dw\,|$$

имеем (γ_r — окружность $|w| = r$, $w = re^{i\theta}$)

$$\int\limits_{\gamma_r} \rho r\,d\theta \geqslant 1 + k,$$

где k — положительная постоянная. Для прочих r из (r_j', R_j')

$$\int\limits_{\gamma_r} \rho\, r\,d\theta \geqslant 1.$$

Таким образом, по лемме 2.2

$$\iint\limits_{D_j} \frac{1}{4\pi^2 r^2}\, r\,dr\,d\varphi \geqslant M_j + \frac{k}{\pi}\log\frac{g}{f}$$

и

$$M > \sum_{j=1}^{n} M_j.$$

Доказательство утверждения о возможности равенства будет закончено, если мы заметим, что в случае равенства области D_j, будучи концентрическими круговыми кольцами, должны заполнять C.

Точно так же, используя только лемму 2.3 вместо леммы 2.2, можно доказать следующий результат.

Теорема 2.7. *Пусть D — двусвязная область с модулем M относительно класса кривых, соединяющих граничные компоненты. Пусть D_j, $j = 1, \ldots, n$ — непересекающиеся четырехугольники, лежащие в D, каждый из которых имеет пару противоположных сторон, принадлежащих соответственно двум различным граничным компонентам области D. Пусть D_j имеет модуль M_j для класса кривых, соединяющих эту пару противоположных сторон. Тогда*

$$M \geqslant \sum_{j=1}^{n} M_j. \tag{2.13}$$

Пусть область D конформно эквивалентна круговому кольцу $C: r_1 < |z| < r_2$ $(0 < r_1 < r_2)$. Тогда равенство в (2.13) *может иметь место в том и только в том случае, когда области D_j получаются при разбиении D с помощью n открытых дуг, соответствующих радиальным отрезкам кольца C, причем граничные элементы, к которым эти дуги стремятся у своих концов, дают вершины различных четырехугольников.*

Теоремы 2.6 и 2.7 представляют собою леммы Грёча [49]. Их без труда можно распространить на случай бесконечного множества подобластей; именно в этой форме Грёч и применял их. Он доказал их, не пользуясь геометрическим понятием модуля, и затем положил в основу своего метода полос.

2.6. Пусть Ω — односвязная область плоскости z гиперболического типа, содержащая точку z_0. Если число $r > 0$ достаточно мало, то множество

$$\Omega \bigcap \{|z - z_0| > r\}$$

— двусвязная область, которую мы обозначим $\Omega(r)$. Пусть модуль области $\Omega(r)$ относительно класса кривых, разделяющих ее граничные компоненты, равен $m(r)$. Если $0 < r' < r$, то по теореме 2.6

$$m(r) + \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{r'} \leqslant m(r'),$$

или

$$m(r) + \frac{1}{2\pi} \log r \leqslant m(r') + \frac{1}{2\pi} \log r'.$$

Таким образом, $m(r) + \frac{1}{2\pi} \log r$ возрастает, когда r стремится к нулю, и существует предел

$$\lim_{r \to 0} \left[m(r) + \frac{1}{2\pi} \log r \right].$$

Этот предел называется *приведенным модулем* Ω относительно точки z_0 [162,7].

Теорема 2.8. *Пусть односвязная область* Ω *гиперболического типа на плоскости* z *имеет внутренний конформный радиус* R *относительно точки* $z_0 \in \Omega$. *Тогда приведенный модуль* Ω *относительно* z_0 *равен* $\frac{1}{2\pi} \log R$.

Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает Ω на круг $|w| < R$, причем $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 1$. Образ окружности $|z - z_0| = r$ лежит между окружностями

$$|w| = r[1 + \delta(r)],$$
$$|w| = r[1 - \delta(r)],$$

где $\lim\limits_{r \to 0} \delta(r) = 0$. Образ $\Omega(r)$ при отображении f лежит в круговом кольце

$$r[1 - \delta(r)] < |w| < R$$

и разделяет его граничные компоненты; этот образ содержит круговое кольцо

$$r[1 + \delta(r)] < |w| < R,$$

разделяющее его граничные компоненты. Таким образом, по теореме 2.6

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r[1 + \delta(r)]} \leqslant m(r) \leqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{r[1 - \delta(r)]}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \log R - \frac{1}{2\pi} \log[1 + \delta(r)] \leqslant m(r) + \frac{1}{2\pi} \log r \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \log R - \frac{1}{2\pi} \log[1 - \delta(r)].$$

Устремляя r к нулю, получаем утверждение теоремы 2.8.

Легко показать, что для приведенных модулей справедлив результат, аналогичный теореме 2.6 [162].

2.7. Определение 2.3 модуля семейства кривых можно обобщать различными способами. Например, можно не требовать, чтобы элементами семейства были отдельные кривые, а считать элементом семейства конечное (или, быть может, даже бесконечное) множество кривых. Рассмотрения такого типа в сочетании с понятием приве-

денного модуля связаны с теорией емкости плоских множеств. Мы здесь в дальнейшем не будем заниматься этим вопросом.

Более важным для приложений к теории однолистных функций оказывается обобщение, которое возникает при одновременном рассмотрении нескольких семейств кривых. При этом удобнее пользоваться L-определением модуля.

Определение 2.6. Пусть Γ_j, $j = 1, \ldots, n$, — семейства локально спрямляемых кривых, лежащих на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Пусть a_j, $j = 1, \ldots, n$, — неотрицательные вещественные числа, не все равные нулю. Пусть $P(a_1, \ldots, a_n)$ — класс конформно инвариантных метрик $\rho(z)|dz|$ на $\mathfrak{R}$, для которых $\rho^2(z)$ интегрируема для каждого локального параметра $z = x + iy$ и

$$\int\limits_{\gamma_j} \rho(z)\,|dz| \geqslant a_j, \qquad \gamma_j \in \Gamma_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Если множество $P(a_1, \ldots, a_n)$ *не пусто, то* мы скажем, что *проблема модуля* $P(a_1, \ldots, a_n)$ *определена для семейств кривых* Γ_j *и чисел* a_j, $j = 1, \ldots, n$. В этом случае

$$M(a_1, \ldots, a_n) = \inf_{\rho \in P(a_1, \ldots, a_n)} \iint\limits_{\mathfrak{R}} \rho^2\, dx\, dy$$

называется *модулем* для этой проблемы. Метрика, входящая в $P(a_1, \ldots, a_n)$, называется *допустимой* для этой проблемы. Если в $P(a_1, \ldots, a_n)$ существует метрика $\rho^*(z)\,|dz|$, для которой

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}} [\rho^*(z)]^2\, dx\, dy = M(a_1, \ldots, a_n),$$

то она называется *экстремальной метрикой для этой проблемы.*

Модуль, определенный таким образом, является скорее функцией, чем числом. Он также представляет собой конформный инвариант. Для таких модулей справедлива теорема единственности, вполне аналогичная теореме 2.2. Автор доказал существование экстремальных метрик в достаточно общих предположениях [100].

2.8. Непосредственное применение понятия модуля позволяет доказать все элементарные теоремы об однолистных функциях. Действительно, Грёч своим методом полос получил не только эти теоремы и их обобщения, но и некоторые замечательные новые результаты. Все его доказательства можно переформулировать в терминах модулей. Это часто приводит к техническим упрощениям, но основные идеи не меняются. Мы не будем здесь излагать эти доказательства, так как все упомянутые теоремы являются следствиями общей теоремы о коэффициентах. Однако интересно дать один пример применения этого метода. Для этой цели мы выберем теорему Кёбе об одной четверти.

Теорема 2.9. *Для $f \in S$ образ круга $|z|<1$ при отображении $w=f(z)$ покрывает круг $|w|<\frac{1}{4}$. Функция f выпускает какое-либо значение w, $|w|=\frac{1}{4}$, только тогда, когда $f(z)=z(1+e^{i\alpha}z)^{-2}$, α — вещественное число.*

Все вышеуказанные экстремальные функции с помощью элементарных операций получаются из функции $\widetilde{f}(z)=z(1+z)^{-2}$, отображающей круг $|z|<1$ на область D, которая представляет собой плоскость w $(w=u+iv)$, разрезанную по лучу $w \geqslant \frac{1}{4}$. Пусть $z=\varphi(w)$ — обратное отображение, определенное в D. Предположим теперь, что образ круга $|z|<1$ при отображении f не содержит некоторой точки окружности $|w|=\frac{1}{4}$. Тогда образ круга $|z|<1$ при отображении $e^{i\beta}f$ при надлежащем выборе β не будет содержать точки $w=\frac{1}{4}$.

В D рассмотрим метрику

$$\widetilde{\rho}(w)\,|dw| = (2\pi\,|\varphi(w)|)^{-1}\,|\varphi'(w)|\,|dw| = (2\pi\,|w|\,|1-4w|^{1/2})^{-1}\,|dw|.$$

Обозначим образ окружности $|z|=r$ при отображении $\widetilde{f}$ через $C(r)$, а образ кольца $\delta<|z|<1$ $(0<\delta<1)$ —

через $D(\delta)$. Если при отображении $e^{i\beta}f$ какая-либо окружность $|z| = r$ не переходит в некоторую кривую $C(r')$, то длина ее образа в метрике $\widetilde{\rho}(w)|dw|$ превосходит 1. (Это произойдет даже в том случае, когда этот образ не лежит в D, так как метрика $\widetilde{\rho}(w)|dw|$ симметрична относительно оси u.) Тогда для метрики

$$\rho(z)|dz| = (2\pi|f(z)||1 - 4e^{i\beta}f(z)|^{1/2})^{-1}|f'(z)||dz|$$

в некотором интервале $g < r < h$ $(0 < g < h \leqslant 1)$ имеем

$$\int_{\gamma_r} \rho|dz| \geqslant 1 + k,$$

где γ_r — окружность $|z| = r$, а k — положительная постоянная. Для всех r, $0 < r < 1$, выполняется, конечно, неравенство

$$\int_{\gamma_r} \rho|dz| \geqslant 1.$$

Поэтому при $\delta < g$ по лемме 2.2 имеем

$$\iint_{\delta<|z|<1} \rho^2\,dx\,dy \geqslant \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\delta} + \frac{k}{\pi}\log\frac{h}{g}. \qquad (2.14)$$

С другой стороны, образ окружности $|z| = \delta$ при отображении $e^{i\beta}f$ содержит $C(\delta(1 - \varepsilon(\delta)))$, где $\lim\limits_{\delta\to 0}\varepsilon(\delta) = 0$. Значит,

$$\iint_{\delta<|z|<1} \rho^2\,dx\,dy \leqslant \iint_{D'} \widehat{\rho}^2\,du\,dv = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\delta(1 - \varepsilon(\delta))},$$

где D' обозначает область $D(\delta(1 - \varepsilon(\delta)))$. Сопоставляя это неравенство с (2.14), получаем

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\delta} + \frac{k}{\pi}\log\frac{h}{g} \leqslant \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\delta(1 - \varepsilon(\delta))},$$

или

$$\frac{k}{\pi}\log\frac{h}{g} \leqslant \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{1 - \varepsilon(\delta)}.$$

Устремляя δ к нулю, получаем противоречие.

Если при отображении $e^{i\beta}f$ всякая окружность $|z| = r$ переходит в некоторую кривую $C(r')$, то функция $\varphi(e^{i\beta}f(z))$ переводит всякую окружность $|z| = r$ в другую такую окружность и имеет производную, равную по модулю единице при $z = 0$. Поэтому

$$|\varphi(e^{i\beta}f(z))| = |z|$$

и

$$\varphi(e^{i\beta}f(z)) = e^{i\alpha}z,$$

где α — вещественное число, т. е.

$$f(z) = e^{-i\beta}\widetilde{f}(e^{i\alpha}z).$$

Так как $f'(0) = 1$, отсюда следует, что $\alpha = \beta$ и $f(z) = z(1 + e^{i\alpha}z)^{-2}$.

2.9. Кроме того обобщения, которое приведено в п. 2.7, возможны и многие другие модификации определения 2.3 для модуля и экстремальной длины. Восемь или девять лет назад автору пришло в голову, что это определение можно изменить, опустив условие спрямляемости кривых семейства Γ и интегрируемости с квадратом функций ρ и заменив входящие в определение криволинейные интегралы по площади соответствующими верхними интегралами.

Хотя a priori это приводит к более общему определению, автор не смог найти примера ситуации, в которой это определение имело бы существенные преимущества, тогда как оно ведет к известной утрате интуитивного содержания и естественности. Поэтому автор не занимался более этим определением. Недавно Херш [174] предложил такое же определение и, исходя из него, вновь развил основные результаты Альфорса—Бёрлинга. Но автор по-прежнему не находит существенных преимуществ в таком подходе, несмотря на то, что Херш утверждает противное. В самом деле, в большинстве при-

ложений к теории функций достаточно работать с кусочно-аналитическими кривыми [1]).

Заметим, что эти идеи встречаются еще у Гросса [70, 71], который использовал верхние и нижние интегралы в своих работах по приложениям принципа длин и площадей.

---

[1]) С этими высказываниями автора трудно согласиться. В самом деле, например, в теории квазиконформных отображений приходится рассматривать отображения, не связанные условиями гладкости. Такие отображения могут преобразовывать спрямляемые кривые в неспрямляемые, и при изучении модуля образов семейств кривых нельзя ограничиваться спрямляемыми кривыми.

Заметим еще, что, кроме цитированного автором общего определения Херша, существует определение, предложенное Б. Фюгледе (см. Fuglede B., Extremal length and functional completion, *Acta Math.*, **98**, 3—4 (1957), 171—219], основанное на интегралах Лебега (а не Дарбу, как у Херша); последнее определение имеет некоторые преимущества — *Прим. ред.*

Глава III

КВАДРАТИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

3.1. Сначала мы займемся квадратичными дифференциалами и локальным строением некоторых важных кривых, связанных с ними.

Определение 3.1. Пусть $\mathfrak{R}$ — (ориентированная) риманова поверхность (открытая или замкнутая). Мы будем говорить, что на $\mathfrak{R}$ *определен квадратичный дифференциал,* если каждому локальному параметру z поверхности $\mathfrak{R}$ сопоставлена некоторая функция $Q(z)$, мероморфная в соответствующей окрестности и удовлетворяющая следующему условию. Если z^* — другой локальный параметр для $\mathfrak{R}$ и $Q^*(z^*)$ — такая же функция для z^*, причем окрестности, соответствующие z и z^*, пересекаются, то в общих точках этих окрестностей

$$Q^*(z^*) = Q(z)\left(\frac{dz}{dz^*}\right)^2.$$

Квадратичные дифференциалы будут обозначаться символом $Q(z)dz^2$. Точка P поверхности $\mathfrak{R}$ называется *нулем* или *полюсом порядка* k дифференциала $Q(z)dz^2$, если для каждого локального параметра z она изображается точкой, обладающей соответствующим свойством относительно $Q(z)$. Нули и полюсы $Q(z)dz^2$ называются *критическими точками* этого квадратичного дифференциала. Нули и простые полюсы называются *конечными* критическими точками; их совокупность будет обозначаться через C. Множество всех полюсов порядка не ниже второго будет обозначаться через H.

Заметим, что, в отличие от Тейхмюллера [164], мы занимаемся ориентированными римановыми поверхностями. Очевидно, что критические точки квадратичного дифференциала изолированны.

Определение 3.2. Пусть $\mathfrak{R}$ — риманова поверхность, $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал, заданный на $\mathfrak{R}$. Максимальная регулярная кривая, на которой $Q(z)dz^2 > 0$, называется *траекторией* дифференциала $Q(z)dz^2$. Максимальная регулярная кривая, на которой $Q(z)dz^2 < 0$, называется *ортогональной траекторией*[1]) дифференциала $Q(z)dz^2$.

Легко видеть, что траектории и ортогональные траектории внутренним образом связаны с квадратичным дифференциалом, т. е. они не зависят от выбора локальных параметров.

3.2. Если $\mathfrak{R}$ — риманова поверхность, а $Q(z)dz^2$ — заданный на $\mathfrak{R}$ квадратичный дифференциал, то на множестве $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$ локально определен интеграл $\int (Q(z))^{1/2}\, dz$ как регулярная функция, не зависящая от выбора локальных параметров. Но, вообще говоря, этот интеграл не будет, конечно, однозначно определен в целом. Эта функция очень полезна при изучении локальной структуры траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$. Конечно, во всех случаях аналогичные результаты применимы и к ортогональным траекториям.

Теорема 3.1. *Какова бы ни была точка P множества $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$, существует окрестность N этой точки на $\mathfrak{R}$ и гомеоморфное отображение N на круг $|w| < 1$ $(w = u + iv)$, при котором максимальная открытая дуга некоторой траектории из N переходит в отрезок, на котором v постоянна.*

Действительно, в достаточно малой параметрической окрестности точки P (P изображается точкой $z = 0$) функция $\zeta = \int\limits_0 (Q(z))^{1/2}\, dz$ однозначна и регулярна, причем производная $d\zeta/dz$ в точке P отлична от нуля. Поэтому в некоторой окрестности N' точки P функция ζ — однолистная функция от z. Образ окрестности N' в плоскости w при отображении $w = K\zeta$, где K — подходящая положительная постоянная, содержит круг $|w| < 1$.

[1]) Траектории и ортогональные траектории квадратичного дифференциала называют также горизонтальными и соответственно вертикальными дугами (ср. ниже, теорема 3.1).— *Прим. ред.*

На образе траектории $\operatorname{Im}\zeta$ сохраняет постоянное значение. Теорема, таким образом, доказана.

Следствие 3. 1. *Через каждую точку из* $\mathfrak{R}\setminus(C\cup H)$ *проходит траектория дифференциала* $Q(z)dz^2$, *являющаяся либо открытой дугой, либо жордановой кривой на* $\mathfrak{R}$.

Теорема 3. 2. *Какова бы ни была точка* $P \in C$ *порядка* μ ($\mu > 0$, *если* P — *нуль;* $\mu = -1$, *если* P — *простой полюс*), *существует окрестность* N *этой точки на* $\mathfrak{R}$ *и гомеоморфное отображение* N *на круг* $|w| < 1$, *при котором максимальная дуга каждой траектории из* N *переходит в открытую дугу, на которой* $\operatorname{Im} w^{(\mu+2)/2}$ *постоянна. Существует* $\mu+2$ *траектории с концами в* P *и с предельными касательными направлениями, составляющими друг с другом равные углы величины* $2\pi/(\mu+2)$ [1].

Строение траекторий вблизи простого нуля изображено на рис. 1, вблизи простого полюса — на рис. 2.

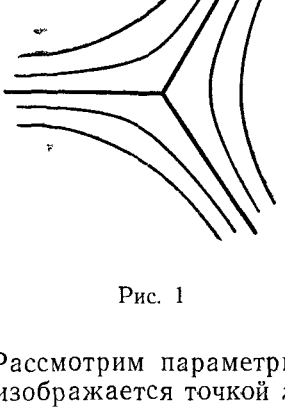

Рис. 1

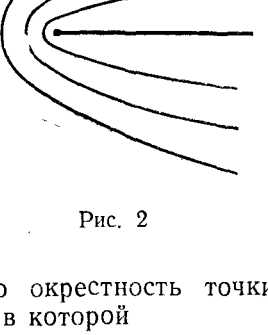

Рис. 2

Рассмотрим параметрическую окрестность точки P (P изображается точкой $z = 0$), в которой

$$Q(z) = Az^{\mu}(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots),$$

где A, b_1, b_2, ... — постоянные. Положим $Z^2 = z$, т. е. отобразим некоторую двулистную накрывающую z-окрестности на некоторую однолистную окрестность N'

[1] На этих $\mu + 2$ траекториях $\operatorname{Im} w^{(\mu+2)/2} = 0$. — *Прим. ред.*

точки $Z=0$. На N' индуцируется квадратичный дифференциал $q(Z)dZ^2$:

$$q(Z)=4AZ^{2\mu+2}(1+b_1Z^2+b_2Z^4+\ldots).$$

Траектории дифференциала $q(Z)dZ^2$ располагаются парами, симметричными относительно начала координат; каждая пара соответствует одной траектории дифференциала $Q(z)dz^2$. Положим $\zeta=\int\limits_0^{}[q(Z)]^{1/2}dZ$. В некоторой (возможно, уменьшенной) окрестности точки $Z=0$ функция ζ регулярна и задается разложением

$$\zeta=\frac{2A^{1/2}}{\mu+2}Z^{\mu+2}(1+c_1Z^2+c_2Z^4+\ldots),$$

где c_1, c_2, ...— некоторые постоянные. Тем самым некоторая окрестность точки $Z=0$ отображается на $(\mu+2)$-листный разветвленный элемент с точкой разветвления $\zeta=0$. Положим $W=K\zeta^{1/(\mu+2)}$, где K — некоторая положительная постоянная, выбранная так, что этот разветвленный элемент отображается на плоскую область, содержащую круг $|W|<1$. Пара траекторий дифференциала $q(Z)dZ^2$, симметричных относительно начала, переходит при суперпозиции этих отображений в пару кривых, на которых $\operatorname{Im}W^{\mu+2}$ постоянна, причем эта пара также симметрична относительно начала. Наконец, положим $w=W^2$. Тогда последняя пара кривых перейдет в одну кривую, на которой $\operatorname{Im}w^{(\mu+2)/2}$ постоянна. Таким образом, полученное в результате отображение плоскости z на плоскость w является гомеоморфизмом и отображает окрестность точки $z=0$, представляющую некоторую окрестность N точки P на $\mathfrak{R}$, на круг $|w|<1$, причем открытые дуги траекторий, лежащие в этой окрестности, переходят в кривые, на которых $\operatorname{Im}w^{(\mu+2)/2}$ постоянна.

На этом разветвленном элементе расположено $2(\mu+2)$ отрезков, лежащих над вещественной ζ-осью, имеющих концы в точке разветвления и составляющих на этом элементе равные углы друг с другом. Они попарно соответствуют $\mu+2$ открытым радиальным отрезкам в круге $|w|<1$, на которых $\operatorname{Im}w^{(\mu+2)/2}=0$.

Соответствующие кривые в N являются траекториями, о которых идет речь в заключительном утверждении теоремы 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть точка $P \in H$ — полюс порядка $\mu(\mu>2)$. Если некоторая траектория имеет конец в P, то она стремится к P по одному из $(\mu-2)$ направлений, расположенных под равными углами $2\pi/(\mu-2)$. Существует окрестность N точки P на $\mathfrak{R}$ со следующими свойствами:*

(I) *всякая траектория, проходящая через некоторую точку окрестности N в обоих направлениях, либо стремится к P, либо выходит из N;*

(II) *существует окрестность N^* точки P, содержащаяся в N и такая, что всякая траектория, проходящая через некоторую точку из N^* хотя бы в одном направлении, стремится к P, оставаясь в N^*;*

(III) *если некоторая траектория целиком лежит в N и поэтому в обоих направлениях стремится к P, то касательная к этой траектории при приближении к P в соответствующем направлении стремится к одному из двух смежных предельных положений. Жорданова кривая, полученная присоединением к этой траектории точки P, ограничивает область D, содержащую точки угла, составленного двумя соседними предельными касательными. Касательная к любой траектории, имеющей общие точки с D, стремится при приближении к P в двух направлениях соответственно к этим смежным предельным положениям. Область D отображается с помощью подходящей ветви функции $\zeta = \int (Q(z))^{1/2} dz$ на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > c$ (c — вещественное число).*

(IV) *Для каждой пары смежных предельных положений существует траектория, обладающая свойствами, описанными в* (III).

Строение траекторий вблизи полюса пятого порядка указано на рис. 3.

Траекторию можно рассматривать как интегральную кривую дифференциального уравнения

$$Q(z)\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = 1, \tag{3.1}$$

где τ можно интерпретировать как вещественную часть функции $\zeta = \int (Q(z))^{1/2}\, dz$.

Рассмотрим параметрическую окрестность точки P для локального параметра z, с помощью которого точка

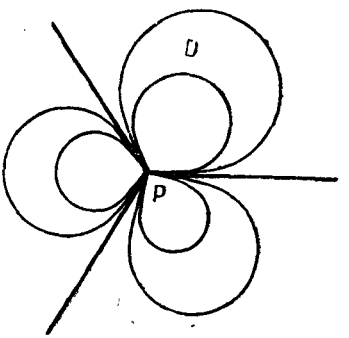

Рис. 3

P изображается точкой $z = 0$, и положим $s^2 = z$, т. е. отобразим двулистную накрывающую z-окрестности на однолистную окрестность Σ точки $s = 0$. С помощью этой переменной дифференциальное уравнение (3.1) можно записать в виде

$$\frac{ds}{d\tau} = A\, s^{\mu-1}\,(1 + b_1 s^2 + b_2 s^4 + \ldots), \qquad (3.2)$$

где A, b_1, b_2, ... — некоторые постоянные. Здесь мы произвольным образом выбрали ветвь квадратного корня (что не сказывается на траекториях); ряд сходится в некотором круге $|s| < R$, содержащемся в Σ.

Сделаем теперь подстановку $s = [-A(\mu - 2)\, Z]^{-1/(\mu-2)}$, причем ветвь корня выбирается так, что дифференциальное уравнение (3.2) переходит в уравнение

$$\frac{dZ}{d\tau} = 1 + c_1 Z^{-2/(\mu-2)} + c_2 Z^{-4/(\mu-2)} + \ldots, \qquad (3.3)$$

где $c_1, c_2, \ldots$ — постоянные. Последнее отображение переводит круг $|s| < R$ в $(\mu - 2)$-кратно разветвленный элемент, внешний к кругу Z-плоскости, на котором ряд по степеням $Z^{-2/(\mu-2)}$ сходится. Выберем β так, чтобы для $|Z| \geqslant \beta$ выполнялось неравенство

$$|c_1 Z^{-2/(\mu-2)} + c_2 Z^{-4/(\mu-2)} + \ldots| < \frac{1}{2}$$

при любом выборе ветви корня. Пусть $Z = X + iY$. Обозначим $(\mu - 2)$-кратно разветвленный элемент, внешний к окружности $|Z| = \beta$, через B, а точку разветвления на B, лежащую над $Z = \infty$, — через T. Тогда на некоторой интегральной кривой уравнения (3.3) на B имеем

$$\frac{3}{2} > \frac{dX}{d\tau} > \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{dY}{d\tau}\right| < \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

Таким образом, пока эта кривая лежит на B, величина X изменяется на ней монотонно вместе с τ и кривая составляет с осью X угол, тангенс которого по абсолютной величине меньше единицы. Поскольку всякая точка элемента B, отличная от T, есть образ некоторой точки множества $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$, то интегральная кривая уравнения (3.3), как образ траектории, не может кончаться в точке из B, лежащей над конечной точкой плоскости Z. Значит, в заданном направлении такая кривая или стремится к T, или выходит из B. Если в некотором направлении эта кривая стремится к T, то первое из неравенств (3.4) показывает, что τ стремится к бесконечности. Ясно также, что $\frac{dY}{d\tau}$ стремится к нулю, поэтому эта кривая стремится к T в направлении отрицательной или положительной вещественной оси. Следовательно, в точке T на B имеется $2\mu - 4$ возможных предельных направления.

Интегральная кривая уравнения (3.3), лежащая целиком на B, однолистно расположена над плоскостью Z; поэтому в обоих своих направлениях она имеет два последовательных возможных предельных положения касательной. Такая кривая Λ, замкнутая точкой T, ограничивает на B односвязную область Δ. Интегральная кривая уравнения (3.3), проходящая через какую-ни-

будь точку Λ, не может пересечь Λ; поэтому она целиком лежит в B и должна иметь те же самые предельные направления.

Пусть B^* — разветвленный элемент, содержащийся в B и лежащий во внешности окружности $|Z| = 2^{1/2}\beta$. Если интегральная кривая уравнения (3.3) проходит через точку из B^*, лежащую над полуплоскостью $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$, то эта кривая стремится к T. Это следует из того, что ее наклон по абсолютной величине меньше единицы, и поэтому она не может достичь точки, лежащей над окружностью $|Z| = \beta$.

Аналогично интегральная кривая уравнения (3.3), проходящая через точку из B^*, лежащую над полуплоскостью $\operatorname{Re} Z \leqslant 0$, стремится к T в направлении убывания X. В частности, интегральная кривая уравнения (3.3), проходящая через точку из B^*, лежащую над мнимой осью плоскости Z, должна стремиться к T в обоих направлениях. Эти кривые, проходящие через $2\mu - 4$ точек из B^*, лежащих над $\pm 2^{1/2}\beta i$ в $\mu - 2$ листах B^*, имеют в свою очередь каждую возможную пару предельных положений, примыкающих друг к другу в циклическом порядке при обходе вокруг T, соответствующими предельными положениями в двух направлениях.

Из всех предыдущих утверждений можно получить информацию об интегральных кривых уравнения (3.2) в круге $|s| < \alpha^{1/2}$ ($\alpha^{1/2} \leqslant R$). Всякой порции образа траектории дифференциала $Q(z)dz^2$ в круге $|z| < \alpha$ соответствуют две такие интегральные кривые, симметричные относительно точки $s = 0$. Относя предыдущие утверждения к плоскости z и окрестности N на $\mathfrak{R}$, соответствующей кругу $|z| < \alpha$, мы получим все утверждения теоремы 3.3, за исключением последнего утверждения пункта (III).

Для доказательства этого утверждения нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.1. *В односвязной области, не содержащей ни одной критической точки дифференциала $Q(z)dz^2$, дуга траектории и дуга ортогональной траектории могут пересекаться не более чем в одной точке.*

Эта лемма является частным случаем одного общего результата о регулярных семействах кривых [102, 103].

Действительно, в такой области траектории образуют регулярное семейство кривых, а ортогональные траектории служат трансверсалями для этого семейства. В данном случае этот результат сразу получается при рассмотрении отображения заданной области с помощью функции $\int [Q(z)]^{1/2}\,dz$[1]).

Пусть теперь Λ — траектория, о которой говорится в пункте (III), D — соответствующая область. Тогда ортогональная траектория, входящая в D в некоторой точке Λ, должна в этом направлении стремиться к P, пересекая каждую траекторию, лежащую в D, один и только один раз (это видно из представления разветвленного элемента). Заключительное утверждение непосредственно следует из сказанного.

Теорема 3.4. *Пусть точка $P \in H$ — полюс второго порядка, и z — локальный параметр, причем точке P соответствует $z = 0$.*

Пусть $[Q(z)]^{-1/2}$ имеет (при некотором выборе ветви корня) следующее разложение в окрестности точки $z = 0$:

$$[Q(z)]^{-1/2} = (a + ib)\,z\{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\}, \qquad (3.5)$$

где a, b — вещественные, а b_1, b_2,... — комплексные постоянные. Строение образов траекторий дифференциала $Q(z)\,dz^2$ в плоскости z определяется тем, какой из следующих трех случаев имеет место.

Случай I: $a \neq 0$, $b \neq 0$. *Для достаточно малого $\alpha > 0$ образ всякой траектории, пересекающий круг $|z| < \alpha$, в одном направлении стремится к $z = 0$, а в другом — выходит из круга $|z| < \alpha$. И модуль, и аргумент z изменяются монотонно на образе траектории в круге $|z| < \alpha$. Всякий образ траектории закручивается около точки $z = 0$ и ведет себя асимптотически, как логарифмическая спираль.*

---

[1]) Функция $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ отображает рассматриваемую односвязную область однолистно на некоторую область плоскости ζ так, что траектории переходят в линии $\operatorname{Im}\zeta = \text{const}$, а ортогональные траектории — в линии $\operatorname{Re}\zeta = \text{const}$. — *Прим. ред.*

Случай II: $a \neq 0$, $b = 0$. *Для достаточно малого* $\alpha > 0$ *образ всякой траектории, пересекающий круг* $|z| < \alpha$, *в одном направлении стремится к* $z = 0$, *а в другом — выходит из круга* $|z| < \alpha$. *Модуль* z *изменяется монотонно на образе траектории в круге* $|z| < \alpha$. *Разные образы траекторий имеют разные предельные направления в точке* $z = 0$.

Случай III: $a = 0$, $b \neq 0$. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое число* $\alpha(\varepsilon) > 0$, *что при* $0 < \alpha \leqslant \alpha(\varepsilon)$ *образ траектории, пересекающий окружность* $|z| = \alpha$, *представляет собой жорданову кривую, лежащую в круговом кольце*

$$\alpha(1+\varepsilon)^{-1} < |z| < \alpha(1+\varepsilon).$$

Строение траекторий вблизи полюса второго порядка в этих трех случаях показано соответственно на рис. 4, 5 и 6.

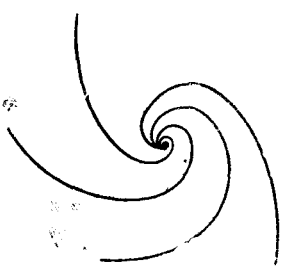

Рис. 4

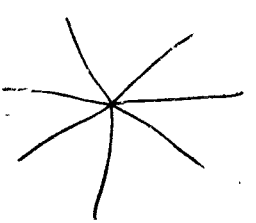

Рис. 5

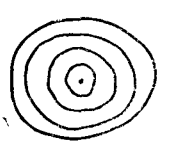

Рис. 6

Будем снова рассматривать траектории как интегральные кривые дифференциального уравнения

$$Q(z)\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = 1;$$

образы этих траекторий в плоскости z являются интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = (a+ib)\,z\{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\}$$

в соответствующем круге $|z|<R$, в котором этот ряд сходится. После подстановки $z=e^Z$ это дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{dZ}{d\tau}=a+ib+c_1e^Z+c_2e^{2Z}+\dots, \tag{3.6}$$

где c_1, c_2, ... — некоторые постоянные. При этом отображении левая полуплоскость $\operatorname{Re} Z\leqslant\log\alpha$ $(\alpha<R)$ соответствует области $0<|z|\leqslant\alpha$, покрытой некоторым логарифмически разветвленным элементом. Ряд в (3.6) сходится равномерно при $\operatorname{Re} Z\leqslant\log\alpha$. Положим снова $Z=X+iY$.

Случай I. Можно выбрать α столь малым, чтобы при $\operatorname{Re} Z\leqslant\log\alpha$ выполнялось неравенство

$$|c_1e^Z+c_2e^{2Z}+\dots|<\min\left(\frac{|a|}{2},\ \frac{|b|}{2}\right).$$

Тогда на интегральной кривой уравнения (3.6) в полуплоскости $\operatorname{Re} Z\leqslant\log\alpha$ имеем

$$\left|\frac{dX}{d\tau}\right|>\frac{|a|}{2},\quad \left|\frac{dY}{d\tau}\right|>\frac{|b|}{2}. \tag{3.7}$$

Поэтому на такой кривой X и Y изменяются монотонно вместе с τ. Как и при доказательстве теоремы 3.3, заметим, что интегральная кривая уравнения (3.6) не может оканчиваться в точке полуплоскости $\operatorname{Re} Z\leqslant\log\alpha$. Из неравенств (3.7) следует тогда, что в одном направлении кривая должна стремиться к точке $Z=\infty$, а в другом она должна выйти из полуплоскости $X<\log\alpha$.

Полагая $W=(a+ib)^{-1}Z$, $W=U+iV$, получаем

$$\frac{dV}{d\tau}=\operatorname{Im}\{b_1e^Z+b_2e^{2Z}+\dots\}.$$

Значит, для некоторой положительной постоянной M

$$\left|\frac{dV}{dX}\right|\leqslant Me^X$$

в полуплоскости $X<\log\alpha$. Следовательно, вариация V на части интегральной кривой уравнения (3.6), лежащей слева от ординаты $X=t$, стремится к нулю, когда t стре-

мится к $-\infty$. Значит, прямая с наклоном b/a служит асимптотой для нашей кривой.

Перенося эти результаты на z-плоскость, мы получаем утверждения теоремы 3.4 в случае I.

Случай II. Можно выбрать α столь малым, чтобы при $\operatorname{Re} Z \leqslant \log \alpha$ выполнялось неравенство

$$|c_1 e^Z + c_2 e^{2Z} + \ldots| < \frac{|a|}{2}.$$

Тогда на части интегральной кривой уравнения (3.6), лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} Z \leqslant \log \alpha$, имеем

$$\left|\frac{dX}{d\tau}\right| > \frac{|a|}{2}.$$

Поэтому X изменяется монотонно вместе с τ на такой кривой в полуплоскости $X < \log \alpha$, и, как и выше, в одном направлении кривая должна стремиться к $Z = \infty$, а в другом — выходить из полуплоскости $X < \log \alpha$.

Для некоторой положительной постоянной K

$$\left|\frac{dY}{dX}\right| < Ke^X$$

при $X < \log \alpha$. Следовательно, вариация Y на части интегральной кривой уравнения (3.6), лежащей слева от ординаты $X = t$, стремится к нулю, когда t стремится к $-\infty$.

Перенося эти результаты на плоскость z, мы получаем первые два утверждения теоремы 3.4 в случае II. Далее, всякий образ траектории имеет предельное направление касательной в точке $z = 0$. Остается только доказать, что эти направления различны для образов различных траекторий.

Если в точке $z = 0$ функцию

$$f(z) = \exp\{a \int (Q(z))^{1/2}\, dz\}$$

считать равной нулю, то она окажется регулярной в круге $|z| < \alpha$ и удовлетворяющей условию $f'(0) \neq 0$, так как в случае II

$$\int (Q(z))^{1/2}\, dz = a^{-1} \log z + d_0 + d_1 z + \ldots$$

в круге $|z| < a$, где $d_0, d_1, \ldots$ — некоторые постоянные. Поэтому функция f однолистна в достаточно малой окрестности точки $z = 0$. Кроме того, она переводит образы траекторий в радиальные отрезки. Отсюда сразу следует, что предельные направления касательных в точке $z = 0$ различны для образов различных траекторий.

Случай III. В этом случае функция

$$g(z) = \exp\{ib \int (Q(z))^{1/2} dz\}$$

регулярна и однолистна в достаточно малом круге $|z| < r$, если считать, что при $z = 0$ она равна нулю. Она переводит образы траекторий в окружности с центром в начале координат. В случае III наши утверждения следуют теперь из простейших локальных свойств однолистных функций. Случай II можно было бы исследовать тем же методом, если воспользоваться свойством локальной звездности однолистных функций.

Тейхмюллер [163] первым описал локальное строение траекторий квадратичного дифференциала без доказательства. Шеффер и Спенсер [182] дали первое подробное изложение при дополнительном несущественном условии гиперэллиптичности квадратичного дифференциала. Более простой вариант дан автором в работе [91].

3.3. Для наших целей при анализе структуры в целом траекторий квадратичного дифференциала удобно рассмотреть конечные ориентированные римановы поверхности [92, 164]. Конечная ориентированная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ имеет конечный род и может иметь конечное число гиперболических граничных компонент. Если такие граничные компоненты действительно имеются, то существуют соответствующие граничные униформизирующие параметры, которые отображают граничные окрестности поверхности $\mathfrak{R}$ на множества, лежащие в верхней полуплоскости, так что граничные точки $\mathfrak{R}$ во вполне определенном смысле переходят в некоторый сегмент вещественной оси. Конечная ориентированная риманова поверхность конформно эквивалентна области, лежащей на замкнутой римановой поверхности и ограниченной конечным (возможно, нулевым) числом простых замк-

нутых аналитических кривых. Исходя из этого или оставаясь на абстрактной точке зрения, мы можем считать, что граничные точки $\mathfrak{R}$ (если $\mathfrak{R}$ не замкнута) присоединены к $\mathfrak{R}$; полученный образ мы будем обозначать символом $\overline{\mathfrak{R}}$.

Определение 3.3. *Квадратичным дифференциалом на конечной ориентированной римановой поверхности* $\mathfrak{R}$ мы будем называть квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$ в смысле определения 3.1, который удовлетворяет следующему условию: в терминах граничного униформизирующего параметра z функция $Q(z)$ оказывается регулярной всюду, за исключением простых полюсов, и вещественной на отрезке вещественной оси, соответствующем граничным точкам $\mathfrak{R}$.

Таким квадратичным дифференциалом является дифференциал Шоттки в смысле Альфорса [4], если только расширить это понятие, допуская особые точки. Множеством C для квадратичного дифференциала в смысле определения 3.3 мы назовем множество нулей и простых полюсов дифференциала $Q(z)dz^2$ на границе $\mathfrak{R}$. Граничные кривые, на которых $Q(z)dz^2 > 0$, снова назовем траекториями, а те, на которых $Q(z)dz^2 < 0$, — ортогональными траекториями. Если поверхность $\mathfrak{R}$ замкнута, то дополнительное условие определения 3.3 излишне.

Определение 3.4. *Положительным квадратичным дифференциалом* $Q(z)dz^2$ *на конечной ориентированной римановой поверхности* $\mathfrak{R}$ мы назовем такой квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, для которого в терминах граничного униформизирующего параметра z функция $Q(z)$ положительна в точках отрезка вещественной оси, соответствующего граничным точкам $\mathfrak{R}$, отличным от нулей $Q(z)$.

Положительный квадратичный дифференциал регулярен на границе $\mathfrak{R}$. Формулируя общие результаты для конечных ориентированных римановых поверхностей, мы условимся рассматривать любой дифференциал на замкнутой римановой поверхности как положительный, хотя условие определения 3.4 в этом случае бессодержательно.

Лемма 3.2. *Пусть положительный квадратичный дифференциал на конечной ориентированной римановой*

поверхности $\mathfrak{R}$ рода g с n граничными компонентами имеет полюсы суммарного порядка p и нули суммарного порядка q, причем граничные нули (имеющие обязательно четный порядок) считаются с половинной кратностью. Тогда

$$p - q = 4 - 4g - 2n.$$

Этот факт легко выводится из известных результатов об алгебраических функциях [32, 164].

Если $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, то его траектории образуют регулярное семейство кривых на $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$ [101, 102]. В действительности при небольшом расширении понятия регулярного семейства кривых это верно даже на $\mathfrak{R} \setminus H$.

Определение 3.5. Множество K на $\mathfrak{R}$ называется *F-множеством* (относительно $Q(z)dz^2$), если всякая траектория дифференциала $Q(z)dz^2$, пересекающаяся с K, целиком лежит в K.

Определение 3.6. *Внутренним замыканием* множества точек поверхности $\mathfrak{R}$ мы будем называть внутренность замыкания этого множества. Внутреннее замыкание множества K будем обозначать через $\widetilde{K}$.

В четырех следующих определениях [92, 103] под $\mathfrak{R}$ мы будем понимать конечную ориентированную риманову поверхность, а под $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$.

Определение 3.7. *Концевой областью* $\mathfrak{E}$ (относительно $Q(z)dz^2$) называется максимальное связное открытое F-множество на $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:

(1) $\mathfrak{E}$ не содержит критических точек дифференциала $Q(z)dz^2$;

(2) $\mathfrak{E}$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из которых имеет предельную концевую точку в каждом из двух возможных направлений в заданной точке $A \in H$;

(3) $\mathfrak{E}$ конформно отображается функцией $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2} dz$ на верхнюю или нижнюю полуплоскость плоскости ζ (в зависимости от выбора знака корня).

Сразу ясно, что точка A должна быть полюсом дифференциала $Q(z)dz^2$ не ниже третьего порядка.

Определение 3.8. *Полосообразной областью* $\mathfrak{S}$ (относительно $Q(z)dz^2$) называется максимальное связное открытое F-множество на $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:

(1) $\mathfrak{S}$ не содержит критических точек дифференциала $Q(z)dz^2$;

(2) $\mathfrak{S}$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из которых имеет в некоторой точке $A \in H$ концевую предельную точку в одном направлении, а в другой (возможно, совпадающей с A) точке $B \in H$ — концевую предельную точку в другом направлении;

(3) $\mathfrak{S}$ конформно отображается функцией $\zeta = \int (Q(z))^{1/2}\,dz$ на полосу $a < \mathrm{Im}\,\zeta < b$ (a, b — конечные вещественные числа, $a < b$).

Нетрудно усмотреть из примеров в работе [103], что A и B могут быть полюсами дифференциала $Q(z)dz^2$ порядка два или более.

Определение 3.9. *Круговой областью* $\mathfrak{C}$ (относительно $Q(z)dz^2$) называется максимальное связное открытое F-множество на $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:

(1) $\mathfrak{C}$ содержит единственный двойной полюс A дифференциала $Q(z)dz^2$;

(2) $\mathfrak{C} \setminus A$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из которых представляет собой жорданову кривую, отделяющую A от границы $\mathfrak{C}$.

(3) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной c функция

$$w = \exp\{c \int (Q(z))^{1/2}\,dz\},$$

дополненная значением нуль в точке A, отображает $\mathfrak{C}$ конформно на круг $|w| < R$, причем A переходит в точку $w = 0$.

Определение 3.10. *Кольцевой областью* $\mathfrak{D}$ (относительно дифференциала $Q(z)dz^2$) называется максимальное связное открытое F-множество на $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:

(1) $\mathfrak{D}$ не содержит критических точек дифференциала $Q(z)dz^2$;

(2) $\mathfrak{D}$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)\,dz^2$, каждая из которых представляет собой жорданову кривую;

(3) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной c функция

$$w = \exp\{c \int [Q(z)]^{1/2}\,dz\}$$

отображает $\mathfrak{D}$ конформно на круговое кольцо

$$r_1 < |w| < r_2 \quad (0 < r_1 < r_2).$$

Рассматривая конкретный квадратичный дифференциал $Q(z)\,dz^2$, мы будем говорить о таких типах областей без явного упоминания этого квадратичного дифференциала.

3.4. Теперь мы подготовлены к доказательству главного результата.

Теорема 3.5. (Основная структурная теорема.) *Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная ориентированная риманова поверхность и $Q(z)\,dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, причем исключаются следующие поверхности (и конформно эквивалентные им):*

I. *$\mathfrak{R}$ есть z-сфера, $Q(z)\,dz^2 = dz^2$;*

II. *$\mathfrak{R}$ есть z-сфера, $Q(z)\,dz^2 = Ke^{i\alpha}\,dz^2/z^2$, α — вещественное, K — положительное;*

III. *$\mathfrak{R}$ есть тор, $Q(z)\,dz^2$ регулярен на $\mathfrak{R}$.*

Пусть Φ обозначает объединение всех траекторий, имеющих предельную концевую точку в некоторой точке множества C. Тогда

(1) *$\mathfrak{R} \setminus \overline{\Phi}$ состоит из конечного числа концевых, полосообразных, круговых и кольцевых областей;*

(2) *каждая такая область ограничена конечным числом траекторий вместе с точками, в которых траектории пересекаются; всякая граничная компонента такой области содержит точку множества C, за исключением круговых или кольцевых областей, граничные компоненты которых могут совпадать с граничной компонентой $\mathfrak{R}$; два граничных элемента полосообразной об-*

ласти, выходящие из точек множества H, разделяют границу на две части, каждая из которых содержит точку множества C;

(3) *каждый полюс дифференциала $Q(z)dz^2$ порядка $m > 2$ имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием $m-2$ концевых областей и конечного числа (возможно, равного нулю) полосообразных областей;*

(4) *каждый полюс второго порядка дифференциала $Q(z)dz^2$ имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием конечного числа полосообразных областей, или окрестность, содержащуюся в круговой области;*

(5) *внутреннее замыкание $\widehat{\Phi}$ множества Φ является F-множеством, состоящим из конечного числа областей поверхности $\mathfrak{R}$, каждая из которых имеет конечное число (возможно, равное нулю) граничных компонент;*

(6) *каждая граничная компонента такой области является кусочно-аналитической кривой, составленной из траекторий и их предельных концевых точек, лежащих в C.*

Из конкретных примеров [103] легко усмотреть, что множество $\widehat{\Phi}$ не обязано быть пустым и может иметь любое конечное число компонент.

Функция $\zeta = \int (Q(z))^{1/2}\, dz$ отображает множество $\mathfrak{R} \setminus H$ на некоторую риманову поверхность $\mathfrak{A}$, лежащую над плоскостью ζ. Это отображение, обозначаемое через $\mathfrak{F}$, локально однолистно всюду, за исключением точек множества C. Из компактности $\overline{\mathfrak{R}}$ и из локального строения траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в окрестностях точек поверхности $\mathfrak{R}$ следует, что, двигаясь горизонтально из некоторой точки поверхности $\mathfrak{A}$, отличной от точки разветвления, мы или будем двигаться неограниченно, или достигнем образа некоторой точки множества C.

Две возможные ветви ζ_1 и ζ_2 функции ζ в окрестности точки $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$ связаны равенством вида

$$\zeta_2 = \pm \zeta_1 + B,$$

где B — постоянная, зависящая от конкретного определения ветвей. Поэтому для любых двух точек поверхности $\mathfrak{A}$,

соответствующих одной и той же точке $\mathfrak{R}$, можно указать жесткое движение поверхности $\mathfrak{A}$ (т. е. перенос, соединенный, возможно, с поворотом на 180°), которое переводит одну из этих точек в другую, а $\mathfrak{A}$ в себя.

Обозначим множество всех образов точек Φ на $\mathfrak{A}$ через Ψ. Замыкание $\overline{\Psi}$ множества Ψ на $\mathfrak{A}$ совпадает с множеством $\mathfrak{F}(\Phi)$, поскольку в точках $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$ отображение $\mathfrak{F}$ локально гомеоморфно.

Может случиться, что множество $\mathfrak{A} \setminus \overline{\Psi}$ пусто; тогда множество $\mathfrak{R} \setminus \overline{\Phi}$ тоже пусто и $\hat{\Phi}$ совпадает с $\mathfrak{R}$. В противном случае каждая компонента множества $\mathfrak{A} \setminus \overline{\Psi}$ вместе с каждой из своих точек содержит горизонтальную прямую, проходящую через эту точку, и однократно покрывает часть плоскости ζ. Поэтому она однократно покрывает одну из следующих областей:

(a) горизонтальную полосу $a < \operatorname{Im} \zeta < b$ (a, b — конечные вещественные числа, $a < b$),

(b) полуплоскость $a < \operatorname{Im} \zeta$ или $a > \operatorname{Im} \zeta$ (a — конечное вещественное число),

(c) всю плоскость ζ.

(a) Пусть компонента S множества $\mathfrak{A} \setminus \overline{\Psi}$ покрывает полосу $a < \operatorname{Im} \zeta < b$. Пусть P — точка центральной линии S $\left(\text{которая покрывает прямую } \operatorname{Im} \zeta = \frac{a+b}{2}\right)$. Пусть $P = \mathfrak{F}(p)$, $p \in \mathfrak{R}$. Пусть Q — другая точка S, $Q = \mathfrak{F}(q)$, $q \in \mathfrak{R}$. Тогда если p не имеет другого образа в S, кроме P, то и q не имеет в S образа, отличного от Q. Действительно, в противном случае существовало бы нетривиальное жесткое движение $\mathfrak{A}$ в себе, оставляющее точку P неподвижной и меняющее местами точки, соответствующие одной и той же точке из $\mathfrak{R}$. Это означало бы, что $\mathfrak{F}$ не является локальным гомеоморфизмом в точке p, что невозможно для точки, не принадлежащей $\overline{\Phi}$. Таким образом, если точка p не имеет в S образа, отличного от P, то S является взаимно однозначным образом некоторой односвязной области $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$ при отображении $\mathfrak{F}$. Теперь мы покажем, что $\mathfrak{S}$ — полосообразная область.

Разобьем $\mathfrak{S}$ на две подобласти $\mathfrak{S}_L$ и $\mathfrak{S}_R$ дугой, которая отображается в отрезок $\operatorname{Re} \zeta = \text{const}$, $a \leqslant \operatorname{Im} \zeta \leqslant b$. Если бы

ни для одной из траекторий часть, лежащая в $\mathfrak{S}_L$, не имела предельной концевой точки в некоторой точке множества H, то $\mathfrak{S}_L$ была бы отделена от H в силу теорем 3.3 и 3.4. Тогда $\mathfrak{S}_L$ отображалась бы с помощью $\mathfrak{F}$ на область с конечной площадью на $\mathfrak{A}$, вопреки тому, что имеет место в действительности. Поэтому часть хотя бы одной траектории, лежащая в $\mathfrak{S}_L$, имеет предельную концевую точку в некоторой точке $A \in H$. Из теорем 3.3 и 3.4 мы видим, что если N—достаточно малая окрестность точки A, K — любая точка из N, а σ — отрезок ортогональной траектории с центром в K достаточно малой, но фиксированной (не зависящей от K) длины в метрике $|Q(z)|^{1/2}|\,dz\,|$, то всякая траектория, пересекающая σ, стремится к A в данном направлении, если хотя бы одна из таких траекторий стремится в этом направлении к A. Поэтому часть всякой траектории, лежащая в $\mathfrak{S}_L$, стремится к A как к предельной концевой точке. Аналогично каждая траектория в $\mathfrak{S}_R$ также имеет предельную концевую точку в некоторой точке $B \in H$ (возможно, совпадающей с A). Поскольку $\mathfrak{S}$ есть компонента множества $\mathfrak{R} \setminus \overline{\Phi}$, она является полосообразной областью, согласно определению 3.8.

Предположим теперь, что p имеет в S образы, отличные от P. Эти образы должны быть изолированными, так как $\mathfrak{F}$ — локальный гомеоморфизм на $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$, и должны лежать на центральной линии S. Пусть P^* — такой образ, лежащий справа от P на центральной линии S на минимальном расстоянии от P. Жесткое движение $\mathfrak{A}$, переводящее P в P^*, должно быть переносом, так как в противном случае рассуждение, использованное выше, показало бы, что центр отрезка PP^* является образом простого полюса дифференциала $Q(z)\,dz^2$ при отображении $\mathfrak{F}$. Пусть $\zeta \to \zeta + h$ — этот перенос (h положительно). Очевидно, что этот перенос и группа переносов, им порожденная, исчерпывают все жесткие движения поверхности $\mathfrak{A}$, переводящие друг в друга точки S, являющиеся образами одной и той же точки из $\mathfrak{R}$ при отображении $\mathfrak{F}$. Отображение $\mathfrak{G}$ множества S, осуществляемое функцией $w = \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\zeta\right)$, отображает S на круговое кольцо

$$\exp\left(-\frac{2\pi b}{h}\right) < |w| < \exp\left(-\frac{2\pi a}{h}\right). \tag{3.8}$$

Оно, кроме того, обладает тем свойством, что $\mathfrak{G}\mathfrak{F}$ — взаимно однозначное отображение некоторой области $\mathfrak{D}$ из $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$ на круговое кольцо (3.8). Отсюда ясно, что $\mathfrak{D}$ — кольцевая область в смысле определения 3.10, так как при отображении $\mathfrak{G}\mathfrak{F}$ траектории из $\mathfrak{D}$ переходят в концентрические окружности.

(b) Пусть теперь компонента E множества $\mathfrak{A} \setminus \overline{\Psi}$ покрывает полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > a$ или $\operatorname{Im} \zeta < a$ (для определенности предположим, что первую). Пусть $P \in E$ — образ точки $p \in \mathfrak{R}$ при отображении $\mathfrak{F}$. Тогда если p имеет в E образы, отличные от P, то очевидно, что ими служат все точки вида $P + nh$, где h положительно, а n пробегает множество всех целых чисел. Та же ситуация наблюдается и при произвольном выборе точки из E (с тем же значением h). Рассмотрим отображение $\mathfrak{H}$ множества E, которое осуществляет функция $w = \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\zeta\right)$. Оно однозначно отображает E на круг с выколотой точкой

$$0 < |w| < \exp\left(-\frac{2\pi a}{h}\right). \tag{3.9}$$

Сложное отображение $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$ переводит некоторую область Ξ из $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$ взаимно однозначно на круг с выколотой точкой (3.9). Поскольку эта область имеет вырожденную граничную компоненту, эта компонента должна сводиться к точке A поверхности $\mathfrak{R}$. В этой точке w является допустимым локальным униформизирующим параметром. В терминах этого параметра имеем

$$Q(z)\,dz^2 = d\zeta^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{dw^2}{w^2}.$$

Поэтому A — двойной полюс дифференциала $Q(z)\,dz^2$. Обозначим область $\Xi \cup A$ символом $\mathfrak{C}$. Так как отображение $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$ переводит траектории из $\mathfrak{C}$ в концентрические окружности, то $\mathfrak{C}$ — круговая область в смысле определения 3.9.

Предположим теперь, что точка $P \in E$, $P = \mathfrak{F}(p)$, $p \in \mathfrak{R}$, — единственный образ точки p в E. Тогда E является взаимно однозначным образом некоторой односвязной области $\mathfrak{E}$

из $\mathfrak{R} \setminus (C \cup H)$. Как и в случае (a), получаем, что все траектории из $\mathfrak{E}$ стремятся в одном направлении к некоторой точке $A \in H$, а в другом направлении — к некоторой точке $B \in H$, возможно совпадающей с A. Однако из теоремы 3.3 (IV) следует, что если некоторое множество траекторий стремится в соответствующих направлениях к двум различным элементам H, а их объединение содержит отрезок ортогональной траектории, то этот отрезок имеет ограниченную длину в метрике $|Q(z)|^{1/2}|dz|$[1]. Значит, траектории в $\mathfrak{E}$ стремятся в обоих направлениях к одной и той же точке H, и $\mathfrak{E}$ — концевая область в смысле определения 3.7.

(c) Если некоторая компонента множества $\mathfrak{A} \setminus \overline{\Psi}$ покрывает всю конечную плоскость ζ, то она должна содержать всю поверхность $\mathfrak{A}$, так что Ψ, а следовательно, и Φ и C пусты. Если $P \in \mathfrak{A}$ — образ точки $p \in \mathfrak{R}$ при отображении $\mathfrak{F}$ и p не имеет других образов в $\mathfrak{A}$, то, как и выше, получаем, что $\mathfrak{A}$ — взаимно однозначный образ множества $\mathfrak{R} \setminus H$. Множество H должно состоять из единственного элемента A, а поверхность $\mathfrak{R}$ должна быть конформно эквивалентна сфере. При переходе к параметру ζ получаем

$$Q(z)\,dz^2 = d\zeta^2,$$

так что A является полюсом четвертого порядка[2]) дифференциала $Q(z)dz^2$.

Эта поверхность относится к исключительному случаю I.

Если $P \in \mathfrak{A}$, $P = \mathfrak{F}(p)$, $p \in \mathfrak{R}$, и p имеет в $\mathfrak{A}$ другие образы, то предположим, что все эти образы получаются

---

[1]) В силу п. (IV) теоремы 3.3 существует область D из п. (III), которая с помощью некоторой ветви функции $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ отображается на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > c$. Но тогда множество траекторий, стремящихся в соответствующих направлениях к двум различным элементам из H, отображается на некоторую полосу $-\infty < d < \operatorname{Im}\zeta < c$, что невозможно, так как компонента E множества $\mathfrak{A} \setminus \overline{\Psi}$ покрывает полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > a$ или $\operatorname{Im}\zeta < a$. — *Прим. ред.*

[2]) Так как $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ имеет в точке A полюс первого порядка. — *Прим. ред.*

из P при помощи преобразований группы, порожденной переносом

$$\zeta \to \zeta + h.$$

Тогда, как и выше, мы получим, что то же самое справедливо для каждой точки $\mathfrak{A}$. Отображение $\mathfrak{K}$, осуществляемое функцией $w = \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\zeta\right)$, в этом случае таково, что $\mathfrak{K}\mathfrak{F}$ взаимно однозначно отображает $\mathfrak{R} \setminus H$ на w-сферу с выколотыми точками $w = 0$ и $w = \infty$. Тогда множество H состоит из двух точек и поверхность $\mathfrak{R}$ конформно эквивалентна сфере. При переходе к параметру w получим

$$Q(z)\,dz^2 = d\zeta^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{dw^2}{w^2} = Ke^{i\alpha}\,dw^2/w^2$$

при надлежащем выборе вещественного числа α и положительной постоянной K. Эта поверхность относится к исключительному случаю II.

Если $P \in \mathfrak{A}$, $P = \mathfrak{F}(p)$, $p \in \mathfrak{R}$, и p имеет в $\mathfrak{A}$ образы, отличные от тех, которые получаются при помощи группы преобразований, порожденной единственным переносом, то, как в теории двояко-периодических функций [77], получим, что все эти образы составляют множество точек вида [1])

$$P + n\omega_1 + m\omega_2, \tag{3.10}$$

где n, m принимают все целые значения, а ω_1, ω_2 — комплексные числа, $\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. То же заключение сразу получается и для всех вообще точек $\mathfrak{A}$, и потому множество $\mathfrak{R} \setminus H$ конформно эквивалентно поверхности, полученной отождествлением множеств точек, заданных формулой (3.10). Эта поверхность — тор, поэтому множество H должно быть пустым. Тогда квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$ регулярен и не обращается в нуль на $\mathfrak{R}$. Легко видеть, что отношение двух таких квадратичных дифференциалов постоянно. Таким образом, эта поверхность относится к исключительному случаю III.

---

[1]) См. также Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950, стр. 553—556.— *Прим. перев.*

Так как случай (c) приводит только к исключенным возможностям, а случаи (a) и (b) дают концевые, полосообразные, круговые или кольцевые области, то утверждение (1) теоремы 3,5 доказано. Заметим, что всякая точка множества H, за исключением двойного полюса в круговой области, содержится в $\overline{\Phi}$.

Для доказательства утверждения (2) заметим, что такая область, как E или S, ограничена на $\mathfrak{A}$ образами траекторий, возможно пересекающимися в образах точек множества C, которые изолированны. Если соответствующая область D на $\mathfrak{R}$ есть круговая или кольцевая область, то ясно, что на части границы E или S, представляющей границу D, может быть только конечное число образов траекторий, и на каждой компоненте этой части действительно будут находиться образы точек C, если только соответствующая граничная компонента D не есть граничная компонента $\mathfrak{R}$. Если соответствующая область D на $\mathfrak{R}$ концевая или полосообразная, то части границы E или S, для которых $\mathrm{Re}\,\zeta > M$ или $\mathrm{Re}\,\zeta < -M$ при достаточно большом положительном M, являются образами части траектории в канонической окрестности некоторой точки из H, как описано в теоремах 3.3 или 3.4 (случай I или II). Поэтому они не содержат образов точек C и предельных точек множества этих образов. Следовательно, только конечное число образов траекторий принадлежит границе E или S. Для концевой области на границе имеется точка из C (так как никакая точка из H не принадлежит границе $\mathfrak{R}$). Для полосообразной области два граничных элемента, выходящих из точек H, разделяют границу на две части, каждая из которых содержит некоторую точку из C.

Чтобы доказать утверждение (3), рассмотрим окрестность N^* из теоремы 3.3 для полюса порядка m дифференциала $Q(z)\,dz^2$. Пересечение Φ с этой окрестностью состоит из конечного числа открытых дуг траекторий. Следовательно, $\mathfrak{R}\setminus\overline{\Phi}$ всюду плотно на N^*. Однако N^* не может пересекаться с круговой или кольцевой областью, поэтому N^* — внутреннее замыкание конечного числа концевых или полосообразных областей.

Утверждение (4) очевидно для полюса второго порядка дифференциала $Q(z)dz^2$, если этот полюс лежит в круговой области. В противном случае в качестве окрестности этого полюса мы рассмотрим множество N на $\mathfrak{R}$, соответствующее кругу $|z| < \alpha$ в случае I или II теоремы 3.4. Пересечение N с Φ состоит из конечного числа открытых дуг траекторий. Кроме того, N не может пересекаться с концевой, круговой или кольцевой областью. Поэтому N содержится во внутреннем замыкании конечного числа полосообразных областей.

После удаления из $\mathfrak{R}$ всех концевых, полосообразных, круговых и кольцевых областей вместе с их границами на $\mathfrak{R}$ останется конечное число областей, каждая из которых ограничена конечным числом кусочно-аналитических кривых, составленных из траекторий и их предельных концевых точек из C. [Ни одной точки из H не окажется в силу (4).] Однако это оставшееся множество совпадает с Φ, которое представляет собой F-множество. Это доказывает утверждения (5) и (6), и доказательство теоремы 3.5 завершено.

3.5. В работе Шеффера и Спенсера [182] о проблеме коэффициентов для однолистных функций значительное внимание уделено доказательству того, что для некоторых специальных квадратичных дифференциалов на сфере множество Φ пусто. На самом деле использование общей теоремы о коэффициентах гл. IV должно было бы избавить нас от необходимости подобных рассмотрений. Однако нахождение условий, при которых возникает такая ситуация, имеет значительный самостоятельный интерес.

Мы начнем с рассмотрения того, каким образом положительный квадратичный дифференциал на конечной ориентированной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ индуцирует положительные квадратичные дифференциалы на некоторых подобластях поверхности $\mathfrak{R}$.

Лемма 3.3. *Пусть $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на конечной ориентированной римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Пусть Δ — подобласть $\mathfrak{R}$, ограниченная конечным числом траекторий вместе с их*

предельными концевыми точками, которые должны во всех случаях принадлежать C, и конечным числом дуг в $\mathfrak{R}\setminus H$ *на замыканиях траекторий. При вполне определенном выборе граничных униформизирующих параметров подобласть* Δ *становится конечной ориентированной римановой поверхностью. Квадратичный дифференциал* $Q(z)\,dz^2$ *индуцирует некоторый положительный квадратичный дифференциал* $Q_\Delta(z)\,dz^2$ *на* Δ, *для которого справедливы следующие утверждения:*

(1) *граничная точка* Δ, *не принадлежащая C, или конец граничной дуги является регулярной граничной точкой дифференциала* $Q_\Delta(z)\,dz^2$;

(2) *граничная точка* Δ, *которая служит простым полюсом дифференциала* $Q(z)\,dz^2$, *является регулярной граничной точкой дифференциала* $Q_\Delta(z)\,dz^2$;

(3) *граничная точка P области* Δ, *служащая нулем кратности n дифференциала* $Q(z)\,dz^2$, *такая, что m дуг траекторий с предельной концевой точкой в P локально содержатся в* Δ, *является граничным нулем кратности* $2m$ *дифференциала* $Q_\Delta(z)\,dz^2$;

(4) *граничная точка* Δ, *служащая концом граничной дуги, но не принадлежащая C, является двойным граничным нулем дифференциала* $Q_\Delta(z)\,dz^2$.

В точках области Δ мы, конечно, используем те же локальные параметры, что и для $\mathfrak{R}$. Чтобы получить квадратичный дифференциал $Q_\Delta(z)\,dz^2$, индуцированный дифференциалом $Q(z)\,dz^2$ на Δ, мы с каждым таким параметром z связываем функцию $Q(z)$. Граничный униформизирующий параметр для Δ в точке P получается при помощи конформного отображения пересечения некоторой окрестности N точки P на $\mathfrak{R}$ с Δ на множество, лежащее в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, при котором пересечение границы области Δ с окрестностью N переходит в некоторый отрезок вещественной оси.

В граничной точке области Δ, не принадлежащей C, или в конце граничной дуги такое отображение осуществляется функцией $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ (при надлежащем выборе ветви корня и постоянной интегрирования). При переходе к переменной ζ имеем

$$Q(z)\,dz^2 = d\zeta^2.$$

Поэтому граничная точка является регулярной граничной точкой дифференциала $Q_\Delta(z)\,dz^2$.

В граничной точке области Δ, являющейся простым полюсом дифференциала $Q(z)\,dz^2$, то же отображение определяет некоторый граничный униформизирующий параметр, поэтому мы снова получаем регулярную граничную точку дифференциала $Q_\Delta(z)\,dz^2$.

В граничной точке P области Δ, являющейся нулем кратности n дифференциала $Q(z)\,dz^2$, таким, что m дуг траекторий с концевой предельной точкой в P локально содержатся в Δ, локальным параметром является $\tau = \zeta^{1/(m+1)}$ (при надлежащем определении ветви), где функция ζ определена выше. При переходе к переменной τ получаем

$$Q(z)\,dz^2 = d\zeta^2 = (m+1)^2\,\tau^{2m}\,d\tau^2,$$

поэтому P — граничный нуль кратности $2m$ дифференциала $Q_\Delta(z)\,dz^2$.

В граничной точке области Δ, являющейся концом граничной дуги и не принадлежащей C, граничным униформизирующим параметром служит $\tau = \zeta^{1/2}$ (при надлежащем выборе ветви). При переходе к переменной τ имеем

$$Q(z)\,dz^2 = d\zeta^2 = 4\tau^2\,d\tau^2.$$

Следовательно, эта точка — граничный нуль второго порядка дифференциала $Q_\Delta(z)\,dz^2$.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{R}$ — односвязная область гиперболического типа, а $Q(z)\,dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, регулярный всюду, за исключением двух простых полюсов. Тогда, в обозначениях теоремы* 3.5, *$\overline{\Phi}$ — дуга, соединяющая эти полюсы, и $\mathfrak{R} \setminus \overline{\Phi}$ — кольцевая область.*

Поверхность $\mathfrak{R}$ можно конформно отобразить на единичный круг $|z| < 1$ так, что простые полюсы перейдут в точки 0 и r $(0 < r < 1)$. Дифференциал

$$\mathfrak{Q}(z)\,dz^2 = \frac{dz^2}{z\,(z-r)(z-r^{-1})},$$

как легко видеть, является положительным квадратичным дифференциалом на $|z|<1$ с простыми полюсами в 0 и r. Поэтому отношение дифференциалов $Q(z)\,dz^2$ (вычисленного при $|z|<1$) и $\mathfrak{Q}(z)\,dz^2$ регулярно в круге $|z|<1$ и принимает положительные значения на окружности $|z|=1$. Следовательно,

$$Q(z)\,dz^2=\lambda\,\mathfrak{Q}(z)\,dz^2,$$

где λ — некоторая положительная постоянная, и дифференциалы $Q(z)\,dz^2$ и $\mathfrak{Q}(z)\,dz^2$ имеют одни и те же траектории. Утверждения леммы для дифференциала $\mathfrak{Q}(z)\,dz^2$ проверяются непосредственно.

Лемма 3.5. *Пусть $\mathfrak{R}$ — двусвязная область (плоского типа, с невырожденными граничными компонентами) и $Q(z)\,dz^2$ — регулярный положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$. Тогда, в обозначениях теоремы* 3.5, *множество $\overline{\Phi}$ пусто, а сама область $\mathfrak{R}$ является кольцевой.*

Поверхность $\mathfrak{R}$ можно конформно отобразить на круговое кольцо

$$r_1<|z|<r_2 \tag{3.11}$$

с некоторыми r_1, r_2 $(0<r_1<r_2)$. Квадратичный дифференциал

$$\mathfrak{Q}(z)\,dz^2=-\frac{dz^2}{z^2}$$

есть регулярный положительный квадратичный дифференциал на кольце (3.11). Поэтому, как и в лемме 3.4,

$$Q(z)\,dz^2=\lambda\,\mathfrak{Q}(z)dz^2,$$

где λ — некоторая положительная постоянная. Отсюда немедленно получается утверждение леммы 3.5.

Лемма 3.6. *Пусть $\mathfrak{R}$ — двусвязная область (плоского типа, с невырожденными граничными компонентами), а $Q(z)\,dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, регулярный всюду, за исключением одного простого полюса P. Тогда дифференциал $Q(z)dz^2$ имеет в $\mathfrak{R}$ либо один простой нуль, либо двойной гра-*

ничный нуль. В обоих случаях обозначим эту точку через Q. Тогда, в обозначениях теоремы 3.5, $\overline{\Phi}$ *состоит из траектории, соединяющей P с Q, из траектории, исходящей из Q и возвращающейся в Q, и точек P и Q, а* $\mathfrak{R} \setminus \overline{\Phi}$ *состоит из одной или двух кольцевых областей.*

Утверждение относительно нуля дифференциала $Q(z)\,dz^2$ следует из леммы 3.2. Поверхность $\mathfrak{R}$ можно конформно отобразить на область $\mathfrak{D}$, состоящую из плоскости z, разрезанной вдоль прямолинейных отрезков, соединяющих z_1 и z_2, z_3 и z_4, где z_1, z_2, z_3, z_4 вещественны, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$, так, чтобы точка P перешла в z^*, $z_2 < z^* < z_3$.

Тогда при всяком α, таком, что $z_2 \leqslant \alpha < z^*$ или $z^* < \alpha \leqslant z_3$,

$$\mathfrak{Q}(z, \alpha)\,dz^2 = -\frac{(z-\alpha)\,dz^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z^*)}$$

(если α равно z_2 или z_3, то равные множители сокращаются) — положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{D}$, регулярный всюду, за исключением z^*, с простым нулем α в $\mathfrak{D}$ или с двойным граничным нулем [см. лемму 3.3, (4)]. Пусть образом Q служит точка с аффиксом z_0. Выберем α, подчиненное вышеуказанным условиям, лежащее в $\mathfrak{D}$ и отличное от z_0. Тогда отношение

$$\varphi(z) = Q(z)\,dz^2/\mathfrak{Q}(z, \alpha)\,dz^2$$

представляет собой функцию, регулярную всюду в $\mathfrak{D}$, за исключением простого полюса α, и принимающую неотрицательные вещественные значения на границе $\mathfrak{D}$. Ясно, что $w = \varphi(z)$ отображает $\mathfrak{D}$ конформно на w-плоскость, разрезанную вдоль отрезков положительной вещественной оси (возможно, включающих начало), причем α переходит в бесконечно удаленную точку. По симметрии, отрезок вещественной оси на w-сфере, дополнительный к этим разрезам и содержащий бесконечно удаленную точку, служит образом отрезка $z_2 < z < z_3$. Далее, образу Q соответствует начало. Поэтому z_0 лежит на отрезке $z_2 \leqslant z \leqslant z_3$. Отсюда сразу следует, что

$$Q(z)\,dz^2 = \lambda \mathfrak{Q}(z, z_0)\,dz^2,$$

где λ — некоторая положительная постоянная. Значит, дифференциал $Q(z)dz^2$, рассматриваемый в $\mathfrak{D}$, имеет те же траектории, что и дифференциал $\Omega(z, z_0)dz^2$, для которого утверждения леммы 3.6 легко проверить непосредственно.

Лемма 3.7. *Пусть $\mathfrak{R}$ — трехсвязная область (плоского типа, с невырожденными граничными компонентами), а $Q(z)dz^2$ — регулярный положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$. Поверхность $\mathfrak{R}$ допускает единственное антиконформное (т. е. конформное второго рода) отображение A на себя, которое оставляет инвариантной каждую граничную компоненту.*

Множество неподвижных точек при отображении A образует три аналитические дуги на $\overline{\mathfrak{R}}$. Совокупность этих трех дуг назовем линией симметрии L области $\mathfrak{R}$. Для нулей дифференциала $Q(z)dz^2$ выполняется одно из следующих условий:

(1) *существует два простых нуля Q_1 и Q_2, лежащих в $\mathfrak{R}$ и меняющихся местами при отображении A;*

(2) *существует два нуля Q_1 и Q_2, лежащих на одной и той же компоненте L, простых, если они лежат в $\mathfrak{R}$, двойных, если они являются граничными нулями;*

(3) *существует один нуль Q, лежащий на L, двойной, если он лежит в $\mathfrak{R}$, четырехкратный, если он является граничным нулем;*

(4) *существует два двойных граничных нуля Q_1 и Q_2, лежащих на одной и той же граничной компоненте и меняющихся местами при отображении A.*

В этих случаях множество $\overline{\Phi}$ состоит из:

(1), (4) — *трех траекторий, соединяющих Q_1 и Q_2, и точек Q_1 и Q_2;*

(2) — *траектории, соединяющей Q_1 с Q_2, траектории, проходящей от Q_1 снова к Q_1, траектории, проходящей от Q_2 снова к Q_2, и точек Q_1 и Q_2;*

(3) — *двух траекторий, каждая из которых проходит от Q назад к Q, и точки Q.*

В различных случаях $\mathfrak{R}-\overline{\Phi}$ состоит из одной, двух или трех кольцевых областей.

По лемме 3.2 дифференциал $Q(z)dz^2$ имеет нули

суммарной кратности 2, причем граничные нули считаются с половинной кратностью. Поверхность $\mathfrak{R}$ можно конформно отобразить на область $\mathfrak{D}$, состоящую из плоскости z, разрезанной вдоль прямолинейных отрезков, соединяющих z_1 с z_2, z_3 с z_4, z_5 с z_6, где z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 вещественны и $z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 < z_6$. При этом отображении отрезки, дополнительные к интервалам $z_1 < z < z_2$, $z_3 < z < z_4$, $z_5 < z < z_6$, являются образами компонент L и отображение A сводится к отражению в действительной оси.

Рассмотрим на $\mathfrak{D}$ квадратичные дифференциалы

$$\mathfrak{Q}(z, z^*, z^{**})\,dz^2 = -\frac{(z-z^*)(z-z^{**})\,dz^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)}, \qquad (3.12)$$

где z^* и z^{**} подчинены одному из следующих условий:

(a) $\operatorname{Im} z^* > 0$, $z^{**} = \bar{z}^*$;

(b) $z^* = z^{**}$, $z_1 < z^* < z_2$, или $z_3 < z^* < z_4$, или $z_5 < z^* < z_6$;

(c) z^* и z^{**} лежат в одном и том же интервале, дополнительном к тем, которые перечислены в (b) [в частности, z^* или z^{**} могут находиться в бесконечно удаленной точке; при этом в (3.12) отсутствует соответствующий множитель].

Легко видеть, что во всех этих случаях дифференциал $\mathfrak{Q}(z, z^*, z^{**})\,dz^2$ — регулярный положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{D}$. При этом имеется в виду, что одинаковые множители в числителе и знаменателе сокращаются.

Предположим сначала, что дифференциал $Q(z)dz^2$ (рассматриваемый в $\mathfrak{D}$) имеет нуль в точке τ, $\operatorname{Im}\tau \neq 0$. Тогда если это не простой нуль и если $\bar{\tau}$ не является нулем дифференциала $Q(z)dz^2$, то отношение

$$\psi(z) = Q(z)\,dz^2 / \mathfrak{Q}(z, \tau, \bar{\tau})\,dz^2$$

имеет простой полюс в $\bar{\tau}$, а также вещественно и неотрицательно на границе $\mathfrak{D}$. Отображение $w = \psi(z)$, оче-

видно, конформно отображает $\mathfrak{D}$ на плоскость w, разрезанную вдоль отрезков положительной вещественной оси (возможно, включающих начало). Линия симметрии $\mathfrak{D}$ должна перейти в остальную часть вещественной оси. Однако точка $\bar{\tau}$ имеет своим образом бесконечно удаленную точку и поэтому должна лежать на линии симметрии. Это невозможно, и, следовательно, $\psi(z)$ сводится к некоторой положительной постоянной λ и

$$Q(z)\,dz^2 = \lambda\Omega(z, \tau, \bar{\tau})\,dz^2.$$

Пусть теперь $Q(z)dz^2$ имеет нуль в некоторой точке линии симметрии. Пусть этой точкой, взятой в $\overline{\mathfrak{D}}$, будет z^*, а $\tilde{z}$ — точка открытого интервала, соответствующего этой компоненте L, отличная от z^* и возможных других нулей дифференциала $Q(z)dz^2$. Тогда функция

$$\chi(z) = Q(z)\,dz^2/\Omega(z, z^*, \tilde{z})\,dz^2$$

имеет простой полюс в точке $\tilde{z}$ и вещественна и неотрицательна на граничных компонентах $\mathfrak{D}$. Таким образом, функция $w = \chi(z)$ осуществляет конформное отображение области $\mathfrak{D}$ на плоскость w, разрезанную вдоль отрезков положительной вещественной оси (возможно, включающих начало). И снова линия симметрии $\mathfrak{D}$ переходит в остальную часть вещественной оси, а $\tilde{z}$ — в бесконечно удаленную точку. Начало координат в плоскости w — это образ нуля z^{**} дифференциала $Q(z)dz^2$, лежащего на той же компоненте линии симметрии, что и $\tilde{z}$, и, в частности, может совпадать с z^*. Как и выше, получаем, что

$$Q(z)\,dz^2 = \lambda\Omega(z, z^*, z^{**})\,dz^2,$$

где λ — некоторая положительная постоянная.

Пусть, наконец, дифференциал $Q(z)dz^2$ имеет нуль Q в граничной точке, которой в плоскости z соответствует одна из граничных точек области $\mathfrak{D}$ с аффиксом

z^*, где $z_1 < z^* < z_2$, $z_3 < z^* < z_4$ или $z_5 < z^* < z_6$. Рассмотрим отношение

$$\theta(z) = Q(z)\,dz^2/\mathfrak{Q}(z, z^*, z^*)\,dz^2.$$

Если $Q(z)dz^2$ имеет нуль и в граничной точке, связанной с Q отображением A, то, как и выше, θ сводится к положительной постоянной. В противном случае функция $w = \theta(z)$ отображает $\mathfrak{D}$ конформно на плоскость w, разрезанную вдоль отрезков положительной вещественной оси (возможно, включающих начало), один из которых простирается до бесконечно удаленной точки. Линия симметрии снова переходит в остальную часть вещественной оси, а Q лежит в концевой точке некоторой компоненты линии L. Это невозможно, и потому осуществляется лишь первая возможность.

Мы показали, что дифференциал $Q(z)dz^2$, рассматриваемый в $\mathfrak{D}$, имеет то же строение траекторий, что и один из квадратичных дифференциалов (3.12). Для них легко проверить непосредственно справедливость утверждений леммы 3.7 (см. [78]). По поводу другого доказательства леммы 3.7 см. [79].

Теорема 3.6. (Теорема о трех полюсах.) *Пусть $\mathfrak{R}$ есть z-сфера, $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал, имеющий не более трех различных полюсов. Тогда, в обозначениях теоремы* 3.5, *множество* $\widetilde{\Phi}$ *пусто.*

По лемме 3.2 имеется по крайней мере один полюс дифференциала $Q(z)dz^2$ порядка, большего единицы. Для случаев I и II, исключенных в теореме 3.5, результат 3.6 очевиден.

Предположим сначала, что у дифференциала $Q(z)dz^2$ есть в точности один полюс P порядка, большего единицы, и что не имеет места ни один из этих исключительных случаев. Тогда, по теореме 3.5 (3) и (4), P имеет окрестность, покрытую внутренним замыканием конечного числа концевых, полосообразных или круговых областей. Удаляя замыкания этих областей из $\mathfrak{R}$, мы оставим разве лишь конечное число односвязных областей, каждая из которых ограничена кусочно-аналитической кривой, состоящей из конечного числа тра-

екторий и их концов, принадлежащих C. По лемме 3.3 дифференциал $Q(z)dz^2$ индуцирует положительный квадратичный дифференциал на каждой такой области. По лемме 3.2 такая область может существовать только в том случае, когда она содержит два простых полюса дифференциала $Q(z)dz^2$. В этом случае ссылка на лемму 3.4 завершает доказательство теоремы 3.6.

Теперь предположим, что $Q(z)dz^2$ имеет два полюса P_1 и P_2 порядка выше первого. Каждая из точек P_1 и P_2 имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием конечного числа концевых, полосообразных или круговых областей. После удаления замыканий этих областей из $\mathfrak{R}$ останется разве лишь двусвязная область, ограниченная кусочно-аналитическими кривыми, составленными из конечного числа траекторий и их концов в C (односвязные области исключаются с помощью рассуждений предыдущего параграфа). Положительный квадратичный дифференциал, индуцированный дифференциалом $Q(z)dz^2$ на такой области, или регулярен, или имеет один простой полюс. Таким образом, мы оказываемся в ситуации леммы 3.5 или леммы 3.6, и в этом случае теорема 3.6 доказана.

Пусть, наконец, $Q(z)dz^2$ имеет три полюса P_1, P_2 и P_3 порядка, большего единицы. Каждый из них имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием конечного числа концевых, полосообразных или круговых областей. После удаления из $\mathfrak{R}$ замыканий этих областей останется разве лишь двусвязная или трехсвязная область, ограниченная кусочно-аналитическими кривыми, составленными из конечного числа траекторий и их концов в C. Положительный квадратичный дифференциал, индуцированный дифференциалом $Q(z)dz^2$ на такой области, регулярен. Теперь результат теоремы 3.6 следует из леммы 3.5 или леммы 3.7.

Следствие 3.2. *Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная ориентированная риманова поверхность и $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, причем выполняется одна из следующих возможностей:*

1) *$\mathfrak{R}$ — односвязная область гиперболического типа, $Q(z)dz^2$ имеет не более двух различных полюсов;*

2) $\mathfrak{R}$ — *двусвязная область (плоского типа с невырожденными граничными компонентами),* $Q(z)dz^2$ *имеет не более одного полюса;*

3) $\mathfrak{R}$ — *трехсвязная область (плоского типа с невырожденными граничными компонентами),* $Q(z)dz^2$ *регулярен.*

Тогда, в обозначениях теоремы 3,5, *множество* $\widehat{\Phi}$ *пусто.*

Легко показать, что условия теоремы 3.6 и следствия 3.2 — единственные условия, наложенные на род, связность и число различных полюсов, которые обеспечивают пустоту множества $\widehat{\Phi}$ (ср. [103]).

Глава IV

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О КОЭФФИЦИЕНТАХ

4.1. Тейхмюллер [164] высказал принцип, состоящий в том, что решение некоторых экстремальных задач геометрической теории функций связано с некоторым квадратичным дифференциалом. Если в такой задаче предполагается, что фиксирована некоторая точка, и нет никаких других ограничений, то квадратичный дифференциал будет иметь в этой точке простой полюс. Если дополнительно требуется, чтобы функция, рассматриваемая в задаче, имела в этой точке фиксированные значения первых n производных (в терминах некоторого подходящего локального параметра), то в этой точке упомянутый квадратичный дифференциал будет иметь полюс порядка $n+1$. Более общо, можно не требовать, чтобы наивысшая из встречающихся производных была фиксированной, а лишь наложить некоторые условия на ее область изменения.

Тейхмюллер пришел к этому принципу, выделив то общее, что было свойственно многочисленным результатам Грёча [49—66], и на основании своих работ по квазиконформным отображениям. Однако он нигде не сформулировал явно какой-либо общий результат, воплощающий этот принцип.

В этой главе мы докажем общую теорему о коэффициентах, которая не исчерпывает всех возможностей приложения принципа Тейхмюллера (другие приложения будут даны в главе VIII), однако представляет собой точную формулировку этого принципа для широкого класса экстремальных задач и содержит в качестве частного случая почти все стандартные результаты об однолистных функциях классов S и Σ.

Определение 4.1. Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(z)\,dz^2$ — квадратичный дифферен-

циал на $\mathfrak{R}$. *Допустимым семейством* $\{\Delta\}$ *областей* Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, *на* $\mathfrak{R}$ *относительно дифференциала* $Q(z)\,dz^2$ будем называть дополнение на $\mathfrak{R}$ к объединению конечного числа траекторий дифференциала $Q(z)\,dz^2$ (каждая из которых или замкнута, или в обоих направлениях имеет предельную концевую точку на C), концевых точек этих траекторий и конечного числа дуг в $\mathfrak{R} \setminus H$ на замыканиях траекторий.

Каждая точка множества H является, очевидно, внутренней для некоторой области Δ_j. Может случиться, конечно, что в семействе содержится ровно одна область и либо множество полных траекторий, либо множество дуг траекторий может быть пустым.

Определение 4.2. Пусть $\{\Delta\}$ — допустимое семейство областей Δ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, на конечной ориентированной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ относительно квадратичного дифференциала $Q(z)\,dz^2$. Пусть $\{f\}$ — семейство функций f_j, $j = 1, \ldots, k$, со следующими свойствами:

(1) f_j конформно отображает Δ_j в $\mathfrak{R}$;

(2) если полюс A дифференциала $Q(z)\,dz^2$ лежит в Δ_j, то $f_j(A) = A$;

(3) $f_j(\Delta_j) \cap f_l(\Delta_l) = 0$, $j \neq l$, $j, l = 1, \ldots, k$.

Тогда говорят, что *семейство* $\{f\}$ *обладает допустимой гомотопией* F *в тождественное отображение*, если существует функция $F(P, t)$, определенная при $P \in \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, со значениями в $\mathfrak{R}$, непрерывная по совокупности переменных и удовлетворяющая следующим условиям:

(a) $F(P, 0) = f_j(P)$, $P \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$;

(b) $F(P, 1) = P$, $P \in \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j$;

(c) $F(P, t) = P$, если P — полюс дифференциала $Q(z)\,dz^2$ в $\bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;

(d) $F(P, t) \neq Q$, если Q — полюс дифференциала $Q(z)\,dz^2$ в $\mathfrak{R}$, $P \neq Q$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Лемма 4.1. *Пусть* $\{f\}$*—семейство функций, удовлетворяющих условиям* (1), (2), (3) *определения* 4.2 *и обладающее допустимой гомотопией* F *в тождественное отображение. Пусть* A *— элемент* H *и* N *— окрестность для локального параметра* z*, при помощи которого* A *изображается точкой* $z = 0$*. Если точка* P *достаточно близка к* A*, то* $F(P, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *лежит в* $N \setminus \{A\}$*. Пусть* $\delta(F, P)$ *обозначает изменение аргумента при движении в плоскости* z *вдоль образа* $F(P, t)$ *от образа* $F(P, 1)$ *к образу* $F(P, 0)$*. Тогда*

$$\lim_{P \to A} \delta(F, P)$$

существует и не зависит от выбора локального параметра z*.*

Отметим, однако, что $\delta(F, P)$ может зависеть от выбора параметра. В самом деле, предположим, что A лежит в Δ_j. Тогда отображение f_j в терминах локального параметра локально представляется рядом Тейлора

$$f_j(z) = az + (\text{более высокие степени } z).$$

Легко видеть, что предел, о котором идет речь, равен одному из возможных значений arg a, который уже не зависит от выбора локального параметра.

Определение 4.3. Пусть $\{\Delta\}$ — допустимое семейство областей на конечной ориентированной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ относительно квадратичного дифференциала $Q(z)\,dz^2$. Пусть $\{f\}$ — семейство функций, удовлетворяющее условиям (1), (2), (3) определения 4.2, обладающее допустимой гомотопией F в тождественное отображение. Тогда для полюса $A \in H$ предел, о котором идет речь в лемме 4.1, называется *степенью деформации семейства* $\{f\}$ *при гомотопии* F *в точке* A и обозначается $d(F, A)$.

Определение 4.4. Пусть $\{\Delta\}$ — допустимое семейство областей Δ_j, $j = 1, \ldots, k$, на конечной ориентированной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ относительно квадратичного дифференциала $Q(z)\,dz^2$. Тогда *допустимым семейством* $\{f\}$ *функций* f_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, *ассоциированным с* $\{\Delta\}$, называется семейство, обладающее следующими свойствами:

(1) f_j конформно отображает Δ_j в $\mathfrak{R}$, $j = 1, \ldots, k$;

(2) если полюс A дифференциала $Q(z)\,dz^2$ лежит в Δ_j, то $f_j(A) = A$;

(3) $f_j(\Delta_j) \cap f_l(\Delta_l) = 0, \quad j \neq l, \ j, \ l = 1, \ldots, k$;

(4) если A — двойной полюс дифференциала $Q(z)\,dz^2$ в Δ_j, который при помощи некоторого локального параметра z изображается бесконечно удаленной точкой, то $f_j(z)$ локально представляется в виде

$$f_j(z) = az + a_0 + a_1/z + \text{(более высокие степени } z^{-1}); \ a \neq 0; \tag{4.1}$$

(5) если A — полюс порядка $m > 2$ дифференциала $Q(z)\,dz^2$, лежащий в Δ_j, который при помощи некоторого локального параметра z изображается бесконечно удаленной точкой, то $f_j(z)$ локально представляется в виде

$$f_j(z) = z + \frac{a_{m-3}}{z^{m-3}} + \text{(более высокие степени } z^{-1}); \tag{4.2}$$

(6) семейство $\{f\}$ обладает допустимой гомотопией F в тождественное отображение;

(7) гомотопия F может быть выбрана так, чтобы для полюса A порядка $m > 2$ дифференциала $Q(z)\,dz^2$, лежащего на границе полосообразной области, выполнялось соотношение

$$d(F, A) = 0.$$

Для наших целей удобнее пользоваться параметрами z, удовлетворяющими свойству (4) или (5), а не произвольными локальными параметрами. В представлениях (4.1) и (4.2) имеется в виду, что $f_j(z)$ и z вычисляются в терминах одного и того же локального параметра. Очевидно, что при переходе к любому другому локальному параметру, подчиненному тем же условиям, мы получим разложения того же вида, что и (4.1) и (4.2), хотя, возможно, с другими численными значениями коэффициентов.

Теорема 4.1. (Общая теорема о коэффициентах.) *Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная ориентированная римана поверхность, $Q(z)\,dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, $\{\Delta\}$ — допустимое семейство областей Δ_j, $j = 1, \ldots, k$, на $\mathfrak{R}$ относительно дифференциала*

$Q(z)\,dz^2$ *и* $\{f\}$ *— допустимое семейство функций* f_j, $j = 1, \ldots, k$, *ассоциированное с* $\{\Delta\}$. *Пусть* $Q(z)\,dz^2$ *имеет двойные полюсы* $P_1, \ldots, P_r$ *и полюсы* $P_{r+1}, \ldots, P_n$ *порядка, большего двух. Каждое из этих множеств может быть пустым, но хотя бы одно из них непусто. Пусть точка* P_j, $j \leqslant r$, *лежит в области* Δ_l, *и пусть в терминах некоторого локального параметра* z, *изображающего* P_j *как бесконечно удаленную точку, функция* f_l *имеет разложение*

$$f_l(z) = a^{(j)}z + a_0^{(j)} + \frac{a_1^{(j)}}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}), \quad (4.3)$$

а Q *имеет разложение*

$$Q(z) = \frac{\alpha^{(j)}}{z^2} + (\text{более высокие степени } z^{-1}). \quad (4.4)$$

Пусть P_j, $j > r$, *— полюс порядка* $m_j > 2$, *лежащий в области* Δ_l, *и пусть в терминах некоторого локального параметра* z, *изображающего* P_j *как бесконечно удаленную точку, функция* f_l *имеет разложение*

$$f_l(z) = z + \frac{a_{m_j-3}^{(j)}}{z^{m_j-3}} + (\text{более высокие степени } z^{-1}), \quad (4.5)$$

а Q *имеет представление*

$$Q(z) = \alpha^{(j)}z^{m_j-4} + (\text{убывающие степени } z). \quad (4.6)$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{r} \alpha^{(j)} \log a^{(j)} + \sum_{j=r+1}^{n} \alpha^{(j)} a_{m_j-3}^{(j)}\right\} \leqslant 0, \quad (4.7)$$

где $\log a^{(j)} = \log|a^{(j)}| - id(F, P_j)$, $j \leqslant r$.

Если в (4.7) *имеет место равенство, то* f_l *сводится к тождественному отображению в области* Δ_l, *удовлетворяющей некоторым из следующих условий:*

(1) *в* Δ_l *имеется полюс порядка, большего двух, дифференциала* $Q(z)\,dz^2$;

(2) *в* Δ_l *имеется полюс* P_j, $j \leqslant r$, *с соответствующим коэффициентом* $a^{(j)}$, *равным единице;*

(3) *в* Δ_l *имеется либо простой полюс, либо точка траектории, оканчивающейся в простом полюсе.*

Равенство в (4.7) *может выполняться, если имеется двойной полюс* P_j, $j \leqslant r$, *такой, что* $|a^j| \neq 1$ *только в том случае, когда поверхность* $\mathfrak{R}$ *конформно эквивалентна сфере, а* $Q(z)\,dz^2$ *— квадратичный дифференциал, единственными критическими точками которого являются два полюса, каждый второго порядка. Если, далее,* $\{\Delta\}$ *состоит из единственной области, то соответствующая функция конформно эквивалентна линейному преобразованию, неподвижными точками которого служат образы этих полюсов.*

Легко видеть, что выражение, вещественная часть которого берется в (4.7), не зависит от выбора локальных параметров вблизи различных полюсов P_j.

Можно привести сколь угодно сложные примеры, когда в (4.7) имеет место равенство для функций, отличных от тождественного преобразования, при условиях, отличных от условий теоремы 4.1.

Основным в доказательстве теоремы 4.1 является использование метрики

$$|d\zeta| = |Q(z)|^{1/2}\,|dz|,$$

которая конформно инвариантна на поверхности $\mathfrak{R} \setminus H$. Мы часто будем ее называть Q-метрикой.

4.2. Мы начнем доказательство теоремы 4.1 со сведения задачи к более простой.

Лемма 4.2. *Достаточно доказать неравенство* (4.7) *теоремы* 4.1 *при дополнительном предположении, что дифференциал* $Q(z)\,dz^2$ *не имеет на* $\mathfrak{R}$ *простых полюсов.*

Если $Q(z)\,dz^2$ имеет простые полюсы на $\mathfrak{R}$, то, так как множество H непусто, мы можем построить двулистную накрывающую поверхность $\mathfrak{R}^*$ поверхности $\mathfrak{R}$ с точками разветвления в простых полюсах и, возможно, в некотором элементе H (если число простых полюсов нечетно). В точках $\mathfrak{R}^*$, не являющихся точками разветвления, мы можем использовать локальные параметры, индуцированные покрытием $\mathfrak{R}$. В точках разветвления можно использовать параметр Z, такой, что $Z^2 = z$, где z — локальный параметр на $\mathfrak{R}$, при помощи которого точка, лежащая под точкой разветвления, изобра-

жается как $z = 0$. Таким образом, очевидно, что $\mathfrak{R}^*$ — конечная ориентированная риманова поверхность.

Квадратичный дифференциал $Q(z)\,dz^2$ индуцирует квадратичный дифференциал $Q^*(z)\,dz^2$ на $\mathfrak{R}^*$ следующим образом. Для локального параметра z, индуцированного покрытием $\mathfrak{R}$, положим

$$Q^*(z) = Q(z).$$

Для локального параметра Z в точке разветвления положим

$$Q^*(Z) = Q(Z^2)\,4Z^2.$$

Ясно, что таким образом мы определили положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}^*$. Для локального параметра Z, введенного выше, в точке разветвления, соответствующей простому полюсу дифференциала $Q(z)\,dz^2$, имеем

$$Q(z) = \frac{a}{z} + (\text{члены, регулярные относительно } z),$$

поэтому

$$Q^*(Z) = \left[\frac{a}{Z^2} + (\text{члены, регулярные относительно } Z^2)\right] 4Z^2,$$

так что $Q^*(Z)$ регулярна в точке $Z = 0$. Аналогично убедимся в том, что в точке разветвления поверхности $\mathfrak{R}^*$, лежащей над точкой множества H, имеется полюс порядка не ниже второго. Таким образом, дифференциал $Q^*(z)\,dz^2$ не имеет простых полюсов на $\mathfrak{R}^*$.

Каждая область семейства $\{\Delta\}$ покрывается одной или двумя областями на $\mathfrak{R}^*$, совокупность которых, очевидно, составляет допустимое семейство $\{\Delta^*\}$ областей на $\mathfrak{R}^*$ относительно дифференциала $Q^*(z)\,dz^2$. Семейство функций $\{f\}$, как легко видеть, индуцирует допустимое семейство функций $\{f^*\}$, ассоциированное с $\{\Delta^*\}$. Условия (1), (2), (3), (6) и (7) определения 4.4 проверяются непосредственно.

Пусть теперь A — некоторый элемент множества H, z — локальный параметр, при помощи которого A изображается бесконечно удаленной точкой, а соответствующая функция семейства $\{f\}$ и $Q(z)$ имеют разложения (4.3), (4.4) или (4.5),

(4.6), смотря по тому, является ли A полюсом $Q(z)\,dz^2$ порядка, равного двум или большего двух. Предположим сначала, что поверхность $\mathfrak{R}^*$ не имеет над A точек разветвления. Тогда на $\mathfrak{R}^*$ имеются две точки, покрывающие A, и в каждой из них можно использовать локальный параметр, индуцированный параметром z. При переходе к этому параметру соответствующие функции $f^*(z)$ и $Q^*(z)$ будут иметь те же разложения, что и выше. Поэтому в этих точках выполняется подходящее из условий (4) и (5) определения 4.4. Кроме того, вклад этих точек $\mathfrak{R}^*$ в сумму, соответствующую левой части (4.7), равен удвоенному вкладу точки $A \in \mathfrak{R}$.

Пусть теперь A — элемент множества H, над которым лежит точка разветвления поверхности $\mathfrak{R}^*$. Тогда на $\mathfrak{R}^*$ имеется единственная точка B, покрывающая A, и в ней можно использовать локальный параметр Z, заданный равенством $Z^2 = z$, при переходе к которому B изображается бесконечно удаленной точкой. Если в точке A справедливы разложения (4.5), (4.6), то соответствующая функция семейства $\{f^*\}$ имеет разложение

$$Z\left[1 + \frac{a^{(j)}_{m_j-3}}{Z^{2(m_j-3)}} + (\text{более высокие степени } Z^{-1})\right]^{1/2},$$

при надлежащем выборе ветви корня, т. е. разложение

$$Z + \frac{\frac{1}{2}\, a^{(j)}_{m_j-3}}{Z^{2m_j-5}} + (\text{более высокие степени } Z^{-1}),$$

в то время как

$$Q^*(Z) = [\alpha^{(j)} Z^{2(m_j-4)} + (\text{убывающие степени } Z)]\, 4Z^2 = \\ = 4\alpha^{(j)} Z^{2m_j-6} + (\text{убывающие степени } Z).$$

Таким образом, $Q^*(Z)$ имеет в B полюс порядка $2m_j - 2$, и в этой точке выполняется условие (5) определения 4.4. Кроме того, вклад этой точки в сумму, аналогичную левой части (4.7), равен $2\alpha^{(j)} a^{(j)}_{m_j-3}$, т. е. удвоенному вкладу точки A на поверхности $\mathfrak{R}$. Если в точке A справедливы раз-

ложения (4.3), (4.4), то соответствующая функция семейства $\{f^*\}$ имеет разложение

$$(a^{(j)})^{1/2} Z^{-1} + (\text{убывающие степени } Z),$$

тогда как

$$Q^*(Z) = 4\alpha^{(j)} Z^{-2} + (\text{убывающие степени } Z).$$

Таким образом, $Q^*(Z)$ имеет в точке B двойной полюс, и в этой точке выполнено условие (4) определения 4.4. Кроме того, вклад этой точки в сумму, аналогичную левой части (4.7), равен

$$4\alpha^{(j)} \log (a^{(j)})^{1/2} = 2\alpha^{(j)} \log a^{(j)},$$

т. е. удвоенному вкладу точки A на поверхности $\mathfrak{R}$ (легко проверить, что значение логарифма то же, что и раньше).

Таким образом, на $\mathfrak{R}^*$ выполнены все условия теоремы 4.1, а сумма в левой части (4.7) заменяется удвоенной суммой. Это показывает, что достаточно доказать неравенство (4.7) в предположении, что квадратичный дифференциал не имеет простых полюсов на римановой поверхности.

Всюду в дальнейшем при доказательстве неравенства (4.7) мы будем предполагать, что это условие выполнено уже для самого дифференциала $Q(z)dz^2$ на $\mathfrak{R}$.

Определение 4.5. *Геодезической* на $\mathfrak{R} \setminus H$ мы будем называть кривую, каждая достаточно короткая дуга которой является кратчайшей (в Q-метрике) дугой, соединяющей ее концы.

Лемма 4.3. *Кривая на $\mathfrak{R} \setminus H$ является геодезической тогда и только тогда, когда каждая ее точка, не принадлежащая C, лежит на дуге, на которой*

$$\arg Q(z)\, dz^2 = \text{const}, \tag{4.8}$$

в то время как каждая ее точка, являющаяся m-кратным нулем дифференциала $Q(z)dz^2$, служит общим концом двух дуг, на каждой из которых выполнено условие (4.8) *и которые составляют два угла, каждый не меньше* $2\pi/(m+2)$.

Это сразу вытекает из определения 4.5 и локальной структуры Q-метрики.

Говоря о гомотопических классах кривых в $\mathfrak{R} \setminus H$, соединяющих две точки A и B, мы будем иметь в виду, что допустимы лишь такие деформации, при которых точки A и B остаются неподвижными.

Лемма 4.4. *Пусть A и B — две точки множества $\mathfrak{R} \setminus H$. Тогда в каждом гомотопическом классе кривых в $\mathfrak{R} \setminus H$, соединяющих A и B, имеется единственная геодезическая, которая дает кратчайший путь от A до B в этом гомотопическом классе.*

Эта лемма и ее доказательство тесно связаны с одним результатом Тейхмюллера ([164, § 138], см. также [189]).

На универсальной накрывающей $\mathfrak{B}$ поверхности $\mathfrak{R} \setminus H$ Q-метрика индуцирует некоторую метрику, в которой $\mathfrak{B}$ — дифференциально-геометрическая поверхность. Поэтому существование геодезической в этой метрике, соединяющей любую заданную пару точек $\mathfrak{B}$ и образующей кратчайшую кривую, соединяющую эти точки, может быть установлено различными способами из общих соображений. Один из этих способов состоит в том, что сначала рассматривается дубль [1]) [164,2] $\widehat{\mathfrak{R}}$ для $\mathfrak{R} \setminus H$ вдоль граничных компонент $\mathfrak{R}$. Тогда, как легко видеть, универсальная накрывающая $\widehat{\mathfrak{B}}$ поверхности $\widehat{\mathfrak{R}}$ представляет собой полное дифференциально-геометрическое пространство в смысле Хопфа—Ринова [175] с метрикой, введенной выше. Таким образом, пару точек на $\widehat{\mathfrak{B}}$ можно соединить геодезической в любом заданном гомотопическом классе, причем эта геодезическая будет кратчайшей кривой. Для пары точек $\mathfrak{B}$ соответствующая геодезическая на $\widehat{\mathfrak{B}}$, как легко проверить, проектируется в нужную нам кривую.

Предположим теперь, что две точки A' и B' на $\mathfrak{B}$ можно соединить двумя различными геодезическими в метрике, индуцированной Q-метрикой. Можно считать, что они образуют границу односвязной области D, так как в противном случае проводимое ниже рассуждение

---

[1]) По поводу этого понятия см. Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М., 1960, стр. 168.— *Прим. перев.*

можно было бы применить к области, ограниченной частями этих кривых. Легко видеть, что D можно триангулировать геодезическими так, чтобы получить триангулированный комплекс, среди вершин которого находятся все точки $\bar{D}$, лежащие над нулями дифференциала $Q(z)dz^2$ на $\mathfrak{R}$. Пусть этот комплекс имеет F симплексов, V_b граничных вершин, V_i внутренних вершин, E_b граничных сторон, E_i внутренних сторон. Функция $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\, dz$ на $\mathfrak{R}$ индуцирует на $\mathfrak{V}$ функцию, отображающую каждый симплекс на евклидов треугольник. Объединяя этот факт с леммой 4.3 и формулой Эйлера, мы сразу получаем следующие равенства и неравенства (отметим еще, что геодезические должны образовывать в A' и B' положительные углы):

$$\begin{gathered} \pi F > 2\pi V_i + \pi (V_b - 2), \\ F - (E_i + E_b) + (V_i + V_b) = 1, \\ 3F = 2E_i + E_b, \\ V_b = E_b. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Три последние равенства приводят к равенству

$$F = 2V_i + V_b - 2,$$

что противоречит (4.9). Таким образом, любые две точки $\mathfrak{V}$ можно соединить единственной геодезической, которая является кратчайшей кривой, соединяющей эти точки, в метрике, индуцированной Q-метрикой. А это есть простая перефразировка утверждения леммы 4.4.

Следствие 4.1. *Для любого гомотопического класса замкнутых кривых на* $\mathfrak{R} \setminus H$ *через данную точку* $P \in \mathfrak{R} \setminus H$ *проходит единственная замкнутая геодезическая в этом гомотопическом классе; она является кратчайшей из кривых этого класса, проходящих через точку* P.

Лемма 4.5. *В обозначениях теоремы* 4.1 *пусть* Δ *принадлежит допустимому семейству* $\{\Delta\}$, f *— соответствующая функция семейства* $\{f\}$, *а* K *— компактное подмножество* $\Delta \setminus H$. *Пусть* Λ *— геодезическая в* Δ *с кон-*

цами в K, а Λ' — ее образ при отображении f. Тогда существует вещественная константа M, зависящая от K, но не зависящая от Λ, такая, что

$$\int_{\Lambda'} |d\zeta| > \int_{\Lambda} |d\zeta| - M, \tag{4.10}$$

где $|d\zeta| = |Q(z)|^{1/2}|dz|$ обозначает элемент длины в Q-метрике.

Этот результат по существу принадлежит Тейхмюллеру [164, § 136].

Для фиксированной точки P из $\Delta \setminus H$ функция $F(P,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определяет кривую с концами $f(P)$ и P, которую мы назовем путем, соответствующим точке P. По лемме 4.4 на $\mathfrak{R} \setminus H$ имеется геодезическая g_P (относительно Q-метрики), соединяющая $f(P)$ и P [направленная от $f(P)$ к P] и гомотопная пути, соответствующему точке P. Пусть ее длина равна λ_P. Наш первый шаг будет состоять в доказательстве того, что λ_P ограничена равномерно по всем P из K. Достаточно доказать, что λ_P непрерывно зависит от P в $\Delta \setminus H$. Для положительного ε найдем окрестность N_2 точки $f(P)$ на $\mathfrak{R}$, содержащую все точки, отстоящие от $f(P)$ меньше, чем на $\varepsilon/2$ (в Q-метрике), где ε столь мало, что N_2 гомеоморфна открытому кругу. Пусть N_1 — окрестность точки P на $\mathfrak{R}$, состоящая из всех точек, отстоящих от P меньше, чем на δ, где положительное число δ не превосходит $\varepsilon/2$ и столь мало, что $N_1 \subset \Delta$ и $f(N_1) \subset N_2$. Для $P' \in N_1$ пусть $\mu_{PP'}$, $\nu_{PP'}$ — геодезические в N_1 и N_2, соединяющие соответственно P с P' и $f(P)$ с $f(P')$. Легко видеть, что кривая $\mu_{PP'}^{-1} g_{P'} \nu_{PP'}$ гомотопна g_P (в произведении кривых первая кривая пишется справа). Таким образом,

$$\lambda_P < \lambda_{P'} + \varepsilon.$$

Аналогично

$$\lambda_{P'} < \lambda_P + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$|\lambda_{P'} - \lambda_P| < \varepsilon$$

для $P' \in N_1$. Поэтому λ_P непрерывно зависит от P. Ясно, что число λ_P ограничено равномерно по всем P из компактного множества K.

Пусть M таково, что

$$\lambda_P < \frac{1}{2} M$$

при всех $P \in K$. Пусть Λ — геодезическая с концами P и P' из K, лежащая в Δ, а Λ' — ее образ при отображении f. Тогда кривая $g_P \Lambda' g_P^{-1}$ гомотопна Λ и потому

$$\int_{\Lambda} |d\zeta| \leqslant \int_{\Lambda'} |d\zeta| + M,$$

откуда сразу следует неравенство (4.10).

Для замкнутых геодезических справедлив даже более сильный результат.

Лемма 4.6. *Если Λ — замкнутая геодезическая на $\mathfrak{R} \setminus H$, а Λ' — любая замкнутая кривая на $\mathfrak{R} \setminus H$, гомотопная Λ, то*

$$\int_{\Lambda} |d\zeta| \leqslant \int_{\Lambda'} |d\zeta|. \tag{4.11}$$

Пусть P — точка на Λ, P' — точка на Λ'; пусть Γ — кривая с двумя концевыми точками в P, которая получается, если проходить Λ, выходя из точки P и возвращаясь в нее, и пусть Γ' — кривая с двумя концевыми точками в P', полученная при аналогичном обходе Λ' в направлении, соответствующем в силу данной гомотопии направлению обхода Λ. Пусть γ — спрямляемая дуга (в Q-метрике) длины l, соединяющая P с P' в $\mathfrak{R} \setminus H$. Тогда кривая Γ^n при любом целом положительном n является геодезической с двумя концевыми точками в P, а $\gamma^{-1}(\Gamma')^n \gamma$ гомотопна этой кривой. Таким образом,

$$n \int_{\Lambda} |d\zeta| \leqslant n \int_{\Lambda'} |d\zeta| + 2l.$$

Разделив на n и устремив n к бесконечности, мы получим неравенство (4.11).

Лемма 4.7. *В обозначениях теоремы* 3.5 *и теоремы* 4.1 *пусть Δ — элемент допустимого семейства* $\{\Delta\}$,

f — соответствующая функция из семейства $\{f\}$; пусть $\mathfrak{M} = \Phi \cap \Delta$, и пусть $\mathfrak{M}'$ — образ $\mathfrak{M}$ при отображении f. Пусть $dA(P)$ обозначает элемент площади в точке P в Q-метрике. Тогда

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}'} dA \geqslant \iint\limits_{\mathfrak{M}} dA.$$

Равенство может иметь место только в том случае, когда отображение f всюду изометрично в Q-метрике.

Доказательство этого результата тесно связано с одним доказательством Тейхмюллера [164, § 135], но требуются довольно существенные изменения, чтобы получить нужную нам общность.

Очевидно, что доказательство необходимо только в том случае, когда $\mathfrak{M}$ непусто. Сразу же ясно, что тогда $\mathfrak{M}$ ограничено конечным числом кусочно-аналитических кривых, составленных из траекторий и их предельных концевых точек в C и, может быть, из конечного числа разрезов вдоль замыканий траекторий. Кроме того, каждая траектория в $\mathfrak{M}$ неограниченно продолжается в обоих направлениях, за исключением, быть может, конечного числа траекторий с концами в точках, принадлежащих C, или траекторий, порождающих граничный разрез $\mathfrak{M}$. От произвольной точки P, не лежащей на такой траектории, отложим в обоих направлениях от P на траектории, проходящей через P, отрезок длины $^1/_2 L$ в Q-метрике (L—положительно). На полученной таким образом дуге выберем в качестве параметра t длину дуги, алгебраически измеренную, начиная от P. Пусть эту дугу параметрически задает функция $S(t, P)$, $-{}^1/_2 L \leqslant t \leqslant {}^1/_2 L$, где $S(t, P)$ — точка на траектории, проходящей через P, которая соответствует длине дуги t. Очевидно, что $S(t, P)$ лежит в $\mathfrak{M}$ и $S(0, P) = P$.

Обозначим теперь через $|f'(P)|$ искажение, производимое в точке P функцией f относительно Q-метрики. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} \int\limits_{-{}^1/_2 L}^{{}^1/_2 L} |f'(S(t, P))|\, dt\, dA(P), \tag{4.12}$$

в котором можно пренебречь множеством меры нуль, где функция $S(t, P)$ не определена. Здесь независимые переменные t, P можно заменить на $|t|$, S, замечая, что

$$dt\, dA(P) = d|t|\, dA(S).$$

Делая эту подстановку и меняя порядок интегрирования, мы находим, что интеграл (4.12) равен

$$2 \iint_{\mathfrak{M}} |f'(S)|\, dA(S) \int_0^{1/2 L} d|t|,$$

т. е.

$$\iint_{\mathfrak{M}} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} |f'(S(t, P))|\, dt\, dA(P) = L \iint_{\mathfrak{M}} |f'(S)|\, dA(S). \qquad (4.13)$$

Пусть ε — положительное число, и пусть K_ε — компактное подмножество $\mathfrak{M}$ меры, не меньшей, чем

$$\iint_{\mathfrak{M}} dA - \varepsilon,$$

ограниченное конечным числом кусочно-аналитических кривых. Тогда если P принадлежит некоторому подмножеству $\mathfrak{M}_\varepsilon$ множества $\mathfrak{M}$ меры, не меньшей, чем

$$\iint_{\mathfrak{M}} dA - 2\varepsilon,$$

то обе точки $S(1/2 L, P)$ и $S(-1/2 L, P)$ будут лежать в K_ε. Пусть M_ε — константа, соответствующая K_ε по лемме 4.5. (Заметим, что $\mathfrak{M}$ отграничено от H.) Тогда ввиду того, что любая дуга траектории является геодезической, мы получим при $P \in \mathfrak{M}_\varepsilon$

$$\int_{-1/2 L}^{1/2 L} |f'(S(t, P))|\, dt \geqslant L - M_\varepsilon.$$

Интегрируя это неравенство по $\mathfrak{M}_\varepsilon$ относительно площади в Q-метрике, получаем

$$\iint_{\mathfrak{M}_\varepsilon} \int_{-1/2 L}^{1/2 L} |f'(S(t, P))|\, dt\, dA(P) \geqslant (L - M_\varepsilon)\left(\iint_{\mathfrak{M}} dA - 2\varepsilon\right).$$

Объединяя это неравенство с равенством (4.13), имеем

$$L \iint\limits_{\mathfrak{M}} |f'(S)|\, dA(S) \geqslant (L - M_\varepsilon) \left(\iint\limits_{\mathfrak{M}} dA - 2\varepsilon \right).$$

Разделив на L и устремив L к бесконечности, получим

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} |f'(S)|\, dA(S) \geqslant \iint\limits_{\mathfrak{M}} dA - 2\varepsilon$$

при любом положительном ε. Таким образом,

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} |f'(S)|\, dA(S) \geqslant \iint\limits_{\mathfrak{M}} dA.$$

Теперь, после простого применения неравенства Шварца, имеем

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} |f'(S)|^2\, dA(S) \geqslant \iint\limits_{\mathfrak{M}} dA,$$

и потому

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}'} dA \geqslant \iint\limits_{\mathfrak{M}} dA,$$

что и утверждалось. Утверждение леммы о возможности равенства сразу следует из условий равенства в неравенстве Шварца.

4.3. Теперь мы переходим к доказательству самой теоремы 4.1. Ход доказательства следующий. Сначала мы удалим из областей семейства $\{\Delta\}$ некоторые специальные окрестности точек множества H. Затем мы получим две оценки площадей образов оставшихся областей при отображениях, осуществляемых функциями семейства $\{f\}$, через площади самих этих областей. С одной стороны, мы получим оценку сверху, используя поведение функций $\{f\}$ на границах удаленных окрестностей. С другой стороны, мы получим оценку снизу, используя метод экстремальной метрики. Комбинация этих оценок и дает доказательство неравенства (4.7).

Наш первый шаг будет состоять в описании тех окрестностей, которые нужно удалить. При доказательстве теоремы 4.1 удобно использовать терминологию, применимую лишь тогда, когда исключены возможности I и II теоремы 3.5 для $\mathfrak{R}$ и $Q(z)dz^2$ (возможность III исключается автоматически). На самом деле проводимые далее рассуждения легко изменить так, чтобы доказать теорему и в этих случаях, но во избежание ненужных усложнений мы не будем упоминать эти частные случаи при конкретных рассмотрениях и всегда будем использовать терминологию, соответствующую тем конфигурациям, к которым применима основная структурная теорема.

Пусть сначала $P_j \in H$, $j > r$, — полюс дифференциала $Q(z)dz^2$ порядка $m_j > 2$. Пусть U — односвязная окрестность точки P_j, покрытая внутренним замыканием $m_j - 2$ концевых областей и, может быть, полосообразных областей, ассоциированных с P_j. Разрежем эту окрестность вдоль некоторой траектории Λ, в одном направлении идущей к точке P_j, а в другом — выходящей из U, например вдоль траектории, лежащей на границе одной из концевых областей. На множестве $U - \Lambda$ функция $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\, dz$ однозначна (при произвольном выборе ветви корня) и отображает это множество на часть римановой поверхности, лежащей над ζ-плоскостью. Рассмотрим в ζ-плоскости квадрат со стороной $2L$ с центром в начале координат и со сторонами, параллельными вещественной и мнимой оси. Возьмем след этого квадрата на римановой поверхности и его прообраз на $\mathfrak{R}$. При достаточно большом L этот прообраз представляет собою последовательность дуг, описываемых следующим образом. Во-первых, имеется дуга ортогональной траектории с начальной точкой на Λ. Затем имеется дуга траектории, лежащая целиком в некоторой примыкающей концевой области. Далее, имеется дуга ортогональной траектории. Они чередуются таким образом (причем всего имеется $m_j - 2$ дуг траекторий) до тех пор, пока мы не достигнем дуги ортогональной траектории, оканчивающейся в Λ. Ее концевая точка, вообще говоря, не будет совпадать с начальной точкой упомянутой выше первой дуги. Соединяя, если необходимо, эти две точки ду-

гой, лежащей на Λ, мы получим простую замкнутую кривую, которую обозначим $\gamma(P_j, L)$. Эта кривая разбивает $\mathfrak{R}$ на две компоненты; ту из них, которая содержит P_j, и нужно удалить. Будем обозначать ее через $U(P_j, L)$.

Пусть теперь $P_j \in H$, $j \leqslant r$, — полюс второго порядка дифференциала $Q(z)\,dz^2$, лежащий в круговой области. Пусть U — односвязная окрестность точки P_j, лежащая в круговой области. Разрежем U вдоль ортогональной траектории N, в одном направлении идущей к точке P_j, а в другом — выходящей из U. На множестве $U \setminus \overline{N}$ функция $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ однозначна (снова при любом выборе ветви) и отображает это множество на вертикальную полуполосу в плоскости ζ. Можно считать выбор ветви таким, что $\operatorname{Im}\zeta$ принимает в этой полуполосе сколь угодно большие положительные значения. Тогда для достаточно большого L рассмотрим пересечение этой полуполосы с прямой $\operatorname{Im}\zeta = L$.

Это пересечение представляет собой отрезок, которому на $\mathfrak{R}$ соответствует замкнутая траектория, лежащая в круговой области. Эту траекторию обозначим $\gamma(P_j, L)$. Она разбивает $\mathfrak{R}$ на две компоненты. Ту из них, которая содержит P_j, и нужно удалить. Обозначим ее через $U(P_j, L)$.

Пусть, наконец, $P_j \in H$, $j \leqslant r$, — полюс второго порядка дифференциала $Q(z)\,dz^2$, имеющий односвязную окрестность U, лежащую во внутреннем замыкании объединения тех полосообразных областей, для которых точка P_j является граничной. Разрежем U вдоль траектории Λ, идущей в одном направлении к P_j, а в другом — выходящей из U. На множестве $U \setminus \overline{\Lambda}$ функция $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ при любом выборе ветви однозначна и отображает это множество на горизонтальную полуполосу плоскости ζ. Можно считать выбранную ветвь такой, что $\operatorname{Re}\zeta$ принимает в этой полуполосе сколь угодно большие положительные значения. Тогда для достаточно большого L возьмем пересечение этой полуполосы с прямой $\operatorname{Re}\zeta = L$. Это пересечение представляет собой отрезок, которому на $\mathfrak{R}$ соответствует дуга ортогональной траектории с концевыми точками на Λ. Эти точки, вообще говоря, не совпадают. Соединяя их, если необходимо, дугой, лежащей на Λ, получаем простую замкнутую кривую, которую обозначим $\gamma(P_j, L)$. Эта кривая

разбивает $\mathfrak{R}$ на две компоненты. Ту из них, которая содержит P_j, и нужно удалить. Обозначим ее через $U(P_j, L)$.

Положим

$$\Delta_i(L) = \Delta_i - \bigcup_{j=1}^{n} \overline{U}(P_j, L), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Заметим, что, за исключением тех случаев, когда $\Delta_i(L)$ совпадает с Δ_i, область $\Delta_i(L)$ зависит не только от параметра L, но также и от выбора ветви функции $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2} dz$ в различных множествах, связанных с точками H. Мы будем, однако, считать, что в каждой точке множества H выбрана некоторая определенная ветвь, и потому область $\Delta_i(L)$ вполне определяется заданием L. В дальнейшем мы всегда будем предполагать L столь большим, что никакая граничная компонента области $\Delta_i(L)$ не пересекает ни одну из кривых $\gamma(P_j, L)$ и не проникает во внутренность ни одной из окрестностей $U(P_j, L)$.

4.4. Обозначим теперь $f_l(\Delta_l(L))$ через $\Delta_i'(L)$. Оценим сверху площадь $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i'(L)$ в Q-метрике через площадь $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L)$, вычисленную также в Q-метрике. Из вида областей $\Delta_l(L)$ и свойств функций семейства $\{f\}$ ясно, что каждая из этих площадей конечна. Заметим, что площадь $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i'(L)$ ограничена сверху площадью области, лежащей на $\mathfrak{R}$ и имеющей в качестве границы образы кривых $\gamma(P_j, L)$. Так как площадь $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L)$ равна площади области, ограниченной кривыми $\gamma(P_j, L)$, то достаточно определить изменение площади, вызванное перемещением каждой такой граничной кривой при отображении, осуществляемом соответствующей функцией семейства $\{f\}$.

Пусть сначала $P_j \in H$, $j > r$, — полюс порядка $m_j > 2$ дифференциала $Q(z)\,dz^2$. При отображении $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2} dz$ кривой $\gamma(P_j, L)$ соответствует конечная последовательность отрезков, отличающаяся от $m_j - 2$ полуграниц квадратов (с центром в начале координат и со стороной $2L$) не более чем одним горизонтальным и двумя вертикальными отрез-

ками, причем длина каждого из них не зависит от L. Чтобы определить изменение площади, о котором говорилось выше, найдем отображение, индуцированное на плоскости ζ функцией f_l, такой, что P_j принадлежит Δ_l. При этом мы имеем в виду следующее: для ζ мы находим соответствующую точку z, выполняем отображение $f_l(z)$, а затем точку $f_l(z)$ отображаем с помощью той же ветви функции $\int [Q(z)]^{1/2} dz$, что и раньше, переходя от z к $f_l(z)$ вдоль обращения пути, соответствующего этой точке при деформации F. Пусть ω—значение, соответствующее ζ при индуцированном отображении. Заметим сначала, что

$$\zeta = \alpha^{1/2}\left(\frac{1}{2}m - 1\right)^{-1} z^{\frac{1}{2}m-1} + (\text{убывающие степени } z^{1/2}),$$

где мы пишем α, m вместо $\alpha^{(j)}$, m_j; при четном m в разложении может присутствовать логарифмический член. Выбор значения корней зависит от определения ζ. Тогда

$$\omega = \zeta + (\alpha^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}m-2} + \ldots)\left(\frac{a_{m-3}}{z^{m-3}} + \ldots\right),$$

или

$$\omega = \zeta + \alpha a_{m-3}(1/2\, m - 1)^{-1}\zeta^{-1} + O(|\zeta|^{-(1+k)}), \qquad (4.14)$$

где $k = 2/(m-2)$ и вместо $a^{(j)}_{m_j-3}$ написано a_{m-3}. Таким образом, изменение площади, возникающее при отображении полуграницы квадрата, равно

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2i}\int (\bar{\zeta} + \bar{b}\zeta^{-1})(1 - b\zeta^{-2})\, d\zeta - \frac{1}{2i}\int \bar{\zeta} d\zeta\right\} + O(L^{-k}),$$

где интегралы берутся по полуграницe квадрата и вместо $\alpha a_{m-3}\left(\frac{1}{2}m - 1\right)^{-1}$ написано b. Сразу ясно, что все это выражение есть $O(L^{-k})$, а что касается изменения площади, вызванного перемещением отрезков, упомянутых выше, то оно, очевидно, равно $O(L^{-1})$. Таким образом, полное изменение площади есть $O(L^{-1})$ или $O(L^{-k})$, смотря по тому, какая из этих величин больше. Во всяком случае, изменение площади, возникающее при отображении f_l кривой $\gamma(P_j, L)$, $j > r$, равно $o(1)$, а это все, что нам нужно.

Пусть теперь $P_j \in H$, $j \leqslant r$, — полюс второго порядка дифференциала $Q(z)\, dz^2$, лежащий в круговой области. По

теореме 3.4 в этом случае коэффициенты $\alpha^{(j)}$ неотрицательны. При отображении $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2} dz$ кривой $\gamma(P_j, L)$ соответствует горизонтальный отрезок длины $2\pi |\alpha^{(j)}|^{1/2}$. Чтобы определить изменение площади, описанное выше, рассмотрим отображение, индуцированное в плоскости ζ функцией f_l, такой, что P_j принадлежит Δ_l (это следует понимать так же, как в предшествующем случае). Сначала заметим, что

$$\zeta = \alpha^{1/2} \log z + (\text{степени } z^{-1}),$$

причем вместо $\alpha^{(j)}$ мы пишем α. Согласно сделанному ранее выбору ветви, корень $\alpha^{1/2}$ имеет положительную мнимую часть (он является чисто мнимым). Пусть ω — точка, соответствующая ζ при отображении, индуцированном функцией f_l. Тогда

$$\omega = \zeta + \alpha^{1/2} \log a + O(e^{-L}) \tag{4.15}$$

на упомянутом горизонтальном отрезке, причем вместо $a^{(j)}$ мы пишем a. Область, являющаяся образом рассматриваемой, имеет боковые стороны, соответствующие дугам на N, которые получаются одна из другой переносом на $2\pi|\alpha|^{1/2}$. Таким образом, изменение площади, возникающее при воздействии f_l на кривую $\gamma(P_j, L)$, в этом случае равно

$$2\pi |\alpha|^{1/2} \operatorname{Im}(\alpha^{1/2} \log a) + o(1) = -2\pi \operatorname{Re}(\alpha \log a) + o(1).$$

Пусть, наконец, $P_j \in H$, $j \leqslant r$, — полюс второго порядка дифференциала $Q(z)\,dz^2$, не лежащий в круговой области. При отображении $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2} dz$ кривой $\gamma(P_j, L)$ соответствуют вертикальный и горизонтальный отрезки (последний вырождается в точку, если $\alpha^{(j)} > 0$), причем длина каждого из них постоянна и не зависит от L. Эти отрезки имеют один общий конец, а вектор, соединяющий другие их концы в соответствии с однократным обходом вокруг P_j, при котором P_j остается справа, равен $2\pi i\,[\alpha^{(j)}]^{-2}$. Здесь $[\alpha^{(j)}]^{-2}$ имеет положительную вещественную часть в соответствии со сделанным ранее выбором ветви ζ. Снова имеем

$$\zeta = \alpha^{1/2} \log z + (\text{члены, содержащие степени } z^{-1}),$$

в тех же упрощенных обозначениях, что и раньше. Пусть ω обозначает точку, соответствующую ζ при отображении, индуцированном f_l в ранее указанном смысле. Тогда

$$\omega = \zeta + \alpha^{1/2} \log a + O(e^{-L})$$

на упомянутых отрезках, причем вместо $a^{(j)}$ мы пишем a, а логарифм определяется так же, как в теореме 4.1. В том случае, когда α не является вещественным положительным (в этом случае оно не может быть и вещественным отрицательным), рассмотрим окрестность $U(P_j, L)$, разрезанную вдоль дуги, пересекающей траектории под равными углами, имеющей один конец в P_j, другой — на $\gamma(P_j, L)$ и обладающей в P_j предельным направлением. Отображение $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2} dz$ переводит разрезанную таким образом окрестность в полуполосу постоянной ширины $2\pi|\alpha|^{1/2}$ со сторонами, параллельными $\alpha^{1/2}$. С помощью того же рассуждения, что и в предыдущем случае, мы найдем изменение площади, возникающее при воздействии f_t на кривую $\gamma(P_j, L)$:

$$2\pi \operatorname{Re}(|\alpha| \log a) + o(1).$$

Заметим, что здесь выбор ветви логарифма не играет никакой роли.

Если мы в соответствии с предыдущим критерием разобьем полюсы второго порядка дифференциала $Q(z)\,dz^2$ на две группы: $P_1, \ldots, P_s$ — полюсы, лежащие в круговых областях, и $P_{s+1}, \ldots, P_r$ — полюсы, не лежащие в круговых областях (причем одно из этих множеств или оба могут быть пустыми), то мы получим нашу первую оценку:

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Delta_i'(L)} dA \leqslant \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Delta_i(L)} dA - \sum_{j=1}^{s} 2\pi \operatorname{Re}(\alpha^{(j)} \log a^{(j)}) + \\ + \sum_{j=s+1}^{r} 2\pi \operatorname{Re}(|\alpha^{(j)}| \log a^{(j)}) + o(1). \qquad (4.16)$$

Здесь dA снова обозначает элемент площади в Q-метрике.

4.5. Теперь, используя метод экстремальной метрики, оценим снизу площадь множества $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i'(L)$ (в Q-метрике) через площадь множества $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L)$. На этот раз мы будем истолковывать первое из этих двух чисел как площадь мно-

жества $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L)$ в некоторой новой метрике. Для $P \in \Delta_i$ мы, как в § 4.2, обозначим через $|f_i'(P)|$ искажение в точке P при отображении f_i, вычисленное в Q-метрике. Определим теперь метрику $\rho\,|d\zeta|$ на множестве $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i$ равенством

$$\rho(P)\,|d\zeta(P)| = |f_i'(P)|\,|d\zeta(P)|, \quad P \in \Delta_i,$$

$$\text{где } |d\zeta| = |Q(z)|^{1/2}\,|dz|.$$

Ясно, что

$$\iint\limits_{\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L)} \rho^2\,dA = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Delta_i(L)} dA.$$

Теперь рассмотрим пересечение $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L)$ с основными областями каждого типа, связанными со строением траекторий дифференциала $Q(z)\,dz^2$ на $\mathfrak{R}$, согласно теореме 3.5, и оценим площадь этого пересечения в метрике $\rho\,|d\zeta|$.

Предположим сначала, что $\widehat{\Phi}$ не пусто. По теореме 3.5 (3) и (4) и в силу выбора окрестностей $U(P_j, L)$ в § 4.3 имеем

$$\widehat{\Phi} \cap \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L).$$

Обозначим $\widehat{\Phi} \cap \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i$ через Φ^*. Тогда

$$\iint\limits_{\Phi^*} \rho^2\,dA = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\widehat{\Phi} \cap \Delta_i} \rho^2\,dA.$$

По лемме 4.7

$$\iint\limits_{\widehat{\Phi} \cap \Delta_i} \rho^2\,dA \geqslant \iint\limits_{\widehat{\Phi} \cap \Delta_i} dA.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{\Phi^*} \rho^2\,dA \geqslant \iint\limits_{\Phi^*} dA. \tag{4.17}$$

Пусть теперь $\mathfrak{D}$ — кольцевая область, определяемая траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$.
Тогда

$$\mathfrak{D} \cap \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L)$$

и множество $\mathfrak{D} \cap \bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i$ (которое мы обозначим через $\mathfrak{D}^*$) состоит из конечного числа двусвязных областей; каждая из этих областей ограничена двумя геодезическими, состоящими из одной или более траекторий, и может быть разрезана вдоль конечного числа дуг траекторий. Замкнутая траектория Λ в $\mathfrak{D} \cap \Delta_i$ отображается функцией f_i на замкнутую кривую Λ', гомотопную Λ. Используя лемму 4.6, получаем

$$\int_{\Lambda} \rho\,|d\zeta| = \int_{\Lambda'} |d\zeta| \geqslant \int_{\Lambda} |d\zeta|.$$

Выполняя отображение, упомянутое в определении 3.10 (3), и используя лемму 2.2, сразу получаем, что

$$\iint_{\mathfrak{D}^*} \rho^2\,dA \geqslant \iint_{\mathfrak{D}^*} dA. \tag{4.18}$$

Пусть теперь $\mathfrak{C}$ — круговая область, определяемая траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$. Обозначим через $\mathfrak{C}(L)$ пересечение $\mathfrak{C}$ с множеством $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i(L)$. Тогда, согласно предыдущим рассуждениям,

$$\iint_{\mathfrak{C}(L)} \rho^2 dA \geqslant \iint_{\mathfrak{C}(L)} dA. \tag{4.19}$$

Пусть $\mathfrak{E}$ — концевая область, определяемая траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, на границе которой находится полюс P_j, $j > r$, порядка m_j. Пусть P_j лежит в области Δ_i семейства $\{\Delta\}$. Из определения 4.1 следует, что $\mathfrak{E}$ не может пересекаться ни с какой областью семейства $\{\Delta\}$, кроме Δ_i. Обозначим $\mathfrak{E} \cap \Delta_i(L)$ через $\mathfrak{E}(L)$. Строение траекторий дифференциала $-Q(z)dz^2$ таково, что предельные направления в P_j делят пополам углы между предельными

направлениями для дифференциала $Q(z)\,dz^2$. Таким образом, имеются две лежащие в $\mathfrak{E}$ концевые области $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ для $-Q(z)\,dz^2$, соответствующие предельным направлениям для этого дифференциала. Области $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ совпадают, если $m_j = 3$, и не пересекаются в противном случае. Объединение $\mathfrak{E}^*$ областей $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ (взятое при $m_j = 3$ на разветвленной в точке P_j двулистной накрывающей поверхности $\mathfrak{R}$) является тогда односвязным множеством, которое отображается функцией $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2} dz$ (при надлежащем выборе ветви) взаимно однозначно на объединение E^* некоторой верхней, правой и левой полуплоскостей. Обозначим через $E(L)$ образ $\mathfrak{E}(L)$ при этом отображении. Тогда $E(L)$ представляет собой прямоугольник ширины $2L$ и высоты $L + \lambda$ (где λ не зависит от L, является вещественным и может быть как отрицательным, так и положительным), возможно, с конечным числом горизонтальных разрезов. При подходящем выборе ветви функции $\int [Q(z)]^{1/2} dz$ прямоугольник $E(L)$ отличается от полуквадрата

$$-L \leqslant \xi \leqslant L, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant L \qquad (\zeta = \xi + i\eta),$$

разрезанного, как описано выше, самое большее прямоугольником длины $2L$ и высоты λ, не зависящей от L.

Теперь перенесем метрику $\rho(P)\,|\,d\zeta(P)\,|$ на плоскость ζ, полагая

$$\rho(\zeta)\,|\,d\zeta\,| = \rho(P)\,|\,d\zeta(P)\,|.$$

Использование одного и того же символа ρ в обоих случаях не вызовет недоразумений. Ясно, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} \rho\, dA = \iint\limits_{E(L)} \rho\, d\xi\, d\eta. \tag{4.20}$$

Пусть теперь $\sigma(\eta_i)$ обозначает горизонтальный отрезок длины $2L$, лежащий в $E(L)$ на прямой $\operatorname{Im}\zeta = \eta_i$. Он существует для всех значений η_i из промежутка $L \geqslant \eta_i \geqslant -\lambda$, кроме конечного числа тех, которые соответствуют образу граничного разреза Δ_i. Пусть $A(\eta)$, $B(\eta)$ — концы отрезка $\sigma(\eta_i)$, лежащие соответственно на прямых $\operatorname{Re}\zeta = L$, $\operatorname{Re}\zeta = -L$. Пусть $s(\eta_i)$ — прообраз $\sigma(\eta)$ на $\mathfrak{R}$, и пусть $t(\eta_i)$ — образ $s(\eta_i)$ при отображении f_i. Обозначим через φ_i отображение, индуцированное на E^* функцией f_i (как в § 4.4). При достаточно больших L точки $\varphi_i(A(\eta_i))$, $\varphi_i(B(\eta_i))$ лежат в E^*

и их можно соединить кратчайшей ломаной $\gamma(\tau_i)$ в $\bar{E}^*$. Прообраз $g(\tau_i)$ этой кривой на $\mathfrak{R}$, очевидно, является геодезической. При достаточно большом τ_i образ $\tau(\eta)$ отрезка $\sigma(\tau_i)$ при отображении φ_i лежит в E^* и поэтому гомотопен $\gamma(\tau_i)$ в E^*. Значит, для этих значений τ_i кривые $t(\eta)$ и $g(\tau_i)$ гомотопны в $\mathfrak{R}\setminus H$. С другой стороны, $t(\tau_i)$ и $g(\eta)$ имеют при $L \geqslant \tau_i \geqslant -\lambda$ одни и те же концы при одинаковых значениях τ_i, и когда τ_i меняется от $-\lambda$ до L, $g(\eta)$ заметает непрерывный образ некоторого квадрата, тогда как $t(\tau_i)$ ведет себя аналогично, если исключить образы граничных разрезов Δ_i. Следовательно, пути $g(\tau_i)$ и $t(\tau_i)$ гомотопны в $\mathfrak{R}\setminus H$, если только оба они определены. Заметим теперь, что интеграл $\int\limits_{\sigma(\tau_i)} \rho\, d\xi$ равняется длине пути $t(\tau_i)$ в Q-метрике, и поэтому он больше, чем $\int\limits_{\gamma(\tau_i)} \rho\, |d\zeta|$. Более того,

$$\int\limits_{\sigma(\tau_i)} \rho\, d\xi \geqslant \operatorname{Re}\left[\varphi_i(A(\tau_i)) - \varphi_i(B(\tau_i))\right]. \tag{4.21}$$

Теперь рассмотрим отображение $\omega = \varphi_i(\zeta)$, для которого при достаточно больших $|\zeta|$ справедливо разложение (4.14), где вместо $\alpha^{(i)}$, m_j, a_{m_j-3} написано α, m, a_{m-3}. Полагая $\tau_i = L\operatorname{tg}\theta$ и записывая $\alpha a_{m-3}(1/2 m-1)^{-1} = Me^{i\mu}$, мы видим, что $A(\tau_i)$, $B(\tau_i)$ имеют координаты $L + iL\operatorname{tg}\theta$, $-L + iL\operatorname{tg}\theta$, и неравенство (4.21) дает

$$\int\limits_{\sigma(\tau_i)} \rho\, d\xi \geqslant 2L + 2ML^{-1}\cos\mu\cos^2\theta + O\left(L^{-(1+k)}\right). \tag{4.22}$$

Интегрируя это неравенство по τ_i в отрезке $-\lambda \leqslant \tau_i \leqslant L$, получим (так как конечным числом значений τ_i, при которых $\sigma(\tau_i)$ не определено, можно пренебречь), что

$$\iint\limits_{E(L)} \rho\, d\xi\, d\tau_i \geqslant 2L(L+\lambda) + 2ML^{-1}\cos\mu \int\limits_{\theta_0}^{\pi/4} \cos^2\theta\, dL\operatorname{tg}\theta + O\left(L^{-k}\right),$$

где θ_0 — значение угла θ, соответствующее $\tau_i = -\lambda$. Заменив его нулем, мы изменим второе слагаемое правой части только на величину $O(L^{-1})$.

Объединяя это с равенством (4.20), получаем

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} \rho\, dA \geqslant \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} dA + \pi (m-2)^{-1} \operatorname{Re}(\alpha a_{m-3}) + o(1). \tag{4.23}$$

С другой стороны,

$$0 \leqslant \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} (\rho - 1)^2\, dA = \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} \rho^2\, dA + \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} dA - 2 \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} \rho\, dA,$$

или

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} \rho^2\, dA \geqslant 2 \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} \rho\, dA - \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} dA. \tag{4.24}$$

Так как всего имеется $m-2$ концевых областей, соответствующих полюсу порядка m, большего двух, то, применяя неравенства (4.23), (4.24) ко всем концевым областям и суммируя результаты, получаем

$$\sum \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} \rho^2\, dA \geqslant \sum \iint\limits_{\mathfrak{E}(L)} dA + 2\pi \operatorname{Re}\Big\{ \sum_{j=r+1}^{n} \overset{(j)}{\alpha} a_{m_j-3} \Big\} + o(1). \tag{4.25}$$

Пусть, наконец, $\mathfrak{S}$ — полосообразная область, имеющая граничные элементы, порожденные полюсами P_j и P_l, которые могут быть различными или совпадать и могут иметь любой порядок, не меньший двух. По определению 4.1 они должны лежать в одной области Δ_i семейства $\{\Delta\}$, и $\mathfrak{S}$ не может пересекаться ни с какой областью семейства $\{\Delta\}$, отличной от Δ_i. Обозначим $\mathfrak{S} \bigcap \Delta_i(L)$ через $\mathfrak{S}(L)$. При надлежащем выборе ветви функция $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\, dz$ отображает $\mathfrak{S}$ на полосу S, заданную неравенствами

$$0 < \operatorname{Im} \zeta < \lambda$$

(λ положительно), причем граничный элемент области $\mathfrak{S}$, порожденный полюсом P_j, соответствует той граничной точке полосы S в бесконечности, в окрестности которой $\operatorname{Re}\zeta$ становится бесконечной положительной, а граничный элемент $\mathfrak{S}$, порожденный P_l, соответствует той граничной точке S в бесконечности, в окрестности которой $\operatorname{Re}\zeta$ становится бесконечной отрицательной. Если порядок полюса P_j больше двух, то предельное направление для траекторий из $\mathfrak{S}$ в точке P_j лежит в концевой области $\mathfrak{D}$ для дифференциала $-Q(z)\,dz^2$. Если P_j — полюс второго порядка, то

пусть $\mathfrak{R}$ — односвязная окрестность P_j на $(\mathfrak{R} \setminus H) \cup P_j$, ограниченная замкнутой траекторией дифференциала $-(\alpha^{(j)})^{-1} Q(z)\, dz^2$. При сделанном выборе ветви функция $\int [Q(z)]^{1/2}\, dz$, продолженная в область $\mathfrak{D}$, в первом случае отображает ее на правую полуплоскость. Продолженная во втором случае в $\mathfrak{R}$, эта функция отображает некоторый элемент, логарифмически разветвленный вокруг P_j, на полуплоскость

$$\operatorname{Re}\left[(\alpha^{(j)})^{-1/2}\zeta\right] > c,$$

где c — вещественная постоянная, а корень $(\alpha^{(j)})^{-1/2}$ выбран так, что эта полуплоскость содержит правую полуполосу полосы S. Те же рассуждения относительно точки P_l показывают, что полным образом при таком выборе ветви функции $\int [Q(z)]^{1/2}\, dz$ является объединение S^* полосы S и двух полуплоскостей, которые мы рассматриваем как риманову накрывающую поверхность в том случае, когда эти полуплоскости пересекаются. При том же отображении области $\mathfrak{S}(L)$ соответствует прямоугольник $S(L)$:

$$-L + b < \xi < L + a, \quad 0 < \eta < L$$

($\zeta = \xi + i\eta$), где a, b — вещественные числа, которые могут быть как отрицательными, так и положительными (так как выбранная здесь ветвь может не совпадать с той, которая была выбрана при построении окрестности $U(P_j, L)$). Этот прямоугольник может иметь конечное число горизонтальных разрезов. Как и раньше, перенесем метрику $\rho(P)\,|\,d\zeta\,(P)\,|$ на плоскость ζ, полагая

$$\rho(\zeta)\,|\,d\zeta\,| = \rho(P)\,|\,d\zeta\,(P)\,|.$$

Сразу ясно, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}(L)} \rho\, dA = \iint\limits_{S(L)} \rho\, d\xi\, d\eta. \tag{4.26}$$

Аналогично случаю концевой области пусть $\sigma(\gamma_\eta)$ обозначает горизонтальный отрезок длины $2L + a - b$, лежащий в $S(L)$ на прямой $\operatorname{Im}\zeta = \gamma_\eta$, который существует при всех значениях γ_η из промежутка $0 < \gamma_\eta < \lambda$, за исключением, может быть, конечного их числа. Пусть $A(\gamma_\eta)$, $B(\gamma_\eta)$ — концы отрезка $\sigma(\gamma_\eta)$, лежащие соответственно на прямых

$\operatorname{Re}\zeta = L + a$, $\operatorname{Re}\zeta = -L + b$. Пусть $s(\eta)$ — прообраз $\sigma(\eta)$ на $\mathfrak{R}$, и пусть $t(\gamma_i)$ — образ $s(\gamma_i)$ при отображении f_i. Обозначим через φ_i отображение, индуцированное на S^* функцией f_i (как в п. 4.4). В том случае, когда P_j — полюс порядка, большего двух, отображение $\omega = \varphi_i(\zeta)$ в точке $A(\gamma_i)$ при достаточно больших L представляется в виде

$$\omega = \zeta + O(L^{-1}) \tag{4.27}$$

согласно условию (7) определения 4.4. Если P_j — полюс второго порядка, то имеет место разложение

$$\omega = \zeta + (\alpha^{(j)})^{1/2} \log \alpha^{(j)} + o(1), \tag{4.28}$$

где $[\alpha^{(j)}]^{1/2} = |\alpha^{(j)}|^{1/2} e^{i\psi_j}$ — корень с положительной вещественной частью, а $\log \alpha^{(j)}$ определен так же, как в формулировке теоремы 4.1. В точке $B(\eta)$ при достаточно большом L рассматриваемое отображение имеет разложение (4.27), если P_l — полюс порядка, большего двух, и разложение

$$\omega = \zeta - [\alpha^{(l)}]^{1/2} \log \alpha^{(l)} + o(1), \tag{4.29}$$

если P_l — полюс второго порядка, причем ветви корня и логарифма выбраны так же, как в предыдущем случае. При достаточно большом L точки $\varphi_i(A(\eta))$, $\varphi_i(B(\eta))$ лежат в S^* и их можно соединить кратчайшей ломаной $\gamma(\gamma_i)$ в $\overline{S}^*$. Прообраз $g(\gamma_i)$ этой линии на $\mathfrak{R}$, очевидно, является геодезической. Прообразы на $\mathfrak{R}$ прямолинейных отрезков h_{γ_i}, k_{γ_i}, соединяющих $A(\eta)$, $\varphi_i(A(\eta))$ и соответственно $B(\gamma_i)$, $\varphi_i(B(\gamma_i))$, гомотопны путям, соответствующим прообразам $A(\gamma_i)$, $B(\gamma_i)$ (проходимым в противоположном направлении). Так как путь $h_\eta^{-1}\gamma(\eta)\,k_\eta$ гомотопен $\sigma(\eta)$, то $g(\eta)$ гомотопен $t(\eta)$. Теперь заметим, что интеграл $\int\limits_{\sigma(\gamma_i)} \rho\, d\xi$ равняется длине пути $t(\gamma_i)$ в Q-метрике, и поэтому он больше, чем $\int\limits_{\gamma(\eta)} \rho\, |d\zeta|$. Более того,

$$\int\limits_{\sigma(\eta)} \rho\, d\xi \geqslant \operatorname{Re}\left[\varphi_i(A(\eta)) - \varphi_i(B(\eta))\right]. \tag{4.30}$$

Используя разложения (4.27), (4.28), (4.29), получаем

$$\int\limits_{\sigma(\eta)} \rho\, d\xi \geqslant 2L + a - b + \delta_j + \delta_l + o(1), \tag{4.31}$$

где δ_j равно 0, если порядок полюса P_j больше двух, и $(\alpha^{(j)})' = \log \alpha^{(j)}$, если он равен двум; аналогичное относится и к δ_l. Интегрируя по η_i в отрезке $0 \leqslant \eta \leqslant \lambda$ (так как конечным числом значений η_i, при которых $\sigma(\eta_i)$ не определено, можно пренебречь), получим

$$\iint\limits_{S(L)} \rho \, d\xi \, d\eta \geqslant \lambda [2L + a - b] + \lambda\delta_j + \lambda\delta_l + o(1).$$

Сопоставляя это неравенство с равенством (4.26), находим, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}(L)} \rho \, dA \geqslant \iint\limits_{\mathfrak{S}(L)} dA + \lambda\delta_j + \lambda\delta_l + o(1). \tag{4.32}$$

Как и при доказательстве неравенства (4.24), имеем

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}(L)} \rho^2 \, dA \geqslant 2 \iint\limits_{\mathfrak{S}(L)} \rho \, dA - \iint\limits_{\mathfrak{S}(L)} dA. \tag{4.33}$$

Применяя неравенства (4.32), (4.33) ко всем полосообразным областям и суммируя, получаем

$$\sum \iint\limits_{\mathfrak{S}(L)} \rho^2 \, dA \geqslant \sum \iint\limits_{\mathfrak{S}(L)} dA + \\ + 4\pi \operatorname{Re} \Big\{ \sum_{j=s+1}^{r} |\alpha^{(j)}| e^{i\psi_j} \cos \psi_j \log \alpha^{(j)} \Big\} + o(1), \tag{4.34}$$

где обе суммы распространены на все полосообразные области.

Складывая неравенства (4.17), (4.18), (4.19), (4.25), (4.34), получаем нужную нам оценку снизу:

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Delta_i(L)} \rho^2 \, dA \geqslant \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Delta_i(L)} dA + \\ + 4\pi \operatorname{Re} \Big\{ \sum_{j=s+1}^{r} |\alpha^{(j)}| e^{i\psi_j} \cos \psi_j \log \alpha^{(j)} \Big\} + \\ + 2\pi \operatorname{Re} \Big\{ \sum_{j=r+1}^{n} \alpha^{(j)} \alpha^{(j)}_{m_j - 3} \Big\} + o(1). \tag{4.35}$$

4.6. Вспоминая, что

$$\sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Delta_i'(L)} dA = \sum_{i=1}^{k} \iint\limits_{\Delta_i(L)} \rho^2\, dA,$$

и объединяя неравенства (4.16) и (4.35), получаем

$$-2\pi \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{s} \alpha^{(j)} \log a^{(j)}\right\} + 2\pi \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=s+1}^{r} |\alpha^{(j)}| \log a^{(j)}\right\} +$$

$$+ o(1) \geqslant 4\pi \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=s+1}^{r} |\alpha^{(j)}| e^{i\psi_j} \cos\psi_j \log a^{(j)}\right\} +$$

$$+ 2\pi \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=r+1}^{n} \alpha^{(j)} a^{(j)}_{m_j - 3}\right\} + o(1).$$

Явно выписанные члены не зависят от L, и элементарный подсчет дает

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{r} \alpha^{(j)} \log a^{(j)} + \sum_{j=r+1}^{n} \alpha^{(j)} a^{(j)}_{m_j - 3}\right\} \leqslant 0.$$

Этим заканчивается доказательство неравенства (4.7).

4.7. Что касается возможности знака равенства в неравенстве (4.7), то мы видим, что в задаче, измененной в соответствии с леммой 4.2, он может иметь место только тогда, когда все вспомогательные неравенства обращаются в равенства. В частности, по лемме 4.7, примененной в случае равенства в (4.17), лемме 2.2, примененной в случае равенства в (4.18) и (4.19), и условиям равенства в (4.24) и (4.33), мы видим, что должно иметь место тождество $\rho(P) \equiv 1$ в $\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i \setminus H$, т. е. отображения, осуществляемые функциями семейства $\{f\}$, должны быть изометричными в Q-метрике. Дальнейшее применение леммы 2.1 или леммы 2.2 показывает, что каждая

траектория в концевой, полосообразной или круговой области должна отображаться соответствующей функцией семейства $\{f\}$ снова в траекторию. Более того, никакое открытое множество на $\mathfrak{R}$ не может быть внешним по отношению к $\bigcup_{i=1}^{k} f_i(\Delta_i)$.

В условиях теоремы 4.1 квадратичный дифференциал $Q(z)\,dz^2$ имеет на $\mathfrak{R}$ по крайней мере один полюс порядка, большего единицы. Поэтому траектории $Q(z)\,dz^2$ заполняют по крайней мере одну концевую, полосообразную или круговую область, и в семействе $\{\Delta\}$ имеется такая область, что все лежащие в ней траектории отображаются в траектории. Это свойство распространяется на все области семейства $\{\Delta\}$. Все эти условия применимы и к задаче в ее первоначальной форме, т. е. даже при наличии простых полюсов дифференциала $Q(z)\,dz^2$ на $\mathfrak{R}$.

Если в области Δ_i имеется полюс P_j, $j > r$, порядка, большего двух, дифференциала $Q(z)\,dz^2$, то требуемая форма (4.5) отображения f_i и перечисленные выше условия сразу показывают, что отображение f_i является тождественным в некоторой окрестности P_j и, следовательно, всюду в Δ_i. Подобное замечание справедливо и тогда, когда в Δ_i содержится полюс P_j, $j \leqslant r$, второго порядка дифференциала $Q(z)\,dz^2$, причем соответствующий коэффициент $a^{(j)}$ равен единице.

Если внутри Δ_i содержится простой полюс, то он должен переходить в себя при отображении f_i, и остальные условия сразу показывают, что f_i есть тождественное отображение в окрестности этой точки, а следовательно, и всюду в Δ_i.

Предположим, что простой полюс P лежит на граничной компоненте области Δ_i, являющейся разрезом, но часть траектории, порождающая разрез, находится внутри Δ_i. Тогда по условию гомотопии, наложенному на f_i, P принадлежит компоненте дополнения к $f_i(\Delta_i)$, соответствующей этому разрезу. Легко видеть, что эта компонента должна совпадать с первоначальным разрезом ввиду изометрического свойства f_i и сохранения траекторий и что Δ_i можно расширить так, чтобы она включала в себя этот разрез, а

функция f_i, продолженная на расширенную область, обладала бы свойствами изометрии и сохранения траекторий. Тогда из предыдущего параграфа следует, что f_i — тождественное отображение.

Пусть теперь P_j — полюс второго порядка дифференциала $Q(z)\,dz^2$, такой, что для $Q(z)$ справедливо разложение (4.4). Тогда логарифмически разветвленный элемент в P_j, покрывающий некоторую окрестность точки P_j, ограниченную (замкнутой) траекторией квадратичного дифференциала $-[\alpha^{(j)}]^{-1}Q(z)\,dz^2$, отображается функцией $\zeta = \int [Q(z)]^{1/2}\,dz$ (определенной, как в п. 4.3) на полуплоскость $\operatorname{Re}[(\alpha^{(j)})^{-1/2}\zeta] > c$, где c вещественно (при надлежащем выборе корня $[\alpha^{(j)}]^{1/2}$). Если не осуществляется исключенная возможность II теоремы 3.5, то эта полуплоскость содержится в максимальной однолистной полуплоскости $\mathfrak{H}$ вида $\operatorname{Re}[(\alpha^{(j)})^{-1/2}\zeta] > c$ на римановой поверхности $\mathfrak{A}$ из п. 3.4. Граница этой полуплоскости либо порождает образ некоторой точки из C, либо соответствует некоторой граничной компоненте поверхности $\mathfrak{R}$.

Легко видеть, что последнее возможно лишь тогда, когда существует конформное отображение, переводящее $\mathfrak{R}$, P_j и $Q(z)\,dz^2$ соответственно в круг $|z| < 1$, точку $z = 0$ и квадратичный дифференциал $-K\,dz^2/z^2$ с положительным K. В этом случае можно непосредственно проверить, что неравенство (4.7) превращается в равенство лишь тогда, когда $|a^{(j)}| = 1$. В предыдущем случае при наличии равенства в (4.7) отображение, индуцированное в $\mathfrak{H}$ функцией f_i (P_j лежит в Δ_i), должно иметь вид

$$\omega = \zeta + (\alpha^{(j)})^{1/2}\log a^{(j)},$$

где ветви корня и логарифма те же, что и в п. 4.4. Максимальность полуплоскости $\mathfrak{H}$ и присутствие образа точки из C на ее границе показывают, что выражение $[\alpha^{(j)}]^{1/2}\log a^{(j)}$ должно иметь вид $bi\,[\alpha^{(j)}]^{1/2}$ с вещественным b. Таким образом, $|a^{(j)}| = 1$. Это означает, что при наличии двойного полюса дифференциала $Q(z)\,dz^2$ равенство в (4.7) может иметь место лишь тогда, когда соответствующий коэффициент $|a^{(j)}|$ равен единице, если только не существует конформного отображения, переводящего $\mathfrak{R}$ и $Q(z)\,dz^2$ в сферу и квадратичный дифференциал $s\,dz^2/z^2$, где s — ком-

плексное число. Заключительное утверждение теоремы 4.1 проверяется непосредственно. Итак, доказательство теоремы 4.1 закончено.

4.8. Теорему 4.1 легко можно обобщить следующим образом.

Теорема 4.2. (Обобщенная теорема.) *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1 *со следующими исключениями:*

(*a*) $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, *не обязательно положительный;*

(*b*) *если* Γ — *максимальная открытая дуга или замкнутая кривая на границе области* Δ_i *семейства* $\{\Delta\}$, *лежащая на* N (*где* N — *ортогональная траектория или объединение последовательных ортогональных траекторий вместе с их общими концами, лежащими на границе* $\mathfrak{R}$, *максимальная среди всех таких кривых*), *то* f_i *и* $F(P, t)$ *допускают непрерывное продолжение на* Γ, *переводящее* Γ *в* N.

Тогда в тех же обозначениях, что и в теореме 4.1, *имеет место неравенство* (4.7) *и справедливы те же следствия выполнения равенства в этом неравенстве.*

Ясно сразу, что в действительности отображение f_i гомеоморфно на вышеупомянутых дугах и границах и что функция f_i регулярна на них в терминах граничных униформизирующих параметров. Теорему 4.2 легче всего доказать, построив дубль $\widehat{\mathfrak{R}}$ поверхности $\mathfrak{R}$ через те максимальные открытые граничные дуги и граничные компоненты поверхности $\mathfrak{R}$, на которых $Q(z)dz^2 \leqslant 0$. Таким образом мы получим конечную ориентированную риманову поверхность, которая может иметь граничные компоненты, порожденные теми граничными дугами и граничными компонентами поверхности $\mathfrak{R}$, на которых $Q(z)dz^2 \geqslant 0$.

Как дифференциал Шоттки, $Q(z)dz^2$ продолжается до квадратичного дифференциала на $\widehat{\mathfrak{R}}$, который, как легко проверить, является положительным. При помощи семейств $\{\Delta\}$, $\{f\}$ и деформации F мы естественным образом получим аналогичные семейства и деформацию на $\widehat{\mathfrak{R}}$, которые удовлетворяют условиям теоремы 4.1 на этой

поверхности. Левая часть неравенства (4.7) заменится для поверхности $\widehat{\mathfrak{R}}$ удвоенным числом. Таким образом, теорема 4.1, примененная к $\widehat{\mathfrak{R}}$, сразу же дает соответствующее неравенство для $\mathfrak{R}$. Результаты, относящиеся к случаям равенства, распространяются непосредственно.

4.9. Значение условия (7) в определении 4,4 не вполне ясно. Непонятно, существенно ли оно для справедливости теоремы 4.1 или только обусловлено методом, использованным при ее доказательстве. Оно применяется только в оценке из п. 4.5 в случае полосообразных областей. Однако соответствующие рассмотрения для двойных полюсов, в частности, выбор ветви $\log a^{(j)}$, неизбежны. Укажем, что недавно Ройден [151] сформулировал лемму [151, лемма 1], которая позволила бы нам опустить условие (7) в определении 4.4, если бы она была верной. Однако легко привести контрпримеры к этой лемме и отыскать ошибку в ее «доказательстве».

Глава V

КАНОНИЧЕСКИЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

5.1. В этой главе мы рассмотрим некоторые стандартные канонические конформные отображения для областей плоского типа и конечной связности; в конце мы дадим некоторые указания и для случая бесконечной связности. Наш метод использует некоторые экстремальные свойства канонических конфигураций и компактность рассматриваемых семейств функций. По существу тот же самый подход применялся ранее Грёчем [53, 58] и Ренгелем [147], но здесь использование общей теоремы о коэффициентах приводит к значительному упрощению и единообразию.

Рассмотрим следующий случай.

Теорема 5.1. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Тогда существует единственная функция $\Phi(z)$ семейства $\Sigma_0(D)$, отображающая D конформно на область, ограниченную разрезами вдоль дуг окружностей с центрами в начале.*

Первые семь теорем этой главы принадлежат Кёбе [112, 113].

Лемма 5.1. *Пусть односвязная область D содержит начало и бесконечно удаленную точку. Тогда существует функция семейства $\Sigma_0(D)$, отображающая D на область, ограниченную разрезом по окружности с центром в начале.*

По теореме Римана об отображении существует конформное отображение $w=f(z)$ области D на внешность окружности $|w|=1$, переводящее точку $z=\infty$ в себя, причем в окрестности этой точки справедливо разложение

$$f(z) = az + \text{(регулярная функция от } z^{-1}),$$

где a отлично от нуля и $f(0) = -\rho$, ρ — вещественное число, большее единицы. Пусть теперь

$$g(w) = \frac{\rho w^2 + \rho^2 w}{\rho w + 1}.$$

Легко проверить, что $a^{-1}g(f(z))$ и есть искомая функция.

Лемма 5. 2. *Пусть область D на z-сфере ограничена конечным числом разрезов вдоль дуг окружностей с центром в начале. Если $f \in \Sigma_0(D)$, то*

$$|f'(0)| \leqslant 1. \tag{5.1}$$

Равенство в (5.1) *возможно только в том случае, когда* $f(z) = z$.

Применим общую теорему о коэффициентах, выбирая в качестве $\mathfrak{R}$ z-сферу, полагая $Q(z)dz^2$ равным $-dz^2/z^2$, считая семейство $\{\Delta\}$ состоящим из одной области D и выбирая в качестве f соответствующую функцию. Область D, очевидно, допустима. Допустима также и функция f, так как допустимая гомотопия в этом случае, очевидно, существует, а условие (7) определения 4.4 пусто и потому тривиально выполняется. Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет двойные полюсы в начале и в бесконечно удаленной точке; обозначим их через P_1 и P_2. Переходя к локальным параметрам, описанным в теореме 4.1, находим коэффициенты

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = -1,$$

$$a^{(1)} = \frac{1}{f'(0)},$$

$$a^{(2)} = 1.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{-\log|f'(0)|^{-1}\} \leqslant 0,$$

причем значения степени деформации в P_1 и P_2 несущественны. Это и доказывает неравенство (5.1). Утверждение о возможности равенства соответствует случаю (2) теоремы 4.1.

Для доказательства теоремы 5.1 рассмотрим точную верхнюю грань значения $|f'(0)|$ по всем $f \in \Sigma_0(D)$ и обозна-

чим ее через μ. Компактность семейства $\Sigma_0(D)$ (которая следует из стандартных рассуждений о нормальных семействах) влечет за собой конечность μ и существование функции $\Phi \in \Sigma_0(D)$, такой, что $|\Phi'(0)| = \mu$. Допустим, что какая-нибудь граничная компонента $\Phi(D)$ не является разрезом по окружности с центром в начале, и пусть $\sigma(w)$— отображение ее дополнения, существование которого утверждается в лемме 5.1. Если $\tau(z) = \sigma(\Phi(z))$, то $\tau \in \Sigma_0(D)$ и из леммы 5.2 следует, что

$$|\tau'(0)| > \mu,$$

что невозможно. Таким образом, $w = \Phi(z)$ дает отображение D на область, граница которой состоит из разрезов вдоль окружностей с центром в начале. Если $\widetilde{w} = \widetilde{\Phi}(z)$ — второе такое отображение, а $\widetilde{w} = \widetilde{k}(w)$, $w = k(\widetilde{w})$ — соответствующие сложные отображения, то из леммы 5.2 следует, что

$$|k'(0)| \leqslant 1, \quad |\widetilde{k}'(0)| \leqslant 1,$$

и поэтому

$$\Phi(z) \equiv \widetilde{\Phi}(z),$$

так что отображение на область указанного вида единственно и теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.2. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Тогда в семействе $\Sigma_0(D)$ существует единственная функция $\Psi(z)$, конформно отображающая D на область, ограниченную разрезами, принадлежащими лучам, исходящим из начала.*

Доказательство теоремы 5.2 отличается от доказательства теоремы 5.1 только тем, что вместо явно выписанного отображения $g(z)$ леммы 5.1 мы используем отображение

$$h(z) = z + \frac{1}{z} + \rho + \frac{1}{\rho},$$

и, применяя общую теорему о коэффициентах, мы используем квадратичный дифференциал dz^2/z^2. При этом неравенство (5.1) заменяется неравенством $|f'(0)| \geqslant 1$, а

вместо точной верхней грани $|f'(0)|$ по всем $f \in \Sigma_0(D)$ мы берем точную нижнюю грань.

Теорема 5.3. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Тогда для всякого вещественного θ существует функция $f_\theta(z)$ семейства $\Sigma_0(D)$, конформно отображающая D на область, ограниченную разрезами вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала $e^{-2i\theta}\,dz^2/z^2$.*

Если θ не является целым кратным $\frac{\pi}{2}$, то траектории этого квадратичного дифференциала представляют собой логарифмические спирали, составляющие угол θ с лучами, исходящими из начала. Приводимое доказательство по существу принадлежит Грёчу [57].

Рассмотрим функцию

$$\exp\{e^{i\theta}(\cos\theta\,\log\Psi(z) - i\sin\theta\,\log\Phi(z))\},$$

где Φ, Ψ — функции, существование которых утверждается в теоремах 5.1 и 5.2. Легко проверить, что эта функция регулярна и однозначна в $D\setminus\{0, \infty\}$. Ее можно продолжить в начало и в бесконечно удаленную точку так, что если продолженную функцию обозначить через $f_\theta(z)$, то

$$f_\theta(0) = 0,$$

$$f_\theta(z) = z + (\text{регулярная функция от } z^{-1})$$

в окрестности бесконечно удаленной точки. Кроме того, f_θ допускает непрерывное продолжение на граничные элементы области D и переводит их в разрезы вдоль траекторий дифференциала $e^{-2i\theta}\,dz^2/z^2$. Ввиду того что функция $f_\theta(z)$ однолистна в бесконечно удаленной точке, она однолистна при всех $z \in D$. Таким образом, $f_\theta(z) \in \Sigma_0(D)$ и представляет собою требуемую функцию.

5.2. Теорема 5.4. *Пусть D — область плоскости z с конечным числом граничных континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 2$, содержащая начало. Тогда D можно конформно отобразить с помощью функции $w = \Phi_1(z)$ на круг $|w| < 1$, разрезанный вдоль дуг окружностей с центром*

в начале так, чтобы континуум C_1 соответствовал окружности $|w|=1$ и

$$\Phi_1(0)=0, \quad \Phi_1'(0)>0.$$

При указанной нормировке отображающая функция определяется единственным образом.

Применяя теорему Римана об отображении, мы можем предполагать, что C_1 представляет собой окружность $|z|=1$. Пусть $\widetilde{D}$ — объединение области D, ее отражения в окружности $|z|=1$ и самой этой окружности. Пусть $\Phi(z)$ — отображение области D, указанное в теореме 5.1. Тогда функция

$$\overline{\Phi'(0)(\Phi(\bar{z}^{-1}))^{-1}}$$

также отображает $\widetilde{D}$ на область, ограниченную разрезами вдоль дуг окружностей с центром в начале, и принадлежит $\Sigma_0(\widetilde{D})$, а следовательно, тождественно совпадает с $\Phi(z)$. Полагая $z=e^{i\theta}$, мы видим, что $\Phi'(0)$ вещественна и положительна и

$$|\Phi(e^{i\theta})|=(\Phi'(0))^{1/2}.$$

Таким образом, $\Phi(z)$ конформно отображает D на круг радиуса $(\Phi'(0)^{1/2}$ с центром в начале, разрезанный вдоль дуг окружностей с центром в начале, а $(\Phi'(0))^{-1/2}\Phi(z)$ осуществляет отображение, указанное в теореме 5.4. Если бы существовало второе такое отображение, то предыдущее построение, выполненное в обратном порядке, доставило бы нам второе, отличное от прежнего, отображение на область, ограниченную разрезами вдоль дуг окружностей с центром в начале, принадлежащее $\Sigma_0(\widetilde{D})$, что невозможно. Это завершает доказательство теоремы 5.4.

Теорема 5.5. *Пусть D — область плоскости z с конечным числом граничных континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n\geqslant 2$, содержащая начало. Тогда D можно конформно отобразить с помощью функции $w=\Psi_1(z)$ на круг $|w|<1$, разрезанный вдоль отрезков радиусов, исходящих из на-*

чала, так, чтобы континууму C_1 соответствовала окружность $|w|=1$ и

$$\Psi_1(0)=0, \quad \Psi_1'(0)>0.$$

При указанной нормировке отображающая функция определяется единственным образом.

Это доказывается так же, как теорема 5.4. Заметим, что из этого результата легко получить отображение двусвязной области на круговое кольцо (теорема 2.4).

Т е о р е м а 5.6. *Пусть D — область плоскости z с конечным числом граничных континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 3$. Тогда D можно конформно отобразить с помощью функции $w=\Phi_2(z)$ так, чтобы C_1 соответствовал окружности $|w|=1$, C_2 — окружности $|w|=\mathrm{P}$ $(0<\mathrm{P}<1)$, а остальные граничные компоненты — разрезам вдоль дуг окружностей с центром в начале. Отображение единственно с точностью до вращения вокруг начала.*

Пусть F обозначает семейство функций $f(z)$, регулярных и однолистных в D и таких, что $w=f(z)$ так отображает D, что C_1 соответствует окружности $|w|=1$, а C_2 — окружности $|w|=r$, $0<r<1$. Ясно, что семейство F непусто и компактно. Поэтому в F имеется функция, для которой r принимает максимальное значение P, положительное и меньшее единицы. Обозначим эту функцию через $\Phi_2(z)$.

Если при отображении $w=\Phi_2(z)$ некоторая граничная компонента Γ области $\Phi_2(D)$ не является разрезом вдоль дуги окружности с центром в начале, то пусть $W=\sigma(w)$ — отображение, указанное в теореме 5.4 для области E, ограниченной Γ и $|w|=1$, причем единичная окружность играет роль C_1. Применяя общую теорему о коэффициентах для круга $|W|<1$ в качестве $\mathfrak{R}$, дифференциала $-dW^2/W^2$ в качестве $Q(z)dz^2$, семейства $\{\Delta\}$, состоящего из единственной области $\sigma(E)$, и соответствующей функции, обратной для σ, сразу получаем неравенство

$$|\sigma'(0)|>1.$$

Пусть при отображении σ окружность $|w|=\mathrm{P}$ переходит в кривую C. Пусть $Z=\tau(W)$ конформно отображает об-

ласть D', ограниченную окружностью $|W| = 1$ и C, на круговое кольцо

$$P^* < |Z| < 1$$

так, что C соответствует окружности $|Z| = P^*$.

Пусть теперь r' положительно и столь мало, что

$$|\sigma(r'e^{i\alpha})| > r', \quad \alpha \text{ вещественно.} \tag{5.2}$$

Пусть E^* — область, ограниченная C и образом окружности $|w| = r'$ при отображении σ. В каждой из областей E^* и D' метрика $(2\pi|W|)^{-1}|dW|$ допустима в проблеме модуля для класса кривых, разделяющих граничные компоненты. Пусть J, J^* — площади этих областей в этой метрике. Тогда по теореме 2.4 и неравенству (5.2) имеем:

$$J \geqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{P^*},$$

$$J^* \geqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{P}{r'},$$

$$J + J^* < \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r'}.$$

Отсюда следует, что

$$P < P^*.$$

Это противоречит максимальности P, так как $\tau(\sigma(\Phi_2(z)))$ принадлежит F. Таким образом, Φ_2 осуществляет требуемое отображение.

Утверждение о единственности получается после применения леммы 2.2.

Теорема 5.7. *Пусть D — область в плоскости z с конечным числом граничных континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 3$. Тогда D можно конформно отобразить с помощью функции $w = \Psi_2(z)$ так, что C_1 будет соответствовать окружности $|w| = 1$, C_2 — окружности $|w| = \rho$ $(0 < \rho < 1)$, а остальные граничные компоненты — разрезам вдоль лучей, исходящих из начала. Отображение единственно с точностью до вращения вокруг начала.*

Лемма 5.3. *Пусть трехсвязная область D плоскости z имеет граничные континуумы C_1, C_2, C_3. Тогда D можно конформно отобразить с помощью функции $w=\Psi_2(z)$ так, что C_1 будет соответствовать окружности $|w|=1$, C_2 — окружности $|w|=\rho$, а C_3 — разрезу вдоль луча, исходящего из начала.*

Пусть $\Phi_2(z)$ — отображение, указанное в теореме 5.6 для области D, а P, по-прежнему, обозначает радиус внутренней окружности, ограничивающей образ D. Можно считать, что дуга окружности, соответствующая C_3, делится пополам положительной частью вещественной оси. Тогда

$$E = \Phi_2(D) \cap (\operatorname{Im} w > 0)$$

можно конформно отобразить на область E', заданную неравенствами

$$\rho < |W| < 1, \quad \operatorname{Im} W > 0,$$

так, чтобы граничные точки -1, $-P$, P, 1 области E соответствовали граничным точкам -1, $-\rho$, ρ, 1 области E'. Продолжая это отображение на $\Phi_2(D)$ с помощью отражения в вещественной оси, мы получим, что $\Phi_2(D)$, а значит, и D отображается на круговое кольцо

$$\rho < |W| < 1,$$

разрезанное вдоль отрезка положительной вещественной оси.

Лемма 5.4. *Пусть область D плоскости z ограничена окружностями $|z|=1$, $|z|=r$, $0<r<1$, и конечным числом разрезов, принадлежащих лучам, исходящим из начала. Пусть D конформно отображается функцией $w=f(z)$ так, что $|z|=1$ соответствует $|w|=1$, $|z|=r$ соответствует $|w|=r'$ $(0<r'<1)$ и некоторая граничная компонента области D не соответствует разрезу вдоль радиуса. Тогда*

$$r < r'.$$

Это получается сразу, если применить лемму 2.3, используя метрику $\left(|w| \log \frac{1}{r'}\right)^{-1} |dw|$ в области $f(D)$.

Рассмотрим снова семейство F, определенное в доказательстве теоремы 5.6. В этом семействе имеется функция, для которой r минимально и равно, скажем, ρ, $0<\rho<1$. Обозначим такую функцию через $\Psi_2(z)$.

Если при отображении $w=\Psi_2(z)$ некоторая граничная компонента Γ области $\Psi_2(D)$ не является разрезом, принадлежащим лучу, исходящему из начала, то пусть $W=\sigma(w)$ — отображение, указанное в лемме 5.3, для трехсвязной области, ограниченной $|w|=1$, $|w|=\rho$ и Γ. Пусть окружность, соответствующая $|w|=\rho$, имеет радиус r' (окружность $|w|=1$ играет роль C_1). Тогда по лемме 5.4

$$r'<\rho,$$

что противоречит минимальности ρ, так как $\sigma(\Psi_2(z))$ содержится в F. Поэтому $\Psi_2(z)$ осуществляет отображение, указанное в теореме 5.7.

Утверждение относительно единственности следует из леммы 2.3.

Из теоремы 5.6 или теоремы 5.7 легко вывести свойство симметрии трехсвязных областей, которое мы использовали при доказательстве леммы 3.7.

Следствие 5.1. *Трехсвязная область D допускает единственное антиконформное отображение A на себя, оставляющее инвариантной каждую граничную компоненту. Множество неподвижных точек D при отображении A составляет три открытые аналитические дуги.*

5.3. Теорема 5.8. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит бесконечно удаленную точку. Тогда для каждого вещественного θ, $0\leqslant\theta<\pi$, существует единственная функция $g_\theta(z)$ семейства $\Sigma(D)$, отображающая D на область, ограниченную прямолинейными разрезами, проведенными в направлении, имеющем аргумент θ.*

Этот результат принадлежит Гильберту [33]. Заметим, что если для $\theta=0$ теорема доказана, то для других значений θ доказательство получается немедленно. В самом деле, если $f\in\Sigma'(e^{-i\theta}D)$, то $e^{i\theta}f(e^{-i\theta}z)$ принадлежит $\Sigma'(D)$.

Лемма 5.5. *Пусть односвязная область D содержит бесконечно удаленную точку. Тогда в $\Sigma'(D)$ существует*

функция, отображающая D на область, ограниченную разрезом, параллельным вещественной оси.

Это сразу следует из теоремы Римана об отображении, если применить некоторые элементарные преобразования.

Л е м м а 5.6. *Пусть область D на z-сфере ограничена конечным числом прямолинейных разрезов, параллельных вещественной оси. Пусть функция* $f \in \Sigma'(D)$ *имеет в окрестности бесконечности разложение*

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}). \quad (5.3)$$

Тогда

$$\operatorname{Re} a_1 \leqslant 0. \quad (5.4)$$

Равенство в (5.4) *может иметь место только тогда, когда* $f(z) \equiv z$.

Этот результат принадлежит Грёчу [58] и де-Посселю [142].

Применим общую теорему о коэффициентах, взяв z-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, dz^2 — в качестве $Q(z)\,dz^2$, а в качестве семейства $\{\Delta\}$ — единственную область D, причем соответствующая функция равна f. Выполнение условий теоремы легко проверяется. Квадратичный дифференциал dz^2 регулярен всюду, кроме полюса четвертого порядка в бесконечности. Для соответствующих коэффициентов имеем

$$\alpha^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = a_1.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re} a_1 \leqslant 0.$$

Утверждение относительно равенства соответствует случаю (1) теоремы 4.1.

Для доказательства теоремы 5.8 рассмотрим верхнюю грань $\operatorname{Re} a_1$ по всем функциям $f \in \Sigma'(D)$, разложение которых в бесконечно удаленной точке имеет вид (5.3). Компактность семейства $\Sigma'(D)$, которую легко доказать элементарным способом (см., например, [55]), влечет за собой конечность этого числа и существование функции $g_0(z)$, для которой $\operatorname{Re} a_1^{(0)}$ достигает этой верх-

ней грани, причем $g_0(z)$ имеет в бесконечности разложение

$$g_0(z) = z + \frac{a_1^{(0)}}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}).$$

Допустим, что при отображении $w = g_0(z)$ некоторая граничная компонента области $g_0(D)$ не является разрезом, параллельным вещественной оси. Пусть $\sigma(w)$—отображение, указанное в лемме 5.5 для ее дополнения. Эта функция имеет в бесконечности разложение

$$\sigma(w) = w + \frac{b_1}{w} + (\text{более высокие степени } w^{-1}).$$

По лемме 5.6 $\operatorname{Re} b_1 > 0$. С другой стороны, $\sigma(g_0(z))$ содержится в $\Sigma'(D)$ и имеет в бесконечности разложение

$$\sigma(g_0(z)) = z + \frac{a_1^{(0)} + b_1}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}).$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}(a_1^{(0)} + b_1) = \operatorname{Re} a_1^{(0)} + \operatorname{Re} b_1 > \operatorname{Re} a_1^{(0)},$$

что противоречит максимальности $\operatorname{Re} a_1^{(0)}$. Таким образом, $w = g_0(z)$ осуществляет отображение, указанное в теореме 5.8. Утверждение относительно единственности сразу следует из леммы 5.6.

Следствие 5.2. *В обозначениях теоремы* 5.8

$$g_\theta(z) = e^{i\theta}(\cos\theta \; g_0(z) - i \sin\theta \, g_{\pi/2}(z)), \tag{5.5}$$

где θ *вещественно,* $0 \leqslant \theta < \pi$.

Функция, стоящая в правой части равенства (5.5), очевидно регулярна всюду в D, кроме бесконечно удаленной точки, в окрестности которой она имеет разложение

$$z + (\text{члены, содержащие степени } z^{-1}).$$

Кроме того, эта функция переводит граничные компоненты области D в прямолинейные разрезы с направлением θ. Отсюда следует, что эта функция содержится

в $\Sigma'(D)$. Из утверждения о единственности в теореме 5.8 ясно, что эта функция тождественно совпадает с $g_\theta(z)$.

5.4. Теорема 5.9. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Тогда для каждого вещественного θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, в семействе $\Sigma_0(D)$ существует единственная функция $p_\theta(z)$, отображающая D на область, ограниченную разрезами вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала $e^{-i\theta}\,dw^2/w$.*

Результаты следующих семи теорем принадлежат Грёчу [52, 56]. Метод, используемый Грёчем и излагаемый здесь, в существенных чертах был подсказан ему Кёбе.

Пусть $\widetilde{D}$—образ двулистной накрывающей области D, разветвленной в нуле и в бесконечности, при отображении $z^{1/2}$. Тогда легко проверить, что функция

$$p_\theta(z) = [g_{\theta/2}(z^{1/2})]^2$$

(где $g_{\theta/2}$ обозначает функцию, указанную в теореме 5.8, для области $\widetilde{D}$) обладает свойствами, описанными в теореме 5.9. Если бы существовала вторая такая функция, отличная от найденной, то, проводя это построение в обратном порядке, мы получили бы противоречие с утверждением о единственности в теореме 5.8.

В этом случае траектории представляют собой софокусные параболы с фокусом в начале и с осью, идущей в направлении с аргументом θ; сама эта ось также является траекторией.

Теорема 5.10. *Пусть область D на z-сфере имеет конечное число граничных континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 1$, и содержит бесконечно удаленную точку. Тогда при всяком вещественном θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, в семействе $\Sigma(D)$ существует единственная функция $\pi_\theta(z)$, такая, что при отображении $w = \pi_\theta(z)$ континууму C_1 соответствует прямолинейный отрезок, соединяющий начало с точкой $Re^{i\theta}$, $R > 0$, а остальным граничным компонентам области D соответствуют разрезы вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала $e^{-i\theta}\,dw^2/w$.*

Пусть a — точка C_1, и пусть $\widetilde{D}$ — образ двулистной накрывающей для D, разветвленной в a и в бесконечности,

при отображении $(z-a)^{1/2}$. Тогда легко проверить, что функция

$$\pi_0(z) = [g_{0,2}((z-a)^{1/2})]^2,$$

где $g_{0,2}$ — функция, указанная в теореме 5.8 для $\widetilde{D}$, обладает всеми свойствами, описанными в теореме 5.10. Единственность устанавливается так же, как в теореме 5.9.

Теорема 5.11. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Пусть b — внутренняя точка D, отличная от нуля и бесконечности. Тогда существует единственная функция $e_1(z)$ семейства $\Sigma_0(D)$, отображающая D на область, ограниченную разрезами вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала* $-[w(w-e_1(b))]^{-1}dw^2$.

Эти траектории представляют собой софокусные эллипсы с фокусами в 0 и $e_1(b)$ и открытый прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки.

Двулистная накрывающая поверхность для D, разветвленная в точках 0 и b, отображением

$$Z = \frac{1}{2}\left\{z - \frac{b}{2} + [z(z-b)]^{1/2}\right\} \tag{5.6}$$

переводится в область $\widetilde{D}$, связность которой вдвое больше связности D. Функция $b^2(16Z)^{-1}$ осуществляет конформное отображение этой области на себя в соответствии с перестановкой листов накрывающей поверхности. Обозначим через Φ функцию из теоремы 5.1 для области D. Образ $\widetilde{D}$ при этом отображении представляет собою область, ограниченную разрезами вдоль дуг окружностей с центром в начале. Утверждение о единственности в теореме 5.1 показывает, что $\Phi(\widetilde{D})$ конформно отображается на себя функцией $\left[\Phi\left(\frac{b}{4}\right)\right]^2 W^{-1}$. Поэтому если мы положим

$$w = W + \left[\Phi\left(\frac{b}{4}\right)\right]^2 / W + 2\Phi\left(\frac{b}{4}\right),$$

то сложное отображение z-сферы в w-сферу даст нам функцию из семейства $\Sigma_0(D)$. Обозначим эту функцию через $e_1(z)$. Легко видеть, что она и осуществляет иско-

мое отображение. Единственность устанавливается так же, как в предшествующих теоремах.

Теорема 5.12. *Пусть область D на z-сфере содержит бесконечно удаленную точку и ограничена конечным числом граничных континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 2$. Тогда существует единственное вещественное число θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, и единственная функция $e_2(z)$ семейства $\Sigma(D)$, такая, что при отображении $w = e_2(z)$ континуум C_1 соответствует прямолинейному отрезку, соединяющему начало с точкой $r_1 e^{i\theta}$, C_2 соответствует прямолинейному отрезку, соединяющему точку $r_2 e^{i\theta}$ с точкой $r_3 e^{i\theta}$, где $0 < r_1 < r_2 < r_3$, а остальные граничные компоненты области D соответствуют разрезам вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала*

$$-[w(w - r_3 e^{i\theta})]^{-1}\, dw^2.$$

Доказательство проводится тем же способом, что и в теореме 5.11. Нужно только использовать двулистную накрывающую поверхность для D, разветвленную в точке из C_1 и в точке из C_2.

Теорема 5.13. *Пусть область D на z-сфере содержит бесконечно удаленную точку и ограничена конечным числом континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 2$. Тогда для каждого вещественного θ, $0 \leqslant \theta < \pi$, существует единственная функция $\varepsilon_\theta(z)$ семейства $\Sigma(D)$, такая, что при отображении $w = \varepsilon_\theta(z)$ континууму C_1 соответствует отрезок, соединяющий точки $-Re^{i\theta}$, $Re^{i\theta}$, где R — положительно, а остальным граничным компонентам D соответствуют разрезы вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала*

$$-[w^2 - R^2 e^{2i\theta}]^{-1}\, dw^2.$$

Из теоремы 5.4 следует, что существует единственная функция $c(z)$ из $\Sigma(D)$, такая, что при отображении $w = c(z)$ континуум C_1 соответствует окружности $|w| = R/2$, а остальные граничные компоненты соответствуют разрезам вдоль дуг окружностей с центром в начале. Функция

$$\varepsilon_\theta(z) = c(z) + \frac{1}{4} R^2 e^{2i\theta} [c(z)]^{-1}$$

осуществляет тогда искомое отображение. Единствен-

ность получается с помощью того же построения, проведенного в обратном порядке.

Теорема 5.14. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Пусть b — внутренняя точка D, отличная от нуля и бесконечности. Тогда существует единственная функция $h_1(z)$ семейства $\Sigma_0(D)$, отображающая D на область, ограниченную разрезами вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала $[w(w-h_1(b))]^{-1}dw^2$.*

Это утверждение доказывается так же, как теорема 5.11, только отображение Φ области $\widetilde{D}$ нужно заменить отображением Ψ из теоремы 5.2 для этой области.

Теорема 5.15. *Пусть область D на z-сфере содержит бесконечно удаленную точку и ограничена конечным числом континуумов $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 2$. Тогда существует единственное вещественное число θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, и единственная функция $h_2(z)$ семейства $\Sigma(D)$, такая, что при отображении $w = h_2(z)$ континуум C_1 соответствует прямолинейному отрезку, соединяющему начало с точкой $r_1 e^{i\theta}$, $r_1 > 0$, C_2 — прямолинейному отрезку, соединяющему точки $-r_2 e^{i\theta}$ и $-r_3 e^{i\theta}$, где $0 < r_2 < r_3$, а остальные граничные компоненты D — разрезам вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала $[w(w+r_2 e^{i\theta})]^{-1}\, dw^2$.*

Этот результат легко получить, изменив доказательство теоремы 5.14 так же, как мы изменили доказательство теоремы 5.11 для доказательства теоремы 5.12.

5.5. Пусть D — бесконечносвязная область на z-сфере, содержащая бесконечно удаленную точку. Здесь мы допускаем граничные компоненты, состоящие из одной точки. Легко видеть, что для таких областей существуют отображения на область с параллельными прямолинейными разрезами, аналогичные отображениям из § 5.3 (разумеется, компоненты границы образа также могут вырождаться в точку). Однако это отображение уже не обязательно определяется единственным образом. Но можно указать такие специальные отображения на плоскость с параллельными разрезами, на которые распространяются экстремальные свойства, справедливые в случае конечной связности, и которые однозначно определяются этими свойствами.

Теорема 5.16. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит бесконечно удаленную точку. Тогда при всяком вещественном θ, $0 \leqslant \theta < \pi$, существует единственная функция $g_\theta(z)$ семейства $\Sigma'(D)$, отображающая D на область, ограниченную прямолинейными разрезами (возможно, вырождающимися в точку), имеющими направление с аргументом θ, и обладающая следующим свойством:*

(P_θ) Пусть $S(L, \theta)$ — пересечение $g_\theta(D)$ с квадратом, заданным неравенствами

$$-L < \operatorname{Re}(e^{-i\theta} w) < L, \quad -L < \operatorname{Im}(e^{-i\theta} w) < L,$$

где L столь велико, что граница $g_\theta(D)$ лежит в этом квадрате. Пусть $\Gamma(L, \theta)$ — класс локально спрямляемых кривых, лежащих в $S(L, \theta)$, соединяющих пару сторон квадрата в направлении с аргументом $\theta + \frac{\pi}{2}$. Тогда модуль $S(L, \theta)$ для класса кривых $\Gamma(L, \theta)$ равен единице.

Функция $g_\theta(z)$ характеризуется также тем свойством, что среди функций $f(z)$ из $\Sigma'(D)$ с разложением в бесконечности

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}) \qquad (5.7)$$

она одна дает максимум выражению $\operatorname{Re}(e^{-2i\theta} a_1)$.

Как и в п. 5.3, этот результат при произвольном θ легко сводится к результату для $\theta = 0$. Поэтому мы сосредоточим внимание на последнем случае.

Лемма 5.7. *В обозначениях теоремы 5.16 пусть D_n, $n = 1, 2, \ldots$,—такая последовательность конечносвязных областей, что*

$$D_{n+1} \supset D_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D.$$

Пусть $g_0^{(n)}(z)$ — функция из теоремы 5.8 для D_n. Тогда существует подпоследовательность последовательности $\{g_0^{(n)}(z)\}_1^\infty$, сходящаяся равномерно на каждой компактной подобласти области D к некоторой функции семейства $\Sigma'(D)$. Пусть эта предельная функция имеет в бесконечности разложение

$$z + \frac{a_1^*}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}).$$

Тогда для любой функции $f(z)$ из $\Sigma'(D)$, имеющей в бесконечности разложение (5.7), справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} a_1^* \geqslant \operatorname{Re} a_1.$$

Образ D при отображении, осуществляемом предельной функцией, ограничен разрезами, параллельными вещественной оси.

Существование предельной функции подпоследовательности $\{g_0^{(n)}(z)\}_1^\infty$ устанавливается с помощью стандартного рассуждения, использующего компактность. Если $g_0^{(n)}(z)$ имеет в бесконечности разложение

$$z + \frac{a_1^{(n)}}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}),$$

то, очевидно,

$$\lim_{k \to \infty} a_1^{(n_k)} = a_1^*,$$

где n_k — последовательность индексов для вышеупомянутой подпоследовательности. С другой стороны, для любой функции $f(z)$ из $\Sigma'(D)$, имеющей в бесконечности разложение (5.7), имеем по лемме 5.6

$$\operatorname{Re} a_1 \leqslant \operatorname{Re} a_1^{(n)}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} a_1 \leqslant \operatorname{Re} a_1^*.$$

Последнее утверждение леммы 5.7 выводится из леммы 5.6 так же, как при доказательстве теоремы 5.8.

Для любой области D, удовлетворяющей условиям теоремы 5.16, существует последовательность областей D_n, удовлетворяющих условиям леммы 5.7, причем можно считать, что соответствующая последовательность $\{g_0^{(n)}(z)\}_1^\infty$ сама сходится. Обозначим предельную функцию через $g_0(z)$.

Лемма 5.8. *Область $g_0(D)$ обладает свойством (P_0).* Пусть $S(L,0)$ имеет модуль μ относительно класса кривых $\Gamma(L,0)$. Обозначим через $f_n(w)$ функцию, заданную в $g_0(D_n)$ и представляющую собой суперпозицию функции, обратной к $g_0(z)$, и $g_0^{(n)}(z)$. Тогда при любом ε, $0<\varepsilon<L$, и при достаточно большом n на вертикальных сторонах $S(L,0)$ будем иметь $|\operatorname{Re} f_n(w)|<L+\varepsilon$, а на горизонтальных $|\operatorname{Im} f_n(w)|>L-\varepsilon$. Пусть $\rho(w)|dw|$ — метрика, допустимая в вышеупомянутой проблеме модуля, и пусть $\rho'(W)|dW|$ — метрика в $f_n(S(L,0)\cap g_0(D_n))$, индуцированная метрикой $\rho(w)|dw|$ при отображении $W=f_n(w)$. Пусть R — прямоугольник

$$-(L+\varepsilon)<\operatorname{Re} W<L+\varepsilon,\quad -(L-\varepsilon)<\operatorname{Im} W<L-\varepsilon.$$

Зададим в $R\cap g_0^{(n)}(D_n)$ функцию $\tilde{\rho}(W)$ следующим образом:

$$\tilde{\rho}(W)=\rho'(W)\ \text{ в }\ R\cap f_n(S(L,0)\cap g_0(D_n)),$$

$$\tilde{\rho}(W)=0\qquad \text{в }\ (R\cap g_0^{(n)}(D_n))\setminus f_n(S(L,0)\cap g_0(D_n)).$$

Легко проверить, что метрика $\tilde{\rho}(W)|dW|$ допустима в проблеме модуля для класса кривых, лежащих в $R\cap g_0^{(n)}(D_n)$ и соединяющих вертикальные стороны прямоугольника R. Таким образом,

$$\mu\geqslant\frac{L-\varepsilon}{L+\varepsilon}.$$

Поскольку это верно при любом $\varepsilon>0$, имеем

$$\mu\geqslant 1.$$

С другой стороны, метрика $(2L)^{-1}|dw|$ допустима в проблеме модуля для $\Gamma(L,0)$. Поэтому

$$\mu=1.$$

Лемма 5.9. *Пусть область D на z-сфере содержит бесконечно удаленную точку, бесконечносвязна и обладает свойством (P_0). Пусть $f\in\Sigma'(D)$ и имеет в бесконечности разложение* (5.7). *Тогда*

$$\operatorname{Re} a_1 \leqslant 0,$$

причем равенство имеет место лишь в том случае, когда $f(z) \equiv z$.

Пусть теперь $S(L)$ — пересечение D с квадратом

$$-L < \operatorname{Re} z < L, \quad -L < \operatorname{Im} z < L,$$

причем L достаточно велико, так что граница D лежит в этом квадрате. По предположению, модуль $S(L)$ относительно класса кривых, лежащих в $S(L)$ и соединяющих вертикальные стороны квадрата, равен единице. Пусть $a_1 = Ae^{i\alpha}$, $A \geqslant 0$, α вещественно, и предположим, что $A\cos\alpha > 0$. Рассмотрим в $S(L)$ метрику $\rho(z)|dz|$, определенную тождеством

$$\rho(z) \equiv |f'(z)|.$$

В этой метрике всякая кривая, лежащая в $S(L)$ и соединяющая точки

$$L + iL\operatorname{tg}\theta, \quad -L + iL\operatorname{tg}\varphi, \quad -\frac{\pi}{4} < \theta, \quad \varphi < \frac{\pi}{4},$$

имеет длину, не меньшую, чем модуль следующего выражения:

$$[L + iL\operatorname{tg}\theta + Ae^{i\alpha}(L + iL\operatorname{tg}\theta)^{-1}] - [-L + iL\operatorname{tg}\varphi + Ae^{i\alpha}(-L + iL\operatorname{tg}\varphi)^{-1}] + O(L^{-2}).$$

Элементарный подсчет показывает, что квадрат этой длины не меньше, чем

$$4L^2 + 4A\cos\alpha + \frac{4}{\pi^2}L^2|\theta - \varphi|^2 - 16A|\theta - \varphi| + O\left(\frac{1}{L}\right).$$

Выберем ε так, чтобы было $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\cos\alpha$. При $|\theta - \varphi| < \varepsilon$ квадрат этой длины не меньше, чем

$$4L^2 + 4A\cos\alpha - 16A\varepsilon + O\left(\frac{1}{L}\right).$$

При $|\theta - \varphi| \geqslant \varepsilon$ и $L^2 > 4A\pi^2/\varepsilon$ этот квадрат не меньше, чем

$$4L^2 + 4A\cos\alpha + O\left(\frac{1}{L}\right).$$

Как и в п 4.4,

$$\iint\limits_{S(L)} \rho^2\, dx\, dy \leqslant 4L^2 + O\left(\frac{1}{L}\right).$$

Таким образом, для модуля $S(L)$ относительно данного класса кривых мы получаем оценку сверху:

$$\left(4L^2 + O\left(\frac{1}{L}\right)\right)\left(4L^2 + 4A\cos\alpha - 16A\varepsilon + O\left(\frac{1}{L}\right)\right)^{-1}.$$

Последнее выражение равно

$$1 - \frac{A\cos\alpha - 4A\varepsilon}{L^2} + O\left(\frac{1}{L^3}\right).$$

Если выбрать L достаточно большим, то мы придем к противоречию с предположением о том, что D обладает свойством (P_0). Итак,

$$\operatorname{Re} a_1 \leqslant 0.$$

Если $\operatorname{Re} a_1 = 0$, то рассуждение, аналогичное предыдущему, но использующее лемму 2.1, показывает, что $f(z) \equiv z$.

Результаты теоремы 5.16 теперь сразу следуют из лемм 5.7, 5.8 и 5.9.

Следствие 5.3. *Функция $g_\theta(z)$ из теоремы* 5.16 *такова, что дополнение $E_\theta(D)$ множества $g_\theta(D)$ имеет меру нуль.*

Действительно, метрика $(2L)^{-1}\,|dw|$ допустима в проблеме модуля для семейства кривых $\Gamma(L, \theta)$. Если бы мера $E_\theta(D)$ была положительной, то этот модуль был бы меньше единицы.

Несколько более длинное доказательство показывает, что $E_\theta(D)$ имеет даже нулевую внешнюю жорданову площадь. Кроме того, в обозначениях леммы 5.7

$$\operatorname{Re} a_1^* \geqslant \frac{1}{2\pi} S,$$

где S — внешняя жорданова площадь дополнения к D, причем $\frac{1}{2\pi}$ — точная константа.

Результат теоремы 5.16 по существу принадлежит Грёчу [55], хотя его критерий, высказанный в терминах метода полос, нетривиальным образом эквивалентен критерию, данному здесь. Он показал, что эти канонические области, ограниченные разрезами вдоль параллельных отрезков, являются минимальными в смысле Кёбе [111]. Точная геометрическая характеристика таких областей до сих пор неизвестна. Кёбе [111] высказал предположение, что (в случае $\theta = 0$) характеристическим свойством этих областей служит равенство нулю линейной меры проекции дополнения на мнимую ось. Легко видеть, что это условие является достаточным; но оно не необходимо, как показывает контрпример, данный Грёчем [55, § 5]. Формулировка, приведенная здесь, очень похожа на формулировку Альфорса и Бёрлинга [7] в одной задаче, тесно примыкающей к нашей.

Как заметил Грёч [55, стр. 200], результаты, аналогичные результатам этого раздела, распространяются также и на другие канонические отображения, рассмотренные в этой главе. Некоторые интересные обобщения этих канонических отображений и их экстремальных свойств рассмотрены Комату и Одзава [117]. Заметим, наконец, что в большинстве своем эти результаты являются частными случаями более общих теорем, которые можно получить общим методом, недавно разработанным автором [98].

Глава VI

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЫ О КОЭФФИЦИЕНТАХ. ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Здесь мы используем общую теорему о коэффициентах (теорему 4.1) для доказательства многих стандартных теорем об однолистных функциях. Разумеется, во многих из них, особенно в наиболее элементарных, не упоминаются условия гомотопии, фигурирующие в общей теореме о коэффициентах, поскольку эти условия выполняются автоматически. В самом деле, справедлива

Лемма 6.1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — односвязная конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(z)\,dz^2$ — квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, и $\{\Delta\}$ — такое допустимое относительно $Q(z)\,dz^2$ семейство областей Δ_j, $j=1, \ldots, k$, на $\mathfrak{R}$, что каждая область Δ_j односвязна. Пусть имеется M_j (различных) полюсов дифференциала $Q(z)\,dz^2$, лежащих внутри Δ_j. Пусть N_j равно единице, если $\mathfrak{R}$ имеет границу или если имеется полюс дифференциала $Q(z)\,dz^2$, внешний по отношению к Δ_j. Пусть*

$$M_j + N_j \leqslant 3, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Пусть $\{f\}$ — семейство функций f_j, $j=1, \ldots, k$, обладающее свойствами (1), (2), (3) определения 4.2 и такое, что всякий полюс дифференциала $Q(z)\,dz^2$, не лежащий внутри $\bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j$, не лежит внутри $\bigcup_{j=1}^{k} f_j(\Delta_j)$. Тогда семейство $\{f\}$ имеет допустимую гомотопию в тождественное отображение.

Эта лемма следует из хорошо известных результатов о гомотопических свойствах односвязных, двусвязных и трехсвязных областей [108, 27].

6.2. Теорема 6.1. *Если $f \in S$, то образ круга $|z| < 1$ при отображении $w = f(z)$ покрывает круг $|w| < 1/4$. Функция $f \in S$ не принимает некоторого значения w, $|w| = 1/4$, только в том случае, когда $f(z) = z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2}$, где α вещественно.*

Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{dw^2}{w^2(w - 1/4)},$$

а в качестве единственной допустимой области взяв область $\Delta = \tilde{f}(E)$, где E — круг $|z| < 1$, а $\tilde{f}(z) = z(1 + z)^{-2}$. Пусть $\Phi(w)$ — функция, обратная к $\tilde{f}$, определенная в Δ. Предположим, что $f(E)$ не покрывает точку $1/4\, e^{-i\alpha}$, где α вещественно. Тогда $e^{i\alpha} f(e^{-i\alpha} z)$ принадлежит S и $e^{i\alpha} f(e^{-i\alpha} E)$ не покрывает точку $1/4$. Тогда функция

$$\Psi(w) = e^{i\alpha} f(e^{-i\alpha} \Phi(w))$$

является, очевидно, допустимой функцией, соответствующей Δ (определение 4.4 и лемма 6.1).

Наш квадратичный дифференциал имеет единственный двойной полюс P_1 в начале. Для соответствующих коэффициентов имеем

$$\alpha^{(1)} = -4, \quad a^{(1)} = 1.$$

Таким образом, в неравенстве (4.7) имеет место равенство (определение ветви $\log a^{(1)}$ несущественно). В силу условия (2) равенства в теореме 4.1 имеем

$$e^{i\alpha} f(e^{-i\alpha} \Phi(w)) \equiv w, \quad w \in \tilde{f}(E).$$

Полагая $\Phi(w) = e^{i\alpha} z$, получаем

$$f(z) \equiv z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2}, \quad |z| < 1,$$

что и утверждалось.

Теорема 6.2. *Пусть $f \in S$. Тогда*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r, \quad 0 < r < 1,$$

причем равенство в каждой части этого неравенства может иметь место только для $f(z) = z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2}$, *где* α *вещественно, соответственно при* $z = re^{-i\alpha}$ *и* $z = -re^{-i\alpha}$.

Правое неравенство справедливо, разумеется, при $|z| \leqslant r$. Для получения оценки снизу возьмем $\mathfrak{R}$ и Δ такие же, как в теореме 6.1. Положим $d = r(1 + r)^{-2}$, $c = f(re^{i\theta})$, где θ вещественно. Затем выберем в качестве дифференциала

$$Q(w)\, dw^2 = \frac{dw^2}{w^2 (w - d)}.$$

Пусть Φ — то же, что в теореме 6.1. Положим

$$g(w) = \frac{d}{c} f(e^{i\theta} \Phi(w)).$$

Легко проверить, что Δ — допустимая область относительно дифференциала $Q(w)dw^2$ и что g — допустимая функция, соответствующая Δ.

Этот квадратичный дифференциал имеет единственный двойной полюс в начале. Для соответствующих коэффициентов имеем

$$\alpha^{(1)} = -d^{-1}, \quad \alpha^{(1)} = c/de^{i\theta}.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{-d^{-1} \log(c/de^{i\theta})\} \leqslant 0.$$

Отсюда легко вывести неравенство

$$|f(re^{i\theta})| \geqslant \frac{r}{(1 + r)^2}.$$

По условию (3) равенства в теореме 4.1 равенство может здесь иметь место только тогда, когда

$$\frac{d}{c} f(e^{i\theta} \Phi(w)) \equiv w, \quad w \notin \tilde{f}(E). \tag{6.1}$$

Полагая $\Phi(w) = e^{-i\theta} z$ и замечая, что тождество (6.1) влечет за собой равенство $c = d \cdot e^{i\theta}$, получаем

$$f(z) \equiv z(1 + e^{-i\theta} z)^{-2}, \quad |z| < 1,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы получить оценку сверху, используем те же $\mathfrak{R}$ и Δ. Положим $d = -r(1-r)^{-2}$, $c = f(re^{i\theta})$, выберем в качестве дифференциала

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{dw^2}{w^2(w-d)}$$

и положим

$$g(w) = \frac{d}{c} f(-e^{i\theta}\Phi(w)).$$

И здесь можно проверить, что Δ и g допустимы в соответствующем смысле.

Наш квадратичный дифференциал имеет единственный двойной полюс P_1 в начале. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = -d^{-1}, \quad a^{(1)} = -c/de^{i\theta}.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{-d^{-1}\log(-c/de^{i\theta})\} \leqslant 0.$$

Отсюда легко вывести неравенство

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}.$$

С помощью того же рассуждения, что и выше, заключаем, что равенство может иметь место только тогда, когда

$$f(z) \equiv z(1-e^{-i\theta}z)^{-2}, \quad |z| < 1.$$

Теорема 6.3. *Пусть $f(z)$ мероморфна и однолистна в круге $|z| < 1$, и пусть $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Тогда*

$$|f'(re^{i\theta})| \geqslant \frac{1-r^2}{r^2}|f(re^{i\theta})|^2,$$

если $f(re^{i\theta})$ конечно, причем равенство может иметь место только для функций

$$f(z) = z(1+cz+e^{2i\theta}z^2)^{-1},$$

где θ вещественно, а c — произвольная постоянная.

Этот результат в такой форме впервые был, по-видимому, установлен Робинсоном [148, стр. 444] (в частном случае регулярных функций). Однако он очень тесно примыкает к одному более раннему результату Лёвнера [125].

Применим общую теорему о коэффициентах для w-сферы в качестве $\mathfrak{R}$ и для дифференциала

$$Q(w) = \frac{dw^2}{w^2(w-d)^2},$$

причем мы возьмем круг $|z| < 1$ в качестве E,

$$\check{f}(z) = z(1+z)^{-2}, \quad \Delta = \check{f}(E).$$

Пусть Φ — обратная функция к $\check{f}$ на Δ, $d = r(1+r)^{-2}$, $c = f(re^{i\theta})$, θ — вещественно и

$$g(w) = \frac{d}{c} f(e^{i\theta}\Phi(w)).$$

Легко проверить, что Δ и g допустимы в соответствующем смысле.

Наш квадратичный дифференциал имеет два двойных полюса: P_1 в начале и P_2 в d. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = d^{-2}, \quad a^{(1)} = c/de^{i\theta},$$

$$\alpha^{(2)} = d^{-2}, \quad a^{(2)} = c\frac{1-r}{(1+r)^3}[de^{i\theta}f'(re^{i\theta})]^{-1}.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\left\{d^{-2}\log(c/de^{i\theta}) + \right.$$

$$\left. + d^{-2}\log\left[c\frac{1-r}{(1+r)^3}(de^{i\theta}f'(re^{i\theta}))^{-1}\right]\right\} \leqslant 0.$$

Отсюда легко вывести неравенство

$$|f'(re^{i\theta})| \geqslant \frac{1-r^2}{r^2}|f(re^{i\theta})|^2.$$

Утверждение, относящееся к равенству, немедленно вытекает из последней части теоремы 4.1.

Следствие 6.1. *Пусть* $f \in S$. *Тогда*

$$|f'(z)| \geqslant \frac{1}{r}\,\frac{1-r}{1+r}\,|f(z)|, \quad |z| = r,$$

причем равенство возможно только для функций

$$f(z) = z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2},$$

где α *вещественно.*

Это сразу следует из теорем 6.2 и 6.3.

Следствие 6.2. *Пусть* $f \in S$. *Тогда*

$$|f'(z)| \geqslant \frac{1-r}{(1+r)^3}, \quad |z| = r,$$

причем равенство возможно только для функций

$$f(z) = z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2},$$

где α *вещественно.*

Это тоже следует из теорем 6.2 и 6.3. Неравенство, очевидно, справедливо при $|z| \leqslant r$.

Теорема 6.4. *Пусть* $f \in S$. *Тогда при вещественных* θ

$$|f'(re^{i\theta})| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}\left|\frac{(1-r)^2 f(re^{i\theta})}{r}\right|^{\mu},$$

где

$$\mu = 2\,\frac{1+r^2}{(1+r)^2}.$$

Равенство возможно только для функций

$$f(z) = z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2},$$

где α *вещественно.*

Этот результат впервые установил, по-видимому, Гун Шэн [75] (в несколько иной форме).

Пусть $\mathfrak{R}$ — w-сфера,

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{(w - 1/4)}{w^2(w-d)^2}\,dw^2.$$

Пусть E — круг $|z|<1$, $\tilde{f}(z)=z(1+z)^{-2}$, $\Delta=\tilde{f}(E)$, Φ — функция, обратная к $\tilde{f}$, заданная на Δ,

$$d=-r(1-r)^{-2}, \quad c=f(re^{i\theta}),$$

θ вещественно и

$$g(w)=\frac{d}{c}f(-e^{i\theta}\Phi(w)).$$

Легко проверить, что Δ и g допустимы в соответствующем смысле.

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет два двойных полюса: P_1 в начале и P_2 в d. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)}=-{}^1/_4\,d^{-2}, \qquad a^{(1)}=-c/de^{i\theta},$$

$$\alpha^{(2)}=(d-{}^1/_4)\,d^{-2}, \; a^{(2)}=-c\,\frac{1+r}{(1-r)^3}\,[de^{i\theta}f'(re^{i\theta})]^{-1}.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\left\{-{}^1/_4\,d^{-2}\log(-c/de^{i\theta})+\right.$$

$$\left.+(d-{}^1/_4)\,d^{-2}\log\left[-c\,\frac{1+r}{(1-r)^3}\,(de^{i\theta}f'(re^{i\theta}))^{-1}\right]\right\}\leqslant 0.$$

Это неравенство легко сводится к

$$|f'(re^{i\theta})|\leqslant\frac{1+r}{(1-r)^3}\left|\frac{(1-r)^2f(re^{i\theta})}{r}\right|^{\mu}.$$

Если равенство имеет место в последнем неравенстве, то оно имеет место и в предыдущем неравенстве. Поэтому в этом случае отображение g должно быть изометричным в Q-метрике и сохранять траектории дифференциала $Q(z)dz^2$. Изучение этого отображения в окрестности точки $w={}^1/_4$ показывает, что тогда оно должно сводиться к тождественному. Отсюда немедленно следует утверждение теоремы 6.4 относительно равенства.

С помощью некоторого видоизменения этого доказательства можно проверить, что

$$|f'(re^{i\theta})|\leqslant\frac{1-r}{(1+r)^3}\left|\frac{(1+r)^2f(re^{i\theta})}{r}\right|^{\nu},$$

где $\nu = 2\dfrac{1+r^2}{(1-r)^2}$. Мы здесь не будем приводить дальнейшие подробности.

Следствие 6.3. *Пусть* $f \in S$. *Тогда*

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{r}\frac{1+r}{1-r}|f(z)|, \quad |z| = r,$$

причем равенство возможно только для функций

$$f(z) = z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2},$$

где α *вещественно.*

Этот результат сразу следует из теорем 6.2 и 6.4, если заметить, что $\mu \geqslant 1$ для всех рассматриваемых значений r.

Следствие 6.4. *Пусть* $f \in S$. *Тогда*

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r,$$

причем равенство возможно только для функций

$$f(z) = z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2},$$

где α *вещественно.*

Этот результат вытекает из следствия 6.3 и теоремы 6.2. Неравенство, очевидно, справедливо при $|z| \leqslant r$.

Все результаты, следующие за теоремой 6.1, включая последнее утверждение, неявно содержатся в более общих результатах, которые будут получены позже. Мы изложили здесь эти теоремы, так как они хорошо известны, а их доказательства весьма просты. Мы не давали здесь точных ссылок по поводу тех результатов, которые являются классическими.

Аналогичные результаты можно получить и для ограниченных однолистных функций и для функций $f(z)$, регулярных и однолистных в круговом кольце $1 < |z| < R$, переводящих окружность $|z| = 1$ в $|w| = 1$ и удовлетворяющих неравенству $|f(z)| > 1$ в кольце. Здесь мы не будем останавливаться на этом подробно.

6.3. Теорема 6.5. *Пусть область* D *на* z*-сфере содержит бесконечно удаленную точку и ограничена конечным числом граничных компонент* $C_1, C_2, \ldots, C_n$,

$n \geqslant 1$. *Пусть* $f \in \Sigma(D)$, *и пусть при отображении* $w = f(z)$ *компоненте* C_1 *соответствует континуум* Γ. *Диаметр* Γ *достигает своего максимума только для функций* $f(z)$ *вида* $\varepsilon_\theta(z) + c$, *где* θ *вещественно, а* c — *произвольная постоянная.*

Этот результат для произвольного n получен Грёчем [52].

При $n \geqslant 2$ функция $\varepsilon_\theta(z)$ представляет собой функцию из теоремы 5.13; при $n = 1$ под $\varepsilon_\theta(z)$ следует понимать соответствующую элементарную функцию. Пусть точки a, b принадлежат Γ. Пусть $\arg(b-a) \equiv \theta \pmod{\pi}$, $0 \leqslant \theta < \pi$, и пусть $\Phi(w)$ — функция, обратная к $\varepsilon_\theta(z)$, заданная в $\varepsilon_\theta(D)$. Применим теперь общую теорему о коэффициентах. Возьмем w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положим

$$Q(w)\,dw^2 = -[w^2 - R^2 e^{2i\theta}]^{-1}\,dw^2,$$

в качестве Δ возьмем $\varepsilon_\theta(D)$, а в качестве допустимой функции, соответствующей Δ, — функцию

$$g(w) = 2R\,|b-a|^{-1}\left[f(\Phi(w)) - \frac{a+b}{2}\right].$$

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет единственный двойной полюс в бесконечности. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = -1, \quad a^{(1)} = 2R\,|b-a|^{-1}.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{-\log[2R\,|b-a|^{-1}]\} \leqslant 0,$$

поэтому

$$2R \geqslant |b-a|.$$

Если здесь имеет место равенство, то, по условию (2) равенства в теореме 4.1, $g(w)$ осуществляет тождественное отображение. Следовательно, имеем

$$f(z) = \varepsilon_\theta(z) + \frac{a+b}{2}.$$

Теорема 6.6. *Пусть область* D *на* z-*сфере содержит бесконечно удаленную точку и ограничена конечным чис-*

лом граничных компонент $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 2$. Пусть $f \in \Sigma(D)$ и пусть при отображении $w = f(z)$ компонентам C_1 и C_2 соответствуют континуумы Γ_1, Γ_2. Расстояние между точкой из Γ_1 и точкой из Γ_2 достигает своего максимального значения только для функций $f(z)$ вида $e_2(z) + c$, где c — постоянная.

Этот результат принадлежит Грёчу [52]. Здесь $e_2(z)$ обозначает, конечно, функцию из теоремы 5.12. Пусть точка a принадлежит Γ_1, точка b принадлежит Γ_2. Пусть $\Phi(w)$ — функция, обратная к $e_2(z)$, заданная в $e_2(D)$. Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\,dw^2 = -[w(w - r_3 e^{i\theta})]^{-1} dw^2,$$

выбрав $e_2(D)$ в качестве Δ и задав допустимую функцию, соответствующую Δ, равенством

$$g(w) = r_3 e^{i\theta}(b - a)^{-1}(f(\Phi(w)) - a).$$

Этот квадратичный дифференциал имеет единственный двойной полюс в бесконечности. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = -1, \quad a^{(1)} = r_3 e^{i\theta}(b - a)^{-1}.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{-\log[r_3 e^{i\theta}(b - a)^{-1}]\} \leqslant 0,$$

и, следовательно,

$$|b - a| \leqslant r_3.$$

В силу условия (3) равенства в теореме 4.1 равенство здесь может иметь место только в том случае, когда

$$w \equiv r_3 e^{i\theta}(b - a)^{-1}[f(\Phi(w)) - a], \quad w \in e_2(D),$$

т. е.

$$f(z) \equiv e_2(z) + a.$$

Теорема 6.7. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Пусть b — точка области D, отличная от начала и бесконечности. Пусть $f \in \Sigma(D)$. Величина $|f(b) - f(0)|$ дости-*

гает максимума только для функций $f(z)$ вида $e_1(z)+c$, где c — постоянная.

Этот результат принадлежит Грёчу [52]. Здесь $e_1(z)$ обозначает, конечно, функцию из теоремы 5.11. Доказательство этой теоремы несущественно отличается от доказательства теоремы 6.6.

Следствие 6.5. *Пусть $f \in \Sigma$. Тогда*

$$|f(re^{i\theta}) - f(-re^{i\theta})| \leqslant 2\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad r > 1, \ \theta \text{ вещественно},$$

причем равенство может иметь место лишь тогда, когда $f(z) = z + c + e^{2i\theta}/z$, где c — постоянная.

Для доказательства нужно применить теорему 6.7 к области $|z - re^{i\theta}| > 1$ с $b = -2re^{i\theta}$.

Теорема 6.8. *Пусть сбласть D на z-сфере содержит бесконечно удаленную точку и ограничена конечным числом граничных компонент $C_1, C_2, \ldots, C_n$, $n \geqslant 2$. Пусть $f \in \Sigma(D)$, и пусть при отображении $w = f(z)$ компонентам C_1, C_2 соответствуют континуумы Γ_1, Γ_2. Минимальное расстояние между Γ_1 и Γ_2 достигается только для функций вида $h_2(z) + c$, где c — постоянная.*

Этот результат принадлежит Грёчу [52]. Здесь $h_2(z)$ обозначает, конечно, функцию из теоремы 5.15. Пусть a — такая точка Γ_1, b — такая точка Γ_2, что $|a - b|$ равно расстоянию между Γ_1 и Γ_2. Пусть $\Phi(w)$ — функция, обратная к $h_2(z)$, заданная на $h_2(D)$. Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\,dw^2 = [w(w + r_2e^{i\theta})]^{-1}dw^2$$

(в обозначениях теоремы 5.15), выбрав в качестве Δ область $h_2(D)$ и в качестве допустимой функции, соответствующей Δ, — функцию

$$g(w) = -r_2e^{i\theta}(b - a)^{-1}[f(\Phi(w)) - a].$$

Этот квадратичный дифференциал имеет единственный двойной полюс P_1 в бесконечности. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = 1, \quad \alpha^{(1)} = -r_2e^{i\theta}(b - a)^{-1}.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{\log[-r_2 e^{i\theta}(b-a)^{-1}]\} \leqslant 0.$$

Поэтому

$$|b-a| \geqslant r_2.$$

В силу условия (3) равенства в теореме 4.1 равенство здесь может иметь место только тогда, когда

$$w \equiv -r_2 e^{i\theta}(b-a)^{-1}[f(\Phi(w)) - a],$$

т. е. когда

$$f(z) = h_2(z) + a.$$

Теорема 6.9. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Пусть b — точка области D, отличная от начала и бесконечности. Пусть $f \in \Sigma(D)$. Величина $|f(b) - f(0)|$ достигает минимума только для функций f вида $h_1(z) + c$, где c — постоянная.*

Этот результат принадлежит Грёчу [52]. Здесь $h_1(z)$ обозначает, конечно, функцию из теоремы 5.14. Доказательство этой теоремы лишь несущественно отличается от доказательства теоремы 6.8.

Следствие 6.6. *Пусть $f \in \Sigma$. Тогда*

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant 1 - \frac{1}{\rho^2}, \quad |z_1| = |z_2| = \rho, \quad \rho > 1, \quad z_1 \neq z_2. \tag{6.2}$$

Равенство в (6.2) *может иметь место только для функций вида $f(z) = z + c + e^{2i\varphi}/z$, где c — постоянная, $\varphi = {}^1/_2 (\arg z_1 + \arg z_2)$.*

Этот результат так же, как и результат следствия 6.7, принадлежит Голузину ([42], см. также [80]).

Из теоремы 6.9 сразу получаем, что $z + e^{2i\varphi}/z$ и есть та функция класса Σ, для которой $|f(z_1) - f(z_2)|$ достигает минимума. Поэтому

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant 2\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)|\sin {}^1/_2 (\arg z_2 - \arg z_1)|. \tag{6.3}$$

С другой стороны,

$$|z_1 - z_2| = 2\rho\,|\sin{}^1/_2(\arg z_2 - \arg z_1)|. \tag{6.4}$$

Деля (6.3) почленно на (6.4), получаем требуемое неравенство (6.2). Утверждение о равенстве следует из условия равенства в (6.3), которое вытекает из теоремы 6.9.

Следствие 6.7. *Пусть* $f \in S$. *Тогда*

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant \frac{1 - r^2}{r^2}\,|f(z_1)\,f(z_2)|,$$

$$|z_1| = |z_2| = r,\ 0 < r < 1,\ z_1 \neq z_2. \tag{6.5}$$

Равенство в (6.5) *может иметь место только для функций*

$$f(z) = z(1 + ae^{i\theta}z + e^{2i\theta}z^2)^{-1},$$

где $\theta = -{}^1/_2(\arg z_1 + \arg z_2)$, $-2 \leqslant a \leqslant 2$.

Действительно, $[f(z^{-1})]^{-1} \in \Sigma$. Применяя результат следствия 6.6 с $\rho = 1/r$, получаем неравенство (6.5). Заметим еще, что $[f(z^{-1})]^{-1}$ не обращается в нуль при $|z| > 1$. Поэтому те функции, для которых в следствии 6.6 может иметь место равенство, имеют вид $z + ae^{i\varphi} + e^{2i\varphi}/z$, $-2 \leqslant a \leqslant 2$. Это немедленно приводит к утверждению о равенстве в следствии 6.7. В дальнейшем будет показана связь этого результата с теоремой 6.3.

6.4. Теорема 6.10. *Пусть* D*—конечносвязная область* z*-сферы, содержащая бесконечно удаленную точку. Пусть* $f \in \Sigma(D)$ *и имеет в окрестности бесконечности разложение*

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}).$$

Тогда область возможных значений a_1 *определяется неравенством*

$$|a_1 - c_1| \leqslant r_1, \tag{6.6}$$

где

$$c_1 = {}^1/_2(a_{1,0} + a_{1,\pi/2}), \quad r_1 = {}^1/_2(a_{1,0} - a_{1,\pi/2}),$$

а функция $g_\theta(z)$ *из теоремы* 5.8 *имеет в окрестности бесконечности разложение*

$$g_\theta(z) = z + \frac{a_{1,\theta}}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}).$$

Значение

$$^1/_2(a_{1,0} + a_{1,\pi 2}) + {}^1/_2(a_{1,0} - a_{1,\pi 2})\, e^{2i\vartheta}$$

принимается только тогда, когда $f(z) = g_\theta(z) + c$, *где* c — *постоянная.*

Этот результат принадлежит Грёчу [58].

Мы можем, очевидно, ограничиться рассмотрением функций класса $\Sigma'(D)$. Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\, dw^2 = e^{-2i\theta}\, dw^2,$$

где θ вещественно, $0 \leqslant \theta < \pi$, и выбрав в качестве Δ область $g_\theta(D)$. Пусть $\Phi_\theta(w)$ — функция, обратная к $g_\theta(z)$, заданная в $g_\theta(D)$. Тогда функция

$$\Psi(w) = f(\Phi_\theta(w))$$

является допустимой функцией, соответствующей Δ.

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет единственный полюс четвертого порядка в бесконечно удаленной точке. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = e^{-2i\theta}, \quad a_1^{(1)} = a_1 - a_{1,\theta}.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{e^{-2i\theta}(a_1 - a_{1,\theta})\} \leqslant 0. \tag{6.7}$$

Так как в силу следствия 5.2

$$a_{1,\theta} = e^{i\theta}\cos\theta\, a_{1,0} - e^{i\theta} i \sin\theta\, a_{1,\pi/2} = c_1 + r_1 e^{2i\theta},$$

то геометрическим местом этих точек является окружность. Число r_1 вещественно и положительно ввиду того, что для всех этих точек

$$\operatorname{Re} a_{1,\pi/2} \leqslant \operatorname{Re} a_{1,\theta} \leqslant \operatorname{Re} a_{1,0}.$$

Подставляя эти формулы в неравенство (6.7), получаем

$$\operatorname{Re}\{e^{-2i\theta}(a_1 - c_1)\} \leqslant r_1,$$

т. е.

$$|a_1 - c_1| \leqslant r_1.$$

Заключительное утверждение теоремы 6.10 сразу следует из условия (1) равенства в теореме 4.1.

Остается доказать, что всякое значение, лежащее в круге (6.6), принимается для некоторой функции из $\Sigma(D)$. Это следует из рассуждения, впервые примененного Грёчем [56]. Действительно, можно найти такое однопараметрическое семейство областей $D(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что

(1) $D(0) = D$,

(2) $D(1)$ ограничена конечным числом точек (это число равно числу граничных компонент D),

(3) $D(t_1) \subset D(t_2)$ при $t_1 < t_2$,

(4) $D(t)$ меняется непрерывно вместе с t в смысле сходимости областей.

Легко видеть, что для этого достаточно взять D в канонической форме, например в виде области, ограниченной разрезами вдоль дуг окружностей с центром в начале.

Из теории компактных семейств легко выводится, что коэффициент $a_{1,\theta}$ для области $D(t)$ с фиксированным θ изменяется непрерывно вместе с t. При $t=0$ значения этого коэффициента заполняют окружность круга (6.6). При $t=1$ все они совпадают с некоторой точкой. С другой стороны,

$$\sum(D(t)) \subset \sum(D), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Поэтому, когда t изменяется от 0 до 1, окружность, описываемая значениями $a_{1,\theta}$ $(0 \leqslant \theta < \pi)$, заметает круг (6.6). Значит, каждое значение коэффициента в этом круге принимается для некоторой функции из $\Sigma(D)$.

Следствие 6.8. *Пусть $f \in \Sigma$ и имеет в окрестности бесконечности разложение*

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + (\text{более высокие степени } z^{-1}).$$

Тогда область возможных значений a_1 задается неравенством

$$|a_1| \leqslant 1.$$

Значение $e^{2i\theta}$ принимается только для функций $z + c + e^{2i\theta}/z$, где c — постоянная.

Действительно, в этом случае $g_0(z) = z + 1/z$, $g_{\pi/2}(z) = z - 1/z$. Поэтому $c_1 = 0$, $r_1 = 1$.

Следствие 6.9. *Пусть* $f \in S$ *и имеет в окрестности начала разложение*

$$f(z) = z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \text{(более высокие степени } z\text{)}. \quad (6.8)$$

Тогда область возможных значений $A_2^2 - A_3$ *определяется неравенством*

$$|A_2^2 - A_3| \leqslant 1.$$

Разность $A_2^2 - A_3$ *принимает значение* $e^{2i\theta}$, *где* θ *вещественно, только тогда, когда функция* f *равна* $z(1 + ae^{i\theta}z + e^{2i\theta}z^2)^{-1}$, $-2 \leqslant a \leqslant 2$.

Действительно, $[f(z^{-1})]^{-1}$ принадлежит Σ и имеет в окрестности бесконечно удаленной точки разложение

$$z - A_2 + \frac{A_2^2 - A_3}{z} + \text{(более высокие степени } z^{-1}\text{)}. \quad (6.9)$$

Теперь наш результат сразу вытекает из следствия 6.8.

Теорема 6.11. *Пусть* $f(z)$ *мероморфна и однолистна в области* $D_R : |z| > R$, *и ее разложение в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид*

$$f(z) = z + a_0 + \text{(члены, содержащие степени } z^{-1}\text{)}.$$

Предположим, кроме того, что $f(D_R)$ *не содержит начала. Тогда область возможных значений* a_0 *задается неравенством*

$$|a_0| \leqslant 2R.$$

Значение $2Re^{i\theta}$, *где* θ *вещественно, принимается только тогда, когда* $f(z) = s_\theta(z)$,

$$s_\theta(z) = z + 2Re^{i\theta} + \frac{R^2 e^{2i\theta}}{z}.$$

Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\,dw^2 = e^{-i\theta}\,dw^2/w,$$

где θ вещественно, и выбрав в качестве Δ область $s_\theta(D_R)$. Пусть $\Phi_\theta(w)$ — функция, обратная $s_\theta(z)$, заданная в области $s_\theta(D_R)$. Тогда функция

$$\Psi(w) = f(\Phi_\theta(w))$$

является допустимой функцией, соответствующей Δ.

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет единственный полюс третьего порядка в бесконечно удаленной точке. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = e^{-i\theta}, \quad a_0^{(1)} = a_0 - 2Re^{i\theta}.$$

Неравенство (4.7) дает тогда

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\theta}(a_0 - 2Re^{i\theta})\} \leqslant 0,$$

или

$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta}a_0) \leqslant 2R. \tag{6.10}$$

Поэтому

$$|a_0| \leqslant 2R.$$

Из условия (1) равенства в теореме 4.1 следует, что равенство в (6.10) может иметь место только для функций $s_\theta(z)$. То, что замкнутый круг $|a_0| \leqslant 2R$ является точной областью возможных значений a_0, следует из приведенного выше рассуждения Грёча.

Результат, аналогичный теореме 6.11, справедлив вообще для конечносвязных областей, но мы здесь не будем этим заниматься.

Следствие 6.10. *Пусть* $f \in S$ *и имеет в начале разложение* (6.8). *Тогда область возможных значений* A_2 *задается неравенством*

$$|A_2| \leqslant 2.$$

Значение $-2e^{i\alpha}$, *где* α *вещественно, принимается только тогда, когда функция* f *имеет вид* $z(1 + e^{i\alpha}z)^{-2}$.

Действительно, если R равно единице, то функция $[f(z^{-1})]^{-1}$ удовлетворяет условиям теоремы 6.11. Утверждение следствия сразу вытекает из этой теоремы, так как разложение указанной функции в бесконечности имеет вид (6.9).

Теорема 6.12. *Пусть конечносвязная область* D *на* z*-сфере содержит бесконечно удаленную точку. Пусть* z_1 *— конечная внутренняя точка области* D. *Пусть* p_θ *— функция из теоремы* 5.9 *для области* $D \setminus z_1$, *и пусть в окрестности бесконечности* $p_\theta(z)$ *имеет разложение*

$$p_\theta(z) = z + a_{0,\theta} + \text{(члены, содержащие степени } z^{-1}\text{)}.$$

Пусть

$$\pi_\theta(z) = p_\theta(z - z_1) + z_1 - a_{0,\theta}.$$

Пусть $f \in \Sigma'(D)$. *Тогда сбласть возможных значений* $f(z_1)$ *задается неравенством*

$$|f(z_1) - c_2| \leqslant r_2, \tag{6.11}$$

где

$$c_2 = {}^1/_2[\pi_0(z_1) + \pi_\pi(z_1)], \quad r_2 = {}^1/_2[\pi_\pi(z_1) - \pi_0(z_1)].$$

Значение

$${}^1/_2[\pi_0(z_1) + \pi_\pi(z_1)] - {}^1/_2[\pi_\pi(z_1) - \pi_0(z_1)]\, e^{i\theta}$$

принимается только для функции $\pi_\theta(z)$.

Этот результат принадлежит Грёчу [56].

Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\, dw^2 = e^{-i\theta} dw^2/[w - \pi_\theta(z_1)],$$

где θ вещественно, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, и выбрав в качестве Δ область $\pi_\theta(D)$. Пусть $\Phi_\theta(w)$ — функция, обратная к $\pi_\theta(z)$, заданная в $\pi_\theta(D)$. Тогда функция

$$\Psi(w) = f(\Phi_\theta(w)) - f(z_1) + \pi_\theta(z_1)$$

является допустимой функцией, соответствующей Δ.

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет единственный полюс P_1 третьего порядка в бесконечно удаленной точке. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = e^{-i\theta}, \quad a_0^{(1)} = \pi_\theta(z_1) - f(z_1).$$

Из неравенства (4.7) получаем

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\theta}[\pi_\theta(z_1) - f(z_1)]\} \leqslant 0. \tag{6.12}$$

Из теоремы 5.9 и следствия 5.2 вытекает, что

$$\pi_\theta(z_1) = e^{i\theta/2} \cos\frac{\theta}{2}\, \pi_0(z_1) - e^{i\theta/2}\, i \sin\frac{\theta}{2}\, \pi_\pi(z_1) = c_2 - r_2 e^{i\theta}.$$

Поэтому геометрическим местом этих точек является окружность. Число r_2 вещественно и положительно, так как для всех этих точек

$$\operatorname{Re}\pi_0(z_1) \leqslant \operatorname{Re}\pi_0(z_1) \leqslant \operatorname{Re}\pi_\pi(z_1).$$

Подставляя теперь эти формулы в неравенство (6.12), получаем

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\theta}(c_2 - f(z_1))\} \leqslant r_2,$$

т. е.

$$|f(z_1) - c_2| \leqslant r_2.$$

Из рассуждений Грёча, приведенных выше, следует, что этот круг является точной областью значений $f(z_1)$. Заключительное утверждение теоремы 6.12 сразу следует из условия (1) равенства в теореме 4.1.

Следствие 6.11. *Пусть* $f \in \Sigma'$. *Тогда область возможных значений* $f(re^{i\theta})$, *где* $1 < r < \infty$, *а* θ *вещественно, определяется неравенством*

$$\left| \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} - \frac{(1+r)^2}{r^2} \frac{E(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}{K(2r^{1/2}(1+r)^{-1})} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^2+1}{r^2} - \frac{(r+1)^2}{r^2} \frac{E(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}{K(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}. \qquad (6.13)$$

Равенство в (6.13) *может иметь место только для функций, соответствующих функциям теоремы* 6.12.

Явные оценки в этом частном случае теоремы 6.12 принадлежат Голузину [37].

Здесь E и K — стандартные обозначения полных эллиптических интегралов[1]). Найдем сначала область возможных значений $f(-r)$. В этом случае функция $\pi_0(z)$ равна просто $z+1/z$. Для нахождения функции $\pi_\pi(z)$

[1]) $E(x) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2t^2}{1-t^2}}\,dt$, $K(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$

— *Прим. перев.*

нужно использовать построение, проведенное в теореме 5.9. Положим сначала

$$Z = z + 1/z + r + 1/r.$$

Эта функция конформно отображает область $|z| > 1$ на область D_1, представляющую собой плоскость Z, разрезанную вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $r^{-1}(r-1)^2$ и $r^{-1}(r+1)^2$, причем точка $-r$ переходит в начало. Построим двулистную накрывающую поверхность для D_1, разветвленную в начале и в бесконечности, и отобразим ее с помощью функции

$$W = Z^{1/2}$$

на область D_2, представляющую собой плоскость W, разрезанную вдоль отрезков, соединяющих $-r^{-1/2}(r+1)$ с $-r^{-1/2}(r-1)$ и $r^{-1/2}(r-1)$ с $r^{-1/2}(r+1)$. Отображение области D_2 на плоскость с вертикальными разрезами осуществляет функция

$$U = \int_0^W (W^2 - \beta)\,[(W^2 - r^{-1}(r-1)^2)\,(W^2 - r^{-1}(r+1)^2)]^{-1/2}\,dW.$$

Корень здесь положителен на вещественной оси вблизи начала, а β (вещественное и положительное) определяется условием

$$\int_{r^{-1/2}(r-1)}^{r^{-1/2}(r+1)} (W^2 - \beta)\,[(W^2 - r^{-1}(r-1)^2)\,(W^2 - r^{-1}(r+1)^2)]^{-1/2}\,dW = 0.$$

Обычные преобразования показывают, что

$$\beta = \frac{(r+1)^2}{r}\,\frac{E(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}{K(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}.$$

Отображение U в бесконечности имеет разложение

$$U = W + \left(\beta - \frac{r^2+1}{r}\right) W^{-1} + (\text{более высокие степени } W^{-1}).$$

Положим, наконец,

$$V = U^2.$$

Тогда в окрестности бесконечно удаленной точки

$$V = Z + 2\left(\beta - \frac{r^2+1}{r}\right) + (\text{члены, содержащие степени } Z^{-1}).$$

Таким образом,

$$\pi_\pi(-r) = -2\left(\beta - \frac{r^2+1}{r}\right) - r - \frac{1}{r},$$

в то время как

$$\pi_0(-r) = -r - \frac{1}{r}.$$

В обозначениях теоремы 6.12

$$c_2 = -\beta,$$
$$r_2 = \frac{r^2+1}{r} - \beta.$$

Таким образом, область возможных значений $f(-r)$ задается неравенством

$$|f(-r) + \beta| \leqslant \frac{r^2+1}{r} - \beta.$$

Для того чтобы изучить значения $f(re^{i\theta})$, заметим, что если $f(z)$ принадлежит Σ, то при вещественном θ функция $f^*(z) = -e^{-i\theta}f(-e^{i\theta}z)$ также принадлежит Σ, причем $f^*(-r) = -e^{-i\theta}f(re^{i\theta})$. Поэтому область значений $f(re^{i\theta})$ задается неравенством

$$|-e^{-i\theta}f(re^{i\theta}) + \beta| \leqslant \frac{r^2+1}{r} - \beta,$$

которое равносильно неравенству (6.13). Утверждение относительно равенства получается непосредственно. Экстремальные функции легко выписать в явном виде.

6.5. Теперь мы займемся нахождением области значений $f'(z_1)$ для $f \in \Sigma(D)$, где z_1 — фиксированная конечная точка области D, содержащей бесконечно удаленную точку. Оказывается, что более естественно определять область значений $\log f'(z_1)$, но при этом мы должны уточнить, о какой ветви $\log f'(z_1)$ пойдет речь. Для этого мы используем следующие рассуждения.

Лемма 6.2. *Пусть D — конечносвязная область z-сферы, содержащая бесконечно удаленную точку, и пусть z_1 — конечная внутренняя точка области D. Пусть $f \in \Sigma(D)$. Всякая ветвь функции $\log\{[f(z)-f(z_1)]/(z-z_1)\}$ однозначна в области D с выколотыми точками $z=z_1$ и $z=\infty$. Одна из ветвей допускает такое непрерывное продолжение на всю область D, что продолженная функция равна нулю в бесконечности и некоторому значению $\log f'(z_1)$ в точке z_1. Если продолженную таким образом функцию обозначить через $W(z, z_1)$, то $W(z_1, z_1)$ оказывается регулярной функцией от z_1 в области D с выколотой точкой $z_1=\infty$. Эту функцию можно по непрерывности продолжить на всю область D, так чтобы продолженная функция была равна нулю в бесконечности. Таким образом, в D существует однозначная ветвь $\log f'(z_1)$, которую можно продолжить так, что она будет равна нулю в бесконечности.*

Ветви функции $\log\{[f(z)-f(z_1)]/(z-z_1)\}$ однозначны, так как при изменении z вдоль любого замкнутого пути, лежащего в D и не проходящего через z_1 и бесконечно удаленную точку, функции $\log[f(z)-f(z_1)]$ и $\log(z-z_1)$ изменяются на одну и ту же величину, кратную $2\pi i$. Легко видеть, что $W(z_1, z_1)$ изменяется непрерывно вместе с z_1. Поскольку эта функция локально регулярна и определена единственным образом в каждой точке области D, кроме бесконечно удаленной точки, то она однозначна в этой области. В окрестности бесконечности она равна $\log f'(z_1)$. Здесь мы используем ту ветвь логарифма, которая равна нулю в точке 1. Это завершает доказательство.

Определение 6.1. Пусть D — конечносвязная область z-сферы, содержащая бесконечно удаленную точку, и пусть z_1 — конечная внутренняя точка D. Пусть $f \in \Sigma(D)$. *Всюду ниже мы под $\log f'(z_1)$ будем понимать $W(z_1, z_1)$, а под $\arg f'(z_1)$ будем понимать $\operatorname{Im} W(z_1, z_1)$.*

Лемма 6.3. *Пусть D — конечносвязная область z-сферы, содержащая бесконечно удаленную точку, и пусть z_1 — конечная внутренняя точка области D. Пусть $f \in \Sigma(D)$. Пусть λ — простая кривая в D с непрерывно вращающейся касательной, соединяющая z_1 и ∞ и имеющая в этих точках предельные положения касательных.*

Пусть $\tilde{\lambda}$ *— образ* λ *при отображении* $w = f(z)$. *Тогда*

$$\int_{f(z_1)}^{\infty} d\arg[w - f(z_1)] + \arg f'(z_1) = \int_{z_1}^{\infty} d\arg(z - z_1), \quad (6.14)$$

где интеграл в левой части берется по $\tilde{\lambda}$, *а в правой — по* λ.

Эта и предыдущая леммы принадлежат Грёчу [57]. Мы имеем

$$\int_{\infty}^{z_1} d\log\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \log f'(z_1),$$

где интеграл берется по λ. Отделяя мнимые части, получаем

$$\int_{\infty}^{z_1} d\arg\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \arg f'(z_1),$$

или

$$\int_{\infty}^{z_1} d\arg(f(z) - f(z_1)) = \arg f'(z_1) + \int_{\infty}^{z_1} d\arg(z - z_1).$$

Все интегралы здесь имеют смысл, так как λ имеет предельные положения касательных в точках z_1 и ∞. Отсюда сразу получается результат леммы 6.3.

Лемма 6.4. *Пусть* $Q(z)dz^2$ *— квадратичный дифференциал на* z*-сфере, имеющий двойные полюсы в бесконечно удаленной точке и в конечной точке* z_1, *регулярный во всех остальных точках. Пусть* D *— область, допустимая относительно дифференциала* $Q(z)dz^2$. *Пусть* $f \in \Sigma(D)$ *и удовлетворяет условию* $f(z_1) = z_1$. *Тогда* f *допустима относительно* D. *Пусть* F *— соответствующая допустимая гомотопия. Тогда*

$$\log f'(z_1) = \log|f'(z_1)| + i[d(F, z_1) + d(F, \infty)].$$

Здесь $d(F, z_1)$ и $d(F, \infty)$ — соответствующие степени деформации. Мы будем использовать обозначения леммы 6.3, но теперь область D и ее образ при отображении f лежат на z-сфере. Выберем на λ точку P', лежащую вблизи z_1, и точку P'', лежащую вблизи ∞. Рассмотрим следующую

ориентированную замкнутую кривую Λ. Сначала возьмем часть $\widetilde{\lambda}(P', P'')$ кривой $\widetilde{\lambda}$ от $f(P')$ до $f(P'')$, затем $\gamma_{P''}$ — кривую $F(P'', t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ [направленную от $f(P'')$ к P''], затем часть $\lambda(P'', P')$ кривой λ от P'' до P' и, наконец, $\gamma_{P'}$ — кривую $F(P', t)$, $1 \geqslant t \geqslant 0$ [направленную от P' к $f(P')$]. Кривая Λ, очевидно, гомотопна нулю на z-сфере, из которой удалены точки z_1 и ∞. Поэтому

$$\int_{\Lambda} d \arg (z - z_1) = 0.$$

В обозначениях леммы 4.1

$$\int_{\gamma_{P'}} d \arg (z - z_1) = \delta(F, P'),$$

где в точке z_1 используется локальный параметр $z - z_1$. Кроме того,

$$\int_{\gamma_{P''}} d \arg (z - z_1) = \delta(F, P''),$$

где в бесконечно удаленной точке используется локальный параметр $1/(z - z_1)$. Таким образом,

$$\int_{\widetilde{\lambda}(P', P'')} d \arg (z - z_1) + \int_{\lambda(P'', P')} d \arg (z - z_1) + \delta(F, P') + \delta(F, P'') = 0.$$

Устремляя P' к z_1, P'' — к бесконечности и сопоставляя полученный результат с равенством (6.14), находим

$$\arg f'(z_1) = d(F, z_1) + d(F, \infty),$$

что завершает доказательство леммы 6.4.

Теорема 6.13. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит бесконечно удаленную точку. Пусть z_1 — конечная внутренняя точка области D. Пусть $f_0(z)$ — функция из теоремы 5.3 для области $D \setminus z_1$. Пусть $f \in \Sigma(D)$. Тогда область возможных значений $\log f'(z_1)$ задается неравенством*

$$|\log f'(z_1) - c_3| \leqslant r_3, \tag{6.15}$$

где

$$c_3 = \frac{1}{2}[\log f_0'(0) + \log f_{\pi/2}'(0)],$$

$$r_3 = \frac{1}{2}[\log f'_{\pi/2}(0) - \log f_0'(0)].$$

Значение

$$\frac{1}{2}[\log f_0'(0) + \log f'_{\pi,2}(0)] - \frac{1}{2}[\log f'_{\pi/2}(0) - \log f_0'(0)]\, e^{2i\theta}$$

может приниматься только для функций $f_\theta(z - z_1) + c$, *где* c — *постоянная.*

Этот результат принадлежит Грёчу [57]. Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\, dw^2 = e^{-2i\theta}\, dz^2/z^2,$$

где θ вещественно, и взяв в качестве Δ область $f_\theta(D \setminus z_1)$. Пусть $\Phi_\theta(w)$ — функция, обратная к $f_\theta(z)$, заданная в $f_\theta(D \setminus z_1)$. Тогда функция

$$\Psi(w) = f[\Phi_\theta(w) + z_1] - f(z_1)$$

является допустимой функцией, соответствующей Δ. Квадратичный дифференциал имеет два двойных полюса: P_1 в начале и P_2 в бесконечности. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = e^{-2i\theta}, \quad a^{(1)} = f_\theta'(0)/f'(z_1),$$

$$\alpha^{(2)} = e^{-2i\theta}, \quad a^{(2)} = 1.$$

Неравенство (4.7) с использованием леммы 6.4 дает

$$\operatorname{Re}\{e^{-2i\theta}(\log f_\theta'(0) - \log f'(z_1))\} \leqslant 0. \qquad (6.16)$$

Используя построение, проведенное в теореме 5.3, получаем

$$\log f_\theta'(0) = e^{i\theta}\cos\theta \log f_0'(0) - e^{i\theta} i \sin\theta \log f'_{\pi/2}(0) = c_3 - r_3 e^{2i\theta}.$$

Таким образом, все эти точки содержатся в некотором круге. Число r_3 вещественно и положительно, так как для всех этих точек

$$\operatorname{Re}\log f_0'(0) \leqslant \operatorname{Re}\log f_\theta'(0) \leqslant \operatorname{Re}\log f'_{\pi/2}(0).$$

Подставляя эти формулы в неравенство (6.16), находим, что

$$\operatorname{Re}\{e^{-2i\theta}[c_3 - \log f'(z_1)]\} \leqslant r_3,$$

т. е.

$$|\log f'(z_1) - c_3| \leqslant r_3.$$

Из приведенного ранее рассуждения Грёча следует, что этот круг является точной областью значений $\log f'(z_1)$. Заключительное утверждение теоремы 6.13 сразу следует из условия (2) равенства в теореме 4.1.

Следствие 6.12. *Пусть* $f \in \Sigma$. *Тогда область возможных значений* $\log f'(re^{i\theta})$, *где* $r > 1$, θ *вещественно, задается неравенством*

$$|\log f'(re^{i\theta})| \leqslant \log \frac{r^2}{r^2 - 1}. \tag{6.17}$$

Значение

$$-e^{2i\alpha} \log \frac{r^2}{r^2 - 1}$$

принимается только для функций

$$(z - re^{i\theta})(1 - e^{i\theta}/rz)\, e^{2i\alpha} + c,$$

где α *вещественно,* c *— постоянная и выбрана та ветвь функции* $(1 - e^{i\theta}/rz)\, e^{2i\alpha}$, *которая равна* 1 *в бесконечности.*

В этом частном случае явные оценки принадлежат Грунскому [72].

Найдем сначала область значений для $\log f'(-r)$. В этом случае функция $f_0(z + r)$ равна просто

$$z + 1/z + r + 1/r,$$

поэтому

$$\log f_0'(0) = \log(1 - r^{-2}).$$

Кроме того,

$$f_{\pi/2}(z + r) = \frac{rz^2 + r^2 z}{rz + 1},$$

так что

$$\log f_{\pi/2}'(0) = \log \frac{r^2}{r^2 - 1}.$$

Значит, в обозначениях теоремы 6.13

$$c_3 = 0,$$

$$r_3 = \log \frac{r^2}{r^2 - 1}.$$

Таким образом, возможная область значений $\log f'(-r)$ задается неравенством

$$|\log f'(-r)| \leqslant \log \frac{r^2}{r^2 - 1}.$$

Чтобы изучить общий случай, заметим, что при вещественных θ вместе с f в классе Σ содержатся функции $\widehat{f}(z) = -e^{-i\theta} f(-e^{i\theta} z)$ и $\widehat{f}'(-r) = f'(re^{i\theta})$. Поэтому областью возможных значений $\log f'(re^{i\theta})$ является замкнутый круг, заданный неравенством (6.17). Утверждение относительно равенства следует из соответствующего утверждения теоремы 6.13 и построения, примененного в теореме 5.3.

Следствие 6.13. *Функция* $f_\theta(z)$ *из теоремы* 5.3 *определяется единственным образом свойствами осуществляемого ею отображения, описанного в формулировке этой теоремы.*

Это вытекает непосредственно из утверждения относительно равенства в теореме 6.13.

Теорема 6.14. *Пусть конечносвязная область* D *на* z*-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Пусть* b *— конечная точка* D*, отличная от начала. Тогда при каждом вещественном* θ, $0 \leqslant \theta < \pi$, *существует единственная функция* $\sigma_\theta(z)$ *семейства* $\Sigma_0(D)$, *конформно отображающая* D *на область, ограниченную разрезами вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала* $e^{-2i\theta}[w(w - \sigma_\theta(b))]^{-1} dw^2$.

Этот результат принадлежит Грёчу [59]. Он доказывается так же, как теорема 5.11, только отображение Φ для области D заменяется отображением теоремы 5.3. Заметим, что в этом доказательстве используется утверждение о единственности из следствия 6.13.

Теорема 6.14 имеет также аналоги для областей, рассмотренных в теоремах 5.12 и 5.15. Мы не будем ими заниматься.

6.6. Лемма 6.5. *Пусть D — конечносвязная область z-сферы, содержащая начало и бесконечно удаленную точку. Пусть $f \in \Sigma_0(D)$. Тогда любая ветвь $\log(f(z)/z)$ может быть продолжена до функции, регулярной и однозначной в D.*

Это очевидно, так как $\log f(z)$ и $\log z$ вдоль каждого замкнутого пути, лежащего в $D \setminus \{0, \infty\}$, изменяются на одно и то же число, кратное $2\pi i$.

Определение 6.2. Пусть D — конечносвязная область z-сферы, содержащая начало и бесконечно удаленную точку. Пусть z_1 — конечная внутренняя точка D, отличная от начала. *Всюду ниже под $\log[f(z_1)/z_1]$ мы будем понимать то значение, которое в точке z_1 принимает ветвь функции $\log[f(z)/z]$, стремящаяся к нулю, когда z стремится к бесконечности, а под $\arg(f(z_1)/z_1)$ — мнимую часть $\log(f(z_1)/z_1)$.*

Лемма 6.6. *Пусть $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал на z-сфере, имеющий двойной полюс в бесконечности и простые полюсы в начале и в z_1, где z_1 — конечная точка, отличная от начала, и регулярный во всех остальных точках. Пусть D — область, допустимая относительно дифференциала $Q(z)dz^2$, содержащая начало и z_1. Пусть $f \in \Sigma_0(D)$. Тогда функция $z_1 f(z)/f(z_1)$ допустима относительно D. Пусть F — соответствующая допустимая гомотопия. Тогда*

$$\log(f(z_1)/z_1) = \log|f(z_1)/z_1| + id(F, \infty).$$

Пусть λ — простая кривая с непрерывно меняющейся касательной, лежащая в D, соединяющая точки z_1 и ∞, не проходящая через начало и имеющая в бесконечности предельное положение касательной. Пусть $\tilde{\lambda}$ — образ λ при отображении $w = z_1 f(z)/f(z_1)$. Пусть P — точка кривой λ, близкая к бесконечности, P^* — ее образ при рассматриваемом отображении. Рассмотрим следующую ориентированную замкнутую кривую Λ. Сначала возьмем часть $\tilde{\lambda}_P$ кривой $\tilde{\lambda}$ от z_1 до P^*, затем γ_P — кривую $F(P, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (направленную от P^* к P), затем часть λ_P кривой λ от P до z_1. Ясно, что Λ гомотопна нулю на

z-сфере, из которой удалены начало и бесконечно удаленная точка. Поэтому

$$\int_{\Lambda} d \arg z = 0.$$

В обозначениях леммы 4.1

$$\int_{\gamma_P} d \arg z = \delta(F, P),$$

где в бесконечности используется локальный параметр $1/z$. Таким образом,

$$\int_{\gamma_P} d \arg z + \int_{\lambda_P'} d \arg z + \delta(F, P) = 0.$$

Устремляя P к бесконечности, получаем

$$\int_{\gamma} d \arg z + \int_{\lambda} d \arg z + d(F, P) = 0.$$

Поэтому

$$d(F, P) = \int_{\infty}^{z_1} d \arg [f(z)/z] = \arg [f(z_1)/z_1].$$

Отсюда сразу вытекает утверждение леммы 6.6.

Теорема 6.15. *Пусть конечносвязная область D на z-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Пусть b — конечная точка D, отличная от начала. Пусть $f \in \Sigma_0(D)$. Тогда область возможных значений* $\log(f(b)/b)$ *задается неравенством*

$$|\log [f(b)/b] - c_4| \leqslant r_4, \tag{6.18}$$

где

$$c_4 = \frac{1}{2} [\log(\sigma_0(b)/b] + \log [\sigma_{\pi/2}(b)/b)],$$

$$r_4 = \frac{1}{2} [\log(\sigma_{\pi/2}(b)/b] - \log [\sigma_0(b)/b)].$$

Значение

$$\frac{1}{2}[\log(\sigma_0(b)/b) + \log(\sigma_{\pi,2}(b)/b)] -$$

$$-\frac{1}{2}[\log(\sigma_{\pi,2}(b)/b) - \log(\sigma_0(b)/b)]e^{2i\theta},$$

где θ *вещественно,* $0 \leqslant \theta < \pi$, *может приниматься только тогда, когда* f *равняется* $\sigma_\theta(z)$ *— функции из теоремы* 6.14 *для области* D.

Этот результат принадлежит Грёчу [59].

Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\,dw^2 = e^{-2i\theta}[w(w - \sigma_\theta(b))]^{-1}\,dw^2,$$

где θ вещественно, $0 \leqslant \theta < \pi$, и взяв в качестве Δ область $\sigma_\theta(D)$. Пусть $\Phi_\theta(w)$ — функция, обратная к $\sigma_\theta(z)$, заданная в области $\sigma_\theta(D)$. Тогда функция

$$\Psi(w) = \sigma_\theta(b)\,f(\Phi_\theta(w))/f(b)$$

является допустимой функцией, соответствующей Δ.

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет единственный двойной полюс в бесконечно удаленной точке. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = e^{-2i\theta}, \quad a^{(1)} = \sigma_\theta(b)/f(b).$$

Неравенство (4.7) дает $\operatorname{Re}\{e^{-2i\theta}\log[\sigma_\theta(b)/f(b)]\} \leqslant 0$ или

$$\operatorname{Re}\{e^{-2i\theta}[\log(\sigma_\theta(b)/b) - \log(f(b)/b)]\} \leqslant 0. \qquad (6.19)$$

Используя построение, проведенное в теореме 6.14, получаем, что

$$\log[\sigma_\theta(b)/b] = e^{i\theta}\cos\theta\log[\sigma_0(b)/b] - e^{i\theta}i\sin\theta\log[\sigma_{\pi,2}(b)/b] =$$

$$= c_4 - r_4 e^{2i\theta}.$$

Таким образом, эти точки находятся в некотором круге. Число r_4 вещественно и положительно, так как для всех этих точек

$$\operatorname{Re}\log[\sigma_0(b)/b] \leqslant \operatorname{Re}\log[\sigma_\theta(b)/b] \leqslant \operatorname{Re}\log[\sigma_{\pi/2}(b)/b].$$

Подставляя теперь эти формулы в неравенство (6.19), находим, что

$$\operatorname{Re}\{e^{-2i\theta}(c_4 - \log[f(b)/b])\} \leqslant r_4,$$

т. е.

$$|\log[f(b)/b] - c_4| \leqslant r_4.$$

Из приведенного ранее рассуждения Грёча следует, что этот круг представляет собой точную область значений $\log[f(b)/b]$. Заключительное утверждение теоремы 6.15 сразу следует из условия (3) равенства в теореме 4.1.

Теорему 6.15 можно также доказать с помощью сведения к теореме 6.13, что было сделано Грёчем.

Теорема 6.16. *Пусть конечносвязная область* D *на* z*-сфере содержит начало и бесконечно удаленную точку. Тогда для каждого вещественного* θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, *существует единственная функция* $t_\theta(z)$, *однолистная и мероморфная в* D, *удовлетворяющая условиям* $t_\theta(0) = 0$, $t'_\theta(0) = 1$, $t_\theta(\infty) = \infty$ *и конформно отображающая* D *на область с разрезами вдоль дуг траекторий квадратичного дифференциала* $e^{-i\theta}\,dw^2/w^3$.

Этот результат следует непосредственно из теоремы 5.9.

Теорема 6.17. *Пусть конечносвязная область* D *на* z*-сфере содержит бесконечно удаленную точку. Пусть* z_1 *— конечная точка области* D. *Пусть* t_θ *— функция из теоремы* 6.16 *для области* $D \setminus z_1$. *Пусть функция* $f(z)$ *мероморфна и однолистна в* D, *и пусть* $f(\infty) = \infty$. *Тогда область возможных значений* $f''(z_1)/f'(z_1)$ *задается неравенством*

$$|f''(z_1)/f'(z_1) - c_5| \leqslant r_5, \tag{6.20}$$

где

$$c_5 = \frac{1}{2}[t''_0(0) + t''_\pi(0)], \quad r_5 = \frac{1}{2}[t''_\pi(0) - t''_0(0)].$$

Значение

$$\frac{1}{2}[t''_0(0) + t''_\pi(0)] - \frac{1}{2}[t''_\pi(0) - t''_0(0)]\,e^{i\theta},$$

где θ вещественно, принимается только в том случае, когда функция f имеет вид $at_\theta(z)+b$, где a и b — постоянные.

Этот результат и его следствие принадлежат Голузину [37, 40].

Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, положив

$$Q(w)\,dw^2 = e^{-i\theta}\,dw^2/w^3,$$

где θ вещественно, $0\leqslant\theta<2\pi$, и взяв в качестве Δ область $t_\theta(D\setminus z_1)$. Пусть $\Phi_\theta(w)$ — функция, обратная к $t_\theta(z)$, заданная в $t_\theta(D\setminus z_1)$. Тогда функция

$$\Psi(w) = [f(\Phi_\theta(w)+z_1) - f(z_1)]/f'(z_1)$$

является допустимой функцией, соответствующей Δ.

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет единственный полюс P_1 третьего порядка в начале. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = e^{-i\theta}, \quad a_0^{(1)} = \frac{1}{2}\,[t_0''(0) - [f''(z_1)/f'(z_1)]].$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\theta}\,\frac{1}{2}\,[t_0''(0) - (f''(z_1)/f'(z_1))]\leqslant 0. \tag{6.21}$$

Из теоремы 6.16 следует, что

$$t_\theta''(0) = e^{i\theta,2}\cos\frac{\theta}{2}\,t_0''(0) - e^{i\theta,2}\,i\sin\frac{\theta}{2}\,t_\pi''(0) = c_5 - r_5 e^{i\theta}.$$

Поэтому все эти точки находятся в некотором круге. Число r_5 вещественно и положительно, так как для всех этих точек

$$\operatorname{Re} t_0''(0)\leqslant\operatorname{Re} t_\theta''(0)\leqslant\operatorname{Re} t_\pi''(0).$$

Подставляя теперь эти формулы в неравенство (6.21), находим, что

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\theta}\,[c_5 - f''(z_1)/f'(z_1)]\}\leqslant r_5,$$

т. е.

$$|f''(z_1)/f'(z_1) - c_5|\leqslant r_5.$$

Из приведенного ранее рассуждения Грёча следует, что этот круг представляет собой точную область возможных значений $f''(z_1)/f'(z_1)$. Заключительное утверждение теоремы 6.17 сразу следует из условия (1) равенства в теореме 4.1.

Следствие 6.14. *Пусть $f(z)$ мероморфна и однолистна при $|z|>1$, и пусть $f(\infty)=\infty$. Тогда область возможных значений $f''(re^{i\theta})/f'(re^{i\theta})$, где $1<r<\infty$, θ вещественно, задается неравенством*

$$\left|re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}+\frac{2r^2}{r^2-1}-2\frac{r+1}{r-1}\frac{E(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}{K(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\frac{r^2+1}{r^2-1}-2\frac{r+1}{r-1}\frac{E(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}{K(2r^{1/2}(1+r)^{-1})}.$$

Равенство здесь возможно только для функций, соответствующих функциям, описанным в теореме 6.17.

Формула, данная Голузиным [40], отличается от последней формулы только тем, что в ней к полным эллиптическим интегралам было применено преобразование Гаусса.

Это следствие выводится из теоремы 6.17 так же, как следствие 6.11 выводится из теоремы 6.12.

6.7. Для функций, регулярных и однолистных в области, не содержащей бесконечно удаленной точки, справедливы результаты, соответствующие предшествующим теоремам. Мы ограничимся здесь несколькими примерами для функций семейства S.

Лемма 6.7. *Пусть D — односвязная область на z-сфере, содержащая начало, но не содержащая бесконечно удаленной точки. Пусть f регулярна и однолистна в D, причем $f(0)=0$. Тогда всякая ветвь $\log(f(z)/z)$ может быть продолжена до функции, однозначной и регулярной в D.*

Определение 6.3. Пусть D — односвязная область на z-сфере, содержащая начало, но не содержащая бесконечно удаленной точки. Пусть z_1 — точка D, отличная от начала. Пусть f регулярна и однолистна в D, причем $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Всюду ниже под $\log[f(z_1)/z_1]$ *мы будем понимать то значение, которое в точке z_1 при-*

нимает ветвь $\log[f(z)/z]$, *стремящаяся к нулю при* z, *стремящемся к началу, а под* $\arg[f(z_1)/z_1]$ — *мнимую часть* $\log[f(z_1)/z_1]$.

Лемма 6.8. *Пусть* $Q(z)\,dz^2$ — *квадратичный дифференциал на* z-*сфере, имеющий двойной полюс в начале, простые полюсы в бесконечности и в конечной точке* b, *отличной от начала, и регулярный во всех остальных точках. Пусть* D — *допустимая область относительно* $Q(z)\,dz^2$, *содержащая* b, *но не содержащая бесконечно удаленной точки. Пусть* f *регулярна и однолистна в* D, *причем* $f(0)=0$, $f'(0)=1$. *Тогда* $bf(z)/f(b)$ *является допустимой функцией, соответствующей* D. *Пусть* F — *соответствующая допустимая гомотопия. Тогда*

$$\log[f(b)/b] = \log|f(b)/b| - id(F, 0).$$

Доказательства этих результатов почти не отличаются от соответствующих доказательств из п. 6.6.

Теорема 6.18. *Для любого вещественного* α, $0\leqslant\alpha<\pi$, *и любого* r, $0<r<1$, *существует единственная функция* $u_\alpha(z)$ *семейства* S, *отображающая единичный круг* $E: |z|<1$ *на некоторую область, допустимую относительно квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{e^{-2i\alpha}\,dw^2}{w^2[w-u_\alpha(r)]}.$$

Пусть $f\in S$. *Тогда область возможных значений функции* $\log[f(re^{i\theta})/re^{i\theta}]$, *где* θ *вещественно, определяется неравенством*

$$|\log[f(re^{i\theta})/re^{i\theta}] + \log(1-r^2)| \leqslant \log\frac{1+r}{1-r}; \qquad (6.22)$$

функция $\log[f(re^{i\theta})/re^{i\theta}]$ *принимает значение*

$$\log\frac{1}{1-r^2} - e^{2i\alpha}\log\frac{1+r}{1-r}$$

только для функции

$$e^{i\theta}u_\alpha(e^{-i\theta}z).$$

Этот результат принадлежит Грунскому [72]. Аналогичный результат для областей более общего вида был позднее доказан Грёчем [60].

Положим $\tilde{f}(z) = z(1+z)^{-2}$, и пусть $D = \tilde{f}(E)$. Пусть $\tilde{\Phi}(w)$ — функция, обратная к $\tilde{f}$, заданная в D. Пусть $b = r(1+r)^{-2}$. Функция

$$\zeta(w) = \int_b^{} \frac{dw}{w(w-b)^{1/2}}$$

отображает плоскость w, разрезанную вдоль полубесконечных интервалов $w < 0$ и $w > b$, на вертикальную полуполосу. Здесь $(w-b)^{1/2}$ — корень с отрицательной мнимой частью при $0 < w < b$ и

$$\zeta(w) = \frac{1}{ib^{1/2}} \log \frac{b^{1/2} - (b-w)^{1/2}}{b^{1/2} + (b-w)^{1/2}} =$$

$$= \frac{1}{ib^{1/2}} \log w + \frac{1}{ib^{1/2}} \log \frac{1}{4b} + (\text{степени } w).$$

Здесь $(b-w)^{1/2}$ — корень, положительный при $0 < w < b$, $b^{1/2}$ и $\log \frac{1}{4b}$ положительны, $\log w$ — главная ветвь логарифма, а разложение справедливо вблизи $w = 0$.

Пусть, кроме того,

$$\zeta^*(w) = \zeta\left(\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 \tilde{\Phi}(w)(1 - \tilde{\Phi}(w))^{-2}\right).$$

Тогда

$$\zeta^*(w) = \frac{1}{ib^{1/2}} \log w + \frac{1}{ib^{1/2}} \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 + \frac{1}{ib^{1/2}} \log \frac{1}{4b} +$$

$$+ (\text{степени } w),$$

причем определения корня и логарифма остаются прежними, а разложение справедливо вблизи $w = 0$. Положим

$$\zeta_\alpha(w) = e^{i\alpha} [\cos \alpha \zeta(w) - i \sin \alpha \zeta^*(w)],$$

и пусть $w_\alpha(w)$ — суперпозиция функции $\zeta_\alpha(w)$ и функции, обратной к (многозначному) продолжению $\zeta(w)$. Тогда $w_\alpha(w)$

отображает D на область D_α, допустимую относительно квадратичного дифференциала

$$Q_\alpha(w)\,dw^2 = \frac{e^{-2i\alpha}\,dw^2}{w^2(w-b)}.$$

Вблизи $w = 0$ имеем разложение

$$\zeta_\alpha(w) = \frac{1}{ib^{1/2}}\log w + \frac{1}{ib^{1/2}}\log\frac{1}{4b} - \frac{e^{i\alpha}\sin\alpha}{b^{1/2}}\log\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 + \\ + (\text{степени } w).$$

Поэтому

$$w_\alpha'(0) = \exp\left[-ie^{i\alpha}\sin\alpha\log\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\right].$$

Функция $u_\alpha(z)$ из теоремы 6.18 задается, следовательно, формулой

$$u_\alpha(z) = \exp\left[ie^{i\alpha}\sin\alpha\log\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\right] w_\alpha(\widetilde{f}(z)).$$

Возьмем теперь любую функцию $f \in S$. Функция $bf(\widetilde{\Phi}(w)/f(r))$ является допустимой функцией, соответствующей D_α. Квадратичный дифференциал $Q_\alpha(w)\,dw^2$ имеет единственный двойной полюс P_1 в начале. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = -e^{-2i\alpha}/b, \qquad a^{(1)} = b^{-1}f(r)\exp\left[-ie^{i\alpha}\sin\alpha\log\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\right].$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\left\{-b^{-1}e^{-2i\alpha}\log\left[b^{-1}f(r)\exp\left(-ie^{i\alpha}\sin\alpha\log\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\right)\right]\right\} \leqslant 0,$$

откуда

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-2i\alpha}\left[\log\frac{1}{1-r^2} - \log(f(r)/r)\right]\right\} \leqslant \log\frac{1+r}{1-r},$$

так что

$$|\log[f(r)/r] + \log(1-r^2)| \leqslant \log\frac{1+r}{1-r}.$$

Приведенное ранее рассуждение Грёча показывает, что этот круг является точной областью возможных значений $\log [f(r)/r]$.

Теперь заметим, что при любом вещественном θ функция

$$f^*(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$$

принадлежит S, причем

$$f^*(r)/r = f(re^{i\theta})/re^{i\theta}.$$

Поэтому точная область возможных значений $\log [f(re^{i\theta})/re^{i\theta}]$ представляет собой замкнутый круг, заданный неравенством (6.22). Из условия (3) равенства в теореме 4.1 следует, что $\log [f(re^{i\theta})/re^{i\theta}]$ принимает значение

$$-\log(1-r^2) - e^{2i\alpha} \log \frac{1+r}{1-r}$$

только тогда, когда $f(z)$ есть функция $e^{i\theta} u_\alpha(e^{-i\theta} z)$. Таким же образом устанавливается единственность отображения $u_\alpha(z)$.

Лемма 6.9. *Пусть D — односвязная область на z-сфере, содержащая начало, но не содержащая бесконечно удаленной точки. Пусть функция f регулярна и однолистна в D, причем $f(0)=0$. Тогда всякая ветвь $\log(zf'(z)/f(z))$ может быть продолжена до функции, однозначной и регулярной в D.*

Определение 6.4. Пусть D — односвязная область на z-сфере, содержащая начало, но не содержащая бесконечно удаленной точки. Пусть z_1 — точка области D, отличная от начала. Пусть f однолистна и регулярна в D, причем $f(0)=0$, $f'(0)=1$. *Всюду ниже под $\log[z_1 f'(z_1)/f(z_1)]$ мы будем понимать то значение, которое в точке z_1 принимает ветвь $\log[zf'(z)/f(z)]$, стремящаяся к нулю при z, стремящемся к началу.*

Лемма 6.10. *Пусть $Q(z)\,dz^2$ — квадратичный дифференциал на z-сфере, имеющий двойной полюс в конечной точке b, отличной от начала, простые полюсы в начале и в бесконечности и регулярный во всех остальных точках. Пусть D — область, допустимая относительно $Q(z)\,dz^2$, содержащая начало, но не содержащая беско-*

нечно удаленной точки. Пусть f регулярна и однолистна в D, причем $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Тогда $bf(z)/f(b)$ является допустимой функцией, соответствующей D. Пусть F — соответствующая допустимая гомотопия. Тогда

$$\log[bf'(b)/f(b)] = \log|bf'(b)/f(b)| + id(F, b).$$

Теорема 6.19. *Пусть α вещественно, $0\leqslant\alpha<\pi$, и $0<r<1$. Тогда существует единственная функция $v_\alpha(z)$ семейства S, отображающая единичный круг E на область, допустимую относительно квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{e^{-2i\alpha}\,dw^2}{w[w-v_\alpha(r)]^2}.$$

Пусть $f\in S$. Тогда область возможных значений функции $\log(re^{i\theta}f'(re^{i\theta})/f(re^{i\theta}))$, где θ вещественно, задается неравенством

$$|\log(re^{i\theta}f'(re^{i\theta})/f(re^{i\theta}))| \leqslant \log\frac{1+r}{1-r}. \qquad (6.23)$$

Величина $\log[re^{i\theta}f'(re^{i\theta})/f(re^{i\theta})]$ принимает значение

$$-e^{2i\alpha}\log\frac{1+r}{1-r}$$

только для функции $e^{i\theta}v_\alpha(e^{-i\theta}z)$.

Результаты этой теоремы принадлежат Грунскому [72]. Доказательство их аналогично доказательству теоремы 6.18. Их можно также вывести из результатов теоремы 6.18. Теоремы 6.18 и 6.19 включают в себя, в частности, результаты теоремы 6.2 и следствий 6.1, 6.2, 6.3 и 6.4.

6.8. Лемма 6.11. *Пусть D — односвязная область на z-сфере, содержащая начало, но не содержащая бесконечно удаленной точки. Пусть f регулярна и однолистна в D, причем $f(0)=0$. Тогда любая ветвь $\log f'(z)$ может быть продолжена до функции, однозначной и регулярной в D.*

Определение 6.5. Пусть D — односвязная область на z-сфере, содержащая начало, но не содержащая бесконечно удаленной точки. Пусть z_1 — точка обла-

сти D, отличная от начала. Пусть f регулярна и однолистна в D, причем $f(0)=0$, $f'(0)=1$. *Всюду ниже мы под* $\log f'(z_1)$ *будем понимать то значение, которое в точке* z_1 *принимает ветвь* $\log f'(z)$, *стремящаяся к нулю при* z *стремящемся к началу, а под* $\arg f'(z)$ *— мнимую часть* $\log f'(z_1)$.

Лемма 6.12. *Пусть* $Q(z)dz^2$ *— квадратичный дифференциал на* z*-сфере, имеющий двойные полюсы в начале и в конечной точке* z_1, *отличной от начала, простой полюс в бесконечности и регулярный во всех остальных точках. Пусть* D *— область, допустимая относительно* $Q(z)dz^2$, *не содержащая бесконечно удаленной точки. Пусть функция* f *регулярна и однолистна в* D, *причем* $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Тогда $z_1 f(z)/f(z_1)$ является допустимой *функцией, соответствующей* D. *Пусть* F *— соответствующая допустимая гомотопия. Тогда*

$$\log f'(z_1) = \log|f'(z_1)| + i\,[d(F, z_1) - d(F, 0)].$$

Утверждение леммы 6.12 сразу следует из лемм 6.8 и 6.10.

Теорема 6.20. *Пусть* α *вещественно,* $0 \leqslant \alpha < \pi$, *и пусть* $0<r<1$. *Тогда существует функция* $\lambda(z)$ *из* S, *отображающая единичный круг* $E: |z|<1$ *на область, допустимую относительно квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\,dw^2 = e^{-2i\alpha}\frac{\lambda(r)\,[2w-\lambda(r)]}{w^2\,[w-\lambda(r)]^2}\,dw^2.$$

Для $0<r\leqslant 2^{-1/2}$ *такая функция* $l_\alpha(z)$ *единственна при каждом* α, $0\leqslant\alpha<\pi$. *Для* $2^{-1/2}<r<1$ *такая функция* $l_\alpha(z)$ *единственна при всяком* α, $0\leqslant\alpha<\pi/4$, $\pi/4<\alpha<3\pi/4$, $3\pi/4<\alpha<\pi$; *при* $\alpha=\pi/4$, $3\pi/4$ *существуют соответственно два однопараметрических семейства* $m_1(z,t)$, $m_2(z,t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, *таких функций, обладающих следующими свойствами:*

$$\lim_{\alpha\to\pi,\,4-} l_\alpha(z) = m_1(z,0),$$

$$\lim_{\alpha\to\pi,\,4+} l_\alpha(z) = m_1(z,1),$$

$$\lim_{\alpha\to 3\pi,\,4-} l_\alpha(z) = m_2(z,0),$$

$$\lim_{\alpha \to 3\pi/4+} l_\alpha(z) = m_2(z, 1),$$

$$\arg m_1'(r, t) \equiv -\left[\frac{3}{4}\pi + \log\frac{r^2}{1-r^2}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\arg m_2'(r, t) \equiv \pi + \log\frac{r^2}{1-r^2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Пусть $f \in S$. Тогда областью возможных значений функции $\log f'(re^{i\theta})$, где θ вещественно, является выпуклая область $L(r)$, определенная неравенствами

$$\operatorname{Re}\{e^{-2i\alpha}\log f'(re^{i\theta})\} \geqslant \operatorname{Re}\{e^{-2i\alpha}\log l_\alpha'(r)\} \qquad (6.24)$$

при $0 \leqslant \alpha < \pi$, $0 < r \leqslant 2^{-1/2}$, этими же неравенствами при $0 \leqslant \alpha < \pi/4$, $\pi/4 < \alpha < 3\pi/4$, $3\pi/4 < \alpha < \pi$ и дополнительными неравенствами

$$|\operatorname{Im}\log f'(re^{i\theta})| \leqslant \pi + \log\frac{r^2}{1-r^2} \qquad (6.25)$$

при $2^{-1/2} < r < 1$. Равенство в (6.24) и (6.25) может иметь место соответственно только для следующих функций:

$$e^{-i\theta}l_\alpha(e^{i\theta}z), \quad e^{-i\theta}m_1(e^{i\theta}z, t), \quad e^{-i\theta}m_2(e^{i\theta}z, t).$$

При $0 < \alpha < \pi$, если $0 < r < 2^{-1/2}$, и при $0 < \alpha < \pi/4$, если $2^{-1/2} \leqslant r < 1$, имеем

$$\log l_\alpha'(r) = 2i\log\frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma} + 2\log\frac{1-re^{-i\psi}}{1-r^2} +$$

$$+ e^{-i(\varphi+\psi)}\left\{\log\left[\frac{1-\rho}{1+\rho}\cdot\frac{\rho-|\sigma|^2}{\rho+|\sigma|^2}\right] + 2\arg\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right\} - \pi, \quad (6.26)$$

где все логарифмы и аргументы в правой части имеют главные значения, а φ, ψ, ρ — параметры, непрерывно зависящие от α и удовлетворяющие следующим условиям:

$$e^{-i\alpha} = e^{i\varphi}e^{i\psi}, \quad .$$

$$(1-r^2)^2 e^{2i(\varphi+\psi)} = -(r-\rho e^{i\varphi})(r-e^{i\varphi}/\rho)(r-e^{i\psi})^2.$$

В (6.26) σ равняется квадратному корню из выражения

$$(r-\rho e^{i\varphi})/(r-e^{i\varphi}/\rho)$$

с отрицательной мнимой частью.

Подобные формулы можно дать и для $\log m_1'(r, t)$, $\log m_2'(r, t)$, но они не требуются для определения области $L(r)$ в явном виде.

Результаты теоремы 6.20 в основном принадлежат Граду [182, гл. XV].

Сначала рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q_0(w)\,dw^2 = 4\,\frac{(w-1)}{w^2(w-2)^2}\,dw^2.$$

Отображение

$$w = 2r^{-1}(1+r)^2 z(1+z)^{-2}$$

переводит E в область D_0, допустимую относительно $Q_0(w)\,dw^2$. Отображение

$$\zeta = 2\int_1 \frac{(w-1)^{1/2}}{w(w-2)}\,dw,$$

где корень $(w-1)^{1/2}$ положителен на отрезке $1<w<2$, переводит верхнюю полуплоскость в область, граница которой описывается следующим образом. Когда w идет от 1 к 2, ζ идет от начала к бесконечно удаленной точке вдоль отрицательной части вещественной оси. Когда w идет от 2 к бесконечности вдоль положительной части вещественной оси, ζ идет из бесконечно удаленной точки к $\pi - \pi i$ вдоль прямой $\operatorname{Im}\zeta = -\pi$ в направлении возрастания $\operatorname{Re}\zeta$. Когда w идет от бесконечности к началу вдоль отрицательной части вещественной оси, ζ идет от $\pi - \pi i$ к бесконечно удаленной точке вдоль прямой $\operatorname{Re}\zeta = \pi$ в направлении возрастания $\operatorname{Im}\zeta$. Когда w идет из начала к 1, ζ идет из бесконечности к началу вдоль положительной части вещественной оси.

Рассмотрим теперь квадратичный дифференциал

$$Q_\alpha(w)\,dw^2 = 4\,\frac{e^{-2i\alpha}(w-1)\,dw^2}{w^2(w-2)^2}.$$

Траектория дифференциала $Q_\alpha(w)\,dw^2$, имеющая предельную концевую точку в бесконечности, или имеет предельную концевую точку в 1, или стремится к нулю или к двум в противоположном направлении (теорема 3.6). Поэтому

если первая из этих возможностей не реализуется, то мы можем разрезать w-сферу вдоль дуги, лежащей на замыкании этой траектории, и получить область D_α, являющуюся образом E при отображении $w = n_\alpha(z)$, где $n_\alpha(z)$ регулярна и однолистна при $|z| < 1$, $n_\alpha(0) = 0$, $n_\alpha(r) = 2$. Ясно, что эта траектория может иметь предельную концевую точку в 1 только тогда, когда α равно $\pi/4$ или $3\pi/4$. В этом случае при $0 < r \leqslant 2^{-1/2}$ мы все еще можем выполнить предыдущее построение и определить $n_\alpha(z)$, как выше. Если $r > 2^{-1/2}$, то при α, стремящемся к $\pi/4$ снизу, $n_\alpha(z)$ стремится к функции $q_1(z, 0)$, которая отображает E на w-сферу, разрезанную от бесконечно удаленной точки до 1 вдоль полубесконечного отрезка $\operatorname{Re} w = 1$, $\operatorname{Im} w < 0$, и вдоль дуги α_0 на замыкании траектории дифференциала $Q_{\pi/4}(w)\,dw^2$ с предельной концевой точкой в 1, на которой $\operatorname{Re} w > 1$. Кроме того, $q_1(0, 0) = 0$, $q_1(r, 0) = 2$. Аналогично

$$\lim_{\alpha \to \pi/4+} n_\alpha(z) = q_1(z, 1),$$

где отображение $w = q_1(z, 1)$ переводит E в w-сферу, разрезанную от бесконечно удаленной точки до 1 вдоль полубесконечного отрезка $\operatorname{Re} w = 1$, $\operatorname{Im} w < 0$, и вдоль дуги α_1 на замыкании траектории дифференциала $Q_{\pi/4}(w)\,dw^2$ с предельной концевой точкой в 1, на которой $\operatorname{Re} w < 1$. Кроме того, $q_1(0, 1) = 0$, $q_1(r, 1) = 2$. Легко видеть, что α_0 и α_1 меняются ролями при отражении в прямой $\operatorname{Re} w = 1$. Из этих функций мы получим непрерывное однопараметрическое семейство функций, если продолжим отображение $w = q_1(z, 0)$, перенося каждую точку из $q_1(E, 0) \setminus \{0, 2\}$ вдоль некоторой траектории дифференциала $Q_{\pi/4}(w)\,dw^2$ на данное расстояние в метрике $|Q_{\pi/4}(w)|^{1/2}|dw|$. Когда это расстояние достигает длины α_0 или α_1 в этой метрике, мы получаем функцию $q_1(z, 1)$. Обозначим эти функции через $q_1(z, t)$, где t можно считать линейно зависящим от рассматриваемого расстояния. Эти функции регулярны и однолистны в круге $|z| < 1$, причем $q_1(0, t) = 0$, $q_1(r, t) = 2$. Аналогичным образом мы получим непрерывное однопараметрическое семейство функций $q_2(z, t)$, соответствующее $\alpha = 3\pi/4$, так что

$$\lim_{\alpha \to 3\pi/4-} n_\alpha(z) = q_2(z, 0),$$

$$\lim_{\alpha \to 3\pi/4 \mp} n_\alpha(z) = q_2(z, 1).$$

При всех α и при $0 < r < 2^{-1/2}$ или при

$$\alpha \neq \pi/4, \quad \alpha \neq 3\pi/4 \text{ и } 2^{-1/2} \leqslant r < 1$$

квадратичный дифференциал

$$Q_\alpha(n_\alpha(z))\,(n'_\alpha(z))^2\,dz^2,$$

индуцированный в круге $|z| < 1$ дифференциалом $Q_\alpha(w)\,dw^2$, положителен, имеет двойные полюсы в 0 и в r, простой нуль в точке $\rho e^{i\varphi}$, лежащей в круге $|z| < 1$, и двойной граничный нуль в точке $e^{i\psi}$ на окружности $|z| = 1$ (лемма 3.3). Параметры ρ, φ, ψ изменяются непрерывно вместе с α при $0 \leqslant \alpha < \pi$, если $0 < r < 2^{-1/2}$, и при $0 \leqslant \alpha < \pi/4$, если $2^{-1/2} \leqslant r < 1$.

Всюду ниже будем считать, что рассматриваемые значения находятся в указанных промежутках. Построенный выше квадратичный дифференциал должен иметь вид

$$Ke^{i\beta}\,\frac{(z-\rho e^{i\varphi})\,(z-e^{i\varphi}/\rho)\,(z-e^{i\psi})^2}{z^2\,(z-r)^2\,(z-1/r)^2}\,dz^2,$$

где K положительно, а β вещественно. Ввиду того что он положителен на окружности $|z| = 1$, имеем

$$e^{i\beta}\,e^{i\varphi}\,e^{i\psi} = -1, \quad e^{i\beta} = -e^{-i(\varphi+\psi)}.$$

Так как

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} = \lim_{z\to 0}\frac{w}{z},$$

то

$$K = 1, \quad e^{-2i\alpha} = e^{i\varphi}\,e^{i\psi}.$$

Поскольку φ и ψ изменяются непрерывно вместе с α и так как $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ при $\alpha = 0$, то

$$-\alpha = \frac{\varphi+\psi}{2}.$$

Ввиду того что

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=r} = \lim_{z\to r}\frac{w-2}{z-r},$$

имеем

$$e^{2i(\varphi+\psi)} = -\frac{(r-\rho e^{i\varphi})(r-e^{i\varphi}/\rho)(r-e^{i\psi})^2}{(1-r^2)^2}. \qquad (6.27)$$

Кроме того,

$$2\int_1 \frac{(w-1)^{1/2}}{w(w-2)}\,dw =$$

$$= -ie^{-i(\varphi+\psi)}\int_{\rho e^{i\varphi}}^{} \left(\frac{z-\rho e^{i\varphi}}{z-e^{i\varphi}/\rho}\right)^{1/2} \frac{(z-e^{i\varphi}/\rho)(z-e^{i\psi})}{z(z-r)(z-1/r)}\,dz, \qquad (6.28)$$

где корень $(w-1)^{1/2}$ на отрезке $0<w<1$ выбирается равным $i\,|w-1|^{1/2}$, а корень $[(z-\rho e^{i\varphi})(z-e^{i\varphi}/\rho)^{-1}]^{1/2}$ на образе этого отрезка выбирается как непрерывное продолжение той ветви, которая при $\alpha=0$ положительна на отрезке $0<z<\rho$ [значением ρ при $\alpha=0$ является наименьший корень уравнения $\rho(1+\rho)^{-2}={}^1/_2 r(1+r)^{-2}$]. Положим теперь

$$t=[(z-\rho e^{i\varphi})(z-e^{i\varphi}/\rho)^{-1}]^{1/2},$$

где корень выбран так же, как выше, и обозначим через σ величину

$$[(r-\rho e^{i\varphi})(r-e^{i\varphi}/\rho)^{-1}]^{1/2},$$

где корень является непрерывным продолжением той ветви, которая при $\alpha=0$ имеет отрицательную мнимую часть (тогда она чисто мнимая). Легко видеть, что при условиях, наложенных на α, σ^2 не может быть положительным, и поэтому σ всегда имеет отрицательную мнимую часть. Обозначим через τ величину

$$[(r\rho^2 e^{i\varphi}-\rho)(re^{i\varphi}-\rho)^{-1}]^{1/2},$$

где корень является непрерывным продолжением той ветви, которая при $\alpha=0$ имеет отрицательную мнимую часть (тогда она чисто мнимая). В этих обозначениях правая часть равенства (6.28) принимает вид

$$\frac{2ie^{-i\psi}r(1-\rho^2)^2}{(e^{i\varphi}-\rho r)(re^{i\varphi}-\rho)}\int_0^{} \frac{t^2[(e^{i\varphi}-\rho e^{i\psi})t^2+(\rho e^{i\psi}-\rho^2 e^{i\varphi})]}{(t^2-1)(t^2-\rho^2)(t^2-\sigma^2)(t^2-\tau^2)}\,dt. \qquad (6.29)$$

С другой стороны, из равенства (6.27) следует, что

$$\sigma = ie^{i(\varphi+\psi)} \frac{\rho(1-r^2)}{(r-e^{i\psi})(e^{i\varphi}-\rho r)},$$

$$\tau = -i \frac{\rho(1-r^2)}{(re^{i\varphi}-\rho)(1-re^{i\psi})}.$$

Разлагая подинтегральное выражение в (6.29) на простейшие дроби, получаем

$$\int_0^r \left\{ \frac{2ie^{-i(\varphi+\psi)}}{t^2-1} - \frac{2i\rho}{t^2-\rho^2} + \frac{2\sigma}{t^2-\sigma^2} + e^{-i(\varphi+\psi)} \frac{2\tau}{t^2-\tau^2} \right\} dt.$$

Таким образом, из равенства (6.28), интегрируя, находим

$$\log \frac{1-(1-w)^{1/2}}{1+(1-w)^{1/2}} + i \log \frac{1-i(1-w)^{1/2}}{1+i(1-w)^{1/2}} =$$

$$= \log \frac{\rho-t}{\rho+t} - e^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{1-t}{1+t} + i \log \frac{\sigma-t}{\sigma+t} +$$

$$+ ie^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{\tau-t}{\tau+t}, \qquad (6.30)$$

где в левой части корень $(1-w)^{1/2}$ положителен при $0 < w < 1$, и логарифмы имеют главное значение, а в правой части t, σ, τ имеют тот же смысл, что и выше. Логарифмы в правой части получаются с помощью непрерывного продолжения из логарифмов, являющихся главными значениями при $\alpha = 0$ и при z из отрезка $0 < z < \rho$. Это можно сделать при всех α, $0 \leqslant \alpha < \pi$, если $0 < r < 2^{-1/2}$, и при всех α, $0 \leqslant \alpha < \pi/4$, если $2^{-1/2} \leqslant r < 1$.

Левая часть равенства (6.30) имеет вблизи $w = 0$ разложение

$$\log w + 2\left(\log \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ (\text{члены, содержащие степени } w^{-1}),$$

а вблизи $w = 2$ — разложение

$$i \log(2-w) + 2i\left(\log \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ [\text{члены, содержащие степени } (2-w)^{-1}].$$

Правая часть равенства (6.30) имеет вблизи $z = 0$ разложение

$$\log z + \log \frac{1-\rho^2}{4\rho e^{i\varphi}} - e^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{1-\rho}{1+\rho} + i \log \frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho} +$$

$$+ ie^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{\tau-\rho}{\tau+\rho} + (\text{члены, содержащие степени } z^{-1}),$$

а вблизи $z = r$ — разложение

$$i \log (r-z) + i \log \left[- \frac{\rho(1-\rho^2)\, e^{i\varphi}}{4(\rho^2 e^{i\varphi} - \rho r)(e^{i\varphi} - \rho r)} \right] +$$

$$+ \log \frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} - e^{i(\varphi+\psi)} \log \frac{1-\sigma}{1+\sigma} + ie^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{\tau-\sigma}{\tau+\sigma} +$$

$$+ [\text{члены, содержащие степени } (r-z)^{-1}].$$

Таким образом,

$$\log n_\alpha'(0) = \log \frac{1-\rho^2}{4\rho e^{i\varphi}} - e^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{1-\rho}{1+\rho} +$$

$$+ i \log \frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho} + ie^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{\tau-\rho}{\tau+\rho} - 2\left(\log \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\log n_\alpha'(r) = \log \left[- \frac{\rho(1-\rho^2)\, e^{i\varphi}}{4(\rho^2 e^{i\varphi} - \rho r)(e^{i\varphi} - \rho r)} \right] -$$

$$- i \log \frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} + ie^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{1-\sigma}{1+\sigma} + e^{-i(\varphi+\psi)} \log \frac{\tau-\rho}{\tau+\rho} -$$

$$- 2\left(\log \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Пусть теперь

$$l_\alpha(z) = n_\alpha(z)/n_\alpha'(0).$$

Очевидно, что $l_\alpha \in S$ и

$$\log l_\alpha'(r) = \log \left[- \frac{\rho(1-\rho^2)\, e^{i\varphi}}{4(\rho^2 e^{i\varphi} - \rho r)(e^{i\varphi} - \rho r)} \right] - \log \frac{1-\rho^2}{4\rho e^{i\varphi}} -$$

$$- i \log \frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} - i \log \frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho} + ie^{-i(\varphi-\psi)} \log \frac{1-\sigma}{1-\sigma} -$$

$$-ie^{-i(\varphi+\psi)}\log\frac{\tau-\rho}{\tau+\rho}+e^{-i(\varphi+\psi)}\log\frac{1-\rho}{1+\rho}+e^{-i(\varphi+\psi)}\log\frac{\tau-\sigma}{\tau+\sigma}=$$

$$=-i\log\frac{\sigma-\rho}{\sigma+\rho}-i\log\frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma}+2\log\frac{1-re^{-i\psi}}{1-r^2}+$$

$$+ie^{-i(\varphi+\psi)}\left(\log\frac{1-\sigma}{1+\sigma}-\log\frac{\tau-\rho}{\tau+\rho}\right)+$$

$$+e^{-i(\varphi+\psi)}\left(\log\frac{1-\rho}{1+\rho}+\log\frac{\tau-\sigma}{\tau+\sigma}\right).$$

Легко видеть, что это выражение совпадает с тем, которое было получено Градом (в других обозначениях):

$$\log l_\sigma'(r)=2i\log\frac{\rho+\sigma}{\rho-\sigma}+2\log\frac{1-re^{-i\psi}}{1-r^2}+$$

$$+e^{-i(\varphi+\psi)}\left\{\log\left[\frac{1-\rho}{1+\rho}\,\frac{\rho-|\sigma|^2}{\rho+|\sigma|^2}\right]+2\arg\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right\}-\pi,$$

где каждый логарифм и аргумент в правой части имеет главное значение.

Аналогично (при $2^{-1/2}<r<1$) положим

$$m_1(z,t)=q_1(z,t)/q_1'(0,t),$$

$$m_2(z,t)=q_2(z,t)/q_2'(0,t).$$

Из этого определения сразу следует, что $\arg m_1'(r,\ t)$ сохраняет постоянное значение при всех t; так же ведет себя $\arg m_2'(r,t)$. Очевидно, что

$$\arg m_1'(r,t)=\lim_{\alpha\to\pi,\,4-}\arg l_\alpha'(r).$$

Поэтому для нахождения значения $\arg m_1'(r,t)$ мы вычислим этот предел.

Если бы при $0<\alpha<\pi/4$ было $\psi=\pm\pi$, то в силу (6.27) мы получили бы

$$r^2e^{-2i\varphi}-(\rho+\rho^{-1})re^{-i\varphi}+2-2r+r^2=0,$$

откуда следует, что $\sin\varphi=0$ и поэтому $e^{-i\varphi}=1$. Так как $-\alpha=\frac{1}{2}(\varphi+\psi)$, то это невозможно. Учитывая форму

области $q_1(E, 0)$, мы заключаем, что при стремлении α к $\pi/4$ снизу φ и ψ стремятся к пределам φ^* и ψ^*, причем $\psi^* > \varphi^*$. Таким образом, можно записать

$$\psi^* = -\frac{\pi}{4} + \delta, \quad \varphi^* = -\frac{\pi}{4} - \delta,$$

где δ положительно. В то же время ρ стремится к 1. Подставляя эти значения в равенство (6.27) (которое сохраняется и в пределе), найдем, что

$$\delta = \arccos\left(\frac{1}{2^{1/2}r}\right),$$

где выбрана та ветвь arc cos, для которой $0 < \delta < \pi/4$. Определим теперь асимптотическое поведение σ, чтобы воспользоваться формулой (6.26). Положим $\rho = 1 - s$, где s положительно и стремится к нулю при α, стремящемся к $\pi/4$. Сразу находим, что

$$\sigma^2 = 1 - \frac{2s}{1 - re^{-i\varphi}} + O(s^2).$$

Поскольку σ — корень с отрицательной мнимой частью, имеем

$$\sigma = 1 - \frac{s}{1 - re^{-i\varphi}} + O(s^2).$$

Из построения функции $n_\alpha(z)$ вытекает, кроме того, что

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + O(s^{3/2}),$$

и, следовательно,

$$e^{-i(\varphi+\psi)} = i + O(s^{3/2}).$$

Подставляя эти выражения в формулу (6.26) и устремляя s к нулю, получаем

$$\lim_{\alpha \to \pi/4-} \arg l'_\alpha(r) = -\pi - \log \frac{r^2}{1 - r^2},$$

так что

$$\arg m'_1(r, 0) = -\pi - \log \frac{r^2}{1 - r^2}.$$

Пусть теперь $f \in S$. Пусть $\Phi_\alpha(w)$ — функция, обратная к $n_\alpha(z)$, заданная в $n_\alpha(E)$. Применим общую теорему о

о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, квадратичный дифференциал $Q_\alpha(w)\,dw^2$, область $n_\lambda(E)$, допустимую относительно этого дифференциала, функцию

$$g(w) = 2f(\Phi_\alpha(w))/f(r),$$

соответствующую этой области.

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет два двойных полюса: P_1 в точке $w=0$ и P_2 в точке $w=2$. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = -e^{-2i\alpha}, \qquad a^{(1)} = f(r)\,n'_\alpha(0)/2,$$

$$\alpha^{(2)} = e^{-2i\alpha}, \qquad a^{(2)} = f(r)\,n'_\alpha(r)/2f'(r).$$

Тогда из неравенства (4.7) получаем

$$\operatorname{Re}\{-e^{-2i\alpha}\log(f(r)\,n'_\alpha(0)/2) + e^{-2i\alpha}\log(f(r)\,n'_\alpha(r)/2f'(r))\} \leqslant 0,$$

или

$$\operatorname{Re}\{e^{-2i\alpha}\log f'(r)\} \geqslant \operatorname{Re}\{e^{-2i\alpha}\log l'_\alpha(r)\}.$$

Это справедливо при всех α, $0 \leqslant \alpha < \pi$, если $0 < r \leqslant 2^{-1/2}$, и при α, отличных от $\pi/4$ и $3\pi/4$, если $2^{-1/2} < r < 1$. В исключенных случаях мы аналогично получаем неравенства

$$\operatorname{Re}\{-i\log f'(r)\} \geqslant \operatorname{Re}\{-i\log m'_1(r,t)\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\operatorname{Re}\{i\log f'(r)\} \geqslant \operatorname{Re}\{i\log m_2(r,t)\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

которые равносильны (6.25).

При всех значениях r, $0 < r < 1$, эти неравенства определяют выпуклую область $L(r)$, причем $\log f'(r)$ действительно принимает каждое граничное значение для некоторой функции $f \in S$. Таким образом, в силу рассуждения Грёча $L(r)$ — точная область возможных значений $\log f'(r)$. Если $0 < r < 2^{-1/2}$, то равенства (6.26) определяют эту область явно. Проверка того, что область $L(r)$ во всех случаях симметрична относительно вещественной оси и ординаты, проходящей через $\log 1/(1-r)^2$, проводится элементарно [182, гл. XV]. Таким образом, даже при $2^{-1/2} \leqslant r < 1$ равенства (6.26) вместе с неравенствами (6.25) определяют эту область явно.

Теперь заметим, что если $f \in S$, то при любом вещественном θ классу S принадлежит и функция

$$f_*(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z),$$

причем

$$f'_*(r) = f'(re^{i\theta}).$$

Таким образом, во всех случаях областью возможных значений $\log f'(re^{i\theta})$, где θ вещественно, является $L(r)$. Утверждения теоремы 6.20 относительно равенства выводятся обычным образом из теоремы 4.1.

Следствие 6.15. *Если $f \in S$, а θ вещественно, то*

$$|\arg f'(re^{i\theta})| \leqslant 4 \arcsin r, \qquad 0 < r \leqslant 2^{-1/2},$$

$$|\arg f'(re^{i\theta})| \leqslant \pi + \log \frac{r^2}{1-r^2}, \qquad 2^{-1/2} < r < 1.$$

В первом случае равенство возможно только для функций $l_{\pi/4}(z)$ и $l_{3\pi/4}(z)$, во втором случае только для функций $m_1(z, t)$, $m_2(z,t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Эта точная форма теоремы вращения приведена Голузиным [35] без полного анализа случаев равенства.

При $0 < r \leqslant 2^{-1/2}$ оценка легче всего следует из явного выражения для функций $l_{\pi/4}(z)$, $l_{3\pi/4}(z)$, которое можно найти элементарным способом. Оценка при $2^{-1/2} < r < 1$ следует из неравенства (6.25). Утверждения относительно равенства получаются так же, как в теореме 6.20.

Только что изложенный метод легко изменить так, чтобы получить область возможных значений для величины

$$\lambda \log f'(re^{i\theta}) - (1-\lambda) \log [f(re^{i\theta})/re^{i\theta}]$$

для любого вещественного числа λ, $0<r<1$, вещественного θ и $f \in S$. Определения логарифмов здесь те же, что были даны в определениях 6.3 и 6.5. Частичные результаты в этой задаче были получены Лебедевым [123]. Кроме того, без существенного усложнения можно решить задачи, аналогичные задачам из п. 6.7 и 6.8, для класса нормированных ограниченных регулярных однолистных функций в единичном круге.

6.9. Теперь мы изложим теоремы Тейхмюллера о коэффициентах, которые до сих пор остаются наиболее глубокими общими результатами в проблемах коэффициентов для функций семейств S и Σ [163].

Теорема 6.21. *Пусть квадратичный дифференциал $Q(w)dw^2$ регулярен всюду на w-сфере, за исключением полюса порядка $n+4$ в бесконечно удаленной точке $(n \geqslant -1)$, в окрестности которой справедливо разложение*

$$Q(w)\,dw^2 = [\alpha w^n + (\text{убывающие степени } w)]dw^2.$$

Пусть D — область, допустимая относительно квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$, являющаяся образом области $|z| > 1$ при отображении $w = f^*(z)$, где $f^* \in \Sigma$ и имеет в бесконечности разложение

$$f^*(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_k}{z^k} + \ldots.$$

Пусть $f \in \Sigma$ и имеет в бесконечности разложение

$$f(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_k}{z^k} + \ldots,$$

где

$$c_j = a_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\{\alpha c_{n+1}\} \leqslant \operatorname{Re}\{\alpha a_{n+1}\},$$

причем равенство возможно только при $f(z) \equiv f^*(z)$.

Пусть $\Phi(w)$ — функция, обратная к $f^*(z)$, заданная в D. Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, дифференциал $Q(w)dw^2$ и допустимую область D. Функция $f(\Phi(w))$ имеет в бесконечности разложение

$$w + \frac{c_{n+1} - a_{n+1}}{w^{n+1}} + (\text{более высокие степени } w^{-1}).$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет условиям определения 4.4 и является, следовательно, допустимой функцией, соответствующей области D. Квадратичный дифференциал имеет единственный полюс P_1 порядка $n+4$ в бесконечно удаленной точке. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = \alpha, \quad a_{n+1}^{(1)} = c_{n+1} - a_{n+1}.$$

Из неравенства (4.7) получаем

$$\operatorname{Re}\{\alpha(c_{n+1}-a_{n+1})\}\leqslant 0,$$

или

$$\operatorname{Re}\{\alpha c_{n+1}\}\leqslant \operatorname{Re}\{\alpha a_{n+1}\}.$$

Утверждение относительно равенства следует из условия (1) равенства в теореме 4.1.

Теорема 6.22. *Пусть квадратичный дифференциал $Q(w)\,bw^2$ регулярен всюду на w-сфере, кроме полюса порядка $n+1$ в начале $(n\geqslant 2)$, в окрестности которого справедливо разложение*

$$Q(w)\,dw^2=\left[\frac{a}{w^{n+1}}+\text{(более высокие степени } w^{-1})\right]dw^2,$$

и, может быть, простого полюса в бесконечно удаленной точке. Пусть D — область, допустимая относительно дифференциала $Q(w)\,dw^2$, не содержащая бесконечно удаленной точки и являющаяся образом круга $|z|<1$ при отображении $w=f^*(z)$, где $f^*\in S$ и имеет в окрестности начала разложение

$$f^*(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_kz^k+\ldots.$$

Пусть $f\in S$ и имеет в окрестности начала разложение

$$f(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_kz^k+\ldots,$$

где

$$c_j=a_j,\quad j=2,\ldots,\ n-1.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\{\alpha c_n\}\geqslant \operatorname{Re}\{\alpha a_n\},$$

и равенство возможно лишь тогда, когда $f(z)\equiv f^*(z)$

Пусть $\Phi(w)$ — функция, обратная к $f^*(z)$, заданная в D. Применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, дифференциал $Q(w)\,dw^2$, допустимую область D. Функция $f(\Phi(w))$ имеет в начале разложение

$$w+(c_n-a_n)w^n+\text{(более высокие степени } w).$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет условиям определения 4.4 и, следовательно, является допу-

стимой функцией, соответствующей области D. Квадратичный дифференциал имеет единственный полюс P_1 порядка $n+1$ в начале. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = \alpha, \quad a_{n-2}^{(1)} = a_n - c_n.$$

Тогда неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\{\alpha(a_n - c_n)\} \leqslant 0,$$

или

$$\operatorname{Re}\{\alpha a_n\} \leqslant \operatorname{Re}\{\alpha c_n\}.$$

Утверждение относительно равенства следует из условия (1) равенства в теореме 4.1.

Сделанная в следствии 6.10 оценка коэффициента при z^2 для некоторой функции из S может быть легко выведена из теоремы 6.22. С помощью теоремы Тейхмюллера не было получено других оценок для коэффициентов функций класса S, кроме только что приведенной. Однако при соответствующем усовершенствовании результат Тейхмюллера дает очень мощные средства для решения этой проблемы.

Глава VII

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЫ О КОЭФФИЦИЕНТАХ. СЕМЕЙСТВА ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. Общую теорему о коэффициентах в приведенной здесь формулировке естественно применить к семействам однолистных функций. Одно такое применение общего характера состоит в следующем.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная ориентированная риманова поверхность, $Q(w)\,dw^2$ — положительный квадратичный дифференциал, заданный на $\mathfrak{R}$. Пусть дифференциал $Q(w)\,dw^2$ регулярен всюду, за исключением двойных полюсов $P_1, P_2, \ldots, P_r$, $r \geqslant 1$, и простых полюсов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ (последнее множество может быть пустым). Пусть $\mathfrak{R}$ является внутренним замыканием круговых областей $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$, соответствующих полюсам $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Пусть с точками $P_1, P_2, \ldots, P_r$ связаны фиксированные локальные параметры так, что в окрестности P_j справедливо разложение*

$$Q(w)\,dw^2 = \left(\frac{\alpha^{(j)}}{w^2} + \ldots\right) dw^2.$$

Пусть $F_j(z)$, $j = 1, \ldots, r$ — такие функции, что F_j конформно отображает единичный круг $E : |z| < 1$ на $\mathfrak{C}_j$, и $F_j(0) = P_j$. Пусть $f_j(z)$, $j = 1, \ldots, r$ — такие функции, что

(a) *f_j конформно отображает E в $\mathfrak{R}$,*

(b) $f_j(0) = P_j$,

(c) $f_j(E) \cap f_k(E) = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 1, \ldots, r,$

(d) $Q_k \notin f_j(E), \quad k = 1, \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, r.$

Тогда

$$\prod_{j=1}^{r} |f_j'(0)|^{-\alpha^{(j)}} \leqslant \prod_{j=1}^{r} |F_j'(0)|^{-\alpha^{(j)}}. \tag{7.1}$$

Здесь производные вычисляются с помощью соответствующих локальных параметров. Равенство в (7.1) *возможно только тогда, когда* $f_j(z) \equiv F_j(e^{i\beta_j}z)$, $j = 1, \ldots, r$, *где* β_j — *вещественные числа.*

Применим общую теорему о коэффициентах к данной поверхности $\mathfrak{R}$ и к данному дифференциалу $Q(w)\,dw^2$, взяв $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_r$ в качестве семейства областей, допустимых относительно этого дифференциала. Пусть $\Phi_j(w)$ — функция, обратная к $F_j(z)$, заданная на $\mathfrak{C}_j$, $j = 1, \ldots, r$. Ясно, что функции $f_j(\Phi_j(w))$, $j = 1, \ldots, r$, удовлетворяют условиям определения 4.4, так как области $\mathfrak{C}_j$ односвязны и выполнены условия (a), (b), (c), (d). Поэтому эти функции образуют допустимое семейство, соответствующее рассматриваемому допустимому семейству областей. По теореме 3.4, все коэффициенты $\alpha^{(j)}$ для квадратичного дифференциала $Q(w)\,dw^2$ вещественны и отрицательны. Квадратичный дифференциал имеет двойные полюсы $P_1, P_2, \ldots, P_r$, причем соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(j)} = \alpha^{(j)}, \quad \alpha^{(j)} = F_j'(0)/f_j'(0), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Неравенство (4.7) дает

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{r} \alpha^{(j)} \log\left[F_j'(0)/f_j'(0)\right]\right\} \leqslant 0. \tag{7.2}$$

Отсюда сразу следует неравенство (7.1). Утверждение относительно равенства легко вывести из того, что в неравенстве (7.2) равенство возможно лишь тогда, когда каждая траектория дифференциала $Q(w)\,dw^2$, лежащая в $\mathfrak{C}_j$, отображается функцией $f_j[\Phi_j(w)]$ в другую такую траекторию.

Существование квадратичного дифференциала $Q(w)\,dw^2$ и функций F_j, соответствующих заданным точкам P_j, $j = 1, \ldots, r$, и Q_k, $k = 1, \ldots, s$, и отрицательным вещественным числам $\alpha^{(j)}$, $j = 1, \ldots, r$, можно установить с помощью одного общего принципа [100].

Теорему 7.1 можно распространить и на те случаи, когда траектории образуют кольцевые области. В этих случаях в допустимое семейство нужно включить функции, отображающие такие области в $\mathfrak{R}$, и наложить гомотопические условия на отображения, осуществляемые

этими функциями. По поводу таких результатов в некоторых конкретных случаях см. [170].

В литературе можно найти много частных случаев теоремы 7.1 [47], [121], [137], [176], [177]. В частности, справедливо такое утверждение [133].

Следствие 7.1. *Пусть функции $g(z)$ и $h(z)$ мероморфны и однолистны в единичном круге $E: |z|<1$, причем $g(E)\bigcap h(E)=0$. Пусть $|z_1|, |z_2|<1$ и пусть $g(z_1)$, $h(z_2)$ конечны. Тогда*

$$|g'(z_1)h'(z_2)| \leqslant \frac{|g(z_1)-h(z_2)|^2}{(1-|z_1|)^2(1-|z_2|)^2}.$$

Равенство возможно только для функций

$$\frac{1}{2}[g(z_1)-h(z_2)]\left[\left(1+e^{i\theta}\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1z}\right)\Big/\left(1-e^{i\theta}\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1z}\right)\right]+\frac{1}{2}[g(z_1)+h(z_2)],$$

$$\frac{1}{2}[h(z_2)-g(z_1)]\left[\left(1+e^{i\varphi}\frac{z-z_2}{1-\bar{z}_2z}\right)\Big/\left(1-e^{i\varphi}\frac{z-z_2}{1-\bar{z}_2z}\right)\right]+\frac{1}{2}[g(z_1)+h(z_2)],$$

где θ и φ вещественны.

Этот результат следует из теоремы 7.1, если в качестве $\mathfrak{R}$ взять w-сферу и положить

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{[h(z_2)-g(z_1)]^2dw^2}{[w-g(z_1)]^2[w-h(z_2)]^2},$$

$$f_1(z)=g\left(\frac{z+z_1}{1+\bar{z}_1z}\right),$$

$$f_2(z)=h\left(\frac{z+z_2}{1+\bar{z}_2z}\right),$$

$$F_1(z)=\frac{1}{2}[g(z_1)-h(z_2)]\frac{1+z}{1-z}+\frac{1}{2}[g(z_1)+h(z_2)],$$

$$F_2(z)=\frac{1}{2}[h(z_2)-g(z_1)]\frac{1+z}{1-z}+\frac{1}{2}[g(z_1)+h(z_2)].$$

Для регулярных функций справедлив более общий результат, принадлежащий Колбиной [114, 115].

Следствие 7.2. *Пусть* a_1, a_2 — *заданные различные конечные точки,* α, β — *заданные различные положительные числа,* $f_1(z)$, $f_2(z)$ — *функции, регулярные и однолистные в единичном круге* $E: |z| < 1$, *причем*

$$f_j(0) = a_j, \quad j = 1, 2,$$
$$f_1(E) \bigcap f_2(E) = 0.$$

Тогда

$$|f_1'(0)|^{\alpha} |f_2'(0)|^{\beta} \leqslant \frac{4^{\alpha+\beta}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{|\alpha-\beta|^{\alpha+\beta}} \left| \frac{\alpha^{1/2}-\beta^{1/2}}{\alpha^{1/2}+\beta^{1/2}} \right|^{2\alpha^{1/2}\beta^{1/2}} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta}. \tag{7.3}$$

Здесь этот результат получается при помощи теоремы 7.1 для w-сферы в качестве $\mathfrak{R}$ и квадратичного дифференциала

$$\pm \frac{(a_2-a_1)\left[w-a_1-\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}(a_2-a_1)\right]}{(w-a_1)^2(w-a_2)^2} dw^2,$$

где берется знак $+$, если $\alpha > \beta$, и $-$, если $\alpha < \beta$. Для получения явной оценки (7.3) нужно непосредственно найти значения $|F_1'(0)|$, $|F_2'(0)|$, фигурирующие в теореме 7.1 [88]. Можно, кроме того, найти все те функции, для которых в неравенстве (7.3) может иметь место равенство. Легко распространить этот результат на производные, вычисленные в точке, отличной от начала. Аналогичное неравенство было найдено Колбиной для совокупности трех функций, мероморфных и однолистных в единичном круге. Этот результат может быть получен аналогичным образом [88]. Таким же способом можно получить один результат Куфарева и Фалеса [120].

7.2. Аналогично следствию 7.1 мы сразу получаем

Следствие 7.3. *Пусть* $f(z)$ *регулярна и однолистна в круге* $E: |z| < 1$, *причем* $f(0) = 0$, $f'(0) = a$. *Пусть* $g(z)$ *мероморфна и однолистна в* $\bar{E}: |z| > 1$, *причем в окрестности бесконечности справедливо разложение*

$$g(z) = bz + b_0 + (\text{члены, содержащие степени } z^{-1}).$$

Пусть $f(E) \bigcap g(\widetilde{E}) = 0$. *Тогда*

$$[a/b] \leqslant 1,$$

причем равенство возможно только для функций

$$f(z) = \mu e^{i\theta} z, \quad g(z) = \mu^{-1} e^{i\varphi} z,$$

где μ *положительно, а* θ *и* φ *вещественны.*

Этот результат справедлив и без предположения об однолистности, что вытекает из принципа подчинения. Это сразу наводит на мысль о введении следующего класса функций Бибербаха—Эйленберга [21, 190, 150].

Определение 7.1. *Классом* C *мы назовем совокупность функций* $f(z)$, *регулярных в круге* $|z| < 1$ *и таких, что* $f(0) = 0$, $f(z_1) f(z_2) \neq 1$, $|z_1|, |z_2| < 1$.

Следствие 7.4. *Пусть* $f \in C$, *тогда*

$$|f'(0)| \leqslant 1,$$

причем равенство возможно только для функций

$$f(z) = e^{i\theta} z,$$

где θ *вещественно.*

Для однолистных f это вытекает из следствия 7.3, примененного к функциям $f(z)$, $[f(z^{-1})]^{-1}$, заданным соответственно в областях $|z| < 1$ и $|z| > 1$. Для произвольных f это вытекает из принципа подчинения [1]).

С помощью метода экстремальной метрики можно получить много таких результатов о функциях Бибербаха—Эйленберга [89, 94], особенно при дополнительном условии однолистности, но, вообще говоря, для этого скорее необходимо использовать метод симметризации, чем общую теорему о коэффициентах. Класс функций, более простой в этом отношении и тесно связанный с C, был недавно введен Шахом [178].

---

[1]) См., например, Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1952, стр. 406. — *Прим. перев.*

Определение 7.2. *Классом K мы назовем совокупность функций, регулярных в круге $|z|<1$ и таких, что* $f(0)=0$, $f(z_1)\overline{f(z_2)}\neq -1$, $|z_1|$, $|z_2|<1$.

Следствие 7.5. *Пусть $f\in K$. Тогда*

$$|f'(0)|\leqslant 1,$$

причем равенство возможно только для функций

$$f(z)=e^{i\theta}z,$$

где θ вещественно.

Для однолистных f это вытекает из следствия 7.3, примененного к функциям $f(z)$, $-(\overline{f(-\bar{z}^{-1})})^{-1}$, заданным соответственно в областях $|z|<1$, $|z|>1$. Для произвольных f это следует из принципа подчинения.

Из общей теоремы о коэффициентах следует много других более глубоких и сложных теорем о функциях класса K. Но здесь мы ограничимся тем, что дадим довольно простое приложение метода экстремальной метрики, которое не связано непосредственно с общей теоремой о коэффициентах.

Теорема 7.2. *Пусть $f\in K$, $0<r<1$, θ вещественно. Тогда*

$$|f(re^{i\theta})|\leqslant r(1-r^2)^{-1/2},$$

причем равенство возможно только для функций

$$f(z)=e^{i\varphi}\frac{z(1-r^2)^{1/2}}{1-rze^{-i\theta}},$$

где φ вещественно.

Рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q(w)\,dw^2=-\frac{dw^2}{w(w-s)(w+s^{-1})},$$

где s положительно. Его траектория, проходящая через точки $\pm i$, представляет собою окружность с центром s и радиусом $(s^2+1)^{1/2}$. Функция

$$f_r(z)=\frac{z(1-r^2)^{1/2}}{1-rz}$$

принадлежит K и при $r=s(s^2+1)^{1/2}$, $s=r(1-r^2)^{-1/2}$ кон-

формно отображает круг $|z|<1$ на внутренность указанной окружности, причем

$$f_r(r) = r(1-r^2)^{-1/2}.$$

Обозначим через D единичный круг $|z|<1$, разрезанный вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего 0 и r; модуль области D относительно класса кривых, разделяющих ее граничные компоненты, обозначим через m. Пусть Γ — гомотопический класс спрямляемых жордановых кривых, лежащих на w-сфере и отделяющих 0 и s от $-s^{-1}$ и ∞, содержащий такие кривые, симметричные относительно вещественной w-оси. Ясно, что модуль Γ равен $2m$, а метрика $k|Q(w)|^{1/2}|dw|$ при подходящем положительном k является экстремальной.

Пусть теперь f однолистна и $f \in K$, причем $|f(re^{i\theta})| \geqslant r(1-r^2)^{-1/2}$. Тогда при некотором действительном α области $e^{i\alpha}f(e^{i\theta}D)$ и $-e^{i\alpha}(\overline{f}(e^{i\theta}D))^{-1}$ не налегают друг на друга, и метрика $k|Q(w)|^{1/2}|dw|$ допустима для каждой из них относительно проблемы модуля для класса кривых, разделяющих граничные компоненты. Поскольку каждая из этих областей имеет модуль m, из леммы 2.2 следует, что это возможно только тогда, когда

$$e^{i\alpha}f(e^{i\theta}z) \equiv f_r(z).$$

Но тогда

$$|f(re^{i\theta})| = r(1-r^2)^{-1/2}.$$

Отсюда мы получаем все утверждения теоремы 7.2 для однолистных функций. Для произвольных функций из K эти утверждения следуют из принципа подчинения.

7.3. Выбор конкретных римановых поверхностей и квадратичных дифференциалов в общей теореме о коэффициентах порождает целый класс новых задач об однолистных функциях. Некоторые из этих задач интуитивно естественны и допускают решение в явном виде. Мы приведем здесь решение одной такой задачи.

Теорема 7.3. *Обозначим через* $Q_\mu(w)dw^2$ *квадратичный дифференциал*

$$\frac{(w-\mu)\,dw^2}{w^2},$$

где $\mu > 0$. *Пусть* T_μ — *траектория дифференциала* $Q_\mu(w)\,dw^2$, *выходящая из точки* $w = \mu$ *и возвращающаяся в нее. Тогда при* $\mu \leqslant 16/\pi^2$ *существует такая функция* $f_\mu \in \Sigma$, *что отображение* $w = f_\mu(z)$ *переводит область* $|z| > 1$ *в область, ограниченную траекторией* T_μ *и, может быть, разрезом вдоль вещественной оси, идущим вправо от* μ. *При* $\mu > 16/\pi^2$ *существует такая функция* $f_\mu \in \Sigma$, *что отображение* $w = f_\mu(z)$ *переводит область* $|z| > 1$ *в область, ограниченную замкнутой траекторией дифференциала* $Q_\mu(w)\,dw^2$, *отделяющей* T_μ *от начала. Пусть* $f \in \Sigma$ *и отображение* $|z| > 1$ *на область, дополнение которой содержит область, имеющую внутренний конформный радиус относительно начала, не меньший чем* r, $0 < r < 1$. *Пусть* $f(z)$ *имеет в окрестности бесконечности разложение*

$$z + a_0 + (\text{члены, содержащие степени } z^{-1}).$$

Тогда область возможных значений a_0 *задается неравенством*

$$|a_0| \leqslant P_r,$$

где

$$P_r = 2 - \frac{1}{4}e^2 r \tag{7.4}$$

при

$$r \leqslant \frac{64}{\pi^2 e^2}$$

и

$$P_r = 4k^{-2} - 2 - \mu, \tag{7.5}$$

где

$$\mu = \frac{16}{\pi^2 k^2} E^2(k),$$

$$r = 4\mu \exp\{-2 - \pi K'(k)/K(k) + \pi^2/2K(k)\,E(k)\},$$

при $r > \frac{64}{\pi^2 e^2}$. *Коэфициент* a_0 *принимает значение* $P_r e^{i\theta}$ *только для функции* $e^{i\theta} f_\mu(e^{-i\theta} z)$, *где в первом случае*

$\mu = \frac{1}{4} e^2 r$, *а во втором случае* μ *и* r *связаны описанным выше образом,* θ *вещественно.*

В плоскости w, разрезанной вдоль положительной части вещественной оси, рассмотрим отображение

$$\omega = \int_{\mu} w^{-1} (w - \mu)^{1/2} \, dw,$$

где выбрана та ветвь корня, которая положительна на верхнем берегу разреза справа от μ. Это отображение переводит разрезанную описанным образом плоскость w в область, ограниченную следующими полубесконечными интервалами: $\operatorname{Im} \omega = 0$, $\operatorname{Re} \omega > 0$; $\operatorname{Re} \omega = 0$, $\operatorname{Im} \omega < 0$; $\operatorname{Re} \omega = -2\pi\mu^{1/2}$, $\operatorname{Im} \omega < 0$; $\operatorname{Im} \omega = 0$, $\operatorname{Re} \omega < -2\pi\mu^{1/2}$, где $\mu^{1/2}$ — положительный корень. Явная формула для этого отображения такова:

$$\omega = 2(w - \mu)^{1/2} - i\mu^{1/2} \log \frac{\mu^{1/2} - i(w - \mu)^{1/2}}{\mu^{1/2} + i(w - \mu)^{1/2}},$$

где ветви корней выбраны так же, как выше, и на верхнем берегу разреза берется главное значение логарифма.

Теперь рассмотрим отображение

$$\zeta = \int_{1} z^{-3/2} (z - 1) \, dz \tag{7.6}$$

в области $|z| > 1$, разрезанной вдоль положительной части вещественной оси, где корень выбирается положительным при z, лежащем на верхнем берегу разреза. Это отображение в явном виде задается формулой

$$\zeta = 2z^{1/2} + 2z^{-1/2} - 4,$$

где корни определяются так же, как выше. Точка $z = 1$ имеет образы $\zeta = 0$ и $\zeta = -8$. Если

$$2\pi\mu^{1/2} \leqslant 8,$$

то, полагая

$$\omega + \pi\mu^{1/2} = \zeta + 4,$$

мы видим, что отображение $|z|>1$ в плоскость w, составленное из только что построенных, и является отображением f_μ, требуемым в теореме 7.3. Его разложение в окрестности бесконечности имеет вид

$$f_\mu(z) = z + (2-\mu) + (\text{члены, содержащие степени } z^{-1}).$$

Для отображения ω в окрестности начала справедливо разложение

$$\omega = i\mu^{1/2}\log w - i\mu^{1/2}\log 4\mu + 2i\mu^{1/2} + \\ + (\text{члены, содержащие степени } w). \qquad (7.7)$$

Таким образом, круг $|z|<1$ конформно отображается на область, ограниченную T_μ и содержащую начало, так что при отображении, которое определяется равенством

$$i\mu^{1/2}\log z = \omega,$$

точка $z=0$ переходит в $w=0$. Обозначим полученную таким образом функцию через $g_\mu(z)$. Тогда логарифм внутреннего конформного радиуса r указанной области относительно начала равен

$$\log 4\mu - 2,$$

т. е.

$$r = 4\mu e^{-2}.$$

При $\mu > 16/\pi^2$ вместо (7.6) мы используем отображение

$$\zeta = \int_1^z z^{-3/2}[1 + (\lambda + \lambda^{-1})z + z^2]^{1/2}\,dz,$$

заданное в области $|z|>1$, разрезанной вдоль положительной части вещественной оси; здесь $\lambda > 1$, а корни положительны на верхнем берегу разреза справа от λ. Вводя обозначения $Z = z^{1/2}$, $W = \dfrac{1}{2}(Z + Z^{-1})$, получаем

$$\zeta = \frac{4}{k}\int_1 \left(\frac{1-k^2W^2}{1-W^2}\right)^{1/2} dW,$$

где отображение определено при $\operatorname{Im} W \geqslant 0$, корень положителен при вещественных W, больших чем k^{-1}, а

$$k = \frac{2\lambda^{1/2}}{1+\lambda}.$$

Тогда при

$$\pi\mu^{1/2} = \frac{4}{k} E(k)$$

отображение области $|z| > 1$ в плоскость ω, определенное равенством

$$\omega + \pi\mu^{1/2} = \zeta + \frac{4}{k} E(k),$$

представляет собой отображение f_μ, указанное в теореме 7.3. Его разложение в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$f_\mu(z) = z + (4k^{-2} - 2 - \mu) + (\text{члены, содержащие степени } z^{-1}).$$

Разложение отображения ω в окрестности начала по-прежнему имеет вид (7.7). Таким образом, единичный круг $|z| < 1$ конформно отображается на область, дополнительную к образу области $|z| > 1$ при отображении f_μ, так что если положить

$$\omega = i\mu^{1/2} \log z - i\frac{4}{k}[K'(k) - E'(k)],$$

то $z = 0$ и переходит в $w = 0$.

Обозначим полученную таким образом функцию через $g_\mu(z)$. Тогда логарифм внутреннего конформного радиуса r соответствующей области относительно начала равен

$$\log 4\mu - 2 - 4k^{-1}\mu^{-1/2}[K'(k) - E'(k)],$$

т. е.

$$r = 4\mu \exp\{-2 - \pi[K'(k) - E'(k)]/E(k)\} =$$

$$= 4\mu \exp\{-2 - \pi K'(k)/K(k) + \pi^2/2K(k)E(k)\}.$$

Последнее равенство справедливо в силу соотношения Лежандра[1]).

Пусть теперь $f \in \Sigma$ и имеет в бесконечности разложение

$$f(z) = z + a_0 + (\text{члены, содержащие степени } z^{-1}).$$

Пусть $\Phi_\mu(w)$, $\Psi_\mu(w)$ — функции, обратные к f_μ, g_μ, заданные на $f_\mu(\widehat{E})$, $g_\mu(E)$, где E — круг $|z| < 1$, а $\widehat{E}$ — область $|z| > 1$. Предположим, кроме того, что дополнение к $f(\widehat{E})$ содержит область с внутренним конформным радиусом относительно начала, не меньшим r, причем r и μ связаны в соответствующих случаях так же, как выше. Тогда существует функция $g(z)$, конформно отображающая E в эту область и удовлетворяющая условиям $g(0) = 0$, $g'(0) = r$. При заданном вещественном θ, $0 \leqslant \theta < \pi$, применим общую теорему о коэффициентах, взяв w-сферу в качестве $\mathfrak{R}$, квадратичный дифференциал

$$Q(w)\,dw^2 = e^{-i\theta}\,\frac{w - \mu e^{i\theta}}{w^2}\,dw^2,$$

допустимое семейство областей

$$e^{i\theta} f_\mu(\widehat{E}), \quad e^{i\theta} g_\mu(E)$$

и допустимое семейство функций

$$f(e^{i\theta}\Phi_\mu(e^{-i\theta}w)), \quad g(e^{i\theta}\Psi_\mu(e^{-i\theta}w)).$$

Рассматриваемый квадратичный дифференциал имеет тройной полюс P_1 в бесконечности и двойной полюс P_2 в начале. Соответствующие коэффициенты таковы:

$$\alpha^{(1)} = e^{-i\theta}, \quad a_0^{(1)} = a_0 - e^{i\theta} P_r,$$

$$\alpha^{(2)} = -\mu, \quad a^{(2)} = g'_\mu(0)/g'(0).$$

---

[1]) См. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II, Гостехиздат, 1948, стр. 691.— *Прим. перев.*

Неравенство (4.7) дает тогда

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\theta}(a_0 - e^{i\theta}P_r) - \mu \log(g'_\mu(0)/g'(0))\} \leqslant 0,$$

или

$$\operatorname{Re}\{e^{-i\theta}a_0\} \leqslant P_r, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

т. е.

$$|a_0| \leqslant P_r.$$

То, что значение $P_r e^{i\theta}$ может достигаться только для функций $e^{i\theta}f_\mu(e^{-i\theta}z)$, следует из условия (1) равенства в теореме 4.1. То, что этот круг является точной областью значений a_0, следует из рассуждения Грёча.

Глава VIII

СИММЕТРИЗАЦИЯ. МНОГОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ

8.1. Возможность применения общей теоремы о коэффициентах несколько ограничена тем условием, что функции допустимого семейства $\{f\}$ должны переводить в себя полюсы квадратичного дифференциала, лежащие внутри областей допустимого семейства $\{\Delta\}$. Как мы видели, в тех случаях, когда $\mathfrak{R}$ — сфера, иногда удается преодолеть это затруднение с помощью вспомогательных конформных отображений всей сферы. В других случаях, когда это уже невозможно, тот же эффект может быть достигнут методом симметризации. Этот метод позволяет, кроме того, обобщить многие результаты теории однолистных функций на многолистные функции. Конечно, при этом нельзя непосредственно применять общую теорему о коэффициентах, но принцип Тейхмюллера и здесь приводит к соответствующему квадратичному дифференциалу.

Для нас представляет интерес метод симметризации, называемый круговой симметризацией [139, 140, 141], хотя в некоторых проблемах теории функций можно применять и другие методы симметризации, в особенности симметризацию по Штейнеру. Круговую симметризацию можно применять в различных случаях. Приведем точное определение.

Определение 8.1. Пусть D — односвязная область на w-сфере, P — некоторая точка и λ — луч с концом в P. Тогда *областью D^*, соответствующей D при круговой симметризации, определяемой P и λ*, называется односвязная область, характеризуемая тем свойством, что ее пересечение с окружностью с центром P и произвольным радиусом R состоит из всей этой окружности, если последняя лежит в D, а в противном случае — из ее

открытой дуги, пересекающей λ, симметричной относительно λ и видимой из P под углом, равным угловой мере Лебега пересечения этой окружности с D.

Легко проверить, что D^* действительно представляет собою односвязную область.

Лемма 8.1. *В обозначениях определения* 8.1 *области D и D^* имеют равную площадь (которая может быть и бесконечной).*

Определение 8.2. Пусть D — двусвязная область на w-сфере, P — некоторая точка и λ — луч с концом в P. Пусть K_1 и K_2 — дополнительные к D континуумы. Предположим, что оба эти континуума невырожденные. Пусть пересечения K_1 и K_2 с окружностью радиуса R с центром в P имеют угловую меру Лебега, равную соответственно $l_1(R)$ и $l_2(R)$. Пусть R, Φ — полярные координаты с полюсом P и осью λ. Пусть K_1^* обозначает множество

$$-\frac{1}{2}l_1(R) \leqslant \Phi \leqslant \frac{1}{2}l_1(R)$$

при тех значениях R, при которых окружность $|w-P|=R$ пересекается с K_1, и K_2^* — множество

$$\pi - \frac{1}{2}l_2(R) \leqslant \Phi \leqslant \pi + \frac{1}{2}l_2(R)$$

при тех значениях R, при которых окружность $|w-P|=R$ пересекается с K_2; пусть еще K_1^*, K_2^* принадлежит та из точек 0 или ∞ (или обе эти точки), которая соответственно принадлежит K_1, K_2. Тогда дополнением к $K_1^* \cup K_2^*$ является двусвязная область D^*, которую мы будем называть *соответствующей D при круговой симметризации, определяемой P и λ.*

Легко проверить, что D^* действительно представляет собой двусвязную область. Область D^*, очевидно, зависит от порядка выбора K_1 и K_2. Перемена обозначений приводит просто к отражению этой области относительно точки P.

Определение 8.3. Пусть Q — четырехугольник на w-сфере, лежащий во внешности окружности $|w-P|=R_0$, причем пара его противоположных сторон лежит на этой окружности. Пусть Q' — отражение Q в этой

окружности и пусть D — объединение Q, Q' и открытых дуг, составляющих указанную пару сторон. Ясно, что D — двусвязная область. Пусть λ — луч с концом в точке P и D^* — область, соответствующая D при круговой симметризации относительно P и λ. Пусть Q^* — четырехугольник, определяемый частью D^*, внешней к окружности $|w - P| = R_0$, пара противоположных сторон которого состоит из двух открытых дуг, получающихся в пересечении D^* с этой окружностью. Тогда Q^* называется *круговой симметризацией Q, определяемой P и λ.*

Определение 8.4. Пусть K — открытое множество в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть H — некоторая полуплоскость, а Λ — прямая, являющаяся ее краем. Тогда *множеством, соответствующим K при круговой симметризации, определяемой Λ и H,* называется множество K^*, такое, что его пересечение с любой окружностью с центром, лежащим на Λ, проведенной в плоскости, перпендикулярной Λ, состоит из всей этой окружности, если она содержится в K, а в противном случае — из открытой дуги, пересекающей H, симметричной относительно H и имеющей длину, равную полной мере пересечения этой окружности с D.

Легко проверить, что множество K^* открыто. Для наших целей симметризация в трехмерном пространстве интересна тем, что справедлив один важный результат о площади поверхностей, ограничивающих K и K^*, если эти поверхности достаточно гладкие.

Теорема 8.1. *Пусть H — полуплоскость в трехмерном евклидовом пространстве, Λ — прямая, являющаяся ее краем. Пусть задана система цилиндрических координат (r, θ, z), в которых H задается уравнением $\theta = 0$, а Λ — уравнением $r = 0$. Пусть K — открытое множество в трехмерном пространстве, граница S которого гомеоморфна сфере и состоит из конечного числа кусков, ограниченных простыми замкнутыми регулярными кривыми, каждый из которых*

либо (a) *расположен в плоскости* $z = \text{const}$,

либо (b) *расположен на поверхности вращения* $z = z(r)$, *где* $z(r)$ *имеет непрерывную производную по* r,

либо (c) *описывается уравнением*

$$\theta = \theta(r, z),$$

где функция $\theta(r, z)$ обладает непрерывными первыми частными производными по r и z.

Тогда S имеет площадь. Если K^* обозначает множество, соответствующее K при круговой симметризации, определяемой Λ и H, то его граничная поверхность S^* имеет площадь, не превосходящую площади S.

Очевидно, что куски границы S, лежащие в плоскостях $z = \text{const}$ и на поверхностях вращения $z = z(r)$, порождают аналогичные куски на S^*, имеющие не бо́льшую площадь. Поэтому достаточно доказать наше утверждение для остальных граничных кусков. Множество тех значений r', z', при которых окружность $r = r'$, $z = z'$ пересекает эти куски S, представляет собой некоторую область, распадающуюся на конечное число подобластей $U_1, \ldots, U_n$, таких, что если (r', z') принадлежит U_k, то окружность $r = r'$, $z = z'$ пересекает S в точках, координаты θ_l которых удовлетворяют неравенствам

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \ldots < \theta_{2m_k} < \theta_1 + 2\pi$$

и являются непрерывными функциями от r и z на U_k. Предположим, что открытая дуга, заданная неравенством $\theta_1 < \theta < \theta_2$, лежит внутри K. Таким образом, площадь рассматриваемой части S равна

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{2m_k} \iint_{U_k} \left\{1 + r^2 \left[\left(\frac{\partial \theta_j}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_j}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^{1/2} dr\, dz.$$

Если (r, z) принадлежит U_k, то соответствующие части границы K^* задаются равенствами $\theta = \theta^*$, $\theta = -\theta^*$, где

$$\theta^* = \frac{1}{2}(\theta_{2m_k} - \theta_{2m_k-1} + \ldots + \theta_2 - \theta_1).$$

Таким образом, соответствующая площадь S^* равна

$$\sum_{k=1}^{n} 2 \iint_{U_k} \left\{1 + r^2 \left[\left(\frac{\partial \theta^*}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^{1/2} dr\, dz.$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{2m_k}\iint_{U_k}\left\{1+r^2\left[\left(\frac{\partial\theta_j}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta_j}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^{1/2}dr\,dz \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n}\iint_{U_k}\left\{4m_k^2+r^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\sum_{j=1}^{2m_k}(-1)^j\theta_j\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial}{\partial z}\sum_{j=1}^{2m_k}(-1)^j\theta_j\right)^2\right]\right\}^{1/2}dr\,dz \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n}2\iint_{U_k}\left\{1+r^2\left[\left(\frac{\partial\theta^*}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\theta^*}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^{1/2}dr\,dz.$$

Это завершает доказательство теоремы 8.1.

8.2. Из предыдущего результата о площади можно вывести один полезный результат о некоторых интегралах Дирихле, следуя схеме рассуждения, предложенной Тимошенко [139].

Теорема 8.2. *Пусть D — область на плоскости $w(w=u+iv)$, ограниченная простой замкнутой регулярной кривой. Пусть $f(u, v)$ — функция, заданная и непрерывная в $\overline{D}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(a) $f(u,v)>0, \quad (u,v)\in D,$

(b) $f(u,v)=0, \quad (u,v)\in \overline{D}\setminus D,$

(c) *множество K точек трехмерного евклидова пространства с координатами (u, v, z), такими, что*

$$(u,v)\in D, \quad 0<z<f(u,v),$$

удовлетворяет условиям теоремы 8.1.

Пусть D^* — область на плоскости w, соответствующая D при круговой симметризации, определяемой точкой

(0,0) *и лучом* $u > 0$, $v = 0$. *Пусть* K^* *обозначает множество в трехмерном пространстве, соответствующее множеству* K *при круговой симметризации, определяемой прямой* $u = 0$, $v = 0$ *и полуплоскостью* $u > 0$, $v = 0$. *Тогда существует функция* $f^*(u, v)$, *заданная и непрерывная в* $\overline{D}^*$ *и удовлетворяющая следующим условиям:*

(a*) $f^*(u, v) > 0$, $(u, v) \in D^*$,

(b*) $f^*(u, v) = 0$, $(u, v) \in \overline{D}^* \setminus D^*$,

(c*) *множество* K^* *определяется соотношением*

$$(u, v) \in D^*, \quad 0 < z < f^*(u, v).$$

Пусть f_u *и* f_v *существуют, ограничены и непрерывны всюду в* D, *за исключением конечного числа регулярных дуг и кривых. Тогда интегралы Дирихле*

$$\iint\limits_D (f_u^2 + f_v^2)\, du\, dv, \quad \iint\limits_{D^*} [(f_u^*)^2 + (f_v^*)^2]\, du\, dv$$

существуют и удовлетворяют неравенству

$$\iint\limits_D (f_u^2 + f_v^2)\, du\, dv \geqslant \iint\limits_{D^*} [(f_u^*)^2 + (f_v^*)^2]\, du\, dv. \qquad (8.1)$$

Существование функции f^*, удовлетворяющей условиям (a*), (b*), (c*), почти непосредственно следует из определения 8.4. Существование интегралов Дирихле сразу следует из наших предположений. Остается доказать только неравенство (8.1). При любом положительном ε функции εf и εf^* связаны так же, как f и f^*. Всякая область, на которой постоянна функция f, порождает множество той же площади, на котором постоянна функция f^*. Площади областей D и D^*, разумеется, равны. Отсюда, по теореме 8.1, получаем

$$\iint\limits_D [1 + \varepsilon^2 (f_u^2 + f_v^2)]^{1/2}\, du\, dv \geqslant \iint\limits_{D^*} \{1 + \varepsilon^2 [(f_u^*)^2 + (f_v^*)^2]\}^{1/2}\, du\, dv.$$

Условия, наложенные на f_u, f_v, f_u^*, f_v^*, дают

$$\iint\limits_D \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(f_u^2 + f_v^2) + O(\varepsilon^4)\right] du\,dv \geqslant$$

$$\geqslant \iint\limits_{D^*} \left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{2}[(f_u^*)^2 + (f_v^*)^2] + O(\varepsilon^4)\right\} du\,dv,$$

или

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \iint\limits_D (f_u^2 + f_v^2)\,du\,dv + O(\varepsilon^4) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2 \iint\limits_{D^*} [(f_u^*)^2 + (f_v^*)^2]\,du\,dv + O(\varepsilon^4).$$

Деля обе части на $^1/_2\,\varepsilon^2$ и устремляя ε к нулю, получаем неравенство (8.1).

Для применения теоремы 8.2 воспользуемся хорошо известным соотношением между модулем двусвязной области и интегралом Дирихле от соответствующей гармонической меры.

Лемма 8.2. *Пусть D — двусвязная область на плоскости $w\,(= u + iv)$ с невырожденными граничными континуумами. Пусть $\omega(u, v)$ — гармоническая мера одной из граничных компонент относительно D. Пусть $D(\omega)$ обозначает интеграл Дирихле от ω по области D. Тогда модуль D (для класса кривых, разделяющих граничные компоненты) равен $1/D(\omega)$.*

Можно считать, что D есть круговое кольцо $r_1 < |w| < r_2$, а выбранная граничная компонента — окружность $|w| = r_2 (0 < r_1 < r_2)$, так как и модуль, и интеграл Дирихле конформно инвариантны. В этом случае

$$\omega = \log(|w|/r_1)/\log(r_2/r_1).$$

Непосредственное вычисление дает

$$D(\omega) = 2\pi/\log(r_2/r_1),$$

т. е. $D(\omega)$ равняется обратной величине рассматриваемого модуля.

Теорема 8.3. *Пусть D — двусвязная область на w-сфере с невырожденными граничными континуумами, P — некоторая точка и λ — луч с концом в P. Пусть D^* — область, соответствующая D при круговой симмет-*

ризации, определяемой P и λ. Пусть M и M^* — модули областей D и D^*, вычисленные в обоих случаях для класса кривых, разделяющих граничные компоненты. Тогда

$$M \leqslant M^*.$$

Можно считать, что область D лежит в конечной плоскости и ограничена аналитическими кривыми C_1 и C_2, причем C_1 расположена внутри C_2. В общем случае результат получается с помощью простого предельного перехода. Ограниченный континуум с границей C_1 будет играть роль K_1 из определения 8.2.

Пусть $\omega(u, v)$ — гармоническая мера C_1 относительно D, $\omega^*(u, v)$ — гармоническая мера соответствующей граничной компоненты D^* относительно этой области. Пусть Δ — область, ограниченная C_2. Определим на $\overline{\Delta}$ функцию $f(u, v)$, полагая

$$f(u, v) = \omega(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}$$

$$f(u, v) = 1, \qquad (u, v) \in \Delta \setminus \bar{D}.$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 8.2. Пусть Δ^* — область, соответствующая Δ при круговой симметризации, определяемой P и λ. Пусть $f^*(u, v)$ — функция, определенная на $\bar{\Delta}^*$ с помощью симметризации, как в теореме 8.2. Согласно этой теореме,

$$\iint\limits_{\Delta} (f_u^2 + f_v^2)\, du\, dv \geqslant \iint\limits_{\Delta^*} [(f_u^*)^2 + (f_v^*)^2]\, du\, dv.$$

С одной стороны,

$$\iint\limits_{\Delta} (f_u^2 + f_v^2)\, du\, dv = \iint\limits_{D} (\omega_u^2 + \omega_v^2)\, du\, dv = \frac{1}{M}.$$

С другой стороны, функция f^* имеет граничные значения, равные 0 и 1 на соответствующих граничных компонентах D^*. Используя принцип Дирихле, получаем

$$\iint\limits_{\Delta^*} [(f_u^*)^2 + (f_v^*)^2]\, du\, dv \geqslant \iint\limits_{D^*} [(\omega_u^*)^2 + (\omega_v^*)^2]\, du\, dv = \frac{1}{M^*}.$$

Сопоставляя эти неравенства, получаем утверждение теоремы 8.3.

Следствие 8.1. *Пусть Q — четырехугольник на w-сфере, лежащий во внешности окружности $|w - P| = R_0$, имеющий пару противоположных сторон на этой окружности. Пусть Q^* соответствует Q при круговой симметризации, определяемой P и некоторым лучом λ с концом в P. Пусть m и m^*—модули Q и Q^*, каждый из которых вычислен для класса кривых, соединяющих выбранную пару сторон, лежащих на окружности $|w - P| = R_0$. Тогда*

$$m \leqslant m^*.$$

В самом деле, пусть D и D^* — двусвязные области, связанные с Q и Q^* так же, как в определении 8.3, и пусть M и M^* — их модули, вычисленные в обоих случаях относительно класса кривых, разделяющих граничные компоненты. Тогда

$$m = 2M,$$
$$m^* = 2M^*,$$
$$M \leqslant M^*,$$

откуда немедленно вытекает утверждение следствия 8.1.

8.3. Способ доказательства теоремы 8.3 почти не дает возможности непосредственно определить, в каких случаях в соответствующем неравенстве имеет место равенство. Этот вопрос имеет, однако, значительный интерес, особенно при установлении единственности в ряде задач, рассматриваемых в настоящей главе. Сейчас мы займемся этим вопросом, предположив, что точка и луч, определяющие симметризацию, представляют собой начало и положительную полуось, хотя аналогичные результаты справедливы, разумеется, в любом случае.

Теорема 8.4. *Пусть D — двусвязная область на w-сфере с (невырожденными) граничными компонентами C_1 и C_2, которая является образом кругового кольца*

$$r_1 < |z| < r_2, \quad 0 < r_1 < r_2, \tag{8.2}$$

при отображении, осуществляемом мероморфной (может быть, регулярной), однолистной функцией $w = f(z)$.

Предположим, что при этом отображении окружность $|z| = r_1$ *соответствует компоненте* C_1. *Пусть* D^* — *область, соответствующая* D *при круговой симметризации, определяемой началом и положительной осью, а* C_1^* *и* C_2^* — *граничные компоненты* D^*, *отвечающие соответственно* C_1 *и* C_2. *Обозначим через* $M(D')$ *модуль любой двусвязной области* D' *для класса кривых, разделяющих граничные компоненты. Предположим, что*

$$M(D) = M(D^*).$$

Тогда D^* *является образом кругового кольца* (8.2) *при отображении, осуществляемом мероморфной однолистной функцией* $w = f^*(z)$, *при котором окружность* $|z| = r_1$ *соответствует компоненте* C_1^*. *Более того,*

$$f^*(z) = e^{i\alpha} f(e^{i\beta} z),$$

где α *и* β *вещественны.*

Таким образом, равенство модулей возможно только тогда, когда D^* получается из D с помощью (жесткого) вращения вокруг точки $w = 0$.

Пусть $\Gamma(r)$ — образ окружности $|z| = r$ при отображении $w = f(z)$ $(r_1 < r < r_2)$. Он представляет собой аналитическую жорданову кривую, разбивающую D на две двусвязные области D_1 и D_2. При этом мы считаем, что D_1 примыкает к C_1. Применив к этим областям круговую симметризацию с очевидным порядком выбора дополнительных континуумов, мы получим области D_1^* и D_2^*. Заметим, что множество $D_1^* \bigcup D_2^*$ отличается от D^* только жордановой кривой J, лежащей в D^* и отделяющей D_1^* от D_2^* и C_1^* от C_2^*.

Теперь имеем

$$M(D) = M(D_1) + M(D_2), \quad M(D_1) \leqslant M(D_1^*),$$

$$M(D_2) \leqslant M(D_2^*).$$

Значит, по теореме 2.6, кривая J должна совпадать с образом $\Gamma^*(r)$ окружности $|z| = r$ при отображении $w = f^*(z)$. Кроме того,

$$M(D_1) = M(D_1^*), \quad M(D_2) = M(D_2^*).$$

Таким образом, в нашем доказательстве можно считать, что обе функции $f(z)$, $f^*(z)$ регулярны при $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$, так как выполнения этого условия можно добиться, рассматривая лишь подобласть области D, ограниченную кривыми $\Gamma(r')$, $\Gamma(r'')$, где $r_1 < r' < r'' < r_2$. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что C_1 лежит во внутренности C_2 и что дополнительный к D континуум, содержащий C_1, играет ту же роль, что и K_1 в определении 8.2.

Пусть $M(r)$ и $m(r)$ обозначают максимум и минимум $|f(z)|$ на окружности $|z|=r$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. В этом интервале содержится не больше одного значения r, при котором $m(r)=M(r)$, если только $f(z)$ не является функцией вида $f(z) \equiv \lambda z$, где λ — постоянная. В этом последнем случае теорема 8.4 очевидна. Поэтому можно считать, что $M(r) > m(r)$ при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Кроме того, $M(r)$ является строго возрастающей функцией r. Очевидно, что максимум и минимум $|f^*(z)|$ на окружности $|z|=r$ равны соответственно $M(r)$ и $m(r)$. Максимум достигается только в тех точках, в которых $f^*(z)$ вещественна и положительна. Предположим, что f^* нормирована так, что это возможно лишь при положительных значениях z.

Изучим теперь расположение тех точек $re^{i\varphi}$, в которых $|f(re^{i\varphi})| = M(r)$. Для этого положим

$$u(re^{i\varphi}) = \log|f(re^{i\varphi})|.$$

Сужая, если потребуется, исходное круговое кольцо, мы можем считать, что $f(z)$ не обращается в нуль на множестве $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$, и тогда функция u гармонична и регулярна на этом множестве. В той точке, в которой

$$|f(re^{i\varphi})| = M(r),$$

u имеет максимум как функция φ при фиксированном r, поэтому $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$. Это означает, что

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{Re} \log f(re^{i\varphi}) = 0,$$

или

$$\operatorname{Re}\left\{ire^{i\varphi}\,\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right\} = 0,$$

т. е. что

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}=0,$$

где $z=re^{i\varphi}$.

Точки, в которых выполняется это равенство, очевидно, составляют конечное число аналитических дуг, возможно, имеющих общие концы, расположенные в нулях производной отношения $zf'(z)/f(z)$. Поэтому, сужая еще раз, если потребуется, наше исходное круговое кольцо, мы можем предполагать, что точки, в которых $|f(re^{i\varphi})|=M(r)$, лежат на конечном множестве аналитических дуг, определенных уравнениями вида

$$\varphi=\varphi_i(r),\quad i=1,\ \ldots,\ k,$$

где $\varphi_i(r)$ — аналитическая функция r при $r_1\leqslant r\leqslant r_2$.

На кривой $\varphi=\varphi_i(r)$ имеем $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=0$, поэтому

$$\frac{du}{dr}=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{d\varphi_i}{dr}=\frac{d\log M(r)}{dr}.$$

Кроме того, на этой же кривой

$$0=\frac{d}{dr}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\frac{d\varphi_i}{dr},$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}\frac{d\varphi_i}{dr}=\frac{d^2\log M(r)}{dr^2}$$

В силу гармоничности u получаем

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0.$$

Объединяя это равенство с предыдущими, находим, что

$$\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{d\varphi_i}{dr}\right)^2=-\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}\frac{d\varphi_i}{dr}=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{d^2\log M(r)}{dr^2}=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{d^2\log M(r)}{dr^2}=$$

$$=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r}\frac{d\log M(r)}{dr}-\frac{d^2\log M(r)}{dr^2}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_i(r)}\left\{\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right\}=-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{d\log M(r)}{d\log r}\right), \quad (8.3)$$
$$i=1,\ \ldots,\ k.$$

Так как, согласно нашему предположению, $f(z)$ не является функцией вида λz, то правая часть равенства (8.3) может обращаться в нуль только при изолированных значениях r, поэтому можно считать, что она отлична от нуля при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

Полагая, аналогично предыдущему,

$$u^*(re^{i\varphi}) = \log|f^*(re^{i\varphi})|,$$

получаем регулярную гармоническую функцию, для которой в соответствии с (8.3) справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=0}\frac{1}{r^2}=-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{d\log M(r)}{d\log r}\right). \quad (8.4)$$

Поскольку правые части равенств (8.3) и (8.4) не обращаются в нуль при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, имеем

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=0}<0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_i(r)}<0, \quad i=1,\ \ldots,\ k.$$

Пусть теперь $\Delta(r)$, $\Delta^*(r)$ — области, ограниченные соответственно кривыми $\Gamma(r)$, $\Gamma^*(r)$. Тогда для любой функции $g(R)$, для которой существуют написанные ниже интегралы, имеем

$$\iint\limits_{\Delta(r)} g(R)\,dR\,d\Phi=\iint\limits_{\Delta^*(r)} g(R)\,dR\,d\Phi.$$

Отсюда, полагая $G(R)=\int\limits_0^R g(t)\,dt$, заключаем, что

$$\int\limits_{\Gamma(r)} G(r)\,d\Phi=\int\limits_{\Gamma^*(r)} G(r)\,d\Phi.$$

Теперь с помощью преобразования Правица [145] сведем эти интегралы к интегралам, взятым по окружности $|z|=r$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. На этой окружности

$$d\Phi=\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}d\varphi=\frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r}d\varphi.$$

Поэтому, полагая

$$\mathfrak{G}(t) = \int_0^R \frac{G(t)}{t}\, dt$$

и считая функцию G (а значит, и g) такой, что этот интеграл существует, получаем

$$r \int_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial r}\, \mathfrak{G}\,(|f(re^{i\varphi})|)\, d\varphi = r \int_{|z|=r} \frac{\partial}{\partial r}\, \mathfrak{G}\,(|f^*(re^{i\varphi})|)\, d\varphi,$$

или, иначе,

$$\frac{d}{dr} \int_{|z|=r} \mathfrak{G}\,(|f(re^{i\varphi})|)\, d\varphi = \frac{d}{dr} \int_{|z|=r} \mathfrak{G}\,(|f^*(re^{i\varphi})|)\, d\varphi. \quad (8.5)$$

Предположим теперь, что $g(R) \equiv 0$ при $R \leqslant M(r_1)$, что конечно, совместимо с ранее сделанными предположениями. Тогда

$$\int_{|z|=r_1} \mathfrak{G}\,(|f(r_1e^{i\varphi})|)\, d\varphi = \int_{|z|=r_1} \mathfrak{G}\,(|f^*(r_1e^{i\varphi})|)\, d\varphi = 0,$$

и из (8.5) следует, что

$$\int_{|z|=r} \mathfrak{G}\,(|f(re^{i\varphi})|)\, d\varphi = \int_{|z|=r} \mathfrak{G}\,(|f^*(re^{i\varphi})|)\, d\varphi \quad (8.6)$$

при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

Обозначим теперь через $e(f, r, a)$, $e(f^*, r, a)$ множества тех значений φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, при которых соответственно выполняются неравенства $|f(re^{i\varphi})| \leqslant a$, $|f^*(re^{i\varphi})| \leqslant a$, $a > 0$. Обозначим, далее, через $\Phi(f\ r, a)$, $\Phi(f^*, r, a)$ соответственно меру (Лебега) множеств $e(f, r, a)$, $e(f^*, r, a)$. Из (8.6) немедленно следует, что

$$\Phi(f, r, a) = \Phi(f^*, r, a) \quad (8.7)$$

при $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. $a \geqslant M(r_1)$. Очевидно, что

$$\Phi(f, r, M(r)) = \Phi(f^*, r, M(r)) = 2\pi.$$

Теперь заметим, что $u(re^{i\varphi})$ при фиксированном r, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, является вещественной аналитической функ-

цией φ. Поэтому при φ, достаточно близких к фиксированному значению φ_0, имеем

$$u(re^{i\varphi}) - u(re^{i\varphi_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial \varphi^n}\Big|_{\varphi=\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^n.$$

Полагая $|f(re^{i\varphi})| = a$, $|f(re^{i\varphi_0})| = a_0$, получаем

$$\log\left(1 + \frac{a - a_0}{a_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u}{\partial \varphi^n}\Big|_{\varphi=\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^n. \qquad (8.8)$$

Если, в частности, взять φ_0 равным одному из $\varphi_i(r)$, $i = 1, \ldots, k$, то $a_0 = M(r)$, $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_0} < 0$, и поэтому при φ, достаточно близких к φ_0, можно обратить ряд (8.8) и получить

$$\varphi - \varphi_0 = 2^{1/2}[M(r)]^{-1/2}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_0}\right)^{-1/2}[M(r) - a]^{1/2} \times$$
$$\times P([M(r) - a]^{1/2}), \qquad \varphi > \varphi_0,$$

$$\varphi_0 - \varphi = 2^{1/2}[M(r)]^{-1/2}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_0}\right)^{-1/2}[M(r) - a]^{1/2} \times$$
$$\times P(-[M(r) - a]^{1/2}), \quad \varphi < \varphi_0,$$

где P обозначает некоторый степенной ряд и $P(0) = 1$.

Сопоставляя эти результаты при $\varphi_0 = \varphi_i(r)$, $i = 1, \ldots, k$, находим, что при $r_1 < r \leqslant r_2$ и при a, меньших $M(r)$, но достаточно близких к $M(r)$, справедливо равенство

$$\Phi(f, r, a) = 2\pi - 2^{3/2}[M(r)]^{-1/2}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_i(r)}\right)^{-1/2}\right] \times$$
$$\times [M(r) - a]^{1/2}\,\mathfrak{P}([M(r) - a]^{1/2}),$$

где $\mathfrak{P}$ обозначает некоторый степенной ряд и $\mathfrak{P}(0) = 1$. При тех же условиях имеем

$$\Phi(f^*, r, a) = 2\pi - 2^{3/2}[M(r)]^{-1/2}\left(-\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=0}\right)^{-1/2} \times$$
$$\times [M(r) - a]^{1/2}\,\mathfrak{P}^*([M(r) - a]^{1/2}),$$

где $\mathfrak{P}^*$ обозначает некоторый степенной ряд и $\mathfrak{P}^*(0) = 1$. Согласно (8.7), эти разложения в ряд должны быть тождественными. В частности,

$$\sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_i(r)}\right)^{-1/2} = \left(-\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=0}\right)^{-1/2}. \tag{8.9}$$

С другой стороны, из (8.3) и (8.4) получаем

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=\varphi_i(r)} \leqslant -\frac{\partial^2 u^*}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=0}, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Поэтому в левой части (8.9) может быть только одно слагаемое, отличное от нуля, т. е. $k = 1$, и равенство (8.9) возможно лишь тогда, когда $d\varphi_1(r)/dr = 0$ при рассматриваемых значениях r. Это означает, что $|f(z)|$ принимает свои максимальные значения на окружностях $|z| = r$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, только при z, лежащих на отрезке некоторого радиуса. Поэтому максимум модуля функции $f_1(z) = f(e^{i\beta}z)$ на окружностях $|z| = r$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, достигается при z, лежащих на вещественной положительной оси, если β — подходящая вещественная постоянная.

Пусть

$$u_1(z) = \log|f_1(z)|.$$

Тогда, полагая

$$U(z) = u_1(z) - u^*(z),$$

получаем

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$$

при $\varphi = 0$, $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. Первое из этих равенств следует из того, что

$$|f_1(re^{i\varphi})| = |f^*(re^{i\varphi})| = M(r)$$

при $\varphi = 0$. Второе равенство следует из того, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial u^*}{\partial\varphi} = 0$$

в точке максимума $\varphi = 0$. Так как U — регулярная гармоническая функция, она равна нулю тождественно. Поэтому

$$f^*(z) = e^{i\alpha} f_1(z) = e^{i\alpha} f(e^{i\beta} z)$$

при некотором вещественном α. Это завершает доказательство теоремы 8.4.

Следствие 8.2. *Пусть Q — четырехугольник на w-сфере, лежащий во внешности окружности $|w| = R_0$, пара противоположных сторон которого лежит на этой окружности. Пусть Q^* — множество, соответствующее Q при круговой симметризации, определяемой началом и положительной полуосью. Пусть m и m^* — модули Q и Q^*, вычисленные для класса кривых, соединяющих стороны, лежащие на окружности $|w| = R_0$. Предположим, что*

$$m = m^*.$$

Тогда Q и Q^* являются образами некоторого прямоугольника плоскости z при отображениях, осуществляемых мероморфными однолистными функциями соответственно $\psi(z)$, $\psi^*(z)$, причем одни и те же стороны этого прямоугольника переходят в соответствующие стороны четырехугольников. Более того,

$$\psi^*(z) = e^{i\alpha} \psi(z),$$

где α вещественно.

Таким образом, модули могут быть равными лишь тогда, когда Q^* получается из Q с помощью вращения вокруг точки $w = 0$.

Действительно, если D и D^* — двусвязные области, соответствующие Q и Q^*, как в определении 8.3, а $f(z)$ и $f^*(z)$ — функции, соответствующие D и D^*, как в теореме 8.4, то ввиду равенства $m = m^*$ получаем

$$M(D) = M(D^*),$$

откуда, согласно теореме 8.4,

$$f^*(z) = e^{i\alpha} f(e^{i\beta} z),$$

где α и β вещественны. Соответствие граничных дуг Q и Q^*, лежащих на окружности $|w| = R_0$, дает, что

$$\psi^*(z) = e^{i\alpha}\psi(z).$$

8.4. Для приложений нам потребуются некоторые предельные формы результатов п. 8.3.

Теорема 8.5. *Пусть G — односвязная область гиперболического типа на плоскости w, содержащая начало. Пусть $c(t)$ обозначает линии уровня функции Грина области G с полюсом в точке $w = 0$, непрерывно зависящие от параметра t так, что при стремлении t к нулю $c(t)$ стягиваются к началу. Пусть $D(t)$ — двусвязная область, ограниченная $c(t)$ и границей B области G. Пусть $D^*(t)$ — двусвязная область, соответствующая $D(t)$ при круговой симметризации, определяемой началом и положительной полуосью, причем тот континуум дополнения к $D(t)$, который содержит $c(t)$, считается первым (см. определение 8.2). Пусть D^* имеет граничные компоненты $c^*(t)$ и B^*, соответствующие компонентам $c(t)$ и B. Пусть G^* — односвязная область, ограниченная компонентой B^* и содержащая начало. Если G^* не получается из G вращением вокруг точки $w = 0$, то существует такая положительная постоянная k, что при всех достаточно малых t, $0 < t \leqslant t_0$,*

$$M(D(t)) + k \leqslant M(D^*(t)),$$

причем k не зависит от выбора рассматриваемых значений t.

Пусть $\Delta(t)$ — двусвязная область, ограниченная $c(t_0)$ и $c(t)$, где t_0 — фиксированное положительное число и $0 < t < t_0$. Пусть $\Delta^*(t)$ — двусвязная область, ограниченная кривыми $c^*(t_0)$ и $c^*(t)$. Ясно, что $\Delta^*(t)$ — область, соответствующая $\Delta(t)$ при рассматриваемой круговой симметризации. По теореме 8.4

$$M(D(t_0)) < M(D^*(t_0)),$$

а по теореме 8.3

$$M(\Delta(t)) \leqslant M(\Delta^*(t)).$$

Ясно, что

$$M(D(t)) = M(D(t_0)) + M(\Delta(t)),$$

а по теореме 2.6

$$M(D^*(t)) \geqslant M(D^*(t_0)) + M(\Delta^*(t)).$$

Поэтому, полагая

$$k = M(D^*(t_0)) - M(D(t_0)),$$

получаем

$$M(D^*(t)) \geqslant M(D(t)) + k$$

при $0 < t \leqslant t_0$.

Нам потребуется также аналогичное обобщение следствия 8.2.

Теорема 8.6. *Пусть J — односвязная область w-сферы, для которой начало определяет ровно два граничных элемента, причем дополнение к J представляет собой объединение двух континуумов K_1 и K_2, содержащих начало и не имеющих общих точек, отличных от начала. Предположим, что пересечение J с каждой окружностью $|w| = p$ при $0 < p \leqslant R_0$ $(R_0 > 0)$ состоит из двух открытых дуг. Пусть K_1^* и K_2^* получаются из K_1 и K_2 так же, как в определении 8.2. Дополнение множества $K_1^* \cup K_2^*$ представляет собой односвязную область J^*, такую, что при $0 < p \leqslant R_0$ каждая окружность $|w| = p$ пересекает J^* по двум открытым дугам. Пусть J, J^* являются образами полосы $S: 0 < t < 1$ плоскости $\omega(\omega = s + it)$ при отображениях, осуществляемых соответственно мероморфными однолистными функциями $\varphi(\omega)$, $\varphi^*(\omega)$, причем две граничные точки полосы, лежащие в бесконечности, переходят при этих отображениях в граничные точки, лежащие в $w = 0$, а граничные элементы областей J, J^*, соответствующие точкам прямой $t = 0$, принадлежат K_1, K_1^*. Обозначим образы прямых $\operatorname{Im}\omega = t$ и отрезков $\operatorname{Re}\omega = s$, $0 < \operatorname{Im}\omega < 1$ при отображении $\varphi(\omega)$ соответственно через $c(t)$ и $\gamma(s)$, а при отображении $\varphi^*(\omega)$ — через $c^*(t)$ и $\gamma^*(s)$. Предположим, что дуги $\gamma(s)$ и $\gamma^*(s)$ приближаются к окружностям при s, стремящемся к $\pm\infty$. Пусть окружность $|w| = p$ вырезает из тех частей области $|w| > p$, которые лежат в J, J^*, соответственно четы-*

рехугольники $Q(p)$ и $Q^*(p)$, причем в обоих случаях пары противоположных сторон лежат на окружности. Модули этих четырехугольников, вычисленные относительно класса кривых, соединяющих стороны, лежащие на $|w| = p$, обозначим через $m(Q(p))$ и $m(Q^*(p))$. Тогда, если J^* не получается из J вращением вокруг точки $w=0$, то существует постоянная $k>0$, такая, что при достаточно малых p, $0<p\leqslant p_0$,

$$m(Q(p)) + km^2(Q(p)) \leqslant m(Q^*(p)),$$

причем k не зависит от рассматриваемых значений p.

Сначала докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 8.3. *Пусть $Q(s_1, s_2)$ обозначает прямоугольник, вырезанный из полосы $S: 0<t<1$ прямыми $\operatorname{Re}\omega = -s_1$, $\operatorname{Re}\omega = s_2$, где $s_1>0$, $s_2>0$, $\omega = s+it$, и пусть $m(Q(s_1, s_2))$ — его модуль для класса кривых, соединяющих вертикальные стороны. Пусть Γ — континуум, лежащий в S и не являющийся разрезом вдоль прямой $\operatorname{Im}\omega = t$, $0<t<1$. Пусть s_1 и s_2 столь велики, что $Q(s_1, s_2)$ содержит Γ, и пусть область $Q'(s_1, s_2)$ получается из $Q(s_1, s_2)$ удалением Γ. Пусть $m(Q'(s_1, s_2))$ — ее модуль для класса кривых, принадлежащих $Q'(s_1, s_2)$ и соединяющих граничные дуги, лежащие на прямых $\operatorname{Re}\omega = -s_1$, $\operatorname{Re}\omega = s_2$. Тогда существует постоянная q, $q>0$, такая, что при достаточно больших s_1, s_2,*

$$m(Q'(s_1, s_2)) + qm^2(Q'(s_1, s_2)) \leqslant m(Q(s_1, s_2)),$$

причем q не зависит от значений s_1, s_2, но зависит от континуума Γ.

Действительно, пусть $s_1^{(0)}$, $s_2^{(0)}$ столь велики, что Γ содержится в $Q(s_1^{(0)}, s_2^{(0)})$. Обозначим $Q'(s_1^{(0)}, s_2^{(0)})$ через Q_0'. Легко проверить, что

$$m(Q'(s_1^{(0)}, s_2^{(0)})) < m(Q(s_1^{(0)}, s_2^{(0)})),$$

и существует функция $\rho_0(s, t)$, интегрируемая с квадратом по области Q_0', такая, что

$$\int_C \rho_0 |d\omega| \geqslant s_1^{(0)} + s_2^{(0)}$$

для любой локально спрямляемой кривой c, лежащей в Q_0' и соединяющей граничные дуги, расположенные на прямых $\operatorname{Re}\omega = -s_1^0$, $\operatorname{Re}\omega = s_2^{(0)}$ и, кроме того,

$$\iint\limits_{Q_0'} \rho_0^2\, ds\, dt < s_1^{(0)} + s_2^{(0)}.$$

Теперь рассмотрим функцию $\rho(s, t)$, заданную в области $Q'(s_1, s_2)$, где $s_i > s_i^{(0)}$, $i = 1, 2$, следующим образом:

$$\rho(s, t) = \rho_0(s, t), \qquad (s, t) \in Q_0',$$

$$\rho(s, t) = 1, \qquad (s, t) \in Q'(s_1, s_2) \setminus Q_0'.$$

Тогда

$$\int\limits_c \rho\, |\, d\omega\, | \geqslant s_1 + s_2$$

для любой локально спрямляемой кривой c, лежащей в $Q'(s_1, s_2)$ и соединяющей граничные дуги, расположенные на прямых $\operatorname{Re}\omega = -s_1$, $\operatorname{Re}\omega = s_2$. Поэтому

$$(s_1 + s_2)^2\, m(Q'(s_1, s_2)) \leqslant s_1 + s_2 - q,$$

где

$$q = s_1^{(0)} + s_2^{(0)} - \iint\limits_{Q_0'} \rho_0^2\, ds\, dt.$$

Так как $m(Q(s_1, s_2)) = (s_1 + s_2)^{-1}$, то

$$m(Q'(s_1, s_2)) \leqslant m(Q(s_1, s_2)) - q m^2(Q(s_1, s_2)),$$

откуда сразу следует утверждение леммы 8.3.

Перейдем к доказательству теоремы 8.6. Рассмотрим кривые $c(t)$ и область, ограниченную кривыми $c(t_1)$, $c(t_2)$ и точкой $w = 0$, где $0 < t_1 < t_2 < 1$. Симметризуя ее так же, как J, мы получим область, ограниченную соответствующими кривыми $c'(t_1)$, $c'(t_2)$ и точкой $w = 0$. Полученные таким образом кривые $c'(t)$ заполняют J^* при $0 < t < 1$. Если бы кривая $c'(t)$ совпала с $c^*(t)$ при некотором $0 < t < 1$, то тем же методом, что и при доказательстве теоремы 8.4, мы проверили бы, что J^* получается из J вращением вокруг точки $w = 0$.

Допустим, что кривая $c'(t_0)$ совпадает с некоторой кривой $c^*(\tau_0)$, $t_0 \neq \tau_0$, и пусть для определенности $t_0 > \tau_0$. Тогда при достаточно малых p кривая $c(t_0)$ разбивает $Q(p)$ на четырехугольники $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$, причем четырехугольник $Q_1(p)$ пересекается с кривыми $c(t)$ при $t < t_0$, а $Q_2(p)$ — при $t > t_0$. Подобным же образом $c^*(\tau_0)$ разбивает $Q^*(p)$ на четырехугольники $Q_1^*(p)$ и $Q_2^*(p)$. В обоих случаях пара противоположных сторон четырехугольника лежит на окружности $|w| = p$ и используемый далее модуль вычисляется для класса кривых, соединяющих эту пару сторон. Очевидно, что $Q_1^*(p)$ и $Q^*(p)$ соответствуют четырехугольникам $Q_1(p)$ и $Q(p)$ при симметризации, описанной в определении 8.3. В частности, согласно следствию 8.1,

$$m(Q(p)) \leqslant m(Q^*(p)), \tag{8.10}$$

$$m(Q_1(p)) \leqslant m(Q_1^*(p)). \tag{8.11}$$

Пусть $\psi(w)$, $\psi^*(w)$ — функции, обратные соответственно к $\varphi(\omega)$, $\varphi^*(\omega)$. Ясно, что отображение $\omega = \psi(w)$ переводит $Q(p)$ в подобласть полосы S, ограниченную частями прямых $t=0$ и $t=1$ и кривыми, которые соединяют эти прямые и при достаточно малых p сколь угодно близки к отрезкам $\operatorname{Re}\omega = -s_1$, $\operatorname{Re}\omega = s_2$ при надлежащем выборе положительных s_1 и s_2 (в соответствии с нашим предположением о кривых $\gamma(s)$). Прямая $t = t_0$ разбивает $Q(s_1, s_2)$ (в обозначениях леммы 8.3) на прямоугольники $Q(s_1, s_2)$, $Q_2(s_1, s_2)$, соответствующие $Q_1(p)$, $Q_2(p)$. Легко проверить, что

$$m(Q_1(p)) = m(Q_1(s_1, s_2)) + o((s_1 + s_2)^{-2}) = \frac{t_0}{s_1 + s_2} + o((s_1 + s_2)^{-2}),$$

$$m(Q(p)) = m(Q(s_1, s_2)) + o((s_1 + s_2)^{-2}) = \frac{1}{s_1 + s_2} + o((s_1 + s_2)^{-2}).$$

Используя подобным образом прямую $t = \tau_0$, мы получим прямоугольники $Q(s_1^*, s_2^*)$, $Q_1(s_1^*, s_2^*)$, соответствующие $Q^*(p)$, $Q_1^*(p)$, причем

$$m(Q_1^*(p)) = m(Q_1^*(s_1^*, s_2^*)) + o((s_1^* + s_2^*)^{-2}) =$$

$$= \frac{\tau_0}{s_1^* + s_2^*} + o((s_1^* + s_2^*)^{-2}),$$

$$m(Q^*(p)) = m(Q(s_1^*, s_2^*)) + o((s_1^* + s_2^*)^{-2}) =$$

$$= \frac{1}{s_1^* + s_2^*} + o((s_1^* + s_2^*)^{-2}).$$

Из неравенств (8.10) и (8.11) следует, что

$$\frac{t_0}{s_1 + s_2} \leqslant \frac{\tau_0}{s_1^* + s_2^*} + o((s_1 + s_2)^{-2}) + o((s_1^* + s_2^*)^{-2}),$$

или

$$\frac{1}{s_1 + s_2} \leqslant \frac{\tau_0}{t_0} \frac{1}{s_1^* + s_2^*} + o((s_1^* + s_2^*)^{-2}).$$

Поэтому

$$m(Q(p)) \leqslant \frac{\tau_0}{t_0} m(Q^*(p)) + o((s_1^* + s_2^*)^{-2}).$$

Это неравенство гораздо сильнее, чем утверждение теоремы 8.6, так как $m(Q(p))$, $m(Q^*(p))$ стремятся к нулю при p, стремящемся к нулю.

Допустим, наконец, что некоторая кривая $c'(t_0)$ не совпадает ни с одной кривой $c^*(\tau)$. Пусть $c(t_0)$ разбивает $Q(p)$ на четырехугольники $Q_1(p)$, $Q_2(p)$, как и выше. Тогда $c'(t_0)$ разбивает $Q^*(p)$ на соответствующие симметризованные четырехугольники $Q_1^*(p)$, $Q_2^*(p)$. Пусть Γ — континуум на $c'(t_0)$, не принадлежащий кривой $c^*(\tau)$, $0 < \tau < 1$. При достаточно малых p континуум Γ лежит в $Q^*(p)$. Пусть $Q'(p)$ — область, получающаяся из $Q^*(p)$ удалением континуума Γ. Пусть $m(Q'(p))$ — модуль этой области для класса кривых, лежащих в ней и соединяющих две ее граничные дуги, расположенные на окружности $|w| = p$. Пусть $Q(s_1, s_2)$, $Q(s_1^*, s_2^*)$ — прямоугольники, соответствующие $Q(p)$, $Q^*(p)$ так же, как выше. Пусть $Q_1(s_1, s_2)$, $Q_2(s_1, s_2)$ — прямоугольники, соответствующие $Q_1(p)$, $Q_2(p)$, на которые $Q(s_1, s_2)$ разбивается прямой $t = t_0$. При достаточно малых p множество $\psi^*(\Gamma)$ лежит в $Q(s_1^*, s_2^*)$. Пусть $Q'(s_1^*, s_2^*)$ — область, получающаяся из $Q(s_1^*, s_2^*)$ удалением $\psi^*(\Gamma)$, и пусть $m(Q'(s_1^*, s_2^*))$ — модуль этой области для

класса кривых, лежащих в ней и соединяющих ее граничные отрезки, расположенные на прямых $\operatorname{Re}\omega = -s_1^*$, $\operatorname{Re}\omega = s_2^*$. Можно проверить непосредственно, что (при наших обычных обозначениях различных модулей)

$$m(Q'(p)) \geqslant m(Q_1^*(p)) + m(Q_2^*(p)),$$
$$m(Q_1^*(p)) \geqslant m(Q_1(p)),$$
$$m(Q_2^*(p)) \geqslant m(Q_2(p)),$$
$$m(Q_1(p)) = m(Q_1(s_1, s_2)) + o((s_1 + s_2)^{-2}),$$
$$m(Q_2(p)) = m(Q_2(s_1, s_2)) + o((s_1 + s_2)^{-2}),$$
$$m(Q(p)) = m(Q(s_1, s_2)) + o((s_1 + s_2)^{-2}) =$$
$$= m(Q_1(p)) + m(Q_2(p)) + o((s_i + s_2)^{-2}),$$
$$m(Q'(p)) = m(Q'(s_1^*, s_2^*)) + o((s_1^* + s_2^*)^{-2}),$$

в то время как по лемме 8.3 при надлежащем положительном q и при достаточно больших s_1^*, s_2^* имеем

$$m(Q'(s_1^*, s_2^*)) + qm^2(Q'(s_1^*, s_2^*)) \leqslant m(Q^*(s_1^*, s_2^*)).$$

Наконец, ввиду того, что

$$m(Q^*(p)) = m(Q(s_1^*, s_2^*)) + o((s_1^* + s_2^*)^{-2})$$

и

$$m(Q(s_1, s_2)) = (s_1 + s_2)^{-1}, \qquad m(Q(s_1^*, s_2^*)) = (s_1^* + s_2^*)^{-1},$$

существует постоянная k (положительная и не зависящая от p), такая, что

$$m(Q(p)) + km^2(Q(p)) \leqslant m(Q^*(p))$$

при всех p из достаточно малого промежутка $0 < p \leqslant p_0$. Это завершает доказательство теоремы 8.6.

8.5. В изложенных выше результатах о симметризации мы имели дело с областями в обычном смысле слова, т. е. с однолистными областями. Однако эти результаты почти непосредственно распространяются и на не-

которые классы римановых областей. Начнем с определения тех классов, которые мы будем в дальнейшем рассматривать.

Определение 8.5. Пусть $\mathfrak{B}_1$ обозначает класс односвязных римановых областей, лежащих над w-сферой и не покрывающих ни начала, ни бесконечно удаленной точки.

Определение 8.6. Пусть $\mathfrak{B}_2$ обозначает класс двусвязных римановых областей, таких, что каждая из них получается из некоторой области класса $\mathfrak{B}_1$ гиперболического типа удалением некоторого континуума.

Определение 8.7. Пусть $\mathfrak{H}_1$ обозначает класс односвязных римановых областей, лежащих над w-сферой и таких, что полная угловая мера открытых дуг в этой области, лежащих над любой окружностью $|w|=R$ (R — произвольное положительное число), не превосходит 2π.

Очевидно, что такая область либо однократно покрывает w-сферу или w-сферу с выколотой точкой, либо является поверхностью гиперболического типа.

Определение 8.8. Пусть $\mathfrak{H}_2$ обозначает класс двусвязных римановых областей, таких, что каждая из них получается из некоторой области гиперболического типа класса $\mathfrak{H}_1$ удалением некоторого континуума.

Определение 8.9. Пусть $\mathfrak{Q}$ обозначает класс четырехугольников на римановых областях, для которых парой противоположных сторон служат простые дуги, лежащие над окружностью $|w|=R_0$, а двусвязная (риманова) область, получающаяся с помощью процесса, описанного в определении 8.3 (P находится в начале), принадлежит классу $\mathfrak{B}_2$ или классу $\mathfrak{H}_2$.

Лемма 8.4. *Определение* 8.1 *распространяется на области, принадлежащие классам* $\mathfrak{B}_1$ *и* $\mathfrak{H}_1$ (*где* P *находится в начале, а* λ — *положительная полуось*).

Здесь вместо окружности $|w|=R$, лежащей в рассматриваемой области, мы должны рассмотреть область, однократно покрывающую эту окружность. Поверхность класса $\mathfrak{B}_1$ не может покрывать полностью такую окружность, и поэтому симметризованная поверхность заполняется открытыми дугами (длина которых может быть бесконечной). Говоря о длине дуг, лежащих над $|w|=R$,

мы должны, конечно, учитывать кратность покрытия. Для поверхностей класса $\mathfrak{H}_1$ симметризованная область однолистна.

Определение 8.10. Пусть D — двусвязная область класса $\mathfrak{B}_2$ или $\mathfrak{H}_2$, полученная удалением континуума K_1 из римановой области $\mathfrak{R}$ соответствующего класса $\mathfrak{B}_1$ или $\mathfrak{H}_1$. Пусть область $\mathfrak{R}^*$ соответствует $\mathfrak{R}$ при симметризации относительно начала и положительной полуоси. Пусть K_1^* — континуум на $\mathfrak{R}^*$, заданный дугами

$$-\frac{1}{2}l_1(R) \leqslant \Phi \leqslant \frac{1}{2}l_1(R)$$

на окружностях или открытых дугах, заполняющих $\mathfrak{R}^*$, лежащий над теми окружностями $|w|=R$, над которыми лежит хотя бы одна точка континуума K_1; здесь $l_1(R)$ — полная угловая мера Лебега множества точек K_1, лежащих над окружностью $|w|=R$. Удаляя K_1^* из $\mathfrak{R}^*$, мы получим двусвязную (риманову) область D^*, которую будем считать соответствующей D при *круговой симметризации (относительно начала и положительной полуоси)*.

Лемма 8.5. *Определение* 8.3 *можно распространить на четырехугольники класса* $\mathfrak{Q}$, *если заменить определение* 8.2 *определением* 8.10 *для двусвязных областей, полученных из этих четырехугольников описанным процессом отражения.*

Теорема 8.7. *При круговой симметризации относительно начала и положительной полуоси для двусвязных областей классов* $\mathfrak{B}_2$ *и* $\mathfrak{H}_2$ *остаются справедливыми теоремы* 8.3 *и* 8.4. *Следствия* 8.1 *и* 8.2 *остаются верными для четырехугольников класса* $\mathfrak{Q}$. *Теорема* 8.5 *остается верной для областей гиперболического типа класса* $\mathfrak{H}_1$, *однократно покрывающих некоторую окрестность начала.*

Заметим сначала, что теорема 8.1 естественным образом распространяется на поверхности с самопересечениями. Используя соответствующее обобщение теоремы 8.2, мы получим результат теоремы 8.3 для двусвязных областей классов $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{H}_2$, а значит, и следствие 8.1 для четырехугольников класса $\mathfrak{Q}$. В доказательстве теоремы 8.4 однолистность функций $f(z)$, $f^*(z)$ не использовалась существенно, поэтому указанное доказательство

сохраняется и для областей классов $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{H}_2$. Но тогда справедливо и следствие 8.2 для четырехугольников класса $\mathfrak{Q}$. В теореме 8.5 мы должны теперь предполагать, что полюс функции Грина находится в точке, покрывающей начало. Доказательство этой теоремы проводится так же, как раньше. Нужно отметить, что в некоторых из перечисленных результатов симметризованная двусвязная область может быть вырожденной, то есть иметь бесконечный модуль.

Следствие 8.3. *Пусть J — односвязная риманова область, удовлетворяющая всем условиям теоремы* 8.6, *за исключением условия однолистности, которое заменяется условием принадлежности классу $\mathfrak{H}_1$. Пусть каждый четырехугольник $Q(p)$, построенный из этой области, как в теореме* 8.6, *принадлежит классу $\mathfrak{Q}$. Тогда при надлежащем определении симметризации области справедливо заключение теоремы* 8.6.

Симметризация J обобщает симметризацию, рассмотренную в теореме 8.6 так же, как определение 8.10 обобщает определение 8.2.

8.6. Естественным обобщением понятия однолистной функции является понятие многолистной[1]) функции порядка p (p — целое). Это означает, что функция, определенная в некоторой области, принимает в ней каждое свое значение не более чем p раз (с учетом кратности). При изучении некоторых классов многолистных функций методами экстремальной метрики и симметризации не представляет труда рассмотрение более общих классов, определенных следующим образом.

Определение 8.11. Обозначим через F_p, где p — положительное целое число, класс функций, регулярных в единичном круге $|z|<1$, имеющих в окрестности точки $z=0$ разложение вида

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \ldots$$

и являющихся p-листными в среднем по окружности. Последнее означает, что если функция $w = f(z)$ отображает круг $|z|<1$ на риманову область $\mathfrak{R}$, лежащую над

[1]) О теории многолистных функций см. также Хейман У., Многолистные функции, ИЛ, М., 1960. — *Прим. перев.*

плоскостью w, то полная угловая мера открытых дуг, лежащих на $\mathfrak{R}$ над любой окружностью $|w| = R$, где $R > 0$, не превосходит $2\pi p$.

Лемма 8.6. *Если* $f \in F_p$, *то* $[f(z)]^{1/p}$ *принадлежит* F_1, *причем мы выбираем ту ветвь корня, разложение которой в окрестности точки* $z = 0$ *имеет вид*

$$z + \frac{1}{p} a_{p+1} z^2 + \left[\frac{1}{p} a_{p+2} + \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) a_{p+1}^2\right] z^2 + \ldots . \quad (8.12)$$

Каждая ветвь функции $[f(z)]^{1/p}$ регулярна в круге $|z| < 1$, так как $f(z)$ не обращается в нуль в точках, отличных от начала. Эта функция автоматически удовлетворяет всем остальным условиям, налагаемым на функции класса F_1. Разложение (8.12) устанавливается непосредственно.

Теорема 8.8. *Если* $f \in F_1$, *то образ единичного круга* $E: |z| < 1$ *при отображении* $w = f(z)$ *покрывает круг* $|w| < 1/4$. *Точка окружности* $|w| = 1/4$ *может оказаться непокрытой только в том случае, когда* $f(z) = z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2}$, *где* α *вещественно.*

Рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q(w)\, dw^2 = \frac{dw^2}{w^2 (4w + 1)}$$

и функцию $\hat{f}(z) = z(1 - z)^{-2}$. Пусть $R(r)$, $0 < r < 1$, обозначает круговое кольцо

$$r < |z| < 1.$$

Пусть $f \in F_1$ и пусть $f(E)$ — риманов образ E при отображении f — не покрывает точку $w = \delta e^{-i\alpha}$, $\delta < 1/4$. Пусть $D(r)$ — риманов образ $R(r)$ при отображении $w = \frac{1}{4\delta} f(z)$. Очевидно, что $R(r) \in \mathfrak{H}_2$. Пусть $D^*(r)$ получается из $D(r)$ при круговой симметризации, построенной в соответствии с определением 8.10. Тогда $\frac{1}{2\pi} |Q(w)|^{1/2} |dw|$ — допустимая метрика в проблеме модуля для $D^*(r)$ относительно класса кривых, разделяющих граничные компоненты. Для некоторой функции $\varepsilon(r)$, стремящейся к нулю вместе с r, область $D^*(r)$ содержится в $\hat{f}(R(r[1 - \varepsilon(r)]))$, и в этой последней области $\frac{1}{2\pi} |Q(w)|^{1/2} |dw|$ — экстремальная метрика

для аналогичной проблемы модуля. Если при симметризации $f(E)$ (по лемме 8.4) получается область, не совпадающая с $\hat{f}(E)$, то при достаточно малых r для некоторой постоянной k_1, $k_1 > 0$, не зависящей от r, имеем

$$M(D^*(r)) + k_1 \leqslant M(\hat{f}(R(r[1-\varepsilon(r)])))$$

(лемма 2.2), где $M(D')$ снова обозначает модуль двусвязной области D' для класса кривых, разделяющих ее граничные компоненты. Если симметризованная $f(E)$ не получается из $f(E)$ вращением вокруг точки $w=0$, то

$$M(D(r)) + k_2 \leqslant M(D^*(r))$$

(теорема 8.5, теорема 8.7) при достаточно малых r для некоторой постоянной k_2, $k_2>0$, не зависящей от r. Итак, если область, полученная при симметризации $f(E)$, не совпадает с $\hat{f}(E)$ и не получается из $f(E)$ вращением вокруг $w=0$, то

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r} + k = M(D(r)) + k \leqslant$$
$$\leqslant M(\hat{f}(R(r[1-\varepsilon(r)]))) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r[1-\varepsilon(r)]}$$

при достаточно малых r для некоторого положительного k, не зависящего от r. Но это, очевидно, невозможно, и, следовательно, $f(z)$ совпадает с функцией $z(1+e^{i\alpha}z)^{-2}$.

Этот результат принадлежит Хейману [171, 172]. Аналогичный результат справедлив и для более широких классов, в частности для класса функций, однолистных в среднем по площади [15, 29, 99].

Следствие 8.4. *Если $f \in F_p$, то образ единичного круга $E: |z|<1$ при отображении $w=f(z)$ покрывает p раз каждую точку круга $|w|<(1/4)^p$. Точка окружности $|w|=(1/4)^p$ может оказаться покрытой менее p раз только в том случае, когда $f(z)=z^p(1+e^{i\alpha}z)^{-2p}$, где α вещественно.*

Этот результат сразу следует из теоремы 8.8 и леммы 8.6.

Теорема 8.9. *Пусть $f \in F_1$. Тогда*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z|=r, \quad 0<r<1,$$

причем в обоих случаях равенство возможно только для функции $f(z) = z(1 + e^{i\alpha}z)^{-2}$, *где* α *вещественно, в точках соответственно* $z = re^{-i\alpha}$ *и* $z = -re^{-i\alpha}$.

Этот результат принадлежит Хейману [171, 172]. Рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{dw^2}{w^2(d-w)},$$

где $d = -r(1+r)^{-2}$, и функцию $\hat{f}(z) = z(1-z)^{-2}$. Рассмотрим также в круге $|z| < 1$ квадратичный дифференциал

$$Q'(z)\,dz^2 = -\frac{dz^2}{z^2(z+r)(z+r^{-1})}.$$

Траектории этого дифференциала представляют собой жордановы кривые, охватывающие начало, отделяя его от точки $z = -r$ и окружности $|z| = 1$. Допустим, что эти траектории непрерывно зависят от параметра t, $0 < t < 1$, так что при t, стремящемся к нулю, соответствующая траектория $T(t)$ стягивается к началу. Пусть E_r обозначает круг $|z| < 1$, разрезанный вдоль отрезка $-1 < z \leqslant -r$, и пусть $R(t)$ — двусвязная область, граница которой состоит из $T(t)$ и границы E_r. Пусть $f \in F_1$. Введем обозначение $f(re^{i\theta}) = c$ и предположим, что $|c| \leqslant |d|$. Пусть $D(t)$ — риманов образ $R(t)$ при отображении $w = \left|\frac{d}{c}\right| f(z)$. Пусть $D^*(t)$ получается из $D(t)$ при круговой симметризации (ясно, что $D(t) \in \mathfrak{S}_2$). Левое неравенство теоремы 8.9 и соответствующее утверждение о равенстве устанавливаются с помощью сравнения модулей $D(t)$, $D^*(t)$ и $\hat{f}(R(t))$ так же, как при доказательстве теоремы 8.8.

Для того чтобы доказать правое неравенство, рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{dw^2}{w^2(d-w)},$$

где $d = r(1-r)^{-2}$, и функцию $\hat{f}(z) = z(1-z)^{-2}$. Рассмотрим также в круге $|z| < 1$ квадратичный дифференциал

$$Q''(z)\,dz^2 = \frac{dz^2}{z^2(z-r)(z-r^{-1})}.$$

Траектории этого дифференциала представляют собой открытые дуги, исходящие из точки $z=0$ и возвращающиеся в нее, отделяющие точку $z=-r$ от окружности $|z|=1$ и отрезка $-1<z<0$. Ортогональные траектории этого дифференциала представляют собой жордановы кривые, охватывающие начало, отделяя его от точки $z=r$ и окружности $|z|=1$. Пусть эти ортогональные траектории непрерывно зависят от параметра t, $0<t<1$, так что при t, стремящемся к нулю, соответствующая ортогональная траектория $N(t)$ стягивается к началу. Пусть E_r' обозначает круг $|z|<1$, разрезанный вдоль отрезка $-1<z\leqslant r$. Пересечение этой области с внешностью $N(t)$ представляет собой четырехугольник $S(t)$, пару противоположных сторон которого составляют части $N(t)$, симметричные относительно вещественной оси.

Пусть $f\in F_1$. Введем обозначение $f(re^{i\theta})=c$, и пусть $|c|\geqslant|d|$. Пусть $Q(t)$ — четырехугольник, являющийся образом $e^{i\theta}S(t)$ при отображении $w=\left|\frac{d}{c}\right| f(z)$. Пусть $m(Q(t))$ — модуль $Q(t)$ для класса кривых, соединяющих пару противоположных сторон, лежащих на линии $\left|\frac{d}{c}\right| f(e^{i\theta}N(t))$. При достаточно малых t над окружностью $C(t)$ с центром в начале, охватывающей кривую $\left|\frac{d}{c}\right| f(e^{i\theta}N(t))$ и касающейся ее, лежат в $Q(t)$ ровно две открытые дуги, и часть $Q(t)$, покрывающая внешность $C(t)$, представляет собой четырехугольник $Q'(t)$, пару противоположных сторон которого составляют эти дуги, причем $Q'(t)\in\mathfrak{D}$. Пусть $m(Q'(t))$ — модуль этого четырехугольника для класса кривых, соединяющих его стороны, лежащие над $C(t)$. Пусть $Q^*(t)$ получается из $Q(t)$ круговой симметризацией, построенной в соответствии с леммой 8.5, и пусть $m(Q^*(t))$ — ее модуль для класса кривых, соединяющих пару противоположных сторон, лежащих на $C(t)$. Пусть $\widehat{Q}(t)$ — образ $S(t)$ при отображении $w=\widehat{f}(z)$ и пусть $m(\widehat{Q}(t))$ — модуль $\widehat{Q}(t)$ для класса кривых, соединяющих пару противоположных сторон, лежащих на $\widehat{f}(N(t))$. Пусть J^* получается из $f(e^{i\theta}E_r')$ симметризацией в смысле следствия 8.3.

При надлежащем выборе положительной постоянной K метрика $K|Q(w)|^{1/2}|dw|$ является экстремальной в проблеме модуля, определяющей $m(\widehat{Q}(t))$. Если J^* не совпадает с $\widehat{f}(E_r')$, то из леммы 2.1 мы находим, что при достаточно малых t существует постоянная k_1, $k_1 > 0$, не зависящая от t и такая, что

$$m(Q^*(t)) + k_1 m^2(Q^*(t)) \leqslant m(\widehat{Q}(t)).$$

Если J^* не получается из $f(e^{i\theta}E_r')$ вращением вокруг точки $w = 0$, то в силу следствия 8.3 существует постоянная k_2, $k_2 > 0$, не зависящая от t и такая, что при всех достаточно малых t

$$m(Q'(t)) + k_2 m^2(Q'(t)) \leqslant m(Q^*(t)).$$

Очевидно, что в любом случае

$$m(Q(t)) \leqslant m(Q'(t)) \leqslant m(Q^*(t)).$$

Итак, если J^* не совпадает с $\widehat{f}(E_r')$ и не получается из $f(e^{i\theta}E_r')$ вращением вокруг точки $w = 0$, то

$$m(Q(t)) + km^2(Q(t)) \leqslant m(\widehat{Q}(t))$$

при всех достаточно малых t и при некотором положительном k, не зависящем от t. Но это невозможно, так как $Q(t)$ и $\widehat{Q}(t)$ конформно эквивалентны. Поэтому если $|f(re^{i\theta})| \geqslant r(1-r)^{-2}$, то должно иметь место равенство и f должна совпадать с функцией $z(1+e^{i\alpha}z)^{-2}$. Теорема 8.9 доказана.

Следствие 8.5. *Пусть* $f \in F_p$. *Тогда*

$$\frac{r^p}{(1+r)^{2p}} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r^p}{(1-r)^{2p}}, \qquad |z| = r, \qquad 0 < r < 1,$$

причем равенство имеет место только для функции $f(z) = z^p(1+e^{i\alpha}z)^{-2p}$, *где* α *вещественно*.

Этот результат сразу следует из теоремы 8.9 и леммы 8.6.

Теорема 8.10. *Пусть* $f \in F_1$. *Тогда при вещественных* θ

$$|f'(re^{i\theta})| \leqslant \frac{(1+r)}{(1-r)^3}\left|\frac{(1-r)^2 f(re^{i\theta})}{r}\right|^{\mu}, \qquad (8.13)$$

где $0 < r < 1$ *и*

$$\mu = 2\frac{1+r^2}{(1+r)^2}.$$

Равенство в (8.13) *имеет место только для функций* $f(z) = z(1 + e^{i\alpha}z)^{-2}$, *где* α *вещественно.*

Рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q(w)\,dw^2 = \frac{(w - 1/4)\,dw^2}{w^2(w-d)^2},$$

где $d = -r(1-r)^{-2}$, заданный на w-сфере. Этот квадратичный дифференциал имеет две особые траектории. Первая, T_1, лежит на положительной полуоси между точкой $w = 1/4$ и бесконечно удаленной точкой. Вторая, T_2, исходит из точки $w = 1/4$ и возвращается в нее, отделяя начало от точки $w = d$ и от бесконечности. Эта траектория вместе со своими концами разбивает w-сферу на две круговые области: область $\mathfrak{C}_1$, содержащую начало, и область $\mathfrak{C}_2$, содержащую точку $w = d$. Все траектории дифференциала $Q(w)\,dw^2$ в $\mathfrak{C}_1$ представляют собой жордановы кривые, отделяющие начало от точек $w = 1/4$, $w = d$ и от бесконечности и имеющие фиксированную длину

$$a_1 = \pi r^{-1}(1-r)^2$$

в метрике $|Q(w)|^{1/2}|dw|$. Пусть эти траектории непрерывно зависят от параметра t, $0 < t < 1$, так что при t, стремящемся к нулю, соответствующая траектория $T_1(t)$ стягивается к началу. Все траектории дифференциала $Q(w)\,dw^2$, лежащие в $\mathfrak{C}_2$, представляют собой жордановы кривые, отделяющие точку $w = d$ от начала, от точки $w = 1/4$ и от бесконечности и имеющие фиксированную длину

$$a_2 = \pi r^{-1}(1-r)(1+r)$$

в метрике $|Q(w)|^{1/2}|dw|$. Пусть эти траектории непрерывно зависят от параметра t, $0 < t < 1$, так что при t, стремящемся к нулю, соответствующая траектория $T_2(t)$ стягивается к точке $w = d$. Пусть $R_1(t)$, $R_2(t)$ — двусвязные области, получающиеся соответственно из $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ удалением кривых $T_1(t)$, $T_2(t)$ и их внутренностей. Пусть $M_1(t)$, $M_2(t)$ — модули $R_1(t)$, $R_2(t)$, вычисленные для класса кривых, разделяющих граничные компоненты.

Пусть $\widetilde{f}(z) = z(1+z)^{-2}$ и пусть $\widetilde{\Phi}(w)$ — функция, обратная к $\widetilde{f}$, заданная в $\widetilde{f}(E)$ (E — единичный круг). Пусть $f \in F_1$ и не совпадает ни с одной из функций $z(1+e^{i\alpha}z)^{-2}$. Пусть $R_1'(t)$, $R_2'(t)$ — римановы образы $R_1(t)$, $R_2(t)$ при отображении $-r(1-r)^{-2}(f(re^{i\theta}))^{-1} f(-e^{i\theta}\widetilde{\Phi}(w))$, а $M_1'(t)$, $M_2'(t)$ — их модули для класса кривых, разделяющих граничные компоненты. Ясно, что $R_1(t) \in \mathfrak{H}_2$, $R_2(t) \in \mathfrak{H}_2$ (также и $\mathfrak{B}_2$).

Пусть $R_1^*(t)$ получается из $R_1'(t)$ круговой симметризацией, $R_2^*(t)$ — область, полученная из симметризованной области $R_2'(t)$ поворотом на 180° вокруг начала, и пусть $M_1^*(t)$, $M_2^*(t)$ — модули этих областей для класса кривых, разделяющих граничные компоненты. Очевидно, что области $R_1^*(t)$, $R_2^*(t)$ однолистны и не налегают друг на друга. Легко проверить, что

$$\iint\limits_{R_1(t)\cup R_2(t)} |Q(w)|\,du\,dv = a_1^2 M_1(t) + a_2^2 M_2(t),$$

$$M_1'(t) = M_1(t), \quad M_2'(t) = M_2(t),$$

$$M_1^*(t) \geqslant M_1'(t), \quad M_2^*(t) \geqslant M_2'(t).$$

Кроме того, существует постоянная $k > 0$, не зависящая от t и такая, что при достаточно малых t

$$\iint\limits_{R_1^*(t)\cup R_2^*(t)} |Q(w)|\,du\,dv \geqslant a_1^2 M_1^*(t) + a_2^2 M_2^*(t) + k.$$

Наконец,

$$\iint\limits_{R_1^*(t)\cup R_2^*(t)} |Q(w)|\,du\,dv \leqslant \iint\limits_{R_1(t)\cup R_2(t)} |Q(w)|\,du\,dv -$$

$$-\frac{1}{2\pi}a_1^2 \log\left|\frac{r}{f(re^{i\theta})(1-r)^2}\right| - \frac{1}{2\pi}a_2^2 \log\left|\frac{r(1-r)f'(re^{i\theta})}{(1+r)f(re^{i\theta})}\right| + o(1).$$

Сопоставляя это неравенство с предыдущими равенствами и неравенствами, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\,a_1^2 \log\left|\frac{r}{f(re^{i\theta})\,(1-r)^2}\right| + \frac{1}{2\pi}\,a_2^2 \log\left|\frac{r\,(1-r)\,f'(re^{i\theta})}{(1+r)\,f(re^{i\theta})}\right| < 0,$$

или

$$(1+r)^2 \log\left|f'(re^{i\theta})\left[\frac{1+r}{(1-r)^3}\right]^{-1}\right| <$$

$$< 2\,(1+r^2) \log\left|f(re^{i\theta})\left[\frac{r}{(1-r)^2}\right]^{-1}\right|.$$

Отсюда сразу следует неравенство (8.13). Ясно, что равенство в (8.13) справедливо только для функций вида $z(1+e^{i\alpha}z)^{-2}$ (в соответствующих точках). Теорема 8.10 доказана.

Изменяя подходящим образом это доказательство, можно показать, что для $f \in F_1$, так же как для функций класса S, выполняется неравенство

$$|f'(re^{i\theta})| \leqslant \frac{1-r}{(1+r)^3}\left|\frac{(1+r)^2 f(re^{i\theta})}{r}\right|^{\nu},$$

где $0 < r < 1$, θ вещественно и

$$\nu = 2\,\frac{1+r^2}{(1-r)^2}.$$

Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

Следствие 8.6. *Пусть $f \in F_p$. Тогда при вещественных θ*

$$|f'(re^{i\theta})| \leqslant p\,\frac{1+r}{(1-r)^3}\left|\frac{(1-r)^2}{r}\right|^{\mu} |f(re^{i\theta})|^{\frac{\mu-1}{p}+1},$$

где $0 < r < 1$ и

$$\mu = 2\,\frac{1+r^2}{(1+r)^2}.$$

Равенство здесь имеет место только для функций $f(z) = z^p(1+e^{i\alpha}z)^{-2p}$, где α вещественно.

Этот результат следует из теоремы 8.10 и леммы 8.6.

Следствие 8.7. *Пусть* $f \in F_p$. *Тогда при вещественном* θ *и* $0 < r < 1$

$$|f'(re^{i\theta})| \leqslant \frac{p(1+r)}{r(1+r)} |f(re^{i\theta})|.$$

Равенство справедливо только для функций $f(z) = z^p(1+e^{i\alpha}z)^{-2p}$, *где* α *вещественно.*

Этот результат принадлежит Хейману [171, 172]. Он вытекает из следствий 8.5 и 8.6 и из того, что $\mu > 1$.

Следствие 8.8. *Пусть* $f \in F_p$. *Тогда при вещественном* θ *и* $0 < r < 1$

$$|f'(re^{i\theta})| \leqslant \frac{pr^{p-1}(1+r)}{r(1-r)^{2p+1}}.$$

Равенство имеет место только для функций $f(z) = z^p(1+e^{i\alpha}z)^{-2p}$, *где* α *вещественно.*

Этот результат вытекает из следствий 8.5 и 8.7.

Обобщить теорему 6.3 на функции класса F_p так же, как теорема 8.10 обобщает теорему 6.4, не удается. Это не удивительно, так как для функций класса F_p нельзя найти (не равной нулю) нижней грани величины $|f'(z)|$.

Аналогичными методами можно получить аналогичные результаты для ограниченных функций класса F_p, а также дальнейшие результаты о значениях, выпускаемых функциями этого класса. Однако мы ограничимся уже приведенными примерами.

8.7. Теорема 8.11. *Пусть функция* $f(z)$ *регулярна всюду в области* $|z| > 1$, *за исключением простого полюса в бесконечно удаленной точке, в окрестности которой справедливо разложение*

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots.$$

Тогда эта функция однолистна в некоторой окрестности N *бесконечно удаленной точки. Пусть, кроме того,* f *обладает тем свойством, что для любой жордановой кривой* C, *лежащей в* N *и отделяющей бесконечно удаленную точку от окружности* $|z| = 1$, *площадь образа двусвязной области, ограниченной* C *и окружностью* $|z| = 1$, *не превосходит площади области, ограниченной* $f(C)$. *Тогда*

$$|a_1| \leqslant 1,$$

причем равенство имеет место только для функций вида $z + e^{2i\alpha}/z$, *где* α *вещественно.*

Хотя этот результат и не следует непосредственно из общей теоремы о коэффициентах, доказательство последней, данное в п. 4.4, 4.5, 4.6, примененное к квадратичному дифференциалу $e^{-2i\alpha}\,dw^2$, сразу показывает, что $\operatorname{Re}\{e^{-2i\alpha}a_1\} \leqslant 1$ (ср. с теоремой 6.10), причем равенство имеет место лишь для функций $z + e^{2i\alpha}/z$. Отсюда немедленно следует утверждение теоремы 8.11.

Следствие 8.9. *Пусть* $f \in F_p$ *и имеет в окрестности начала разложение*

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \dots .$$

Тогда

$$|a_{p+1}| \leqslant 2p.$$

Равенство имеет место только для функций $z^p(1 + e^{i\alpha}z)^{-2p}$, *где* α *вещественно.*

Этот результат принадлежит Спенсеру [159].

Если $f \in F_1$ и в окрестности начала имеет разложение

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots , \tag{8.15}$$

то функция $[f(z^{-2})]^{-1/2}$ определена при $|z| > 1$, удовлетворяет условиям теоремы 8.11 и имеет в окрестности бесконечно удаленной точки разложение

$$z = -\frac{\frac{1}{2}a_2}{z} + \dots .$$

Поэтому

$$|a_2| \leqslant 2,$$

причем равенство справедливо лишь тогда, когда $f(z)$ есть одна из функций $z(1 + e^{i\alpha}z)^{-2}$, где α вещественно. Результат следствия 8.9 при любых p вытекает теперь из леммы 8.6.

8.8. Теорема 8.12. *Пусть* $0 < r_i < 1$, $i = 1,2$. *Тогда при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *существует функция* $f_t(z) \in S$, *непрерывно зависящая от параметра* t *и такая, что отображение* $w = f_t(z)$ *переводит единичный круг* $|z| < 1$ *в область, допустимую относительно квадратичного дифференциала*

$$Q_t(w)\,dw^2 = \begin{cases} \dfrac{w-a}{w^2(w-b)(w-c)}\,dw^2, & 0 \leqslant t < t_0, \\ -\dfrac{1}{w^2(w-b)(w-c)}\,dw^2, & t = t_0, \\ -\dfrac{w-a}{w^2(w-b)(w-c)}\,dw^2, & t_0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

где t_0 *— некоторое число, удовлетворяющее неравенству* $0 < t_0 < 1$, *и*

$$b = b(t) = f_t(-r_1),$$
$$c = c(t) = f_t(r_2),$$
$$a = a(t) > c, \qquad 0 \leqslant t < t_0,$$
$$a = a(t) < b, \qquad t_0 < t \leqslant 1.$$

Рассмотрим единичный круг $|z| < 1$ и точки $-r_1$, 0, r_2, 1, -1 на его диаметре, лежащем на вещественной оси. Пусть верхний полукруг конформно отображается на верхнюю полуплоскость плоскости Z, причем рассматриваемые точки переходят в точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 (в порядке возрастания на вещественной оси).

Рассмотрим функцию

$$\zeta = K\int_{Z_1}^{Z} \{(Z-Z^*)^2/[(Z-Z_1)(Z-Z_2)^2(Z-Z_3)(Z-Z_4)\times$$
$$\times(Z-Z_5)]\}^{1/2}\,dZ,$$

где выбрана та ветвь корня, вещественная часть которой положительна на отрезке вещественной оси, соединяющем точки Z_1 и Z_2, K—чисто мнимое число с отрицательной мнимой частью, а Z^* —вещественное число из отрезка $Z_4 \leqslant Z^* \leqslant Z_5$ (если Z^* совпадает с одним из концов, то можно произвести сокращение). Эта функция отображает верхнюю полуплоскость плоскости Z на область, ограниченную следующими прямолинейными отрезками. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A^*, A_5 — образы точек Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z^*, Z_5. Тогда A_1A_2 — полубесконечный горизонтальный отрезок, причем $A_2 = \infty$, а $\operatorname{Re}\zeta$ возрастает при переходе

от A_1 к A_2; A_2A_3—полубесконечный горизонтальный отрезок, причем значение $\operatorname{Im}\zeta$ на нем больше, чем на A_1A_2, а $\operatorname{Re}\zeta$ убывает при переходе от A_2 к A_3; A_3A_4 — вертикальный отрезок, причем $\operatorname{Im}\zeta$ убывает при переходе от A_3 к A_4; A_4A^* — горизонтальный отрезок, причем $\operatorname{Re}\zeta$ возрастает при переходе от A_4 к A^*; A^*A_5 — горизонтальный отрезок, причем $\operatorname{Re}\zeta$ убывает при переходе от A^* к A_5; A_5A_1 — вертикальный отрезок, причем $\operatorname{Im}\zeta$ убывает при переходе от A_5 к A_1. В частности, A^* может совпадать с A_4 или A_5, если Z^* совпадает с Z_4 или Z_5. При этом соответствующий отрезок вырождается в точку.

Пусть теперь область, ограниченная отрезками A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 (т. е. область, полученная из предыдущей удалением разреза, идущего в точку A^*), конформно отображается на верхнюю полуплоскость плоскости w, причем A_1, A_2, A_3, A_4, A^*, A_5 переходят в w_1, w_2, w_3, w_4, w^*, w_5, где $w_2 = 0$, а w_4 или $w_5 = \infty$, смотря по тому, в какой из точек A_4 или A_5 меньше $\operatorname{Re}\zeta$ (w_4 и w_5 обе лежат в бесконечно удаленной точке, если A_4 совпадает с A_5). При помощи отражения относительно отрезков $-1 < z < 1$ и $w_5w_1w_4$ вещественных осей в плоскостях z и w мы получим конформное отображение круга $|z| < 1$ на плоскость w с двубережным разрезом. Будем считать это отображение нормированным так, что $dw/dz = 1$ при $z = 0$. Тогда w_1 и w_3 обозначим соответственно через b и c, а ту из точек w_4 и w_5, которая не лежит в бесконечности, через a (если эти точки не совпадают).

Можно выбрать параметр t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, находящийся во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с Z^*, такой, что $t = 0$ при $Z^* = Z_4$, $t \neq 1$ при $Z^* = Z_5$. Соответствующую функцию обозначим через $f_t(z)$. Ясно, что эта функция непрерывно зависит от t в смысле обычной сходимости. Очевидно также, что a, b, c изменяются непрерывно на w-сфере вместе с t. Кроме того, ясно, что A_4 и A_5 могут совпадать только при одном значении t, которое мы обозначим через t_0, $0 < t_0 < 1$. Заметим, что $f_0(z) = z(1+z)^{-2}$, $f_1(z) = z(1-z)^{-2}$, так что $a > c$ при $t = 0$, а следовательно, и при $0 \leqslant t < t_0$ и $a < b$ при $t = 1$, а следовательно, и при $t_0 < t \leqslant 1$.

Если теперь распространить ζ как (неоднозначную) функцию w на всю плоскость w с помощью отражения в отрезках w_1w_2, w_2w_3, w_3w_4, w_4w_5, w_5w_1, то $d\zeta^2$ окажется квадратичным дифференциалом на w-сфере с простыми полюсами в b и c, с двойным полюсом в $w=0$ и, если $t\neq t_0$, с простым полюсом в бесконечно удаленной точке и с простым нулем в a. В остальных точках этот дифференциал регулярен и не равен нулю. Кроме того, открытый прямолинейный отрезок, соединяющий 0 с b, служит траекторией этого дифференциала. Поэтому $d\zeta^2$ с точностью до положительного множителя совпадает с квадратичным дифференциалом $Q_t(w)\,dw^2$, описанным в формулировке теоремы. Образ круга $|z|<1$ при отображении $w=f_t(z)$, $t\neq t_0$, получается удалением из w-сферы разреза вдоль траектории дифференциала $Q_t(w)\,dw^2$, идущей из a в бесконечно удаленную точку по вещественной оси, и вдоль дуг траекторий, соединяющих a соответственно с w^* и $\overline{w}^*$; при $t=t_0$ этот образ получается удалением из w-сферы разреза вдоль траектории дифференциала $Q_t(w)\,dw^2$, идущей из w^* в $\overline{w}^*$ через бесконечно удаленную точку. Поэтому во всех случаях эта область допустима относительно дифференциала $Q_t(w)\,dw^2$. Это завершает доказательство теоремы 8.12.

8.9. Теорема 8.13. *Пусть* $0<r_i<1$, $i=1,2$, *и пусть* $f\in F_1$. *Тогда существует число* t, $0\leqslant t\leqslant 1$, *такое, что*

$$|f_t(-r_1)|=|f(-r_1)|,$$

где $f_t=f_t(z)$ *определена в предыдущем пункте. При этом значении* t

$$|f(r_2)|\leqslant|f_t(r_2)|,$$

причем равенство имеет место только при $f(z)\equiv f_t(z)$.

Из теорем 8.9 и 8.12 следует, что для данной $f\in F_1$ найдется значение t, $0\leqslant t\leqslant 1$, такое, что

$$|f_t(-r_1)|=|f(-r_1)|.$$

Всюду ниже в этом доказательстве мы будет считать, что t принимает это значение.

Если $t \neq t_0$, то разрежем w-сферу вдоль замыканий тех траекторий дифференциала $Q_t(w)\,dw^2$, которые имеют предельные концевые точки в a, а при $t = t_0$ — вдоль замыкания траектории этого дифференциала, проходящей через бесконечно удаленную точку; в обоих случаях проведем также разрез вдоль отрезка $b \leqslant w \leqslant c$. Ортогональные траектории дифференциала $Q_t(w)\,dw^2$ в достаточно малой окрестности точки $w = 0$ представляют собой жордановы кривые, охватывающие эту точку. Пусть ортогональные траектории, заполняющие эту окрестность начала, непрерывно зависят от параметра s, $0 < s < 1$, так что при s, стремящемся к нулю, соответствующая ортогональная траектория $N(s)$ стягивается к началу. Пересечение внешности $N(s)$ с w-сферой, разрезанной описанным выше способом, определяет два четырехугольника, каждый из которых имеет на $N(s)$ пару противоположных сторон. Обозначим эти четырехугольники через $R_1(s)$, $R_2(s)$ так, чтобы точка c принадлежала границе $R_1(s)$. Пусть $M_1(s)$, $M_2(s)$ — модули этих четырехугольников, вычисленные в обоих случаях для класса кривых, соединяющих стороны, лежащие на $N(s)$.

Пусть $f \in F_1$ и пусть $|f(r_2)| \geqslant |f_t(r_2)|$, но $f(z)$ не совпадает с $f_t(z)$. Пусть $\Phi_t(w)$ — функция, обратная к $f_t(z)$, заданная в $f_t(E)$, и пусть $R_1'(s)$, $R_2'(s)$ — римановы образы $R_1(s)$, $R_2(s)$ при отображении, осуществляемом функцией $f(\Phi_t(w))$. Пусть $M_1'(s)$, $M_2'(s)$ — модули этих четырехугольников, соответствующие $M_1(s)$, $M_2(s)$. Пусть $C(s)$ — окружность с центром в начале, охватывающая кривую $f(\Phi_t(N(s)))$ и касающаяся ее. При достаточно малых s над $C(s)$ в каждом из $R_1'(s)$, $R_2'(s)$ лежат ровно две открытые дуги, а части $R_1'(s)$, $R_2'(s)$, покрывающие внешность $C(s)$, образуют четырехугольники $R_1''(s)$, $R_2''(s)$, каждый из которых имеет пару противоположных сторон, определяемых этими двумя дугами. Пусть $M_1''(s)$, $M_2''(s)$ — модули $R_1''(s)$, $R_2''(s)$, вычисленные в обоих случаях для класса кривых, соединяющих пару противоположных сторон, лежащих над

$C(s)$. Очевидно, что $R_i''(s) \in \mathfrak{Q}$, $i = 1,2$ Пусть $R_1^*(s)$ получается из $R_1''(s)$ круговой симметризацией и $R_2^*(s)$ — четырехугольник, полученный из симметризованной области $R_2''(s)$ поворотом на 180° вокруг начала. Области $R_1^*(s)$, $R_2^*(s)$, очевидно, однолистны и не налегают друг на друга. Пусть $M_1^*(s)$, $M_2^*(s)$ — модули $R_1^*(s)$, $R_2^*(s)$, вычисленные в обоих случаях для класса кривых, соединяющих пару противоположных сторон, лежащих на $C(s)$.

Четырехугольник $R_1(s)$ заполнен дугами траекторий дифференциала $Q_t(w)\,dw^2$, имеющими одну и ту же длину a_1 ($a_1 > 0$) в метрике $|Q_t(w)|^{1/2}\,|dw|$. Аналогично $R_2(s)$ заполнен дугами траекторий дифференциала $Q_t(w)\,dw^2$, имеющими одну и ту же длину a_2 ($a_2 > 0$) в этой метрике. Числа a_1, a_2 зависят, очевидно, от s. Далее,

$$\iint\limits_{R_1(s)\cup R_2(s)} |Q_t(w)|\,du\,dv = a_1^2 M_1(s) + a_2^2 M_2(s).$$

Ясно, что

$$M_1'(s) = M_1(s), \quad M_2'(s) = M_2(s),$$

$$M_1''(s) \geqslant M_1'(s), \quad M_2''(s) \geqslant M_2(s).$$

С другой стороны, ввиду того, что $|f_t(-r_1)| = |f(-r_1)|$ и $|f_t(r_2)| \leqslant |f(r_2)|$, а $f(z)$ не тождественна с $f_t(z)$, согласно лемме 2.1 и следствию 8.3, найдется постоянная k, $k > 0$, не зависящая от s и такая, что

$$\iint\limits_{R_1^*(s)\cup R_2^*(s)} \cdot\ |Q_t(w)|\,du\,dv \geqslant a_1^2 M_1''(s) + a_1^2 k\,[M_1''(s)]^2 + a_2^2 M_2''(s) + a_2^2 k\,[M_2''(s)]^2 + o(1).$$

Но так как

$$\iint\limits_{R_1(s)\cup R_2(s)} |Q_t(w)|\,du\,dv \geqslant \iint\limits_{R_1^*(s)\cup R_2^*(s)} |Q_t(w)|\,du\,dv + o(1),$$

предыдущие неравенства невозможны, а это означает, что должно выполняться неравенство

$$|f(r_2)| \leqslant |f_t(r_2)|,$$

причем равенство имеет место лишь тогда, когда $f(z) \equiv f_t(z)$. Доказательство теоремы 8.13 закончено.

Следствие 8.10. *Существует единственная функция* $f_t(z)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *для которой* $f_t(-r_1)$ *имеет заданное значение из промежутка*

$$-\frac{r_1}{(1-r_1)^2} \leqslant w \leqslant -\frac{r_1}{(1+r_1)^2}.$$

Следствие 8.11. *Пусть* $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1$ *и пусть* $f \in F_1$. *Тогда*

$$|f(-r_1)| + |f(r_2)| \leqslant \frac{r_2}{(1-r_2)^2} + \frac{r_1}{(1+r_1)^2}.$$

Если $r_1 < r_2$, *то равенство имеет место только для функции* $z(1-z)^{-2}$. *Если* $r_1 = r_2$, *то равенство имеет место только для функций* $z(1 \pm z)^{-2}$.

Пусть $f_t(z)$ такова, что $|f_t(-r_1)| = |f(-r_1)|$. Тогда

$$|f(-r_1)| + |f(r_2)| \leqslant |f_t(-r_1)| + |f_t(r_2)|,$$

причем равенство имеет место только тогда, когда $f(z) \equiv f_t(z)$. Пусть $f_t(z)$ имеет в начале степенное разложение

$$f_t(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots .$$

Коэффициенты этого разложения, очевидно, вещественны, поэтому $a_n \leqslant n$[1]). Далее,

$$|f_t(-r_1)| + |f_t(r_2)| = r_2 + a_2 r_2^2 + \ldots +$$

$$+ r_1 - a_2 r_1^2 + \ldots,$$

и так как $r_1 \leqslant r_2$, то

$$|f_t(-r_1)| + |f_t(r_2)| \leqslant r_2 + 2r_2^2 + 3r_2^3 + \ldots +$$

$$+ r_1 - 2r_1^2 + 3r_1^3 + \ldots \leqslant \frac{r_2}{(1-r_2)^2} + \frac{r_1}{(1+r_1)^2}.$$

---

[1]) См. Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1948, стр. 215.

Если $r_1 < r_2$, то равенство здесь имеет место лишь в том случае, когда $a_n = n$ при всех n, т. е. $f(z) = z(1-z)^{-2}$. Если $r_1 = r_2$, то равенство здесь имеет место только в том случае, когда $a_n = n$ при всех нечетных n, т. е. $f(z) = z(1 \pm z)^{-2}$.

Следствие 8.12. *Пусть* $f \in F_1$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1$, θ *вещественно. Тогда*

$$|f(-r_1 e^{i\theta})| + |f(r_2 e^{i\theta})| \leqslant \frac{r_2}{(1-r_2)^2} + \frac{r_1}{(1+r_1)^2}.$$

Если $r_1 < r_2$, *то равенство справедливо только для функции* $z(1 - e^{-i\theta} z)^{-2}$. *Если* $r_1 = r_2$, *то равенство имеет место только для функций* $z(1 \pm e^{-i\theta} z)^{-2}$.

Следствие 8.13. *Пусть* $f \in F_1$, $0 < r < 1$. *Тогда при* $|z_1| = r$

$$|f(-z_1)| + |f(z_1)| \leqslant \frac{2r(1+r^2)}{(1-r^2)^2},$$

причем равенство осуществляется только для функций $z(1 \pm e^{-i\theta} z)^{-2}$ *при* $\theta = \arg z_1$.

Этот результат в частном случае однолистных функций и без утверждения о единственности был получен Голузиным [41].

Следствие 8.14. *Пусть* $f \in F_1$ *и имеет в окрестности начала разложение* (8.15). *Тогда*

$$|a_3| \leqslant 3.$$

Равенство осуществляется только для функций $z(1 + e^{i\alpha} z)^{-2}$, *где* α *вещественно.*

В самом деле, пусть $z = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$, θ вещественно. Тогда, согласно следствию 8.13,

$$|f(-z) + f(z)| \leqslant |f(-z)| + |f(z)| \leqslant \frac{2r(1+r^2)}{(1-r^2)^2}.$$

Поэтому

$$r[1 + \operatorname{Re}(a_3 z^2) + O(r^4)] \leqslant r[1 + 3r^2 + O(r^4)],$$

т. е.

$$\operatorname{Re}(a_3 e^{2i\theta}) \leqslant 3.$$

При надлежащем выборе θ получаем $|a_3| \leqslant 3$.

Следствие 8.15. *Пусть* $f \in F_p$ *и имеет в окрестности начала разложение* (8.14). *Тогда*

$$\left| \frac{a_{p+2}}{p} + \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) a_{p+1}^2 \right| \leqslant 3.$$

Равенство осуществляется только для функций $z^p(1 + e^{i\alpha} z)^{-2p}$, *где* α *вещественно.*

Это неравенство следует из леммы 8.6 и следствия 8.14. Утверждение о равенстве проверяется непосредственно.

Следствие 8.16. *Пусть* $f \in F_p$ *и имеет в окрестности начала разложение* (8.14). *Тогда*

$$|a_{p+2}| \leqslant 2p^2 + p.$$

Равенство осуществляется для функций $z^p(1 + e^{i\alpha} z)^{-2p}$, *где* α *вещественно. При* $p > 1$ *оно имеет место только для этих функций.*

Согласно следствиям 8.9 и 8.15,

$$\frac{1}{p}|a_{p+2}| \leqslant 3 + \frac{1}{2p}\left(1 - \frac{1}{p}\right) 4p^2, \qquad (8.16)$$

т. е.

$$|a_{p+2}| \leqslant 2p^2 + p.$$

В силу утверждения о равенстве в следствии 8.9, равенство в (8.16) имеет место только для функций $z^p(1 + e^{i\alpha} z)^{-2p}$, если $p > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Адамар (Hadamard J.) Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. *Mém. Acad. Sci. Inst. France* **33** (ser. 2), 4 (1907), 1—128.

[2] Александер (Alexander J. W.) Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Ann. of Math.*, **17** (1915—1916), 12—22.

[3] Альфорс (Ahlfors L. V.) Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. *Acta Soc. Scient Fenn.*, N. s. A, **1**, № 9 (1930), 1—40.

[4] — Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. *Comment. Math. Helvet.*, **24** (1950), 100—134.

[5] — Development of the theory of conformal mapping and Riemann surfaces through a century. Contributions to the Theory of Riemann Surfaces. *Ann. of Math. Stud.*, **30** (1953), 3—13.

[6] — и Бёрлинг (Beurling A.) Invariants conformes et problèmes extrémaux. Dixième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, 1946, 341—351.

[7] — —Conformal invariants and function-theoretic null-sets. *Acta math.*, **83** (1950), 101—129.

[8] Базилевич И. Е. Улучшение оценок коэффициентов однолистных функций. *Матем. сб.*, н. с., **22** (1948), 381—390.

[9] — О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций. *Матем. сб.*, н. с., **28** (1951), 147—164.

[10] Безикович (Besicovitch A. S.) On two problems of Löwner. *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 141—144.

[11] Бёрлинг (Beurling A.) Études sur un problème de majoration. Thesis, Upsala, 1933.

[12] — Sur les fonctions limites quasi analytiques des fractions rationelles. Attonde Skand. Mathematiker Kongressen i Stockholm, 1934, 199—210.

[13] Бергман (Bergmann S.) Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. *Math. Ann.*, **86** (1922), 237—271.

[14] Бермант А. Ф. Sur quelques propriétés des fonctions régulières. *ДАН СССР*, н. с., **18** (1938), 137—140.

[15] — Remarque sur le lemme de Schwarz. *Compt. rend. Acad. Sci.* (Paris), **207** (1938), 31—33.

[16] Бериацкий (Biernacki M.) Sur les fonctions multivalentes d'ordre *p*. *Compt. rend. Acad. Sci.* (Paris), **203** (1936), 449—451.

[17] — Sur les fonctions univalentes. *Mathematica* (*Cluj*), **12**, 49—64 (1936).

[18] — Sur les domaines couverts par des fonctions multivalentes, *Bull. Sci. Math.*, **70** (ser. 2) (1946), 45—51.

[19] — Sur les fonctions en moyennes multivalentes. *Bull. Sci. Math.*, **70** (ser. 2) (1946), 51—76.

[20] Бибербах (Bieberbach L.) Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. *Rc. Circolo Mat. Palermo,* **38** (1914), 98—112.

[21] — Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung. *Math. Annalen,* **77** (1916), 153—172.

[22] — Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *Sitzgsber. Preuß. Akad. Wiss.,* 1916, 940—955, zweiter Halbband.

[23] — Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen. *Math. Z.*, **4** (1919), 295—305.

[24] — Einführung in die konforme Abbildung (впервые опубликовано в 1915 г., ссылки делаются на английский перевод 1953 г.).

[25] Бор (Bohr H.) Über streckentreue und konforme Abbildung. *Math. Z.*, **1** (1918), 403—420.

[26] Бохнер (Bochner S.) Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen. *Math. Z.*, **14** (1922), 180—207.

[27] Брёдель (Brödel W.) Über die Deformationsklassen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig,* Math.-phys. Kl., 87 (1935), 85—120.

[28] Волонтис (Wolontis V.) Properties of conformal invariants. *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 587—606.

[29] Гарабедян и Ройден (Garabedian P. R. and Royden H. L.) The one-quarter theorem for mean univalent functions, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 316—324.

[30] — и Шиффер (Schiffer M.) A coefficient inequality for schlicht functions. *Ann. of Math.*, **61**, (1955), 116—136.

[31] — — A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *J. Rational Mechanics a. Analysis,* **4** (1955), 427—465.

[32] Гензель и Ландсберг (Hensel K. und G. Landsberg) Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale, Leipzig, 1902.

[33] Гильберт (Hilbert D.) Zur Theorie der konformen Abbildung. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen,* Math.-phys. Kl. **1909**, 314—323.

[34] Голузин Г. М. О теоремах искажения в теории конформных отображений, *Матем. сб.*, **1** (2), (1936), 127—134.

[35] — Sur les théorèmes de rotation dans la théorie des fonctions univalentes. *Матем. сб.* н. с., **1** (1936), 293—296.

[36] — Sur la représentation conforme. *Матем. сб.*, н. с., **1** (1936), 273—281.
[37] — О теоремах искажения в конформных отображениях многосвязных областей. *Матем. сб.*, н. с., **2** (1937), 37—63.
[38] — Некоторые теоремы покрытия для функций, регулярных в круге. *Матем. сб.*, н. с., **2** (1938), 617—618.
[39] — О некоторых оценках коэффициентов однолистных функций. *Матем. сб.*, н. с., **3** (1938), 321—330.
[40] — К теории однолистных функций. *Матем. сб.*, н. с., **12** (1943), 48—55.
[41] — О теоремах искажения в теории конформных отображений. *Матем. сб.*, н. с., **18** (1946), 379—390.
[42] — О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций. *Матем. сб.*, н. с., **19** (1946), 183—202.
[43] — Метод вариаций в конформном отображении. I. *Матем. сб.*, н. с., **19** (1946), 203—236.
[44] — Метод вариаций в конформном отображении. II. *Матем. сб.*, н. с., **21** (1947), 83—115.
[45] — Метод вариаций в конформном отображении. III. *Матем. сб.*, н. с., **21** (1947), 119—130.
[46] — О коэффициентах однолистных функций. *Матем. сб.*, н. с., **22** (1948), 373—380.
[47] — Метод вариаций в конформном отображении. IV. *Матем. сб.*, н. с., **29** (1951), 455—468.
[48] — Некоторые вопросы теории однолистных функций. *Тр. Матем. института им. В. А. Стеклова*, 27 (1949).
[49] Грёч (Grötzsch H.) Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math.-Phys. Kl. **80** (1928), 367—376.
[50] — Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. II. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math.-phys. Kl., **80** (1928), 497—502.
[51] — Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math.-phys. Kl., **80** (1928), 503—507.
[52] — Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math.-phys. Kl., **81** (1929), 38—50.
[53] — Über konforme Abbildung unendlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche mit endlich vielen Häufungsrandkomponenten. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math.-phys. Kl., **81** (1929), 51—86.
[54] — Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. II. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math.-phys. Kl., **81** (1929), 217—221.
[55] — Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlich-vielfach zusammenhängender Bereiche. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, Math.-phys. Kl., **83** (1931), 185—200.

[56] — Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig,* Math.-phys. Kl., **83** (1931), 254—279.

[57] — Über die Verzerrung bei schlichter konformer Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche III. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss Leipzig.* Math.phys. Kl., **83** (1931), 283—297.

[58] — Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig,* Math.-phys. Kl., **84** (1932), 15—36.

[59] — Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche. II. *Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig,* Math.-phys. Kl., **84** (1932), 269—278.

[60] — Über zwei Verschiebungsprobleme der konformen Abbildung. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss.,* Phys.-math. Kl., **1933**, 87—100.

[61] — Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wnss.,* Phys.-math. Kl., **1933**, 654—671.

[62] — Über die Geometrie der schlichten konformen Abbildung. II. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss.,* Phys.-Math. Kl., **1933**, 893—908.

[63] — Über die Geometrie der schlichten Konformen Abbildung. III. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss.,* Phys.-math. Kl., **1934**, 434—444.

[64] — Verallgemeinerung eines Bieberbachschen Satzes. *Jber. Deutsch. Math. Ver.,* **43** (1934), 143—145.

[65] — Über Flächensätze der konformen Abbildung. *Jber. Deutsch. Math. Ver.,* **44** (1934), 266—269.

[66] — Einige Bemerkungen zur schlichten konformen Abbildung. *Jber. Deutsch. Math. Ver.,* **44** (1934), 270—275.

[67] Гронуолл (Gronwall T. H.). Some remarks on conformal representation. *Ann. of Math.,* **16** (1914—1915), 72—76.

[68] — Sur la déformation dans la représentation conforme, *Compt. rend. Acad. Sci.* (Paris), **162** (1916), 249—252.

[69] — Sur la déformation dans la représentation conforme sous des conditions restrictives. *Compt. rend Acad. Sci.* (Paris), **162** (1916), 316—318.

[70] Гросс (Gross W.) Über die Singularitäten analytischer Funktionen. *Mh. Math. und Physik,* **29** (1918), 3—47.

[71] — Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen. *Math. Z.,* **2** (1918) 242—294.

[72] Грунский (Grunsky H.) Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. *Schr. Math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin,* **1** (1932), 93—140.

[73] — Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung. *Jber. Deutsch. Math. Ver.,* **43** (1934), 140—143.

[74] — Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen. *Math. Z.,* **45** (1939), 29—61.

[75] Гун Шэн (Kung Sun) Contributions to the theory of schlicht functions, I, distortion theorems. *Acta Sci. Sinica,* 4 (1955), 229—249.

[76] Гурвиц (Hurwitz A.) Über die Anwendung der elliptischen Modulfunktionen auf einen Satz der allgemeinen Funk-

tionentheorie. *Vjschr naturforsch. Ges. Zürich,* **49** (1904), 242—253.
[77] — и Курант (und Courant R.) Funktionen Theorie,. Berlin, 1922.
[78] Дженкинс (Jenkins James A.) Some problems in conformal mapping. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **67** (1949), 327—350.
[79] — Positive quadratic differentials in triply-connected domains. *Ann. of Math.,* **53** (1951), 1—3.
[80] — On an inequality of Golusin. *Amer. J. Math.,* **73** (1951), 181—185.
[81] — On a theorem of Spencer. *J. London Math. Soc.,* **26** (1951), 313—316.
[82] — Remarks on «Some problems in conformal mapping». *Proc. Am. Math. Soc.,* **3** (1952), 147—151
[83] — On values omitted by univalent functions. *Amer. J. Math.,* **75** (1953), 406—408.
[84] — Some results related to extremal length. Contributions to the Theory of Riemann Surfaces. *Ann. of Math. Stud.,* **30** (1953), 87—94.
[85] — Symmetrization results for some conformal invariants. *Amer. J. Math.,* **75** (1953), 510—522.
[86] — Various remarks on univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **4** (1953), 595—599.
[87] — Another remark on «Some problems in conformal mapping». *Proc. Amer. Math. Soc.,* **4** (1953), 978—981.
[88] — A recent note of Kolbina. *Duke Math. J.,* **21** (1954), 155—162.
[89] — On Bieberbach—Eilenberg functions. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **76** (1954), 389—396.
[90] — On a problem of Gronwall. *Ann. of Math.,* **59** (1954), 490—504.
[91] — On the local structure of the trajectories of a quadratic differential. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **5** (1954), 357—362.
[92] — A general coefficient theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **77** (1954), 262—280.
[93] — Some uniqueness results in the theory of symmetrization. *Ann. of Math.,* **61** (1955), 106—115.
[94] — On Bieberbach — Eilenberg functions. II. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **78** (1955), 510—515.
[95] — On a lemma of R. Huron. *J. London Math. Soc.,* **30** (1955), 382—384.
[96] — On circumferentially mean p-valent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **79** (1955), 423—428.
[97] — Some theorems on boundary distortion. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **81** (1956), 477—500.
[98] — Some new canonical mappings for mutiply connected domains. *Ann. of Math.,* **65** (1957), 179—196.
[99] — On a conjecture of Spencer. *Ann. of Math.,* **65** (1957), 405—410.
[100] — On the existence of certain general extremal metrics. *Ann. of Math.,* **66** (1957), 440—453.

[101] — и Морс (and Marston Morse) Topological methods on Riemann surfaces. Pseudoharmonic functions. Contributions to the theory of Riemann surfaces. *Ann. of Math., Stud.,* **30** (1953), 11—139.

[102] — — Curve families F^* locally the level curves of a pseudoharmonic function, *Acta Math.*, **91** (1954), 1—42.

[103] — и Спенсер (and D. C. Spencer) Hyperelliptic trajectories. *Ann. of Math.,* **53** (1951), 4—35.

[104] Дуглас (Douglas J.) Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **33** (1931), 263—321.

[105] Дьедонне (Dieudonné J.) Sur les fonctions univalentes. *Compt. rend. Acad. Sci.,* **192** (1931), 1148—1150.

[106] Жюлиа (Julia G.) Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la représentation conforme. *Ann. Scient. Ecole Norm. sup.,* **39** (ser. 3) (1922), 1—28.

[107] Картрайт (Cartwright M. L.) Some inequalities in the theory of functions. *Math. Ann.,* **111** (1935), 98—118.

[108] Керекьярто (Kerékjárto B. von) Vorlesungen über Topologie, Berlin, 1923.

[109] Кёбе (Koebe P.) Über die Uniformisierung beliebiger analytischen Kurven. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen,* Math.-Phys. Kl., **1907**, 191—210.

[110] — Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen,* Math.-Phys. Kl., **1909**, 68—76.

[111] — Zur konformen Abbildung unendlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen,* Math.-phys. Kl., **1918**, 60—71.

[112] — Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. V. Abbildung mehrfach zusammenhännender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche (Fortsetzung). *Math. Z.,* **2** (1918), 198—236.

[113] — Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. IV. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. *Acta Math.,* **41** (1918), 305—344.

[114] Колбина Л. И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении, *ДАН СССР,* н. с., **84** (1952), 865—868.

[115] — Конформное отображение единичного круга на неналегающие друг на друга области. *Вестник Ленинградского унив.,* **5** (1955), 37—43.

[116] Комату (Komatu Y.) Untersuchungen über konforme Abbildung von zweifach zusammenhängenden Gebleten. *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan,* **25** (ser. 3) (1943), 1—42.

[117] — и Одзава (and Ozawa M.) Conformal mapping of multiply connected domains. I. *Kodai Math. Seminar Rep.,* **3** (1951), 81—95.

[118] Курант (Courant R.) Über direkte Methode in der Variationsrechnung und über verwandte Fragen. *Math. Ann.,* **97** (1927), 711—736.

[119] — Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. ИЛ, М., 1953.
[120] Куфарев П. П. и Фалес А. Э. Об одной экспериментальной задаче для дополнительных областей. *ДАН СССР*, н. с., **81** (1951), 995—998.
[121] Лаврентьев М. А. К теории конформных отображений. *Тр. физ. матем. ин-та АН СССР*, **5** (1934), 159—246.
[122] Ландау (Landau E.) Über schlichte Funktionen. *Math. Z.*, 30 (1929), 635—638.
[123] Лебедев Н. А. Мажорантная область для выражения $I=\ln\{z^{\lambda}[f'(z)]^{1-\lambda}/[f(z)]^{\lambda}\}$ в классе *S*. *Вестник Ленинградского унив.*, **8** (1955), 29—41.
[124] Лёвнер (Löwner K) Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden. *Ber. Verh. sächs. Ges. Wiss. Leipzig*, Math.-phys, Kl., **69** (1917), 89—106.
[125] — Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des äußeren des Einheitskreises. *Math. Z.*, **3** (1919), 65—77.
[126] — Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I. *Math. Ann.*, **89** (1923), 103—121.
[127] Литтльвуд (Littlewood J. E.) On inequalities in the theory of functions. *Proc. London Math. Soc.*, **23** (second series) (1925), 481—519.
[128] — и Пэли (and Paley R. E. A. C.) A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients. *J. London Math. Soc.*, **7** (1932), 167—169.
[129] Марти (Marty F.) Sur le module des coefficients de Maclaurin d'une fonction univalente. *Compt. rend. Acad. Sci.* (Paris), **198** (1934), 1569—1571.
[130]. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. ОНТИ, 1936.
[131] Неванлинна (Nevanlinna R.) Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises. *Övers. Finska Vetensk.-Soc.-Förh.*, **62**, Avd. A, № 6 (1919—1920).
[132] — Über die konforme Abbildung von Sterngebieten. *Övers. Finska Vetensk.-Soc. Forh.* **63**, Avd. A. № 7 (1921—1922).
[133] Нехари (Nehari Z.) Some inequalities in the theory of functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 256—286.
[134] Пешль (Peschl E.) Zur Theorie der schlichten Funktionen. *J. reine angew. Math.*, **176** (1936), 61—94.
[135] Пик (Pick G.) Über den Koebeschen Verzerrungssatz. *Ber. Verh. sächs. Ges. Wiss. Leipzig*, Math.-phys. Kl., **68** (1916), 58—64.
[136] — Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugliech beschranktes Gebiet. *Sitzgsber. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien*, Math.-naturwiss. Kl., Abt. IIa, **126** (1917), 247—263.
[137] Пирль (Pirl U.) Isotherme Kurvenscharen und zugehörige Extremalprobleme der konformen Abbildung. *Wiss. Z., Martin Luther Univ. Halle—Wittenber.*, **4** (1955), 1225—1252.
[138] Племей (Plemelj J.) Über den Verzerrungssatz von

P. Koebe. *Verh. Ges. Dtsch. Naturforscher u. Ärzte,* 85. *Versammlung Wien,* Zweiter Teil, Erste Hälfte, **1913**, 163.

[139] Пойа (Pòlya G.) Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization. *Quart. Appl. Math.*, **6** (1948), 267—277.

[140] — Sur la symmétrisation circulaire. *Compt. rend. Acad. Sci.* (Paris), **230** (1950), 25—27.

[141] — и Сегё (and G. Szegö) Isoperimetric inequalities in mathematical physics. *Ann. of Math. Stud.*, **27** (1951).

[142] Поссель (Possel R. de) Zum Parallelschlichtztheorem unendlich vielfach zusammenhängender Gebiete. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen,* Math.-phys. Kl., **1931**, 199—202.

[143] — Quelques problèmes de représentation conforme. J. École polytechnique, cahier 30 (ser. 2) (1932), 1—98.

[144] — Sur quelques propriétés de la représentation des domaines multiplement connexes, en relation avec le théorème des fentes parallèles. *Math. Ann.*, **107** (1933), 496—504.

[145] Правиц (Prawitz H.) Über Mittelwerte analytischer Funktionen. *Ark. f. Math.*, **20** A, 6 (1927), 1—12.

[146] Ренгель (Rengel E.) Einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung. *Schr. Math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin,* **1** (1932), 139—162.

[147] — Existenzbeweise für schlichte Abbildungen mehrfach zusammenhängender Bereiche auf gewisse Normalbereiche. *Jber. Deutsch. Math. Ver.*, **44** (1934), 51—55.

[148] Робинсон (Robinson R. M.) Bounded univalent functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52** (1942), 426—449.

[149] Рогозинский (Rogosinski W.) Über positive harmonische Entwicklungen und typischreelle Potenzreihen. *Math. Z.*, **35** (1932), 93—121.

[150] — On a theorem of Bieberbach—Eilenberg. *J. London Math. Soc.*, **14** (1933), 4—11.

[151] Ройден (Royden H. L.) The conformal rigidity of certain subdomains on a Riemann surface. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **76** (1954), 14—25.

[152] Сас (Szasz O.) Über Funktionen, die den Einheitskreis schlicht abbilden. *Jber. Deutsch. Math. Ver.*, 42 (1933), 73—75.

[153] Сегё (Szegö G.) Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. *Math. Z.*, **9** (1921), 218—270.

[154] — Problem 2, Konforme Abbildung. *Jber. Deutsch. Math. Ver.*, **31**, 2 Abt. (1922), 42.

[155] — Solution. *Jber. Deutsch. Math. Ver.*, **32**, 2 Abt. (1923), 45.

[156] Спенсер (Spencer D. C.) On an inequality of Grunsky. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **26** (1940), 616—621.

[157] — On finitely mean valent functions. *Proc. London Math. Soc.*, **47** (ser. 2) (1940—1942), 201—211.

[158] — On finitely mean valent functions. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 418—435.

[159] — On mean one-valent functions, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 614—633.

[160] Спрингер (Springer G.) The coefficient problem for schlicht mappings of the exterior of the unit circle. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 421—450.
[161] Стьюди (Study E.) Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Zweiter Heft, Konforme Abbildung einfachzusammenhängender Bereiche. Leipzig und Berlin, 1913.
[162] Тейхмюллер (Teichmüller O.) Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. *Dtsch. Math.*, **3** (1938), 621—678.
[163] — Ungleichungen zwischen den Koeffizienten schlichter Funktionen. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss.* Phys.-math. Kl., **1938**, 363—375.
[164] — Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale. *Abh. preuß. Akad. Wiss.*, Math.-naturwiss. Kl., **1939**, № 22.
[165] — Über Extremalprobleme der konformen Geometrie. *Deutsch. Math.*, **6** (1941), 50—77.
[166] Фабер (Faber G.) Neuer Beweis eines Koebe — Bieberbachschen Satzen über konforme Abbildung, *Sitzungsber. Math.-phys. Kl. bayer. Akad. Wiss. München*, **1916**, 39—42.
[167] — Über Potentialtheorie und konforme Abbildung. *Sitzgsber. Math.-phys. Kl. bayer. Akad. Wiss. München*, **1920**, 49—64.
[168] — Über den Hauptsatz aus der Theorie der konformen Abbildung. *Sitzgsber. Math.-phys. Kl. bayer. Akad. Wiss. München*, **1922**, 91—100.
[169] Фекете и Серё (Fekete M. and Szegö G.) Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. *J. London Math. Soc.*, **8** (1933), 85—89.
[170] Фус (Foos, Sister Barbara Ann) On the values of certain sets of modules. Thesis. Univ. Notre Dame, 1956.
[171] Хейман (Hayman W. K.) Symmetrization in the theory of functions. Techn. Rep. № 11, Contract N 6-ORI-106, Task order (NR-043-992) O. N. R. Washington.
[172] — Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions. *J. Analyse math.*, **1** (1951), 155—179.
[173] — The asymptotic behaviour of p-valent functions. *Proc. London Math. Soc.*, **5** (ser. 3) (1955), 257—284.
[174] Херш (Hersch J.) Longueurs extrémales et théorie des fonctions. *Comment. Math. Helvet.*, **29** (1955), 301—337.
[175] Хопф и Ринов (Hopf H. und Rinow W).) Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. *Comment Math. Helvet.*, **3** (1931), 209—225.
[176] Шах (Shah Tao-Shing) On the product of mapping radii for a system of non-overlapping domains. *Acta Math. Sinica*, **3** (1953), 1—4. (Кит., резюме англ.).
[177] — The product of the mapping radii of non-overlapping domains. *Acta Math. Sinica*, **5** (1955), 27—34. (Кит., резюме англ.).
[178] — On the moduli of some classes of analytic functions. *Acta Math. Sinica*, **5** (1955), 439—454. (Кит., резюме англ.).
[179] Шеффер и Спенсер (Schaeffer A. C. and Spencer D. C.) The coefficients of schlicht functions. *Duke Math. J.*, **10** (1943), 611—635.

[180] — — The coefficients of schlicht functions. II. *Duke Math. J.*, **12** (1945), 107—125.
[181] — — A variational method in conformal mapping. *Duke Math. J.*, **14** (1947), 949—966.
[182] — — Coefficients regions of schlicht functions. *Amer. Math. Soc. Colloquim*, Publ. **35**, New York (1950).
[183] Шиффер и Спенсер (Schiffer M. and Spencer D. C.) The coefficient regions of schlicht functions. *Duke Math. J.*, **16** (1949), 493—527.
[184] Шиффер (Schiffer M.) A method of variation within the family of simple functions. *Proc. London Math. Soc.*, **44** (ser. 2) (1938), 432—449.
[185] — On the coefficients of simple functions. *Proc. London Math. Soc.*, **44** (ser. 2) (1938), 450—452.
[186] — Sur un problème d'extrémum de la représentation conforme. *Bull. Soc. math. de France*, **65** (1937), 48—55.
[187] — Variation of the Green function and the theory of p-valued functions. *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 341—360.
[188] — An application of orthonormal functions in the theory of conformal mapping. *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 147—156.
[189] Шиффман (Shiffman M). On the isoperimetric inequality for saddle surfaces with singularities. Studies and Essays presented to R. Courant, 1948.
[190] Эйленберг (Eilenberg S.) Sur quelques propriétés topologiques de la surface de sphère. *Fund. Math.*, **25** (1935), 267—272.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Указаны только те страницы, на которых сделана ссылка на работу автора

Адамар (Hadamard J.) 21
Александер (Alexander J. W.) 12
Альфорс (Ahlfors L. W.) 17, 18, 27, 61, 137

Базилевич И. Е. 20
Безикович (Besicovitch A. S.) 32
Бергман (Bergmann S.) 20
Бермант А. Ф. 17
Бернацкий (Biernacki M.) 21, 23
Бёрлинг (Beurling A.) 17, 18, 24, 27, 137
Бибербах (Bieberbach L.) 9, 10, 17, 195
Бор (Bohr H.) 16
Бохнер (Bochner S.) 20
Брёдель (Brödel W.) 139

Волонтис (Wolontis V.) 24

Гарабедян (Garabedian P. R.) 22, 233
Гензель (Hensel K.) 61
Гильберт (Hilbert D.) 125
Голузин Г. М. 13, 15, 17, 20, 23, 150, 157, 170, 171, 188, 193, 247
Град (Grad A.) 22, 179, 185
Грёч (Grötzsch H.) 14, 16, 17, 19, 41, 83, 118, 122, 127, 129, 138, 147, 148, 149, 150, 152, 153, 156, 162, 163, 165, 168, 172
Гронуолл (Gronwall T. H.) 9, 12
Гросс (Gross W.) 16, 47
Грунский (Grunsky H.) 14, 19, 20, 164, 172, 176
Гун Шэн (Kung Sun) 144
Гурвиц (Hurwitz A.) 8, 17

Дженкинс (Jenkins J.) 13, 15, 19, 24, 44, 55, 60, 62, 63, 65, 80, 82, 138, 150, 193, 195, 196, 233
Дуглас (Douglas J.) 21
Дьедонне (Dieudonné J.) 12

Жюлиа (Julia J.) 21

Керекьярто (Kerékjárto B.) 139
Кёбе (Koebe P.) 8, 118, 138
Колбина Л. И. 195
Комату (Komatu Y.) 138
Курант (Courant R.) 16, 17, 21
Куфарев П. П. 195

Лаврентьев М. А. 21, 194
Ландау (Landau E.) 11
Лебедев Н. А. 188
Лёвнер (Löwner K.) 10, 12, 14, 143
Литтльвуд (Littlewood J. E.) 11, 12

Марти (Marty F.) 21
Монтель (Montel P.) 23
Морс (Morse Marston) 55, 62

Неванлинна (Nevanlinna R.) 12
Нехари (Nehari Z.) 194

Одзава (Ozawa M.) 138

Пешль (Peschl E.) 15
Пик (Pick G.) 9, 12
Пирль (Pirl U.) 194
Племей (Plemelj J.) 9
Пойа (Pólya G.) 24, 206
Поссель (Possel R. de) 127
Правиц (Prawitz H.) 13, 217
Пэли (Paley R.E.A.C). 12

Ренгель (Rengel F.) 17, 118
Риноw (Rinow W.) 92
Робинсон (Robinson R. M.) 16, 143
Рогозинский (Rogosinski W.) 12, 196
Ройден (Royden H. L.) 117, 233

Сас (Szasz O.) 12
Сегё (Szegö G.) 11, 12, 20, 206
Спенсер (Spenser D.) 15, 18, 22, 24, 60, 62, 63, 65, 72, 82, 233, 241
Спрингер (Springer G.) 22
Стьюди (Study E.) 11

Тейхмюллер (Teichmüller O.) 18, 32, 41, 42, 48, 60, 62, 63, 92, 94, 96, 189

Фабер (Faber G.) 10, 16, 24
Фалес А. Э. 195
Фекете (Fekete M.) 12
Фус (Foos B. A.) 194

Хейман (Hayman W. K.) 24, 233, 234, 240
Херш (Herch J.) 47
Хопф (Hopf H.) 92

Шах (Shah Tao Shing) 194, 196
Шеффер (Schaeffer A. C.) 15, 23, 60, 72
Шиффер (Schiffer M.) 14, 20, 22
Шиффман (Shiffman M.) 92

Эйленберг (Eilenberg S.) 196

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Внутреннее замыкание 62

Геодезическая 91
Гипотеза Бибербаха 10

Длина экстремальная 26
Допустимая гомотопия 84
— метрика 27, 43
Допустимое семейство областей 84
— — функций 85

Квадратичный дифференциал 49, 61
— — положительный 61
Класс областей $\mathfrak{B}_1$ 229
— — $\mathfrak{B}_2$ 229
— — $\mathfrak{H}_1$ 229
— — $\mathfrak{H}_2$ 229
— функций K 197
— — S, $\Sigma(D)$, $\Sigma'(D)$, $\Sigma_0(D)$, Σ, Σ' 7
— четырехугольников $\mathfrak{Q}$ 229
Конформная инвариантность модулей 28
Конформно инвариантная метрика 25
Критические точки квадратичного дифференциала 48

Леммы Грёча 38, 40
Локально спрямляемая кривая 25

Метод вариационный 21
— контурного интегрирования 19
— Лёвнера 14
— Правица 13
— экстремальной метрики 16
Метрика экстремальная 27, 43
Q-метрика 88
Множество 48
— H 48
— F 62
Модуль 26, 43
— приведенный 41

Область кольцевая 63
— концевая 62
— круговая 63
— полосообразная 63
Однолистность 7
A-определение модуля 27
L-определение модуля 27

Принцип Тейхмюллера 83
Проблема модуля 26

Рассуждение Грёча 153
Результаты Тейхмюллера о коэффициентах 188

Свойство (P_θ) 133
Симметризация двусвязных областей 206
— односвязных областей 205

Симметризация римановых областей 230
— трехмерных открытых множеств 207
— четырехугольников 206
Степень деформации 85

Теорема вращения 10, 15, 188
— искажения 8
— общая о коэффициентах 86
— основная структура 64
Теорема о трех полюсах 80
— площадей 9
Траектория 49
— ортогональная 49

Функции Бибербаха — Эйленберга 196
— выпуклые 11
— звездообразные 12
— f_t 241
— p-листные в среднем 231

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. **Введение** 7
Основные определения. Классические результаты. Специальные семейства. Метод Правица. Метод Лёвнера. Метод экстремальной метрики. Метод контурного интегрирования. Вариационный метод. Многолистные функции. Симметризация

Глава II. **Модули и экстремальные длины** 25
Основные определения. Основные свойства модулей. Некоторые специальные модули. Леммы о единственности. Леммы Грёча. Приведенный модуль. Обобщения. Применение

Глава III. **Квадратичные дифференциалы** 48
Определения. Локальная структура траекторий. Структура траекторий на конечной ориентированной римановой поверхности. Теорема о трех полюсах

Глава IV. **Общая теорема о коэффициентах** 83
Определения. Формулировка общей теоремы о коэффициентах. Дифференциально-геометрические леммы. Построение специальной подповерхности. Оценка площади образа сверху и снизу. Доказательство основного неравенства. Обсуждение возможности равенства. Обобщенная теорема

Глава V. **Канонические конформные отображения** 118
Отображения на области с круговыми, радиальными и спиральными разрезами. Отображения на области с параболическими, эллиптическими и гиперболическими разрезами. Бесконечносвязные области

Глава VI. **Приложения общей теоремы о коэффициентах. Однолистные функции** 139
Доказательства классических результатов и их обобщения. Теоремы о диаметре. Теоремы об областях значений функций классов $\Sigma(D)$ и Σ, их производных и коэффициентов. Теоремы об областях значений функций класса S и их производных. Теоремы Тейхмюллера о коэффициентах

Глава VII. **Приложения общей теоремы о коэффициентах. Семейства однолистных функций** 192
Теоремы о внутреннем радиусе для неналегающих областей. Новые классы задач: пример

Глава VIII. **Симметризация. Многолистные функции** . . . 205
Определения. Геометрические результаты о симметризации. Связь с интегралами Дирихле и с модулями. Теоремы единственности для модулей. Обобщение на римановы области. Приложения к многолистным функциям

Литература 250

Авторский указатель 260

Предметный указатель 262

Дж. Дженкинс

ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ
И КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Редактор Н. И. Плужникова
Обложка художника И. И. Каледина
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор М. А. Белева

Сдано в производство 29/III 1962 г.
Подписано к печати 31/X 1962 г.
Бумага 84×108$^{1}/_{32}$=4,2 бум. л.
13,7 печ. л.,
Уч.-изд. л. 11,9. Изд. № 1,0668
Цена 93 коп. Зак. 64. Тир. 6000

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Типография Издательства МГУ
Москва, Ленинские горы