



ГЛОБАЛЬНЫЕ ДАТТС

■
СПЕКТРАЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ

И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

SPECTRAL ANALYSIS
AND ITS APPLICATIONS

GWILYM M. JENKINS
University of Lancaster, U. K
and
DONALD G. WATTS
University of Wisconsin, U. S. A

HOLDEN-DAY
San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam

Г. ДЖЕНКИНС, Д. ВАТТС

**СПЕКТРАЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ**

ВЫПУСК 2

Перевод с английского

В. Ф. ПИСАРЕНКО

С предисловием

А. М. ЯГЛОМА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1972

Спектральный анализ — новая и весьма важная отрасль прикладной математики, посвященная выделению из наблюдаемых явлений или процессов периодических компонент, т. е. правильно меняющихся со временем составляющих. Подобные задачи очень часто встречаются в инженерном деле, различных разделах физики, механики, геофизики, электротехники и радиотехники, а также в экономике и статистике.

Цель книги — дать читателю руководство, позволяющее овладеть приемами и методами спектрального анализа для применения их в практической работе. Большая ценность книги — наличие в ней вычислительных схем для обработки спектров на ЭВМ, запрограммированных на ФОРТРАНе.

Вып. 1 издан в 1971 г. Вып. 2 включает спектральную теорию стационарных процессов, спектральные оценки, полученные с помощью сглаживания периодограмм, спектральный анализ двух временных рядов, методы статистической оценки характеристик линейного фильтра, обобщение изложенных методов на случай многомерных случайных процессов.

Книга будет с большим интересом встречена инженерно-техническими работниками, физиками, геофизиками, математиками-прикладниками, экономистами, статистиками — как специалистами, так и студентами старших курсов, для которых она послужит ценным учебным пособием.

Редакция космических исследований, астрономии и геофизики

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ВЫПУСКУ

Во второй выпуск вошли гл. 7—11. В гл. 7 разбираются примеры оценивания спектров искусственных и практических временных рядов. В гл. 8 методы и понятия, введенные при анализе одномерных рядов, обобщаются на случай пары временных рядов. Гл. 9—10 посвящены задачам оценивания взаимного спектра двух рядов и частотной характеристики линейной системы. Наконец, в гл. 11 излагается спектральный анализ многомерных временных рядов и методика оценивания матрицы частотных характеристик многомерной линейной системы.

А. М. Яглом

ПРИМЕРЫ ОДНОМЕРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В этой главе теория, изложенная в гл. 6, применяется для получения практических способов оценивания спектров по наблюдаемым временным рядам. Для того чтобы читатель приобрел опыт в вычислениях, которые нужно при этом проводить, в разд. 7.1 проиллюстрировано влияние изменения полосы частот окна и его формы на спектральные оценки искусственных временных рядов. В разд. 7.2 вводится один практический метод оценивания спектров, названный *стягиванием окна*. Для этого метода нужно сначала использовать окно с широкой полосой частот, а затем постепенно уменьшать полосу до тех пор, пока не выявятся все важные детали спектра. Однако такая процедура бывает иногда очень неустойчивой из-за сильной изменчивости выборочных оценок спектра, обусловленных малой длиной временного ряда.

В разд. 7.3 обсуждаются практические вопросы, возникающие при оценивании спектров, а также приводится стандартный метод оценивания, который можно применять на практике. Подчеркивается важность предварительной фильтрации данных для устранения низкочастотных трендов. В разд. 7.4 даются примеры спектрального анализа в трех прикладных областях: построении моделей, планировании экспериментов и изучении частотных характеристик.

7.1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИСКУССТВЕННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В этом разделе вычисляются выборочные оценки спектров для искусственных временных рядов. Это сделано для того, чтобы читатель приобрел опыт в интерпретации выборочных спектральных оценок. В разд. 7.1.1 даются формулы, непосредственно пригодные для вычисления на цифровых машинах выборочных сглаженных спектральных оценок, а также приводятся результаты вычислений выборочных характеристик. Затем в разд. 7.1.2 проиллюстрировано влияние изменения точки отсечения корреляционной функции на спектр. Для этого функция $\bar{\Gamma}_{xx}(f)$ сравнивается с $\Gamma_{xx}(f)$ и $\bar{C}_{xx}(f)$ с $\Gamma_{xx}(f)$ в случае, когда процесс является авторегрессией первого или второго порядка. Чтобы подготовить приведенное в разд. 7.2

обсуждение практических способов сглаживания, проводится исследование влияния точки отсечения (разд. 7.1.2) и формы спектрального окна (разд. 7.1.3) на спектральные оценки.

7.1.1. Формулы для дискретного оценивания

В предыдущих главах статистическая теория спектрального оценивания была развита в предположении, что данные $x(t)$ непрерывны. Однако во многих случаях данные являются дискретными по существу, как, например, данные о партиях продукта на рис. 5.2, и, следовательно, необходимы дискретные формулы. Кроме того, все более широкое распространение в настоящее время получают цифровые вычислительные машины благодаря своей точности, универсальности и относительной доступности. Поэтому можно предположить, что в большинстве случаев спектральный анализ будет теперь проводиться с помощью цифровых вычислительных машин. Следовательно, непрерывный, или аналоговый, сигнал нужно отсчитывать в дискретные моменты времени, как это описывалось в гл. 2, и отсчитанные значения переводить в числа, содержащие конечное число цифр. Процесс перевода из аналоговой в цифровую форму называется *квантованием*. Детальный разбор влияния этого процесса на корреляционный анализ можно найти в [1]. Мы будем предполагать, что квантование производится с достаточно малым шагом, так что при переводе из аналоговой в цифровую форму не вносятся никаких ошибок. Практически это означает, что данные нужно отсчитывать с точностью, равной одной десятой (или одной сотой) от полного диапазона изменения сигнала.

Предположим, что цифровые данные x_t , $t = 1, \dots, N$, соответствуют значениям сигнала $x(t)$, отсчитанного через интервалы Δ . В таком случае сглаженная выборочная оценка спектра $\bar{C}_{xx}(f)$ получается с помощью замены интеграла (6.3.28) соответствующей суммой

$$\bar{C}_{xx}(f) = \Delta \sum_{k=-(L-1)}^{L-1} \omega(k) c_{xx}(k) e^{-j2\pi f k \Delta}, \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq f < \frac{1}{2\Delta}. \quad (7.1.1)$$

В (7.1.1) выборочная оценка $c_{xx}(k)$ ковариационной функции равна

$$c_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad -(N-1) \leq k \leq N-1, \quad (7.1.2)$$

и $L = M/\Delta$. Как и раньше, $\omega(k)$ обозначает корреляционное окно с точкой отсечения M , но теперь оно определено лишь в дискретные

моменты времени $u = k\Delta$. Отметим, что до оценивания ковариационной функции может возникнуть необходимость фильтрации данных по формулам (5.3.27) или (5.3.31).

Так как $\bar{c}_{xx}(f)$ — четная функция частоты, ее нужно вычислять лишь для интервала частот $0 \leq f \leq 1/2\Delta$. Но для сохранения соотношения преобразований Фурье между выборочным спектром и выборочной ковариационной функцией нужно удвоить мощность в интервале частот $0 \leq f \leq 1/2\Delta$. Таким образом, обычно используемая формула имеет вид

$$\bar{c}_{xx}(f) = 2\Delta \left[c_{xx}(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} c_{xx}(k) \omega(k) \cos 2\pi f k \Delta \right], \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2\Delta}, \quad (7.1.3)$$

и функцию (7.1.2) требуется вычислять лишь при $k \geq 0$.

Для удобства вычислений предположим, что $\Delta = 1$. При этом все группы данных можно будет обрабатывать одинаково. Таким образом, вычислительная формула принимает вид

$$\bar{c}_{xx}(f) = 2 \left[c_{xx}(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} c_{xx}(k) \omega(k) \cos 2\pi f k \right], \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}. \quad (7.1.4)$$

При $\Delta \neq 1$ выборочную оценку (7.1.1) можно восстановить по (7.1.4), умножив (7.1.4) на Δ и построив ее в зависимости от Δf , а не от f .

Наконец, если вместо ковариаций использовать корреляции, то можно получить сглаженную выборочную оценку нормированной спектральной плотности по формуле

$$\bar{r}_{xx}(f) = 2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} r_{xx}(k) \omega(k) \cos 2\pi f k \right], \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2},$$

$$r_{xx}(k) = \frac{c_{xx}(k)}{c_{xx}(0)}. \quad (7.1.5)$$

В работе [2] было предложено вычислять $\bar{R}_{xx}(f)$ лишь в точках $f = 0, 1/L, 2/L, \dots, 1/2$. Такой шаг по частоте слишком велик, и мы считаем, что для получения более детального графика $\bar{R}_{xx}(f)$ ее нужно вычислять с шагом, составляющим лишь некоторую долю от $1/L$.

В действительности нет никакой необходимости связывать шаг по частоте для $\bar{R}_{xx}(f)$ с точкой отсечения L . Таким образом, шаг по частоте для $\bar{R}_{xx}(f)$ можно взять равным $1/2F$, где F в 2—3 раза больше, чем L . Следовательно, окончательная формула для

цифровых вычислений сглаженной выборочной оценки нормированного спектра принимает вид

$$\bar{R}_{xx}(l) = 2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} r_{xx}(k) \omega(k) \cos \frac{\pi l k}{F} \right], \quad l = 0, 1, \dots, F. \quad (7.1.6)$$

Логическая схема соответствующей вычислительной программы приведена в Приложении П7.1.

Вычисление выборочных характеристик. Выборочные корреляции для дискретного процесса авторегрессии второго порядка

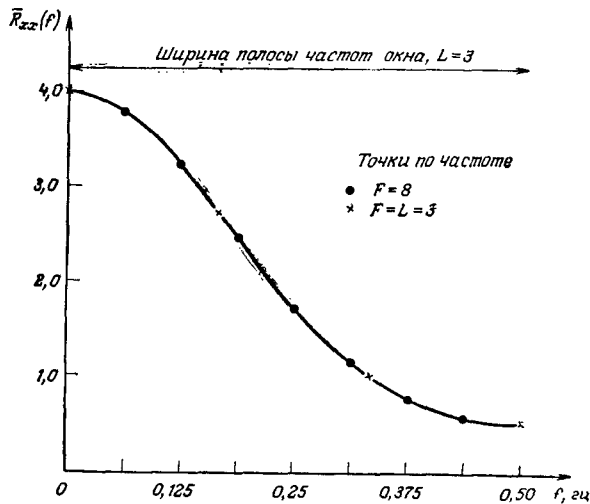


Рис 7.1. Сглаженная выборочная оценка нормированного спектра процесса авторегрессии второго порядка ($\alpha_1 = 1,0$; $\alpha_2 = -0,5$) с помощью окна Бартлетта.

(5.3.36) приведены в табл. 5.2. Эти величины можно использовать для получения выборочной оценки нормированного спектра $2\Gamma_{xx}(f)/\sigma_x^2$ следующим образом. Воспользовавшись, например, корреляционным окном Бартлетта

$$\omega(k) = \begin{cases} 1 - \frac{k}{L}, & 0 \leq k \leq L; \\ 0, & k > L, \end{cases}$$

получаем из (7.1.6) сглаженную выборочную оценку нормированного спектра

$$\bar{R}_{xx}(l) = 2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} \left(1 - \frac{k}{L}\right) r_{xx}(k) \cos \frac{\pi l k}{F} \right], \quad l = 0, 1, \dots, F.$$

Например, при $L = 3$ эта выборочная оценка равна

$$\bar{R}_{xx}(l) = 2 \left[1 + 2 \left(\frac{2}{3} \right) r_{xx}(1) \cos \frac{\pi l}{F} + 2 \left(\frac{1}{3} \right) r_{xx}(2) \cos \frac{2\pi l}{F} \right],$$

$$l = 0, 1, \dots, F.$$

Если пужны выборочные оценки с шагом по частоте $1/16$ гц (так что $F = 8$), то, взяв значения выборочной корреляционной функции из табл. 5.2, можно расположить вычисления так, как показано в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Пример вычисления выборочной спектральной оценки

| $\frac{l}{F}$ | $f = \frac{l}{2F}$ | $\cos \frac{\pi l}{F}$ | $2 \left(\frac{2}{3} \right) (0,645) \cos \frac{\pi l}{F}$ (1) | $\cos \frac{2\pi l}{F}$ | $2 \left(\frac{1}{3} \right) (0,195) \cos \frac{2\pi l}{F}$ (2) | $\bar{R}_{xx}(l) = 2[1 + (1) + (2)]$ |
|---------------|--------------------|------------------------|--|-------------------------|---|--------------------------------------|
| 0 | 0 | 1,0 | 0,860 | 1,0 | 0,130 | 3,980 |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | 0,924 | 0,794 | 0,707 | 0,092 | 3,773 |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | 0,707 | 0,608 | 0 | 0 | 3,216 |
| $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | 0,383 | 0,329 | -0,707 | -0,092 | 2,474 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | -1,0 | -0,130 | 1,740 |
| $\frac{5}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | -0,383 | -0,329 | -0,707 | -0,092 | 1,158 |
| $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | -0,707 | -0,608 | 0 | 0 | 0,784 |
| $\frac{7}{8}$ | $\frac{7}{16}$ | -0,924 | -0,794 | 0,707 | 0,092 | 0,596 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | -1,0 | -0,860 | 1,0 | 0,130 | 0,540 |

Эти выборочные оценки нормированного спектра показаны точками на рис. 7.1. Видно, что через эти точки можно вполне однозначно провести плавную кривую. На этом же графике крестиками отмечены выборочные оценки с шагом $1/3$, как это рекомендуется в [2]. Видно, что шаг по частоте в этом случае слишком велик для того, чтобы можно было точно построить график и провести интерполяцию. На графике показана также ширина полосы частот использованного спектрального окна. При $L = 3$ эта ширина для окна Бартлетта равна

$$b = b_1/L\Delta = 1,5/(3 \cdot 1) = 0,5 \text{ гц.}$$

Мы видим, что в этом случае ширина полосы равна всему частотному диапазону, и, следовательно, выборочная оценка сильно сглажена.

7.1.2. Влияние ширины полосы частот на сглаживание

В этом разделе эмпирически исследуется влияние изменения полосы частот, или, что эквивалентно, точки отсечения L , на сглаживание выборочной спектральной оценки. Временные ряды, которыми мы будем пользоваться, являются реализациями процессов авторегрессии первого и второго порядков с известным спектром $\Gamma_{XX}(f)$. Вычисляются средний сглаженный нормированный спектр

$$\frac{\bar{\Gamma}_{XX}(f)}{\sigma_X^2} = 2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} \rho_{XX}(k) \omega(k) \cos 2\pi f k \right] \quad (7.1.7)$$

и сглаженная выборочная оценка нормированного спектра $\bar{R}_{XX}(f)$ по формуле (7.1.6). Средний сглаженный нормированный спектр $\bar{\Gamma}_{XX}(f)/\sigma_X^2$ есть математическое ожидание сглаженной оценки нормированного спектра, и, следовательно, нанеся его на график вместе с $\Gamma_{XX}(f)/\sigma_X^2$, мы получим представление о том, как смещение изменяется с частотой. Нанеся на график семейство кривых с различными значениями L , мы наглядно выявим зависимость смещения от ширины полосы частот окна. Точно так же, нанеся на график сглаженную выборочную оценку $\bar{R}_{XX}(f)$ вместе с $\Gamma_{XX}(f)/\sigma_X^2$ для различных значений L , мы получим ясную картину влияния ширины полосы на дисперсию оценки.

Процесс авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 = -0,4$). Мы будем использовать для вычислений процесс авторегрессии первого порядка (5.2.26) при $\alpha_1 = -0,4$, $\Delta = 1$, $\mu = 0$, т. е.

$$X_t = -0,4X_{t-1} + Z_t.$$

Согласно формуле (6.2.20), нормированный спектр этого процесса равен

$$\frac{\Gamma_{XX}(f)}{\sigma_X^2} = \frac{2(0,84)}{1,16 + 0,8 \cos 2\pi f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}.$$

Этот спектр показан на рис. 7.2. Видно, что он изменяется очень плавно, имеет широкий пик при $f = 0,5$ гц, и диапазон его изменений в вертикальном направлении очень мал. На этом рисунке приведены также средние сглаженные нормированные спектры $\bar{\Gamma}_{XX}(f)/\sigma_X^2$ для значений $L = 4, 8, 16$, соответствующие окну Тьюки. Анализируя эти кривые, мы видим, что при $L = 4$ средний сгла-

изменяет выборочную спектральную оценку. Дальнейшее увеличение L от 8 до 16 дает лишь незначительные изменения, и, следовательно, разумную выборочную оценку спектра можно было бы получить при $L = 8$. Число степеней свободы на каждое оцениваемое значение спектра в этом случае равно 133, так что доверительные интервалы очень узкие.

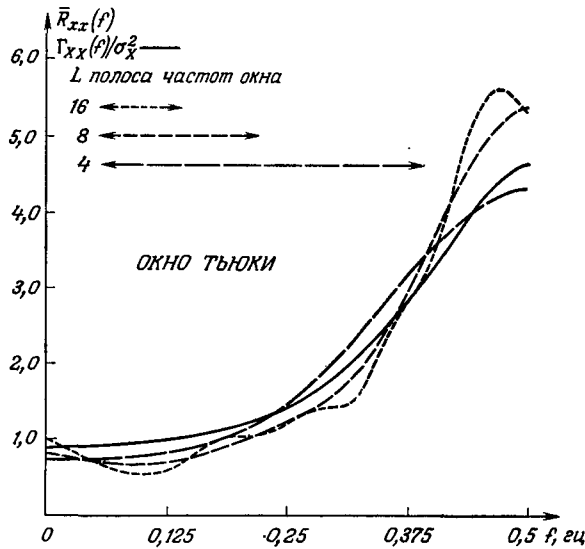


Рис. 7.3. Сглаженные выборочные оценки нормированного спектра процесса авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 = -0,4$; $N = 400$).

Ситуация меняется для показанных на рис. 7.4 выборочных оценок, полученных по реализации из $N = 100$ членам. Здесь увеличение L от 4 до 8 приводит к существенным изменениям выборочной оценки спектра, но еще большие изменения получаются, когда L возрастает до 16 или до 32. Отметим, что при этом вполне явно обозначаются ложные пики на частотах 0,22 и 0,44 гц, возникающие благодаря увеличению дисперсии оценки.

Заметим также, что число степеней свободы на каждое оцениваемое значение спектра равно соответственно 33, 17 и 8 для $L = 8, 16$ и 32. Выборочная оценка при $L = 8$ разумно близка к теоретическому спектру, однако, не зная истинного ответа, мы, конечно, испытывали бы некоторую неуверенность при интерпретации этих выборочных оценок. В частности, трудно было бы решить, стоит ли выбрать плавную выборочную оценку при $L = 8$ или же более детальную, но с большей дисперсией, выборочную оценку при $L = 16$.

Отрезки, равные ширине полосы частот используемого окна, для разных точек отсечения изображены на рис. 7.3 и 7.4. Они представляют собой очень полезную наглядную характеристику, так как дают возможность правильно судить о степени детальности спектра в зависимости от ширины полосы частот используемого окна.

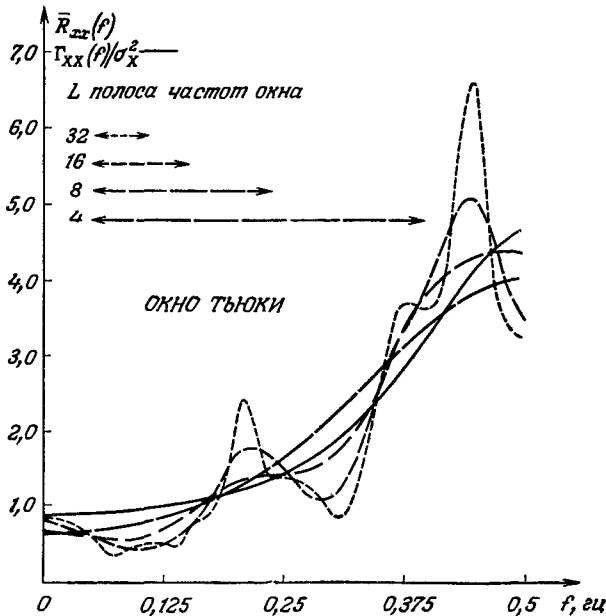


Рис. 7.4. Сглаженные выборочные оценки нормированного спектра процесса авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 = -0,4$; $N = 100$).

Процесс авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 \neq -0,9$). Аналогичный анализ был проведен для авторегрессии первого порядка

$$X_t = -0,9X_{t-1} + Z_t. \quad (7.1.8)$$

Теоретический нормированный спектр этого процесса равен

$$\frac{\Gamma_{XX}(f)}{\sigma_X^2} = \frac{2(0,19)}{1,81 + 1,8 \cos 2\pi f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}.$$

График этой функции показан на рис. 7.5. Она имеет очень узкий пик вблизи $f = 0,5$ гц и изменяется от 0,105 до 38,0, так что пришлось построить ее в логарифмическом масштабе. Практическое преимущество логарифмического масштаба состоит не только в том, что он лучше выявляет детали спектра, но также и в том, что для этого масштаба, как указывалось в разд. 6.4.3,

доверительные интервалы одинаковы для всех частот, и, следовательно, их легко изобразить на рисунке. Поэтому выборочные спектральные оценки всегда следует изображать в логарифмическом масштабе. В то же время масштаб по частоте должен быть линейным, так как ширина полосы частот окна остается константой именно для такого масштаба.

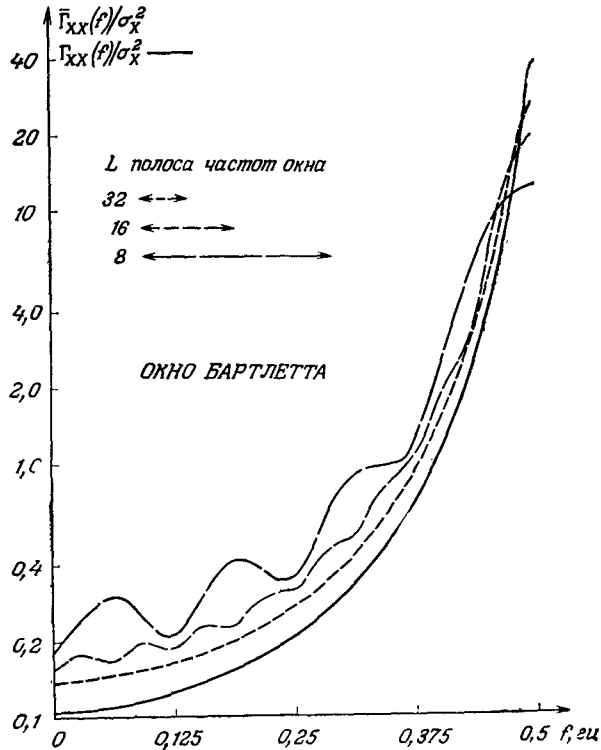


Рис. 7.5. Средние сглаженные нормированные спектры для процесса авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 = -0,9$).

Средние сглаженные нормированные спектры $\bar{\Gamma}_{XX}(f)/\sigma_X^2$ для процесса (7.1.8) показаны на рис. 7.5 для окна Бартлетта с точками отсечения $L = 8, 16$ и 32 . Как и раньше, для всех этих значений L смещение велико вблизи пика и убывает с увеличением L . Судя по этим графикам, ни одна из этих точек отсечения не кажется явно хорошей (возможно, требуется значение $L = 48$). Это подтверждается также, если рассмотреть корреляционную функцию $\rho_{XX}(k)$, так как $|\rho_{XX}(k)|$ равен $0,034$ для $k = 32$ и $0,0012$ для $k = 64$. Следовательно, можно прийти к заключению, что для

этого процесса необходимо выбирать очень большое L , если требуется малое смещение. При этом для того, чтобы получить оценку с малой дисперсией, нужно будет использовать очень длинные реализации. Из рис. 7.5 видно, что при малых L средний сглаженный спектр проявляет некоторые осцилляции. Они возникают из-за боковых лепестков окна Бартлетта, которые мы обсуждали в разд. 7.2.5.

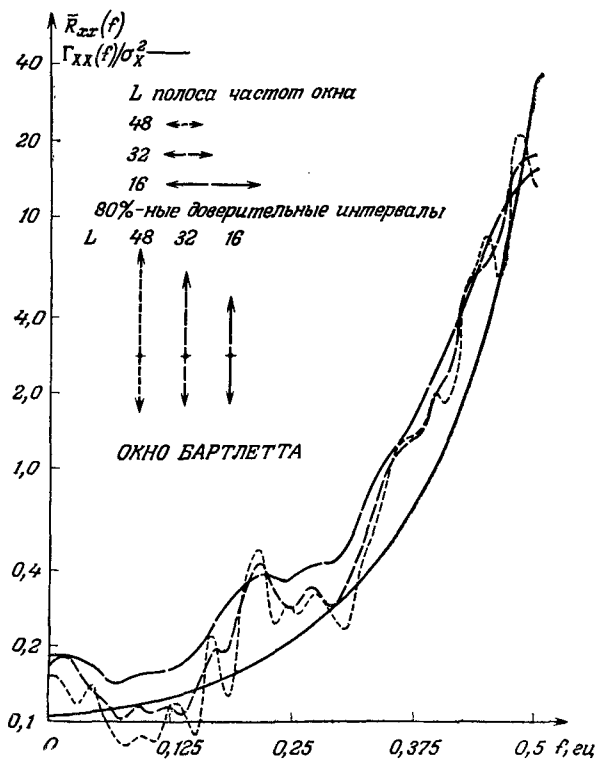


Рис. 7.6. Сглаженные выборочные оценки нормированного спектра процесса авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 = -0,9$; $N = 100$).

Трудности при попытках дать хорошую выборочную оценку узкого спектрального пика проиллюстрированы на рис. 7.6. Здесь показана функция $\bar{R}_{xx}(f)$ для окна Бартлетта при $L = 16, 32$ и 48 , причем реализация состояла из $N = 100$ членам процесса (7.1.8). При $L = 16$ получается разумно плавная выборочная оценка, но для точки пика она дает в три раза меньшее значение. Увеличение L до 32 слегка улучшает выборочную оценку вблизи пика и

более заметно на низких частотах. Однако теперь появляются осцилляции из-за увеличения дисперсии. При $L = 48$ выборочная оценка становится очень ненадежной, из чего следует, что для получения более надежной выборочной оценки вблизи пика нужны более длинные реализации. Заметим, однако, что можно получить удовлетворительную выборочную оценку в интервале частот от 0

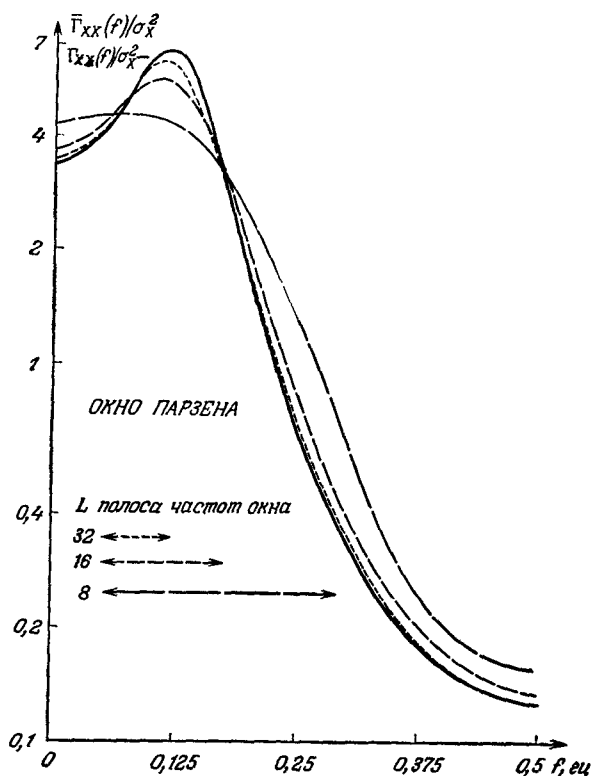


Рис. 7.7. Средние сглаженные нормированные спектры для процесса авторегрессии второго порядка ($\alpha_1 = 1,0$; $\alpha_2 = -0,5$).

до 0,45 гц при $L = 32$ или, возможно, при еще меньшем значении, скажем, $L = 24$.

Сравнение рис. 7.6 с рис. 7.4, на котором показаны выборочные спектральные оценки для случая $\alpha_1 = -0,4$ и $N = 100$, выявляет тот важный факт, что одна и та же длина временного ряда $N = 100$ может давать приемлемую выборочную оценку для плавного спектра, но быть недостаточной для получения хорошей выборочной оценки спектра с узким пиком.

Процесс авторегрессии второго порядка. Чтобы сравнить трудности, возникающие при оценивании спектрального пика, расположенного внутри частотного диапазона, по сравнению с

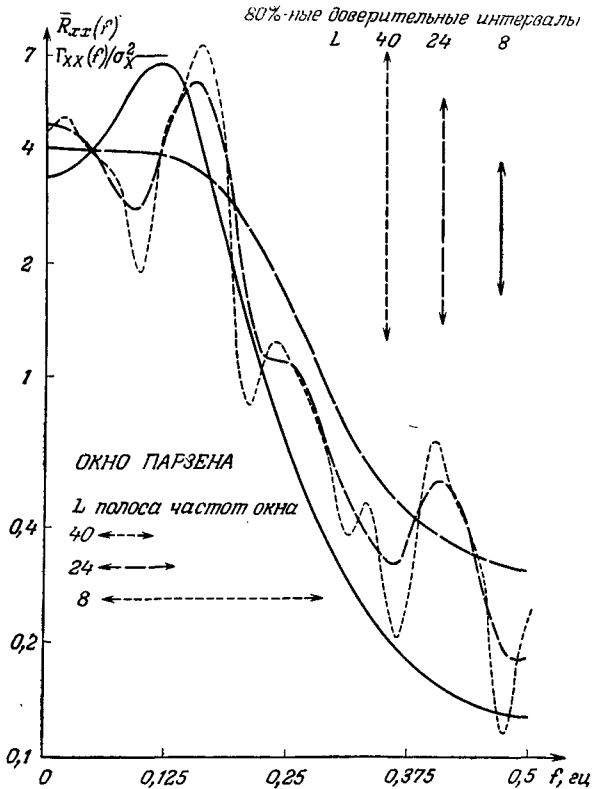


Рис. 7.8. Сглаженные выборочные оценки нормированного спектра процесса авторегрессии второго порядка ($\alpha_1 = 1,0$; $\alpha_2 = -0,5$; $N = 50$).

рассмотренным выше случаем пика на крайней частоте, рассмотрим процесс авторегрессии второго порядка (5.3.36), т. е.

$$X_t = X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + Z_t. \quad (7.1.9)$$

Этому процессу соответствует нормированный спектр (6.2.22), а именно

$$\frac{\Gamma_{XX}(f)}{\sigma_x^2} = \frac{2(0,417)}{2,25 - 3 \cos 2\pi f + \cos 4\pi f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}.$$

Этот спектр изображен на рис. 7.7, где показаны также средние сглаженные нормированные спектры $\bar{\Gamma}_{XX}(f)/\sigma_x^2$, соответствующие

окну Парзена при $L = 8, 16$ и 32 . Как и раньше, с увеличением L функция $\bar{\Gamma}_{xx}(f)$ приближается к $\Gamma_{xx}(f)$. Из табл. 6.6 видно, что значениям $L = 16$ и 32 соответствуют значения ширины полосы частот спектральных окон $0,12$ и $0,06$ гц. Если за определение ширины пика принять расстояние между точками, в которых мощность убывает в два раза от пикового значения, то в нашем случае

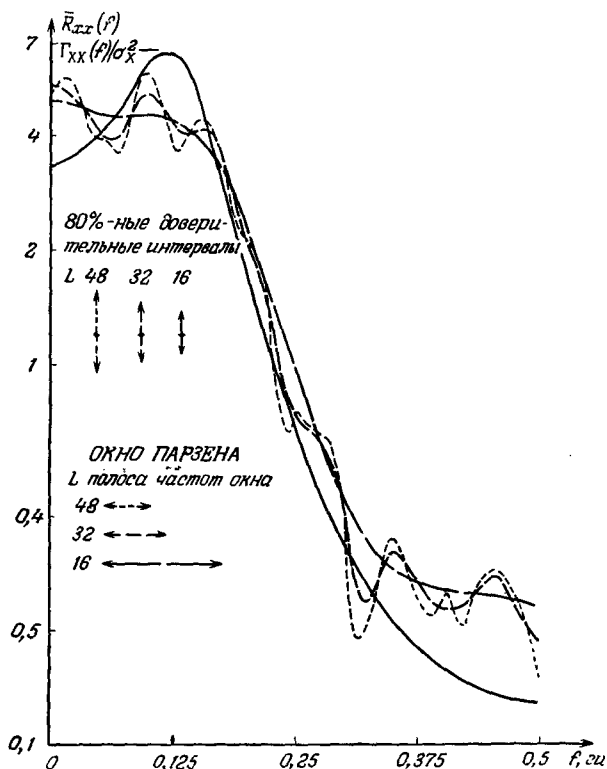


Рис. 7.9. Сглаженные выборочные оценки нормированного спектра процесса авторегрессии второго порядка ($\alpha_1 = 1,0; \alpha_2 = -0,5; N = 400$).

эта ширина будет около $0,08$ гц. Из рис. 7.7 видно, что при $L = 8$ и 16 пик оценивается плохо, однако при $L = 32$ смещение достаточно мало из-за того, что ширина полосы частот окна равна $0,06$ гц, т. е. меньше ширины пика $0,08$ гц. Это наводит на мысль о том, что значение точки отсечения, необходимое для получения выборочной оценки с приемлемо малым смещением, зависит от ширины пика в спектре. К этому замечанию мы еще вернемся в разд. 7.2.4.

Сглаженные выборочные оценки нормированного спектра $\bar{R}_{xx}(f)$, полученные по реализации из $N = 50$ членам процесса (7.1.9) с помощью окна Парзена, показаны на рис. 7.8. Используемые в этом примере данные представляют собой первые 50 значений из таблицы данных П7.1 в Приложении П7.4. Выборочные корреляции для этих 50 значений приведены в табл. П7.2. При $L = 8$ получается плавная выборочная оценка, но без всякого намека на пик внутри частотного интервала. Утроив L до 24, получаем слабо выраженный пик около 0,125 гц, т. е. истинной частоты пика.

Когда L возрастает до 40, появляются многочисленные другие небольшие пики из-за увеличения дисперсии оценки. Следовательно, у нас не было бы полной ясности относительно истинной формы спектра, если бы мы заранее не знали, какое L лучше всего соответствует теоретическому спектру.

На рис. 7.9 показаны выборочные спектральные оценки для того же самого процесса, сосчитанные по реализации из $N = 400$ членам. Эти 400 значений приведены в табл. П7.1, а выборочные корреляции, сосчитанные по ним, даны в табл. П7.3. При $L = 48$ выборочная оценка ближе к истинному спектру, чем любая из выборочных оценок для $N = 50$, но улучшение не столь велико, как этого можно было ожидать. Поскольку при $L = 48$ число степеней свободы на каждое оцениваемое значение спектра равно 31, по-видимому, следовало бы считать, что пик вблизи частоты 0,125 гц действительно существует. Заметим, однако, что этот пик значительно уже теоретического.

7.1.3. Влияние формы окна на сглаживание

Другим относящимся к сглаживанию вопросом, которым мы сейчас займемся, является влияние использования различных спектральных окон. Мы сравним между собой окна Бартлетта, Тьюки и Парзена.

Для вычисления средних сглаженных нормированных спектров был использован процесс авторегрессии первого порядка (7.1.8). Эти спектры соответствовали корреляционным окнам w_B , w_T и w_P при фиксированных значениях точки отсечения и обозначались \bar{G}_B/σ_X^2 , \bar{G}_T/σ_X^2 и \bar{G}_P/σ_X^2 . Такие спектры показаны на рис. 7.10 вместе с теоретическим нормированным спектром $G_{xx}(f)/\sigma_X^2$. Все сглаженные спектры получены при значении точки отсечения L , равном 12.

Большое смещение и осцилляции сглаженного спектра для окна Бартлетта явно заметны. Однако вблизи пика окну Бартлетта дает небольшое смещение. Этого следовало ожидать, исходя из формулы (6.3.37), дающей смещения для этих трех окон. Таким

образом, смещение для окон Бартлетта связано с первой производной спектра, которая мала в окрестности пика, но велика там, где спектр имеет крутой склон. Равенство (6.3.37) показывает, что главный член в выражении для смещения в окнах Тьюки и Парзена зависит от второй производной спектра, которая мала там,

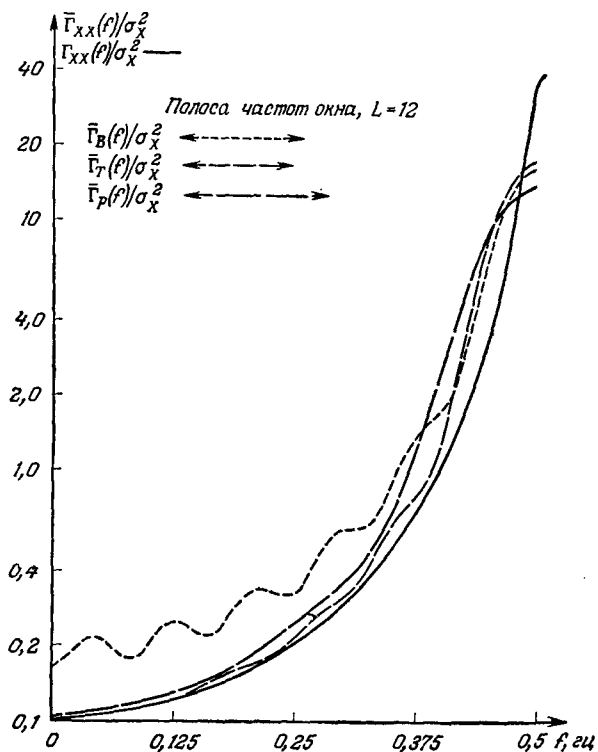


Рис. 7.10. Средние сглаженные нормированные спектры для процесса авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 = -0,9$).

где спектр приблизительно линеен, и относительно велика вблизи пика.

В целом окно Тьюки имеет при данном значении точки отсечения наименьшее смещение. Впрочем, если сравнить окна Парзена и Тьюки с одинаковой шириной полосы частот, то сглаженные спектры будут почти одинаковы по форме.

То же самое можно сказать при сравнении дисперсий оценок, соответствующих этим двум окнам. Согласно (6.4.25),

$$\text{Ширина полосы частот} \times \text{Дисперсия} = \text{Константа.}$$

Следовательно, если ширина полосы частот у двух оценок одинакова, то они имеют одну и ту же дисперсию. Из табл. 6.6. видно, что ширина полосы частот окна Парзена в 1,4 раза больше, чем окна Тьюки. Поэтому окно Тьюки с точкой отсечения $L = 12$ имеет такую же ширину полосы частот и такую же дисперсию, что и окно Парзена с $L = 12 \times 1,4 \approx 16$.

Таким образом, для двух оценок, соответствующих окнам с одинаковой шириной полосы частот, и дисперсия, и смещение приблизительно одни и те же. Отсюда следует, что если два спектральных окна имеют приемлемую форму и одну и ту же ширину полосы частот, то соответствующие им выборочные оценки спектра должны быть очень похожи. На рис. 7.11 как раз проделано такое сравнение окон Тьюки и Парзена для реализации процесса авторегрессии первого порядка с $\alpha_1 = -0,9$ и $N = 100$.

Сплошная линия обозначает выборочную оценку Тьюки при $L = 32$, а крестики — выборочную оценку Парзена при $L = 45$. Аналогично

пунктирная линия обозначает выборочную оценку Тьюки при $L = 8$, а сплошные кружки — выборочную оценку Парзена при $L = 12$. Согласие при этом столь велико, что можно без опасения утверждать, что при использовании одного из этих окон вместо другого мы не упустили бы ни одной важной особенности спектра. Следовательно, эмпирические результаты этого раздела показывают, что важным вопросом в практическом спектральном анализе является выбор ширины полосы частот, а не выбор формы окна. Эти вопросы мы обсудим полнее в разд. 7.2.4 и 7.2.5.

7.2. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА СГЛАЖИВАНИЯ

В разд. 7.2.1 обсуждаются различные теоретические попытки получить оптимальные методы сглаживания. Мы приходим к заключению, что эти теоретические решения неудовлетворительны и

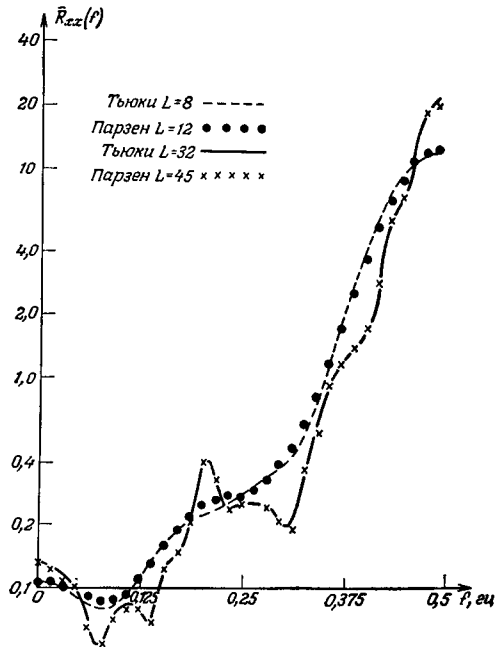


Рис. 7.11. Сравнение окон Тьюки и Парзена, имеющих эквивалентную полосу частот, на процессе авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 = -0,9$; $N = 100$).

что для спектрального оценивания требуется более эмпирический подход. Основными требованиями при оценивании спектров являются *высокая устойчивость* и *малая степень искажения*. Эти требования кратко обсуждаются в разд. 7.2.2. Для того чтобы им удовлетворить, в разд. 7.2.3 вводится эмпирический подход к оцениванию спектров. Этот подход назван *стягиванием окна*, он подробно обсуждается в разд. 7.2.4. В последнем разделе рассматривается вопрос о *формировании окон*, т. е. о выборе формы спектральных окон.

7.2.1. Оптимальное сглаживание спектральных оценок

Было сделано несколько попыток определить сглаженные спектральные оценки, которые были бы оптимальны в некотором смысле. Идея такого подхода состоит в выборе такого корреляционного окна $w(u)$ на интервале $0 \leq |u| \leq T$, которое минимизировало бы некоторую величину, характеризующую погрешность оценки. Обычно еще накладывают практическое ограничение $w(u) = 0$ при $|u| > M$, для того чтобы вычислять ковариации лишь до запаздывания M . Так как большая часть времени при вычислениях уходит на подсчет ковариаций, то представляется разумным выбрать M малым по сравнению с длиной записи T . Один критерий оптимальности корреляционного окна, упоминавшийся в разд. 6.3.5, заключается в минимизации среднеквадратичной ошибки

$$E \{ [\bar{C}_{XX}(f) - \Gamma_{XX}(f)]^2 \}. \quad (7.2.1)$$

Этот критерий был предложен в [3]. Одно из возражений против такого подхода состоит в том, что хорошая для одной частоты оценка может оказаться плохой для другой частоты, и, следовательно, нужно принимать компромиссное решение, которое было бы наилучшим в некотором смысле для всех частот.

Критерий оптимальности, охватывающий все частоты, предложен в [4]. Он заключается в минимизации интеграла от среднеквадратичной ошибки

$$\int_{-\infty}^{\infty} E \{ [\bar{C}_{XX}(f) - \Gamma_{XX}(f)]^2 \} df. \quad (7.2.2)$$

Корреляционное окно, дающее минимум интегралу (7.2.2), имеет вид

$$w(u) = \frac{\gamma_{XX}^2(u)}{\gamma_{XX}^2(u) + \text{Var} [c_{XX}(u)]}, \quad 0 \leq |u| \leq T. \quad (7.2.3)$$

Отметим, что это окно не приводит к отсечению ковариационной функции. Как уже упоминалось, основная цель, которую пресле-

дуют, вводя отсечение, состоит в сокращении вычислений ковариаций. Специалисты по теории связи и по теории управления узнают в выражении (7.2.3) для оптимального корреляционного окна точный аналог выражения для частотной характеристики фильтра, дающего минимальную среднеквадратичную ошибку. Пользуясь терминологией теории связи, можно проинтерпретировать (7.2.2) следующим образом. $\Gamma_{xx}(f)$ соответствует полезному сигналу, а $\bar{C}_{xx}(f)$ — сумме сигнала и шума. Точно так же в (7.2.3) $w(u)$ соответствует частотной характеристике оптимального фильтра, $\gamma_{xx}^2(u)$ — спектру сигнала, а $\text{Var}[c_{xx}(u)]$ — спектру шума.

Другой критерий, предложенный в [5] и также представляющий собой попытку получить оценку, пригодную для всех частот, состоит в минимизации математического ожидания максимума по частоте от среднеквадратичной ошибки

$$E[\max_f |\bar{C}_{xx}(f) - \Gamma_{xx}(f)|^2]. \quad (7.2.4)$$

Можно было бы еще предложить критерий минимума интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{E\{[\bar{C}_{xx}(f) - \Gamma_{xx}(f)]^2\}}{\Gamma_{xx}^2(f)} \right\} df. \quad (7.2.5)$$

Последний критерий отличается от (7.2.2) тем, что математическое ожидание среднеквадратичной ошибки на данной частоте суммируется при интегрировании с весом, обратно пропорциональным величине теоретического спектра на этой частоте. Таким образом, минимизируется интеграл относительной среднеквадратичной ошибки, и очевидное преимущество такой процедуры перед (7.2.2) состоит в том, что оценка образуется с весом, обратно пропорциональным дисперсии ошибки.

Ниже мы покажем, что значение приведенных здесь критериев в спектральном анализе невелико. Единственная цель, для которой можно ими воспользоваться, состоит в том, что они дают возможность сравнить спектральные окна Бартлетта, Тьюки, Парзена и другие по этим критериям. Например, прямоугольное окно $w_R(u)$ из табл. 6.5 является плохим по всем этим критериям, и поэтому его можно отбросить. Остальные окна из табл. 6.5 имеют сходные показатели по этим критериям, и, следовательно, можно считать, что форма этих окон является, вообще говоря, «хорошей». Однако при решении вопроса о выборе подходящей формы окна могут играть роль и другие факторы, например количество мощности, утекающей в боковые лепестки. Так, из рис. 7.10 видно, что окно Бартлетта хуже окон Тьюки и Парзена, поскольку барлеттское окно дает большие ложные осцилляции в среднем сглаженном спектре.

Критические замечания относительно использования критериев оптимальности при сглаживании.

1. Критерии оптимальности произвольны. Поэтому для любого критерия соответствующее ему оптимальное спектральное окно будет наилучшим лишь с некоторой произвольно принятой точки зрения.

2. Критерии оптимальности представляют собой не слишком гибкую математическую формулировку требований спектрального анализа. Например, физика или инженера могут интересоваться некоторые характерные черты спектра, такие, как ширина пика или наклон спектра в некотором диапазоне частот, в то время как эти критерии не предназначены для таких характеристик. Поэтому, как будет показано в разд. 7.2.2, необходима более подходящая и гибкая формулировка требований спектрального анализа, которую мы и изложим в этом разделе.

3. Оптимальное в любом смысле корреляционное окно, например (7.2.3), будет зависеть от неизвестного спектра $\Gamma_{xx}(f)$. Этот недостаток свойствен не только спектральному анализу. Вообще говоря, справедливо правило, согласно которому наилучший план действий должен опираться на некоторые представления об истинном положении вещей. Следовательно, очень важно проводить четкое различие между *планированием* спектрального анализа до сбора данных и самим *анализом* данных, после того как они собраны. Мы хотели бы использовать критерий минимума средне-квадратичной ошибки или какой-нибудь аналогичный критерий *до проведения* спектрального анализа, чтобы решить, например, какой длины нужно взять запись. Но после того как данные собраны, могло бы оказаться, что наши представления относительно $\Gamma_{xx}(f)$ были абсолютно неправильны.

Чтобы избежать этого, любой практический метод спектрального анализа должен предусматривать самостоятельный план действий и не зависеть решающим образом от каких-либо существенных предположений относительно $\Gamma_{xx}(f)$. Другими словами, данные должны говорить сами за себя.

4. Если бы даже существовали ситуации, когда имелась бы точная информация о $\Gamma_{xx}(f)$, подход, использующий критерий оптимальности, указывает лишь, какой способ действия является наилучшим *в среднем*. Так, оптимальное корреляционное окно (7.2.3) будет наилучшим лишь *в среднем* [если при этом пользоваться критерием (7.2.2)]. Однако оно, возможно, окажется очень плохим для некоторой конкретной реализации случайного процесса.

Например, один и тот же процесс может дать две реализации одинаковой длины, для которых потребуются совершенно различные значения ширины полосы частот окна, обеспечивающие хорошую выборочную оценку спектра.

Эти недостатки существенны, и поэтому требуется более гибкий и устойчивый подход к сглаживанию. Для того чтобы предложить подходящий эмпирический метод сглаживания, необходимо вновь обратиться к общим задачам спектрального анализа и сформулировать их в точном и пригодном для наших целей виде. Это делается в следующем разделе, где вводятся понятия *степени искажения* и *устойчивости*. Далее, в разд. 7.2.3 предлагается эмпирический способ сглаживания выборочных оценок.

7.2.2. Степень искажения и устойчивость

Общая цель любого спектрального анализа состоит в том, чтобы как можно точнее оценить функцию $\Gamma_{XX}(f)$. Для этого требуется выполнение двух условий.

1. Средний сглаженный спектр $\bar{\Gamma}_{XX}(f)$ должен как можно меньше отличаться от $\Gamma_{XX}(f)$, т. е. должно быть малым смещение

$$B(f) = \bar{\Gamma}_{XX}(f) - \Gamma_{XX}(f).$$

Если это требование выполняется одновременно для всех f , то говорят, что $\bar{\Gamma}_{XX}(f)$ воспроизводит $\Gamma_{XX}(f)$ с малой *степенью искажения* (fidelity).

2. Дисперсия сглаженной спектральной оценки

$$\text{Var}[\bar{C}_{XX}(f)] \approx \frac{\Gamma_{XX}^2(f)}{T} \left(\frac{M}{b_1} \right)$$

должна быть мала. Если это верно, то говорят, что оценка имеет высокую *устойчивость*.

Чтобы проиллюстрировать, что требования уменьшения степени искажения и увеличения устойчивости являются противоречивыми, мы снова вернемся к некоторым эмпирическим выводам разд. 7.1.

Малая степень искажения. Рассмотрим сначала на рис. 7.2 график функции $\bar{\Gamma}_{XX}(f)$ для процесса авторегрессии первого порядка с $\alpha_1 = -0,4$. С помощью окна Тьюки можно получить малую степень искажения для частот, меньших $0,375$ гц, если взять точку отсечения $L = 8$, т. е. ширину полосы частот окна $b = 1,33/8 = 0,167$ гц. Истинный спектр имеет широкий пик с центром на частоте $f = 0,5$ гц, и, чтобы получить сравнимую степень искажения в окрестности $f = 0,5$ гц, нужно взять точку отсечения $L = 16$, т. е. $b = 0,083$ гц.

Процесс авторегрессии первого порядка с $\alpha_1 = -0,9$ имеет гораздо более узкий пик на той же частоте $f = 0,5$ гц. Из рис. 7.5 видно, что для умеренной степени искажения при использовании окна Бартлетта требуется, чтобы значение точки отсечения L было не менее 48, т. е. ширина полосы частот окна составляла $0,031$ гц.

Заметим, впрочем, что в этом случае $\bar{\Gamma}_{xx}(f)$ изображена в логарифмическом масштабе, так что степень искажения измеряется величиной

$$\lg \bar{\Gamma}_{xx}(f) - \lg \Gamma_{xx}(f),$$

а не величиной

$$\bar{\Gamma}_{xx}(f) - \Gamma_{xx}(f),$$

как в предыдущем примере. Нам кажется, что степень искажения логичнее измерять в логарифмическом масштабе, а не в линейном, поскольку существенны относительные, а не абсолютные искажения мощности. Отметим, что при $L = 32$ степень искажения вблизи пика такого же порядка, как и в интервале $0-0,375$ гц. Следовательно, в этом случае окно с одной и той же шириной полосы частот подходит для оценивания всего спектра.

Процесс второго порядка на рис. 7.7 имеет более сложный спектр, в котором пик, в отличие от предыдущего примера, расположен внутри интервала частот. На рис. 7.7 показана функция $\bar{\Gamma}_{xx}(f)$ для окна Парзена, и мы видим, что при $L = 32$ график воспроизводит пик с малой степенью искажения, в то время как при $L = 8$ и 16 кривые на графиках идут намного ниже пика. Если ширину пика определить как расстояние между точками, где мощность уменьшается до половины пиковой, то в этом случае, как видно из рис. 7.7, ширина равна примерно 0,08 гц. Значения ширины полосы частот окна Парзена при $L = 16$ и 32 равны 0,11 и 0,06 гц соответственно. Следовательно, при $L = 32$ полоса частот окна меньше ширины пика, в результате чего и получается малая степень искажения.

На рис. 7.12 показан еще более сложный спектр, соответствующий случайному процессу, состоящему из двух узкополосных источников белого шума, причем расстояние s между полосами мало*). Для получения малой степени искажения в этом случае требуется спектральное окно с шириной полосы частот порядка s , т. е. порядка расстояния между полосами спектра. Следовательно, можно сделать следующий общий вывод: для получения малой степени искажения ширина полосы частот окна должна иметь тот же порядок, что и ширина самой узкой существенной детали спектра. Таким образом, при планировании спектрального анализа до того, как собраны данные, полезно иметь приблизительные оценки ширины самой узкой детали спектра. Этот вопрос мы обсудим в разд. 7.3.1.

Термин *разрешающая способность* был введен в [2] для описания аналогичного явления. Эта оптическая аналогия предполагает,

*) На рис. 7.12 видны три полосы частот. Однако следует помнить, что спектр является четной функцией, так что его график при $f \leq 0$ есть зеркальное отражение графика при $f \geq 0$. Таким образом, речь здесь идет о двух полосах частот при $f \geq 0$. — Прим. перев.

что делается попытка разрешить *линии* в спектре, т. е. разрешить спектр вида

$$\Gamma_{xx}(f) = \frac{A_1}{2} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)] + \frac{A_2}{2} [\delta(f - f_2) + \delta(f + f_2)].$$

В этом случае говорят, что δ -функции, или пики, спектра разрешены, если ширина полосы частот окна меньше расстояния между пиками по частоте. Это наводит на мысль о том, что такое понятие не является очень полезным в спектральном анализе, так как реальные спектры не могут быть описаны с помощью δ -функций;

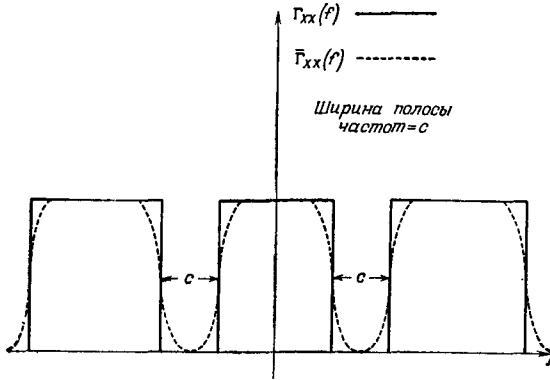


Рис. 7.12. Степень искажения при оценивании белого шума, состоящего из двух полос.

иначе говоря, пики никогда не имеют нулевой ширины. Кроме того, как показано выше, важна именно ширина существенных *деталей* спектра, а не просто расстояние по частоте между пиками.

Высокая устойчивость. В разд. 7.1 было показано, что малая степень искажения достигается при определенном значении ширины полосы частот окна, однако и при этом все же могут получаться плохие выборочные оценки спектра, если длина записи слишком мала. Так, например, из рис. 7.7 видно, что пик процесса второго порядка можно оценить с малой степенью искажения при $L = 32$. Однако изображенная на рис. 7.8 для этого L выборочная оценка спектра, сосчитанная по $N = 50$ членам, дает очень плохую картину пика.

С другой стороны, как мы видим из рис. 7.9, выборочная оценка спектра, сосчитанная по $N = 400$ членам, показывает, что можно с разумной точностью оценить спектр при $L = 32$. Это было предсказано теорией, развитой в разд. 6.3, и объясняется тем, что малая дисперсия, т. е. высокая устойчивость, получается при больших отношениях $T/M = N/L$. Следовательно, для хорошего спектрального

анализа M должно быть достаточно велико, чтобы обеспечить малую степень искажения, и T/M также должно быть большим, чтобы обеспечить высокую устойчивость. Эта идеальная ситуация приблизительно выполняется для выборочной оценки спектра процесса авторегрессии первого порядка на рис. 7.3. Однако во многих практических задачах приходится останавливаться на некотором компромиссе между малой степенью искажения и высокой устойчивостью. Вопрос о том, как практически выбрать такое компромиссное решение, обсуждается в следующем разделе.

7.2.3. Эмпирическое сглаживание выборочных спектральных оценок

Проведенное в разд. 7.2.1 обсуждение использования критериев оптимальности при сглаживании и, в особенности, недостатки такого подхода указывают на то, что необходим некоторый эмпирический способ сглаживания. В частности, чтобы избежать недостатков 2, 3 и 4, нужен такой *гибкий* подход, который допускал бы различные способы проведения сглаживания, подсказанные самим анализом данных. Иными словами, нужен метод, дающий возможность *узнать* достаточно много о спектре $\Gamma_{xx}(f)$ по имеющимся данным, с тем чтобы выбрать подходящее сглаживание для любого интересующего нас диапазона частот.

Пользуясь терминологией предыдущего раздела, это требование можно сформулировать так: нужно, чтобы решение о том, когда достигается разумный компромисс между малой степенью искажения и высокой устойчивостью, можно было получить из самих данных. Если принять, что желательна экономия в вычислениях ковариаций и что оценка типа (6.3.28) является подходящей, то сглаживание спектральной оценки полностью определится *видом*, т. е. *математической* формой, окна и его *шириной полосы частот*, или, что эквивалентно, его *точкой отсечения*.

Поскольку влияние формы окна на выборочные спектральные оценки имеет второстепенное значение, как видно из рис. 7.11, эмпирический подход к сглаживанию должен основываться на изменении полосы частот. Ниже мы изложим один эмпирический подход, который удовлетворяет этим требованиям и укладывается в изложенную выше схему. Во-первых, нужно выбрать некоторое спектральное окно приемлемой формы. Во-вторых, следует сосчитать несколько сглаженных выборочных спектральных оценок, взяв сначала широкую полосу частот окна, а затем постепенно сужая ее. Этот эмпирический метод спектрального анализа был предложен в [6], а в дальнейшем проиллюстрирован на практических задачах в [7, 8]. Ниже эта процедура использования постепенно стягивающихся полос частот будет называться *стягиванием окна* (window closing). Полнее мы ее обсудим в разд. 7.2.4. Несколько менее

важный вопрос о конструировании спектрального окна приемлемой формы, названный Тьюки *формированием окна* (window carpentry), обсуждается в разд. 7.2.5.

7.2.4. Стягивание окна

Метод стягивания окна состоит в вычислении нескольких сглаженных выборочных спектральных оценок сначала для широкой полосы частот, а затем для все более и более узких. Первая цель такого подхода заключается в той гибкости, которую он дает. При этом любую существенную особенность спектра, интересующую нас с практической точки зрения или же выявившуюся в процессе анализа, можно затем исследовать подробнее.

Этот метод позволяет *узнать* многое о форме спектра. Так, выбранная первоначально широкая полоса частот окна обычно будет скрадывать некоторые детали в спектре. Сужая полосу частот, можно исследовать более тонкие детали. Наконец, как указывалось в разд. 7.2.2, когда ширина полосы частот становится уже самой узкой существенной детали спектра, нет никакого смысла стягивать полосу частот еще дальше. При этом, однако, возникают практические вопросы интерпретации, связанные с неустойчивостью выборочных оценок. Эти вопросы обсуждаются ниже.

Поскольку некоторые записи содержат мало информации о спектре точно так же, как некоторые функции правдоподобия дают мало информации о параметре и не имеют слабо выраженного максимума, этот метод дает возможность выбрать наилучшую полосу частот, соответствующую имеющейся записи*). Важный практический вопрос состоит в том, когда остановить процесс стягивания полосы частот, т. е. когда следует окончить поиск дальнейших деталей спектра, с тем чтобы удержать устойчивость. В ответ на этот вопрос нельзя дать никаких строгих рекомендаций, так как наилучший момент остановки будет зависеть от таких факторов, как степень детализации спектра, количество имеющейся априорной информации относительно $\Gamma(f)$ и определяемая неустойчивостью возможность отличия действительных деталей от выборочных флуктуаций. Тем не менее можно различить три типа ситуаций, встречающихся на практике.

*) При изложении процедуры стягивания окна авторы допускают некоторую неточность. Выбирая ширину полосы частот окна b в зависимости от имеющейся записи, они тем самым делают b случайной величиной. Но для такого случайного b , строго говоря, нельзя считать, что устойчивость и степень искажения спектральной оценки будут теми же, что и для неслучайного b , точно так же, как нельзя считать, например, что минимум из нескольких одинаково распределенных величин имеет то же распределение, что и каждая из этих величин. Учесть точно, как влияет такой случайный выбор b на характеристики спектральной оценки, трудно, хотя, возможно, что это влияние и не слишком существенно. — *Прим. перев.*

1. Иногда можно стянуть полосу частот настолько, что большинство существенных деталей выявится до того, как мы дойдем до неустойчивости. В этом случае, начиная с некоторого момента, не должно происходить существенных изменений в спектре, несмотря на дальнейшее заметное уменьшение полосы частот. Такой благоприятный случай показан на рис. 7.3, где изображены выборочные спектральные оценки процесса авторегрессии первого порядка. Видно, что при уменьшении полосы частот в 4 раза (что соответствует изменению L от 4 до 16) происходят лишь незначительные изменения формы спектра. Можно считать, что удовлетворительная выборочная оценка спектра в интервале частот от 0 до $0,375 \text{ гц}$ получается при $L = 8$, однако в окрестности пика требуется большее значение L , скажем $L = 12$.

2. В некоторых случаях выясняется, что выборочная оценка спектра не сходится ни в каком смысле к устойчивому значению. Пример такой ситуации изображен на рис. 7.8, где показаны выборочные оценки спектра процесса авторегрессии, сосчитанные по $N = 50$ членам. Выборочная оценка при $L = 8$ сравнительно плавная, однако невозможно понять, вызваны ли существенные изменения в спектре при переходе от $L = 8$ к $L = 24$ неустойчивостью или же выявлением новых деталей спектра. Поэтому, вероятно, следовало бы считать, что выборочная оценка при $L = 8$ показывает крупные детали спектра, но для выявления более тонких деталей требуются более длинные ряды. Заметим, впрочем, что выборочная оценка спектра при $L = 8$ содержит много полезной информации, и, следовательно, спектральный анализ никоим образом не является бесполезным.

3. Обычно ситуация представляет собой нечто среднее между случаями 1 и 2. Рассмотрим, например, показанные на рис. 7.4 выборочные спектральные оценки процесса авторегрессии первого порядка с $\alpha_1 = -0,4$ и $N = 100$. Отметим, что при $L = 16$ появляются вполне определенные пики на частотах $f = 0,22 \text{ гц}$ и $f = 0,44 \text{ гц}$. Не зная структуры этого процесса, возможно, было бы соблазнительно принять эти пики за действительные, поскольку выборочная оценка имеет приблизительно 17 степеней свободы. Эти пики становятся еще более определенными при $L = 32$, так что имеется некоторое сомнение относительно того, когда следует остановить процесс стягивания окна. Аналогичные замечания справедливы и для выборочных оценок, показанных на рис. 7.6.

Все эти ситуации характеризуются тем, что сначала выборочные оценки проявляют тенденцию к сходимости, но затем из-за неустойчивости начинают расходиться, прежде чем можно сделать определенные выводы. Так как невозможно сказать, какая из этих выборочных оценок спектра ближе к истине, то мы предлагаем изображать три выборочные оценки, соответствующие тем точкам отсечения, где после сходимости появляется расходимость. Важно,

однако, помнить, что при стягивании полосы частот выборочная спектральная оценка становится полиномом от $2\pi f$ все более и более высокой степени, что облегчает появление ложных пиков. В пределе, когда выборочная оценка стремится к несглаженному выборочному спектру, можно получить ложные пики всюду. Поэтому требуется некоторая осторожность при интерпретации выборочных спектральных оценок. Наконец, *спектр должен иметь физический смысл*, в противном случае анализ не представляет собой большой ценности. Короче говоря, основная цель стягивания окна состоит в том, чтобы использовать понимание физической сущности явления в процессе оценивания и интерпретации спектров.

7.2.5. Формирование окна

В разд. 7.1 было эмпирически показано, что стягивание окна гораздо важнее, чем формирование окна. Тем не менее известное значение имеет и конструкция окна, которое будет использовано. Как отмечалось выше, один из возможных подходов к такому конструированию даст использование критериев оптимальности при сглаживании (разд. 7.2.1). Однако можно показать, что окна, являющиеся плохими с точки зрения критерия среднеквадратичной ошибки или аналогичного критерия, имеют плохую форму и с других точек зрения. В этом разделе указан перечень некоторых важных свойств, которыми должны обладать спектральные окна. Аналитический подход к этой задаче применен в работе [1]; здесь излагается более описательный метод.

1. При заданной точке отсечения M смещение, обусловленное спектральным окном $W(f)$, будет мало, если это окно сосредоточено вблизи нуля. Из рис. 6.12 и 6.13 видно, что соответствующее прямоугольному корреляционному окну $w_R(u)$ спектральное окно $W_R(f)$ сконцентрировано около центральной частоты теснее, чем любое другое. Из табл. 6.6 следует, что спектральное окно $W_R(f)$ имеет наименьшую полосу частот. Следовательно, ширина полосы частот служит *мерой сконцентрированности спектрального окна*.

2. Спектральное окно $W_R(f)$ имеет наименьшую полосу частот за счет того, что боковые лепестки этого окна самые большие, как видно из рис. 6.13. Влияние боковых лепестков выражается в том, что из-за них значения спектра $\Gamma_{XX}(g)$ на частотах g , отстоящих довольно далеко от f , могут давать большой вклад в смещение на частоте f . Этот эффект называют *утечкой* (leakage). Из рис. 6.13 видно, что окна W_B , W_T и W_P имеют гораздо меньшие боковые лепестки, чем W_R , а лепестки спектрального окна Бартлетта W_B больше, чем у окон W_T и W_P , что, как показывает рис. 7.5, может приводить к неприятностям в случае узкого пика в спектре. Если нужно, чтобы боковые лепестки были минимальны, то окно W_P предпочтительней, чем другие.

3. Спектральные окна $W_R(f)$, $W_B(f)$ и $W_P(f)$ имеют вид

$$W(f) \sim \left[\frac{\sin(2\pi f M/n)}{2\pi f M/n} \right]^n, \quad n = 1, 2, 4, \quad (7.2.6)$$

и, следовательно, корреляционные окна $w_R(u)$, $w_B(u)$ и $w_P(u)$ связаны между собой с помощью операции свертки. Другими словами, корреляционное окно $w_B(u) = (1 - |u|/M)$, $0 \leq |u| \leq M$, можно получить, свертывая окно $w_R(u) = 1$, $0 \leq |u| \leq M/2$, с самим собой. Аналогично, корреляционное окно $w_P(u)$ получается с помощью свертки окна $w_R(u) = 1$, $0 \leq |u| \leq M/4$, с самим собой 4 раза. То же самое можно сказать несколько по-иному: окно w_R пропорционально плотности вероятности равномерно распределенной случайной величины; окно w_B пропорционально плотности вероятности суммы двух равномерно распределенных величин и окно w_P пропорционально плотности вероятности среднего арифметического из четырех равномерно распределенных величин. Ясно, что распределение среднего арифметического из n равномерно распределенных величин будет сходиться к нормальному, или гауссовскому, распределению при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, корреляционное окно сходится к нормальной кривой, и, следовательно, к этой же кривой сходится и спектральное окно (7.2.6), как показано в гл. 2. В действительности, Даниэльс [10] и рекомендует использовать для спектрального анализа нормальное окно.

С одной стороны, увеличение n приводит к уменьшению высоты боковых лепестков, что видно из (7.2.6). Однако, с другой стороны, спектральное окно также становится более сплюсненным и широким, поскольку оно в первый раз обращается в нуль на частоте $f = 2^{n-1}/2M$. Следовательно, для получения заданной ширины полосы при этом потребуется большое M . Например, для получения заданной ширины полосы частот с помощью окна Парзена w_P требуется значение M , примерно на 40% большее, чем для окна Тьюки w_T .

4. Влияние изменения формы окна при фиксированной точке отсечения можно проиллюстрировать, построив график коэффициента корреляции между сглаженными спектральными оценками на частотах f_1 , f_2 . Из (6.4.11) этот коэффициент корреляции равен

$$\rho_{\overline{CC}}(f_1, f_2) \approx \frac{\int_{-\infty}^{\infty} W(f_1 - g) [W(f_2 + g) + W(f_2 - g)] dg}{I}. \quad (7.2.7)$$

На рис. 7.13 корреляционная функция (7.2.7) изображена в зависимости от разности $f_1 - f_2$ для окон W_B , W_T и W_P из табл. 6.5. Видно, что для широкого окна, такого, как W_P , корреляция оценок для малых значений $f_1 - f_2$ относительно велика, в то время как для больших $f_1 - f_2$ эта корреляция мала. Наоборот, для узкого

окна, подобного W_B , корреляция при малых $f_1 - f_2$ относительно мала, а при больших $f_1 - f_2$ относительно велика.

Блэкман и Тьюки [2] предложили из-за корреляции оценок на близких частотах наносить на график лишь некоррелированные выборочные оценки. Однако эта рекомендация опасна для применений, так как при этом можно, например, пропустить пик, вершина которого попала как раз между нанесенными на график некоррелированными выборочными оценками. Наш опыт говорит, что желательнее строить график выборочной оценки с шагом по частоте, по крайней мере вдвое меньшим, чем расстояние между некоррелированными оценками, т. е. с шагом не больше $1/2L$.

Из сказанного выше можно заключить, что окна W_B , W_T и W_P имеют приемлемую форму, но, видимо, следует отбросить W_B из-за его больших боковых лепестков. Выборочные оценки спектра, получаемые с помощью окон W_B и W_P , всегда неотрицательны, в то время как с помощью окна W_T можно получить иногда отрицательные выборочные оценки, что нежелательно. Хотя у окна W_P боковые лепестки меньше, чем у W_B и W_T , оно более широкое, и, следовательно, при использовании этого окна требуется вычислять больше ковариаций, чтобы получить заданную ширину полосы частот. Это означает, что если в процессе стягивания окна используется W_P , то для того, чтобы выборочная оценка перестала колебаться, потребуется больше времени, чем при использовании окна W_T .

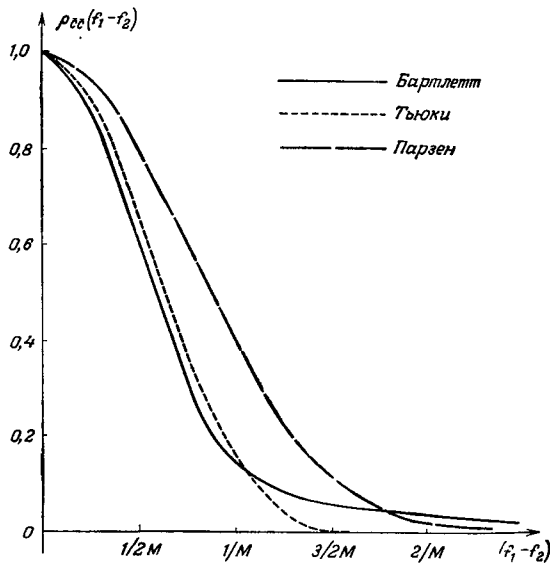


Рис. 7.13. Корреляция по частоте спектральных оценок для различных окон с одинаковой точкой отсечения.

7.3. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОЦЕНИВАНИЯ СПЕКТРОВ

В этом разделе обсуждаются некоторые более практические аспекты оценивания спектров, первый из которых (разд. 7.3.1) относится к планированию спектрального анализа. В следующем

разделе описывается пробное оценивание спектра, которое иллюстрируется на примере с партиями продукта, изображенными на рис. 5.2. Затем в разд. 7.3.3 дается полезная практическая методика, которой следует придерживаться при выполнении спектрального анализа. Эта процедура иллюстрируется в разд. 7.3.4 на двух практических примерах, показывающих пользу метода стягивания окна. В разд. 7.3.5 показывается, как можно использовать цифровую фильтрацию для улучшения выборочных спектральных оценок.

7.3.1. Планирование спектрального анализа

Сейчас мы покажем, как можно планировать спектральный анализ до сбора данных и, в частности, как можно выбирать длину записи, чтобы выполнялись некоторые требования. Имеются четыре основных требования, которые должны быть удовлетворены.

1. Интервал отсчета Δ должен быть настолько мал, чтобы спектр можно было оценить в интересующем нас диапазоне частот $0 \ll f \ll f_0$. Следовательно, Δ должно быть не больше $1/2f_0$.

2. Следует позаботиться о том, чтобы избежать *наложения частот*. Это можно осуществить одним из двух способов. В первом надо взять Δ столь малым, чтобы $\Gamma_{xx}(f)$ можно было считать фактически равным нулю при $f > 1/2\Delta$. Однако для этого нужны исходные сведения о спектре, которых может и не быть. Кроме того, нас могут интересовать значения спектра $\Gamma_{xx}(f)$ лишь для частот меньше некоторой частоты f_0 . Если f_0 гораздо меньше той частоты, за которой $\Gamma_{xx}(f)$ можно считать нулем, то нужно будет брать расчеты с гораздо меньшим интервалом по времени, чем это требуется для интересующих нас частот $f \ll f_0$. Второй способ состоит в фильтрации сигнала *до взятия отсчетов*, так что мощность на частотах выше f_0 фактически устраняется. Это легче всего сделать в аналоговом виде. Следует отметить, что некоторая предусмотрительность на этой стадии обработки данных может в дальнейшем избавить от значительных неприятностей и сэкономить усилия.

3. Допустим, что можно сделать предположение о ширине a самой узкой существенной детали спектра или, наоборот, требуется «обнаружить» деталь спектра шириной не меньше a . Тогда точку отсечения M нужно выбрать так, чтобы ширина полосы частот окна b была меньше a . Например, для окна Тьюки это означает, что $b = 1,33/M \leq a$, или $M = L\Delta \geq 1,33/a$. При этом для числа L значений дискретной ковариационной функции, которые нужно сосчитать, должно выполняться неравенство $L \geq 1,33/a\Delta$. В общем случае точку отсечения следует выбирать из равенства

$$M = \frac{b_1}{a}, \quad (7.3.1)$$

где b_1 — нормированная ширина полосы частот. Отсюда необходимое число ковариаций

$$L = \frac{M}{\Delta} = \frac{b_1}{a\Delta}. \quad (7.3.2)$$

4. Для конечных записей возможность точного оценивания ширины пиков или степень выявления тонких деталей спектра зависит также от дисперсии оценки. Следовательно, чтобы можно было верить в тонкую структуру выборочной оценки спектра, нужно иметь возможность удерживать заданный уровень устойчивости. Этого можно добиться, задавая желаемое для каждого оцениваемого значения спектра число степеней свободы ν , скажем от 15 до 30, и определяя затем длину записи T из (6.4.26) и (7.3.1). Это дает

$$T = \frac{\nu}{2} \frac{M}{b_1} = \frac{\nu}{2a}, \quad (7.3.3)$$

и, следовательно, из (7.3.2) получается

$$N = \frac{\nu}{2a\Delta} = \frac{\nu L}{2b_1}. \quad (7.3.4)$$

Затем на рис. 3.10 можно найти значение 80%-ного или 95%-ного доверительного интервала, соответствующего данному числу степеней свободы. Если полученный таким способом доверительный интервал слишком велик, то, увеличив ν (и, следовательно, увеличив N), мы уменьшим его, правда за счет увеличения времени вычислений и усилий, потраченных на сбор данных.

Простую интерпретацию формулы (7.3.4) можно получить, рассматривая сглаженные спектральные оценки, отстоящие по частоте на ширину полосы частот b спектрального окна. Ковариация этих оценок приблизительно равна нулю, так как при таком расстоянии по частоте спектральные окна почти не перекрываются. Поэтому число независимых сглаженных спектральных оценок в полосе частот от 0 до $1/2\Delta$ равно $(1/2\Delta)b = L/2b_1$, так что $b = b_1/L\Delta$. Однако несглаженные спектральные оценки, отстоящие на $1/T = 1/N\Delta$, распределены как независимые χ^2 -величины с двумя степенями свободы. Поскольку в интервале от 0 до $1/2\Delta$ содержится $T/2\Delta$ таких независимых несглаженных оценок, полное число степеней свободы, относящееся к каждой сглаженной оценке (т. е. к каждому оцениваемому значению спектра), равно $\nu = 2(T/2\Delta)/(L/2b_1) = 2b_1N/L$. Следовательно, $N = \nu L/2b_1$.

Важная особенность формулы (7.3.3) состоит в том, что длину записи можно задавать независимо от спектрального окна и она зависит лишь от ν и a .

Пример. Предположим, что требуется оценить спектр мощности в диапазоне до $f_0 = 2$ гц и можно без опасений считать, что за этой частотой нет сколько-нибудь заметной мощности. Таким образом,

не будет неприятностей из-за наложения частот. Тогда, согласно требованию 1, мы имеем

$$\Delta = \frac{1}{2f_0} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ сек.}$$

Если можно предположить, что ширина самого узкого пика в спектре равна по крайней мере 0,20 *гц*, а устойчивость, даваемая 30 степенями свободы, представляется подходящей, то из (7.3.3) длина записи должна быть не менее

$$T = \frac{30}{2(0,2)} = 75 \text{ сек.}$$

Следовательно, требуется $N = 300$ точек данных. Из рис. 3.10 находим, что для 30 степеней свободы 80% -ный доверительный интервал для $\Gamma_{xx}(f)$ приблизительно равен $(0,7\bar{C}_{xx}(f); 1,3\bar{C}_{xx}(f))$, т. е. получается 30%-ная относительная ошибка. Чтобы уменьшить этот доверительный интервал, скажем, до $(0,8\bar{C}_{xx}(f); 1,2\bar{C}_{xx}(f))$, потребовалось бы $\nu = 80$ и, следовательно, $T = 200$ сек, $N = 800$.

Приведенные выше вычисления имеют некоторое значение, когда заранее решается вопрос о длине записи, однако следует подчеркнуть, что после того, как данные собраны, требуется другой подход. Таким образом, если анализ предназначен для разделения пиков шириной a , то может случиться, что после сбора данных перед началом анализа обнаружится неправильность наших предположений о величине a . Следовательно, нужно приспособить, как указывалось в разд. 7.2, действительный анализ спектра к имеющимся данным. Это и дает основание воспользоваться процедурой стягивания окна, описанной в разд. 7.2.4.

7.3.2. Пробный анализ (pilot analysis)

Иногда полезно получить грубую выборочную оценку формы спектра, не вычисляя сначала ковариационную функцию и затем сглаженную выборочную оценку по формуле (7.1.6). В частности, если нужно предварительно отфильтровать данные, как, например, в некоторых задачах из гл. 9—11, то грубый пробный анализ может оказаться достаточным, чтобы приближенно синтезировать хорошую частотную характеристику фильтра. Поскольку такой пробный анализ легко выполнить и без вычислительных машин, он служит также полезным упражнением, показывающим, какого рода информация содержится в спектре.

Описанную ниже форму пробного анализа удобно применять в том случае, когда число наблюдений $N = 2^p$, где p — некоторое целое число. Впрочем в разд. 7.3.5 показано, как этот анализ можно

Таблица 7.2

Воображаемый план эксперимента для данных о партиях продукта

| Модификация | 1 | | | | 2 | | | | | | | | | | | |
|---------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | | | | | | | | |
| Неделя | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | | | | | | | | |
| День | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | | | | | | | |
| Рабочая смена | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| Партия 1 | 47 64 | 38 65 | 59 48 | 56 40 | 80 55 | 51 58 | 44 57 | 25 59 | 56 74 | 45 54 | 48 55 | 50 62 | 43 52 | 55 41 | 34 35 | 68 38 |
| Партия 2 | 23 71 | 55 41 | 71 35 | 58 44 | 37 74 | 50 60 | 50 45 | 50 71 | 50 58 | 36 54 | 45 57 | 44 64 | 38 60 | 53 49 | 54 45 | 50 60 |

видоизменить для любого числа N . Чтобы объяснить эту процедуру, представим себе, что первые 64 наблюдения о партиях продукта из табл. 5.1 были получены из эксперимента, в котором некоторые параметры процесса намеренно изменялись согласно схеме, изображенной в табл. 7.2. Предполагается, что эксперимент построен таким образом, что выход продукта может зависеть от партии используемого сырья, рабочей смены, еженедельной чистки дистилляционной колонки и от двух основных модификаций процесса дистилляции. Заметим, что имеет смысл производить лишь сравнения типа «между разными партиями сырья, в одни и те же дни, недели и для одной из модификаций», поскольку каждый раз партии используемого сырья различны. Поэтому естественно использовать для анализа этих данных метод, называемый дисперсионным анализом факторного эксперимента с группировкой. При этом полная сумма квадратов отклонений, поделенная на N , разлагается на следующие слагаемые:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2 = \frac{S_R}{N} + \frac{S_B}{N} + \frac{S_S}{N} + \frac{S_D}{N} + \frac{S_W}{N} + \frac{S_M}{N}, \quad (7.3.5)$$

где слагаемые в правой части (7.3.5) обозначают вклады в полную сумму квадратов, обусловленные соответственно изменчивостью при повторении, изменчивостью партий сырья, смен, изменчивостью

в разные дни, в разные недели и, наконец, различием модификаций. Таким образом,

$$S_R = \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} + \frac{(x_4 - x_3)^2}{2} + \dots,$$

$$S_B = \frac{(x_4 + x_3 - x_2 - x_1)^2}{4} + \frac{(x_8 + x_7 - x_6 - x_5)^2}{4} + \dots,$$

$$S_S = \frac{(x_8 + x_7 + x_6 + x_5 - x_4 - x_3 - x_2 - x_1)^2}{8} + \dots,$$

$$S_D = \frac{(x_{16} + x_{15} + \dots + x_9 - x_8 - x_7 - \dots - x_1)^2}{16} + \dots,$$

$$S_W = \frac{(x_{32} + x_{31} + \dots + x_{17} - x_{16} - x_{15} - \dots - x_1)^2}{32} + \dots,$$

$$S_M = \frac{(x_{64} + x_{63} + \dots + x_{33} - x_{32} - x_{31} - \dots - x_1)^2}{64} + \dots$$

Видно, что S_R получается с помощью коррелирования данных с прямоугольной волной периода 2 и последующим возведением в квадрат. Следовательно, S_R будет велико, если данные содержат сильную периодическую компоненту с периодом 2. Аналогично, S_B увеличилось бы при наличии компоненты с периодом 4 и т. д. В табл. 7.3 приведены вклады в средний квадрат (т. е. в сумму квадратов отклонений, поделенную на N) от каждого из этих источников.

Таблица 7.3

Пробная выборочная оценка спектра для данных о партиях продукта

| Источник | Вклад в средний квадрат | Выборочная оценка спектра | Диапазон частот, гц |
|---------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------|
| Между повторениями | 99,30 | 397,20 | 0,25 — 0,50 |
| Между партиями | 15,24 | 121,92 | 0,125 — 0,25 |
| Между сменами | 11,77 | 188,32 | 0,0625 — 0,125 |
| Между днями | 4,10 | 131,20 | 0,0313 — 0,0325 |
| Между неделями | 4,16 | 266,24 | 0,0156 — 0,0313 |
| Между модификациями | 0,71 | 90,88 | 0,0078 — 0,0156 |

В сумму квадратов S_R входят вклады не только от компонент с периодом 2, но, как будет показано в разд. 7.3.5, и вклады от компонент с периодами от 2 до 4, т. е. с частотами от 0,25 до 0,5 гц. Поэтому средняя мощность в интервале частот от 0,25 до 0,5 гц равна $99,30/0,25 = 397,2$ (единиц продукции)²/гц. Аналогично S_B дает полную мощность в интервале частот от 0,125 до 0,25 гц, и, следовательно, средняя мощность в этой полосе частот равна

$15,24/0,125 = 121,92$ (единиц продукции)²/гц. Выборочная оценка нормированного спектра, полученная из пробного анализа, показана на рис. 7.14 вместе с выборочной спектральной оценкой, полученной с помощью более точного анализа, описанного

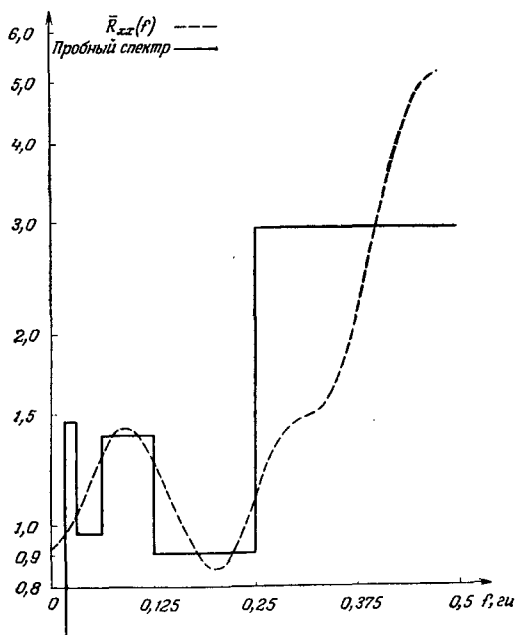


Рис. 7.14. Пробный спектральный анализ для данных о партиях продукта.

в разд. 7.1.1, причем было использовано окно Тьюки с $M = 12$. Видно, что пробная спектральная оценка хорошо согласуется с более точной выборочной оценкой.

7.3.3. Практическая методика оценивания спектров

В этом разделе описана практическая методика, которой следует придерживаться при оценивании спектров. Она состоит из следующих четырех стадий.

1. *Предварительная стадия.* Исследуем временной ряд с целью обнаружить в нем явные тренды или периодичности. Это полезно для решения вопроса о том, использовать ли исходные данные или же предварительно отфильтровать их, как будет описано

в разд. 7.3.5. Особенно полезным и простым фильтром, который мы часто будем использовать в дальнейшем, является фильтр первых разностей

$$y_t = x_t - x_{t-1}.$$

На этой стадии можно было бы провести и пробный анализ. Решается вопрос о числе L_{\max} запаздываний, для которых нужно считать ковариации и корреляции. Первоначально следует выбрать L_{\max} примерно равным $N/4$, если только это не потребует слишком большого времени на вычисления. В тех редких случаях, когда оказывается, что $N/4$ значений корреляционной функции недостаточно, следует продолжить вычисление корреляций.

2. *Первая стадия вычислений.* Затем вычисляются выборочные корреляционные функции для исходных данных и для их первых разностей при $k = 0, 1, \dots, L_{\max}$. Строятся графики этих функций для того, чтобы решить вопрос, брать ли исходные данные или первые разности от них и какой диапазон точек отсечения использовать. Точки отсечения можно выбрать, проверяя, с какого места выборочные корреляции становятся пренебрежимыми. Три значения точек отсечения L_1, L_2, L_3 , которые будут использованы в процедуре стягивания окна, нужно выбирать так, чтобы они отличались довольно сильно, например $L_3/L_1 = 4$.

3. *Вторая стадия вычислений.* Вычисляются и строятся в логарифмическом масштабе на одном графике выборочные спектральные оценки, соответствующие этим трем точкам отсечения. Шаг по частоте надо брать $1/2F$, где $F \approx 2L$ или $3L$. Нужно нанести на график горизонтальными отрезками значения ширины полосы частот окон (6.4.24), чтобы детали выборочных оценок спектра можно было сравнить с этими значениями. Следует также нанести на график вертикальные отрезки, каждый из которых равен по длине доверительному интервалу (6.4.21) для соответствующей ширины полосы частот окна.

4. *Интерпретация выборочных спектральных оценок.* Общий график спектров, полученный на 3-й стадии, попадет, вообще говоря, в одну из трех категорий, которые можно назвать: идеальной, промежуточной и плохой.

а. *Идеальный спектральный анализ.* Исследуется вариация выборочных спектральных оценок при увеличении значения точки отсечения, т. е. при уменьшении ширины полосы частот окна. Если после некоторого значения L^* дальнейшее увеличение L сопровождается лишь незначительными изменениями в выборочных оценках, то можно считать, что процедура стягивания окна уже выявила большую часть деталей спектра. Если при этом доверительный интервал для спектра на одной частоте получается достаточно малым, то можно принять выборочную оценку, соответствующую

L^* . В таком случае выборочная оценка имеет малую степень искажения и высокую устойчивость. Иногда случается, что наибольшее значение точки отсечения L_M оказывается слишком мало. В этом случае выборочная спектральная оценка, возможно, будет сходиться к некоторому предельному виду, однако для подтверждения этого поведения может возникнуть необходимость дальнейшего вычисления выборочных оценок при $L > L_M$.

б. Промежуточный случай спектрального анализа. На практике ситуации, когда одновременно можно достичь высокой устойчивости и малой степени искажения, редки. Как правило, выборочная оценка проявляет признаки сходимости при малых L , а затем начинает расходиться при дальнейшем росте L . Обычно это означает, что выборочная оценка стала неустойчивой до того, как в спектре выявились тонкие детали. В таких ситуациях мы предлагаем строить несколько спектров, перекрывающих промежуточный случай, где сходимость выборочных спектральных оценок уступает место расходимости, так чтобы эти эффекты были видны при интерпретации спектров. Как показано в разд. 7.1, нетрудно получить ложные пики в спектре, сужая полосу частот окна. Поэтому в такой ситуации лучше проявить осторожность, отдавая предпочтение в использовании небольшим значениям точек отсечения.

Иногда случается так, что выборочная спектральная оценка быстро сходится в одних частотных интервалах, где спектр плавный, и медленно в других, где спектр меняется быстро. Поэтому в разных частотных интервалах могут потребоваться разные значения L .

в. Случай плохого спектрального анализа. Иногда выборочные спектральные оценки настолько заметно меняются при уменьшении полосы частот окна, что невозможно рекомендовать даже несколько спектров. В такой неблагоприятной ситуации, возможно, следует предпочесть выборочную спектральную оценку с малым значением точки отсечения, сознавая, что при этом широкое спектральное окно может замаскировать важные тонкие детали спектра. Однако основная неприятность в том, что N слишком мало, поэтому нужно собрать больше данных.

Следует подчеркнуть, что приведенные выше рекомендации не являются строгими, а скорее должны рассматриваться как наводящие соображения. В конкретных задачах может потребоваться другой способ действий. Например, нас может интересовать пик с известной средней частотой, но с шириной, которая известна лишь приближенно. В этом случае полосу частот окна можно было бы стягивать к этой частоте для исследования данного пика, не слишком заботясь об устойчивости на других частотах. Изложенную выше процедуру мы сейчас проиллюстрируем на двух практических примерах.

7.3.4. Два практических примера оценивания спектра

Спектральный анализ данных о партиях продукта. 1. Предварительный анализ. Проверка данных о партиях продукта на рис. 5.2 не выявила какого-либо очевидного тренда. Поэтому была использована выборочная оценка ковариационной функции (7.1.2),

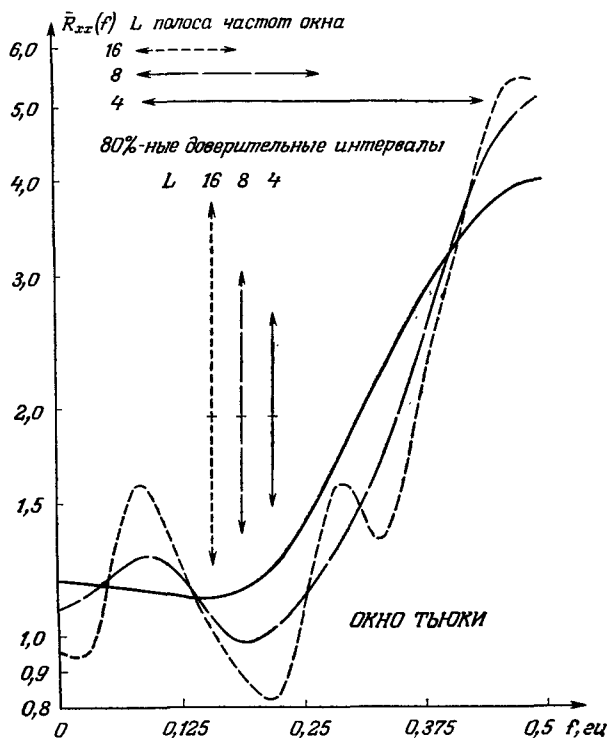


Рис. 7.15. Сглаженные выборочные оценки нормированного спектра для данных о партиях продукта.

которая вычислялась до запаздывания $L_{\max} = 18$. Проверка пробного спектра на рис. 7.14 показала, что спектр весьма плавный, так как диапазон его изменений равен примерно четырем. Поэтому не стали брать первые разности от данных.

2. Первая стадия вычислений. Выборочная корреляционная функция $r_{xx}(k)$ для этих данных изображена на рис. 5.6. Из этого графика видно, что она фактически равна нулю при $k > 10$. Поэтому было решено взять точки отсечения $L = 4, 8$ и 16.

3. Вторая стадия вычислений. С помощью окна Тьюки для этих значений L вычислялись выборочные оценки нормированного спектра, графики которых были построены все вместе на рис. 7.15.

На этом рисунке нанесены также отрезки, показывающие значения ширины полосы частот окна и доверительные интервалы для каждого из выбранных значений L .

Следует отметить, что этот спектр похож на спектр искусственного процесса авторегрессии первого порядка с $\alpha_1 = -0,4$ и $N = 100$, показанный на рис. 7.4. Очевидно, что полоса частот, соответствующая $L = 4$, слишком широка для того, чтобы выявить какие-нибудь детали в спектре, но изменения при переходе от $L = 8$ к $L = 16$ показывают, что спектр очень плавный и что нет смысла стягивать окно еще больше. Несмотря на то что N мало, можно

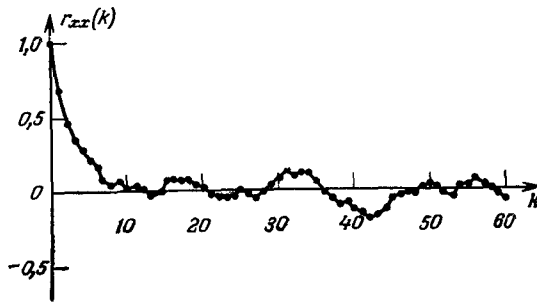


Рис. 7.16. Выборочная автокорреляционная функция для данных об отраженном радиолокационном сигнале, изображенном на рис. 5.1.

считать, что спектральный анализ является удовлетворительным и что мы немного потеряли бы, взяв $L = 8$. Для окна Тьюки и $L = 8$ число степеней свободы равно 23, что является приемлемой величиной.

Спектральный анализ радиолокационных данных. Рассмотрим другой пример, иллюстрирующий метод, изложенный в разд. 7.3.3. На рис. 7.16 показана выборочная корреляционная функция отраженного радиолокационного сигнала, изображенного на рис. 5.1. На рис. 7.17 приведены выборочные оценки нормированного спектра, полученные с помощью окна Бартлетта при $L = 16, 48$ и 60 для ряда, состоящего из $N = 448$ членов. Частотный диапазон обозначен от 0 до 0,5 *гц*, поскольку настоящий диапазон несуществен. Мы видим, что при $L = 16$ выборочная оценка плавная и не выявляет пика, существование которого можно было бы ожидать из-за осциллирующей корреляционной функции. При $L = 32$ (этот случай не показан на рисунке) появляются вполне различимые пики приблизительно на частотах $f = 0,07$ *гц* и $0,25$ *гц*. Увеличение L до 48 выявляет эти пики очень наглядно, и далее видно, что при увеличении L до 60 спектр меняется мало. Поэтому было взято значение $L = 60$, для которого эквивалентная ширина полосы частот равна $1,5/60 = 0,025$ *гц*, и выборочная оценка на каждой из оцениваемых частот имеет $3 \cdot 448/60 \approx 22$ степени свободы, что является приемлемой величиной. Доверительный интервал при $L =$

= 60 показан на рисунке вертикальным отрезком, а ширина полосы частот — горизонтальным.

В этом конкретном эксперименте потребовалось вычислять корреляции для 60 запаздываний, чтобы подходящим образом описать

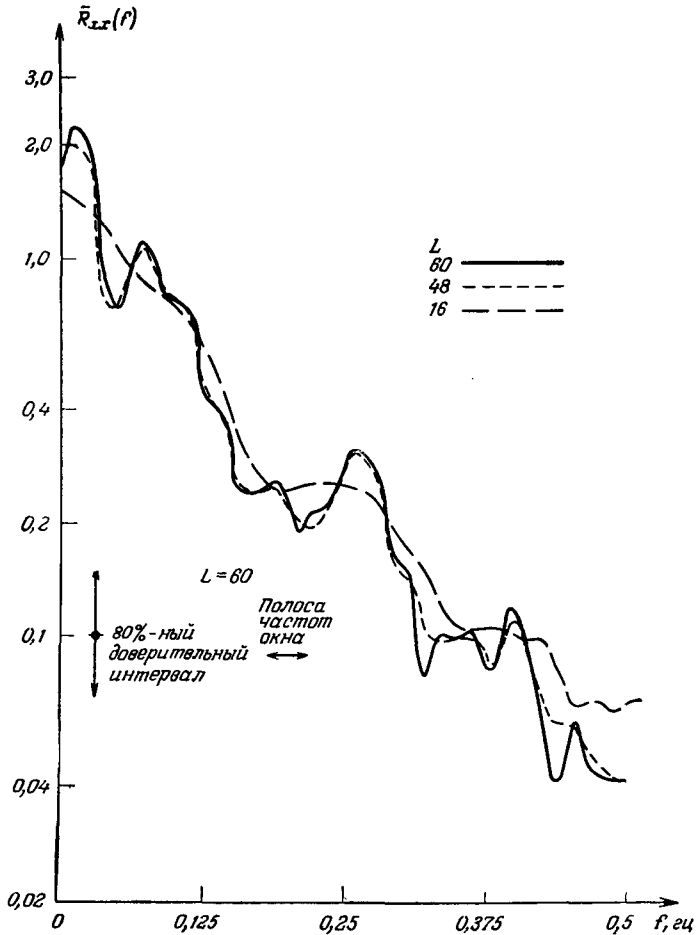


Рис. 7.17. Сглаженные выборочные оценки нормированного спектра отраженного радиолокационного сигнала, изображенного на рис. 5.1.

пик на частоте 0,07 гц. В то же время для частот, больших чем 0,1 гц, спектр можно довольно точно определить с помощью лишь 32 значений корреляций. Это еще раз иллюстрирует важный практический факт: в то время как для оценивания очень узкого пика в определенной части спектра могут понадобиться очень большие

значения L , остающуюся часть спектра, возможно, удастся проанализировать при гораздо меньших L . В настоящем примере с радиолокатором пик на частоте 0,07 гц не представлял большого интереса, поскольку он был вызван частотой сканирования радиолокатора. В действительности интересен был частотный диапазон выше 0,1 гц, который можно было бы успешно проанализировать с помощью относительно небольших значений L , таких, как 32 или 40.

7.3.5. Цифровая фильтрация

Иногда в результате предварительного исследования (например, пробного анализа или визуальной проверки) становится ясно, что спектр очень плохой. Под этим подразумевается, что большая часть мощности сосредоточена в одной или нескольких узких полосах. Из-за утечки мощности в боковые лепестки спектральных окон такие пики могут сильно исказить выборочные спектральные оценки в тех местах, где мощность невелика. Поэтому для улучшения выборочных оценок на этих частотах может оказаться полезной цифровая фильтрация данных,

Цифровая фильтрация — это просто преобразование набора входных данных x_t в набор выходных данных y_t с помощью линейного соотношения вида

$$y_t = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{t-l}, \quad (7.3.5)$$

где h_l — подходящим образом выбранные веса. Заметим, что не обязательно требовать условия «физической осуществимости», из которого следует $h_l = 0, l < 0$. Таким образом, фильтр (7.3.5) может использовать как значения x слева от y_t («прошлые» значения x), так и значения x справа от y_t («будущие» значения x). Как показано в гл. 2, передаточная функция цифрового фильтра (7.3.5) равна

$$H(z) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h_l z^{-l} \quad (7.3.6)$$

где использовано обозначение z -преобразования.

Подставляя в (7.3.6) $z = e^{+j2\pi f\Delta}$, получим частотную характеристику фильтра. Частный случай такого фильтра, который в дальнейшем нам понадобится, получается при $h_l = h_{-l}$. Для таких симметричных фильтров частотная характеристика равна

$$H(f) = h_0 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} h_l \cos 2\pi f l \Delta, \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq f < \frac{1}{2\Delta}. \quad (7.3.7)$$

Таким образом, фазовый сдвиг между входом и выходом будет равен либо нулю, либо π , поскольку (7.3.7) не имеет мнимой части.

Функция усиления $G(f)$ получается, если взять модуль от $H(f)$ в (7.3.6).

В разд. 7.3.2 мы отмечали, что пробное оценивание спектра мощности заключается в применении подходящих цифровых фильтров к временному ряду с последующим возведением в квадрат выходных значений этих фильтров. Одно из первых применений цифровые фильтры нашли при сглаживании временных рядов. Так, например, иногда сглаживают экономические временные ряды, чтобы снизить влияние краткосрочных (высокочастотных) флуктуаций и, таким образом, сделать возможным изучение трендов экономических величин.

Примеры цифровых фильтров. Сейчас мы определим некоторые простые цифровые фильтры и обсудим их свойства. Для простоты предположим, что в этих примерах интервал дискретизации по времени Δ равен единице.

1. *Сглаживание тройками.* Временной ряд можно «сгладить тройками», группируя наблюдения следующим образом:

$$y_t = h_{-1}x_{t+1} + h_0x_t + h_1x_{t-1}.$$

Если веса равны, эта формула становится симметричной

$$y_t = \frac{1}{3}(x_{t+1} + x_t + x_{t-1}),$$

откуда получаем передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1}{3}(z + 1 + z^{-1}).$$

Частотная характеристика равна

$$H(f) = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos 2\pi f) = \frac{\sin 3\pi f}{3 \sin \pi f}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}.$$

Отсюда функция усиления и фазовая характеристика имеют вид

$$G(f) = \left| \frac{\sin 3\pi f}{3 \sin \pi f} \right|, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2},$$

$$\varphi(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq \frac{1}{3}, \\ \pi, & \frac{1}{3} < |f| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. *Суммирование.* Рассмотрим суммирующий фильтр

$$y_t = (x_t + x_{t-1}).$$

Передаточная функция этого фильтра равна

$$H(z) = (1 + z^{-1}),$$

откуда получаем частотную характеристику

$$H(f) = (1 + e^{-j2\pi f}) = 2e^{-j\pi f} \cos \pi f, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}.$$

Функция усиления и фазовая характеристика имеют вид

$$G(f) = 2 \cos \pi f, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2},$$

$$\varphi(f) = \pi f.$$

Таким образом, этот фильтр действует как низкочастотный.

3. *Взятие разностей.* Разностный фильтр определяется формулой

$$y_t = (x_t - x_{t-1}) \quad (7.3.8)$$

и имеет частотную характеристику

$$H(f) = 2je^{-j\pi f} \sin \pi f = 2e^{-j\pi(f-1/2)} \sin \pi f, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}.$$

Функция усиления и фазовая характеристика равны

$$G(f) = 2 |\sin \pi f|, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2},$$

$$\varphi(f) = \begin{cases} \pi \left(f + \frac{1}{2}\right), & -\frac{1}{2} \leq f < 0, \\ \pi \left(f - \frac{1}{2}\right), & 0 \leq f < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, разностный фильтр действует как высокочастотный. Функция усиления этого фильтра показана на рис. 1.4.

4. *Суммо-разностные фильтры.* Рассмотрим теперь фильтр, состоящий из m суммирующих и из n разностных фильтров. Из (2.3.26) и (2.3.27) полная функция усиления и полная фазовая характеристика равны

$$G_{m,n}(f) = 2^{m+n} (\cos \pi f)^m |\sin \pi f|^n, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}, \quad (7.3.9)$$

и

$$\varphi(f) = \begin{cases} \pi f(m+n) + \frac{n\pi}{2}, & -\frac{1}{2} \leq f < 0, \\ \pi f(m+n) - \frac{n\pi}{2}, & 0 \leq f < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отметим, что функция усиления имеет максимум на частоте

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{m-n}{m+n} \right). \quad (7.3.10)$$

Теорема Слуцкого. Если на вход описанного выше суммо-разностного фильтра подается процесс со спектром $\Gamma_{zz}(f)$, то,

используя формулу (7.3.9), можно получить спектр выходного процесса

$$\Gamma_{XX}(f) = 2^{m+n+1} (\cos \pi f)^{2m} (\sin \pi f)^{2n} \Gamma_{ZZ}(f), \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}.$$

С помощью формулы (7.3.10) можно убедиться, что для белого шума, т. е. когда $\Gamma_{ZZ}(f) = 2$, $0 \leq f < \frac{1}{2}$, функция $\Gamma_{XX}(f)$ стремится при $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $n/m \rightarrow \theta$ к δ -функции $\delta(f - f_0)$, где

$$\cos 2\pi f_0 = \frac{1 - \theta}{1 + \theta}.$$

В разд. 6.2.2 было показано, что случайный процесс, спектр которого есть δ -функция, является синусоидальной или косинусоидальной волной. Таким образом, этот результат показывает, что если белый шум подвергать суммированию и взятию разностей достаточное число раз, то получится синусоидальная волна. Эта теорема принадлежит Слуцкому [11], который отмечал, что в некоторых случаях периодическое или квазипериодическое поведение экономических временных рядов объясняется процедурой сглаживания, примененных к этим рядам.

5. *Фильтры для пробного спектрального анализа.* Фильтры, использованные в разд. 7.3.2 для пробного анализа, получаются из операций суммирования и взятия разностей с подходящими задержками. Например, передаточная функция фильтра, соответствующего сумме квадратов S_M из разд. 7.3.2, равна

$$H(z) = \frac{(z^{32} - 1)^2}{8(z - 1)},$$

откуда функция усиления имеет вид

$$G(f) = \frac{2(\sin 32\pi f)^2}{|\sin \pi f|}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}.$$

Аналогичные выражения можно получить и для других фильтров. Как отмечалось в разд. 7.3.2, фильтр, соответствующий S_R , имеет максимум на частоте $f = 0,5$ гц и обращается в нуль первый раз при $f = 0,25$ гц. Следовательно, величину на выходе этого фильтра нужно распределить, грубо говоря, по интервалу от 0,25 до 0,5 гц, если требуется выборочная оценка мощности в этом интервале.

6. *Фильтры типа скользящего среднего — авторегрессии.* Обобщением описанных выше фильтров являются фильтры типа скользящего среднего — авторегрессии, определяемые соотношением

$$\sum_{i=-m}^m \alpha_i y_{t+i} = \sum_{i=-l}^l \beta_i x_{t+i}. \quad (7.3.11)$$

Основное отличие этого фильтра от предыдущих состоит в том, что выход y_t зависит как от входных значений, так и от других выход-

ных значений, т. е. эти фильтры используют *обратную связь*. Передаточная функция фильтра (7.3.11) равна

$$H(z) = \frac{\beta_{-l}z^l + \dots + \beta_0 + \beta_1z^{-1} + \dots + \beta_lz^{-l}}{\alpha_{-m}z^m + \dots + \alpha_0 + \alpha_1z^{-1} + \dots + \alpha_mz^{-m}}.$$

Фильтры этого вида обладают большей гибкостью, чем описанные выше, а также более экономичны в том смысле, что хорошее приближение к заданному фильтру можно получить с меньшим числом параметров в правой и левой частях равенства (7.3.11). Этот факт проиллюстрирован на рис. 5.20, где показано, что согласие с данными у процесса авторегрессии второго порядка лучше, чем у процесса скользящего среднего десятого порядка.

Суммирующие и разностные фильтры или их обобщения можно использовать в большей части случаев, когда нужна цифровая фильтрация. Однако если при проектировании фильтра требуется особая тщательность, то параметры α_i , β_i в (7.3.11) можно подбирать эмпирическим способом, описанным в [12]. Сначала задается форма требуемого идеального фильтра. Затем параметры α_i , β_i подбираются так, чтобы минимизировать некоторую величину, характеризующую качество приближения для нескольких выбранных частот. Например, можно было бы минимизировать среднеквадратичную ошибку отклонений фильтра (7.3.11) от идеального фильтра на выбранных частотах. Или же можно было бы минимизировать, как это делается при наилучшем чебышевском приближении, наибольшее расхождение между фильтром (7.3.11) и идеальным фильтром. Такие вычисления нетрудно выполнить с помощью вычислительной машины.

Использование цифровых фильтров. Ниже перечислены некоторые из наиболее важных случаев использования цифровых фильтров.

а. Пробное оценивание спектров. Для этого нужен набор полосовых фильтров, например таких, которые приведены в [13].

б. Сглаживание данных. Эта процедура устраняет высокочастотные осцилляции. Для этого нужен низкочастотный фильтр.

в. Устранение трендов из данных. Для этого нужен высокочастотный фильтр, который можно получить, применяя низкочастотный фильтр и затем вычитая результат низкочастотной фильтрации из исходных данных. Устранение низкочастотного тренда часто является необходимой операцией перед оцениванием спектра. Ниже приводится пример, где из-за невозможности устранить тренды появляется значительное смещение в выборочной спектральной оценке.

г. Разделение временного ряда на компоненты. Часто при изучении соотношений между временными рядами лучше разложить

исходный временной ряд x_t на компоненты

$$x_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)} + \dots + x_t^{(k)} \quad (7.3.12)$$

с помощью набора полосовых фильтров. Например, из предварительных сведений может возникнуть предположение, что низкочастотные компоненты, содержащиеся в x_t , можно лучше предсказать по низкочастотным компонентам, содержащимся в некотором другом ряде y_t , чем по самим рядам x_t или y_t . Поэтому каждый ряд $x_t^{(i)}$ в (7.3.12) можно использовать по отдельности для дальнейшего анализа. Применение такого подхода при анализе метеорологических временных рядов изложено в [14], а при анализе экономических рядов — в [13].

Биномиальные фильтры. Особенно простой набор фильтров, который можно использовать для этой цели, приведен в [15]. В этом наборе используются введенные ранее суммирующие и разностные фильтры. С помощью z -преобразований разложение на компоненты можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_t &= \left[\frac{1}{2} (1 + z^{-1}) + \frac{1}{2} (1 - z^{-1}) \right]^k x_t = \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^k \left[(1 + z^{-1})^k + k(1 + z^{-1})^{k-1}(1 - z^{-1}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \binom{k}{i} (1 + z^{-1})^{k-i} (1 - z^{-1})^i + \dots + (1 - z^{-1})^k \right] x_t. \end{aligned}$$

Таким образом, временной ряд x_t можно расфильтровать на $k + 1$ временной ряд с помощью $k + 1$ фильтров, причем передаточная функция i -го фильтра равна

$$H_i(z) = \left(\frac{1}{2} \right)^k \binom{k}{i} (1 + z^{-1})^{k-i} (1 - z^{-1})^i.$$

Следовательно, выход $x_t^{(i)}$ этого фильтра получится, если исходный сигнал пропустить через $k - i$ суммирующих фильтров и i разностных фильтров, а затем умножить на коэффициент $\left(\frac{1}{2} \right)^k \binom{k}{i}$.

Из (7.3.10) следует, что i -й фильтр имеет пик на частоте f_0 :

$$\cos 2\pi f_0 = \frac{k - 2i}{k}, \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Например, при $k = 4$ пики расположены на частотах 0; 0,167; 0,25; 0,417; 0,5 *ц*.

Пример цифровой фильтрации. Этот пример относится к оцениванию спектра отраженного радиолокационного сигнала и опи-

сан подробнее в [16]. По техническим причинам при измерении отраженного сигнала нельзя отделить эффект, вызванный рысканьем самолета, за которым следит радиолокатор. На рис. 7.18 показан участок записи, где рысканье достигает экстремума и намного превышает высокочастотный шум, спектр которого нужно проанализировать.

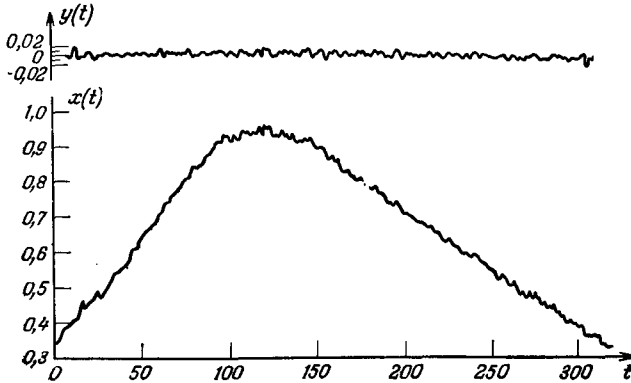


Рис. 7.18. Исходный и отфильтрованный отраженный радиолокационные сигналы.

С этой записи были взяты отсчеты в 320 точках и отфильтрованы с помощью симметричного фильтра (7.3.5) со следующими весами:

$$h_0 = 1 - \frac{1}{m+1},$$

$$h_i = h_{-i} = -\frac{1}{m+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{i\pi}{m+1} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $m = 9$. Значения в скобках совпадают со значениями окна Тьюки w_T из табл. 6.5; они нормируются так, что их сумма равна единице, и вычитаются из весов, дающих тождественное преобразование, чтобы получить высокочастотный фильтр.

Отфильтрованный ряд y_t показан на рис. 7.18 вверху, и мы видим, насколько эффективно устранил фильтр низкие частоты.

Были вычислены выборочные ковариационные функции исходного и отфильтрованного рядов, и затем с помощью окна Бартлетта получены выборочные спектральные оценки при разных значениях точки отсечения L . Выборочные оценки спектра отфильтрованного ряда переставали изменяться, когда L достигало значения 30, в то время как для исходного ряда потребовались гораздо большие значения L . Чтобы сравнить эти два спектра на высоких частотах, на рис. 7.19 приведены выборочные

спектральные оценки обоих рядов при одном и том же L . Мы видим, что на высоких частотах исходный ряд дает оценку в 10 раз больше, чем отфильтрованный. Это происходит из-за того, что в исходном ряде мощность на низких частотах очень велика, и приводит ее утечка в высокочастотную часть выборочной оценки, приводящая к большим смещениям.

Имелось несколько записей такого типа с различными степенями рысканья, в том числе и такие, на которых эффекта ры-

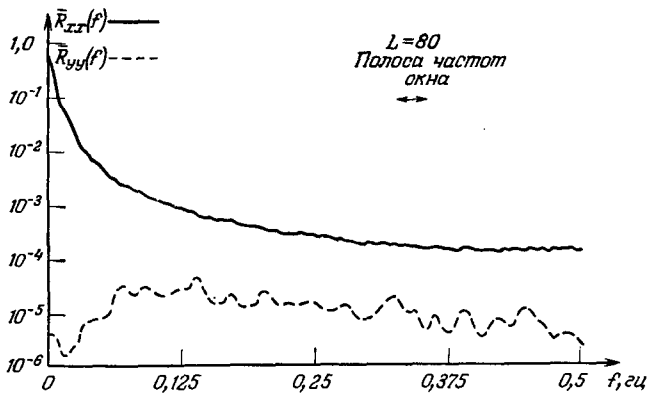


Рис. 7.19. Выборочные спектральные (не нормированные) оценки исходного и отфильтрованного радиолокационных сигналов.

сканья совсем не было видно. После того как записи, содержавшие эффект рысканья, были отфильтрованы до оценивания спектров, получилось хорошее согласие со спектрами, оцененными по записям без рысканья.

7.4. ПРИМЕРЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

С тех пор как 15 лет назад Бартлетт и Тьюки ввели спектральные методы, в литературе появилось много сообщений об их применениях в различных областях. Большинство этих применений можно разделить на три широкие категории: построение моделей, планирование экспериментов и изучение частотных характеристик.

Некоторые дальнейшие применения спектрального анализа мы приведем ниже, а в настоящий момент уместно показать, какую пользу может принести знание спектра одиночного временного ряда в этих трех областях.

7.4.1. Построение моделей

Форма спектра иногда выявляет особенности временного ряда, которые должны быть учтены в любой модели, предложенной для этого ряда. Например, наличие пиков в спектре и их величины могут выявить основные периодичности, требующие физического объяснения.

В тех случаях, когда спектры изучаются с целью лучшего понимания физического механизма, порождающего временной ряд, одиночный спектр редко бывает очень полезен. Наиболее важные

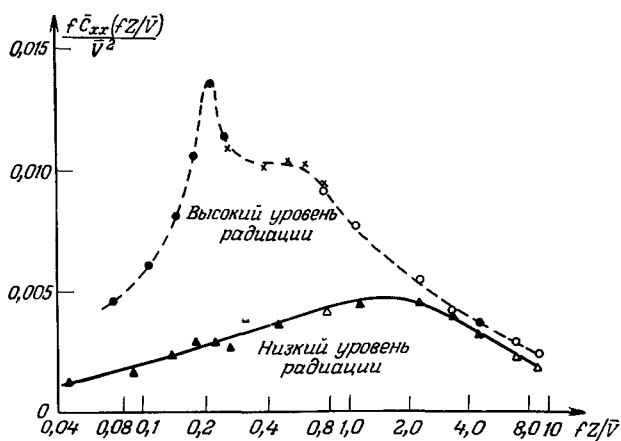


Рис. 7.20. Спектры горизонтальной компоненты скорости ветра.

наводящие соображения относительно моделей можно получить при изменении внешних условий и совместном изучении нескольких спектров. Эти внешние условия могут находиться вне нашего контроля, как в первом из приводимых ниже примеров, или же их можно преднамеренно изменять в виде запланированного эксперимента, как во втором примере.

Пример 1. На рис. 7.20 показана выборочная спектральная оценка горизонтальной компоненты скорости атмосферной турбулентности, приведенная в [17]. Верхний график получен по измерениям, сделанным при ясной погоде (высокий уровень солнечной радиации), а нижний — по измерениям, проведенным в облачную погоду (низкий уровень солнечной радиации). Отметим, что мощность спектра гораздо больше в периоды высокой радиации и что эта мощность сосредоточена в основном на низких частотах. В частности, пик спектра сдвигается в сторону низких частот с увеличением радиации, в то время как мощность на высоких частотах, по-видимому, не зависит от радиации. Эти выводы

получены в результате детального изучения в работе [18], где предлагается следующее физическое объяснение такого поведения спектров: на высоких частотах основными причинами атмосферной турбулентности являются *механические* силы, или силы трения, а на низких частотах причиной служит *конвекция*, вызванная солнечной радиацией.

На рис. 7.20 ордината пропорциональна $f\bar{C}_{xx}(f)$, так как по абсциссе откладывается $\lg f$. В результате, несмотря на логарифмический масштаб, площадь, ограничиваемая кривой, равна полной дисперсии, или мощности. Поскольку средняя скорость ветра \bar{V} изменяет интенсивность турбулентности и ее распределение по частоте известным образом, то оказалось естественней построить на рис. 7.20 графики безразмерных величин $f\bar{C}_{xx}(fZ/\bar{V})/\bar{V}^2$ и fZ/\bar{V} .

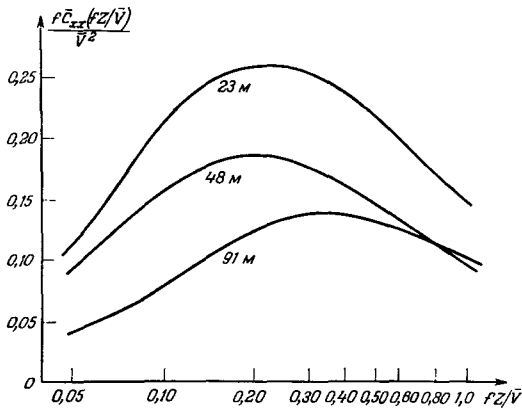


Рис. 7.21. Спектры вертикальной компоненты скорости ветра.

Пример 2. На рис. 7.21 показаны три выборочные спектральные оценки, относящиеся к измерениям вертикальной компоненты скорости атмосферной турбулентности на трех различных уровнях над поверхностью земли (см. [18]). На рисунке нанесены безразмерные величины $f\bar{C}_{xx}(fZ/\bar{V})/\bar{V}^2$ и fZ/\bar{V} , где Z — высота над поверхностью земли. Мы видим, что два верхних спектра очень похожи по форме и имеют максимум на одной и той же частоте. Нижний спектр не похож на остальные. На основании этих и других выборочных спектральных оценок, приведенных в [18], было найдено хорошее согласие в диапазоне частот, где спектр существует, между эмпирическими спектрами и двумя предложенными теоретическими выражениями

$$\Gamma_{xx}(h) = 2h(1+h)^{-3},$$

$$\Gamma_{xx}(h) = \frac{10}{9}h(1+h)^{-9/3},$$

где $h = \gamma Z f/\bar{V}$ и γ — константа. В литературе можно найти много других примеров объяснений сложных физических явлений, предложенных на основе спектрального анализа или частично проверенных с его помощью.

7.4.2. Планирование экспериментов

В качестве примера применения спектрального анализа в планировании экспериментов рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется составить план эксперимента для оценивания наклона поверхности отклика $\eta(v_1, \dots, v_n)$, имея в виду использование этой поверхности для нахождения максимума или минимума η . Например, $\eta(v)$ при $n = 1$ могло бы быть выходом химического продукта или себестоимостью одной его тонны, а v — скоростью подачи сырья в реактор. На практике можно различать две ситуации. В первой значения процесса получены из отдельных партий, а переменные v_i устанавливаются перед началом выпуска каждой партии. Первая ситуация имеет место и тогда, когда процесс является непрерывным, но его регулировки проводятся столь часто, что в промежутках между ними изменением характеристик процесса можно пренебречь. Во втором случае процесс является непрерывным и наклон также измеряется непрерывно, как в управляющих системах поиска максимума [19]. Используя выборочную оценку наклона, управляющая система может подправить значения переменных, управляющих процессом, с тем чтобы максимизировать выход продукции или минимизировать ее себестоимость.

Предположим, что в первой ситуации значения v подправляются через единичные интервалы времени

$$v_t = a \cos \frac{\pi t}{b}, \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (7.4.1)$$

Предположим далее, что амплитуда a косинусоидальной волны фиксирована и что требуется выбрать ее период $2b$ так, чтобы минимизировать дисперсию оценки наклона. Считая, что модель линейная, т. е.

$$Y_t = \eta(v_t) + Z_t = \theta_1 v_t + Z_t,$$

где Z_t — шум, или ошибка, получим обычную выборочную оценку наименьших квадратов для θ_1

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^N y_t v_t}{\sum_{t=1}^N v_t^2} = \frac{2}{Na^2} \sum_{t=1}^N y_t v_t.$$

В приложении П7.2 показано, что дисперсия соответствующей оценки $\hat{\theta}_1$ приблизительно равна

$$\text{Var}[\hat{\theta}_1] \approx \frac{4}{Na^2} \Gamma_{zz} \left(\frac{1}{2b} \right). \quad (7.4.2)$$

Следовательно, при фиксированном a дисперсия достигает минимума, когда частота $1/2b$ возмущающего сигнала соответствует минимуму в спектре шума. Другими словами, максимизируется отношение сигнал/шум $a^2/2\Gamma_{zz}(1/2b)$.

Для второй ситуации возмущающий сигнал есть косинусоидальная волна

$$v(t) = a \cos 2\pi f_0 t.$$

В Приложении П7.2 показано, что дисперсия наклона в этом случае минимизируется тогда, когда достигает максимума величина

$$\frac{a^2 G^2(f_0)}{2\Gamma_{zz}(f_0)}. \quad (7.4.3)$$

В (7.4.3) $G(f_0)$ есть значение функции усиления системы на частоте f_0 .

Пример 3. Данные о партиях продукта на рис. 5.2 были получены без каких-либо преднамеренных изменений переменных, управляющих процессом. Таким образом, функция $\bar{C}_{xx}(f)$, показанная на рис. 7.15, дает выборочную оценку спектра $\Gamma_{zz}(f)$ шума процесса. Эту информацию можно использовать при планировании эксперимента, где некоторая переменная, управляющая процессом, намеренно изменяется по косинусоидальному закону (7.4.1) или по другому периодическому закону, скажем, в виде прямоугольной волны с периодом $2b$.

Из рис. 7.15 видно, что спектр почти плоский от $f = 0$ до $f = 0,25$ гц, но резко возрастает при $f > 0,25$ гц. Поскольку $b = 1$ соответствует частоте $f = 0,5$ гц, а $b \geq 2$ соответствует диапазону от 0 до 0,25 гц, то, очевидно, любое значение $b \geq 2$ было бы приемлемым. Однако имеются серьезные причины выбирать возможно более высокую частоту, поскольку существуют низкочастотные тренды и сносы, увеличивающие дисперсию на этих частотах. Поэтому значение $b = 2$ представлялось бы разумным, учитывая форму выборочного спектра.

7.4.3. Изучение частотных характеристик

Применение спектрального анализа в этой области основано на использовании соотношения (6.2.15), связывающего спектры входа $Z(t)$ и выхода $X(t)$ линейной системы, т. е.

$$\Gamma_{xx}(f) = \Gamma_{zz}(f) G^2(f). \quad (7.4.4)$$

На практике можно различать два типа ситуаций. Либо функция усиления системы $G(f)$ фиксирована и единственной изменяемой величиной в (7.4.4) является входной спектр $\Gamma_{zz}(f)$, либо фиксирован входной спектр, а функцию усиления можно изменять.

Пример 4. В качестве примера изучения частотной характеристики системы с фиксированной функцией усиления рассмотрим задачу о неровностях взлетной полосы [20]. Важность этой задачи при конструировании самолетов заметно возросла в последние несколько лет, так как от ее решения зависят поломки самолета, срок его усталостной сопротивляемости, трудности с отсчетом показаний приборов и неудобства пассажиров.

Результат действия неровностей взлетной полосы на самолет зависит от частотной характеристики шасси. Например, шасси типичного самолета гражданской авиации имеет функцию усиления с большими значениями в интервале от 1,5 до 2 гц.

Один способ измерения неровностей взлетной полосы заключается в том, чтобы измерять непосредственно высоты неровностей примерно через полметра вдоль взлетной полосы. Затем эти измерения можно использовать для характеристики неровностей взлетной полосы с помощью выборочной оценки ее спектра. Спектр $\Gamma_{zz}(f)$ в этом случае измерялся бы в единицах (высота)²/число колебаний, укладываемых на 1 м, т. е. $m^2/(1/m) = m^3$. Зная функцию усиления шасси и спектр неровностей взлетной полосы, можно узнать, какое напряжение возникнет в крыльях самолета и т. д. Предположим, например, что спектр неровностей такой,

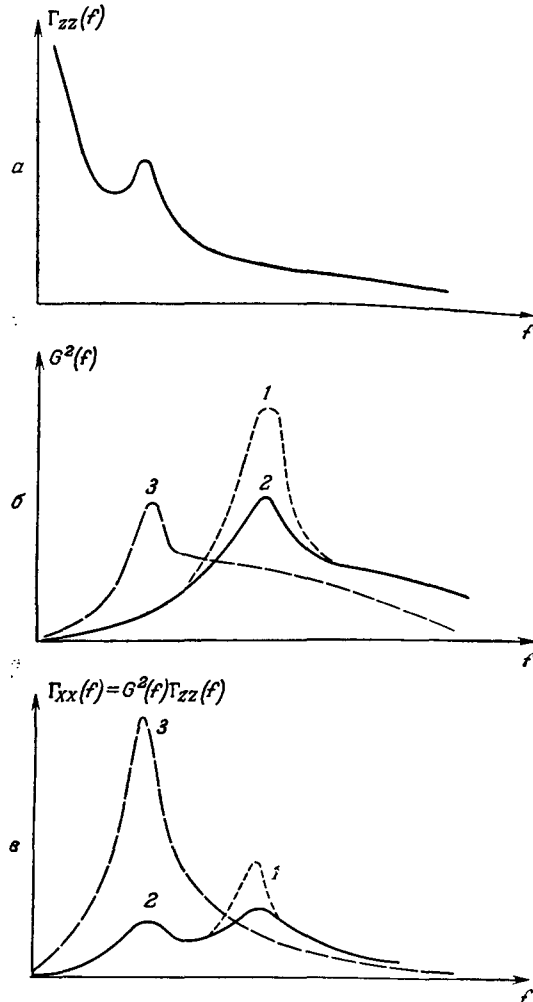


Рис. 7.22. Влияние пиков на входе, амортизации и скорости на частотную характеристику самолетного шасси.

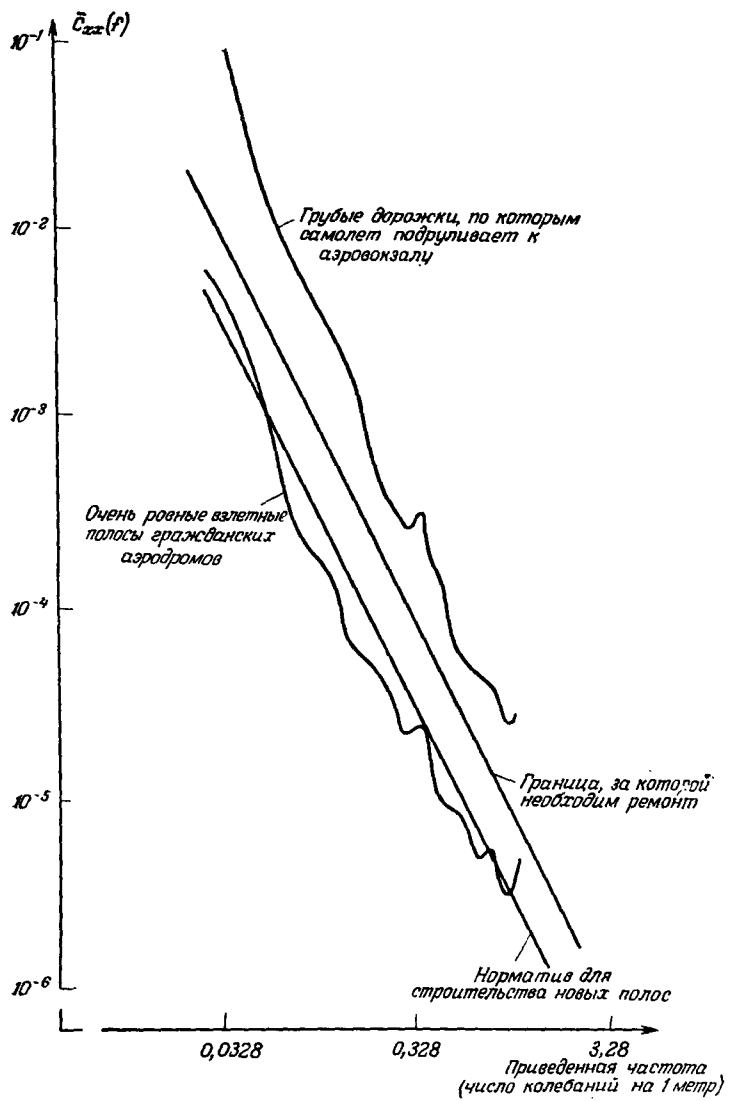


Рис. 7.23. Типичные спектры неровностей взлетной полосы.

как показан на рис. 7.22, а, где он имеет некоторый пик, обусловленный тем, что неровности чаще всего встречаются на определенном расстоянии (на определенной длине волны) друг от друга. Квадрат функции усиления шасси показан на рис. 7.22, б при одной и той же амортизации для двух разных скоростей ($V \approx 64$ км/час — кривая 3 и $V \approx 32$ км/час — кривая 2) и для двух разных амортизаций при одной и той же скорости $V \approx 32$ км/час (для слабой амортизации — кривая 1 и для сильной амортизации — кривая 2).

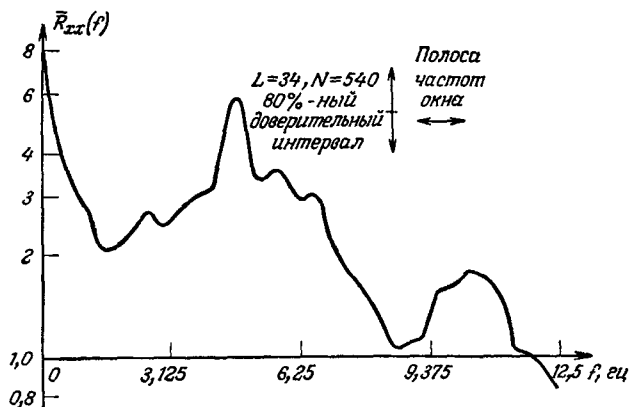


Рис. 7.24. Выборочная оценка спектра поперечных движений хвоста самолета.

Предсказываемая частотная характеристика, полученная по формуле (7.4.4), показана на рис. 7.22, в для этих трех случаев.

Отметим, что при фиксированной скорости ослабление амортизации приводит к увеличению мощности спектра и, следовательно, к увеличению эффектов, приносящих ущерб. Кроме того, увеличение скорости сдвигает максимум функции усиления в сторону более низких частот, где спектр неровностей больше, и снова мощность выходного процесса увеличивается. Наконец, максимум функции усиления, сдвинутый из-за увеличения скорости, может еще больше увеличиться спектром неровностей, что приведет к резкому возрастанию спектра выходного процесса (кривая 3 на рис. 7.22, в). То же самое происходит, когда автомобиль движется по неровной дороге со скоростью, вызывающей его резонанс.

Некоторые типичные спектры неровностей показаны на рис. 7.23. На основании упоминавшихся выше расчетов можно выработать нормативы (допуски) для спектров проектируемых взлетных полос и для ремонта существующих. Эти допуски обозначены прямыми линиями на рис. 7.23.

Пример изучения частотной характеристики системы с фиксированным входным спектром дает задача проектирования узлов подвески мотоциклов и автомобилей. Поскольку качество дорог в различных странах разное, измерение спектров неровностей дорог все больше начинает влиять на проектирование частотных характеристик мотоциклов и автомобилей, особенно предназначенных на экспорт. Другой пример задачи такого типа возникает при проектировании самолетов, когда требуется минимизировать усталостные эффекты, обусловленные атмосферной турбулентностью. Этот вопрос обсуждается ниже.

Пример 5. На рис. 7.24 показана выборочная спектральная оценка поперечных движений хвоста самолета, летевшего в неблагоприятных метеоусловиях на низкой высоте. Спектр имеет узкий пик в точке $f = 4,85$ гц, приблизительно соответствующей частоте собственных колебаний самолета. Имеется также более широкий пик в точке $f = 10,3$ гц, по-видимому, соответствующей частоте собственных колебаний хвоста, поскольку измерения производились на хвосте. Эти спектры могут дать при конструировании самолетов полезные наводящие соображения о том, как нужно видоизменить различные части самолета, чтобы уменьшить риск разрушения из-за ударов турбулентного потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Watts D. G., A general theory of amplitude quantization with application to correlation determination, Proc. Inst. Electr. Eng., Part C, **109**, 209 (May, 1962).
2. Blackman R. B., Tukey J. W., The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering, Dover, New York, 1958.
3. Grenander U., Rosenblatt M., Statistical Analysis of Stationary Time Series, John Wiley, New York, 1957.
4. Lomnicki A. A., Zaremba S. K., On estimating the spectral density function of a stochastic process, J. Roy. Stat. Soc., **B19**, 13 (1957).
5. Parzen E., Mathematical considerations in the estimation of spectra. Technometrics, **3**, 167 (1961).
6. Jenkins G. M., General considerations in the analysis of spectra, Technometrics, **3**, 133 (1961).
7. Jenkins G. M., An example of the estimation of a linear open loop transfer function, Technometrics, **5**, 227 (1963).
8. Jenkins G. M., A survey of spectral analysis, Appl. Statistics, **14**, 2 (1965).
9. Watts D. G., Optimal windows for power spectra estimation, Mathematics Research Center Technical Summary Report 506 Sept., 1964.
10. Daniels H. E., The estimation of spectral densities, J. Roy. Stat. Soc., **B24**, 185 (1962).
11. Служцкий Е. Е., Сложение случайных величин как источник случайных процессов, Избранные труды, Изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 99—132.
12. Robertson H., Approximate design of digital filters, Technometrics, **7**, 387 (1965).
13. Craddock J. M., An analysis of the slower temperature variations at Kew Observatory by means of mutually exclusive band-pass filters, J. Roy. Stat. Soc., **A120**, 387 (1957).

14. Godfrey M. D., Frequency methods in economic analysis, Ph. D. Thesis, London University, 1962.
15. Tick L. J., Some time series techniques useful in life sciences, Proc. I. B. M. Scientific Computing Symposium, Statistics, 265 (1963).
16. Alavi A. S., Jenkins G. M., An example of digital filtering, Appl. Statistics, **14**, 70 (1965).
17. Panofsky H. A., Van der Hoven I., Spectra and cross-spectra of velocity components in the mesometeorological range, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., **81**, 603 (1955).
18. Panofsky H. A., McCormick R. A., Properties of spectra of atmospheric turbulence at 100 meters, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., **80**, 546 (1954).
19. Box G. E. P., Chanmugan J. R., Adaptive optimization of continuous processes, Industrial Eng. Chem. (Fundamentals), **1**, 2 (1962).
20. Houbolt J. C., Runway roughness studies in the aeronautical field, J. Air Transport Div., Amer. Soc. Civ. Eng., **87**, 11 (1961).

ЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА ПОДПРОГРАММЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРА

Ниже приводится логическая схема подпрограммы для вычислительной машины, входными данными для которой служат выборочные оценки ковариаций *) $COV(K, J, J)$ или $DCOV(K, J, J)$, $K = 0$, $MAXM$ из программы MULTICOR, описанной в Приложении П5.3. Дополнительно вводятся также интервал отсчета DELTA, число точек по частоте NF, в которых должна вычисляться сглаженная выборочная оценка спектра, и значения точек отсечения M (причем $M \leq MAXM$), с которыми надо вычислять сглаженные спектры. В общем случае NF в два или три раза больше максимального из используемых M . В данной подпрограмме используется спектральное окно Тьюки (табл. 6.5). Выход состоит из печати ковариаций (повторная проверка), значений сглаженных спектров для каждой точки отсечения M и графика, на котором одновременно показаны в логарифмическом масштабе сглаженные спектры для всех использованных точек отсечения M .

Подпрограмма AUTOSPEC

1. Ввести параметры N , $MAXM$, $DELTA$, NF .
2. Произвести считывание массива IDENT, $COV(K)$; $K = 0$, $MAXM$.
3. Произвести считывание числа M , вычислить веса

$$W(K) = 0,5 * (1. + \cos(\pi K/M)), \quad K = 1, M - 1.$$

4. Вычислить сглаженную выборочную спектральную оценку $SPEC(I) =$

$$= 2 * DELTA * \left\{ COV(0) + 2 \sum_{K=1}^{M-1} COV(K) * W(K) * \cos \frac{\pi KI}{NF} \right\};$$

$$I = 0, NF.$$

Эти вычисления можно очень быстро провести, используя алгоритм быстрого преобразования Фурье (сокращенно БПФ, см. [1]) или же указанный ниже алгоритм, в котором преобразование Фурье получается как решение разностного уравнения.

5. Вычислить логарифм спектра $LOGSPEC(I) = LOG_{10}(SPEC(I))$; $I = 0, NF$. В этом месте следует позаботиться о том,

*) См. примечание переводчика на стр. 253, вып. 1. — *Прим. перев.*

чтобы логарифм всегда брался от положительного числа. Если $SPEC(I)$ окажется отрицательным или нулем, то для графика нужно принять $LOGSPEC(I) = -100$.

6. *Напечатать* сглаженные выборочные спектральные оценки $SPEC(I)$; $I = 0, NF$, ширину полосы частот $B = 4/(3M*DELTA)$ и число степеней свободы $D = (8*N)/(3*M)$ для окна Тьюки и соответствующих значений N , M и $DELTA$.

7. *Построить на одном и том же графике* логарифмы сглаженных спектров в зависимости от частоты для всех использованных значений M .

Для построения графика последовательности чисел $LOGSPEC(I)$ нужно найти максимальное из этих чисел, которое мы обозначим $MLOG$. Далее мы пользовались следующей методикой построения графика. Находим ближайшую к $MLOG$ степень десяти D так, чтобы $D \geq MLOG$, и строим логарифм спектра в диапазоне от $D - 4$ до D . Если, например, максимальное значение спектра было 2, так что $MLOG = 0,303$ и, следовательно, $D = 1$, то логарифм спектра строился в диапазоне от -3 до 1 , что соответствовало значениям спектра от 0,001 до 10. Диапазон значений 10^4 можно считать подходящим для большинства целей, так как если требуется еще больший диапазон, то, вероятно, целесообразней расфильтровать данные, чтобы получить лучшие выборочные спектральные оценки на тех частотах, где мощность мала. Значение $LOGSPEC(I) = -100$ автоматически строится на графике ниже самой нижней линии, ограничивающей выбранный диапазон.

Алгоритм

Для вычисления $SPEC(I)$

$$SetC = \cos \frac{\pi I}{NF}, \quad V0 = 0., \quad V1 = 0.$$

$$Do 1, \quad K = M - 1, \quad 1$$

$$V2 = 2. * C * V1 - V0 + W(K) * COV(K)$$

$$V0 = V1$$

$$1 \quad V1 = V2.$$

$$SPEC(I) = 2. * DELTA * (COV(0) + 2. * (V1 * C - V0)).$$

Пример. Рассмотрим приведенный в разд. 7.1.1 пример, для которого $M = 3$, $DELTA = 1.0$, $NF = 8$ и $COV(0) = 1.$, $W(1) * COV(1) = 0.430$, $W(2) * COV(2) = 0.065$.

Тогда для $I = 0$, $C = \cos \frac{\pi}{8} (0) = 1.$,

$V_0 = 0.$, $V_1 = 0.$, и, проходя через цикл „do“, получаем

$$K = 2, V_2 = 2(1)(0) - 0 + 0.065 = 0.065$$

$$V_0 = 0$$

$$V_1 = 0.065$$

$$K = 1, V_2 = 2(1)(0.065) - 0 + 0.430 = 0.560$$

$$V_0 = 0.065$$

$$V_1 = 0.560$$

И затем $SPEC(0) = 2 \cdot 1 [1 + 2(0.560 \cdot 1 - 0.065)] = 3.980$, что совпадает с величиной, приведенной в табл. 7.1.

Для $I = 1$

$$C = \cos(\pi/8) = 0.924, V_0 = 0, V_1 = 0.$$

Проходя через цикл „do“, получаем

$$K = 2, V_2 = 2(0.924)(0) - 0 + 0.065 = 0.065$$

$$V_0 = 0$$

$$V_1 = 0.065;$$

$$K = 1, V_2 = 2(0.924)(0.065) - 0 + 0.430 = 0.550$$

$$V_0 = 0.65$$

$$V_1 = 0.550.$$

Тогда $SPEC(1) = 2(1)(1 + 2(0.550)(0.924) - 0.065) = 3.772$. Этот алгоритм, хотя работает и не так быстро, как БПФ, тем не менее имеет относительно высокую скорость, высокую точность и требует вычисления косинуса только один раз на каждую точку по частоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cooley J. W., Tukey J. W., An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, *Math. of Computation*, **19**, 90, 297 (1965).

ПРИЛОЖЕНИЕ П7.2

ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНОК НАКЛОНА

Дискретное время. Выборочная оценка наклона θ_1 в рассмотренной выше (разд. 7.4.2) модели

$$Y_t = \theta_1 x_t + Z_t \quad (\text{П7.2.1})$$

имеет вид

$$\hat{\theta}_1 = \sum_{t=1}^N \omega_t y_t, \quad (\text{П7.2.2})$$

где $\omega_t = (2/Na) \cos(\pi t/b)$. Действуя так же, как и при выводе формулы (5.2.9), получим дисперсию соответствующей оценки

$$\text{Var} [\hat{\theta}_1] = \sum_{t=1}^N \sum_{r=1}^N \omega_t \omega_r \gamma_{YY}(t-r). \quad (\text{П7.2.3})$$

Если теперь предположим, что наблюдения производятся через единичные интервалы времени, то

$$\gamma_{YY}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{YY}(f) e^{j2\pi f k} df. \quad (\text{П7.2.4})$$

Подставляя (П7.2.4) в (П7.2.3), получаем

$$\text{Var} [\hat{\theta}_1] = \int_{-1/2}^{1/2} |W(f)|^2 \Gamma_{YY}(f) df, \quad (\text{П7.2.5})$$

где

$$W(f) = \sum_{t=1}^N \omega_t e^{j2\pi f t}. \quad (\text{П7.2.6})$$

Теперь предположим, что $\omega_t = (2/Na) \cos(\pi t/b)$, как в (7.4.1). Тогда

$$W(f) = \frac{1}{Na} \left\{ \frac{1 - \exp [j(N+1)2\pi(f-1/2b)]}{1 - \exp [j2\pi(f-1/2b)]} + \frac{1 - \exp [j(N+1)2\pi(f+1/2b)]}{1 - \exp [j2\pi(f+1/2b)]} \right\}.$$

Подставляя квадрат модуля этого выражения в (П7.2.5), получаем

$$\begin{aligned} \text{Var} [\hat{\theta}_1] = & \frac{1}{Na^2} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\sin^2(N+1)\pi(f-1/2b)}{N \sin^2 \pi(f-1/2b)} + \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2(N+1)\pi(f+1/2b)}{N \sin^2 \pi(f+1/2b)} \right] \Gamma_{YY}(f) df \end{aligned}$$

плюс члены с перекрестными произведениями.

Используя тот факт, что выражение в квадратных скобках стремится к

$$\delta\left(f - \frac{1}{2b}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2b}\right)$$

при $N \rightarrow \infty$, а члены с перекрестными произведениями имеют порядок $1/N^2$, мы получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \text{Var} [\hat{\theta}_1] = \frac{4}{a^2} \Gamma_{YY}\left(\frac{1}{2b}\right). \quad (\text{П7.2.7})$$

Для конечных значений N отсюда следует

$$\text{Var} [\hat{\Theta}_1] \approx \frac{4}{Na^2} \Gamma_{YY} \left(\frac{1}{2b} \right). \quad (\text{П7.2.8})$$

Поскольку для модели (П7.2.1) имеет место равенство $\Gamma_{YY}(1/2b) = \Gamma_{ZZ}(1/2b)$, то формула (П7.2.8) эквивалентна (7.4.2). Таким образом, дисперсия минимальна тогда, когда частота возмущения $1/2b$ равна частоте, на которой спектр шума достигает минимума.

Непрерывное время. В случае дискретного времени изменения характеристик процесса между регулировками были пренебрежимо малы. Если на входе имеется непрерывное синусоидальное возмущение $x(t) = a \cos 2\pi f_0 t$, то модель (П7.2.1) нужно видоизменить следующим образом:

$$Y(t) = \theta_1 a G(f_0) \cos 2\pi f_0 t + Z(t),$$

где $G(f_0)$ — значение функции усиления на частоте f_0 . Дальнейший вывод вполне аналогичен случаю дискретного времени. Окончательный результат имеет вид

$$\text{Var} [\hat{\Theta}_1] \approx \frac{4}{Ta^2} \frac{\Gamma_{YY}(f)}{G^2(f_0)}.$$

Следовательно, дисперсия минимальна тогда, когда частота возмущения f_0 соответствует максимальному отношению сигнал/шум $G^2(f_0)/\Gamma_{YY}(f_0)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ П7.3

АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Недавним новшеством в спектральном анализе является алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). С помощью этого алгоритма дискретное преобразование Фурье вычисляется гораздо быстрее, чем с помощью прямого метода, приведенного в разд. 2.1.2, и с той же самой точностью. Так, используя прямой метод для вычисления дискретного преобразования Фурье ряда из N членов, потребовалось бы приблизительно N^2 операций, в то время как БПФ требует лишь $2N \log_2 N$ операций. Экономия времени вычислений может быть очень велика, если нужно проводить анализ Фурье длинных рядов. Например, для вычисления с помощью БПФ коэффициентов Фурье ряда из $N = 8192$ членов [1] требовалось около 5 сек. на вычислительной машине IBM 8094, в то время как для прямого метода нужно было около 30 мин.

Важность БПФ для спектрального анализа заключается в том,

что теперь оказалось быстрее вычислять выборочный спектр прямо с помощью БПФ и затем сглаживать его, чем вычислять корреляционную функцию, сглаживать ее корреляционным окном и затем, наконец, брать ее преобразование Фурье. Несмотря на эти вычислительные преимущества, мы не считаем, что доводы за использование БПФ в спектральном анализе столь же сильны, как в анализе Фурье, по следующим причинам.

1. По опыту авторов быстродействующие вычислительные машины, имеющиеся в настоящее время, вполне удовлетворяют требованиям спектрального анализа и даже перекрывают их. Сейчас наши вычислительные возможности намного превосходят нашу способность правильно истолковать практические данные.

2. Мы рассматриваем корреляционную функцию как очень ценную промежуточную ступень спектрального анализа*). Графики корреляционных функций исходного ряда и ряда из его первых разностей нужны для того, чтобы решить:

- а) необходимо ли брать разности или нет,
- б) где выбрать подходящие точки отсечения,
- в) какая требуется величина выравнивания при анализе взаимной корреляции двух рядов.

Описание алгоритма быстрого преобразования Фурье. Полное описание БПФ приведено в [2]**), а история его открытия и повторного открытия изложена в [3]. Эти статьи входят в специальный выпуск журнала [4], где помещены также статьи об использовании БПФ при вычислении некоторых других преобразований [5, 6]. Мы будем следовать изложению [2].

Предположим, что требуется найти преобразование Фурье X_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$, ряда x_t , $t = 1, 2, \dots, N$, где N — четное. Один из способов [6] заключается в расщеплении ряда x_t на два вспомогательных ряда y_t и z_t , где

$$\begin{aligned} y_t &= x_{2t-1}, \\ z_t &= x_{2t}, \quad t = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \end{aligned} \quad (\text{П7.3.1})$$

*) Следует отметить, что корреляционную функцию также можно вычислять с помощью БПФ гораздо быстрее, чем прямым методом. Для этого нужно 1) вычислить с помощью БПФ коэффициенты Фурье исходного ряда, 2) снова с помощью БПФ вычислить преобразование Фурье от *квадратов модулей* этих коэффициентов и 3) пронормировать результат нужным образом. — *Прим. перев.*

**) См. также Б. М. Наймарк, Г. А. Погребинский, Е. Л. Резников, Практические методы преобразования Фурье. Теоретическая и вычислительная геофизика, М., изд-во «Наука», 1971, где БПФ скомбинировано с методом Филона для вычисления интеграла Фурье, что позволяет увеличить интервал отсчета Δ и сэкономить время вычислений. — *Прим. перев.*

Каждый из рядов y_t , z_t содержит $N/2$ членов, и преобразования Фурье этих рядов имеют вид

$$\begin{aligned} Y_m^{(N/2)} &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N/2} y_t e^{-j(4\pi t m/N)}, \\ Z_m^{(N/2)} &= \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N/2} z_t e^{-j(4\pi t m/N)}, \end{aligned} \quad (\text{П7.3.2})$$

где верхний индекс преобразованных величин указывает число членов ряда, которое совпадает с числом членов преобразования. Величины $X_m^{(N)}$, $Y_m^{(N/2)}$, $Z_m^{(N/2)}$ связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X_m^{(N)} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t e^{-j(2\pi t m/N)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N/2} [y_t e^{-j(2\pi m/N)(2t-1)} + z_t e^{-j(2\pi m/N)2t}] = \\ &= e^{j(2\pi m/N)} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N/2} y_t e^{-j(4\pi t m/N)} + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N/2} z_t e^{-j(4\pi t m/N)} = \\ &= \frac{e^{j(2\pi m/N)}}{2} Y_m^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_m^{(N/2)}, \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (\text{П7.3.3})$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} Y_{m+(N/2)}^{(N/2)} &= Y_m^{(N/2)}, \\ Z_{m+(N/2)}^{(N/2)} &= Z_m^{(N/2)}, \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} X_{m+(N/2)}^{(N)} &= \frac{e^{j(2\pi/N)(m+N/2)}}{2} Y_m^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_m^{(N/2)} = \\ &= -\frac{e^{j(2\pi m/N)}}{2} Y_m^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_m^{(N/2)}, \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (\text{П7.3.4})$$

Следовательно, окончательный результат равенств (П7.3.3) и (П7.3.4) имеет вид

$$\begin{aligned} X_m^{(N)} &= \frac{e^{j(2\pi m/N)}}{2} Y_m^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_m^{(N/2)}, \\ X_{m+(N/2)}^{(N)} &= -\frac{e^{j(2\pi m/N)}}{2} Y_m^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_m^{(N/2)}, \quad 0 \leq m \leq \frac{N}{2} - 1, \end{aligned} \quad (\text{П7.3.5})$$

и мы видим, что преобразование Фурье ряда x_t легко получить из преобразований Фурье вспомогательных рядов y_t и z_t . Подобным же образом при четном $N/2$ можно расщепить каждый из рядов y_t и z_t на два ряда y'_t , y''_t и z'_t , z''_t соответственно и вы-

вести соответствующий вариант формулы (П7.3.5), который выразит преобразования $Y_m^{(N/2)}$ и $Z_m^{(N/2)}$ через преобразования рядов длиной $N/4$.

Для рядов длины $N = 2^k$ эту процедуру можно продолжать до тех пор, пока расщепление не приведет к рядам, состоящим из одного члена; в этом случае преобразование Фурье этого члена совпадает с ним самим. В случае если N не равно степени двойки, расщепление на два ряда продолжается до тех пор, пока либо легко взять преобразование Фурье вспомогательного ряда, либо пока не встретится новый множитель N , скажем 3. Процедура при этом остается той же самой, что и выше, с той лишь разницей, что очередной вспомогательный ряд расщепляется на три ряда. Подробности приведены в [2]. Ниже разобран пример.

Пример. Рассмотрим ионосферные данные из гл. 2, где $n = 12 = 2^2 \cdot 3$. Данные таковы:

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|-----|-----|----|----|---|-----|----|----|----|----|----|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| x_t | -6 | -20 | -28 | -8 | -1 | 7 | -20 | -6 | -7 | 14 | 19 | 12 |

Расщепление на два дает следующие ряды:

| | | | | | | |
|-------|-----|-----|----|-----|----|----|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y_t | -6 | -28 | -1 | -20 | -7 | 19 |
| z_t | -20 | -8 | 7 | -6 | 14 | 12 |

Расщепление y_t и z_t на два дает ряды

| | | | |
|---------|-----|-----|----|
| t | 1 | 2 | 3 |
| y'_t | -6 | -1 | -7 |
| z'_t | -28 | -20 | 19 |
| y''_t | -20 | 7 | 14 |
| z''_t | -8 | -6 | 12 |

Преобразование Фурье рядов y'_i, z'_i, y''_i, z''_i уже нетрудно вычислить. Каждое из них состоит из трех членов, как показано ниже.

| Значение преобразования Фурье | Номер гармоники m | | |
|-------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | 0 | 1 | 2 |
| $Y'_m{}^{(3)}$ | -4,6667 | -1,1667 + $j1,4433$ | -1,1667 - $j1,4433$ |
| $Z'_m{}^{(3)}$ | -9,6667 | 14,3333 + $j2,3093$ | 14,3333 - $j2,3093$ |
| $Y''_m{}^{(3)}$ | 0,3333 | 6,8333 + $j7,7940$ | 6,8333 - $j7,7940$ |
| $Z''_m{}^{(3)}$ | -0,6667 | 6,3333 + $j0,5773$ | 6,3333 - $j0,5773$ |

Затем с помощью формулы (П7.3.5) вычисляются преобразования Фурье $Y_m^{(6)}, Z_m^{(6)}$ ($0 \leq m \leq 5$). Например,

$$Y_0^{(6)} = \frac{1}{2} Y_0^{(3)} + \frac{1}{2} Z_0^{(3)} = -7,1666,$$

$$Y_1^{(6)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) Y_1^{(3)} + \frac{1}{2} Z_1^{(3)} = 6,2500 + j1,0103,$$

$$Y_2^{(6)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 Y_2^{(3)} + \frac{1}{2} Z_2^{(3)} = 8,0833 - j1,2990,$$

$$Y_3^{(6)} = -\frac{1}{2} Y_0^{(3)} + \frac{1}{2} Z_0^{(3)} = -2,5000,$$

$$Y_4^{(6)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) Y_1^{(3)} + \frac{1}{2} Z_1^{(3)} = 8,0833 + j1,2990,$$

$$Y_5^{(6)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 Y_2^{(3)} + \frac{1}{2} Z_2^{(3)} = 6,2500 - j1,0103.$$

Преобразование $Z_m^{(6)}$ получается аналогично, и, сводя вместе $Y_m^{(6)}$ и $Z_m^{(6)}$, получаем таблицу.

| Значение преобразования Фурье | Номер гармоники m | | | | | |
|-------------------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|---------|-----------------------|-----------------------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $Y_m^{(6)}$ | -7,1667 | 6,2500 + $j1,0103$ | 8,0833 - $j1,2990$ | -2,5000 | 8,0833 + $j1,2990$ | 6,2500 - $j1,0103$ |
| $Z_m^{(6)}$ | -0,1666 | 1,5000 + $j5,1960$ | 4,8333 + $j4,6187$ | -0,5000 | 4,8333 - $j4,6187$ | 1,5000 - $j5,1960$ |

Комбинируя эти значения по формуле (П7.3.5), получаем окончательное преобразование $X_m^{(12)}$. Например,

$$X_0^{(12)} = \frac{1}{2} Y_0^{(6)} + \frac{1}{2} Z_0^{(6)} = -3,667,$$

$$X_1^{(12)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) Y_1^{(6)} + \frac{1}{2} Z_1^{(6)} = 3,204 + j4,598.$$

Полное преобразование имеет вид

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------|--------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $X_m^{(12)}$ | -3,667 | 3,204 + j4,598 | 5,000 + j5,485 | -0,250 - j1,250 | -0,167 + j0,866 | -1,704 - j0,598 |

| m | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|--------------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|
| $X_m^{(12)}$ | -3,500 | -1,701 + j0,598 | -0,167 - j0,866 | -0,250 + j1,250 | 5,000 - j5,485 | 3,204 - j4,598 |

С точностью до сдвига фазы, вызванного изменением начала отсчета времени, эти значения совпадают со значениями, приведенными в табл. 2.2, которые были вычислены с помощью метода разностного уравнения, описанного в Приложении П7.1, или же с помощью прямого метода гл. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокрел и др., Что такое быстрое преобразование Фурье?, ТИИЭР, т. 55, № 10, стр. 7—17 (октябрь 1967).
2. Кули, Льюис, Уэлч, Исторические замечания относительно быстрого преобразования Фурье, ТИИЭР, т. 55, № 10, стр. 18—21 (октябрь 1967).
3. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-15, № 2, June 1967.
4. Cooley J. W., Lewis P. A. W., Welch P. D., Application of the Fast Fourier Transform to Computation of Fourier Integrals, Fourier Series, and Convolution Integrals, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-15, № 2, June 1967, p. 79.
5. Helms H. D., Fast Fourier Transform Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-15, № 2, June 1967, p. 85.

ПРИЛОЖЕНИЕ П 7.4

ДААННЫЕ И КОРРЕЛЯЦИИ ДЛЯ ИСКУССТВЕННОГО ПРОЦЕССА
АВТОРЕГРЕССИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Таблица П 7.1

400 значений процесса авторегрессии второго порядка

$$X_t = X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + Z_t$$

| t | x_t | | | | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1-10 | -0,83 | -0,12 | -0,89 | -1,38 | -0,07 | 1,03 | 2,14 | 0,35 | -1,10 | -1,78 |
| 11-20 | -2,76 | -1,77 | 0,98 | 1,00 | -0,70 | -1,01 | -1,30 | -0,85 | -0,46 | 1,63 |
| 21-30 | 0,06 | -0,17 | -1,01 | -1,04 | -0,66 | -1,12 | -0,51 | -0,71 | -0,20 | -0,13 |
| 31-40 | 0,14 | 1,59 | -0,76 | -1,08 | -1,77 | -1,20 | 0,45 | -0,07 | -0,63 | -0,35 |
| 41-50 | -0,87 | -0,62 | 0,28 | 1,90 | 2,14 | 1,05 | 0,31 | 1,07 | 2,67 | 2,44 |
| 51-60 | 1,31 | 1,10 | 1,94 | 0,33 | 1,82 | 1,15 | 0,61 | -1,08 | -1,62 | -0,39 |
| 61-70 | 0,19 | -1,59 | -2,25 | 0,29 | 1,73 | 2,30 | 0,80 | -0,40 | 0,30 | -0,50 |
| 71-80 | -2,11 | -2,43 | 0,72 | 3,09 | 4,96 | 1,81 | -0,46 | -0,33 | 0,04 | 0,82 |
| 81-90 | -1,63 | -2,29 | -0,77 | 1,91 | 1,92 | 0,85 | -0,65 | 0,35 | 0,78 | 1,62 |
| 91-100 | 3,24 | 1,86 | 0,76 | 2,24 | 0,76 | -0,15 | 0,18 | 0,60 | 0,92 | -0,70 |
| 101-110 | -0,03 | 1,07 | 0,28 | -1,38 | -0,63 | -1,48 | 0,19 | -1,14 | 0,31 | 0,39 |
| 111-120 | -0,17 | 0,70 | 2,14 | 1,24 | 0,42 | 0,61 | -0,76 | -1,75 | -0,37 | 1,21 |
| 121-130 | 1,40 | 2,46 | 1,74 | 0,78 | 0,90 | 1,11 | 2,20 | 0,52 | -0,22 | 1,12 |
| 131-140 | 1,02 | 1,10 | 1,72 | 1,80 | -0,46 | -1,27 | 0,39 | 0,93 | 0,55 | -0,45 |
| 141-150 | -0,87 | -0,90 | 0,64 | 2,29 | 2,75 | 1,43 | 0,47 | 1,80 | 0,46 | 0,32 |

| | | | | | | | | | | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 151-160 | -0,81 | -1,81 | -2,07 | 0,96 | 1,20 | 0,77 | -0,98 | -1,46 | -1,30 | -2,29 |
| 161-170 | -1,81 | -1,61 | -1,01 | -1,36 | -1,78 | 0,04 | 1,44 | 2,58 | 0,54 | 0,27 |
| 171-180 | -0,75 | -0,70 | 0,45 | -0,13 | -1,03 | -1,19 | -0,31 | 1,77 | 1,89 | 0,88 |
| 181-190 | 0,58 | 0,70 | -0,32 | -1,62 | 1,08 | 1,25 | 0,19 | -0,93 | -0,61 | 0,83 |
| 191-200 | 0,46 | 1,12 | 0,11 | -1,11 | -0,85 | -1,86 | -0,74 | -1,04 | -0,42 | 0,16 |
| 201-210 | 0,55 | -0,37 | -0,62 | -1,23 | -0,76 | -0,79 | -1,99 | -1,56 | -0,36 | 1,00 |
| 211-220 | 0,02 | -0,30 | -0,23 | -0,63 | -1,61 | -1,66 | -0,80 | -1,71 | -0,87 | -0,74 |
| 221-230 | 1,55 | 1,39 | 1,51 | 2,39 | 1,68 | -0,04 | -1,24 | -2,24 | -1,31 | -0,10 |
| 231-240 | 0,46 | 1,06 | 1,37 | 1,67 | 0,29 | -0,31 | -2,08 | -2,67 | -1,50 | -1,71 |
| 241-250 | -0,70 | -1,25 | -0,25 | 0,14 | 1,43 | 0,47 | -1,16 | -3,68 | -3,41 | -1,43 |
| 251-260 | 1,06 | 2,86 | 0,72 | -1,79 | -2,26 | -1,87 | -1,53 | -0,25 | 1,40 | 3,37 |
| 261-270 | 0,85 | -0,36 | 0,25 | 1,57 | -0,08 | 0,78 | -0,56 | -1,22 | 0,07 | -0,33 |
| 271-280 | -0,15 | 1,56 | 2,23 | 2,01 | 0,42 | -0,75 | -0,47 | 1,55 | 3,60 | 2,07 |
| 281-290 | 1,32 | 0,06 | 0,87 | 0,51 | -0,25 | 0,12 | 1,54 | 1,37 | 1,97 | 0,81 |
| 291-300 | -0,67 | -2,41 | -1,82 | -0,45 | 0,31 | 0,12 | -1,01 | -1,12 | -1,69 | -1,52 |
| 301-310 | -0,82 | -0,81 | -0,33 | -0,65 | -1,86 | -0,94 | 0,50 | 1,05 | 1,40 | 1,52 |
| 311-320 | 0,20 | 0,64 | 1,95 | 1,55 | 1,74 | -0,22 | -2,14 | -2,33 | -1,01 | 0,42 |
| 321-330 | 2,54 | 0,86 | 0,10 | -0,04 | -1,18 | -0,40 | -0,53 | 0,70 | -0,14 | -0,20 |
| 331-340 | 0,47 | 1,07 | 0,85 | -0,35 | -0,69 | -0,63 | -2,08 | -1,56 | -1,00 | 0,55 |
| 341-350 | 2,08 | 1,74 | -0,34 | -1,85 | -1,29 | 1,74 | 2,58 | 1,64 | 1,85 | -0,01 |
| 351-360 | -0,16 | -0,29 | -0,66 | -3,41 | -2,33 | -2,57 | -1,78 | -1,31 | -2,69 | -1,77 |
| 361-370 | -0,57 | 1,58 | 1,78 | 1,09 | -0,54 | 0,29 | -0,26 | 0,01 | 1,05 | 0,94 |
| 371-380 | -0,91 | -2,09 | -2,01 | -1,12 | -0,02 | 0,98 | 0,50 | 2,12 | 1,68 | 2,28 |
| 381-390 | 2,59 | 3,04 | 1,16 | 0,50 | 0,56 | 0,45 | 0,35 | 0,10 | 2,16 | 2,60 |
| 391-400 | 1,40 | 0,62 | 0,36 | -0,09 | 1,93 | 1,80 | 1,13 | -1,34 | -1,94 | -0,89 |

Таблица П7.2

Выборочные оценки корреляций для процесса авторегрессии второго порядка

$$X_t = X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + Z_t, N = 50$$

| k | $r_{xx}(k)$ | k | $r_{xx}(k)$ | k | $r_{xx}(k)$ | k | $r_{xx}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 1 | 0,574 | 11 | -0,068 | 21 | -0,217 | 31 | 0,049 |
| 2 | 0,086 | 12 | 0,124 | 22 | -0,124 | 32 | -0,051 |
| 3 | -0,166 | 13 | 0,109 | 23 | 0,035 | 33 | -0,200 |
| 4 | -0,130 | 14 | 0,000 | 24 | 0,165 | 34 | -0,213 |
| 5 | 0,096 | 15 | -0,063 | 25 | 0,137 | 35 | -0,097 |
| 6 | 0,225 | 16 | -0,043 | 26 | -0,045 | 36 | 0,004 |
| 7 | 0,244 | 17 | 0,062 | 27 | -0,136 | 37 | 0,007 |
| 8 | 0,032 | 18 | 0,103 | 28 | -0,156 | 38 | -0,060 |
| 9 | -0,180 | 19 | -0,047 | 29 | -0,027 | 39 | -0,096 |
| 10 | -0,199 | 20 | -0,152 | 30 | 0,109 | 40 | -0,086 |

Таблица П7.3

Выборочные оценки корреляций для процесса авторегрессии второго порядка

$$X_t = X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + Z_t, N = 400$$

| k | $r_{xx}(k)$ | k | $r_{xx}(k)$ | k | $r_{xx}(k)$ | k | $r_{xx}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 1 | 0,645 | 13 | 0,012 | 25 | -0,075 | 37 | 0,019 |
| 2 | 0,196 | 14 | -0,021 | 26 | -0,116 | 38 | -0,020 |
| 3 | -0,080 | 15 | -0,074 | 27 | -0,078 | 39 | -0,045 |
| 4 | -0,099 | 16 | -0,119 | 28 | -0,038 | 40 | -0,035 |
| 5 | -0,009 | 17 | -0,070 | 29 | -0,013 | 41 | 0,021 |
| 6 | 0,057 | 18 | 0,008 | 30 | -0,036 | 42 | 0,083 |
| 7 | 0,066 | 19 | 0,064 | 31 | -0,044 | 43 | 0,081 |
| 8 | 0,040 | 20 | 0,069 | 32 | -0,037 | 44 | 0,017 |
| 9 | 0,030 | 21 | 0,017 | 33 | -0,015 | 45 | -0,004 |
| 10 | 0,052 | 22 | -0,026 | 34 | 0,047 | 46 | 0,042 |
| 11 | 0,088 | 23 | -0,032 | 35 | 0,080 | 47 | 0,081 |
| 12 | 0,051 | 24 | -0,044 | 36 | 0,066 | 48 | 0,069 |

ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И ВЗАИМНЫЙ СПЕКТР

В этой главе понятия, введенные в гл. 5 и 6 (вып. 1), распространяются на случай пары временных рядов и случайных процессов. Первым таким обобщением, приведенным в разд. 8.1, является взаимная корреляционная функция двумерного стационарного случайного процесса. Эта функция характеризует корреляцию двух процессов при различных запаздываниях. Второе обобщение представляет собой двумерный линейный процесс, образуемый с помощью линейных операций над двумя источниками белого шума. Важными частными случаями такого процесса являются двумерный процесс авторегрессии и двумерный процесс скользящего среднего.

В разд. 8.2 мы обсудим вопрос об оценивании взаимной корреляционной функции. Мы покажем, что если не применять к обоим рядам фильтрации, переводящей их в белый шум, то при оценивании могут возникать ложные завышенные значения взаимной корреляции. В разд. 8.3 вводится третье обобщение — взаимный спектр стационарного двумерного процесса. Взаимный спектр содержит два различных вида информации, характеризующей зависимость между двумя процессами. Информация первого типа содержится в спектре когерентности, являющемся эффективной мерой корреляции двух процессов на каждой из частот. Информация второго типа дается фазовым спектром, характеризующим разность фаз двух процессов на каждой из частот. В разд. 8.4 оба эти типа информации иллюстрируются на простых примерах.

8.1. ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

8.1.1. Введение

В этой главе мы будем заниматься вопросами описания *пары* временных рядов, или *двумерного* временного ряда. Используемые при этом способы являются обобщением способов, применявшихся в гл. 5, 6, и поэтому все относящиеся к временным рядам общие положения, изложенные в разд. 5.1, применимы и в этом случае. В разд. 5.1 под заголовком «Многомерные временные

ряды» кратко упоминалось о том, что отдельные временные ряды, образующие многомерный ряд, могут быть неравноправны по отношению друг к другу. Рассмотрим, например, систему, показан-

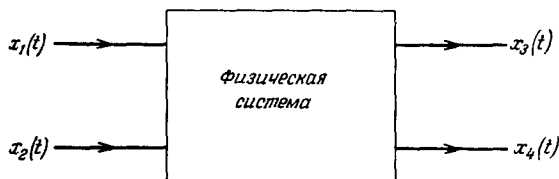


Рис. 8.1. Физическая система с двумя входами и двумя выходами.

ную на рис. 8.1, которая имеет два *входа* $x_1(t)$, $x_2(t)$ и два *выхода* $x_3(t)$, $x_4(t)$.

Можно различать две ситуации. В первом случае два ряда находятся в *одинаковом положении* по отношению друг к другу,

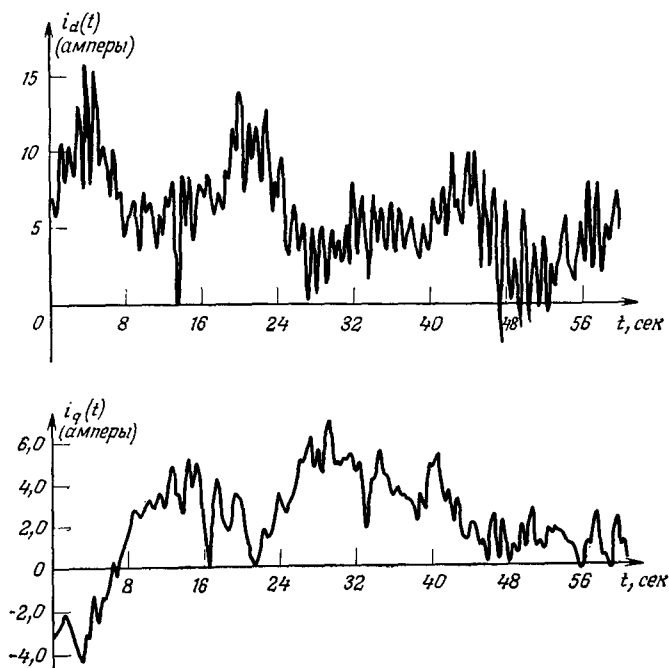


Рис. 8.2. Синфазный и сдвинутый по фазе токи на выходе турбогенератора.

как, например, два входа на рис. 8.1. В этом случае $x_1(t)$, $x_2(t)$ могут быть двумя коррелированными переменными управления, взаимодействие которых мы хотим изучить. Пример пары временных рядов, попадающих в эту категорию, приведен на рис. 8.2,

где приведены записи синфазного и сдвинутого по фазе входных токов турбогенератора.

Во втором случае два временных ряда *причинно связаны*, например вход $x_1(t)$ на рис. 8.1 и зависящий от него выход $x_2(t)$. В такой ситуации обычно требуется оценить свойства системы в такой форме, чтобы было удобно предсказывать выход по входу. Пример пары временных рядов такого типа приведен на рис. 8.3, где показана скорость впуска газа $x_1(t)$ и концентрация

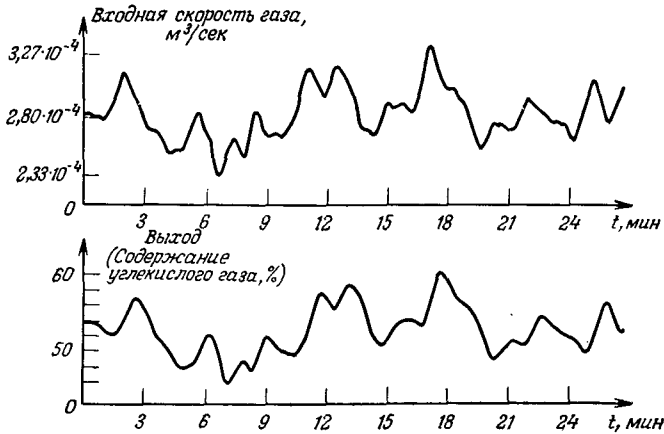


Рис. 8.3. Сигналы на входе и выходе газовой печи.

диоксида углерода $x_2(t)$ на выходе газовой печи. Видно, что выход $x_2(t)$ запаздывает по отношению ко входу $x_1(t)$ из-за того, что для доставки газа к реактору требуется некоторое время.

В первой ситуации обычно интересуются описанием взаимодействия, или корреляции, между двумя рядами, так чтобы это взаимодействие можно было подвергнуть любому дальнейшему исследованию. Например, если мы хотим управлять значениями выхода $x_2(t)$ с помощью двух коррелированных управляющих переменных и хотим получить определенный результат на выходе, то нужно изучить эту взаимную корреляцию входных процессов. С другой стороны, во второй ситуации обычно интересуются соотношениями между $x_1(t)$ и $x_2(t)$, такими, например, как

$$x_2(t) = \int_0^{\infty} h(u) x_1(t-u) du,$$

так что $x_2(t)$ легко предсказать по $x_1(t)$ (этот вопрос кратко обсуждался в разд. 5.1.5). Эта и следующая за ней главы посвящены рядам, находящимся в одинаковом положении по отношению друг к другу. Причинно связанные ряды обсуждаются в гл. 10.

8.1.2. Взаимная ковариационная и взаимная корреляционная функции

Так же, как и в одномерном случае в гл. 5, полезное средство описания пары случайных процессов дают их младшие моменты. Как и раньше, наблюдаемый двумерный временной ряд $\{x_1(t), x_2(t)\}$ рассматривается как реализация двумерного случайного процесса $\{X_1(t), X_2(t)\}$. Четыре случайные величины $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_1(t+u)$, $X_2(t+u)$ в моменты времени t и $t+u$ будут иметь совместную плотность вероятности, которую можно описать (хотя и неполностью) ее моментами первого и второго порядков. Если предположить, что процессы *стационарны*, то эти моменты будут зависеть лишь от разности моментов времени u и не будут зависеть от t . Таким образом, первые моменты будут равны

$$E[X_i(t)] = \mu_i, \quad i = 1, 2.$$

Они не зависят от времени t . Вторыми моментами совместной плотности вероятности будут *автоковариационные функции*

$$\gamma_{X_1 X_1}(u) = E[(X_1(t) - \mu_1)(X_1(t+u) - \mu_1)],$$

$$\gamma_{X_2 X_2}(u) = E[(X_2(t) - \mu_2)(X_2(t+u) - \mu_2)]$$

и *взаимные ковариационные функции*

$$\gamma_{X_1 X_2}(u) = E[(X_1(t) - \mu_1)(X_2(t+u) - \mu_2)],$$

$$\gamma_{X_2 X_1}(u) = E[(X_2(t) - \mu_2)(X_1(t+u) - \mu_1)].$$

(8.1.1)

Функция $\gamma_{X_1 X_2}(u)$ называется *взаимной ковариационной функцией*, зависящей от запаздывания u , причем процесс $X_1(t)$ запаздывает относительно процесса $X_2(t)$. Аналогично $\gamma_{X_2 X_1}(u)$ называется взаимной ковариационной функцией для запаздывания процесса $X_2(t)$ относительно процесса $X_1(t)$. В тех случаях, когда нет никакого риска спутать обозначения, мы будем записывать функции $\gamma_{X_1 X_1}(u)$, $\gamma_{X_2 X_2}(u)$, $\gamma_{X_1 X_2}(u)$, $\gamma_{X_2 X_1}(u)$ более простыми обозначениями $\gamma_{11}(u)$, $\gamma_{22}(u)$, $\gamma_{12}(u)$, $\gamma_{21}(u)$.

Свойства ковариационных функций. Автоковариационные функции действительного двумерного процесса обладают теми же самыми свойствами, что и ковариационная функция одномерного процесса, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{ii}(0) &= \text{Var}[X_i(t)] = \sigma_{X_i}^2, \\ \gamma_{ii}(u) &= \gamma_{ii}(-u), \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2. \quad (8.1.2)$$

Таким образом, $\gamma_{ii}(u)$ являются *четными* функциями запаздывания u .

Взаимная ковариационная функция двух действительных процессов имеет следующее свойство:

$$\gamma_{12}(u) = \gamma_{21}(-u), \quad (8.1.3)$$

так как

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(u) &= E[(X_1(t) - \mu_1)(X_2(t+u) - \mu_2)] = E[(X_1(t-u) - \mu_1)(X_2(t) - \mu_2)] = \\ &= E[(X_2(t) - \mu_2)(X_1(t-u) - \mu_1)] = \gamma_{21}(-u). \end{aligned}$$

Аналогично $\gamma_{21}(u) = \gamma_{12}(-u)$. Таким образом, ковариацию двух случайных процессов можно описать одной взаимной ковариационной функцией $\gamma_{12}(u)$, где $-\infty \leq u \leq \infty$. Отметим, что, в то время как автоковариационная функция является четной, взаимная ковариационная функция в общем случае не будет четной функцией.

Взаимная корреляционная функция. В общем случае приходится изучать взаимодействие двух процессов с различными масштабами измерения, или с различными дисперсиями. В таком случае необходимо определить *взаимную корреляционную функцию*

$$\rho_{12}(u) = \frac{\gamma_{12}(u)}{\sqrt{\gamma_{11}(0)\gamma_{22}(0)}} = \frac{\gamma_{12}(u)}{\sigma_1\sigma_2}. \quad (8.1.4)$$

Первое ее свойство заключается в том, что

$$|\rho_{12}(u)| \leq 1.$$

Это следует из того, что дисперсия случайной величины

$$Y(t) = \lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t+u)$$

неотрицательна. Второе свойство состоит в том, что

$$\rho_{12}(u) = \rho_{21}(-u).$$

Это следует из (8.1.3).

Взаимная корреляционная функция подобно ковариационной *не является* в общем случае четной функцией. Рассмотрим, например, на рис. 8.4 выборочную взаимную корреляционную функцию данных о газовой печи, приведенных на рис. 8.3. Эта функция имеет большой пик при $u = 5$ и явно несимметрична относительно $u = 0$. Отметим также, что большинство взаимных корреляций положительно. Это объясняется тем, что увеличение скорости выпуска газа приводит к увеличению концентрации на выходе и наоборот.

Самый тривиальный случай взаимной корреляции двух случайных процессов имеет место, когда взаимная корреляционная функция тождественно равна нулю для всех запаздываний. Отсюда следует, что такие процессы полностью некоррелированы.

Если в дополнение к этому процессы $\{X_1(t), X_2(t)\}$ нормальные, то они будут также и *независимыми*, как показано в гл. 3.

Другой простой случай взаимной корреляции имеет место, когда $\rho_{12}(u)$ отлична от нуля при $u = 0$ и равна нулю для остальных запаздываний. Отсюда следует, что у этих случайных про-

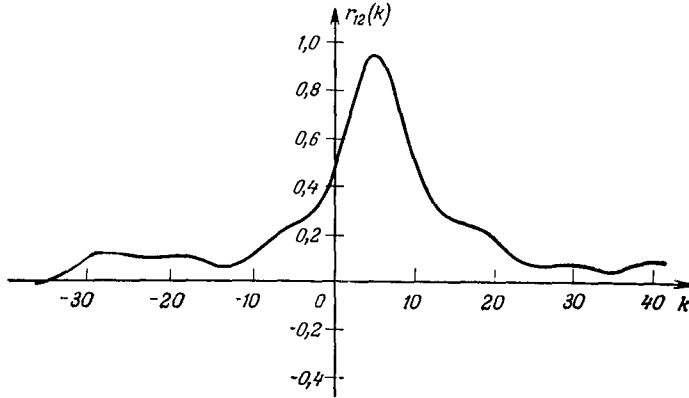


Рис. 8.4. Выборочная взаимная корреляционная функция для данных о газовой печи.

цессов коррелированы только одновременные значения. Более общие модели взаимной корреляции двух случайных процессов будут приведены в разд. 8.1.3 и 8.1.4.

8.1.3. Взаимная корреляционная функция линейного процесса

Один из простейших способов, которыми может осуществляться корреляция двух случайных процессов $\{X_1(t), X_2(t)\}$, имеет место тогда, когда $X_1(t)$ — вход линейной системы, а $X_2(t)$ состоит из выхода этой системы и шума, т. е.

$$X_2(t) = \int_0^{\infty} h(u) X_1(t-u) du + Z(t). \quad (8.1.5)$$

Для дискретного времени соответствующая модель имеет вид

$$X_{2t} = \sum_{r=0}^{\infty} h_r X_{1t-r} + Z_t. \quad (8.1.6)$$

Пример 1. Как частный случай процесса (8.1.6) рассмотрим простую модель регрессии (4.3.5), которая в наших новых обозначениях имеет вид

$$X_{2t} = h_0 X_{1t} + Z_t,$$

Если средние значения X_{1t} и Z_t равны нулю, то из (8.1.1.) получаем взаимную ковариационную функцию входа X_{1t} и выхода X_{2t}

$$\gamma_{12}(k) = E[X_{1t}(h_0X_{1t+k} + Z_{t+k})] = h_0E[X_{1t}X_{1t+k}] + E[X_{1t}Z_{t+k}].$$

Если предположить далее, что шум Z_t некоррелирован со входом X_{1t} , то

$$\gamma_{12}(k) = h_0\gamma_{11}(k),$$

т. е. взаимная ковариационная функция отличается лишь на постоянный множитель от автоковариационной функции входа. В частном случае, когда $X_1(t)$ — белый шум, взаимная ковариационная функция отлична от нуля лишь при $k = 0$, и в этом случае

$$\gamma_{12}(0) = h_0\gamma_{11}(0).$$

Заметим, что, хотя с первого взгляда кажется, что шум Z_t не входит в эти вычисления, тем не менее его влияние сказывается на увеличении дисперсии процесса X_{2t} . Таким образом, мы имеем

$$\text{Var}[X_{2t}] = E[X_{2t}^2] = E[(h_0X_{1t} + Z_t)^2] = h_0^2\gamma_{11}(0) + \gamma_{ZZ}(0).$$

Следовательно, взаимная корреляционная функция в этом примере равна

$$\rho_{12}(0) = \frac{h_0\gamma_{11}(0)}{\sqrt{\gamma_{11}(0)[h_0^2\gamma_{11}(0) + \gamma_{ZZ}(0)]}} = \frac{h_0}{\sqrt{h_0^2 + \gamma_{ZZ}(0)/\gamma_{11}(0)}},$$

$$\rho_{12}(k) = 0, \quad k \neq 0. \quad (8.1.7)$$

Таким образом, корреляция между входом и выходом зависит от отношения сигнал/шум $\gamma_{11}(0)/\gamma_{ZZ}(0)$, т. е. от отношения дисперсий входа и шума. Если это отношение велико, то $\rho_{12}(0)$ близко к единице, а если отношение мало, то шум доминирует и $\rho_{12}(0)$ соответственно мало.

Пример 2. В качестве менее тривиального примера рассмотрим процесс

$$X_{2t} = h_0X_{1t} + h_1X_{1t-1} + Z_t,$$

где X_{1t} и Z_t — некоррелированные процессы белого шума с одинаковой дисперсией σ^2 .

Тогда

$$\gamma_{12}(0) = E[X_{1t}(h_0X_{1t} + h_1X_{1t-1} + Z_t)] = h_0\sigma^2,$$

$$\gamma_{12}(1) = E[X_{1t}(h_0X_{1t+1} + h_1X_{1t} + Z_{t+1})] = h_1\sigma^2,$$

$$\gamma_{12}(k) = 0, \quad k \neq 0, 1.$$

Дисперсии этих двух процессов равны

$$\gamma_{22}(0) = E[(h_0X_{1t} + h_1X_{1t-1} + Z_t)(h_0X_{1t} + h_1X_{1t-1} + Z_t)] = (h_0^2 + h_1^2 + 1)\sigma^2,$$

$$\gamma_{11}(0) = \sigma^2.$$

Отсюда взаимная корреляционная функция имеет вид

$$\rho_{12}(0) = \frac{h_0}{\sqrt{1 + h_0^2 + h_1^2}},$$

$$\rho_{12}(1) = \frac{h_1}{\sqrt{1 + h_0^2 + h_1^2}},$$

$$\rho_{12}(k) = 0, \quad k \neq 0, 1.$$

Если веса h_k в (8.1.6) положительны, то два процесса $X_1(t)$, $X_2(t)$ будут «выглядеть похожими», а взаимная корреляционная функция будет положительной. Наоборот, если веса отрицательны, то эти два процесса будут выглядеть как зеркальные отражения друг друга, т. е. увеличения одного процесса будут сопровождаться уменьшениями другого и наоборот.

Взаимная корреляционная функция произвольного линейного процесса. Общее выражение для взаимной корреляционной функции процесса (8.1.5) можно получить, умножая (8.1.5) на $X_1(t-u)$ и беря математические ожидания от обеих частей равенства. Если средние значения процессов $X_1(t)$ и $Z(t)$ равны нулю, то при условии, что $\gamma_{X,Z}(u) = 0$ для всех u , взаимная корреляционная функция равна

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(u) &= E \left[X_1(t-u) \int_0^\infty h(v) X_1(t-v) dv + X_1(t-u) Z(t) \right] = \\ &= \int_0^\infty h(v) \gamma_{11}(u-v) dv, \quad -\infty \leq u \leq \infty. \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

Ниже нам понадобится выражение для автоковариационной функции выхода. Его можно получить, перемножив почленно два равенства (8.1.5), относящиеся к разным моментам времени, и взяв математические ожидания. Предполагая, что $E[X_1(t)] = E[Z(t)] = 0$ и $\gamma_{X,Z}(u) = 0$, в качестве окончательного результата будем иметь

$$\gamma_{22}(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty h(v) h(v') \gamma_{11}(u+v-v') dv dv' + \gamma_{ZZ}(u), \quad -\infty \leq u \leq \infty, \quad (8.1.9)$$

что является простым обобщением формулы (5.2.9)

Теперь нетрудно получить взаимную корреляционную функцию

$$\rho_{12}(u) = \frac{\gamma_{12}(u)}{\sqrt{\gamma_{11}(0) \gamma_{22}(0)}}, \quad (8.1.10)$$

где $\gamma_{22}(0)$ получается из (8.1.9), если положить $u = 0$.

Для дискретных процессов формулы, соответствующие (8.1.8), (8.1.9) и (8.1.10), легко получаются из (8.1.6). Таким образом, мы имеем

$$\gamma_{12}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} h_r \gamma_{11}(k-r), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.1.11)$$

$$\gamma_{22}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h_r h_s \gamma_{11}(k+r-s) + \gamma_{ZZ}(k), \quad (8.1.12)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\rho_{12}(k) = \frac{\gamma_{12}(k)}{\sqrt{\gamma_{11}(0) \gamma_{22}(0)}}. \quad (8.1.13)$$

8.1.4. Двумерные линейные процессы

В модели (8.1.5) предполагалось, что флуктуации процесса $X_1(t)$ вызывают флуктуации процесса $X_2(t)$. Более общая модель взаимной корреляции двух случайных процессов получится, если предположить, что флуктуации процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ вызываются двумя другими источниками $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$, которые влияют на эти процессы по-разному. Например, в простейшем случае

$$X_1(t) = h_{11}Z_1(t) + h_{12}Z_2(t),$$

$$X_2(t) = h_{21}Z_1(t) + h_{22}Z_2(t),$$

где $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ — некоррелированные процессы белого шума с дисперсиями σ_1^2 , σ_2^2 . Отсюда получаем

$$\gamma_{12}(0) = E[(h_{11}Z_1(t) + h_{12}Z_2(t))(h_{21}Z_1(t) + h_{22}Z_2(t))] = h_{11}h_{21}\sigma_1^2 + h_{12}h_{22}\sigma_2^2,$$

$$\gamma_{12}(k) = 0, \quad k \neq 0.$$

Переходя к более общему случаю, предположим, что двумерный случайный процесс $\{X_1(t), X_2(t)\}$ порождается так, как указано на структурной схеме на рис. 8.5. Два источника белого шума $Z_i(t)$, $i = 1, 2$, подаются на входы четырех линейных систем с функциями отклика на единичный импульс $h_{11}(u)$, $h_{12}(u)$, $h_{21}(u)$ и $h_{22}(u)$ соответственно. Выходы от первой и третьей систем складываются и образуют процесс $X_1(t)$, а выходы от второй и четвертой систем, складываясь, дают процесс $X_2(t)$. Таким образом, мы имеем

$$X_1(t) = \int_0^{\infty} h_{11}(v) Z_1(t-v) dv + \int_0^{\infty} h_{12}(v) Z_2(t-v) dv, \quad (8.1.14)$$

$$X_2(t) = \int_0^{\infty} h_{21}(v) Z_1(t-v) dv + \int_0^{\infty} h_{22}(v) Z_2(t-v) dv.$$

Случайный процесс (8.1.14) называется *двумерным линейным процессом*.

Ковариационные функции двумерного линейного процесса. Если источники белого шума взаимно некоррелированы, т. е.

$$E[Z_i(t)Z_j(t')] = 0 \text{ для всех } t, t', i = 1, 2, j = 1, 2,$$

то, используя (5.2.10), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(u) &= \sigma_1^2 \int_0^\infty h_{11}(v) h_{11}(v+u) dv + \sigma_2^2 \int_0^\infty h_{12}(v) h_{12}(v+u) dv, \\ \gamma_{22}(u) &= \sigma_1^2 \int_0^\infty h_{21}(v) h_{21}(v+u) dv + \sigma_2^2 \int_0^\infty h_{22}(v) h_{22}(v+u) dv, \\ \gamma_{21}(u) &= \sigma_1^2 \int_0^\infty h_{21}(v) h_{11}(v+u) dv + \sigma_2^2 \int_0^\infty h_{22}(v) h_{12}(v+u) dv, \\ \gamma_{12}(u) &= \sigma_1^2 \int_0^\infty h_{11}(v) h_{21}(v+u) dv + \sigma_2^2 \int_0^\infty h_{12}(v) h_{22}(v+u) dv. \end{aligned} \quad (8.1.15)$$

Для дискретных процессов формулы получаются из приведенных выше с помощью замены интегралов на соответствующие суммы.

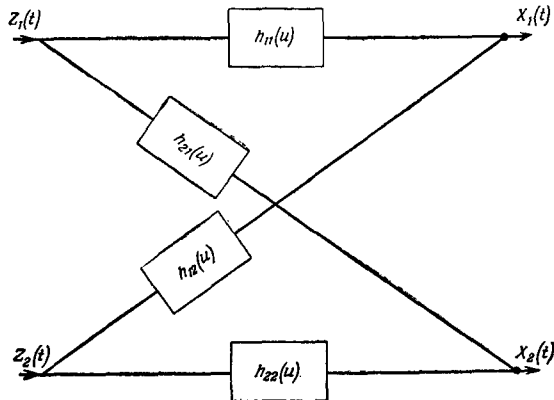


Рис. 8.5. Схематическое представление двумерного линейного процесса.

Формулы (8.1.15) показывают, что, подбирая соответствующие функции отклика на единичный импульс $h_{ij}(u)$, можно получить двумерный случайный процесс $\{X_1(t), X_2(t)\}$ с любыми наперед заданными взаимной ковариационной и автоковариационными функциями.

Можно получить еще более общую модель, если допустить возможность корреляции белых шумов в (8.1.14) в одинаковые моменты времени, т. е.

$$E[Z_1(t), Z_2(t')] = \sigma_{12}\delta(t - t').$$

8.1.5. Двумерные процессы авторегрессии и скользящего среднего

Простейший тип двумерного линейного процесса получается, когда функции отклика на единичный импульс $h_{ij}(u)$ равны нулю вне некоторого интервала. Рассмотрим, например, дискретный процесс

$$\begin{aligned} X_{1t} &= Z_{1t} + \beta_{11}Z_{1t-1} + \beta_{12}Z_{2t-1}, \\ X_{2t} &= Z_{2t} + \beta_{21}Z_{1t-1} + \beta_{22}Z_{2t-1}. \end{aligned} \quad (8.1.16)$$

Если Z_{1t}, Z_{2t} — некоррелированные процессы белого шума с дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 , то взаимная ковариационная функция двумерного процесса $\{X_{1t}, X_{2t}\}$ равна

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(-1) &= \beta_{12}\sigma_2^2, \\ \gamma_{12}(0) &= \beta_{11}\beta_{21}\sigma_1^2 + \beta_{12}\beta_{22}\sigma_2^2, \\ \gamma_{12}(1) &= \beta_{21}\sigma_1^2, \\ \gamma_{12}(k) &= 0, \quad k \neq 0, \pm 1. \end{aligned}$$

Отметим, что в отличие от примера 2 из разд. 8.1.3 эта взаимная ковариационная функция отлична от нуля как для положительного запаздывания, так и для отрицательного.

Двумерные процессы авторегрессии. Для этих процессов функции отклика на единичный импульс $h_{ij}(u)$ в (8.1.14) не обращаются в нуль вне какого-то ни было конечного интервала. Можно, например, определить непрерывный процесс первого порядка, который будет обобщением процесса (5.2.24). Так если $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ — процессы белого шума, коррелированные только в одинаковые моменты времени, то двумерный процесс авторегрессии для непрерывного времени определяется с помощью равенств

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} + a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t) &= Z_1(t), \\ \frac{dX_2(t)}{dt} + a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t) &= Z_2(t), \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

а для дискретного времени — равенствами

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \alpha_{11}X_{1t-1} + \alpha_{12}X_{2t-1} + Z_{1t}, \\ X_{2t} &= \alpha_{21}X_{1t-1} + \alpha_{22}X_{2t-1} + Z_{2t}, \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

где без ограничения общности мы предположим, что процессы имеют нулевые средние значения.

Вычисление авто- и взаимных ковариаций непрерывного процесса (8.1.17) с помощью равенств (8.1.15) довольно трудоемко, и его можно проделать изящнее, используя матричные методы, которые будут описаны в гл. 11. Сейчас мы лишь отметим, что авто- и взаимные ковариации процесса (8.1.17) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\gamma_{11}(u) &= b_{11}e^{-a_{11}u} + b_{21}e^{-a_{12}u}, \\ \gamma_{22}(u) &= b_{12}e^{-a_{11}u} + b_{22}e^{-a_{22}u}, \\ \gamma_{12}(u) &= b_{12}e^{-a_{11}u} + b_{22}e^{-a_{12}u}, \\ \gamma_{21}(u) &= b_{11}e^{-a_{21}u} + b_{21}e^{-a_{22}u},\end{aligned}$$

где b_{ij} — некоторые функции от a_{ij} . Интересно, что автокорреляционная функция двумерного процесса первого порядка имеет такой же вид, что и корреляционная функция (5.2.35) одномерного процесса авторегрессии *второго порядка*.

Явные выражения для авто- и взаимных ковариаций дискретного процесса (8.1.18) выводятся очень просто в гл. 11 с помощью теории матриц. Однако их можно также получить рекурсивно с помощью скалярного рекуррентного соотношения для ковариаций, аналогичного соотношению (5.2.43). Так, умножая первое уравнение в (8.1.18) на X_{2t-k} и беря математические ожидания от обеих частей равенства, мы получим

$$E[X_{2t-k}X_{1t}] = \alpha_{11}E[X_{2t-k}X_{1t-1}] + \alpha_{12}E[X_{2t-k}X_{2t-1}] + E[X_{2t-k}Z_{1t}]$$

или же

$$\gamma_{21}(k) = \alpha_{11}\gamma_{21}(k-1) + \alpha_{12}\gamma_{22}(k-1), \quad k \geq 1,$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\gamma_{12}(k) &= \alpha_{21}\gamma_{11}(k-1) + \alpha_{22}\gamma_{12}(k-1), \quad k \geq 1, \\ \gamma_{11}(k) &= \alpha_{11}\gamma_{11}(k-1) + \alpha_{12}\gamma_{12}(k-1), \quad k \geq 1, \\ \gamma_{22}(k) &= \alpha_{21}\gamma_{21}(k-1) + \alpha_{22}\gamma_{22}(k-1), \quad k \geq 1.\end{aligned}\tag{8.1.19}$$

Следовательно, значения ковариаций для запаздывания k легко получаются из значений для запаздывания $k-1$. Чтобы начать этот процесс, нужно знать значения для $k=0$. Их можно получить, возводя в квадрат и перемножая равенства (8.1.18) и беря затем математические ожидания. Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned}\gamma_{11}(0) &= \alpha_{11}^2\gamma_{11}(0) + \alpha_{12}^2\gamma_{22}(0) + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\gamma_{12}(0) + \sigma_1^2, \\ \gamma_{22}(0) &= \alpha_{21}^2\gamma_{11}(0) + \alpha_{22}^2\gamma_{22}(0) + 2\alpha_{21}\alpha_{22}\gamma_{12}(0) + \sigma_2^2, \\ \gamma_{12}(0) &= \alpha_{11}\alpha_{21}\gamma_{11}(0) + \alpha_{12}\alpha_{22}\gamma_{22}(0) + (\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21})\gamma_{12}(0) + \sigma_{12},\end{aligned}$$

где $\sigma_1^2 = E\{Z_{1t}^2\}$, $\sigma_2^2 = E\{Z_{2t}^2\}$ и $\sigma_{12} = E\{Z_{1t}Z_{2t}\}$. Значения $\gamma_{11}(0)$, $\gamma_{12}(0)$ и $\gamma_{22}(0)$ можно при этом выразить через известные параметры α_{1j} , σ_1^2 , σ_2^2 и σ_{12} , решая приведенные выше уравнения.

Пример 1. С помощью двух независимых множеств случайных нормальных чисел Z_{it} , для которых выполняются условия

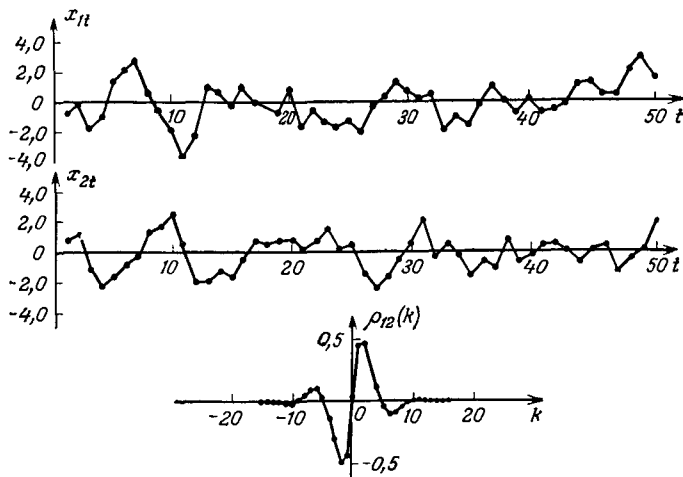


Рис. 8.6. Реализация и теоретическая взаимная корреляционная функция двумерного процесса авторегрессии.

$E\{Z_{it}\} = 0$, $E\{Z_{1t}Z_{2t}\} = 0$, $\text{Var}\{Z_{it}\} = 1$, была получена состоящая из $N = 100$ членам реализация процесса

$$\begin{aligned} X_{1t} &= 0,6X_{1t-1} - 0,5X_{2t-1} + Z_{1t}, \\ X_{2t} &= 0,4X_{1t-1} + 0,5X_{2t-1} + Z_{2t}. \end{aligned} \quad (8.1.20)$$

Значения этого двумерного ряда приведены в Приложении П8.1 и построены на рис. 8.6, где видно, что строение обоих рядов аналогично. Так, оба ряда имеют, как правило, одинаковые знаки, и за пиком или впадиной процесса X_{1t} через одно или два наблюдения обычно следует пик или соответственно впадина процесса X_{2t} . Чтобы объяснить такое поведение, необходимо вычислить авто- и взаимные корреляционные функции этого двумерного процесса. С помощью описанной выше процедуры получаем рекуррентные соотношения для ковариаций:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(k) &= 0,6\gamma_{11}(k-1) - 0,5\gamma_{12}(k-1), \\ \gamma_{12}(k) &= 0,4\gamma_{11}(k-1) + 0,5\gamma_{12}(k-1), \\ \gamma_{21}(k) &= 0,6\gamma_{21}(k-1) - 0,5\gamma_{22}(k-1), \\ \gamma_{22}(k) &= 0,4\gamma_{21}(k-1) + 0,5\gamma_{22}(k-1), \end{aligned} \quad k \geq 1$$

причем

$$\begin{aligned} 0,64\gamma_{11}(0) - 0,25\gamma_{22}(0) + 0,6\gamma_{12}(0) &= 1, \\ -0,16\gamma_{11}(0) + 0,75\gamma_{22}(0) - 0,4\gamma_{12}(0) &= 1, \\ 0,24\gamma_{11}(0) - 0,25\gamma_{22}(0) - 0,9\gamma_{12}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(0) &= 1,15/0,52 = 2,21, \\ \gamma_{12}(0) &= 0,04/0,52 = 0,08, \\ \gamma_{22}(0) &= 0,96/0,52 = 1,85. \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения для *корреляций* имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{11}(k) &= 0,6\rho_{11}(k-1) - 0,5\sqrt{0,96/1,15}\rho_{12}(k-1), \\ \rho_{12}(k) &= 0,4\sqrt{1,15/0,96}\rho_{11}(k-1) + 0,5\rho_{12}(k-1), \\ \rho_{21}(k) &= 0,6\rho_{21}(k) - 0,5\sqrt{0,96/1,15}\rho_{22}(k), \\ \rho_{22}(k) &= 0,4\sqrt{1,15/0,96}\rho_{21}(k) + 0,5\rho_{22}(k), \end{aligned} \quad (8.1.21)$$

причем $\rho_{11}(0) = \rho_{22}(0) = 1$ и $\rho_{12}(0) = 0,04/\sqrt{1,15 \cdot 0,96} = 0,038$.

Значения корреляционных функций приведены в табл. 8.1, а взаимная корреляционная функция показана на рис. 8.6. Видно, что, в то время как $\rho_{12}(0)$ очень мало, $\rho_{12}(1)$ и $\rho_{12}(2)$ велики

Таблица 8.1

Теоретические корреляции для двумерного процесса авторегрессии (8.1.20)

| k | $\rho_{11}(k)$ | $\rho_{22}(k)$ | $\rho_{12}(k)$ | $\rho_{21}(k)$ |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 1,00 | 1,00 | 0,04 | 0,04 |
| 1 | 0,52 | 0,58 | 0,46 | -0,43 |
| 2 | 0,07 | 0,14 | 0,48 | -0,50 |
| 3 | -0,18 | -0,14 | 0,30 | -0,33 |
| 4 | -0,24 | -0,22 | 0,09 | -0,11 |
| 5 | -0,17 | -0,17 | -0,05 | 0,04 |
| 6 | -0,07 | -0,08 | -0,10 | 0,10 |
| 7 | 0,01 | 0,00 | -0,09 | 0,09 |
| 8 | 0,04 | 0,04 | -0,04 | 0,05 |
| 9 | 0,04 | 0,04 | -0,01 | 0,01 |
| 10 | 0,03 | 0,03 | 0,02 | -0,01 |
| 11 | 0,01 | 0,01 | 0,02 | -0,02 |
| 12 | 0,01 | 0,00 | 0,01 | -0,02 |
| 13 | -0,01 | -0,01 | 0,01 | -0,01 |
| 14 | -0,01 | -0,01 | 0,00 | 0,00 |
| 15 | -0,01 | 0,00 | — | — |
| 16 | 0,00 | — | — | — |
| 17 | — | — | — | — |

и имеют положительный знак. Это объясняет упоминавшуюся выше тенденцию опережения процессом X_{2t} процесса X_{1t} на одно-два наблюдения. Рассматривая рис. 8.6, можно обнаружить также, что взаимная корреляционная функция имеет определенную периодичность, период которой равен примерно 10, т. е. частота равна 0,1 *гц*. Отсюда следует, что любой участок одного из процессов будет с некоторым искажением повторен другим процессом, т. е. вызовет его резонанс. Из рис. 8.6 видно, что чаще всего повторяются периодичности с периодом около 10.

Пример 2. В качестве второго примера двумерного линейного процесса рассмотрим процесс

$$\begin{aligned} X_{1t} &= 0,6X_{1t-1} + Z_{1t}, \\ X_{2t} &= 0,5X_{2t-1} + 2X_{1t-10} + Y_{2t}, \end{aligned} \quad (8.1.22)$$

где

$$Y_{2t} = 0,5Y_{2t-1} + Z_{2t}$$

и Z_{1t} , Z_{2t} — некоррелированные процессы белого шума с единичной дисперсией. Это пример модели (8.1.6), рассматривавшейся в разд. 8.1.3. Таким образом, процесс X_{2t} получается в результате пропуска процесса X_{1t} через линейный фильтр и добавления шума, который не является белым. Отметим, что имеется начальная задержка, равная 10 единицам, перед тем как процесс X_{1t} начинает влиять на X_{2t} .

Действуя так же, как и выше, можно вывести следующие рекуррентные соотношения для ковариаций:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(k) &= 0,6\gamma_{11}(k-1), \\ \gamma_{12}(k) &= 2\gamma_{11}(k-10) + 0,5\gamma_{12}(k-1), \\ \gamma_{21}(k) &= 0,6\gamma_{21}(k-1), \\ \gamma_{22}(k) &= 2\gamma_{21}(k-10) + 0,5\gamma_{22}(k-1) + \gamma_{X_1Y}(k-1), \end{aligned} \quad k \geq 1 \quad (8.1.23)$$

причем

$$\begin{aligned} \gamma_{X_1Y}(k) &= 0 \quad \text{для всех } k, \\ \gamma_{X_2Y}(k) &= 0,5\gamma_{X_2Y}(k-1), \\ \gamma_{YX_2}(k) &= 0,5\gamma_{YX_2}(k-1) + \gamma_{YY}(k), \\ \gamma_{YY}(k) &= 0,5\gamma_{YY}(k-1), \end{aligned} \quad k \geq 1$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(0) &= 1/0,64 = 1,56, \\ \gamma_{YY}(0) &= 1/0,75 = 1,33, \\ -4\gamma_{11}(0) + 0,75\gamma_{22}(0) - 2\gamma_{12}(9) &= \gamma_{YY}(0) + \gamma_{X_2Y}(1), \\ 1,2\gamma_{11}(9) - 0,7\gamma_{12}(0) &= 0, \\ 0,75\gamma_{X_2Y}(0) - 0,5\gamma_{YY}(1) &= 1, \end{aligned} \quad (8.1.24)$$

Решая уравнения (8.1.24) и подставляя решения в рекуррентные соотношения (8.1.23), можно вычислить ковариации. Нормируя их, получаем корреляции этого процесса (они приведены в табл. 8.2). Взаимная корреляционная функция имеет весьма широкий пик, центр которого соответствует величине запаздывания 10, как и следовало ожидать из-за задержки в 10 единиц между процессами X_{1t} и X_{2t} .

Таблица 8.2

Теоретические корреляции для двумерного линейного процесса с задержкой (8.1.22)

| k | $\rho_{11}(k)$ | $\rho_{22}(k)$ | $\rho_{12}(k)$ | $\rho_{21}(k)$ |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | 1,00 | 1,00 | 0,00 | 0,00 |
| 1 | 0,60 | 0,84 | 0,01 | — |
| 2 | 0,36 | 0,62 | 0,01 | — |
| 3 | 0,22 | 0,43 | 0,02 | — |
| 4 | 0,13 | 0,28 | 0,04 | — |
| 5 | 0,08 | 0,18 | 0,06 | — |
| 6 | 0,05 | 0,12 | 0,11 | — |
| 7 | 0,03 | 0,07 | 0,18 | — |
| 8 | 0,02 | 0,04 | 0,30 | — |
| 9 | 0,01 | 0,03 | 0,50 | — |
| 10 | 0,01 | 0,02 | 0,83 | — |
| 11 | 0,00 | 0,01 | 0,77 | — |
| 12 | — | 0,01 | 0,59 | — |
| 13 | — | 0,00 | 0,42 | — |
| 14 | — | — | 0,29 | — |
| 15 | — | — | 0,19 | — |
| 16 | — | — | 0,12 | — |
| 17 | — | — | 0,08 | — |
| 18 | — | — | 0,05 | — |
| 19 | — | — | 0,03 | — |
| 20 | — | — | 0,02 | — |

Двумерные процессы авторегрессии — скользящего среднего.

Более общий двумерный процесс можно получить, если к членам авторегрессии добавить члены скользящего среднего. Например, взяв комбинацию моделей (8.1.16) и (8.1.18), получим дискретный процесс

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \alpha_{11}X_{1t-1} + \alpha_{12}X_{2t-1} + Z_{1t} + \beta_{11}Z_{1t-1} + \beta_{12}Z_{2t-1}, \\ X_{2t} &= \alpha_{21}X_{1t-1} + \alpha_{22}X_{2t-1} + Z_{2t} + \beta_{21}Z_{1t-1} + \beta_{22}Z_{2t-1}. \end{aligned} \quad (8.1.25)$$

Как уже отмечалось выше, для сжатого математического описания такие процессы удобнее всего записывать в матричной форме. Мы отложим более общее рассмотрение их свойств до гл. 11.

8.2. ОЦЕНИВАНИЕ ВЗАИМНОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

8.2.1. Выборочная взаимная ковариационная функция

В разд. 5.3.1. было показано, что разумной оценкой взаимной ковариационной функции при условии, что средние значения процессов равны нулю, является функция

$$c_{X_1 X_2}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2-u} X_1(t) X_2(t+u) dt, & 0 \leq u \leq T, \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2+u}^{T/2} X_1(t) X_2(t+u) dt, & -T \leq u \leq 0. \end{cases} \quad (8.2.1)$$

Как и при оценивании автоковариаций, делить на T предпочтительнее, чем на $T-u$, поскольку в первом случае оценка имеет меньшую среднеквадратичную ошибку.

Беря математическое ожидание от обеих частей (8.2.1), получаем

$$E[c_{X_1 X_2}(u)] = \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{X_1 X_2}(u),$$

откуда видно, что $c_{X_1 X_2}(u)$ является смещенной оценкой $\gamma_{12}(u)$ и смещение стремится к нулю лишь при $T \rightarrow \infty$.

Если средние значения процессов могут быть отличны от нуля, то нужно рассмотреть оценку

$$c_{X_1 X_2}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2-u} [X_1(t) - \bar{X}_1][X_2(t+u) - \bar{X}_2] dt, & 0 \leq u \leq T, \\ \frac{1}{T} \int_{-T/2+u}^{T/2} [X_1(t) - \bar{X}_1][X_2(t+u) - \bar{X}_2] dt, & -T \leq u \leq 0, \end{cases} \quad (8.2.2)$$

где

$$\bar{X}_i = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_i(t) dt, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае вычисления, аналогичные приведенным в разд. 5.3.3, показывают, что

$$E[c_{X_1 X_2}(u)] = \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{X_1 X_2}(u) + \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{X_1 X_2}(u) du.$$

Следовательно, из-за введения поправки на среднее значение смещение увеличилось на величину порядка $1/T$. Выборочная взаимная ковариационная функция имеет те же самые недостатки, что и выборочная автоковариационная функция, и, в частности, ее соседние значения сильно коррелированы. В Приложении П9.1 показано, что ковариация оценок $c_{X_1X_2}(u_1)$, $c_{X_1X_2}(u_2)$ для двух различных запаздываний u_1 и u_2 дается формулой Барлетта

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{X_1X_2}(u_1), c_{X_1X_2}(u_2)] &= \\ &= \frac{1}{T^2} \left[T' \int_{-T'}^{T'} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T'}\right) dr - T'' \int_{-T''}^{T''} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T''}\right) dr \right], \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

где

$$T' = T - \frac{|u_1| + |u_2|}{2}, \quad T'' = \frac{|u_2| - |u_1|}{2},$$

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= \gamma_{X_1X_1}\left(r - \frac{u_2 - u_1}{2}\right) \gamma_{X_2X_2}\left(r + \frac{u_2 - u_1}{2}\right) + \\ &+ \gamma_{X_1X_2}\left(r + \frac{u_2 + u_1}{2}\right) \gamma_{X_2X_1}\left(r + \frac{u_2 + u_1}{2}\right) + K(r, u_1, u_2) \end{aligned}$$

и $K(r, u_1, u_2)$ — совместный кумулянт случайных величин $X_1(t)$, $X_1(t + u_1)$, $X_2(t + r)$ и $X_2(t + r + u_2)$.

При больших T для (8.2.3) можно дать следующее приближенное выражение, которое аналогично выражению (5.3.22):

$$\text{Cov}[c_{X_1X_2}(u_1), c_{X_1X_2}(u_2)] \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(r) dr. \quad (8.2.4)$$

В дискретном случае это приближение имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{X_1X_2}(k), c_{X_1X_2}(l)] &\approx \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\gamma_{X_1X_1}(r) \gamma_{X_2X_2}(r + l - k) + \gamma_{X_1X_2}(r + l) \gamma_{X_2X_1}(r - k)]. \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Влияние автокорреляции на взаимную корреляцию двух временных рядов. Интересный случай формулы (8.2.4) получается, когда $\gamma_{X_1X_2}(u) = 0$ для всех u , т. е. когда два процесса некоррелированы. Тогда если пренебречь членом, содержащим кумулянт (который отличен от нуля лишь для негауссовских процессов), то (8.2.4) перейдет в

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{X_1X_2}(u_1), c_{X_1X_2}(u_2)] &\approx \\ &\approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{X_1X_1}\left(r - \frac{u_2 - u_1}{2}\right) \gamma_{X_2X_2}\left(r + \frac{u_2 - u_1}{2}\right) dr. \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Аналогично для двух некоррелированных дискретных процессов формула (8.2.5) переходит в

$$\text{Cov}[c_{X_1 X_2}(k), c_{X_1 X_2}(l)] \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \gamma_{X_1 X_1}(r) \gamma_{X_2 X_2}(r+l-k). \quad (8.2.7)$$

Если $X_1(t)$, $X_2(t)$ — процессы авторегрессии первого порядка с параметрами α_1 и β_1 соответственно, то

$$\gamma_{X_1 X_1}(k) = \sigma_1^2 \alpha_1^{|k|}, \quad \gamma_{X_2 X_2}(k) = \sigma_2^2 \beta_1^{|k|},$$

и, подставляя эти выражения в (8.2.7) для случая $l = k$, получаем

$$\text{Var}[c_{X_1 X_2}(k)] \approx \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{N} \left(\frac{1 + \alpha_1 \beta_1}{1 - \alpha_1 \beta_1} \right). \quad (8.2.8)$$

Для белого шума соответствующая формула имеет вид

$$\text{Var}[c_{X_1 X_2}(k)] \approx \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{N}. \quad (8.2.9)$$

Следовательно, если $\alpha_1 \beta_1$ положительно, то дисперсия (8.2.8) оценки взаимной ковариации увеличена по сравнению с дисперсией (8.2.9) для случая белого шума. Если же $\alpha_1 \beta_1$ отрицательно, то (8.2.8) меньше, чем (8.2.9). Обычно $\alpha_1 \beta_1$ бывает положительно, т. е. два процесса или оба имеют положительные автоковариации, или же оба — отрицательные. В таком случае из равенства (8.2.8) следует, что могут получиться очень большие выборочные взаимные ковариации (ложные!) между двумя некоррелированными процессами из-за больших значений автоковариаций *внутри* каждого из процессов.

Пример. Чтобы проиллюстрировать этот эффект, мы вычислили выборочную взаимную корреляционную функцию $r_{X_1 X_2}(k)$ для реализаций двух независимых процессов авторегрессии первого порядка с параметрами $\alpha_1 = \beta_1 = -0,9$ при $N = 100$. Эта выборочная оценка получена при использовании дискретного выборочного аналога функции (8.2.2), а именно

$$r_{X_1 X_2}(k) = \frac{c_{X_1 X_2}(k)}{\sqrt{c_{X_1 X_1}(0) c_{X_2 X_2}(0)}},$$

где

$$c_{X_i X_j}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{jt+k} - \bar{x}_j), \quad k \geq 0. \quad (8.2.10)$$

$$c_{X_i X_j}(-k) = c_{X_j X_i}(k), \quad k < 0,$$

и

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_{it}, \quad i = 1, 2.$$

Выборочная оценка взаимной корреляции показана на рис. 8.7 пунктирной линией. Мы видим, что $r_{x_1, x_2}(k)$ достигает значений

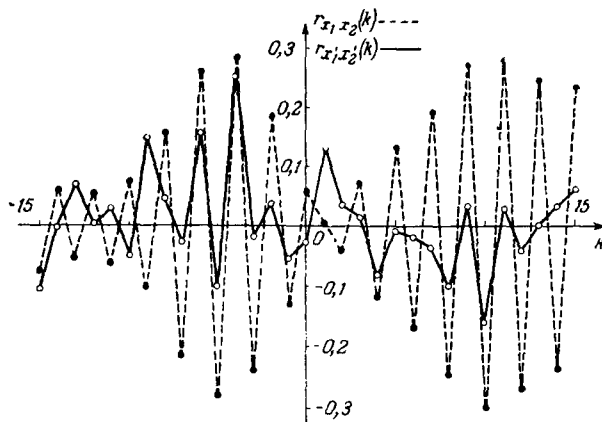


Рис. 8.7. Выборочные взаимные корреляции двух процессов авторегрессии первого порядка до и после фильтрации.

$\pm 0,3$, в то время как теоретическая корреляционная функция, конечно, равна нулю.

8.2.2. Улучшение оценки взаимной корреляционной функции

Чтобы понять, как можно улучшить оценку взаимной корреляционной функции, рассмотрим следующую модель двух взаимно коррелированных процессов авторегрессии первого порядка:

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \alpha_1 X_{1t-1} + Z_{1t}, \\ X_{2t} &= \beta_1 X_{2t-1} + Z_{2t}. \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

Предположим, что ковариация Z_{1t} и Z_{2t-k} равна нулю для k , отличных от нуля. Тогда, считая, что Z_{1t} и Z_{2t} имеют двумерное нормальное распределение, получаем с помощью формулы (3.1.17) логарифмическую функцию правдоподобия для параметров α_1 , β_1 , γ_{12} :

$$\begin{aligned} l[\alpha_1, \beta_1, \gamma_{12}(k)] &= -(N-k) \lg 2\pi - (N-k) \lg \sigma_1 - (N-k) \lg \sigma_2 - \\ &- \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2[\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \gamma_{12}^2(k)]^2} \left\{ \sum_{t=1}^{N-k} \left[\frac{z_{1t}^2}{\sigma_1^2} + \frac{z_{2t-k}^2}{\sigma_2^2} - \frac{2\gamma_{12}(k)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} z_{1t} z_{2t-k} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} z_{1t} &= x_{1t} - \alpha_1 x_{1t-1}, \\ z_{2t-k} &= x_{2t-k} - \beta_1 x_{2t-k-1}. \end{aligned}$$

Дифференцируя $l(\alpha_1, \beta_1, \gamma_{12}(k))$ по всем трем параметрам и приравнявая производные нулю, находим из полученных уравнений выборочную оценку максимального правдоподобия для $\gamma_{12}(k)$:

$$\hat{\gamma}_{12}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (x_{1t} - \hat{\alpha}_1 x_{1t-1})(x_{2t-k} - \hat{\beta}_1 x_{2t-k-1}), \quad (8.2.12)$$

где $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ — выборочные оценки максимального правдоподобия для α_1, β_1 . Наглядный смысл этой оценки ясен:

Если нужен критерий корреляции двух временных рядов, то следует сначала отфильтровать эти ряды так, чтобы превратить их в белые шумы, а затем сосчитать взаимную ковариационную функцию.

Для двух независимых процессов из примера разд. 8.2.1 параметры оценивались с помощью выборочных оценок максимального правдоподобия (5.4.5). Например,

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{t=2}^N (x_{1t} - \bar{x}_1)(x_{1t-1} - \bar{x}_1)}{\sum_{t=2}^N (x_{1t-1} - \bar{x}_1)^2}.$$

Затем производилась фильтрация двух рядов по формулам

$$\begin{aligned} x'_{1t} &= x_{1t} - \hat{\alpha}_1 x_{1t-1}, \\ x'_{2t} &= x_{2t} - \hat{\beta}_1 x_{2t-1}, \end{aligned}$$

и, наконец, вычислялась выборочная взаимная корреляционная функция отфильтрованных рядов (x'_{1t}, x'_{2t}) по формуле (8.2.12). Эта функция изображена сплошной линией на рис. 8.7, где видно, что ее значения гораздо меньше, чем до фильтрации. Поскольку отфильтрованные ряды являются белыми шумами, то по формуле (8.2.9) стандартное отклонение выборочной оценки взаимной корреляции равно $\sqrt{1/N} = 0,1$. Отсюда 95%-ные доверительные интервалы можно получить, если отложить от наблюдаемых значений $\pm 0,2$. Мы видим, что только один из этих интервалов не включает нуля. Если бы два процесса были некоррелированы, то следовало ожидать, что из 30 доверительных интервалов с уровнем доверия 95% в среднем два интервала не будут содержать

нуля. Поэтому паблюденная взаимная корреляционная функция не противоречит гипотезе о том, что эти два процесса некоррелированы.

8.3. ВЗАИМНЫЙ СПЕКТР

В этом разделе мы рассмотрим описание двумерных временных рядов в частотной области. Будет показано, что обсуждавшаяся в предыдущем разделе выборочная взаимная ковариационная функция имеет преобразование Фурье, называемое *выборочным взаимным спектром*. Этот спектр является комплексно-значной функцией, которую можно записать в виде произведения действительной функции, называемой *выборочным взаимным амплитудным спектром*, и комплексно-значной функции, называемой *выборочным фазовым спектром*. Аналогично преобразование Фурье теоретической взаимной ковариационной функции называется *взаимным спектром*. Его можно представить в виде произведения взаимного амплитудного и фазового спектров. Взаимный амплитудный спектр показывает, как велики амплитуды связанных частотных компонент в двух рядах на определенной частоте. Аналогично фазовый спектр показывает, насколько запаздывает или опережает по фазе такая компонента в одном из рядов соответствующую компоненту в другом ряде для данной частоты. В следующем разделе приводятся примеры взаимных амплитудных и фазовых спектров, полученные из взаимного спектра двумерного линейного процесса (8.1.14). Затем вводится несколько более полезное понятие, чем взаимный амплитудный спектр, а именно спектр когерентности. Мы покажем, что спектр когерентности и фазовый спектр дают полное описание двумерного нормального случайного процесса.

8.3.1. Применение анализа Фурье к двумерным временным рядам

Анализ Фурье можно применить к двумерным временным рядам точно так же, как и к одномерным. Предположим, например, что $x_1(t)$, $x_2(t)$ — две косинусоидальные волны одинаковой частоты f_0 , но с разными амплитудами A_1 , A_2 и фазами φ_1 , φ_2 , т. е.

$$x_i(t) = A_i \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i), \quad i = 1, 2. \quad (8.3.1)$$

Если длина имеющихся записей равна T , то с помощью (2.2.11) получаем преобразование Фурье $x_1(t)$, $x_2(t)$, $-T/2 \leq t \leq T/2$:

$$X_i(f) = \frac{A_i}{2} \left\{ e^{j\varphi_i} \left[\frac{\sin \pi (f - f_0) T}{\pi (f - f_0)} \right] + e^{-j\varphi_i} \left[\frac{\sin \pi (f + f_0) T}{\pi (f + f_0)} \right] \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (8.3.2)$$

Отсюда выборочные спектры (6.1.6) этих двух сигналов равны

$$C_{x_i x_i}(f) = \frac{|X_i(f)|^2}{T}, \quad i = 1, 2.$$

Эти выражения при $T \rightarrow \infty$ стремятся к

$$\frac{1}{4} A_i^2 [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

Таким образом, дисперсия, или средняя мощность косинусоидальной волны, равная $A_i^2/2$, распределена в виде δ -функций на частотах $f = \pm f_0$.

Предположим теперь, что требуется описать *ковариацию* двух косинусоидальных волн. В таком случае естественно воспользоваться выборочным взаимным спектром мощности, или, короче, *выборочным взаимным спектром*

$$C_{x_1 x_2}(f) = \frac{X_1^*(f) X_2(f)}{T}, \quad (8.3.3)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Подставив (8.3.2) в (8.3.3), мы находим, что выборочный взаимный спектр двух косинусоидальных волн равен

$$C_{x_1 x_2}(f) = \frac{A_1 A_2}{4T} \left\{ e^{-j\varphi_1} \left[\frac{\sin \pi (f - f_0) T}{\pi (f - f_0)} \right] + e^{j\varphi_1} \left[\frac{\sin \pi (f + f_0) T}{\pi (f + f_0)} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ e^{j\varphi_2} \left[\frac{\sin \pi (f - f_0) T}{\pi (f - f_0)} \right] + e^{-j\varphi_2} \left[\frac{\sin \pi (f + f_0) T}{\pi (f + f_0)} \right] \right\}, \quad (8.3.4)$$

что при $T \rightarrow \infty$ стремится к

$$\frac{1}{4} A_1 A_2 [e^{-j(\varphi_2 - \varphi_1)} \delta(f + f_0) + e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} \delta(f - f_0)]. \quad (8.3.5)$$

Определение (8.3.3) является естественным, так как оно содержит всю информацию о зависимости двух сигналов. В частном случае косинусоидальных волн равенство (8.3.5) показывает, что эта информация состоит из *разности фаз* $\varphi_2 - \varphi_1$, показывающей, насколько одна из косинусоидальных волн опережает другую, и *взаимной амплитуды* $A_1 A_2$, показывающей, как велики на данной частоте соответствующие амплитуды в двух сигналах.

Выборочный фазовый и выборочный взаимный амплитудный спектры. В более общем случае предположим, что $x_1(t)$, $x_2(t)$ — произвольные действительные сигналы с преобразованиями Фурье $X_1(f)$, $X_2(f)$ соответственно. Эти преобразования дают амплитудное и фазовое распределение сигналов, т. е.

$$X_i(f) = A_i(f) e^{jF_i(f)}, \quad i = 1, 2, \quad (8.3.6)$$

где $A_i(f)$ — неотрицательная четная функция и $F_i(f)$ — нечетная функция. Согласно (8.3.3), выборочный взаимный спектр в этом случае будет равен

$$C_{x_1 x_2}(f) = \frac{A_1(f) A_2(f) e^{i[F_2(f) - F_1(f)]}}{T}, \quad (8.3.7)$$

что можно записать также в виде

$$C_{12}(f) = A_{12}(f) e^{iF_{12}(f)}. \quad (8.3.8)$$

Следовательно, ковариацию двух рядов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ можно описать с помощью *выборочного фазового спектра*

$$F_{12}(f) = F_2(f) - F_1(f) \quad (8.3.9)$$

и *выборочного взаимного амплитудного спектра*

$$A_{12}(f) = \frac{A_1(f) A_2(f)}{T}. \quad (8.3.10)$$

Выборочный фазовый спектр $F_{12}(f)$ показывает, запаздывает или опережает частотная компонента одного ряда компоненту другого ряда на той же частоте. Аналогично, выборочный взаимный амплитудный спектр $A_{12}(f)$ показывает, насколько велики в двух рядах амплитуды соответствующих компонент на некоторой частоте. Заметим, что $A_{12}(f)$ — неотрицательная четная функция, а $F_{12}(f)$ — нечетная функция частоты.

Выборочный коспектр и квадратурный спектр. Так как функция $C_{12}(f)$ из (8.3.8) является комплексно-значной, ее можно записать в виде произведения амплитудной и фазовой функций, как в (8.3.7). Выражение (8.3.8) можно записать и в другом виде, выделив вещественную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} C_{12}(f) &= L_{12}(f) - jQ_{12}(f), \\ \text{где} \quad L_{12}(f) &= A_{12}(f) \cos F_{12}(f), \quad Q_{12}(f) = -A_{12}(f) \sin F_{12}(f) \\ \text{и} \quad A_{12}^2(f) &= L_{12}^2(f) + Q_{12}^2(f), \quad F_{12}(f) = \arctg \left[-\frac{Q_{12}(f)}{L_{12}(f)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.11)$$

Отметим, что $L_{12}(f)$ — четная, а $Q_{12}(f)$ — нечетная функция частоты из-за того, что $A_{12}(f)$ — четная, а $F_{12}(f)$ — нечетная функция. Для иллюстрации рассмотрим приведенный выше пример с двумерной косинусоидальной волной.

Можно показать, что в пределе при $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} L_{12}(f) &= \frac{A_1 A_2}{4} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] = \\ &= \left(\frac{A_1 \cos \varphi_1 A_2 \cos \varphi_2}{4} + \frac{A_1 \sin \varphi_1 A_2 \sin \varphi_2}{4} \right) [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]. \end{aligned}$$

Так как сигналы $x_i(t)$ можно записать в виде

$$x_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_1) = (A_1 \cos \varphi_1) \cos 2\pi f_0 t - (A_1 \sin \varphi_1) \sin 2\pi f_0 t,$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_2) = (A_2 \cos \varphi_2) \cos 2\pi f_0 t - (A_2 \sin \varphi_2) \sin 2\pi f_0 t,$$

то, следовательно, $L_{12}(f)$ состоит из ковариации двух косинусоидальных компонент и ковариации двух синусоидальных компонент, т. е. $L_{12}(f)$ измеряет ковариацию *синфазных* компонент. Поэтому функция $L_{12}(f)$ называется *выборочным синфазным спектром*, или *выборочным коспектром*. Аналогично, функция

$$\begin{aligned} Q_{12}(f) &= \frac{A_1 A_2}{2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] = \\ &= \left(\frac{A_1 \cos \varphi_1 A_2 \sin \varphi_2}{4} - \frac{A_1 \sin \varphi_1 A_2 \cos \varphi_2}{4} \right) [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \end{aligned}$$

состоит из ковариаций между синусоидальными и косинусоидальными компонентами, т. е. между компонентами, *сдвинутыми по фазе*, или *квадратурными*. Поэтому $Q_{12}(f)$ называется *выборочным квадратурным спектром*. Аналогичным образом, для произвольных сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$ преобразования Фурье

$$L_{12}(f) = A_{12}(f) \cos F_{12}(f)$$

и

$$Q_{12}(f) = A_{12}(f) \sin F_{12}(f)$$

служат мерами ковариации соответственно синфазных и квадратурных компонент на частоте f .

8.3.2. Соотношение между выборочным взаимным спектром и выборочной взаимной ковариационной функцией

В гл. 6 было показано, что выборочная автоковариационная функция и выборочный спектр связаны между собой преобразованием Фурье (6.1.9). В этом разделе мы обобщим формулу (6.1.9) и покажем, что выборочная взаимная ковариационная функция и выборочный взаимный спектр точно так же образуют пару преобразований Фурье.

Из определения (8.3.3) выборочного взаимного спектра имеем

$$C_{12}(f) = \frac{1}{T} X_1^*(f) X_2(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) x_2(t') e^{-i2\pi f(t'-t)} dt dt'.$$

Заменяя переменные интегрирования $t' - t = u$, $t = v$ и действуя дальше так же, как в разд. 6.1.3, мы получаем

$$C_{12}(f) = \int_{-T}^T c_{12}(u) e^{-i2\pi f u} du. \quad (8.3.12)$$

Таким образом, выборочный взаимный спектр является преобразованием Фурье от выборочной взаимной ковариационной функции, определяемой соотношениями

$$\begin{aligned} c_{12}(u) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2-u} x_1(t) x_2(t+u) dt, & 0 \leq u \leq T, \\ c_{12}(u) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2+u}^{T/2} x_1(t) x_2(t+u) dt, & -T \leq u \leq 0, \\ c_{12}(u) &= 0, & |u| > T. \end{aligned} \quad (8.3.13)$$

Обратным по отношению к преобразованию (8.3.12) является преобразование

$$c_{12}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{12}(f) e^{j2\pi fu} df. \quad (8.3.14)$$

Подставляя (8.3.11) в (8.3.14), получаем важное равенство

$$\begin{aligned} c_{12}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} [L_{12}(f) - jQ_{12}(f)] e^{j2\pi fu} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L_{12}(f) \cos 2\pi fu df + \int_{-\infty}^{\infty} Q_{12}(f) \sin 2\pi fu df, \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

при выводе которого мы воспользовались тем, что $L_{12}(f)$ — четная функция, а $Q_{12}(f)$ — нечетная функция частоты. Наконец, полагая в (8.3.15) $u = 0$, получаем

$$c_{12}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{12}(f) df. \quad (8.3.16)$$

Следовательно, выборочный коспектр дает разложение по частоте выборочной взаимной ковариации при нулевом запаздывании аналогично тому, как выборочный спектр (6.1.11) дает разложение выборочной дисперсии по частоте.

Запишем теперь (8.3.15) в виде

$$c_{12}(u) = l_{12}(u) + q_{12}(u), \quad (8.3.17)$$

где

$$\begin{aligned} L_{12}(f) &= \int_{-T}^T l_{12}(u) \cos 2\pi fu du, \\ Q_{12}(f) &= \int_{-T}^T q_{12}(u) \sin 2\pi fu du. \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

Нетрудно проверить, что $l_{12}(u)$ — это четная часть функции $c_{12}(u)$, т. е.

$$l_{12}(u) = \frac{1}{2} [c_{12}(u) + c_{12}(-u)]. \quad (8.3.19)$$

Аналогично, $q_{12}(u)$ — нечетная часть $c_{12}(u)$, т. е.

$$q_{12}(u) = \frac{1}{2} [c_{12}(u) - c_{12}(-u)]. \quad (8.3.20)$$

8.3.3. Взаимный спектр

В предыдущем разделе мы рассматривали $x_1(t)$ и $x_2(t)$ как заданные функции времени t . Если считать, что $\{x_1(t), x_2(t)\}$ — реализация стационарного двумерного случайного процесса $\{X_1(t), X_2(t)\}$, то возникают те же самые проблемы, что и в одномерном случае. Так, например, выборочные коспектры и квадратурные спектры, сосчитанные по реализации двумерного случайного процесса, не сходятся ни в каком статистическом смысле к предельным значениям, когда длина реализации T стремится к бесконечности. В действительности, они ведут себя так же, как выборочный спектр, показанный на рис. 6.1. Чтобы понять, почему это так, нужно исследовать свойства случайной величины $C_{X_1, X_2}(f)$, для которой выборочный взаимный спектр является реализацией.

Из (8.3.12) случайная оценка, соответствующая выборочному взаимному спектру, имеет вид

$$C_{X_1, X_2}(f) = \int_{-T}^T c_{X_1, X_2}(u) e^{-j2\pi f u} du, \quad -\infty \leq f \leq \infty.$$

С помощью (8.2.2) получаем среднее значение этой величины

$$E[C_{X_1, X_2}(f)] = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{X_1, X_2}(u) e^{-j2\pi f u} du. \quad (8.3.21)$$

При $T \rightarrow \infty$ это среднее значение стремится к взаимному спектру мощности, или, короче к *взаимному спектру* *). Таким образом,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[C_{X_1, X_2}(f)] = \Gamma_{X_1, X_2}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{X_1, X_2}(u) e^{-j2\pi f u} du, \quad -\infty \leq f \leq \infty \quad (8.3.22)$$

Равенство (8.3.22) показывает, что взаимный спектр является преобразованием Фурье от взаимной ковариационной функции. Отметим, что в определении взаимного спектра для случайного

*) Более точно было бы называть функцию (8.3.22) взаимной спектральной плотностью. Однако ради краткости мы будем пользоваться и термином «взаимный спектр». — Прим. перев.

Краткая сводка формул для взаимных спектров

| Функция | Теоретические величины | | Выборочные величины | |
|-----------------------------|------------------------|--|---------------------|---|
| | обозначение | определение | обозначение | определение |
| Автоспектр | $\Gamma_{11}(f)$ | $\Gamma_{11}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{11}(u) e^{-j2\pi fu} du$ | $C_{11}(f)$ | $C_{11}(f) = \int_{-T}^T c_{11}(u) e^{-j2\pi fu} du$ |
| Взаимный спектр | $\Gamma_{12}(f)$ | $\Gamma_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du =$ $= \alpha_{12}(f) e^{+j\psi_{12}(f)} =$ $= \Lambda_{12}(f) - j\Psi_{12}(f)$ | $C_{12}(f)$ | $C_{12}(f) = \int_{-T}^T c_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du =$ $= A_{12}(f) e^{+jF_{12}(f)} =$ $= L_{12}(f) - jQ_{12}(f)$ |
| Взаимный амплитудный спектр | $\alpha_{12}(f)$ | $\alpha_{12}(f) = \Gamma_{12}(f) =$ $= \sqrt{\Lambda_{12}^2(f) + \Psi_{12}^2(f)}$ | $A_{12}(f)$ | $A_{12}(f) = C_{12}(f) =$ $= \sqrt{L_{12}^2(f) + Q_{12}^2(f)}$ |

| | | | | |
|---------------------|-------------------|--|-------------|--|
| Фазовый спектр | $\Phi_{12}(f)$ | $\Phi_{12}(f) = \text{arctg} \left[-\frac{\Psi_{12}(f)}{\Lambda_{12}(f)} \right]$ | $F_{12}(f)$ | $F_{12}(f) = \text{arctg} \left[-\frac{Q_{12}(f)}{L_{12}(f)} \right]$ |
| Коспектр | $\Lambda_{12}(f)$ | $\begin{aligned} \Lambda_{12}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_{12}(u) + \gamma_{12}(-u)] \times \\ &\quad \times \cos 2\pi fu du \end{aligned}$ | $L_{12}(f)$ | $\begin{aligned} L_{12}(f) &= \int_{-T}^T \lambda_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T}^T [c_{12}(u) + c_{12}(-u)] \times \\ &\quad \times \cos 2\pi fu du \end{aligned}$ |
| Квадратурный спектр | $\Psi_{12}(f)$ | $\begin{aligned} \Psi_{12}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\gamma_{12}(u) - \gamma_{12}(-u)] \times \\ &\quad \times \sin 2\pi fu du \end{aligned}$ | $Q_{12}(f)$ | $\begin{aligned} Q_{12}(f) &= \int_{-T}^T q_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T}^T [c_{12}(u) - c_{12}(-u)] \times \\ &\quad \times \sin 2\pi fu du \end{aligned}$ |

процесса (8.3.22) $\Gamma_{X_1, X_2}(f)$ будет непрерывной функцией частоты в области $-\infty \leq f \leq \infty$.

Еще раз подчеркнем, что приводимое обычно в технических пособиях определение

$$\Gamma_{X_1, X_2}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} C_{X_1, X_2}(f)$$

не имеет смысла для случайных процессов, так как дисперсии действительной и мнимой частей случайной величины $C_{X_1, X_2}(f)$ не стремятся к нулю при $T \rightarrow \infty$, как будет показано в разд. 9.1.

Коспектр и квадратурный спектр. Разложим $\gamma_{X_1, X_2}(u)$ на четную и нечетную части

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(u) &= \frac{1}{2} [\gamma_{12}(u) + \gamma_{12}(-u)], \\ \psi_{12}(u) &= \frac{1}{2} [\gamma_{12}(u) - \gamma_{12}(-u)]. \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

Подставляя эти выражения в (8.3.22), получим

$$\Gamma_{12}(f) = \Lambda_{12}(f) - j\Psi_{12}(f), \quad (8.3.24)$$

где

$$\Lambda_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{12}(u) \cos 2\pi fu \, du \quad (8.3.25)$$

и

$$\Psi_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{12}(u) \sin 2\pi fu \, du. \quad (8.3.26)$$

Функция $\Lambda_{12}(f)$ называется *коспектром*, а функция $\Psi_{12}(f)$ — *квадратурным спектром* двумерного процесса $\{X_1(t), X_2(t)\}$. Эти же самые функции можно определить и с помощью соотношений (8.3.21) и (8.3.22), а именно:

$$\Lambda_{12}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[L_{12}(f)], \quad \Psi_{12}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[Q_{12}(f)].$$

Взаимный амплитудный и фазовый спектры. Взаимный спектр можно записать также в виде

$$\Gamma_{12}(f) = \alpha_{12}(f) e^{j\varphi_{12}(f)}, \quad (8.3.27)$$

где функции $\alpha_{12}(f)$, $\varphi_{12}(f)$ называются *взаимным амплитудным спектром* и *фазовым спектром* соответственно. По аналогии с (8.3.11) мы получаем

$$\alpha_{12}(f) = \sqrt{\Lambda_{12}^2(f) + \Psi_{12}^2(f)}, \quad (8.3.28)$$

$$\varphi_{12}(f) = \arctg \left[-\frac{\Psi_{12}(f)}{\Lambda_{12}(f)} \right]. \quad (8.3.29)$$

Следовательно, взаимный амплитудный и фазовый спектры можно получить, вычисляя функции $\lambda_{12}(u)$ и $\psi_{12}(u)$ по взаимной ковариационной функции [формулы (8.3.23)], затем вычисляя коспектр и квадратурный спектр [формулы (8.3.25) и (8.3.26)] и подставляя эти спектры в (8.3.28) и (8.3.29).

Краткая сводка. В табл. 8.3 дана краткая сводка формул, которые мы определили в этой главе.

8.4. ВЗАИМНЫЕ СПЕКТРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

8.4.1. Простые примеры взаимных спектров

Прежде чем выводить формулу для взаимного спектра произвольного линейного процесса (8.1.14), полезно рассмотреть некоторые простые примеры взаимных спектров. На этих примерах мы покажем, какая информация содержится во взаимном спектре, для чего выведем формулы взаимных спектров некоторых простых дискретных процессов. Для дискретного процесса взаимный спектр определяется равенством

$$\Gamma_{12}(f) = \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{12}(k) e^{-j2\pi f k}, \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq f < \frac{1}{2\Delta}. \quad (8.4.1)$$

В приводимых ниже примерах мы будем предполагать, что

$$\begin{aligned} E[Z_{1t}] &= 0, \quad E[Z_{2t}] = 0, \quad E[Z_{1t}^2] = \sigma_1^2, \\ E[Z_{2t}^2] &= \sigma_2^2 \quad \text{и} \quad \Delta = 1, \quad \text{так что} \quad -1/2 \leq f < 1/2. \end{aligned}$$

Пример 1. Предположим что

$$X_{2t} = Z_{2t}, \quad X_{1t} = Z_{1t},$$

где Z_{1t} , Z_{2t} — взаимно некоррелированные белые шумы. Мы имеем

$$\gamma_{12}(k) = E[Z_{1t}Z_{2t+k}] = 0 \quad \text{для всех } k,$$

и из (8.3.22) получаем

$$\Gamma_{12}(f) = \alpha_{12}(f) e^{j\Phi} e^{j\Phi_{12}(f)} = \sqrt{\Lambda_{12}^2(f) + \Psi_{12}^2(f)} = 0.$$

Отсюда видно, что взаимный амплитудный спектр тождественно равен нулю и, следовательно, коспектр и квадратурный спектр тоже тождественно равны нулю. Фазовый спектр неопределен.

Пример 2 (двумерный эквивалент белого шума). Предположим, что

$$X_{2t} = Z_{2t} + \beta_1 Z_{1t}, \quad X_{1t} = Z_{1t},$$

так что

$$X_{2t} = \beta_1 X_{1t} + Z_{2t}. \quad (8.4.2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\gamma_{12}(0) &= E[Z_{1t}(Z_{2t} + \beta_1 Z_{1t})] = \beta_1 \sigma_1^2, \\ \gamma_{12}(k) &= 0, \quad k \neq 0.\end{aligned}$$

Из (8.4.1) получаем

$$\Gamma_{12}(f) = \beta_1 \sigma_1^2,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}\alpha_{12}(f) &= \beta_1 \sigma_1^2, & \varphi_{12}(f) &= 0, \\ \Lambda_{12}(f) &= \beta_1 \sigma_1^2, & \Psi_{12}(f) &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, если два процесса взаимно коррелированы только в одинаковые моменты времени, то взаимный амплитудный спектр равен константе, подобно спектру белого шума. Далес, эти два процесса находятся в фазе, поскольку $\varphi_{12}(f) = 0$. Взаимный амплитудный и фазовый спектры для этого примера показаны на рис. 8.8, а. Таким образом, процесс (8.4.2) можно рассматривать как фундаментальную модель взаимного спектра, аналогично тому как белый шум можно считать фундаментальным при изучении одномерного спектра.

Пример 3 (влияние задержки). Предположим, что

$$X_{2t} = Z_{2t} + \beta_1 Z_{1t-d}, \quad X_{1t} = Z_{1t},$$

так что

$$X_{2t} = \beta_1 X_{1t-d} + Z_{2t},$$

т. е. эти два ряда сдвинуты по отношению друг к другу на временной интервал d . Отсюда

$$\gamma_{12}(k) = \begin{cases} \beta_1 \sigma_1^2, & k = d, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому из (8.4.1) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}(f) &= \beta_1 \sigma_1^2 e^{-j2\pi f d}, \\ \alpha_{12}(f) &= \beta_1 \sigma_1^2, & \varphi_{12}(f) &= -2\pi f d, \\ \Lambda_{12}(f) &= \beta_1 \sigma_1^2 \cos 2\pi f d, & \Psi_{12}(f) &= \beta_1 \sigma_1^2 \sin 2\pi f d.\end{aligned}$$

Снова взаимный амплитудный спектр равен константе, но фазовый спектр теперь представляет собой линейную функцию частоты, как показано на рис. 8.8, б. Это означает, что косинусоидальная волна частоты f *гц* совершает $f d$ колебаний за время задержки d , и, следовательно, фазовое запаздывание составляет $2\pi f d$ рад.

Пример 4. Более интересную модель мы получим, если положим

$$X_{2t} = \beta_1 Z_{1t} + \beta_2 Z_{1t-1} + Z_{2t}, \quad X_{1t} = Z_{1t},$$

что можно переписать в виде

$$X_{2t} = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{1t-1} + Z_{2t}.$$

Отсюда, как показано во втором примере из разд. 8.1.3, следует, что

$$\gamma_{12}(k) = \begin{cases} \beta_1 \sigma_1^2, & k = 0, \\ \beta_2 \sigma_1^2, & k = 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(f) &= \sigma_1^2 (\beta_1 + \beta_2 e^{-j2\pi f}), \\ \alpha_{12}(f) &= \sigma_1^2 \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1 \beta_2 \cos 2\pi f}, \\ \varphi_{12}(f) &= \arctg \left(\frac{-\beta_2 \sin 2\pi f}{\beta_1 + \beta_2 \cos 2\pi f} \right), \\ \Lambda_{12}(f) &= \sigma_1^2 (\beta_1 + \beta_2 \cos 2\pi f), \\ \Psi_{12}(f) &= \sigma_1^2 \beta_2 \sin 2\pi f. \end{aligned}$$

Приведенная формула для взаимного амплитудного спектра показывает, что ковариация двух процессов больше на низких частотах при $\beta_2/\beta_1 > 0$ и на высоких при $\beta_2/\beta_1 < 0$. Следовательно, взаимные корреляции, не меняющие знак, соответствуют низкочастотным взаимным амплитудным спектрам, а осциллирующие взаимные корреляции — высокочастотным. Соответствующие фазовые спектры показаны на рис. 8.8, *в* и рис. 8.8, *г*. Мы видим, что при $\beta_2/\beta_1 > 0$ процесс X_{1t} опережает по фазе процесс X_{2t} , а при $\beta_2/\beta_1 < 0$, наоборот, отстает от него.

Используя более сложные модели, можно получить множество разнообразных взаимных амплитудных и фазовых спектров. Важное положение, которое необходимо сейчас подчеркнуть, заключается в том, что изучение взаимных амплитудных спектров двух эмпирических временных рядов может привести к заключению, что *требуются разные модели для различных частотных диапазонов*. Например, фазовый спектр, образованный двумя прямыми с разными наклонами, мог бы навести на мысль, что один ряд запаздывает по отношению к другому, но эта задержка во времени различна для разных частотных диапазонов.

Отсюда видно, что выборочные взаимные спектры эмпирических временных рядов могут служить очень гибким средством при выборе моделей, описывающих поведение этих рядов. В тех случаях,

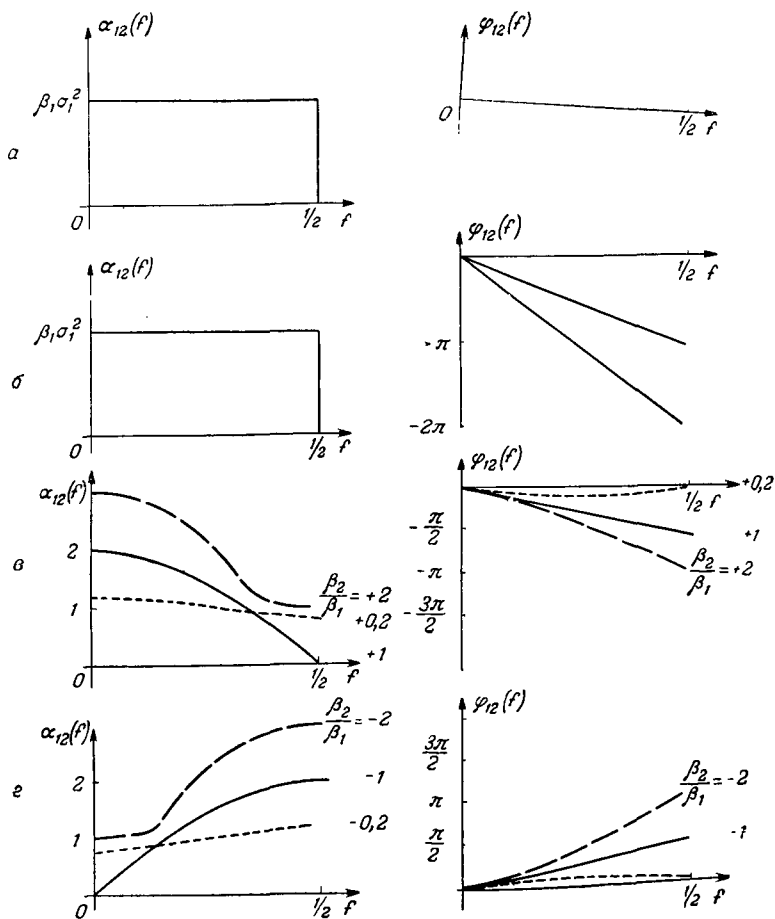


Рис. 8.8. Взаимные амплитудные и фазовые спектры некоторых простых двумерных процессов.

когда есть подозрение, что в разных частотных диапазонах действуют разные модели, дальнейший анализ будет более эффективным, если, как отмечалось в разд. 7.3.5, сначала расфильтровать исходные ряды на компоненты с помощью набора полосовых фильтров, а затем вычислить взаимные спектры соответствующих компонент.

8.4.2. Взаимный спектр линейной системы

В разд. 8.1.3 отмечалось, что иногда два случайных процесса $X_1(t)$ и $X_2(t)$ связаны линейным соотношением вида

$$X_2(t) = \int_0^{\infty} h(u) X_1(t-u) du + Z(t).$$

Таким образом, $X_1(t)$ является входным процессом линейной системы, а $X_2(t)$ представляет собой соответствующий выход, сложенный с независимым шумом $Z(t)$. Из (8.1.8) находим взаимную ковариационную функцию выхода

$$\Gamma_{12}(u) = \int_0^{\infty} \Gamma_{11}(u-v) h(v) dv, \quad -\infty \leq u \leq \infty. \quad (8.4.3)$$

Взяв преобразование Фурье от (8.4.3), получаем

$$\Gamma_{12}(f) = H(f) \Gamma_{11}(f). \quad (8.4.4)$$

Отсюда находим частотную характеристику

$$H(f) = \frac{\Gamma_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)}. \quad (8.4.5)$$

Сравнивая (8.4.3) с (8.4.4), мы видим, что изучение линейных систем легче проводить с помощью методов Фурье. Так, свертка из (8.4.3) переходит в произведение в (8.4.4). Переписывая (8.4.5) в виде

$$H(f) = G(f) e^{+j\varphi(f)} = \frac{\Lambda_{12}(f) - j\Psi_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)},$$

получаем следующие выражения для коэффициента усиления $G(f)$ и фазы $\varphi(f)$ линейной системы:

$$G(f) = \frac{\sqrt{\Lambda_{12}^2(f) + \Psi_{12}^2(f)}}{\Gamma_{11}(f)} = \frac{\alpha_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)}, \quad (8.4.6)$$

$$\varphi(f) = \arctg \left[-\frac{\Psi_{12}(f)}{\Lambda_{12}(f)} \right]. \quad (8.4.7)$$

Вспоминая, что взаимная амплитуда $\alpha_{12}(f)$ есть мера «ковариации» между $X_1(t)$ и $X_2(t)$ на частоте f , а $\Gamma_{11}(f)$ — «дисперсия» входа на этой же частоте, мы видим, что усиление $G(f)$ играет роль коэффициента регрессии (4.3.7), но теперь он оценивается на каждой частоте.

Квадрат спектра когерентности. Эту аналогию можно продолжить дальше с помощью соотношения (8.1.9) для автоковариации

выхода, а именно

$$\gamma_{22}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(v) h(v') \gamma_{11}(u + v - v') dv dv' + \gamma_{ZZ}(u).$$

Взяв преобразование Фурье от этого равенства, получаем

$$\Gamma_{22}(f) = G^2(f) \Gamma_{11}(f) + \Gamma_{ZZ}(f). \quad (8.4.8)$$

Это выражение отличается от (6.2.15) только тем, что к выражению, полученному из входного процесса, добавляется спектр шума $Z(t)$. Подставляя (8.4.6) в (8.4.8), получаем

$$\Gamma_{22}(f) - \frac{\alpha_{12}^2(f)}{\Gamma_{11}(f)} = \Gamma_{ZZ}(f)$$

или же

$$\Gamma_{ZZ}(f) = \Gamma_{22}(f) [1 - \kappa_{12}^2(f)], \quad (8.4.9)$$

где

$$\kappa_{12}^2(f) = \frac{\alpha_{12}^2(f)}{\Gamma_{11}(f) \Gamma_{22}(f)} \quad (8.4.10)$$

называется *квадратом коэффициента когерентности* между входом и выходом на частоте f . Функция частоты $\kappa_{12}^2(f)$ называется *квадратом спектра когерентности*.

Следует отметить сходство между (8.4.9) и уравнением (3.2.19), содержащим обычный коэффициент корреляции. Фактически коэффициент когерентности играет роль коэффициента корреляции, определенного для каждой частоты f . Таким образом, равенство (8.4.9) показывает, что когда спектр шума совпадает с выходным спектром, то коэффициент когерентности равен нулю. Другими словами, этот коэффициент равен нулю, если выход состоит из одного шума. Наоборот, если $\Gamma_{ZZ}(f) = 0$, то квадрат коэффициента когерентности равен единице, а выходной спектр просто равен входному, умноженному на квадрат коэффициента усиления системы. Исключая $\Gamma_{22}(f)$ из (8.4.8) и (8.4.10), получаем

$$\kappa_{12}^2(f) = \frac{1}{1 + \Gamma_{ZZ}(f)/G^2(f) \Gamma_{11}(f)}. \quad (8.4.11)$$

Равенство (8.4.11) показывает, что квадрат коэффициента когерентности мал, когда мало отношение выходного сигнала к шуму $G^2(f) \Gamma_{11}(f) / \Gamma_{ZZ}(f)$, и близок к 1, когда это отношение велико.

8.4.3. Взаимные спектры двумерных линейных процессов

В разд. 8.1.4 было показано, что весьма общая модель двумерных случайных процессов получается, если пропустить два белых шума $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ через систему, показанную на рис. 8.5. Авто-

и взаимные ковариации этого процесса задаются выражениями (8.1.15). Мы воспользуемся ими сейчас для того, чтобы вывести соответствующие авто- и взаимные спектры. Обозначим частотные характеристики четырех систем в структурной диаграмме на рис. 8.5 через

$$H_{ij}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ij}(u) e^{-j2\pi fu} du, \quad i, j = 1, 2.$$

Выражения для авто- и взаимных спектров можно теперь получить, беря преобразования Фурье от равенств (8.1.15). Так, взяв преобразования от первых двух из этих равенств и используя (6.2.16), мы находим автоспектры

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(f) &= \sigma_1^2 |H_{11}(f)|^2 + \sigma_2^2 |H_{12}(f)|^2, \\ \Gamma_{22}(f) &= \sigma_1^2 |H_{21}(f)|^2 + \sigma_2^2 |H_{22}(f)|^2. \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

Чтобы получить взаимный спектр, заметим, что последние два из равенств (8.1.15) можно объединить в одно:

$$\gamma_{12}(u) = \sigma_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(v) h_{21}(v+u) dv + \sigma_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(v) h_{22}(v+u) dv, \quad (8.4.13)$$

которое теперь справедливо при $-\infty \leq u \leq \infty$. Взяв преобразование Фурье от обеих частей этого равенства, получаем взаимный спектр

$$\Gamma_{12}(f) = \sigma_1^2 H_{11}^*(f) H_{21}(f) + \sigma_2^2 H_{12}^*(f) H_{22}(f). \quad (8.4.14)$$

Таким образом, вычисление взаимного спектра сводится к нахождению частотных характеристик соответствующего двумерного линейного процесса (8.1.14).

Частотные характеристики $H_{ij}(f)$ можно получить очень просто, взяв преобразование Фурье от равенств (8.1.14). Подставив $H_{ij}(f)$ в (8.4.12) и (8.4.14), можно получить явные выражения для авто- и взаимных спектров. Эту процедуру лучше проиллюстрировать на примере.

Пример. Рассмотрим непрерывный двумерный процесс авторегрессии

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} + a_{11}X_1(t) + a_{12}X_2(t) &= Z_1(t), \\ \frac{dX_2(t)}{dt} + a_{21}X_1(t) + a_{22}X_2(t) &= Z_2(t). \end{aligned}$$

Беря преобразование Фурье от этих равенств и используя свойство дифференцирования (П2.1.2), получаем

$$\begin{aligned} (a_{11} + j2\pi f) X_1(f) + a_{12}X_2(f) &= Z_1(f), \\ a_{21}X_1(f) + (a_{22} + j2\pi f) X_2(f) &= Z_2(f). \end{aligned}$$

Эти уравнения можно решить относительно $X_i(f)$

$$X_1(f) = \frac{(a_{22} + j2\pi f) Z_1(f) - a_{12} Z_2(f)}{(a_{11} + j2\pi f)(a_{22} + j2\pi f) - a_{12} a_{21}},$$

$$X_2(f) = \frac{-a_{21} Z_1(f) + (a_{11} + j2\pi f) Z_2(f)}{(a_{11} + j2\pi f)(a_{22} + j2\pi f) - a_{12} a_{21}}.$$

Аналогичным образом, взяв преобразование Фурье от (8.1.14), получим

$$X_1(f) = H_{11}(f) Z_1(f) + H_{12}(f) Z_2(f),$$

$$X_2(f) = H_{21}(f) Z_1(f) + H_{22}(f) Z_2(f).$$

Отсюда

$$H_{11}(f) = \frac{a_{22} + j2\pi f}{D}, \quad H_{12}(f) = -\frac{a_{12}}{D},$$

$$H_{21}(f) = \frac{-a_{21}}{D}, \quad H_{22}(f) = \frac{a_{11} + j2\pi f}{D},$$

где $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - (2\pi f)^2 + j2\pi f(a_{11} + a_{22})$.

Наконец, воспользовавшись равенствами (8.4.12) и (8.4.14), получаем авто- и взаимный спектры двумерного процесса

$$\Gamma_{11}(f) = \frac{[a_{22}^2 + (2\pi f)^2] \sigma_1^2 + a_{12}^2 \sigma_2^2}{|D|^2},$$

$$\Gamma_{22}(f) = \frac{a_{21}^2 \sigma_1^2 + [a_{11}^2 + (2\pi f)^2] \sigma_2^2}{|D|^2},$$

$$\Gamma_{12}(f) = \frac{-a_{22} a_{21} \sigma_1^2 - a_{11} a_{12} \sigma_2^2 - j2\pi f(a_{12} \sigma_2^2 - a_{21} \sigma_1^2)}{|D|^2}.$$

Взаимные спектры дискретных двумерных линейных процессов.

Выражения для авто- и взаимных спектров дискретных двумерных линейных процессов можно получить аналогичным образом. Для иллюстрации этой процедуры рассмотрим дискретный двумерный процесс (8.1.20)

$$X_{1t} = 0,6X_{1t-1} - 0,5X_{2t-1} + Z_{1t},$$

$$X_{2t} = 0,4X_{1t-1} + 0,5X_{2t-1} + Z_{2t},$$

где Z_{1t} , Z_{2t} — некоррелированные белые шумы. Взяв z -преобразование, получим

$$X_1(z) = 0,6z^{-1}X_1(z) - 0,5z^{-1}X_2(z) + Z_1(z),$$

$$X_2(z) = 0,4z^{-1}X_1(z) + 0,5z^{-1}X_2(z) + Z_2(z).$$

Эти уравнения можно решить относительно $X_1(z)$, $X_2(z)$

$$X_1(z) = \frac{(1 - 0,5z^{-1}) Z_1(z) - 0,5z^{-1} Z_2(z)}{1 - 1,1z^{-1} + 0,5z^{-2}},$$

$$X_2(z) = \frac{0,4z^{-1} Z_1(z) + (1 - 0,6z^{-1}) Z_2(z)}{1 - 1,1z^{-1} + 0,5z^{-2}}.$$

Делая замену $z = e^{j2\pi f}$, получаем частотные характеристики

$$H_{11}(f) = \frac{1 - 0,5e^{-j2\pi f}}{D}, \quad H_{12}(f) = \frac{-0,5e^{-j2\pi f}}{D},$$

$$H_{21}(f) = \frac{0,4e^{-j2\pi f}}{D}, \quad H_{22}(f) = \frac{1 - 0,6e^{-j2\pi f}}{D},$$

где

$$D = 1 - 1,1e^{-j2\pi f} + 0,5e^{-j4\pi f} =$$

$$= 1 - 1,1 \cos 2\pi f + 0,5 \cos 4\pi f + j(1,1 \sin 2\pi f - 0,5 \sin 4\pi f).$$

Наконец, воспользовавшись равенствами (8.4.12) и (8.4.14), получаем авто- и взаимный спектры двумерного процесса

$$\Gamma_{11}(f) = \frac{\sigma_1^2(1,25 - \cos 2\pi f) + \sigma_2^2(0,25)}{|D|^2},$$

$$\Gamma_{22}(f) = \frac{\sigma_1^2(0,16) + \sigma_2^2(1,36 - 1,2 \cos 2\pi f)}{|D|^2},$$

$$\Gamma_{12}(f) = \frac{\sigma_1^2(-0,2 + 0,4 \cos 2\pi f) + \sigma_2^2(0,3 - 0,5 \cos 2\pi f) - j \sin 2\pi f(0,4\sigma_1^2 + 0,5\sigma_2^2)}{|D|^2}, \quad (8.4.15)$$

где $|D|^2 = 2,46 - 3,3 \cos 2\pi f + \cos 4\pi f$.

В частном случае при $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ равенства (8.4.15) сводятся к

$$\Gamma_{11}(f) = \frac{1,5 - \cos 2\pi f}{|D|^2},$$

$$\Gamma_{22}(f) = \frac{1,52 - 1,2 \cos 2\pi f}{|D|^2}, \quad (8.4.16)$$

$$\Gamma_{12}(f) = \frac{0,1(1 - \cos 2\pi f) - j(0,9) \sin 2\pi f}{|D|^2}.$$

8.4.4. Квадрат спектра когерентности

В разд. 8.4.2 было показано, что корреляцию входа и выхода линейной системы на частоте f можно было бы описать с помощью квадрата коэффициента когерентности $\kappa_{12}^2(f)$. Этот коэффициент напоминает коэффициент корреляции для каждой из частот. Он измеряет влияние шума в системе, причем высокому уровню шума соответствует малый коэффициент когерентности и наоборот. В гл. 11 будет показано, что спектр когерентности существует у любого двумерного случайного процесса. В настоящем же разделе мы проиллюстрируем это основное понятие, вычислив спектр когерентности двумерного линейного процесса.

Рассмотрим двумерный линейный процесс, изображенный на рис. 8.5. Он имеет следующие авто- и взаимные спектры:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}(f) &= \sigma_1^2 |H_{11}(f)|^2 + \sigma_2^2 |H_{12}(f)|^2, \\ \Gamma_{22}(f) &= \sigma_1^2 |H_{21}(f)|^2 + \sigma_2^2 |H_{22}(f)|^2, \\ \Gamma_{12}(f) &= \sigma_1^2 H_{11}^*(f) H_{21}(f) + \sigma_2^2 H_{12}^*(f) H_{22}(f).\end{aligned}\quad (8.4.17)$$

Квадрат спектра когерентности двумерного процесса можно теперь получить, подставляя (8.4.17) в (8.4.10). В результате получим

$$\kappa_{12}^2(f) = \frac{\alpha_{12}^2(f)}{\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(f)} = \frac{|\Gamma_{12}(f)|^2}{\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(f)}. \quad (8.4.18)$$

Рассмотрим далее некоторые частные случаи формул (8.4.17) и (8.4.18).

Случай 1. Предположим, что $h_{12}(u) = 0$, $h_{22}(u) = 0$, так что $H_{12}(f) = 0$, $H_{22}(f) = 0$. Тогда

$$\kappa_{12}^2(f) = \frac{\sigma_1^4 |H_{11}^*(f) H_{21}(f)|^2}{\sigma_1^4 |H_{11}(f)|^2 |H_{21}(f)|^2} = 1.$$

Воспользовавшись (8.1.14) при $h_{12}(u) = 0$, $h_{22}(u) = 0$, получаем

$$\begin{aligned}X_1(t) &= \int_0^{\infty} h_{11}(u) Z_1(t-u) du, \\ X_2(t) &= \int_0^{\infty} h_{21}(u) Z_1(t-u) du.\end{aligned}$$

Следовательно, квадрат коэффициента когерентности тождественно равен единице. Это означает, что процесс $X_2(t)$ можно полностью восстановить по $X_1(t)$. Для этого нужно было бы превратить $X_1(t)$ в белый шум $Z_1(t)$ с помощью фильтра, имеющего частотную характеристику $1/H_{11}(f)$, и затем получить $X_2(t)$ из $Z_1(t)$.

Случай 2. Предположим, что в (8.1.14) $h_{21}(u) = 0$, $h_{12}(u) = 0$, так что

$$\begin{aligned}X_1(t) &= \int_0^{\infty} h_{11}(u) Z_1(t-u) du, \\ X_2(t) &= \int_0^{\infty} h_{22}(u) Z_2(t-u) du.\end{aligned}$$

Из (8.4.17) видно, что $\Gamma_{12}(f) = 0$ и, следовательно, $\kappa_{12}^2(f) = 0$. Так как $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ — два различных белых шума, то из равенства

коэффициента когерентности нулю следует, что невозможно восстановить, или предсказать, $X_2(t)$ по $X_1(t)$.

Случай 3 (пример 2 из разд. 8.4.1). Значения квадрата коэффициента когерентности между 0 и 1 соответствуют случаям, где $X_2(t)$ можно частично восстановить, или предсказать, по $X_1(t)$. Рассмотрим, например, двумерный процесс (8.4.2), для которого

$$X_{1t} = Z_{1t},$$

$$X_{2t} = Z_{2t} + \beta_1 Z_{1t}.$$

Следовательно, $H_{11}(f) = 1$, $H_{22}(f) = 1$, $H_{12}(f) = 0$, $H_{21}(f) = \beta_1$, и если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то

$$\kappa_{12}^2(f) = \frac{\beta_1^2}{1 + \beta_1^2}.$$

Таким образом, при $\beta_1 = 0$ квадрат коэффициента когерентности обращается в нуль и при $\beta_1 \rightarrow \infty$ стремится к единице. Это следовало ожидать, так как при $\beta_1 \rightarrow 0$ шум преобладает над сигналом, а при $\beta_1 \rightarrow \infty$, наоборот, сигнал $\beta_1 Z_{1t}$ превосходит шум.

Случай 4 (влияние задержки). Рассмотрим двумерный процесс, обсуждавшийся в третьем примере из разд. 8.4.1, а именно

$$\begin{aligned} X_{2t} &= Z_{2t} + \beta_1 Z_{1t-d}, \\ X_{1t} &= Z_{1t}. \end{aligned}$$

При $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ квадрат спектра когерентности равен

$$\kappa_{12}^2(f) = \frac{\beta_1^2}{1 + \beta_1^2},$$

что совпадает с выражением для $\kappa_{12}^2(f)$ из предыдущего примера.

Однако, как показано в разд. 8.4.1 и как видно из рис. 8.8, а и 8.8, б, процессы из этих двух примеров имеют заметно отличающиеся фазовые спектры. Таким образом, квадрат спектра когерентности не выявляет каких-либо фазовых отличий этих двух

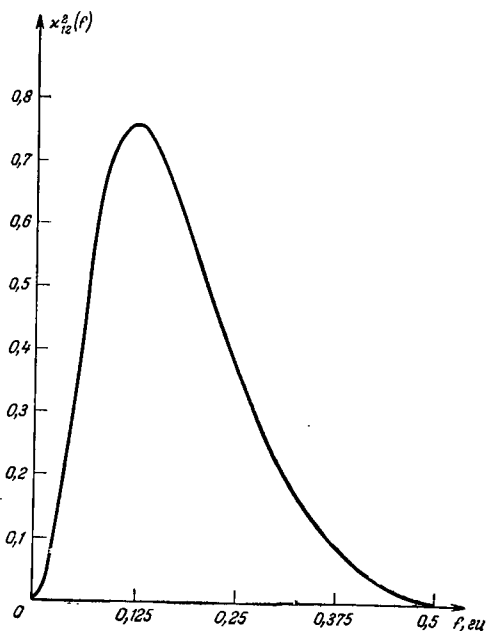


Рис. 8.9. Теоретический спектр когерентности двумерного процесса авторегрессии (8.1.20).

процессов, и, следовательно, для полного описания двумерного процесса в частотной области требуется как спектр когерентности, так и фазовый спектр.

Случай 5. Рассмотрим дискретный двумерный процесс (8.1.20), имеющий авто- и взаимный спектры, даваемые формулами (8.4.16) при $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Соответствующий спектр когерентности имеет вид

$$\kappa_{12}^2(f) = \frac{0,42 - 0,02 \cos 2\pi f - 0,4 \cos 4\pi f}{2,88 - 3,32 \cos 2\pi f + 0,6 \cos 4\pi f}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}. \quad (8.4.19)$$

Этот спектр показан на рис. 8.9.

Наиболее важную отличительную черту этого спектра когерентности составляет большой пик на частоте приблизительно

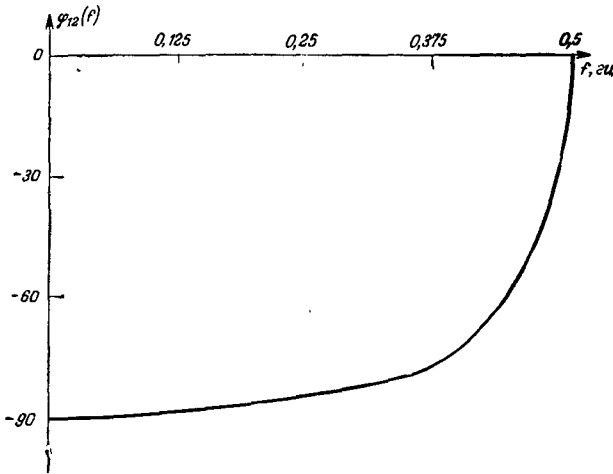


Рис. 8.10. Теоретический фазовый спектр двумерного процесса авторегрессии (8.1.20).

0,125 гц, а также тот факт, что спектр стремится к нулю как в сторону низких, так и в сторону высоких частот. Появление пика следовало ожидать, поскольку взаимная корреляционная функция содержит периодичность. Это говорит о том, что корреляция этих двух процессов сосредоточена в основном в полосе частот около 0,125 гц. С помощью (8.4.16) находим фазовый спектр этого процесса:

$$\varphi_{12}(f) = \operatorname{arctg} \left[\frac{-0,9 \sin 2\pi f}{0,1 (1 - \cos 2\pi f)} \right] = \operatorname{arctg} (-9 \operatorname{ctg} \pi f). \quad (8.4.20)$$

Этот спектр показан на рис. 8.10. Мы видим, что низкочастотные компоненты ряда 1 отстают от компонент ряда 2 примерно на 90° , но с увеличением частоты эта разность фаз стремится к нулю.

Практическое использование квадрата коэффициента когерентности. Спектр когерентности полезен на практике, поскольку он является безразмерной мерой корреляции двух временных рядов, зависящей от частоты. Таким образом, его следует предпочесть взаимному амплитудному спектру, зависящему от масштаба измерений $X_1(t)$ и $X_2(t)$. Следовательно, свойства взаимной корреляции двух временных рядов можно описать с помощью квадрата спектра когерентности $\kappa_{12}^2(f)$ и фазового спектра $\varphi_{12}(f)$. В разд. 9.2 будет показано, как можно оценить эти спектры по записям конечной длины.

8.4.5. Линейные операции над двумерными временными рядами

В разд. 9.4.2 мы увидим, что, перед тем как проводить взаимный спектральный анализ, необходимо отфильтровать временные ряды. В настоящем разделе мы исследуем влияние такой предварительной фильтрации на спектр когерентности и на фазовый спектр.

Предположим, что процессы $X_1(t)$, $X_2(t)$ подвергаются фильтрации, в результате которой они переходят в процессы $Y_1(t)$, $Y_2(t)$:

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= \int_0^{\infty} h_1(v) X_1(t-v) dv, \\ Y_2(t) &= \int_0^{\infty} h_2(v) X_2(t-v) dv. \end{aligned} \quad (8.4.21)$$

Действуя так же, как и в разд. 5.2.2, получаем взаимную ковариационную функцию профильтрованных процессов

$$\gamma_{Y_1 Y_2}(u) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_1(v) h_2(v') \gamma_{X_1 X_2}(u+v-v') dv dv'. \quad (8.4.22)$$

Взяв преобразование Фурье от (8.4.22), получим взаимный спектр

$$\Gamma_{Y_1 Y_2}(f) = H_1^*(f) H_2(f) \Gamma_{X_1 X_2}(f). \quad (8.4.23)$$

Так как

$$\Gamma_{Y_i Y_i}(f) = |H_i(f)|^2 \Gamma_{X_i X_i}(f), \quad i=1, 2,$$

то спектр когерентности профильтрованного двумерного ряда равен

$$\kappa_{Y_1 Y_2}^2(f) = \frac{|H_1^*(f)|^2 |H_2(f)|^2 |\Gamma_{X_1 X_2}(f)|^2}{|H_1^*(f)|^2 |H_2(f)|^2 \Gamma_{X_1 X_1}(f) \Gamma_{X_2 X_2}(f)} = \kappa_{X_1 X_2}^2(f).$$

Следовательно, после фильтрации спектр когерентности остался тем же самым.

Из (8.3.27) и (2.3.17) получаем

$$\Gamma_{X_1 X_2}(f) = \alpha_{X_1 X_2}(f) e^{j\Phi_{X_1 X_2}(f)},$$

$$H_i(f) = G_i(f) e^{j\Phi_i(f)}$$

и

$$\Gamma_{Y_1 Y_2}(f) = G_1(f) G_2(f) \alpha_{X_1 X_2}(f) e^{j[\Phi_2(f) - \Phi_1(f) + \Phi_{12}(f)]} =$$

$$= G_1(f) G_2(f) e^{j[\Phi_2(f) - \Phi_1(f)]} \Gamma_{X_1 X_2}(f).$$

Таким образом, фазовый спектр изменяется на величину $\Phi_2(f) - \Phi_1(f)$. Заметим, однако, что если $h_1(u) = h_2(u)$, то $\Phi_1(f) = \Phi_2(f)$ и фазовый спектр не меняется в результате фильтрации. Следовательно, если оба входных процесса подвергаются одинаковой фильтрации, то взаимный амплитудный спектр умножается на $G^2(f)$, а спектр когерентности и фазовый спектр остаются неизменными. Остаточный спектр (гл. 10) для отфильтрованных данных изменится при фильтрации так же, как и автоспектр $\Gamma_{Y_1 Y_2}(f)$, т. е. остаточный спектр для отфильтрованных данных будет равен остаточному спектру для исходных данных, умноженному на $G_2^2(f)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ П8.1

РЕАЛИЗАЦИЯ ДВУХ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Таблица П8.1

Реализация двумерного линейного процесса

| $x_{1t} = 0,6x_{1t-1} - 0,5x_{2t-1} + z_{1t}$ | | | | $x_{2t} = 0,4x_{1t-1} + 0,5x_{2t-1} + z_{2t}$ | | | |
|---|---------------|---------------|----------------|---|---------------|---------------|----------------|
| $t = 1 - 25$ | $t = 26 - 50$ | $t = 51 - 75$ | $t = 76 - 100$ | $t = 1 - 25$ | $t = 26 - 50$ | $t = 51 - 75$ | $t = 76 - 100$ |
| -0,88 | -2,00 | 0,37 | 0,15 | 0,79 | -1,40 | 2,96 | 2,69 |
| -0,16 | -0,22 | -0,24 | -1,04 | 1,12 | -2,55 | 1,56 | 0,57 |
| -1,87 | 0,38 | 0,57 | 0,12 | -1,10 | -1,66 | -0,36 | 0,29 |
| -1,12 | 1,31 | -0,53 | 0,08 | -2,39 | -0,43 | -0,59 | 1,10 |
| 1,38 | 0,71 | 2,44 | 0,11 | -1,75 | 0,58 | -0,12 | 0,48 |
| 2,13 | 0,32 | 1,02 | -2,62 | -0,82 | 2,18 | 3,03 | -1,06 |
| 2,76 | 0,48 | -0,53 | -1,28 | -0,36 | -0,24 | 2,11 | -2,28 |
| 0,56 | -1,88 | -2,49 | 1,07 | 1,27 | 0,58 | 0,78 | -2,03 |
| -0,69 | -0,94 | -2,12 | 3,20 | 1,75 | -0,18 | 0,89 | -0,75 |
| -1,79 | -1,54 | -1,04 | 1,92 | 2,44 | -1,55 | -1,45 | 1,00 |
| -3,82 | -0,13 | -0,12 | 0,53 | 0,36 | -0,64 | -0,36 | 1,71 |
| -2,38 | 1,02 | -1,88 | -1,08 | -2,10 | -1,09 | -0,37 | 0,58 |
| 1,00 | 0,02 | -1,50 | 0,49 | -1,93 | 0,90 | -1,39 | 1,97 |
| 0,70 | -0,77 | 1,54 | -0,58 | -1,30 | -0,66 | -4,19 | 0,99 |
| -0,15 | 0,11 | 3,33 | 0,17 | -1,75 | -0,35 | -0,73 | 1,94 |
| 0,98 | -0,60 | 3,08 | 1,15 | -0,34 | 0,48 | -0,98 | 2,18 |
| 0,11 | -0,52 | 1,71 | -0,97 | 0,74 | 0,50 | 0,36 | 3,14 |
| -0,35 | -0,09 | 0,79 | -1,63 | 0,49 | 0,05 | 0,06 | 0,60 |
| -0,73 | 1,23 | 1,55 | 1,14 | 0,70 | -0,68 | -1,94 | 0,51 |
| 0,89 | 1,46 | 0,89 | -0,67 | 0,71 | 0,24 | -0,08 | 1,35 |
| -1,63 | 0,61 | -0,89 | -0,88 | 0,09 | 0,58 | 0,17 | 0,56 |
| -0,44 | 0,42 | -1,18 | -0,07 | 0,59 | -1,26 | 1,00 | 0,11 |
| -1,37 | 2,16 | 0,89 | 0,24 | 1,54 | -0,25 | -0,05 | 0,00 |
| -1,71 | 3,18 | 1,71 | 0,55 | 0,14 | 0,25 | 0,43 | 2,34 |
| -1,22 | 2,10 | 3,05 | -2,16 | 0,55 | 2,18 | 0,15 | 1,88 |

Таблица П8.2

Реализация двумерного процесса с задержкой

| $x_{1t} = 0,6x_{1t-1} + z_{1t}$ | | | | $x_{2t} = 0,5x_{2t-1} + 2x_{1t-10} + y_{2t}$ $y_{2t} = 0,5y_{2t-1} + z_{2t}$ | | | |
|---------------------------------|---------------|---------------|----------------|---|---------------|---------------|----------------|
| $t = 1 - 25$ | $t = 26 - 50$ | $t = 51 - 75$ | $t = 76 - 100$ | $t = 1 - 25$ | $t = 26 - 50$ | $t = 51 - 75$ | $t = 76 - 100$ |
| -2,07 | -0,78 | 0,00 | 0,20 | 0,32 | -3,65 | 8,00 | 4,88 |
| -1,15 | 0,31 | -1,99 | -0,42 | 0,35 | -3,38 | 7,91 | 3,01 |
| 0,69 | -0,95 | -1,75 | 1,18 | -2,03 | -3,04 | 8,81 | 6,05 |
| -0,46 | -0,90 | 0,70 | 0,82 | -4,16 | -3,03 | 2,36 | 5,67 |
| -1,49 | -0,30 | 0,73 | 1,50 | -3,55 | -2,64 | 5,92 | 7,23 |
| -0,70 | -1,02 | 1,16 | 2,92 | -1,04 | -1,01 | 2,94 | 2,32 |
| -1,07 | -0,53 | 0,06 | 1,18 | 2,60 | 2,88 | 2,05 | 1,27 |
| -0,69 | 0,15 | -0,02 | 1,23 | 0,67 | -1,18 | -1,52 | 1,26 |
| -0,68 | 1,40 | 1,10 | 3,16 | -0,25 | -1,91 | -4,87 | 4,86 |
| 1,27 | 1,22 | -0,35 | 0,79 | -0,90 | -3,75 | -2,96 | 4,75 |
| -1,05 | 0,59 | -1,67 | 0,68 | -4,69 | -3,61 | -2,26 | 3,55 |
| -0,05 | 0,70 | -1,57 | 1,14 | -3,50 | -3,08 | -4,23 | 1,50 |
| -0,84 | 1,70 | 1,16 | 1,02 | 1,62 | -4,18 | -5,26 | 3,37 |
| -0,62 | 2,78 | 1,84 | 1,02 | 0,81 | -4,75 | -0,96 | 5,69 |
| -0,49 | 1,98 | 3,35 | -0,71 | -0,95 | -2,62 | 0,37 | 7,52 |
| -1,29 | 1,39 | 0,40 | -0,17 | -2,24 | -2,15 | 3,58 | 10,32 |
| -0,49 | 1,85 | 0,45 | -1,50 | -4,50 | -1,61 | 1,63 | 8,41 |
| -1,06 | 2,60 | 1,30 | -0,26 | -4,55 | -1,28 | 1,05 | 7,55 |
| -0,38 | 0,51 | 0,93 | -0,38 | -3,85 | 1,14 | 3,77 | 10,38 |
| -0,52 | 2,77 | 1,17 | 0,93 | 0,78 | 2,89 | 1,60 | 9,14 |
| -0,13 | 1,16 | -1,74 | -0,33 | -0,02 | 4,68 | -3,67 | 6,93 |
| 1,30 | 1,07 | -1,28 | -1,12 | -0,72 | 4,94 | -6,24 | 6,54 |
| -1,51 | -0,48 | -0,07 | -2,95 | -1,84 | 6,41 | -1,82 | 4,13 |
| -0,43 | -0,52 | 1,50 | -2,09 | -1,78 | 10,54 | 2,11 | 3,49 |
| -1,33 | 0,37 | 0,53 | -1,11 | -2,77 | 9,06 | 7,51 | 0,40 |

ОЦЕНИВАНИЕ ВЗАИМНЫХ СПЕКТРОВ

В разд. 9.1 показано, что выборочный взаимный спектр обладает тем же нежелательным свойством, что и выборочный автоспектр: его дисперсия не зависит от длины записи. Однако из него можно получить выборочную коспектральную функцию и выборочный фазовый спектр и построить с их помощью частотный критерий корреляции двух временных рядов.

В разд. 9.2 выводятся выражения для дисперсий и ковариаций сглаженных коспектров и квадратурных спектров, а также для сглаженных спектров когерентности и фазовых спектров. Показано, что эти дисперсии и ковариации зависят как от неизвестного теоретического спектра когерентности, так и от способа сглаживания, влияние которого можно учесть.

В разд. 9.3 приводятся некоторые численные примеры оценивания взаимных спектров, в которых показано, что если максимум взаимной корреляционной функции сдвинут относительно нуля, то получаются очень большие смещения. Теоретический анализ этих смещений показывает, что их можно минимизировать с помощью взаимного сдвига, или выравнивания, рядов, в результате которого взаимная корреляционная функция достигает максимума в нуле. В разд. 9.4 описана практическая методика оценивания взаимных спектров и приведен пример.

9.1. СВОЙСТВА ВЫБОРОЧНОГО ВЗАИМНОГО СПЕКТРА

9.1.1. Моменты выборочного взаимного спектра для двух некоррелированных белых шумов

В этом разделе мы выведем выражения для средних значений, дисперсий и ковариаций оценок, соответствующих выборочным коспектрам, квадратурным спектрам, а также выборочным фазовым и взаимным амплитудным спектрам, предполагая, что два рассматриваемых процесса являются некоррелированными белыми шумами. Эти выражения окажутся полезными в двух случаях. В разд. 9.1.2 мы используем их при выводе критерия корреляции двух временных рядов, а в разд. 9.1.3 и 9.2.1 — при выводе моментов оценок, соответствующих обычным и сглаженным выборочным

взаимным спектрам, при довольно общих предположениях относительно случайных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$.

Как и раньше, процессы белого шума мы обозначим через $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$. Предполагается, что они имеют нулевые средние значения. Преобразования Фурье отрезков этих процессов обозначим через

$$Z_i(f) = \int_{-T/2}^{T/2} Z_i(t) e^{-j2\pi ft} dt = A_i(f) - jB_i(f),$$

где $A_i(f)$, $B_i(f)$ — синус- и косинус-преобразования $Z_i(t)$. Опуская аргумент f в этих преобразованиях, можно записать случайные функции, соответствующие авто- и взаимным спектрам, в виде

$$C_{ii}(f) = \frac{|Z_i(f)|^2}{T} = \frac{A_i^2 + B_i^2}{T}, \quad i = 1, 2, \quad (9.1.1)$$

$$\begin{aligned} C_{12}(f) &= \frac{|Z_1^*(f) Z_2(f)|}{T} = \frac{1}{T} [(A_1 + jB_1)(A_2 - jB_2)] = \\ &= \frac{1}{T} [(A_1 A_2 + B_1 B_2) - j(B_2 A_1 - B_1 A_2)]. \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Отсюда случайные функции, соответствующие коспектрам и квадратурным спектрам, имеют вид

$$L_{12}(f) = \frac{1}{T} (A_1 A_2 + B_1 B_2), \quad (9.1.3)$$

$$Q_{12}(f) = \frac{1}{T} (B_2 A_1 - B_1 A_2). \quad (9.1.4)$$

Далее, если $Z_i(t)$ — гауссовские процессы, то, как было показано в разд. 6.3.1, A_i и B_i являются гауссовскими случайными величинами. Было показано также, что если процессы $Z_i(t)$ имеют нулевые средние значения, то

$$E[A_i] = E[B_i] = 0, \quad (9.1.5)$$

и для гармонических частот $f_m = m/T$ имеют место равенства

$$\text{Var}[A_i] = \text{Var}[B_i] = \frac{T}{2} \sigma_i^2, \quad (9.1.6)$$

$$\text{Cov}[A_i, B_i] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Если, кроме того, процессы $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ некоррелированы, то

$$\begin{aligned} \text{Cov}[A_1, A_2] &= 0 = \text{Cov}[B_1, B_2], \\ \text{Cov}[A_1, B_2] &= 0 = \text{Cov}[B_1, A_2]. \end{aligned} \quad (9.1.7)$$

Моменты выборочного коспектра и квадратурного спектра. С помощью этих формул можно вывести моменты выборочного

коспектра и квадратурного спектра. Например, с помощью (9.1.3) и (9.1.7) получаем

$$E[L_{12}(f)] = \frac{1}{T} \{E[A_1 A_2] + E[B_1 B_2]\} = 0,$$

а с помощью (9.1.6) —

$$\begin{aligned} \text{Var}[L_{12}(f)] &= \frac{1}{T^2} E[A_1^2 A_2^2 + B_1^2 B_2^2 + 2B_1 B_2 A_1 A_2] = \\ &= \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\sigma_2^2}{2} + 0 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$E[Q_{12}(f)] = 0,$$

$$\text{Var}[Q_{12}(f)] = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2},$$

$$\text{Cov}[L_{12}(f), Q_{12}(f)] = 0.$$

Можно показать, что $L_{12}(f)$ и $Q_{12}(f)$ некоррелированы с $C_{11}(f)$ и $C_{22}(f)$. Поэтому ковариационная матрица оценок $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $L_{12}(f)$ и $Q_{12}(f)$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \sigma_1^2 \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sigma_1^2 \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \quad (9.1.8)$$

Распределение оценок, соответствующих выборочному взаимному амплитудному спектру. Случайная оценка, соответствующая выборочному взаимному амплитудному спектру, по определению равна $A_{12}(f) = |C_{12}(f)|$, так что ее квадрат, используя (9.1.1), можно записать в виде

$$A_{12}^2(f) = |C_{12}(f)|^2 = L_{12}^2(f) + Q_{12}^2(f) = \left(\frac{|Z_1(f)|^2}{T}\right) \left(\frac{|Z_2(f)|^2}{T}\right) = C_{11}(f) C_{22}(f).$$

Удобнее сейчас ввести случайную величину

$$Y^2(f) = \frac{4A_{12}^2(f)}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = \left(\frac{2C_{11}(f)}{\sigma_1^2}\right) \left(\frac{2C_{22}(f)}{\sigma_2^2}\right) = UV.$$

Используя независимость процессов $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ и тот факт, что $C_{11}(f)$ с точностью до множителя имеет χ^2 -распределение (разд. 6.3.3), получаем, что случайная величина $Y^2(f)$ равна произведению двух независимых величин U , V , имеющих

χ^2 -распределение с двумя степенями свободы. Отсюда с помощью (3.3.6) получаем

$$\begin{aligned} E[Y^2(f)] &= E[U]E[V] = 4, \\ E[Y^4(f)] &= E[U^2]E[V^2] = (8)(8) = 64. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y^2(f)] &= 48, \\ E[A_{12}^2(f)] &= \left(\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{4}\right)E[Y^2(f)] = \sigma_1^2\sigma_2^2 \end{aligned} \quad (9.1.9)$$

и

$$\text{Var}[A_{12}^2(f)] = \left(\frac{\sigma_1^4\sigma_2^4}{16}\right)\text{Var}[Y^2(f)] = 3\sigma_1^4\sigma_2^4.$$

Отметим, что, в то время как дисперсия выборочного спектра равна квадрату его среднего значения, дисперсия выборочного взаимного амплитудного спектра равна утроенному квадрату своего среднего значения. Это увеличение дисперсии произошло из-за того, что при оценке амплитудного спектра изменчивость создается двумя процессами, а не одним.

Распределение оценки, соответствующей выборочному фазовому спектру. Из (9.1.3) и (9.1.4) получаем случайную оценку, соответствующую выборочному фазовому спектру:

$$F_{12}(f) = \arctg\left[-\frac{Q_{12}(f)}{L_{12}(f)}\right] = \arctg\left[-\frac{B_2A_1 - B_1A_2}{A_1A_2 + B_1B_2}\right].$$

Рассмотрим теперь случайную величину $L_{12}(f)$. Случайные величины A_i, B_i распределены по нормальному закону, так что область изменения величины $A_1A_2 + B_1B_2$ простирается от $-\infty$ до $+\infty$ и, следовательно, ее естественно аппроксимировать с помощью нормального распределения. Аналогичные соображения применимы и к случайной величине $Q_{12}(f)$. Таким образом, можно считать, что $L_{12}(f)$ и $Q_{12}(f)$ распределены приблизительно нормально, независимо друг от друга и с одинаковой дисперсией. Отсюда $F_{12}(f)$ имеет приблизительно равномерное распределение на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Мы воспользуемся этим фактом в следующем разделе при выводе критерия корреляции двух временных рядов.

9.1.2. Критерии корреляции двух временных рядов

Часто встречаются ситуации, когда бывает нужно проверить, коррелированы два временных ряда или нет. Например, может возникнуть необходимость проверки корреляции двух управляющих переменных или остаточных шумов двух экономических временных рядов после подгонки соответствующей модели. Из

разд. 8.2.2 следует, что если оба временных ряда профильтровать так, чтобы они превратились в белые шумы, то для проверки корреляции этих рядов можно будет использовать их выборочную взаимную корреляционную функцию. Однако эта функция полезна лишь для выявления корреляции определенного типа. Например, если коррелированы соседние точки двух временных рядов, то следует ожидать, что выборочная взаимная корреляционная функция будет велика при малых значениях аргумента и мала при больших значениях. С другой стороны, если есть подозрение, что взаимная корреляционная функция содержит гармоническую компоненту, то этого, возможно, нельзя будет выявить с помощью выборочной корреляционной функции. Поэтому нужно построить частотный критерий корреляции двух временных рядов, который был бы обобщением критерия белого шума, приведенного в разд. 6.3.2. Этот частотный критерий следует использовать в сочетании с критерием, основанным на выборочной взаимной корреляционной функции.

Выбор функций для критерия. Обсуждение в разд. 8.4.4 наводит на мысль о том, что в качестве исходных количеств для частотного критерия корреляции двух временных рядов можно было бы использовать случайные функции, соответствующие выборочному спектру когерентности $K_{12}^2(f)$ и выборочному фазовому спектру $F_{12}(f)$. Заметим, однако, что

$$K_{12}^2(f) = \frac{|C_{12}(f)|^2}{C_{11}(f)C_{22}(f)} = \frac{\left| \frac{X_1^*(f)X_2(f)}{T} \right|^2}{\frac{|X_1(f)|^2}{T} \frac{|X_2(f)|^2}{T}} = 1.$$

Таким образом, независимо от того, каков двумерный случайный процесс, выборочный спектр когерентности тождественно равен единице. Следовательно, необходим другой подход, использующий выборочную коспектральную функцию и выборочный фазовый спектр. Эти функции характеризуют два различных типа взаимной корреляции процессов.

1. *Выборочная коспектральная функция (integrated sample cospectrum).* Рассмотрим коспектральную функцию

$$J_{12}(f) = \int_{-f}^f \Lambda_{12}(g) dg,$$

характеризующую полную синфазную ковариацию двух процессов для всех частот, не превосходящих f^*). Тогда оценка $J_{12}(f)$

*) Более естественно в приведенном интеграле положить нижний предел равным $-\infty$. В этом случае определение коспектральной функции соответствовало бы обычному определению спектральной функции. — *Прим. перев.*

определится как случайная величина, соответствующая выборочной коспектральной функции

$$\frac{1}{N\Delta} \sum_{i=0}^k L_{12}(f_i), \quad f_i = \frac{i}{N\Delta}.$$

Удобнее, однако, использовать нормированную оценку

$$\hat{J}_{12}(f_k) = \frac{2}{NS_1S_2\Delta} \sum_{i=0}^k L_{12}(f_i), \quad (9.1.10)$$

где S_1, S_2 — оценки стандартных отклонений двух процессов. Если процессы некоррелированы, то $L_{12}(f)$ тождественно равно нулю и,

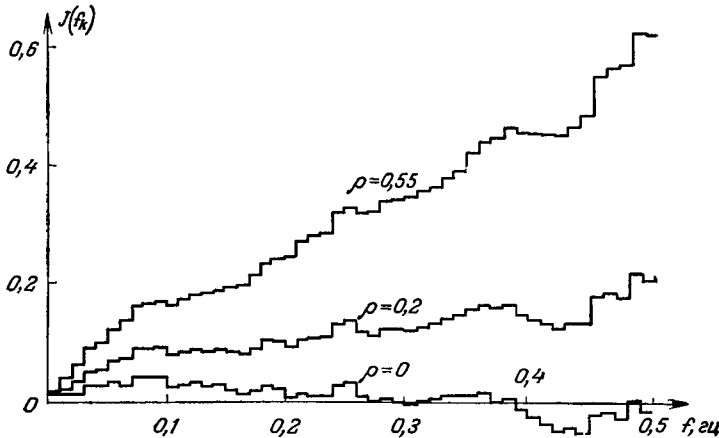


Рис. 9.1. Выборочные коспектральные функции трех двумерных рядов.

следовательно, $\hat{J}_{12}(f_k)$ тождественно равно нулю, но если процессы коррелированы, то $J_{12}(f_k)$ отлично от нуля. Используя (8.3.16), получаем, что из-за нормировки (9.1.10) $\hat{J}_{12}(f_k) = r_{12}(0)$ при $f_k = 1/2\Delta$ гц.

На рис. 9.1 показаны выборочные оценки, соответствующие (9.1.10), сосчитанные по выборке объема $N = 100$ из трех двумерных гауссовских процессов. Эти процессы имели вид

$$\begin{aligned} X_{1t} &= Z_{1t} + aZ_{2t}, \\ X_{2t} &= aZ_{1t} + Z_{2t}, \end{aligned}$$

где Z_1, Z_2 — случайные нормальные числа и a принимало значения 0; 0,1 и 0,3. Таким образом, взаимные корреляции равнялись нулю для всех ненулевых запаздываний, а для нулевого запаздывания $\rho_{12}(0) = 0; 0,20$ и $0,55$ соответственно. На рис. 9.1 видно, что при $\rho_{12}(0) = 0$ выборочная коспектральная функция колеблется около нуля и не указывает на существование корреляции между двумя

процессами. При $\rho_{12}(0) = 0,20$ выборочная коспектральная функция систематически возрастает до значения 0,20 при $f = 0,5$ гц, что говорит о корреляции двух процессов. Так как $J_{12}(1/2\Delta) = r_{12}(0)$, то значение 0,20 при $f = 0,5$ гц является в этом случае хорошей выборочной оценкой величины $\rho_{12}(0) = 0,20$. При $\rho_{12}(0) = 0,55$ корреляция двух рядов становится весьма заметной. Таким образом, поведение трех функций на рис. 9.1 подтверждает то, что используемый критерий очень хорошо обнаруживает корреляцию двух временных рядов. Значения выборочного коспектра и квадратурного спектра для случая $\rho_{12}(0) = 0$ приведены в табл. 9.1. Читатель может воспользоваться ими для вычисления выборочной коспектральной функции, изображенной на рис. 9.1.

Таблица 9.1

Выборочные коспектр и квадратурный спектр для двух некоррелированных белых шумов

| f_k | $L_{12}(f_k)$ | $Q_{12}(f_k)$ | $F_{12}(f_k)$ | f_k | $L_{12}(f_k)$ | $Q_{12}(f_k)$ | $F_{12}(f_k)$ |
|-------|---------------|---------------|---------------|-------|---------------|---------------|---------------|
| 0,01 | 0,08 | 1,53 | 1,52 | 0,26 | -1,20 | -0,47 | 0,39 |
| 0,02 | 0,03 | -1,44 | -1,35 | 0,27 | -0,38 | 0,08 | -0,22 |
| 0,03 | 0,71 | -0,57 | -0,75 | 0,28 | 0,22 | 1,24 | 1,40 |
| 0,04 | -0,10 | -0,78 | 1,44 | 0,29 | -0,21 | 0,05 | -0,22 |
| 0,05 | -0,39 | -1,17 | -1,25 | 0,30 | -0,15 | -0,45 | 1,25 |
| 0,06 | -0,19 | 0,38 | -1,10 | 0,31 | 0,26 | 0,08 | 0,32 |
| 0,07 | 0,63 | 0,81 | 0,91 | 0,32 | 0,12 | -0,14 | -0,89 |
| 0,08 | 0,00 | -0,04 | 1,47 | 0,33 | 0,37 | -0,52 | -0,96 |
| 0,09 | -0,03 | 0,28 | -1,47 | 0,34 | 0,02 | -0,48 | -1,54 |
| 0,10 | -0,79 | -0,15 | 0,19 | 0,35 | 0,01 | 1,11 | 1,56 |
| 0,11 | 0,17 | 0,43 | 1,19 | 0,36 | 0,16 | -0,60 | -1,32 |
| 0,12 | -0,15 | -0,35 | -1,17 | 0,37 | -0,86 | -0,54 | 0,56 |
| 0,13 | -0,27 | 0,18 | -0,57 | 0,38 | 0,39 | 0,31 | 0,67 |
| 0,14 | 0,09 | -0,16 | -1,09 | 0,39 | -1,05 | 0,29 | -0,27 |
| 0,15 | -0,40 | 0,79 | -1,10 | 0,40 | -0,63 | 0,78 | -0,89 |
| 0,16 | -0,42 | 0,78 | -1,08 | 0,41 | -0,50 | -0,45 | 0,73 |
| 0,17 | 0,21 | 0,31 | 0,97 | 0,42 | -0,53 | 0,18 | -0,32 |
| 0,18 | 0,49 | 0,04 | 0,08 | 0,43 | 0,23 | 0,03 | 0,11 |
| 0,19 | -0,15 | -0,76 | 1,38 | 0,44 | -0,41 | 2,42 | -1,40 |
| 0,20 | -0,79 | 1,19 | -0,98 | 0,45 | 1,71 | -1,00 | -0,53 |
| 0,21 | 0,23 | 1,49 | 1,42 | 0,46 | 0,04 | 1,23 | 1,54 |
| 0,22 | -0,08 | -0,31 | 1,31 | 0,47 | -0,52 | -0,25 | 0,45 |
| 0,23 | 0,02 | 0,04 | 1,06 | 0,48 | 1,39 | 1,36 | 0,77 |
| 0,24 | 0,90 | 0,61 | 0,60 | 0,49 | -0,67 | 0,08 | -0,12 |
| 0,25 | 0,21 | 0,21 | 0,78 | 0,50 | 0,10 | -0,91 | 0,00 |

2. *Фазовый спектр.* Другой функцией, которая может указывать на корреляцию двух рядов, является оценка фазового спектра $F_{12}(f)$. В разд. 9.1.1 было показано, что если два процесса некоррелированы, то эта оценка фазового спектра будет распределена приблизительно равномерно в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$.

Следовательно, функция распределения фазового угла будет выглядеть как наклонный отрезок прямой в этом интервале.

Численные значения выборочных оценок фазы для двух белых шумов [случай $\rho_{12}(0) = 0$] приведены в табл. 9.1 вместе с выборочными коспектром и квадратурным спектром. Выборочная функция распределения фазы показана на рис. 9.2. Мы видим, что имеется хорошее согласие между выборочной и теоретической функциями распределения. Чтобы увидеть, значимы ли отклонения от линейности, можно нанести на рисунок 95%-ные доверительные

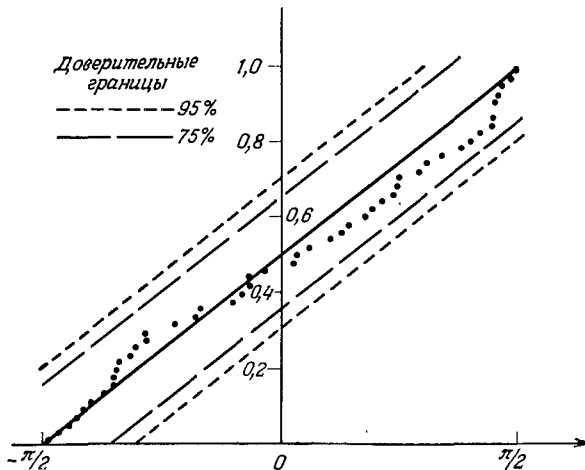


Рис. 9.2. Выборочная функция распределения фазы для одного двумерного процесса.

пределы на расстоянии $\pm 1,36/\sqrt{N/2}$ от теоретической функции распределения и 75%-ные пределы на расстоянии $\pm 1,02/\sqrt{N/2}$.

Мы видим, что выборочная функция распределения лежит целиком внутри этих пределов при $\rho_{12}(0) = 0$. При $\rho_{12}(0) = 0,20$ и $0,55$ выборочная функция распределения также лежит вблизи теоретической прямой. Таким образом, при $\rho_{12}(0) = 0$ ни выборочная коспектральная функция, ни выборочный фазовый спектр не обнаруживают корреляции двух рядов. Когда $\rho_{12}(0) = 0,20$ и $0,55$, поведение выборочной коспектральной функции указывает на корреляцию рядов, но выборочный фазовый спектр ведет себя также, как и в случае некоррелированных рядов. Этого следовало ожидать, так как теоретический фазовый спектр при этом равен нулю. Конечно, в общем случае коррелированные двумерные процессы будут иметь как отличный от нуля коспектр, так и ненулевой фазовый спектр. В таких случаях можно ожидать, что корреляция будет обнаружена как с помощью выборочной коспектральной функции, так и с помощью выборочного фазового спектра.

9.1.3. Общие свойства моментов оценок, соответствующих выборочным взаимным спектрам

В этом разделе мы обобщим результаты разд. 9.1.1 на случай коррелированных процессов, не являющихся белыми шумами. Строгий вывод этих результатов довольно сложен, и мы поместили его в Приложении П9.1. В настоящем же разделе мы воспользуемся эвристическими методами, которые являются обобщением методов, применявшихся в разд. 6.4.1 для одномерных спектров.

Вычисление ковариационной матрицы величин $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $L_{12}(f)$ и $Q_{12}(f)$ для коррелированных негауссовских процессов проводится в три этапа. Сначала вычисляется ковариационная матрица каждой из этих оценок на двух различных частотах для случая негауссовских некоррелированных белых шумов. Затем можно найти ковариационную матрицу величин $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $C_{12}(f)$, $C_{21}(f)$. С помощью этой матрицы можно выписать такую же матрицу, но уже для произвольного двумерного процесса. И наконец, из ковариационной матрицы величин $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $C_{12}(f)$, $C_{21}(f)$ получается ковариационная матрица величин $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $L_{12}(f)$, $Q_{12}(f)$ для произвольного процесса.

Обобщенная ковариационная матрица взаимных спектральных оценок для некоррелированных белых шумов. Формулы разд. 9.1.1 были выведены для гармонических частот $f_m = m/T$ и для некоррелированных гауссовских белых шумов. В Приложении П9.1 аналогичные формулы получены в более общем случае: для всех частот и для некоррелированных, негауссовских белых шумов. Из этих формул следует, что

$$\begin{aligned} E[L_{12}(f)] &= \Lambda_{12}(f) = 0, \\ E[Q_{12}(f)] &= \Psi_{12}(f) = 0. \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

Далее, ковариации оценок $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $L_{12}(f)$, $Q_{12}(f)$ на двух частотах f_1 и f_2 можно получить из матрицы

$$\begin{pmatrix} W_0 K_4^{(1)} + \sigma_1^4 \{W^2(-) + W^2(+)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_0 K_4^{(2)} + \sigma_2^4 \{W^2(-) + W^2(+)\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2} \{W^2(-) + W^2(+)\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2} \{W^2(-) + W^2(+)\} \end{pmatrix}. \quad (9.1.12)$$

Например, элемент из первой строки и первого столбца равен $\text{Cov}[C_{11}(f_1), C_{11}(f_2)]$, элемент из первой строки и второго столбца равен $\text{Cov}[C_{11}(f_1), C_{22}(f_2)]$ и т. д. Матрица (9.1.12) называется *обобщенной ковариационной матрицей* оценок. При $f_1 = f_2 = f$ она переходит в обычную ковариационную матрицу величин $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $L_{12}(f)$ и $Q_{12}(f)$. В (9.1.12) использованы следующие обозначения: $W_0 = \Delta^2/N$ и

$$W(-) = \frac{\Delta \sin \pi N \Delta (f_1 - f_2)}{N \sin \pi \Delta (f_1 - f_2)}, \quad W(+) = \frac{\Delta \sin \pi N \Delta (f_1 + f_2)}{N \sin \pi \Delta (f_1 + f_2)} \quad (9.1.13)$$

для дискретных процессов. Аналогичным образом $W_0 = 1/T$ и

$$W(-) = \frac{\sin \pi T (f_1 - f_2)}{\pi T (f_1 - f_2)}, \quad W(+) = \frac{\sin \pi T (f_1 + f_2)}{\pi T (f_1 + f_2)} \quad (9.1.14)$$

для непрерывных процессов. Буквами $K_4^{(1)}$ и $K_4^{(2)}$ обозначены четвертые кумулянты процессов $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ соответственно (для гауссовских процессов они равны нулю).

Из (9.1.12) видно, что каждая из спектральных оценок некоррелирована с любой другой оценкой на одной и той же или на разных частотах. Кроме того, значения любой из этих оценок на достаточно разнесенных частотах также некоррелированы. Отметим, что при $f_1 = f_2$ дисперсии оценок не зависят от T — длины записи. В этом смысле взаимные спектральные оценки обладают теми же нежелательными свойствами, что и оценки автоспектров. Отметим еще, что ковариации оценок коспектра и квадратурного спектра не содержат членов с четвертым кумулянтном, так что они всегда имеют порядок $1/T^2$ для больших $|f_1 - f_2|$.

Обобщенная ковариационная матрица величин $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $C_{12}(f)$, $C_{21}(f)$. Поскольку

$$C_{12}(f) = L_{12}(f) - jQ_{12}(f),$$

$$C_{21}(f) = L_{12}(f) + jQ_{12}(f),$$

ковариационную матрицу величин C_{11} , C_{22} , C_{12} и C_{21} нетрудно получить из матрицы (9.1.12). Например,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{12}(f_1), C_{21}(f_2)] &= E[(L_{12}(f_1) - jQ_{12}(f_1))(L_{12}(f_2) + jQ_{12}(f_2))] = \\ &= \text{Cov}[L_{12}(f_1), L_{12}(f_2)] + \text{Cov}[Q_{12}(f_1), Q_{12}(f_2)] = \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(-). \end{aligned}$$

Окончательное выражение для обобщенной ковариационной матрицы величин $C_{11}(f)$, $C_{22}(f)$, $C_{12}(f)$, $C_{21}(f)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} W_0 K_4^{(1)} + & & & \\ +\sigma_1^4 \{W^2(-) + W^2(+)\} & 0 & 0 & 0 \\ & W_0 K_4^{(2)} + & & \\ 0 & +\sigma_2^4 \{W^2(-) + W^2(+)\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(+), \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(-) & \\ 0 & 0 & \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(-), \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(+). & \end{pmatrix} \quad (9.1.15)$$

Мы воспользуемся сейчас этим выражением, чтобы получить ковариационную матрицу взаимных спектральных оценок для процессов, отличных от белого шума. Отметим, что если расстояние между частотами f_1 и f_2 не является достаточно малой величиной, то все эти ковариации приблизительно равны нулю.

Обобщенная ковариационная матрица взаимных спектральных оценок для произвольных процессов. Воспользуемся теперь тем, что двумерный случайный процесс с произвольными спектрами мощности $\Gamma_{11}(f)$, $\Gamma_{22}(f)$, $\Gamma_{12}(f)$ можно получить, пропуская два процесса белого шума через цепь, состоящую из четырех линейных систем (разд. 8.1.4). Таким образом, беря преобразования Фурье от равенств (8.1.14) и делая те же приближения, что и в (6.4.3), получаем

$$\begin{aligned} X_1(f) &\approx H_{11}(f) Z_{1T}(f) + H_{12}(f) Z_{2T}(f), \\ X_2(f) &\approx H_{21}(f) Z_{1T}(f) + H_{22}(f) Z_{2T}(f), \end{aligned}$$

где $Z_{iT}(f)$ — преобразование Фурье от $Z_i(t)$ на интервале $-T/2 \leq t \leq T/2$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} C_{11}(f) &\approx |H_{11}(f)|^2 C_{Z_1 Z_1}(f) + |H_{12}(f)|^2 C_{Z_2 Z_2}(f) + \\ &+ H_{11}^*(f) H_{12}(f) C_{Z_1 Z_2}(f) + H_{11}(f) H_{12}^*(f) C_{Z_2 Z_1}(f), \quad (9.1.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{22}(f) &\approx |H_{21}(f)|^2 C_{Z_1 Z_1}(f) + |H_{22}(f)|^2 C_{Z_2 Z_2}(f) + \\ &+ H_{21}^*(f) H_{22}(f) C_{Z_1 Z_2}(f) + H_{21}(f) H_{22}^*(f) C_{Z_2 Z_1}(f), \quad (9.1.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12}(f) &\approx H_{11}^*(f) H_{21}(f) C_{Z_1 Z_1}(f) + H_{12}^*(f) H_{22}(f) C_{Z_2 Z_2}(f) + \\ &+ H_{11}^*(f) H_{22}(f) C_{Z_1 Z_2}(f) + H_{12}^*(f) H_{21}(f) C_{Z_2 Z_1}(f). \quad (9.1.18) \end{aligned}$$

Следовательно, воспользовавшись (8.4.17), мы будем иметь

$$E[C_{11}(f)] \approx |H_{11}(f)|^2 \sigma_1^2 + |H_{12}(f)|^2 \sigma_2^2 = \Gamma_{11}(f), \quad (9.1.19)$$

$$E[C_{22}(f)] \approx |H_{21}(f)|^2 \sigma_1^2 + |H_{22}(f)|^2 \sigma_2^2 = \Gamma_{22}(f), \quad (9.1.20)$$

$$E[C_{12}(f)] \approx H_{11}^*(f) H_{21}(f) \sigma_1^2 + H_{12}^*(f) H_{22}(f) \sigma_2^2 = \Gamma_{12}(f). \quad (9.1.21)$$

Ковариационная матрица величин $C_{ij}(f)$ легко получается из равенств (9.1.16) — (9.1.18) и из ковариационной матрицы (9.1.15). Например, учитывая, что ковариационная матрица приблизительно равна нулю для всех частот, кроме $f_1 \approx f_2$, получаем из (9.1.16) и (9.1.17)

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{11}(f_1), C_{22}(f_2)] \approx & |H_{11}(f_1)|^2 |H_{21}(f_2)|^2 \sigma_1^4 \{W^2(-) + W^2(+)\} + \\ & + |H_{12}(f_1)|^2 |H_{22}(f_2)|^2 \sigma_2^4 \{W^2(-) + W^2(+)\} + \\ & + H_{11}^*(f_1) H_{12}(f_1) H_{21}^*(f_2) H_{22}(f_2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(+)+ \\ & + H_{11}^*(f_1) H_{12}(f_1) H_{21}(f_2) H_{22}^*(f_2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(-)+ \\ & + H_{11}(f_1) H_{12}^*(f_1) H_{21}^*(f_2) H_{22}(f_2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(-)+ \\ & + H_{11}(f_1) H_{12}^*(f_1) H_{21}(f_2) H_{22}^*(f_2) \sigma_1^2 \sigma_2^2 W^2(+). \end{aligned}$$

Члены $W^2(+)$ малы по сравнению с $W^2(-)$, и ими можно пренебречь. Воспользовавшись для $f_1 \approx f_2$ приближенным равенством $H_{ij}(f_2) \approx H_{ij}(f_1)$ и записывая $H_{ij}(f_1)$ в виде H_{ij} , получаем

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{11}(f_1), C_{11}(f_2)] \approx & \{|H_{11}|^2 |H_{21}|^2 \sigma_1^4 + |H_{12}|^2 |H_{22}|^2 \sigma_2^4 + \\ & + (H_{11}^* H_{12} H_{21} H_{22}^* + H_{11} H_{12}^* H_{21}^* H_{22}) \sigma_1^2 \sigma_2^2\} W^2(-) = |\Gamma_{12}(f_1)|^2 W^2(-). \end{aligned}$$

Поэтому, опуская аргумент f_i , обобщенную ковариационную матрицу величин C_{11} , C_{22} , L_{12} и Q_{12} на частотах f_1 и f_2 ($f_1 \approx f_2$) для произвольного процесса можно записать в виде

$$W^2(-) \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^2 & |\Gamma_{12}|^2 & \Gamma_{11}\Lambda_{12} & \Gamma_{11}\Psi_{12} \\ |\Gamma_{12}|^2 & \Gamma_{22}^2 & \Gamma_{22}\Lambda_{12} & \Gamma_{22}\Psi_{12} \\ \Gamma_{11}\Lambda_{12} & \Gamma_{22}\Lambda_{12} & \frac{1}{2} \{\Gamma_{11}\Gamma_{22} + \Lambda_{12}^2 - \Psi_{12}^2\} & \Lambda_{12}\Psi_{12} \\ \Gamma_{11}\Psi_{12} & \Gamma_{22}\Psi_{12} & \Lambda_{12}\Psi_{12} & \frac{1}{2} \{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Lambda_{12}^2 + \Psi_{12}^2\} \end{pmatrix}. \quad (9.1.22)$$

Выражение (9.1.22) для ковариационной матрицы спектральных оценок приведено в [1, 2]. Оно справедливо для очень малых значений $||f_1| - |f_2||$. Если разность частот больше $1/T$, то эти ковариации приблизительно равны нулю. Более строгий вывод этих формул приводится в Приложении П9.1. Отметим одно обстоя-

тельство, которое нам пригодится впоследствии: $W^2(-)$ стремится к $\frac{1}{T} \delta(f_1 - f_2)$ для непрерывных процессов и к $\frac{1}{N\Delta} \delta(f_1 - f_2)$ для дискретных процессов при очень больших T .

9.2. СВОЙСТВА СГЛАЖЕННЫХ ОЦЕНОК ВЗАИМНЫХ СПЕКТРОВ

9.2.1. Сглаженные оценки взаимных спектров

В разд. 9.1.3 было показано, что выборочные оценки взаимных спектров обладают тем же нежелательным свойством, что и выборочный автоспектр: главный член их дисперсии не стремится к нулю с увеличением длины записи. Поэтому оценки взаимных спектров необходимо сгладить с помощью спектрального окна точно так же, как нужно было сгладить оценки автоспектров.

Сглаженная оценка взаимного спектра определяется следующим образом:

$$\bar{C}_{12}(f) = \int_{-T}^T \omega(u) c_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du, \quad (9.2.1)$$

где корреляционное окно $\omega(u)$ обладает обычными свойствами (6.3.29). Разлагая $c_{12}(u)$ на четную и нечетную части [см. (8.3.19), (8.3.20)], получаем

$$\begin{aligned} \bar{C}_{12}(f) &= \int_{-T}^T \omega(u) l_{12}(u) \cos 2\pi fu du - j \int_{-T}^T \omega(u) q_{12}(u) \sin 2\pi fu du = \\ &= \bar{L}_{12}(f) - j\bar{Q}_{12}(f), \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

где $\bar{L}_{12}(f)$ и $\bar{Q}_{12}(f)$ — сглаженные оценки коспектра и квадратурного спектра.

Математическое ожидание сглаженных оценок взаимных спектров. Оценка, соответствующая выборочному взаимному спектру $C_{12}(f)$, определяется следующим образом:

$$C_{12}(f) = \int_{-T}^T c_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du.$$

Ее математическое ожидание можно найти с помощью (8.3.21)

$$E[C_{12}(f)] = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du.$$

Последнее выражение можно переписать в виде

$$E[C_{12}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} T \left(\frac{\sin \pi T g}{\pi T g} \right)^2 \Gamma_{12}(f-g) dg \approx \Gamma_{12}(f). \quad (9.2.3)$$

Приближенное равенство в (9.2.3) справедливо из-за того, что при большом T спектральное окно становится очень узким. Таким образом, с хорошей степенью приближения можно считать, что $C_{12}(f)$ является несмещенной оценкой $\Gamma_{12}(f)$. Взяв математическое ожидание от обеих частей (9.2.1) и воспользовавшись равенствами (8.3.21) и (9.2.3), получим среднее значение сглаженной оценки взаимного спектра:

$$\begin{aligned} E[\bar{C}_{12}(f)] &= \int_{-T}^T \omega(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \gamma_{12}(u) e^{-i2\pi fu} du \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \Gamma_{12}(f-g) dg = \bar{\Gamma}_{12}(f). \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

Функцию $\bar{\Gamma}_{12}(f)$ назовем *средним сглаженным взаимным спектром*. Так как $E[\bar{C}_{12}(f)] = E[\bar{L}_{12}(f)] - jE[\bar{Q}_{12}(f)]$, то средние сглаженные коспектры и квадратурный спектр можно записать в виде

$$\begin{aligned} E[\bar{L}_{12}(f)] &= \int_{-T}^T \omega(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \lambda_{12}(u) \cos 2\pi fu du \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \Lambda_{12}(f-g) dg = \bar{\Lambda}_{12}(f) \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

и

$$\begin{aligned} E[\bar{Q}_{12}(f)] &= \int_{-T}^T \omega(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \psi_{12}(u) \sin 2\pi fu du \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \Psi_{12}(f-g) dg = \bar{\Psi}_{12}(f). \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

Равенства (9.2.4)–(9.2.6) по виду похожи на равенства (6.3.35)–(6.3.37) для математического ожидания оценки автоспектра. Однако имеется и существенное отличие, состоящее в том, что автоковариационная функция $\gamma_{11}(u)$ в (6.3.37) является четной. Поэтому можно ожидать, что если $|\gamma_{11}(u)| \rightarrow 0$ достаточно быстро при $u \rightarrow \infty$, то смещение $B_{11}(f) = \bar{\Gamma}_{11}(f) - \Gamma_{11}(f)$ также будет стремиться к нулю весьма быстро с увеличением значения M точки отсечения корреляционного окна. Для оценки взаимного спектра

ситуация меняется, так как взаимная корреляционная функция не является четной. Таким образом, в том крайнем случае, когда один процесс в точности повторяет другой, но с некоторой задержкой τ во времени, взаимная корреляционная функция будет равна автокорреляционной функции, сдвинутой по времени на величину τ . Из-за этого среднее значение (9.2.4) сглаженной оценки взаимного спектра будет иметь заметное смещение, если точка отсечения M меньше задержки τ . При этом, если τ велико, то при $u = \tau$ значения корреляционного окна $w(u)$ будут малы. Поэтому для того, чтобы смещение было невелико, потребуются очень большие значения точек отсечения. Мы продемонстрируем этот эффект в разд. 9.3. Там же будет показано, что от такого нежелательного эффекта можно избавиться с помощью *выравнивания* двух рядов, после которого их взаимная корреляционная функция принимает максимальное значение при малом значении аргумента.

Ковариационная матрица сглаженных оценок взаимных спектров и автоспектров. Используя свойство свертки (П2.1.8), сглаженную оценку взаимного спектра (9.2.1) можно записать в другом виде:

$$\bar{C}_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{12}(f-g) W(g) dg. \quad (9.2.7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_2)] &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Cov}[C_{ij}(f_1-g), C_{kl}(f_2-h)] W(g) W(h) dg dh. \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

Ковариационную матрицу сглаженных спектральных оценок можно вывести с помощью матрицы (9.1.22). Например, для больших T из (9.1.22) следует, что

$$\text{Cov}[C_{11}(f_1), C_{22}(f_2)] \approx |\Gamma_{12}(f_1)|^2 \frac{\delta(f_1 - f_2)}{T}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{C}_{11}(f_1), \bar{C}_{22}(f_2)] &\approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{12}(f_1-g)|^2 \frac{\delta(f_1 - f_2 - g + h)}{T} W(g) W(h) dg dh = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma_{12}(f_1-g)|^2}{T} W(g) W(f_2 + g - f_1) dg. \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

Предполагая, что $\Gamma_{12}(f)$ мало меняется в полосе спектрального окна, и делая в (9.2.9) замену $f_1 - g = h$, получаем

$$\text{Cov}[\bar{C}_{11}(f_1), \bar{C}_{22}(f_2)] \approx \frac{|\Gamma_{12}(f_1)|^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1 - h) W(f_2 - h) dh. \quad (9.2.10)$$

При $f_1 = f_2 = f$ равенство (9.2.10) сводится с помощью (6.4.13) к

$$\text{Cov}[\bar{C}_{11}(f), \bar{C}_{22}(f)] \approx \frac{|\Gamma_{12}(f)|^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(g) dg = |\Gamma_{12}(f)|^2 \frac{1}{T}. \quad (9.2.11)$$

Аналогичные выражения можно получить и для других спектральных оценок.

Таким образом, эффект сглаживания состоит в уменьшении дисперсий и ковариаций несглаженных оценок в $1/T$ раз. Следовательно, ковариационная матрица сглаженных оценок получается из ковариационной матрицы (9.1.22) несглаженных оценок с помощью замены множителя $W^2(-)$ на $1/T$. Более строгий вывод этих результатов приведен в приложении П9.1.

Сама ковариационная матрица сглаженных спектральных оценок непосредственно не представляет особого интереса. Она нужна лишь как промежуточная ступень при выводе ковариационной матрицы сглаженных оценок взаимного амплитудного спектра, спектра когерентности и фазового спектра. Эта последняя матрица выводится в следующем разделе.

9.2.2. Сглаженные оценки взаимного амплитудного и фазового спектров и квадрата спектра когерентности

Как показано в разд. 8.4.4 для описания корреляции двух случайных процессов, в частотной области можно воспользоваться их взаимным амплитудным и фазовым спектрами. Однако удобнее взять квадрат спектра когерентности и фазовый спектр.

Имеется несколько способов определения сглаженных оценок этих спектров. Один простой способ состоит в том, чтобы в теоретические выражения для этих спектров подставить сглаженные оценки коспектра и квадратурного спектра. В результате с помощью (8.3.28) сглаженная оценка взаимного амплитудного спектра будет иметь вид

$$\bar{A}_{12}(f) = \sqrt{\bar{L}_{12}^2(f) + \bar{Q}_{12}^2(f)}. \quad (9.2.12)$$

Аналогично с помощью (8.3.29) можно определить сглаженную оценку фазового спектра

$$\bar{F}_{12}(f) = \arctg\left(-\frac{\bar{Q}_{12}(f)}{\bar{L}_{12}(f)}\right). \quad (9.2.13)$$

Наконец, пользуясь равенством (8.4.18), определяем сглаженную оценку квадрата спектра когерентности

$$\bar{K}_{12}^2(f) = \frac{\bar{L}_{12}^2(f) + \bar{Q}_{12}^2(f)}{\bar{C}_{11}(f) \bar{C}_{22}(f)}. \quad (9.2.14)$$

Заметим, что, даже если бы оценки $\bar{L}_{12}(f)$ и $\bar{Q}_{12}(f)$ были несмещенные, оценки (9.2.12)—(9.2.14) все равно имели бы смещение. Однако это смещение было бы мало по сравнению со смещением, вызванным стеснением концов взаимной корреляционной функции и ее несимметричностью относительно нуля. Поэтому можно считать, что среднеквадратичная ошибка из-за этого не увеличится. Так как все оценки (9.2.12)—(9.2.14) являются нелинейными функциями от оценок $\bar{L}_{12}(f)$, $\bar{Q}_{12}(f)$, $\bar{C}_{11}(f)$, $\bar{C}_{22}(f)$, то для нахождения их моментов нужно разложить эти нелинейные функции в ряд Тейлора, как показано в разд. 3.2.5 и в [2]. В качестве примера найдем среднее значение и дисперсию сглаженной оценки взаимного амплитудного спектра (9.2.12).

Для удобства записи опустим аргумент f , так что (9.2.12) запишется в виде

$$\bar{A}_{12} = \sqrt{\bar{L}_{12}^2 + \bar{Q}_{12}^2}.$$

Рассмотрим теперь малые возмущения $\delta\bar{L}_{12}$ и $\delta\bar{Q}_{12}$ около математических ожиданий $E[\bar{L}_{12}] = \Lambda_{12}$, $E[\bar{Q}_{12}] = \Psi_{12}$, с помощью которых можно записать

$$\begin{aligned} \bar{L}_{12} &= \Lambda_{12} + \delta\bar{L}_{12}, \\ \bar{Q}_{12} &= \Psi_{12} + \delta\bar{Q}_{12}, \\ E[\delta\bar{L}_{12}] &= 0 = E[\delta\bar{Q}_{12}]. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} E[\delta\bar{L}_{12}^2] &= \text{Var}[\bar{L}_{12}], \\ E[\delta\bar{Q}_{12}^2] &= \text{Var}[\bar{Q}_{12}], \\ E[\delta\bar{L}_{12} \delta\bar{Q}_{12}] &= \text{Cov}[\bar{L}_{12}, \bar{Q}_{12}]. \end{aligned}$$

Разлагая (9.2.12) в ряд Тейлора, имеем

$$\bar{A}_{12} = \sqrt{(\Lambda_{12} + \delta\bar{L}_{12})^2 + (\Psi_{12} + \delta\bar{Q}_{12})^2} \approx \alpha_{12} \left(1 + \frac{\Lambda_{12} \delta\bar{L}_{12} + \Psi_{12} \delta\bar{Q}_{12}}{\alpha_{12}^2} \right).$$

Отсюда

$$E[\bar{A}_{12}] \approx \alpha_{12}, \quad (9.2.15)$$

$$\text{Var}[\bar{A}_{12}] \approx \frac{\Lambda_{12}^2 \text{Var}[\bar{L}_{12}] + \Psi_{12}^2 \text{Var}[\bar{Q}_{12}] + 2\Lambda_{12}\Psi_{12} \text{Cov}[\bar{L}_{12}, \bar{Q}_{12}]}{\alpha_{12}^2}. \quad (9.2.16)$$

Заменяя в ковариационной матрице (9.1.22) $W^2(-)$ на $1/T$, получаем

$$\begin{aligned}\text{Var}[\bar{L}_{12}] &\approx \frac{I}{2T} \{\Gamma_{11}\Gamma_{22} + \Lambda_{12}^2 - \Psi_{12}^2\}, \\ \text{Var}[\bar{Q}_{12}] &\approx \frac{I}{2T} \{\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Lambda_{12}^2 + \Psi_{12}^2\}, \\ \text{Cov}[\bar{L}_{12}, \bar{Q}_{12}] &\approx \frac{I}{T} \Lambda_{12}\Psi_{12}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (9.2.16), находим дисперсию *сглаженной оценки взаимного амплитудного спектра*

$$\text{Var}[\bar{A}_{12}] \approx \frac{I}{2T} \alpha_{12}^2 \left(1 + \frac{1}{\kappa_{12}^2}\right). \quad (9.2.17)$$

Заметим, что, когда процессы X_1 и X_2 одинаковые, $\bar{A}_{12} = \bar{C}_{11}$, $\alpha_{12} = \Gamma_{11}$ и $\kappa_{12}^2 = 1$. Следовательно, в этом случае (9.2.17) имеет вид

$$\text{Var}[\bar{C}_{11}] \approx \frac{I}{T} \Gamma_{11}^2,$$

что совпадает с формулой (6.4.13), полученной ранее. Аналогичным образом можно получить формулы для дисперсий и ковариаций оценок \bar{A}_{12} , \bar{F}_{12} и \bar{K}_{12} . Они будут следующими.

Дисперсия *сглаженной оценки спектра когерентности и его квадрата*

$$\text{Var}[|\bar{K}_{12}|] \approx \frac{I}{2T} (1 - \kappa_{12}^2)^2, \quad (9.2.18)$$

$$\text{Var}[\bar{K}_{12}^2] \approx \frac{I}{2T} 4\kappa_{12}^2 (1 - \kappa_{12}^2)^2. \quad (9.2.19)$$

Дисперсия *сглаженной оценки фазового спектра*

$$\text{Var}[\bar{F}_{12}] \approx \frac{I}{2T} \left(\frac{1}{\kappa_{12}^2} - 1\right). \quad (9.2.20)$$

Отметим, что эти дисперсии не зависят от теоретической функции фазового спектра.

Свойства ковариаций:

$$\begin{aligned}\text{Cov}[\bar{F}_{12}, \bar{A}_{12}] &\approx 0, \\ \text{Cov}[\bar{F}_{12}, \bar{K}_{12}^2] &\approx 0.\end{aligned} \quad (9.2.21)$$

Полученными формулами мы воспользуемся в следующем разделе при выводе доверительных интервалов для фазового спектра и спектра когерентности.

9.2.3. Доверительные интервалы для квадрата спектра когерентности и для фазового спектра

В этом разделе мы обсудим некоторые практические применения формул, выведенных в разд. 9.2.2, и используем их при построении доверительных интервалов для спектра когерентности и фазового спектра.

Из формул (9.2.17) — (9.2.20) видно, что дисперсии этих оценок зависят от фактора сглаживания $1/T$, которым можно управлять с помощью стягивания окна, и от спектра когерентности $\kappa_{12}^2(f)$ двух процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$:

Кроме того, мы видим, что во всех случаях, кроме (9.2.17), дисперсия оценки равна нулю, когда коэффициент когерентности равен единице, и возрастает, когда этот коэффициент стремится к нулю. В действительности дисперсии оценок взаимного амплитудного и фазового спектров стремятся к бесконечности, когда коэффициент когерентности обращается в нуль. Этого следовало ожидать, так как малые значения когерентности соответствуют большому уровню шумов и, следовательно, неэффективной оценке. Таким образом, мы получаем важный практический вывод: *выборочные свойства оценок фазового и взаимного амплитудного спектров могут зависеть в большей степени от спектра когерентности, которым мы не можем распоряжаться, чем от находящегося в нашем распоряжении фактора сглаживания $1/T$.*

Доверительные интервалы для спектра когерентности. Из свойства ковариаций (9.2.21) следует, что оценки фазы и когерентности некоррелированы, и, следовательно, доверительные интервалы для соответствующих спектров можно строить по отдельности. Формула (9.2.18) для дисперсии величины $|\bar{K}_{12}(f)|$ похожа, если не учитывать эффект сглаживания, на формулу для дисперсии обычного коэффициента корреляции. Поэтому можно применить z -преобразование Фишера [3]. Таким образом, с помощью (3.2.28) получаем, что оценка

$$\bar{Y}_{12}(f) = \text{Arth} [|\bar{K}_{12}|] = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |\bar{K}_{12}|}{1 - |\bar{K}_{12}|}$$

имеет дисперсию

$$\text{Var} [\bar{Y}_{12}(f)] \approx \frac{1}{2T}, \quad (9.2.22)$$

не зависящую от частоты. Это наводит на мысль о том, что лучше строить график выборочной оценки величины $\bar{Y}_{12}(f)$, чем график самого коэффициента когерентности, поскольку для этой величины доверительный интервал будет постоянным.

Чтобы получить этот доверительный интервал, естественно предположить, что случайная величина $\bar{Y}_{12}(f)$ имеет приближенно

нормальное распределение. В таком случае приблизительный $100(1 - \alpha)\%$ -ый доверительный интервал для $\text{Arth } \kappa_{12}(f)$ имеет вид

$$\bar{y}_{12}(f) \pm \eta \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\frac{I}{2T}}. \quad (9.2.23)$$

Предположим, например, что наблюдаемая величина коэффициента когерентности $|K_{12}(f)| = 0,8$ и что $I/2T = 0,09$. Тогда $\bar{y}_{12}(f) = 1,099$ и 95% -ый доверительный интервал для $\text{Arth } [\bar{x}_{12}(f)]$ имеет вид $1,099 \pm 1,96 \sqrt{0,09}$, т. е. (0,511; 1,687).

Возвращаясь к исходным величинам, получаем 95% -ый доверительный интервал для $\kappa_{12}^2(f)$: (0,22; 0,87). Для практических целей удобнее построить график преобразованного спектра когерентности Y и затем нанести на этот график постоянный доверительный интервал (9.2.23). Примеры преобразованного коэффициента когерентности будут приведены в разд. 9.3.

Доверительные интервалы для фазового спектра. Приближенное распределение для оценки фазы получить труднее, чем для оценки когерентности. В [1] получено довольно точное приближение распределения этой оценки, но оно очень громоздко. Однако можно воспользоваться формулой (9.2.20), чтобы получить грубые доверительные интервалы для фазового спектра [2]. Более точные совместные интервалы для усиления и фазового сдвига будут даны в гл. 10.

В разд. 9.1.1 было показано, что если истинный коэффициент когерентности равен нулю, то оценка, соответствующая выборочному фазовому спектру, распределена равномерно на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Далее, формула (9.2.20) показывает, что влияние сглаживания сводится к уменьшению дисперсии оценки фазы. Поэтому следует ожидать, что сглаживание приведет к тому, что распределение оценки фазы будет сосредоточено в более узком интервале, чем $(-\pi/2, \pi/2)$. Чтобы упростить задачу, желательно найти такое преобразование фазы, чтобы преобразованная величина имела приблизительно нормальное распределение. Мы предлагаем преобразование $\text{tg } \bar{F}_{12}$, так как при этом интервал изменения преобразованной величины будет простирается от $-\infty$ до $+\infty$. С помощью (9.2.20) и (3.2.26) получаем

$$\text{Var} [\text{tg } \bar{F}_{12}] \approx \sec^4 \varphi_{12} \frac{I}{2T} \left(\frac{1}{\kappa_{12}^2} - 1 \right). \quad (9.2.24)$$

Отсюда, аппроксимируя распределение величины $\text{tg } \bar{F}_{12}$ нормальным распределением, получим приближенные $100(1 - \alpha)\%$ -ые доверительные интервалы для $\text{tg } \varphi_{12}$:

$$\text{tg } \bar{F}_{12}(f) \pm \eta \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{\sec^4 \varphi_{12} \frac{I}{2T} \left(\frac{1}{\kappa_{12}^2} - 1 \right)}. \quad (9.2.25)$$

Заметим, что истинные коэффициенты когерентности κ_{12} и фаза φ_{12} в (9.2.24), (9.2.25) неизвестны и их надо заменить на выборочные оценки. Так как из (9.2.20) следует, что дисперсия величины \bar{F}_{12} не зависит от φ_{12} , то можно ожидать, что интервал (9.2.25) после обратного преобразования, переводящего его в интервал для φ_{12} , почти не будет зависеть от φ_{12} .

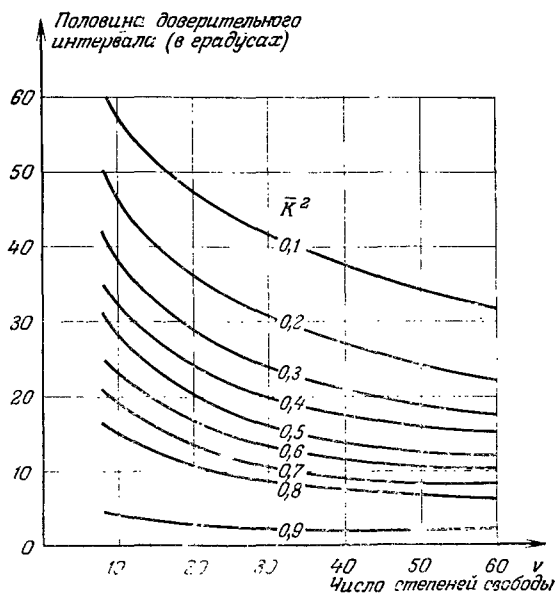


Рис. 9.3. 95%-ные доверительные интервалы для фазового спектра.

На рис. 9.3 показаны 95%-ные доверительные пределы для различного числа степеней свободы выборочной спектральной оценки. Эти значения взяты из [4]. Например, при $\nu = 27$ и $\bar{K}_{12}^2 = 0,5$ получаем доверительный интервал ($\bar{F} \pm 17^\circ$).

9.3. ВЗАИМНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИСКУССТВЕННЫХ РЯДОВ

В этом разделе мы проиллюстрируем понятия, введенные в предыдущих разделах, сравнивая сглаженные выборочные оценки спектров фазы и когерентности искусственных рядов с соответствующими известными теоретическими спектрами. В первом разделе приведены формулы для вычисления дискретных сглаженных выборочных оценок. Раздел 9.3.2 предназначен для того, чтобы

читатель приобрел некоторый опыт в интерпретации выборочных взаимных спектральных оценок. После этого станет ясно, что методы, описанные до настоящего момента, нужно видоизменить, чтобы получить удовлетворительные выборочные спектральные оценки. В разд. 9.3.3 показано, что этого можно добиться с помощью *выравнивания* двух рядов, т. е. сдвига по времени одного ряда относительно другого так, чтобы их взаимная корреляционная функция достигала своего максимального значения при нулевом запаздывании.

9.3.1. Формулы для дискретного оценивания

Формулы для оценивания сглаженных взаимных спектров по дискретным данным аналогичны формулам для автоспектров, описанным в разд. 7.1.1. Как и там, мы предположим, что ряды x_{1t} , x_{2t} , $t = 1, \dots, N$, получены при отсчете по времени с интервалом Δ сек и что выборочные спектральные оценки вычисляются лишь для *положительных частот*. Для удобства записи предположим также, что $\Delta = 1$, так что $0 \leq f \leq 1/2$ *гц*. Если $\Delta \neq 1$, то сосчитанную по приводимым ниже формулам выборочную оценку надо умножить на Δ и построить график ее в интервале частот $0 \leq f \leq 1/2\Delta$ *гц*. Как и в разд. 7.1.1, число запаздываний ковариационных функций, используемых в спектральных оценках, обозначается через L . Сглаженные выборочные спектральные оценки нужно вычислять в точках $0, 1/2F, \dots, 1/2$, где F в два-три раза больше L . Корреляционное окно может быть одним из трех окон, описанных в разд. 7.1.1.

Если присутствуют тренды, то могут получаться ложные связи между рядами. В таких случаях желательно взять первые разности от обоих рядов. Как показано в разд. 8.4.5, операция взятия разностей не изменит теоретические спектры фазы и когерентности. Всюду далее мы будем предполагать, что ковариации относятся либо к исходным рядам, либо к профильтрованным, если это требуется.

Ниже приведены необходимые формулы и указан порядок вычислений.

1. Вычисления для ряда x_{1t} .

а) Выборочная оценка автоковариационной функции

$$c_{11}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_{1t} - \bar{x}_1)(x_{1t+k} - \bar{x}_1), \quad 0 \leq k \leq L-1, \quad (9.3.1)$$

где $\bar{x}_1 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_{1t}$.

б) Сглаженная выборочная спектральная оценка

$$\bar{C}_{11}(i) = 2 \left[c_{11}(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} c_{11}(k) \omega(k) \cos \frac{\pi k i}{F} \right], \quad 0 \leq i \leq F. \quad (9.3.2)$$

2. Вычисления для ряда x_{2t} .

а) Выборочная оценка автоковариационной функции

$$c_{22}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_{2t} - \bar{x}_2)(x_{2t+k} - \bar{x}_2), \quad 0 \leq k \leq L-1, \quad (9.3.3)$$

где $\bar{x}_2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_{2t}$.

б) Сглаженная выборочная спектральная оценка

$$\bar{C}_{22}(i) = 2 \left[c_{22}(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} c_{22}(k) \omega(k) \cos \frac{\pi k i}{F} \right], \quad 0 \leq i \leq F. \quad (9.3.4)$$

3. Совместные вычисления для рядов x_{1t} и x_{2t} .

а) Выборочная оценка взаимной ковариационной функции

$$c_{12}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_{1t} - \bar{x}_1)(x_{2t+k} - \bar{x}_2), \quad 0 \leq k \leq L-1,$$

$$c_{12}(-k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_{1t+k} - \bar{x}_1)(x_{2t} - \bar{x}_2), \quad 0 \leq k \leq L-1. \quad (9.3.5)$$

б) Четная и нечетная части выборочной взаимной ковариационной функции

$$l_{12}(k) = \frac{1}{2} [c_{12}(k) + c_{12}(-k)], \quad 0 \leq k \leq L-1, \quad (9.3.6)$$

$$q_{12}(k) = \frac{1}{2} [c_{12}(k) - c_{12}(-k)], \quad 0 \leq k \leq L-1. \quad (9.3.7)$$

Заметим, что $q_{12}(0) = 0$.

в) Сглаженные выборочные оценки коспектра и квадратурного спектра

$$\bar{L}_{12}(i) = 2 \left[l_{12}(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} l_{12}(k) \omega(k) \cos \frac{\pi i k}{F} \right], \quad 0 \leq i \leq F, \quad (9.3.8)$$

$$\bar{Q}_{12}(i) = 4 \sum_{k=1}^{L-1} q_{12}(k) \omega(k) \sin \frac{\pi i k}{F}, \quad 1 \leq i \leq F-1, \quad (9.3.9)$$

$$\bar{Q}_{12}(0) = \bar{Q}_{12}(F) = 0.$$

г) Сглаженная выборочная оценка взаимного амплитудного спектра

$$\bar{A}_{12}(i) = \sqrt{\bar{L}_{12}^2(i) + \bar{Q}_{12}^2(i)}, \quad 0 \leq i \leq F. \quad (9.3.10)$$

д) Сглаженная выборочная оценка фазового спектра

$$\bar{F}_{12}(i) = \arctg \left[-\frac{\bar{Q}_{12}(i)}{\bar{L}_{12}(i)} \right], \quad 0 \leq i \leq F. \quad (9.3.11)$$

е) Сглаженная выборочная оценка квадрата спектра когерентности

$$\bar{K}_{12}^2(i) = \frac{\bar{A}_{12}^2(i)}{\bar{C}_{11}(i) \bar{C}_{22}(i)}, \quad 0 \leq i \leq F. \quad (9.3.12)$$

Множитель 2 в уравнениях (9.3.2), (9.3.4), (9.3.8), (9.3.9) поставлен для того, чтобы сохранить соотношение преобразований Фурье между выборочными спектрами и выборочными ковариациями, как и в разд. 7.1.1. В приложении П9.2 приведена логическая схема вычислений взаимного спектрального анализа.

Нормировка. Иногда при изучении корреляции двух рядов с различными масштабами измерения полезно их предварительно нормировать так, чтобы получались выборочные оценки *корреляций* и *нормированных* спектров. Формулы при этом останутся теми же самыми, если заменить ковариации на корреляции. Отметим, впрочем, что взаимный амплитудный спектр уже не будет иметь смысла. Нормированные выборочные оценки корреляций получаются из выборочных оценок ковариаций по формулам

$$r_{ii}(k) = \frac{c_{ii}(k)}{c_{ii}(0)}, \quad i = 1, 2, \quad (9.3.13)$$

$$r_{12}(k) = \frac{c_{12}(k)}{\sqrt{c_{11}(0) c_{22}(0)}}. \quad (9.3.14)$$

9.3.2. Некоторые численные примеры взаимного спектрального анализа

Детали вычислений. В этом разделе приводятся численные примеры взаимного спектрального анализа искусственных двумерных временных рядов с известными спектрами. Мы сравним теоретические спектры и сглаженные выборочные оценки спектра когерентности (9.3.12) и фазового спектра (9.3.11). Влияние ширины полосы частот окна на дисперсию сглаженных выборочных оценок мы проследим, сравнивая теоретические спектры с выборочными оценками, сосчитанными по реализациям двумерных временных рядов. Во всех численных примерах этого раздела для сглаживания используется окно Тьюки.

Аналогичным образом мы исследуем смещение, вычисляя средний сглаженный коспектр и квадратурный спектр

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda}_{12}(f) &= 2 \left[\lambda_{12}(0) + 2 \sum_{k=1}^{L-1} \lambda_{12}(k) \omega(k) \cos 2\pi f k \right], \\ \bar{\Psi}_{12}(f) &= 2 \left[0 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} \psi_{12}(k) \omega(k) \sin 2\pi f k \right], \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2},\end{aligned}\quad (9.3.15)$$

а также средние сглаженные автоспектры $\bar{\Gamma}_{11}(f)$, $\bar{\Gamma}_{22}(f)$. Из них получаются средний сглаженный фазовый спектр и спектр когерентности по формулам

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{12}(f) &= \arctg \left[-\frac{\bar{\Psi}_{12}(f)}{\bar{\Lambda}_{12}(f)} \right], \\ \bar{\kappa}_{12}^2(f) &= \frac{\bar{\Lambda}_{12}^2(f) + \bar{\Psi}_{12}^2(f)}{\bar{\Gamma}_{11}(f) \bar{\Gamma}_{22}(f)}.\end{aligned}\quad (9.3.16)$$

Кроме того, вычисляются сглаженные выборочные взаимные спектральные оценки $\bar{L}_{12}(f)$, $\bar{Q}_{12}(f)$, $\bar{F}_{12}(f)$ и $\bar{K}_{12}^2(f)$ по формулам (9.3.8)—(9.3.12).

Два независимых процесса авторегрессии первого порядка ($\alpha_1 = -0,9$). Первыми процессами, которые мы рассмотрим, являются два независимых процесса авторегрессии первого порядка с $\alpha_1 = -0,9$, $N = 100$. Взаимную корреляционную функцию этих процессов мы оценивали в разд. 8.2.1. Теоретический и средний сглаженный спектры когерентности этого двумерного процесса тождественно равны нулю, а теоретический фазовый спектр не определен. Поэтому мы не будем сравнивать теоретический и средние сглаженные спектры. Основная цель этого примера — сравнить теоретический спектр когерентности, который тождественно равен нулю, с выборочными оценками когерентности для реализаций двух рядов по 100 членов в каждой. На рис. 9.4 показаны сглаженные выборочные оценки спектра когерентности при $L = 4, 8, 16$ и 40.

Рис. 9.4 демонстрирует очень отчетливо влияние стягивания окна на сглаженную выборочную оценку когерентности, теоретическое значение которой в этом примере равно нулю. При $L = 4$ и 8 выборочные спектры достаточно плавны и близки к нулю, но с ростом L (и, следовательно, с уменьшением полосы частот окна) появляются очень большие значения когерентности. В разд. 9.1.3 это частично объясняется тем, что дисперсия оценки увеличивается с уменьшением полосы частот окна. Кроме того, как показано

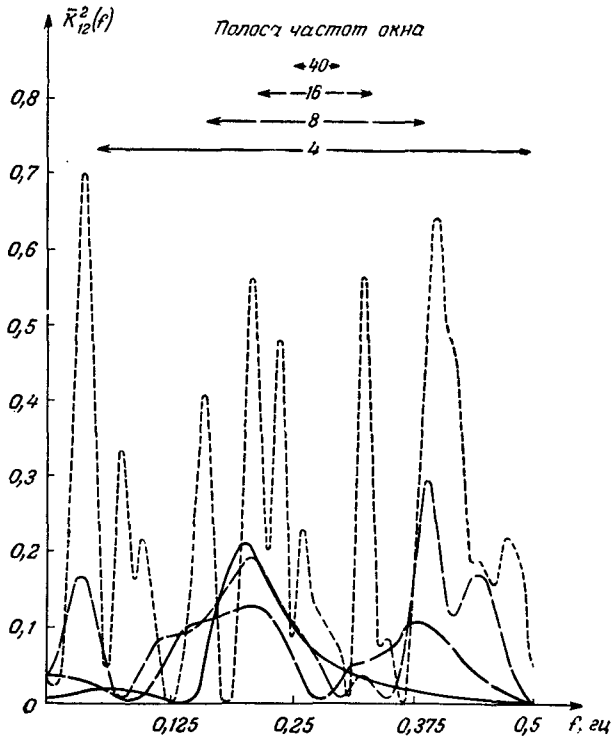


Рис. 9.4. Сглаженные выборочные оценки спектра когерентности двух некоррелированных процессов авторегрессии первого порядка.

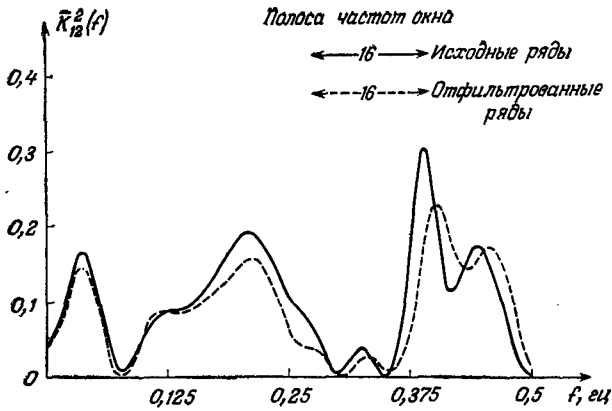


Рис. 9.5. Сглаженные выборочные оценки спектра когерентности двух некоррелированных рядов до и после фильтрации.

в разд. 9.1.2, при уменьшении полосы частот окна сглаженный спектр когерентности стремится к 1 на всех частотах, так как выборочная оценка спектра когерентности по несглаженным данным тождественно равна 1 на всех частотах.

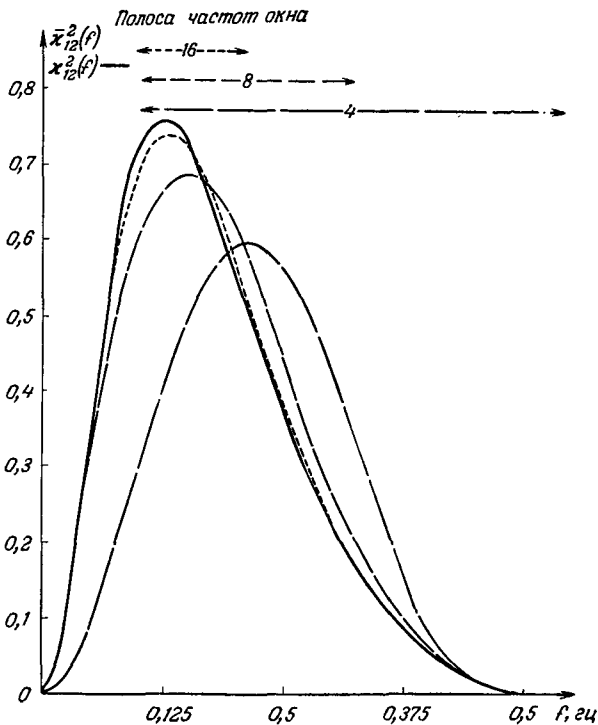


Рис. 9.6. Средние сглаженные спектры когерентности двумерного процесса авторегрессии (8.1.20).

На рис. 9.5 показана сглаженная выборочная оценка квадрата когерентности \bar{K}_{12}^2 при $L = 16$ для исходных и профильтрованных рядов (способ фильтрации описан в разд. 8.2.2). Мы видим, что фильтрация лишь незначительно улучшила выборочную оценку когерентности. Этот вывод следует сравнить с полученным в разд. 8.2.2 выводом о том, что фильтрация может привести к существенному улучшению выборочных оценок взаимной корреляционной функции. Это отличие выборочной оценки спектра когерентности будет объяснено в разд. 9.3.3.

Двумерный процесс авторегрессии. Второй из рассматриваемых нами процессов — двумерный процесс авторегрессии (8.1.20):

$$X_{1t} - 0,6X_{1t-1} + 0,5X_{2t-1} = Z_{1t},$$

$$X_{2t} - 0,4X_{1t-1} - 0,5X_{2t-1} = Z_{2t},$$

где Z_{1t}, Z_{2t} — независимые белые шумы.

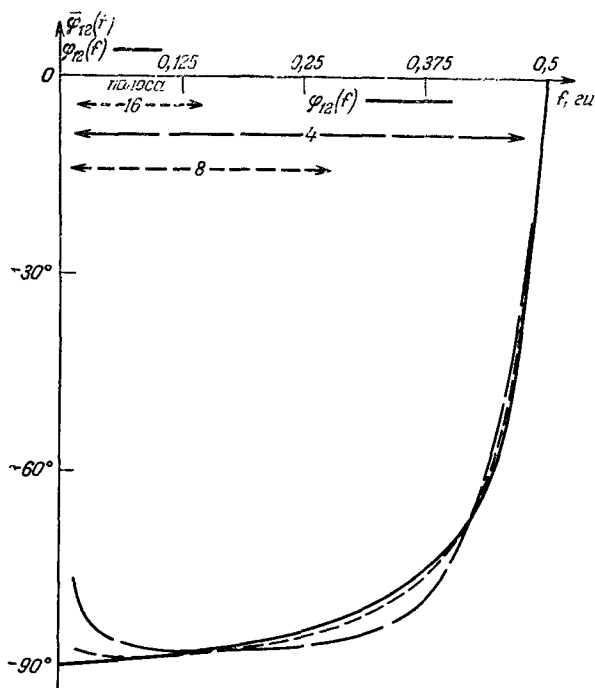


Рис. 9.7. Средние сглаженные фазовые спектры двумерного процесса авторегрессии (8.1.20).

Теоретические спектр когерентности и фазовый спектр даются формулами (8.4.19) и (8.4.20) соответственно. Квадрат теоретического спектра когерентности κ_{12}^2 изображен на рис. 9.6 вместе со средними сглаженными спектрами когерентности $\bar{\kappa}_{12}^2$ при $L = 4, 8$ и 16 . Видно, что при $L = 4$ и 8 имеется значительное смещение, причем пик смещен при $L = 4$ приблизительно на $0,1$ гц, а при $L = 8$ на $0,05$ гц. При $L = 16$ наблюдается хорошее согласие между $\bar{\kappa}_{12}^2$ и κ_{12}^2 , а при $L = 32$ теоретический и сглаженный спектры уже почти неразличимы. Следовательно, для этого процесса оценка спектра когерентности имела бы достаточно малое смещение при $L = 16$.

На рис. 9.7 показаны теоретический и средние сглаженные фазовые спектры процесса (8.1.20) при $L = 4, 8$ и 16 . Превосходное согласие между $\bar{\varphi}_{12}$ и φ_{12} получается при $L = 8$, а при $L = 16$ средний сглаженный фазовый спектр уже неотличим от теоретического. Поэтому для оценки фазового спектра потребовалось бы еще меньшее значение L , чем для оценки спектра когерентности.

В табл. П9.1 приведены значения выборочных авто- и взаимной корреляционных функций, сосчитанные по реализации процесса (8.1.20) из $N = 100$ членов. Эти функции показаны на рис. 9.8. Исходные значения для этих рядов взяты из табл. П8.1. На рис. 9.9 изображены теоретический спектр когерентности и его выборочные оценки, сосчитанные по этим корреляционным функциям. Выборочная оценка \bar{K}_{12}^2 при $L = 4$

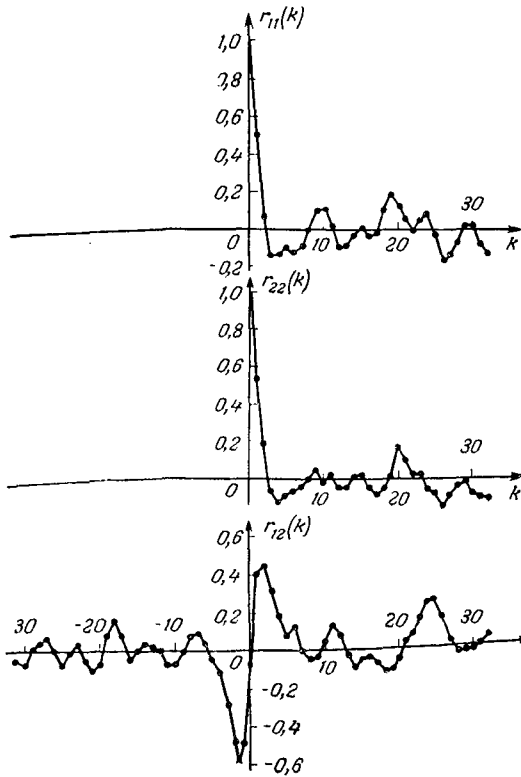


Рис. 9.8. Выборочные авто- и взаимные корреляции двумерного процесса авторегрессии (8.1.20) ($N = 100$).

значительно отклоняется от теоретического спектра, так же как и соответствующий средний сглаженный спектр $\bar{\kappa}_{12}^2$ на рис. 9.6.

Вдвое большее значение $L = 8$ приводит к заметному изменению выборочной оценки \bar{K}_{12}^2 , однако дальнейшее увеличение L до 16 уже не даст существенных изменений. Поэтому в данном случае при использовании метода стягивания окна, описанного в разд. 7.2.4, можно было бы остановиться на выборочной оценке, соответствующей значению $L = 16$ или, возможно, даже $L = 12$. Отметим, что при $L = 16$ наблюдается весьма хорошее согласие между \bar{K}_{12}^2 и κ_{12}^2 . Однако дальнейшее увеличение L до 32 приводит к сильным осцилляциям \bar{K}_{12}^2 .

Теоретический фазовый спектр и его сглаженные выборочные оценки изображены на рис. 9.10 при $L = 4, 8$ и 16 . Метод стягивания окна показывает, что при $L \leq 8$ изменения фазы незначительны, а при $L = 16$ в выборочной оценке появляются ложные пики. Поэтому можно было бы, по-видимому, взять выборочную оценку

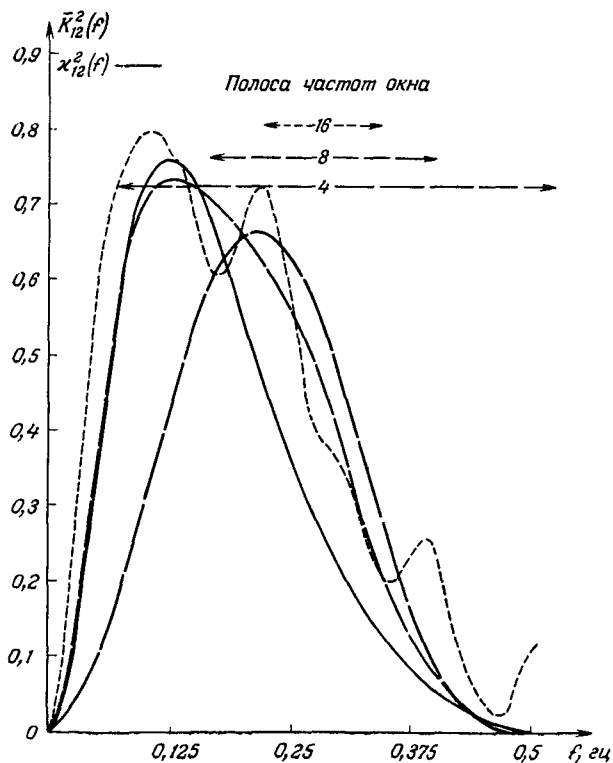


Рис. 9.9. Сглаженные выборочные оценки спектра когерентности двумерного процесса авторегрессии (8.1.20) ($N = 100$).

при $L = 8$. Из рис. 9.7 мы видим, что при этом наблюдается хорошее согласие теоретического и среднего сглаженного фазовых спектров в диапазоне от 0 до 0,4 гц. Для частот, больших 0,4 гц, кривая выборочных оценок уходит вниз, в то время как теоретический спектр идет вверх. Из рис. 9.9 видно, что частота $f = 0,4$ гц соответствует точке, где когерентность снижается до малой величины. Взяв для этой области частот среднее значение квадрата коэффициента когерентности 0,1, находим из рис. 9.3, что 95%-ный доверительный интервал для фазы при $L = 4$ равен приблизительно $\pm 30^\circ$.

Шум, пропущенный через линейную систему с задержкой. Третьим из рассматриваемых нами процессов является процесс (8.1.22), где X_{2t} — выход линейной системы первого порядка с задержкой на 10 единиц времени

$$X_{2t} = 0,5X_{2t-1} + 2X_{1t-10} + Y_t.$$

В качестве входного процесса X_{1t} берется процесс авторегрессии первого порядка

$$X_{1t} = 0,6X_{1t-1} + Z_{1t}.$$

Шум Y_t является процессом авторегрессии первого порядка

$$Y_t = 0,5Y_{t-1} + Z_{2t},$$

и Z_{1t}, Z_{2t} — два независимых белых шума. Теоретические корреляционные функции этого процесса приведены в разд. 8.1.4.

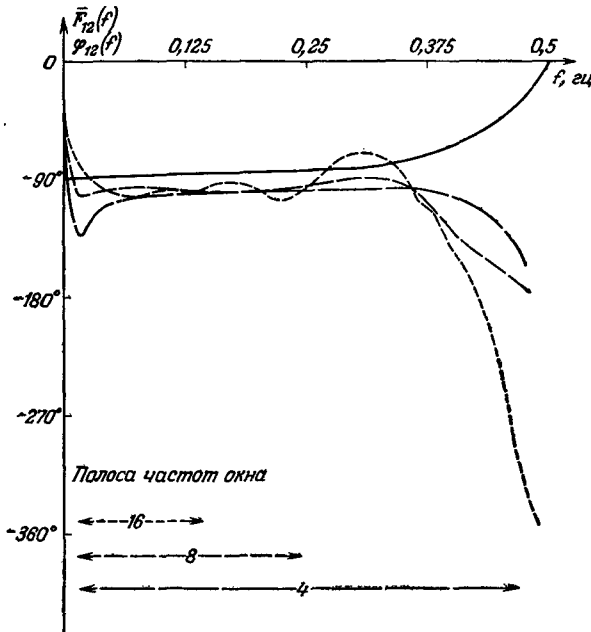


Рис. 9.10. Сглаженные выборочные оценки фазового спектра двумерного процесса авторегрессии (8.1.20) ($N = 100$).

Теоретические спектры когерентности и фазы, полученные с помощью методов, изложенных в разд. 8.4.3, имеют вид

$$\chi_{12}^2(f) = \frac{5 - 4 \cos 2\pi f}{6,36 - 5,2 \cos 2\pi f},$$

$$\Phi_{12}(f) = \arctg \left(\frac{-\sin 2\pi f}{2 - \cos 2\pi f} \right) - 20\pi f.$$

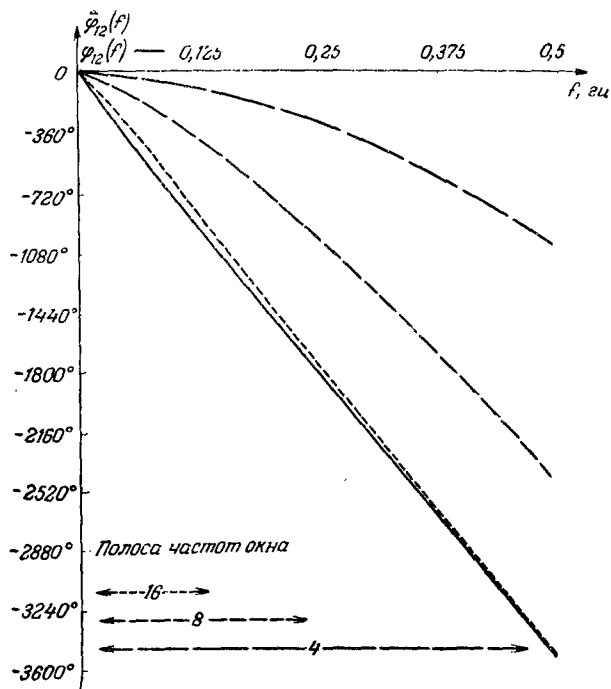


Рис. 9.11. Теоретический и средние сглаженные фазовые спектры линейного процесса (8.1.22) (до выравнивания).

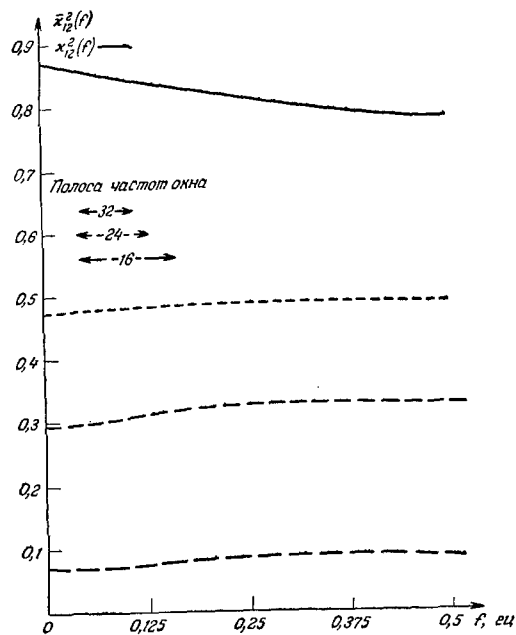


Рис. 9.12. Теоретический и средние сглаженные спектры когерентности линейного процесса (8.1.22) (до выравнивания).

Теоретический и средние сглаженные фазовые спектры этого линейного процесса показаны на рис. 9.11. Мы видим, что хорошие оценки фазы можно получить, лишь когда $L = 16$ или по крайней мере $L = 12$.

Теоретический спектр когерентности χ_{12}^2 построен на рис. 9.12 вместе со средними сглаженными спектрами когерентности $\bar{\chi}_{12}^2$ при $L = 16, 24$ и 32 . Видно, что эти средние сглаженные спектры заметно отличаются от теоретического даже при $L = 32$ и что это отличие нельзя приписать недостаточной гладкости теоретического спектра. Причина в том, что смещение появляется из-за большой задержки между входом и выходом, как было предсказано в разд. 9.2.1.

При $L = 8$ средний сглаженный спектр когерентности приблизительно равен нулю, как можно было бы предвидеть, поскольку задержка между двумя рядами пре-

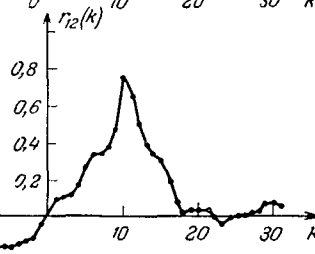
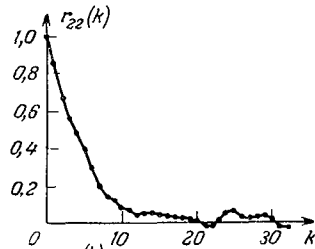
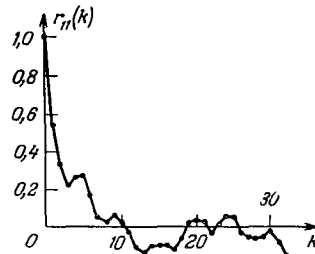
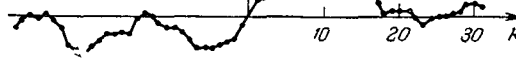
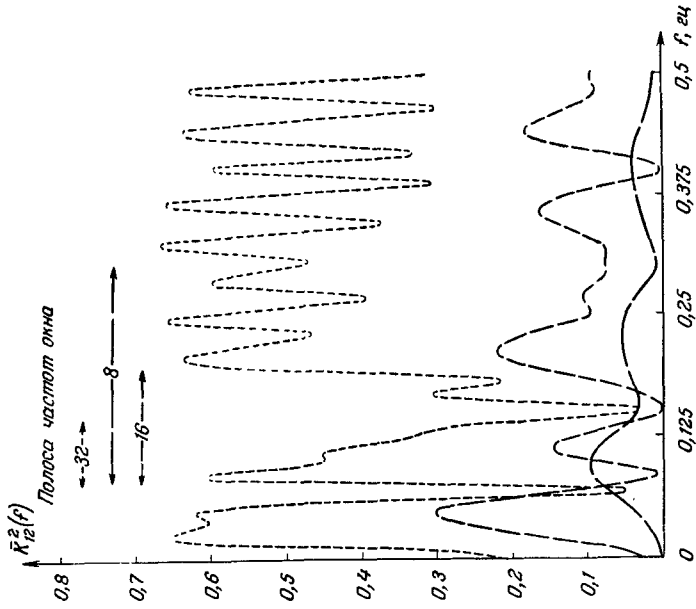


Рис. 9.13. Выборочные авто- и взаимные корреляции линейного процесса (8.1.22) ($N = 100$).

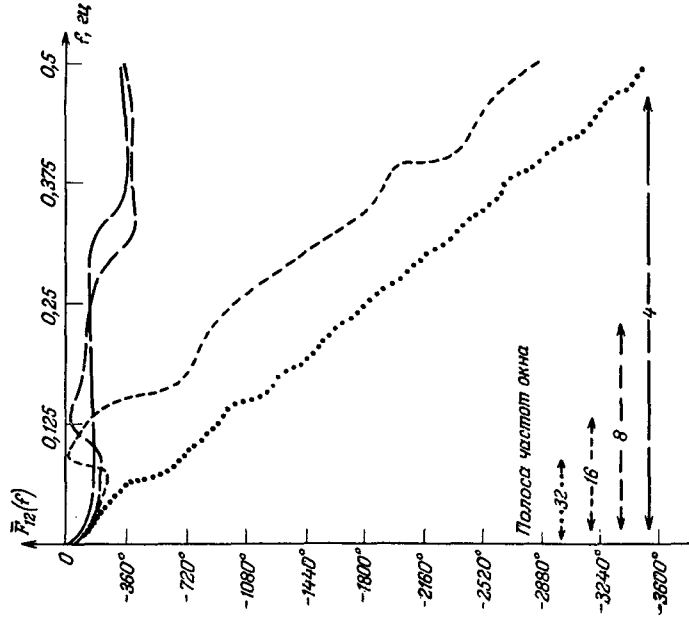


восходит максимальное запаздывание ковариаций. Следовательно, в этом случае смещение равно самой функции $\chi_{12}^2(f)$.

Из теоретических рассмотрений ясно, что немного можно узнать из спектрального анализа реализации этого процесса, содержащей около 100 членов, если только не проводить этот анализ очень тщательно. Чтобы проиллюстрировать этот вывод, мы сосчитали авто- и взаимные корреляции по реализации, состоящей из $N = 100$ членов. Они приведены в табл. П9.2 и изображены на рис. 9.13. Исходные данные для этого примера взяты из табл. П8.2. На рис. 9.14 показаны выборочные оценки спектра когерентности, сосчитанные по реализации из $N = 100$ членов при $L = 8, 16$ и 32



Р и с. 9.14. Сглаженные выборочные оценки спектра когерентности линейного процесса (8.1.22) ($N = 100$, до выравнивания).



Р и с. 9.15. Сглаженные выборочные оценки фазового спектра линейного процесса (8.1.22) ($N = 100$, до выравнивания).

Видно, что они не сходятся к какой-либо функции и что при $L=32$ выборочная оценка начинает резко «скакать». Поэтому нельзя получить никаких удовлетворительных выводов относительно выборочных оценок когерентности. Выборочные оценки фазового спектра показаны на рис. 9.15 при $L = 4, 8, 16$ и 32 . Видно, что они очень плохи, когда L меньше или сравнимо с величиной задержки ($\tau = 10$). Но когда L становится больше 10, выборочные оценки быстро улучшаются, и при $L = 32$ наблюдается превосходное согласие с теоретическим фазовым спектром.

Примеры этого раздела иллюстрируют то общее положение, что хорошие выборочные оценки фазового спектра можно получить и в тех случаях, когда спектр когерентности оценивается плохо. В следующем разделе мы покажем, что обычно можно значительно улучшить выборочные оценки спектров когерентности и фазы с помощью выравнивания двух рядов.

9.3.3. Улучшение выборочных взаимных спектральных оценок

В последнем разделе было показано, что при оценивании спектра когерентности может получаться значительное смещение, особенно когда имеется большая относительная задержка рядов. В настоящем разделе мы вычислим смещение спектральных оценок когерентности и фазы и покажем, что это смещение можно существенно уменьшить с помощью *выравнивания*. Выравнивание заключается в центрировании взаимной корреляционной функции таким образом, чтобы ее наибольшее абсолютное значение приходилось на нулевое запаздывание.

Смещение оценок когерентности. Приближенные выражения для смещения сглаженных оценок когерентности можно получить с помощью метода, подобного тому, который мы использовали в разд. 6.3.5. Например, смещение сглаженной оценки спектра когерентности равно

$$B(f) = E[\bar{K}_{12}^2(f) - \kappa_{12}^2(f)] = E\left[\frac{|\bar{C}_{12}(f)|^2}{\bar{C}_{11}(f)\bar{C}_{22}(f)} - \frac{|\Gamma_{12}(f)|^2}{\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(f)}\right]. \quad (9.3.17)$$

С помощью (3.2.23) это смещение можно аппроксимировать выражением

$$B(f) = \kappa_{12}^2(f) \left[\frac{B_{12}(f)}{\alpha_{12}^2(f)} - \frac{B_{11}(f)}{\Gamma_{11}(f)} - \frac{B_{22}(f)}{\Gamma_{22}(f)} \right], \quad (9.3.18)$$

где $B_{12}(f)$, $B_{11}(f)$, $B_{22}(f)$ — смещение оценок $|\bar{C}_{12}(f)|^2$, $\bar{C}_{11}(f)$ и $\bar{C}_{22}(f)$ соответственно. Предположим на время, что автоспектры почти не меняются на частотном интервале, равном ширине спектрального окна, так что смещением оценок автоспектров можно пренебречь.

Найдем сначала смещение квадрата взаимного амплитудного спектра, т. е. величину

$$B_{12}(f) = E[\bar{A}_{12}^2(f) - \alpha_{12}^2(f)].$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} E[|\bar{C}_{12}(f)|^2] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} C_{12}(g) W(f-g) dg \int_{-\infty}^{\infty} C_{12}^*(h) W(f-h) dh\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(f-g) W(f-h) E[C_{12}(g) C_{12}^*(h)] dg dh. \end{aligned} \quad (9.3.19)$$

Так как

$$E[C_{12}(g) C_{12}^*(h)] = \text{Cov}[C_{12}(g), C_{12}^*(h)] + E[C_{12}(g)] E[C_{12}^*(h)],$$

то с помощью (9.1.22) и (9.2.3) это выражение приближенно равно

$$E[C_{12}(g), C_{12}^*(h)] \approx \frac{1}{T} \Gamma_{11}(g) \Gamma_{22}(g) \delta(g-h) + \Gamma_{12}(g) \Gamma_{12}^*(h).$$

Следовательно,

$$E[|\bar{C}_{12}(f)|^2] \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W^2(f-g)}{T} \Gamma_{11}(g) \Gamma_{22}(g) dg + |\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2. \quad (9.3.20)$$

Так как мы предположили, что $\Gamma_{11}(f)$ и $\Gamma_{22}(f)$ почти не меняются на интервале частот, равном ширине спектрального окна, то (9.3.20) сводится к

$$E[|\bar{C}_{12}(f)|^2] \approx \Gamma_{11}(f) \Gamma_{22}(f) \frac{1}{T} + |\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2 \quad (9.3.21)$$

и из (9.3.18) получаем

$$B(f) \approx \frac{1}{T} + \frac{|\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2 - |\Gamma_{12}(f)|^2}{\Gamma_{11}(f) \Gamma_{22}(f)}. \quad (9.3.22)$$

Равенство (9.3.22) показывает, что, даже если теоретический взаимный спектр равен нулю, средний сглаженный спектр когерентности может быть очень большим. Этим объясняются показанные на рис. 9.5 большие значения выборочных оценок когерентности для двух независимых процессов авторегрессии первого порядка, обсуждавшихся в разд. 8.2. Например, при $L = 40$

$$\frac{1}{T} = \frac{(0,75) 40}{100} = 0,3,$$

что в среднем хорошо согласуется с выборочными значениями, приведенными на рис. 9.4. Заметим, что с ростом L (и, следовательно, с ростом $1/T$) выборочные значения когерентности в среднем также возрастают. Как указывалось в разд. 9.1.2, когда $M =$

$= L\lambda \rightarrow T$, коэффициент когерентности стремится к единице для всех частот f .

Из формулы (9.3.22) видно также, что фильтрация независимых рядов не улучшает выборочных оценок когерентности. Этот факт продемонстрирован на рис. 9.5, где приведены выборочные значения когерентности независимых процессов до и после фильтрации. На этом рисунке видно, что в обоих случаях значения квадрата спектра когерентности в среднем равны 0,1. Эта величина хорошо согласуется со значением $1/T = 0,75 \cdot \frac{16}{100} = 0,12$, которое получается по формуле (9.3.22).

Чтобы получить явное выражение для смещения (9.3.22), нужно вычислить величину $|\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2 - |\Gamma_{12}(f)|^2$. Из (9.2.4) имеем

$$\bar{\Gamma}_{12}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(u) \gamma_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du,$$

так что

$$|\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(u) \omega(v) \gamma_{12}(u) \gamma_{12}(v) e^{-j2\pi f(u-v)} du dv.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & |\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2 - |\Gamma_{12}(f)|^2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{12}(u) \gamma_{12}(v) e^{-j2\pi f(u-v)} [\omega(u) \omega(v) - 1] du dv. \end{aligned} \quad (9.3.23)$$

Записывая

$$\omega(u) \omega(v) - 1 = [\omega(u) - 1][\omega(v) - 1] + [\omega(u) - 1] + [\omega(v) - 1],$$

получим

$$\begin{aligned} & |\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2 - |\Gamma_{12}(f)|^2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} [\omega(u) - 1] \gamma_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du \int_{-\infty}^{\infty} [\omega(v) - 1] \gamma_{12}(v) e^{j2\pi fv} dv + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} [\omega(u) - 1] \gamma_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{12}(v) e^{j2\pi fv} dv + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{12}(u) e^{-j2\pi fu} du \int_{-\infty}^{\infty} [\omega(v) - 1] \gamma_{12}(v) e^{j2\pi fv} dv. \end{aligned}$$

С помощью приближения (6.3.37) для смещения при использовании окна Тьюки получаем

$$|\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2 - |\Gamma_{12}(f)|^2 \approx \left(\frac{0,063}{M^2}\right) \Gamma_{12}^{(2)} \left(\frac{0,063}{M^2}\right) \Gamma_{12}^{(2)*} + \left(\frac{0,063}{M^2}\right) (\Gamma_{12}^{(2)} \Gamma_{12}^{*} + \Gamma_{12} \Gamma_{12}^{(2)*}), \quad (9.3.24)$$

где $\Gamma_{12}^{(2)}$ — вторая производная взаимного спектра на частоте f . Записывая $\Gamma_{12}(f)$ в виде $\alpha_{12}(f) e^{j\varphi_{12}(f)}$ и дифференцируя по f , получим

$$|\bar{\Gamma}_{12}(f)|^2 - |\Gamma_{12}(f)|^2 \approx \frac{0,126}{M^2} [\alpha_{12} \alpha_{12}^{(2)} - \alpha_{12}^2 (\varphi_{12}^{(1)})^2],$$

где опущены члены порядка $1/M^4$. Следовательно, если в (9.3.18) можно пренебречь смещениями $B_{11}(f)$ и $B_{22}(f)$, то смещение оценки спектра когерентности при использовании окна Тьюки приближенно записывается в виде

$$B(f) \approx \frac{0,75M}{T} + \frac{0,126}{M^2} \left[\frac{\alpha_{12} \alpha_{12}^{(2)} - \alpha_{12}^2 (\varphi_{12}^{(1)})^2}{\Gamma_{11} \Gamma_{22}} \right]. \quad (9.3.25)$$

При использовании окна Парзена 0,75 надо заменить на 0,54 и 0,126 — на 0,304.

Наиболее важная отличительная черта формулы (9.3.25) состоит в том, что смещение пропорционально квадрату производной фазового спектра. Если пренебречь в (9.3.25) постоянным членом и членом с $\alpha_{12}^{(2)}$, то получим формулу

$$B(f) \approx \frac{0,126}{M^2} \alpha_{12}^2 (\varphi_{12}^{(1)})^2, \quad (9.3.26)$$

так что смещение оценки спектра когерентности пропорционально величине когерентности и скорости изменения $\varphi_{12}^{(1)}$ фазового спектра. Следовательно, если имеются большие относительные задержки двух процессов, то выборочные оценки когерентности могут сильно ухудшаться, так как $\varphi_{12}^{(1)}$ будет велико. Смещение взаимных спектральных оценок было впервые обнаружено Аканке [5].

Выравнивание. Смещение оценки когерентности, вызванное фазовым сдвигом, можно существенно уменьшить с помощью *выравнивания* (alignment) двух процессов. Предположим, что взаимная корреляционная функция достигает наибольшего по абсолютной величине, или пикового, значения для запаздывания S . Выравнивание процессов, переводящее это пиковое значение к нулевому запаздыванию, изменяет функцию $\Gamma_{12}(f)$ от значения

$$\alpha_{12}(f) e^{j\varphi_{12}(f)}$$

к значению

$$\Gamma'_{12}(f) = \alpha'_{12}(f) e^{j\varphi'_{12}(f)} = \alpha_{12}(f) e^{j[\varphi_{12}(f) - 2\pi fS]}.$$

Следовательно,

$$\Phi'_{12}{}^{(1)} = \frac{d}{df} [\Phi'_{12}(f)] = (\Phi_{12}^{(1)} - 2\pi S),$$

и в результате смещение (9.3.26) можно существенно уменьшить, как мы покажем в следующем разделе.

Использование фазового спектра для определения параметра выравнивания. Выбор в качестве параметра выравнивания величины S , соответствующей пику взаимной корреляционной функции, не всегда приводит к удовлетворительным результатам. Может случиться так, что фазовый спектр выравненных рядов все еще будет содержать линейную фазовую компоненту $\varphi(f) = 2\pi fd$. Это будет указывать на то, что необходимо дополнительное выравнивание на величину d . В качестве практической рекомендации мы предлагаем первое приближение к параметру выравнивания делать исходя из пика взаимной корреляционной функции. В некоторых случаях этого достаточно для того, чтобы фазовый спектр после выравнивания уже не содержал линейной компоненты. В других же случаях, когда остается линейная компонента $\varphi(f) = 2\pi fd$, можно взять в качестве второго приближения к параметру выравнивания $S + d$ и т. д.

Смещение оценок фазы. Приближенные выражения для смещения оценок фазы можно получить тем же путем, что и для когерентности. Окончательный результат при использовании окна Тьюки имеет вид

$$B(f) \approx \frac{0,063}{M^2} \left[\frac{1}{\alpha_{12}^2} \frac{d}{df} (\alpha_{12}^2 \Phi_{12}^{(1)}) \right] = \frac{0,063}{M^2} \left[\Phi_{12}^{(2)} + \Phi_{12}^{(1)} \frac{d}{df} \ln \alpha_{12}^2 \right]. \quad (9.3.27)$$

При использовании окна Парзена надо заменить 0,063 в (9.3.27) на 0,152.

Из (9.3.27) видно, что смещение состоит из двух слагаемых, первое из которых пропорционально второй производной фазового спектра, а второе — произведению производной фазового спектра на производную логарифма взаимного амплитудного спектра. Для двумерных процессов, имеющих большие относительные задержки компонент, величина $\Phi_{12}^{(1)}$ будет, по-видимому, превосходить величину $\Phi_{12}^{(2)}$. Однако из-за того, что $\Phi_{12}^{(1)}$ умножается на $d(\ln \alpha_{12}^2)/df$, результирующее полное смещение может оказаться незначительным. Такой случай имеет место в примере с линейной системой, изображенном на рис. 9.11, где показаны теоретический и средние сглаженные спектры. Видно, что они очень хорошо согласуются уже при $L = 16$.

9.3.4. Формулы дискретного оценивания для выравненных процессов

Предположим, что выборочная взаимная ковариационная функция имеет пик в точке S , причем S может быть и положительным, и отрицательным. Тогда в выравненных выборочных оценках используется центрированная взаимная ковариационная функция, имеющая пик в нуле. Таким образом, выравненная выборочная оценка взаимной ковариационной функции имеет вид

$$c''_{12}(k) = c_{12}(S + k). \quad (9.3.28)$$

Если для выравненной выборочной оценки используется корреляционное окно длины L , то

$$-L \leq k + S \leq L,$$

и, следовательно, нужно вычислять $c_{12}(k)$ для следующих значений аргумента:

$$-L - S \leq k \leq L - S.$$

Далее можно пользоваться формулами, приведенными в разд. 9.3.1, применяя их к выравненным выборочным оценкам взаимной ковариации. Формулы (9.3.6) и (9.3.7) для четной и нечетной частей выборочной взаимной ковариационной функции переходят в

$$l''_{12}(k) = \frac{1}{2} [c_{12}(S + k) + c_{12}(S - k)]. \quad (9.3.29)$$

$$q''_{12}(k) = \frac{1}{2} [c_{12}(S + k) - c_{12}(S - k)], \quad (9.3.30)$$

и далее можно применять формулы (9.3.8)–(9.3.13) без изменений.

9.3.5. Примеры взаимного спектрального анализа с выравниванием

На рис. 9.16 показаны средние сглаженные спектры когерентности при $L = 8, 16$ и 32 для примера с шумом, пропущенным через линейную систему с применением выравнивания. Параметр выравнивания $S = 10$ был найден по пику взаимной корреляционной функции на рис. 9.13. На рис. 9.12 соответствующие сглаженные спектры приведены до выравнивания. Сравнение рис. 9.16 и 9.12 показывает, что выравнивание приводит к существенному уменьшению смещения, т. е. к уменьшению степени искажения.

На рис. 9.17 показаны средние сглаженные фазовые спектры при $L = 4$ и 32 после выравнивания, а на рис. 9.11 — до выравнивания. Сравнение этих рисунков показывает, что выравнивание сильно ускоряет сходимость к истинному значению.

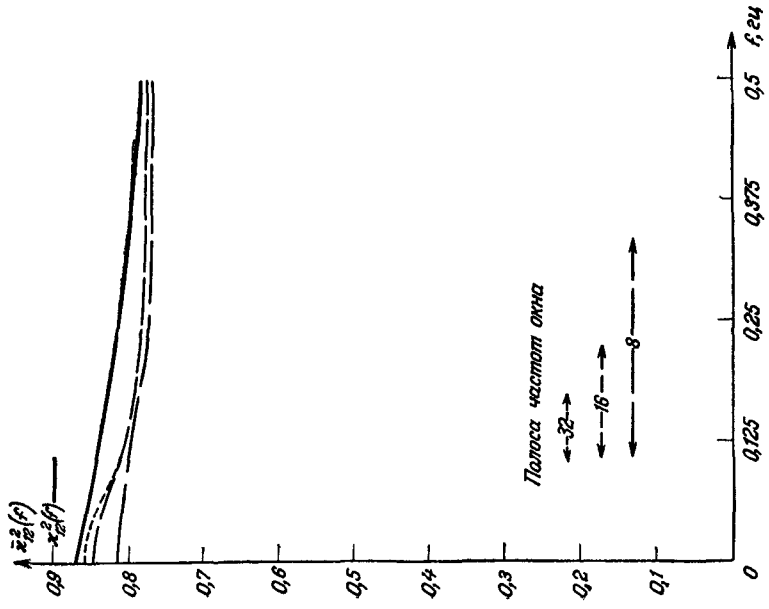


Рис. 9.16. Теоретический и средние сглаженные спектры когерентности линейного процесса (8.1.22) (после выравнивания, $S = 10$).

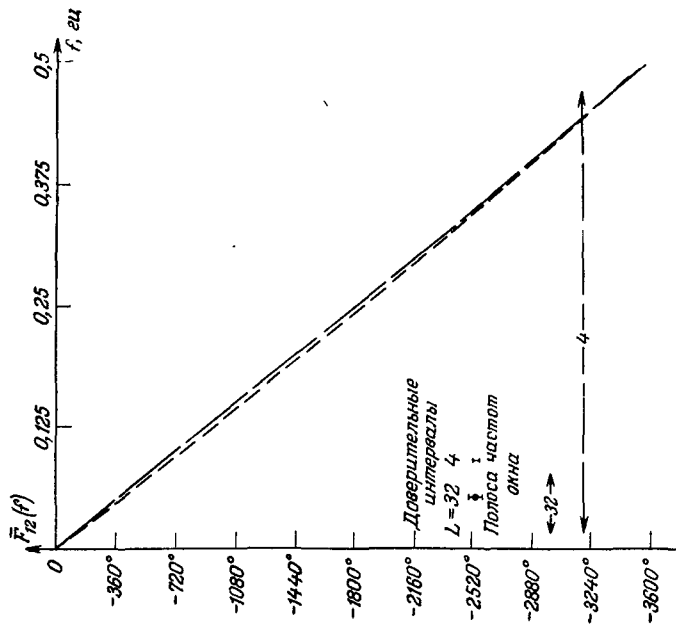


Рис. 9.17. Средние сглаженные фазовые спектры линейного процесса (8.1.22) (после выравнивания, $S = 10$).

На рис. 9.18 приведены сглаженные выборочные оценки когерентности после выравнивания для шума, пропущенного через линейную систему. На рис. 9.14 даны соответствующие оценки до выравнивания. Сравнение рис. 9.18 и 9.14 показывает, что выравни-

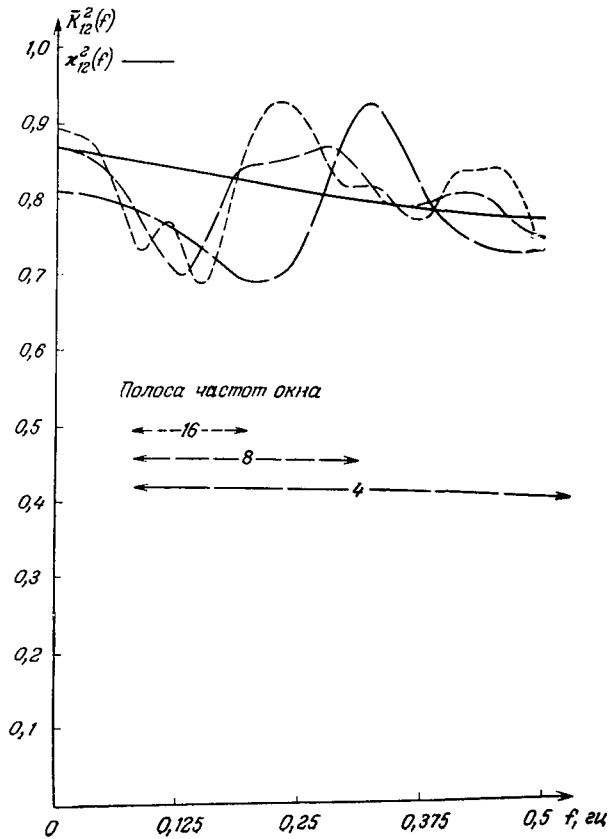


Рис. 9.18. Сглаженные выборочные оценки спектра когерентности линейного процесса (8.1.22) ($N = 100$, после выравнивания, $S = 10$).

вание заметно улучшило выборочные оценки. Заметим, что при $L = 16$ начинаются осцилляции выборочной оценки на рис. 9.18, и, следовательно, нужно остановиться на значении $L = 8$ или, возможно, $L = 12$. Отметим, что при $L = 8$ наблюдается очень хорошее согласие с теоретическим спектром когерентности. Выборочные оценки фазового спектра после выравнивания не показаны,

поскольку они почти совпадают со средними сглаженными спектрами на рис. 9.17. Как отмечалось в разд. 9.3.3, смещение оценки фазы обычно мало, так что отличие выравненных выборочных фазовых оценок от невыравненных не так существенно, как для оценок когерентности.

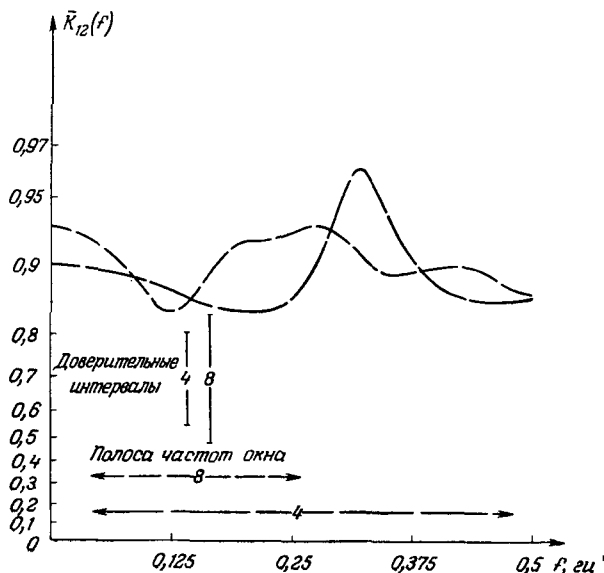


Рис. 9.19. Выборочные оценки спектра преобразованной когерентности линейного процесса (8.1.22) ($N = 100$, после выравнивания, $S = 10$).

Таким образом, приведенные примеры показывают, что с помощью выравнивания очень плохие выборочные оценки когерентности можно преобразовать в хорошие.

Доверительные интервалы для коэффициентов когерентности и фазы. Сглаженные выборочные оценки когерентности, показанные на рис. 9.18, вновь изображены на рис. 9.19 в масштабе, соответствующем преобразованию $Y_{12} = \text{Arth}|\bar{K}_{12}|$. Кроме того, указаны доверительные пределы, не зависящие от частоты, которые были вычислены по формуле (9.2.23). Поскольку до выравнивания смещение для фазы было очень мало, то допустимо считать, что доверительные интервалы можно применять к выравненным спектрам, показанным на рис. 9.17. Взяв в качестве средней величины квадрата когерентности во всем частотном диапазоне значение 0,8, получаем при $L = 4$ и 32 с помощью рис. 9.3 95%-ные интервалы ± 5 и $\pm 15^\circ$.

9.4. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОЦЕНИВАНИЯ ВЗАИМНЫХ СПЕКТРОВ

В этом разделе обсуждаются практические вопросы, возникающие при оценивании взаимных спектров. Они аналогичны вопросам, обсуждавшимся при оценивании автоспектров в разд. 7.3.

9.4.1. Планирование анализа взаимных спектров

Как и в анализе автоспектров, при анализе взаимных спектров желательно выбрать длину записи до начала сбора данных. Во всех вычислениях такого рода нельзя сделать никаких точных утверждений, поскольку наилучший выбор длины записи может быть только тогда, когда точно известны спектры. Однако если имеются предположения о поведении спектра, то в основу сбора данных можно положить полуколичественные рассуждения, а не слепые догадки.

В разд. 7.3.1 указывалось, что имеются четыре стадии в планировании анализа автоспектров.

1. Выбор интервала отсчета, который должен быть не больше $1/2f_0$, где f_0 — максимальная интересующая нас частота.

2. До перевода записи в цифровую форму может потребоваться аналоговая фильтрация, чтобы устранить все составляющие с частотами выше f_0 на непрерывных записях.

3. Нужно сделать предположение относительно ширины a самой тонкой из представляющих для нас интерес деталей когерентности. В разд. 9.3 показано, что спектр когерентности обычно труднее оценивать, чем фазовый спектр. Поэтому планирование должно исходить полностью из спектра когерентности. Малую степень искажения при оценивании спектра когерентности можно получить, выбрав ширину спектрального окна меньше a — ширины самой тонкой детали. Следовательно, число запаздываний L можно найти по формуле (7.3.2), а именно

$$L = \frac{b_1}{a\Delta},$$

где b_1 — стандартизованная ширина полосы частот окна. Заметим, что в вышеупомянутых выкладках предполагается, что выравнивание двух рядов уже произведено. Поскольку сдвиг S , требуемый для выравнивания двух рядов, будет обычно мал по сравнению с их полной длиной, то на стадии планирования этого можно не учитывать.

4. Чтобы тонкие детали спектра когерентности можно было считать реальными, доверительный интервал должен быть достаточно мал. В разд. 9.2.3 было показано, что доверительные интервалы для спектра когерентности можно вычислять по формуле

$$\text{Var} [\text{Arth} |\bar{K}_{12}|] \approx \frac{I}{2T} = \frac{1}{v} = \frac{L}{2b_1N},$$

где b_1 — стандартизованная ширина полосы частот окна. Для $\text{Arth}|\tilde{\kappa}_{12}|$ 95%-ные доверительные пределы задаются по формуле (9.2.23), т. е.

$$\pm 1,96 \sqrt{\frac{L}{2b_1 N}} = \pm \frac{1,96}{\sqrt{v}}. \quad (9.4.1)$$

Следовательно, если мы хотим, чтобы доверительные пределы равнялись $\pm c$, то для этого в среднем надо взять следующее количество точек записи:

$$N = \frac{L}{2b_1} \left(\frac{1,96}{c} \right)^2, \quad (9.4.2)$$

или с помощью (7.3.2) это можно переписать в виде

$$N = \frac{1}{2a\Delta} \left(\frac{1,96}{c} \right)^2. \quad (9.4.3)$$

Пример. Предположим, что спектры когерентности и фазы нужны для частот до $f_0 = 2$ *гц*. При этом требуется еще оценить пик ширины $a = 0,20$ *гц* с такой точностью, чтобы 95%-ный доверительный интервал для преобразования спектра когерентности равнялся $\pm 0,2$ при использовании окна Тьюки.

В таком случае

$$\Delta = \frac{1}{2f_0} = 0,25 \text{ сек},$$

$$L = \frac{1,333}{0,2 \cdot 0,25} = 27,$$

$$N = \frac{1}{2 \cdot 0,2 \cdot 0,25} \left(\frac{1,96}{0,2} \right)^2 = 960.$$

Число степеней свободы для каждой точки, где вычисляется выборочная спектральная оценка, равно приблизительно 95, а длина записи должна быть по крайней мере 240 *сек*.

9.4.2. Практическая методика оценивания взаимных спектров

Мы предлагаем проводить оценивание взаимных спектров в пять последовательных этапов:

1. Стадия предварительных решений

а) Ряды проверяются визуально с целью обнаружения очевидных трендов. Если имеются тренды, то от них можно избавиться, используя выборочные оценки ковариаций, сосчитанные по первым разностям каждого из рядов или же по записям, профильтрованным с помощью одного из цифровых фильтров, указанных в разд. 7.3.5.

б) Может возникнуть вопрос, анализировать ли данные в широком диапазоне частот или же расфильтровать их на компоненты,

соответствующие более узким частотным диапазонам. Если можно ожидать больших различий мощности в полном частотном диапазоне, то как минимум нужно отдельно анализировать низкочастотные и высокочастотные компоненты. Для этого решения требуются некоторые априорные сведения о спектрах. Если их нет, то, возможно, следует провести пробный анализ или же выполнить стадии 1—4 и, воспользовавшись их результатами для проведения нужной фильтрации, повторить затем анализ вновь.

в) Решается вопрос о выборе максимального числа запаздываний авто- и взаимных ковариаций L_{\max} .

2. Первая стадия вычислений

а) Вычисляются авто- и взаимные ковариации и корреляции исходных рядов и их первых разностей. Строятся их графики.

б) Даже если тренды явно и не видны, они все же могут присутствовать. Это можно обнаружить по тому, что авто- и взаимные ковариации не затухают. Как отмечалось в разд. 7.3.5, тренды приводят к большим значениям мощности на низких частотах, утечка которой происходит и в другие места частотного диапазона и вызывает искажение спектра. При анализе взаимных спектров она приводит также к ложным увеличениям когерентности двух рядов.

3. Стадия промежуточных решений

а) Выносится решение о том, использовать ли ковариации исходных данных $c_{ij}(k)$ или же ковариации данных после устранения тренда $c'_{ij}(k)$.

б) Выбранная в пункте а) взаимная ковариационная или корреляционная функция проверяется и отмечается запаздывание S , соответствующее ее максимальному по абсолютной величине значению.

в) Исходя из скорости затухания авто- и взаимной корреляционных функций, выбираются 3 точки отсечения $L_1 < L_2 < L_3$.

4. Вторая стадия вычислений

а) Вычисляются два автоспектра, а также фазовый спектр и спектр когерентности по взаимным корреляциям выравненных рядов (9.3.28).

б) Для каждого из выбранных значений L строятся 4 спектра. Два автоспектра нужно строить в логарифмическом масштабе, фазовый спектр — в линейном масштабе, а спектр когерентности — в масштабе, соответствующем преобразованию

$$Y = \text{Arth} |\bar{K}_{12}(f)|.$$

5. Стадия интерпретации

а) Проверяется фазовый спектр с целью узнать, требуется ли дальнейшее выравнивание. Если выравнивание необходимо, то вторая стадия вычислений повторяется с новым параметром выравнивания, определенным из этого фазового спектра.

б) Если не требуется дальнейшего выравнивания, то оцениваются результаты стягивания окна и анализ признается хорошим, средним или плохим, как описано в разд. 7.3.3. Окончательные графики, представляющие спектры, должны быть построены исходя из этого решения.

в) Для каждой ширины полосы частот окна с помощью рис. 9.3 находятся доверительные интервалы для фазы, которые наносятся на график в виде вертикальных отрезков. Точно так же наносятся доверительные интервалы для когерентности, получаемые с помощью формулы (9.2.23).

г) Следует нанести горизонтальные отрезки, соответствующие значениям ширины полосы частот окна для того, чтобы можно было оценить детальность спектра.

9.4.3. Пример практического оценивания взаимных спектров

В этом разделе мы применим методику, описанную в разд. 9.4.2, к данным, показанным на рис. 8.2. Анализ этих данных приведен в [6], и подробнее он будет описан в гл. 11. Сейчас мы укажем лишь, что используемые в этом анализе взаимных спектров величины представляют собой входные значения синфазного и сдвинутого по фазе токов $x_1(t)$, $x_2(t)$ турбогенератора. Нас интересуют спектр когерентности и фазовый спектр этих двух токов, поскольку они являются равноправными входными переменными. Эта информация понадобится нам в гл. 11, где она будет использована при анализе входных и выходных соотношений для определения частотных характеристик турбогенератора. Данные состоят из 4000 пар точек, отсчитанных через $1/8$ сек.

1. Стадия предварительных решений

а) При просмотре данных очевидных трендов не обнаружено. Однако, поскольку данные содержат такую скрытую низкочастотную компоненту, мы предвидели, что для анализа нужно будет использовать ковариации первых разностей.

б) Так как отсчет данных производился через $1/8$ сек, частота Найквиста равна 4 *гц*. Заранее было известно, что в диапазоне частот выше 1 *гц* мощность незначительна. Поэтому решено было отфильтровать ее с помощью фильтра с передаточной функцией

$$H(z) = \left\{ \frac{1}{7} \sum_{k=-3}^3 z^k \right\}^4.$$

Поскольку в отфильтрованной записи мощность в диапазоне выше 1 *гц* пренебрежимо мала, было решено оставить лишь каждую четвертую точку. Таким образом, окончательные данные состояли из 1000 пар точек. Первые 100 значений отфильтрованных величин тока приведены в табл. П11.1.

в) для L_{\max} первоначально было взято значение 80.

2. Первая стадия вычислений

а) Авто- и взаимные корреляции данных, описанных в пункте б) предыдущей стадии, были сосчитаны и нанесены на график. На рис. 9.20 показана выборочная оценка взаимной корреляционной функции (сплошная линия), построенная для запаздываний k от -70 до $+70$. Видно, что взаимные корреляции затухают очень медленно (так же как и не показанные на рисунке автокорреляции).

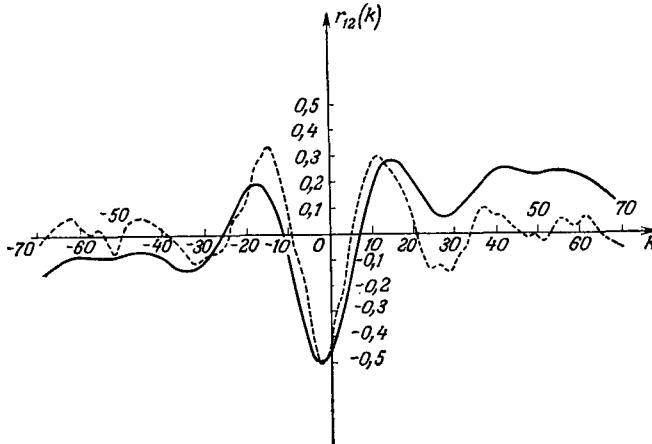


Рис. 9.20. Выборочные взаимные корреляционные функции исходных данных и их первых разностей ($N = 1000$).

б) Взаимные корреляции первых разностей также показаны на рис. 9.20 (пунктирная линия). Видно, что они спадают до нуля очень быстро и колеблются около нуля с вполне определенным периодом. Важной отличительной особенностью взаимной корреляционной функции является дельтаобразный пик вблизи начала координат и ее периодический характер. Из рис. 9.20 видно, что низкочастотный тренд маскирует большое число деталей взаимной корреляционной функции исходных данных.

3. Стадия промежуточных решений

а) Из приведенных выше рассуждений следует, что для спектрального анализа нужно использовать взаимные корреляции первых разностей.

б) Взаимная корреляционная функция почти симметрична относительно начала координат. Максимальное по модулю значение достигается при $k = -2$, так что параметр сдвига S был взят равным -2 .

в) В качестве исходных значений L для вычисления спектров были взяты 32, 48 и 64.

4. Вторая стадия вычислений

а) С помощью окна Тьюки и при $S = -2$ были сосчитаны автоспектры, фазовый спектр и спектр когерентности в преобразованной форме.

б) При $L = 64$ автоспектры показаны на рис. 9.21. Преобразованные спектры когерентности и фазовые спектры показаны при $L = 32$ и 64 на рис. 9.22 и 9.23 соответственно.

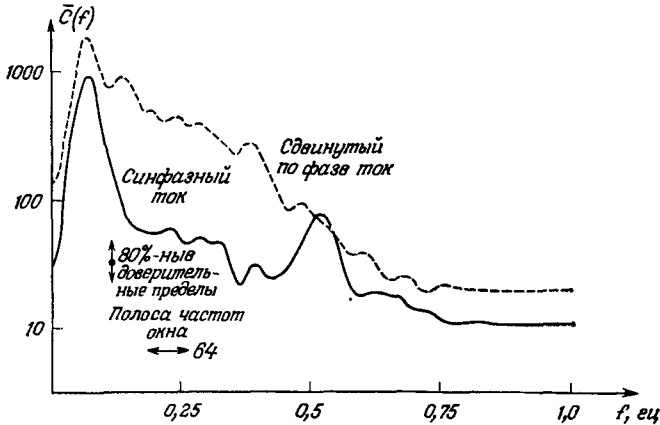


Рис. 9.21. Выборочные оценки автоспектров для первых разностей от данных о токах турбогенератора ($N = 1000$).

5. Стадия интерпретации

а) В фазовом спектре выравненных рядов не заметно никаких линейных трендов. Поэтому мы решили, что дальнейшее выравнивание не нужно.

б) Стягивание окна показывает, что для получения удовлетворительных выборочных оценок всех четырех спектров требуется значение L не меньше 32. Например, из рис. 9.22 видно, что уменьшение ширины полосы частот окна при переходе от $L = 32$ к $L = 64$ не изменяет широких деталей спектра когерентности. Однако при $L = 64$ из-за неустойчивости появляются осцилляции. Поэтому в качестве окончательного значения L было выбрано 48 (на рис. 9.22 соответствующий спектр не показан). Аналогичные рассуждения справедливы и для выборочных оценок фазы, показанных на рис. 9.23.

в) Доверительные интервалы для фазы и для когерентности в преобразованной форме были сосчитаны с помощью формулы (9.2.23) и рис. 9.3, где мы полагали

$$v = \frac{2 \cdot 1,33 \cdot 1000}{L},$$

а L было равно 32 и 64. Эти 95%-ные доверительные интервалы для преобразованной когерентности легко перевести в доверительные интервалы для $\kappa_{12}^2(f)$, воспользовавшись масштабом для $\kappa_{12}^2(f)$, нанесенным на оси ординат на рис. 9.22. Так как ряды состоят из 1000 наблюдений, доверительные интервалы получились довольно узкие.

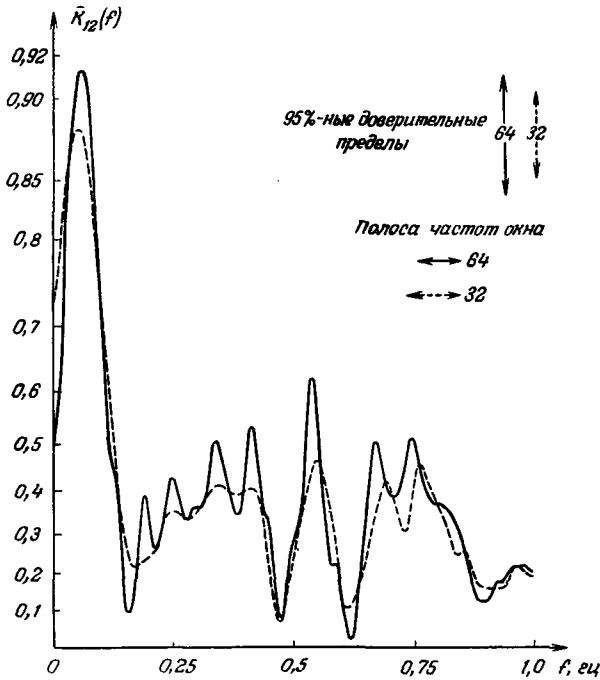


Рис. 9.22. Выборочные оценки спектра преобразованной когерентности для первых разностей от данных о токах турбогенератора ($N = 1000$).

г) Значения ширины полосы частот вычислялись по формуле

$$b = \frac{1,33}{L\Delta}$$

и наносились на рисунки.

Выводы. Отличительная особенность результатов проведенного анализа взаимных спектров состоит в наличии большого пика в спектре когерентности около 0,07 гц и плоской области со значением $\bar{K}_{12}^2(f)$ около 0,18, занимающей почти весь частотный диапазон. Большой пик около 0,07 гц объясняется тем, что спектры обеих составляющих тока имеют пики вблизи этой частоты, а в полосе частот от 0 до 0,1 гц содержится большая часть мощности.

Следовательно, можно было бы предвидеть, что синфазный и сдвинутый по фазе токи сильно коррелированы в этой полосе. Фазовые спектры на рис. 9.23 показывают, что сдвинутая по фазе компонента тока пережает синфазную примерно на 2 сек. На рис. 9.23 при $L = 32$ наряду со спектром для выравненных рядов показан

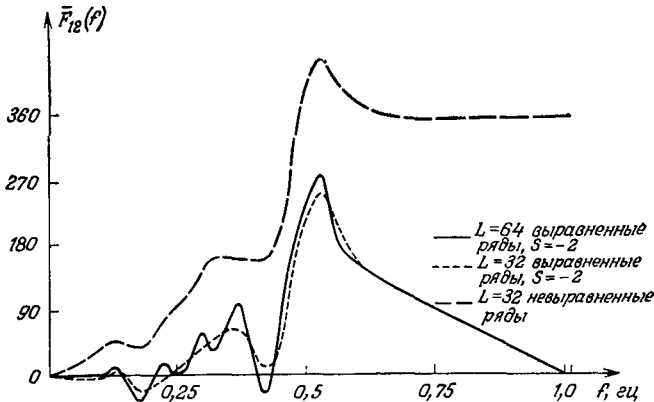


Рис. 9.23. Выборочные оценки фазового спектра для первых разностей от данных о токах турбогенератора ($N = 1000$).

и спектр рядов без выравнивания. Видно, что значение $S = -2$ весьма эффективно устраняет линейный фазовый сдвиг между двумя составляющими тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goodman N. R., On the joint estimation of the spectra, co-spectrum and quadrature spectrum of a two-dimensional stationary Gaussian process, Scientific Paper 10, Engineering Statistics Laboratory, New York University, 1957.
2. Jenkins G. M., Cross-spectral analysis and the estimation of linear open loop transfer functions, Chapter 18 of Time Series, M. Rosenblatt, ed. John Wiley, New York, 1963.
3. Hald A., Statistical Theory with Engineering Applications, John Wiley, New York, 1952, p. 609. (Русский перевод: Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, под ред. Линника, ИЛ, М., 1956.)
4. Granger C. W. J., Spectral Analysis of Economic Time Series, Princeton University Press, Princeton, 1964.
5. Akaike H., Yamamouchi Y., On the statistical estimation of frequency response functions, Ann. Inst. Stat. Math., **14**, 1 (1962).
6. Stanton K. N., Measurement of turboalternator transfer functions using normal operating data, Proc. Inst. Electr. Engrs., **110**, 11 (1963).

КОВАРИАЦИЯ ОЦЕНОК КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

В этом приложении выводится формула для ковариации оценок ковариационной функции (8.2.3). Оценки ковариационной функции можно записать в симметричном виде

$$c_{ij}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-(T-|u|)/2}^{(T-|u|)/2} X_i\left(t - \frac{u}{2}\right) X_j\left(t + \frac{u}{2}\right) dt, & -T \leq u \leq T, \\ 0 & |u| > T, \end{cases} \quad (\text{П9.1.1})$$

Предполагается, что случайные процессы $X_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, имеют следующие свойства:

$$E[X_i(t)] = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{П9.1.2})$$

$$\text{Cov}[X_i(t), X_j(t+u)] = \gamma_{ij}(u), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{П9.1.3})$$

$$-\infty \leq u \leq \infty,$$

и

$$\text{Cov}[X_i(t) X_j(t+u_1), X_k(v) X_l(v+u_2)] = \gamma_{ik}(v-t) \gamma_{jl}(v-t+u_2-u_1) + \gamma_{il}(v-t+u_2) \gamma_{jk}(v-t-u_1) + K(v-t, u_1, u_2), \quad (\text{П9.1.4})$$

где K — четвертый совместный кумулянт. Взаимный спектр процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ определяется соотношениями

$$\Gamma_{ij}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{ij}(u) e^{-j2\pi fu} du, \quad (\text{П9.1.5})$$

$$\gamma_{ij}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{ij}(f) e^{j2\pi fu} df. \quad (\text{П9.1.6})$$

Вывод формулы для ковариации. Из (П9.1.1) и (П9.1.4) ковариация оценок $c_{ij}(u_1)$ и $c_{kl}(u_2)$ равна

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] = \\ & = \frac{1}{T^2} \int_{-(T-|u_1|)/2}^{(T-|u_1|)/2} \int_{-(T-|u_2|)/2}^{(T-|u_2|)/2} \left[\gamma_{ik}\left(v-t - \frac{u_2-u_1}{2}\right) \gamma_{jl}\left(v-t + \frac{u_2-u_1}{2}\right) + \right. \\ & \quad \left. + \gamma_{il}\left(v-t + \frac{u_2+u_1}{2}\right) \gamma_{jk}\left(v-t - \frac{u_2+u_1}{2}\right) + K(v-t, u_1, u_2) \right] dv dt. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.7})$$

Замена переменных $v - t = r$, $t = s$ преобразует область интегрирования из прямоугольника в параллелограмм, как показано на рис. 5.11. Этот параллелограмм можно разделить на 3 области интегрирования, которые будем обозначать (1), (2) и (3). В результате формулу (П9.1.7) в случае $|u_2| > |u_1|$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] &= \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{(|u_2| - |u_1|)/2}^{(T - |u_1| + |u_2|)/2} \gamma(r) dr \int_{-(T - |u_1|)/2}^{(T - |u_2|)/2} ds + \text{ [область (1)]} \\ &+ \frac{1}{T^2} \int_{-(|u_2| - |u_1|)/2}^{(|u_2| - |u_1|)/2} \gamma(r) dr \int_{-[(T - |u_2|)/2] - r}^{[(T - |u_2|)/2] - r} ds + \text{ [область (2)]} \\ &+ \frac{1}{T^2} \int_{-[T - (|u_1| + |u_2|)/2]}^{-(|u_2| - |u_1|)/2} \gamma(r) dr \int_{-(T - |u_2|)/2}^{(T - |u_1|)/2} ds, \text{ [область (3)]} \quad (\text{П9.1.8}) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= \gamma_{ik} \left(r - \frac{u_2 - u_1}{2} \right) \gamma_{jl} \left(r + \frac{u_2 - u_1}{2} \right) + \\ &+ \gamma_{il} \left(r + \frac{u_2 + u_1}{2} \right) \gamma_{jk} \left(r - \frac{u_2 + u_1}{2} \right) + K(r, u_1, u_2). \end{aligned}$$

Интегрирование (П9.1.8) по s и приведение подобных членов дают следующее выражение:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] &= \\ &= \frac{1}{T^2} \left[T' \int_{-T'}^{T'} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T'} \right) dr - T'' \int_{-T''}^{T''} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T''} \right) dr \right], \quad (\text{П9.1.9}) \end{aligned}$$

где

$$T' = T - \frac{|u_1| + |u_2|}{2}, \quad T'' = \frac{|u_2| - |u_1|}{2}.$$

При $|u_1| > |u_2|$ в формуле (П9.1.9) нужно положить $T'' = (|u_1| - |u_2|)/2$.

Упрощение формулы. Оценим теперь, какой вклад в выражение (П9.1.9) дает член с четвертым кумулянтном $K(r, u_1, u_2)$. Если процессы X_i гауссовские, то $K \equiv 0$ и полученное ниже приближенное выражение является точным. Для негауссовских случайных

процессов, которые являются линейными и представляются в виде (5.2.6), (5.2.7), вклад кумулянтного члена равен интегралу

$$\int_{-T'}^{T'} K(r, u_1, u_2) \left(1 - \frac{|r|}{T'}\right) dr.$$

С помощью (5.2.15) можно показать, что этот интеграл имеет порядок $\gamma_{ij}(u_1)\gamma_{kl}(u_2)$. Следовательно, вкладом этого члена в выражение (П9.1.9) можно пренебречь. Для больших T членами порядка $1/T^2$ также можно пренебречь, и (П9.1.9) сводится к

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] &\approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(r) dr = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\gamma_{ik} \left(r - \frac{u_2 - u_1}{2} \right) \gamma_{jl} \left(r + \frac{u_2 - u_1}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{il} \left(r + \frac{u_2 + u_1}{2} \right) \gamma_{jk} \left(r - \frac{u_2 + u_1}{2} \right) \right] dr. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.10})$$

Если в (П9.1.10) положить $i = j = k = l = 1$ и сделать замену $r = s - (u_2 - u_1)/2$, то получится формула Бартлетта (5.3.22). В частности, при $u_2 = u_1$ из этой формулы получаем

$$\text{Var}[c_{11}(u)] \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{11}^2(r) dr. \quad (\text{П9.1.11})$$

Ковариация спектральных оценок. Формулу для ковариации спектральных оценок $C_{ij}(f_1)$ и $C_{kl}(f_2)$ можно получить из предыдущих формул следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{ij}(f_1), C_{kl}(f_2)] &= \\ &= \text{Cov} \left[\int_{-T}^T c_{ij}(u_1) e^{-j2\pi f_1 u_1} du_1, \int_{-T}^T c_{kl}(u_2) e^{-j2\pi f_2 u_2} du_2 \right] = \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] e^{-j2\pi(f_1 u_1 + f_2 u_2)} du_1 du_2. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.12})$$

С целью упрощения (П9.1.12) мы выведем выражение (П9.1.10) в другом виде.

Другой вариант формулы для $\text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)]$. Из (П9.1.9) и (П9.1.6) получаем

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] &= \\ &= \frac{1}{T^2} \left[T' \int_{-T'}^{T'} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T'}\right) dr - T'' \int_{-T''}^{T''} \gamma(r) \left(1 - \frac{|r|}{T''}\right) dr \right] = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \Gamma_{ik}(g_1) \Gamma_{jl}(g_2) e^{j\pi u_1(g_1-g_2)} e^{-j\pi u_2(g_1-g_2)} + \\ &+ \Gamma_{il}(g_1) \Gamma_{jk}(g_2) e^{j\pi u_1(g_1-g_2)} e^{j\pi u_2(g_1-g_2)} \} \times \\ &\times \left[T' \int_{-T'}^{T'} e^{j2\pi r(g_1+g_2)} \left(1 - \frac{|r|}{T'}\right) dr - \right. \\ &\left. - T'' \int_{-T''}^{T''} e^{j2\pi r(g_1+g_2)} \left(1 - \frac{|r|}{T''}\right) dr \right] dg_1 dg_2. \end{aligned}$$

Это выражение сводится к

$$\frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \Gamma \} \frac{\sin^2 \pi(g_1+g_2)T' - \sin^2 \pi(g_1+g_2)T''}{\pi^2(g_1^2+g_2^2)} dg_1 dg_2,$$

где $\{ \Gamma \}$ обозначает выражение в фигурных скобках из предыдущего равенства. Поскольку

$$\sin^2 aT' - \sin^2 aT'' = \sin a(T - |u_1|) \sin a(T - |u_2|),$$

то, делая замену $g_1 = f + g$, $g_2 = f - g$, $dg_1 dg_2 = 2df dg$, получаем

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] &= \frac{2}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi f(T - |u_1|)}{2\pi f} \frac{\sin 2\pi f(T - |u_2|)}{2\pi f} \times \\ &\times [\Gamma_{ik}(f+g) \Gamma_{jl}(f-g) e^{j2\pi g(u_1-u_2)} + \Gamma_{il}(f+g) \Gamma_{jk}(f-g) e^{j2\pi g(u_1+u_2)}] df dg, \end{aligned} \quad (\text{П9.1.13})$$

что и является другим вариантом выражения (П.9.1.9), дающим точный результат в случае гауссовских процессов.

Если $|u_1|$ и $|u_2|$ малы, а T велико, то интегрирование по f в (П9.2.2) дает

$$\begin{aligned} \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] &= \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} [\Gamma_{ik}(g) \Gamma_{jl}(-g) e^{j2\pi g(u_1-u_2)} + \Gamma_{il}(g) \Gamma_{jk}(-g) e^{j2\pi g(u_1+u_2)}] dg, \end{aligned} \quad (\text{П9.1.14})$$

так как $\frac{\sin^2 2\pi f T}{(2\pi f T)^2} \rightarrow \frac{\delta(f)}{2T}$ при $T \rightarrow \infty$.

Подставляя (П9.1.13) в (П9.1.12), получаем

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{ij}(f_1), C_{kl}(f_2)] &= \\ &= \int_{-T}^T \int e^{-j2\pi(f_1 u_1 + f_2 u_2)} \frac{2}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\sin 2\pi f (T - |u_1|)}{2\pi f} \frac{\sin 2\pi f (T - |u_2|)}{2\pi f} \times \\ &\times [\Gamma_{ik}(f+g)\Gamma_{jl}(f-g)e^{j2\pi g(u_1-u_2)} + \\ &+ \Gamma_{il}(f+g)\Gamma_{jk}(f-g)e^{j2\pi g(u_1+u_2)}] df dg du_1 du_2. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования, собирая одинаковые члены и производя некоторые упрощения, мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{ij}(f_1), C_{kl}(f_2)] &= \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{ik}(x) \frac{\sin \pi T (f_1 - x)}{\pi (f_1 - x)} \frac{\sin \pi T (f_2 + x)}{\pi (f_2 + x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{jl}(-y) \times \\ &\times \frac{\sin \pi T (f_1 + y)}{\pi (f_1 + y)} \frac{\sin \pi T (f_2 - y)}{\pi (f_2 - y)} dy + \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{il}(x) \frac{\sin \pi T (f_1 - x)}{\pi (f_1 - x)} \times \\ &\times \frac{\sin \pi T (f_2 - x)}{\pi (f_2 - x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{jk}(-y) \frac{\sin \pi T (f_1 + y)}{\pi (f_1 + y)} \frac{\sin \pi T (f_2 + y)}{\pi (f_2 + y)} dy. \quad (\text{П9.1.15}) \end{aligned}$$

Упрощение формулы. Формула (П9.1.15) является точной для гауссовских процессов. Ее можно упростить, если спектры процессов приближенно равны константе в диапазоне от f_1 до f_2 , так как в этом случае члены $\Gamma_{ik}(f_1)$ можно вынести за знак интеграла. В результате для таких случайных процессов, которые имеют приблизительно постоянный спектр в диапазоне частот от f_1 до f_2 , мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{ij}(f_1), C_{kl}(f_2)] &\approx \Gamma_{ik}(f_1)\Gamma_{jl}(-f_1) \left[\frac{\sin \pi T (f_1 + f_2)}{\pi T (f_1 + f_2)} \right]^2 + \\ &+ \Gamma_{il}(f_1)\Gamma_{jk}(-f_1) \left[\frac{\sin \pi T (f_1 - f_2)}{\pi T (f_1 - f_2)} \right]^2. \quad (\text{П9.1.16}) \end{aligned}$$

Равенство (П9.1.16) является точным для гауссовских белых шумов. В остальных случаях эта формула приближенная. Все полученные выше формулы применимы и в дискретном случае, если члены $\Gamma(f)$ умножить на Δ и проводить интегрирование по частоте от $-1/2\Delta$ до $1/2\Delta$. Так, формула (П9.1.16) в дискретном случае переходит в

$$\begin{aligned} \text{Cov}[C_{ij}(f_1), C_{kl}(f_2)] &\approx \Delta^2 \Gamma_{ik}(f_1)\Gamma_{jl}(-f_1) \left[\frac{\sin \pi N \Delta (f_1 + f_2)}{N \sin \pi \Delta (f_1 + f_2)} \right]^2 + \\ &+ \Delta^2 \Gamma_{il}(f_1)\Gamma_{jk}(-f_1) \left[\frac{\sin \pi N \Delta (f_1 - f_2)}{N \sin \pi \Delta (f_1 - f_2)} \right]^2. \quad (\text{П9.1.17}) \end{aligned}$$

Если в (П9.1.16) и (П9.1.17) положить $X_i = X_j = X_k = X_l = Z$, то получим формулы (6.3.17) и (6.3.15) для белого шума и более общую формулу (6.4.9) для шума, не являющегося белым.

Формулы (П9.1.16) и (П9.1.17) показывают, что при больших T ковариация двух спектральных оценок имеет порядок $1/T^2$ во всех случаях, кроме $f_1 = f_2$. Следовательно, с хорошей степенью приближения можно считать, что спектральные оценки, относящиеся к частотам, разнесенным больше чем на $1/T$, являются некоррелированными.

Обобщенная матрица ковариаций. Общие формулы (П9.1.16) и (П9.1.17) можно использовать для вывода обобщенной матрицы ковариаций (9.1.22). Например, член $\text{Cov}[L_{12}(f), Q_{12}(f)]$ можно получить следующим образом:

$$L_{12}(f) = \frac{1}{2} [C_{12}(f) + C_{12}(-f)] = \frac{1}{2} [C_{12}(f) + C_{21}(f)],$$

$$Q_{12}(f) = \frac{1}{2j} [C_{12}(f) - C_{12}(-f)] = \frac{1}{2j} [C_{12}(f) - C_{21}(f)].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[L_{12}(f), Q_{12}(f)] &= \text{Cov}\left[\frac{C_{12}(f) + C_{21}(f)}{2}, \frac{C_{12}(f) - C_{21}(f)}{2j}\right] = \\ &= \frac{1}{4j} \{\text{Cov}[C_{12}(f), C_{12}(f)] - \text{Cov}[C_{12}(f), C_{21}(f)] + \\ &\quad + \text{Cov}[C_{21}(f), C_{12}(f)] - \text{Cov}[C_{21}(f), C_{21}(f)]\}. \end{aligned}$$

Замена $\text{Cov}[C_{ij}(f), C_{kl}(f)]$ на (9.1.15) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \text{Cov}[L_{12}(f), Q_{12}(f)] &= \frac{1}{4j} [\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(-f)W^2(+) + \Gamma_{12}(f)\Gamma_{21}(-f)W^2(-) - \\ &\quad - \Gamma_{12}(f)\Gamma_{21}(-f)W^2(+) - \Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(-f)W^2(-) + \\ &\quad + \Gamma_{21}(f)\Gamma_{12}(-f)W^2(+) + \Gamma_{22}(f)\Gamma_{11}(-f)W^2(-) - \\ &\quad - \Gamma_{22}(f)\Gamma_{11}(-f)W^2(+) - \Gamma_{21}(f)\Gamma_{12}(-f)W^2(-)], \end{aligned}$$

где мы использовали обозначения (9.1.13) и (9.1.14). Последнее выражение сводится к

$$\begin{aligned} \text{Cov}[L_{12}(f), Q_{12}(f)] &= \\ &= \frac{1}{4j} \{W^2(+)[- \Gamma_{12}^2(f) + \Gamma_{12}^2(-f)] + W^2(-)[\Gamma_{12}^2(f) - \Gamma_{12}^2(-f)]\}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2(f) - \Gamma_{12}^2(-f) &= \Lambda_{12}^2(f) + 2j\Lambda_{12}(f)\Psi_{12}(f) - \Psi_{12}^2(f) - \\ &\quad - [\Lambda_{12}^2(f) - 2j\Lambda_{12}(f)\Psi_{12}(f) - \Psi_{12}^2(f)] = 4j\Lambda_{12}(f)\Psi_{12}(f), \end{aligned}$$

то, пренебрегая членом с $W^2(+)$, получим

$$\text{Cov}[L_{12}(f), Q_{12}(f)] \approx \Lambda_{12}(f) \Psi_{12}(f) W^2(-).$$

χ^2 -свойства оценок автоспектров. Рассмотрим гауссовский процесс $X_1(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией σ_1^2 . Спектральная оценка $C_{11}(f)$ имеет вид

$$\begin{aligned} C_{11}(f) &= \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} X_1(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 = \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \left[\int_{-T/2}^{T/2} X_1(t) \cos 2\pi ft dt \right]^2 + \left[\int_{-T/2}^{T/2} X_1(t) \sin 2\pi ft dt \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{T} [X_c^2(f) + X_s^2(f)], \end{aligned} \quad (\text{П9.1.18})$$

где $X_c(f)$ и $X_s(f)$ — соответственно косинус- и синус-преобразования процесса $X_1(t)$. Так как преобразование Фурье является линейной операцией, процессы $X_c(f)$ и $X_s(f)$ также будут гауссовскими. Из (П9.1.18) мы видим, что $C_{11}(f)$ есть сумма двух гауссовских случайных величин, возведенных в квадрат. Следовательно, $C_{11}(f)$ имеет χ^2 -распределение с двумя степенями свободы. Отсюда немедленно получаются результаты разд. 6.3.3.

Для негауссовских процессов преобразования $X_c(f)$ и $X_s(f)$ представляют собой взвешенные суммы зависящих от времени случайных величин X_i . Поэтому вышеупомянутые формулы будут приближенно верны и для негауссовских процессов.

Ковариация сглаженных спектральных оценок. Сглаженная спектральная оценка $\bar{C}_{ij}(f)$ получается из $C_{ij}(f)$ с помощью равенства

$$\bar{C}_{ij}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{ij}(g) \mathcal{W}(f-g) dg, \quad (\text{П9.1.19})$$

где $\mathcal{W}(f)$ — спектральное окно, соответствующее корреляционному окну $w(f)$. Отсюда

$$\bar{C}_{ij}(f) = \int_{-T}^T c_{ij}(u) w(u) e^{-j2\pi fu} du. \quad (\text{П9.1.20})$$

Ковариацию сглаженных спектральных оценок можно получить следующим образом. Так как

$$\bar{c}_{ij}(u) = c_{ij}(u) w(u), \quad (\text{П9.1.21})$$

то

$$\text{Cov}[\bar{c}_{ij}(u_1), \bar{c}_{kl}(u_2)] = w(u_1) w(u_2) \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)]. \quad (\text{П9.1.22})$$

Отсюда с помощью (П9.1.12) и (П9.1.22) получаем

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_2)] &= \\ &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T \omega(u_1) \omega(u_2) \text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)] e^{-j2\pi(f_1 u_1 + f_2 u_2)} du_1 du_2. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.23})$$

Далее, $\omega(u) = 0$ при $|u| > M$ и $M \ll T$. Следовательно, для $\text{Cov}[c_{ij}(u_1), c_{kl}(u_2)]$ в (П9.1.23) можно воспользоваться приближением (П9.1.14). В результате получим

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_2)] &\approx \int_{-T}^T \int \frac{\omega(u_1)}{T} \frac{\omega(u_2)}{T} e^{-j2\pi(f_1 u_1 + f_2 u_2)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} [\Gamma_{ik}(g) \Gamma_{jl}(-g) e^{j2\pi g(u_1 - u_2)} + \Gamma_{il}(g) \Gamma_{jk}(-g) e^{j2\pi g(u_1 + u_2)}] dg du_1 du_2. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.24})$$

Изменение порядка интегрирования даст

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_2)] &\approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1 - g) [\Gamma_{ik}(g) \Gamma_{jl}(-g) W(f_2 + g) + \\ &+ \Gamma_{il}(g) \Gamma_{jk}(-g) W(f_2 - g)] dg. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.25})$$

Если предположить, что функции Γ изменяются незначительно при изменении частоты в интервале, равном ширине полосы частот окна, то их можно вынести из-под знака интеграла. В результате (П9.1.25) переходит в

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_2)] &\approx \frac{\Gamma_{ik}(f_1) \Gamma_{jl}(-f_1)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1 - g) W(f_2 + g) dg + \\ &+ \frac{\Gamma_{il}(f_1) \Gamma_{jk}(-f_1)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1 - g) W(f_2 - g) dg. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.26})$$

Следовательно, если спектральные окна достаточно узки и перекрываются незначительно, то ковариация сглаженных оценок очень мала. При $f_1 = f_2$ (П9.1.26) дает

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_1)] &\approx \frac{\Gamma_{ik}(f_1) \Gamma_{jl}(-f_1)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W(f_1 - g) W(f_1 + g) dg + \\ &+ \frac{\Gamma_{il}(f_1) \Gamma_{jk}(-f_1)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(f_1 - g) dg. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.27})$$

Поскольку перекрытие окон незначительно, первым членом в правой части (П9.1.27) можно пренебречь. В результате, применяя

теорему Парсеваля, получим

$$\begin{aligned} \text{Cov} [\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_1)] &\approx \frac{\Gamma_{il}(f_1) \Gamma_{jk}(-f_1)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(g) dg = \\ &= \frac{\Gamma_{il}(f_1) \Gamma_{jk}(-f_1)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2(u) du. \end{aligned} \quad (\text{П9.1.28})$$

Формулой (П9.1.27) можно воспользоваться для вывода обобщенной матрицы ковариаций сглаженных спектральных оценок. Как отмечалось в разд. 9.2.1, эта матрица совпадает с матрицей (9.1.22), за исключением того, что множитель $W^2(-)$ надо заменить на I/T , где

$$I = \int_{-M}^M \omega^2(u) du.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ П9.2

ЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДВУМЕРНОГО РЯДА

Ниже приведена логическая схема вычислительной программы CROSSPEC, входными значениями для которой служат выборочные оценки авто- и взаимных ковариаций $\text{COV}(K, I, J)$ или $\text{DCOV}(K, I, J)$, $K = 0, \text{MAXM}, I = 1, 2, J = 1, 2$, из программы MULTICOR, описанной в Приложении П5.3. Дополнительными входными величинами являются DELTA, NF, $M \ll \text{MAXM} - |S|$ и S — число запаздываний, требуемое для выравнивания процессов (так чтобы наибольшая по модулю взаимная ковариация была в нуле). Выход состоит из печати ковариаций (повторный контроль), сглаженных автоспектров для каждой точки отсечения M , фазового спектра, квадрата спектра когерентности и графиков логарифмов автоспектров, а также квадрата спектра когерентности и фазового спектра, которые строятся вместе для всех используемых точек отсечения.

Программа CROSSPEC

- 1) *Входные* параметры N, MAXM, DELTA, NF, S.
- 2) *Произвести считывание* IDENT (1), COV(K, 1, 1), K = 0, MAXM
IDENT (2), COV(K, 2, 2); K = 0, MAXM
COV(K, 1, 2), K = 0, MAXM
COV(K, 2, 1), K = 0, MAXM.
- 3) *Произвести считывание* M, положить COV(K) =
= COV(K, 1, 1), K = 0, MAXM.

- 4) Вызвать подпрограмму AUTOSPEC. (Приложение П7.1)
- 5) Запомнить $SPEC(K, 1) = SPEC(K)$, $K = 0, NF$.
- 6) Положить $COV(K) = COV(K, 2, 2)$, $K = 0, MAXM$.
- 7) Вызвать подпрограмму AUTOSPEC.
- 8) Запомнить $SPEC(K, 2) = SPEC(K)$, $K = 0, NF$.
- 9) Вызвать подпрограмму EVOD.

Подпрограмма EVOD

Вычислить $EV(K) = COV(K + S, 1, 2) + COV(K - S, 2, 1)$,
 $K = 0, M$

$$OD(K) = COV(K + S, 1, 2) - COV(K - S, 2, 1), K = 0, M$$

(Отметим, что $COV(K, 1, 2) = COV(-K, 2, 1)$.)

- 10) Вызвать подпрограмму CROSPEC.

Подпрограмма CROSPEC

Вычислить сглаженные коспектр и квадратурный спектр и квадрат взаимного амплитудного спектра

$$COSPEC(I) = 2. * DELTA * \left\{ EV(0) + 2. * \sum_{K=1}^{M-1} EV(K) W(K) \cos \frac{\pi KI}{NF} \right\}$$

$$QSPEC(I) = 4. * DELTA * \sum_{K=1}^{M-1} OD(K) W(K) \sin \frac{\pi KI}{NF}$$

$$SQ(I) = COSPEC(I) * COSPEC(I) + QSPEC(I) * QSPEC(I)$$

Как и в подпрограмме AUTOSPEC, преобразование Фурье можно выполнить очень быстро, воспользовавшись либо алгоритмом БПФ, либо алгоритмом, приводимым ниже.

- 11) Вычислить $PHASE(K) = ARCTAN(-QSPEC(K)/COSPEC(K))$
 $COHSQ(K) = SQ(K)/(SPEC(K, 1) * SPEC(K, 2))$.

- 12) Вычислить $LOGSPEC(K, 1) = LOG_{10}(SPEC(K, 1))$
 $LOGSPEC(K, 2) = LOG_{10}(SPEC(K, 2))$,

соблюдая предостережения (5) из подпрограммы AUTOSPEC.

- 13) Напечатать сглаженные автоспектры $SPEC(K, 1)$, $SPEC(K, 2)$, фазу $PHASE(K)$, квадрат коэффициента когерентности $COHSQ(K)$, ширину полосы частот окна B и число степеней свободы D .

- 14) Построить на одном графике:

$LOGSPEC(K, 1)$ для всех использованных значений M ,

$LOGSPEC(K, 2)$ для всех использованных значений M ,

$PHASE(K)$

$COHSQ(K)$

Алгоритм

Чтобы найти COSPEC (I), QSPEC (I),

положить $C = \cos \frac{\pi I}{NF}$, $V_0 = 0.$, $V_1 = 0.$

$SN = \sin \frac{\pi I}{NF}$, $Z_0 = 0.$, $Z_1 = 0.$

До 1, $K = M - 1$, 1

$V_2 = 2. * C * V_1 - V_0 + W(K) * EV(K)$

$Z_2 = 2. * C * Z_1 - Z_0 + W(K) * OD(K)$

$V_0 = V_1$

$V_1 = V_2$

$Z_0 = Z_1$

$Z_1 = Z_2$

$COSPEC(I) = 2. * DELTA * \{EV(0) + 2. * (V_1 * C - V_0)\}$

$QSPEC(I) = 4. * DELTA * Z_1 * SN.$

ПРИЛОЖЕНИЕ П9.3

ВЫБОРОЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ДАННЫХ ИЗ ПРИЛОЖЕНИЯ П8.1

Таблица П9.1

Выборочные корреляции данных из табл. П8.1

| k | | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0-7 | 1,000 | 0,505 | 0,071 | -0,139 | -0,137 | -0,092 | -0,124 | -0,092 |
| 8-15 | 0,009 | 0,103 | 0,110 | 0,028 | -0,097 | -0,096 | -0,025 | 0,011 |
| 16-23 | -0,031 | -0,019 | 0,116 | 0,195 | 0,138 | 0,049 | -0,010 | 0,058 |
| 24-31 | 0,083 | -0,031 | -0,167 | -0,140 | -0,069 | 0,025 | 0,026 | -0,080 |

Автокорреляции $r_{11}(k)$

| | | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0-7 | -0,075 | 0,409 | 0,452 | 0,320 | 0,195 | 0,080 | 0,123 | -0,004 |
| 8-15 | -0,050 | -0,035 | 0,056 | 0,133 | 0,082 | -0,033 | -0,098 | -0,048 |
| 16-23 | -0,039 | -0,071 | -0,121 | -0,110 | -0,059 | 0,044 | 0,072 | 0,156 |
| 24-31 | 0,234 | 0,245 | 0,153 | 0,026 | -0,037 | -0,027 | -0,020 | 0,004 |

Взаимные корреляции $r_{12}(k)$

| | | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0-7 | -0,075 | -0,498 | -0,485 | -0,278 | -0,114 | -0,050 | 0,042 | 0,109 |
| 8-15 | 0,087 | -0,005 | -0,066 | -0,067 | 0,017 | 0,040 | 0,043 | 0,001 |
| 16-23 | -0,049 | 0,085 | 0,175 | 0,101 | -0,077 | -0,102 | -0,042 | 0,043 |
| 24-31 | -0,014 | -0,064 | 0,001 | 0,081 | 0,063 | 0,027 | -0,064 | -0,049 |

Взаимные корреляции $r_{21}(k)$

| | | | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0-7 | 1,000 | 0,536 | 0,186 | -0,056 | -0,121 | -0,080 | -0,066 | -0,048 |
| 8-15 | 0,006 | 0,054 | -0,020 | 0,005 | -0,060 | -0,042 | 0,018 | 0,025 |
| 16-23 | -0,051 | -0,084 | -0,063 | 0,014 | 0,166 | 0,107 | 0,019 | 0,032 |
| 24-31 | -0,063 | -0,081 | -0,155 | -0,045 | -0,049 | -0,011 | -0,080 | -0,096 |

Автокорреляции $r_{22}(k)$

Таблица 119.2

Выборочные корреляции данных из табл. П8.2

| k | | | | | | | | |
|---------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0-7 | 1,000 | 0,540 | 0,335 | 0,219 | 0,262 | 0,274 | 0,151 | 0,056 |
| 8-15 | 0,030 | 0,058 | 0,017 | -0,035 | -0,113 | -0,139 | -0,101 | -0,101 |
| 16-23 | -0,107 | -0,123 | -0,066 | 0,026 | 0,037 | 0,024 | -0,027 | 0,016 |
| 24-31 | 0,059 | 0,052 | -0,030 | -0,043 | -0,062 | -0,055 | -0,028 | -0,091 |
| Автокорреляции $r_{11}(k)$ | | | | | | | | |
| 0-7 | 0,013 | 0,098 | 0,114 | 0,116 | 0,176 | 0,264 | 0,338 | 0,336 |
| 8-15 | 0,369 | 0,460 | 0,752 | 0,661 | 0,505 | 0,385 | 0,328 | 0,307 |
| 16-23 | 0,195 | 0,081 | 0,017 | 0,038 | 0,031 | 0,033 | -0,012 | -0,040 |
| 24-31 | -0,016 | 0,003 | 0,012 | 0,008 | 0,034 | 0,062 | 0,074 | 0,059 |
| Взаимные корреляции $r_{12}(k)$ | | | | | | | | |
| 0-7 | 0,013 | -0,057 | -0,131 | -0,147 | -0,152 | -0,172 | -0,171 | -0,163 |
| 8-15 | -0,120 | -0,089 | -0,074 | -0,071 | -0,042 | 0,003 | 0,018 | -0,012 |
| 16-23 | -0,101 | -0,095 | -0,105 | -0,109 | -0,143 | -0,185 | -0,209 | -0,191 |
| 24-31 | -0,163 | -0,079 | -0,026 | 0,003 | -0,013 | -0,009 | -0,007 | 0,073 |
| Взаимные корреляции $r_{21}(k)$ | | | | | | | | |
| 0-7 | 1,000 | 0,848 | 0,678 | 0,546 | 0,473 | 0,400 | 0,299 | 0,200 |
| 8-15 | 0,145 | 0,124 | 0,084 | 0,071 | 0,043 | 0,044 | 0,051 | 0,041 |
| 16-23 | 0,028 | 0,024 | 0,026 | 0,020 | 0,010 | -0,012 | -0,018 | 0,012 |
| 24-31 | 0,045 | 0,058 | 0,029 | 0,023 | 0,030 | 0,037 | 0,002 | -0,026 |
| Автокорреляции $r_{22}(k)$ | | | | | | | | |

ОЦЕНИВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В этой главе рассматривается задача оценивания частотной характеристики линейной системы по имеющимся записям, соответствующим входу и выходу системы.

Во введении обсуждается решение этой задачи с помощью оценивания функции отклика на единичный импульс. Оказывается, что такой подход неудовлетворителен как из-за того, что он требует оценивания слишком большого числа параметров, так и из-за того, что выборочные оценки при таком подходе имеют плохие статистические свойства. Это происходит потому, что оценки соседних значений функции отклика на единичный импульс сильно коррелированы. От этих трудностей можно избавиться, если перейти к оцениванию частотной характеристики с помощью анализа взаимных спектров. Показано, как можно получить хорошие оценки функций усиления и фазы с помощью метода стягивания окна, а также выводятся доверительные интервалы для этих функций. Мы приходим к выводу, что, хотя анализ взаимных спектров и является иногда полезным исследовательским средством при оценивании характеристик линейных систем, все же конечной целью такой работы должно быть оценивание параметров некоторой модели методом наименьших квадратов, видоизмененным так, чтобы учесть корреляцию остаточных ошибок.

10.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы будем иметь дело со второй из обсуждавшихся в начале гл. 8 задач для двумерных временных рядов, а именно с задачей, в которой *известно*, что случайные процессы $X_1(t)$, $X_2(t)$ являются соответственно входом и выходом некоторой физической системы. Имея реализации этих процессов $x_1(t)$, $x_2(t)$ на интервале $0 \leq t \leq T$, требуется оценить характеристики этой системы. Например, $x_1(t)$ могла бы быть скоростью впуска газа в газовую печь, а $x_2(t)$ — выходным продуктом, как показано на рис. 8.3.

Проблемы такого рода часто возникают при изучении промышленных процессов. Здесь можно различать два случая: когда $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются обычными рабочими записями и когда вход

$x_1(t)$ меняют умышленно, а $x_2(t)$ — соответствующий этим изменениям выход. Опасности, возникающие при анализе данных первого типа, хорошо известны. Наиболее важная из них заключается в том, что любое связывающее $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соотношение, согласующееся с наблюдаемыми данными, может оказаться совершенно бесполезным для предсказания изменений $x_2(t)$, вызванных преднамеренными изменениями $x_1(t)$. Это может произойти, например, если $x_1(t)$ непосредственно не влияет на $x_2(t)$, но коррелировано с некоторой третьей переменной $x_3(t)$, непосредственно воздействующей на $x_2(t)$. Поэтому данные второго типа предпочтительней для анализа систем, однако их не всегда можно получить, так как эксперименты с такими системами иногда невозможны. Заметим также, что классические методы оценивания характеристик системы с помощью единичного скачка или синусоидальной волны могут оказаться неудачными из-за больших флуктуаций, возникающих внутри системы. Поэтому необходимо обратиться к статистическим методам, рассчитанным на то, что внутри системы имеется шум.

Оценивание функций отклика на единичный импульс. Для того чтобы оценить характеристики системы, примем прежде всего упрощающее предположение, что система *линейна*. В таком случае соотношение между входом и выходом можно точно описать с помощью динамической случайной модели

$$X_2(t) - \mu_2 = \int_0^{\infty} h(u) [X_1(t-u) - \mu_1] du + Z(t), \quad (10.1.1)$$

где $h(u)$ — функция отклика системы на единичный импульс и $Z(t)$ — шум, или член ошибки, который *предполагается* некоррелированным со входом $X_1(t)$. Вероятно, модель (10.1.1) неадекватна в некоторых случаях из-за нелинейности соотношения, связывающего вход и выход, либо из-за обратной связи входа с выходом через регулятор, как описано в [1], либо, наконец, из-за влияния других входных переменных на выход (гл. 11). Но в настоящий момент мы предположим, что модель (10.1.1) адекватно описывает реальную ситуацию. Это будет действительно так, если изменения $X_1(t)$ достаточно малы и нет обратной связи.

Для дискретного случая модель (10.1.1) имеет вид

$$X_{2t} - \mu_2 = \sum_{m=0}^{\infty} h_m (X_{1t-m} - \mu_1) + Z_t. \quad (10.1.2)$$

Этой моделью часто пользуются для оценивания весов h_m по записям входа и выхода. Такой подход может быть неудовлетворительным по двум причинам. Во-первых, число весов h_m , которое нужно знать для характеристики системы, может оказаться

большим. Поскольку физические системы обычно можно описать дифференциальными уравнениями вида (2.3.18), содержащими небольшое число параметров, разумнее параметризовать задачу, подбирая следующую модель:

$$\begin{aligned} X_{2t} - \mu_2 - \alpha_1 (X_{2t-1} - \mu_2) - \dots - \alpha_m (X_{2t-m} - \mu_2) = \\ = \beta_0 (X_{1t} - \mu_1) + \beta_1 (X_{1t-1} - \mu_1) + \dots + \beta_l (X_{1t-l} - \mu_1) + Z_t. \end{aligned} \quad (10.1.3)$$

При такой параметризации число оцениваемых параметров остается небольшим. Во-вторых, оценки метода наименьших квадратов для h_m , полученные из (10.1.2), сильно коррелированы, так же как оценки авто- и взаимных корреляционных функций. Пример такой корреляции оценок h_m будет приведен в разд. 10.2.

Оценивание частотных характеристик. Характеристики системы можно оценивать также в частотной области с помощью спектрального анализа. Основное преимущество такого подхода состоит в том, что он устраняет трудности, обусловленные второй из перечисленных выше причин. В разд. 10.3 будет показано, что с помощью взаимного спектрального анализа можно оценить частотную характеристику

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(u) e^{-i2\pi fu} du, \quad (10.1.4)$$

взяв в качестве ее оценки функцию

$$\hat{H}(f) = \frac{\bar{C}_{12}(f)}{\bar{C}_{11}(f)}. \quad (10.1.5)$$

В (10.1.5) $\bar{C}_{12}(f)$ — сглаженная оценка взаимного спектра входа и выхода, а $\bar{C}_{11}(f)$ — сглаженная оценка спектра входа. Значения оценки (10.1.5) на соседних частотах некоррелированы. Следовательно, оценка функции $h(u)$, полученная с помощью обратного преобразования Фурье от (10.1.5), будет гораздо более гладкой, чем при непосредственном оценивании $h(u)$.

Поскольку используемый в спектральном анализе метод стягивания окна сам подстраивается под локальные свойства частотной характеристики, можно ожидать, что в частотной области найдутся меньше параметров, чем во временной. Однако при спектральном анализе требуется все же оценивать больше параметров, чем при подгонке надлежащим образом выбранной параметрической модели. Поэтому в работах подобного рода как окончательную цель следует рассматривать параметрическое оценивание. Основное значение спектрального анализа при анализе систем состоит в том, что он служит методом, полезным для выдвижения возможных моделей. Впрочем спектральный анализ имеет и не-

сколько преимуществ по сравнению с параметрическим подходом. Во-первых, как показано в гл. 11, его легко обобщить на многомерные системы. Во-вторых, во многих практических задачах инженеры заинтересованы в описании функций усиления и фазы лишь в *очень ограниченном* диапазоне частот, в то время как параметрическая модель дает описание в гораздо более широкой области. И наконец, благодаря гибкости спектрального подхода временные ряды можно расфильтровать на компоненты, соответствующие различным частотным диапазонам, и затем анализировать их по отдельности. В некоторых приложениях это необходимо, ибо предположение о том, что одна и та же параметрическая модель верна в широком диапазоне частот, может быть неоправдано.

10.2. ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОТКЛИКА НА ЕДИНИЧНЫЙ ИМПУЛЬС

10.2.1. Непосредственное оценивание функций отклика на единичный импульс

В разд. 10.1 утверждалось, что непосредственное оценивание функции отклика на единичный импульс $h(u)$ представляет собой неразумный подход. Чтобы проиллюстрировать трудности, скрывающиеся в этом подходе, рассмотрим искусственные данные, полученные с помощью линейной модели

$$\begin{aligned} X_{2t} &= X_t + Z_t, \\ X_t &= 0,25X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + X_{1t}, \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

где Z_t — белый шум и X_{1t} — вход системы. Выход системы X_{2t} равен сумме белого шума Z_t и отклика линейной системы X_t на входной сигнал X_{1t} . Используемые для анализа данные, состоявшие из пар значений x_{1t} и x_{2t} , приведены в Приложении П10.1.

К этим данным подбиралась модель вида

$$(X_{2t} - \mu_2) = \sum_{m=0}^M h_m (X_{1t-m} - \bar{X}_1) + Z_t, \quad (10.2.2)$$

где \bar{X}_1 — средний уровень входного процесса. Поскольку значение M , за которым h_m становятся пренебрежимо малыми, неизвестно, нужно попробовать несколько значений M и остановиться тогда, когда выборочные оценки h_m станут малы по сравнению с уровнем шума. При фиксированном M веса h_m можно оценить методом наименьших квадратов, т. е. предполагая, что шум белый, надо минимизировать выражение

$$S = \sum_{t=M+1}^N \left[(x_{2t} - \mu_2) - \sum_{m=0}^M h_m (x_{1t-m} - \bar{x}_1) \right]^2 \quad (10.2.3)$$

по μ_2 и h_m , $m = 0, 1, \dots, M$. Это приводит к нормальным уравнениям

$$\begin{aligned} & \sum_{t=M+1}^N (x_{2t} - \bar{x}_2)(x_{1t-k} - \bar{x}_1) = \\ & = \hat{h}_0 \sum_{t=M+1}^N (x_{1t} - \bar{x}_1)(x_{1t-k} - \bar{x}_1) + \dots + \hat{h}_M \sum_{t=1}^N (x_{1t-M} - \bar{x}_1)(x_{1t-k} - \bar{x}_1), \\ & k = 0, 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

Заметим, что уравнения (10.2.4) вполне справедливы лишь для белого шума Z_t . Но так как первоначально корреляционная структура шума неизвестна, оценивание подразделяется на два этапа. Сначала из уравнений (10.2.4) вычисляются выборочные оценки \hat{h}_m и оценивается автокорреляционная функция остаточных ошибок. Зная эту функцию, можно предложить более эффективный способ оценивания, который учитывал бы корреляционную структуру шума. Пример такого подхода приводится в разд. 10.2.2.

Так как в рассматриваемом нами примере известно, что шум Z_t белый, мы использовали нормальные уравнения (10.2.4) для оценивания параметров по ряду из 100 членов, полученных с помощью модели (10.2.1). В табл. 10.1 приведены выборочные оценки \hat{h}_m для значений $M = 10, 12, 16$. Сравнение со значениями теоретической функции отклика на единичный импульс показывает, что выборочные оценки плохие. Это объясняется большой дисперсией оценок и их сильной корреляцией, проявляющейся в заметных колебаниях \hat{h}_m при больших m .

10.2.2. Параметрическое оценивание функций отклика на единичный импульс

Правильный параметрический анализ во временной области включает в себя оценивание параметров модели (10.1.3) (см. [1]). Число параметров, которые нужны для такой модели, можно определить, увеличивая количество членов в обеих частях равенства (10.1.3) и оценивая каждый раз дисперсию и автокорреляционную функцию остаточных ошибок. Модель является адекватной, когда нет признаков корреляции остаточных ошибок (эти ошибки нужно проверить с помощью одного из двух критериев белого шума, обсуждавшихся в разд. 5.3.5 и 6.3.2).

Сначала мы испробовали модель вида

$$X_{2t} - \mu_2 = \alpha_1 (X_{2t-1} - \mu_2) + \alpha_2 (X_{2t-2} - \mu_2) + \beta_0 (X_{1t} - \bar{X}_1) + Z_t \quad (10.2.5)$$

для данных, полученных из модели (10.2.1). Предполагая, что Z_t — белый шум, нормальные уравнения можно вывести,

Таблица 10.1

Теоретическая функция отклика на единичный импульс и ее выборочные оценки для трех точек отсчета

 h_m

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------------------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| Теоретические значения | 1,000 | 0,250 | -0,438 | -0,234 | 0,154 | 0,055 | -0,066 | -0,044 |
| $M = 10$ | 1,056 | 0,342 | -0,572 | 0,037 | -0,141 | 0,373 | -0,249 | 0,107 |
| $M = 12$ | 1,018 | 0,427 | -0,716 | 0,210 | -0,320 | 0,561 | -0,443 | 0,313 |
| $M = 16$ | 1,029 | 0,424 | -0,692 | 0,198 | -0,307 | 0,527 | -0,438 | 0,284 |

 h_m

| m | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|------------------------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| Теоретические значения | 0,022 | 0,028 | -0,004 | -0,014 | -0,001 | 0,006 | 0,002 | -0,002 | 0,000 |
| $M = 10$ | -0,289 | 0,220 | -0,163 | 0,201 | -0,112 | 0,089 | 0,089 | 0,074 | -0,010 |
| $M = 12$ | -0,518 | 0,471 | -0,417 | 0,201 | -0,112 | -0,031 | 0,089 | 0,074 | -0,010 |
| $M = 16$ | -0,504 | 0,452 | -0,412 | 0,181 | -0,062 | -0,031 | 0,089 | 0,074 | -0,010 |

минимизируя сумму квадратов

$$\sum_{t=3}^N [x_{2t} - \mu_2 - \alpha_1 (x_{2t-1} - \mu_2) - \alpha_2 (x_{2t-2} - \mu_2) - \beta_0 (x_{1t} - \bar{x}_1)]^2$$

по μ_2 , α_1 , α_2 и β_0 .

Считая, что входной и выходной временные ряды стационарны, нормальные уравнения можно заменить более простыми приближенными уравнениями, как описано в разд. 5.4.1, что в результате приводит к приближенным равенствам

$$\begin{aligned} c_{22}(1) &\approx \hat{\alpha}_1 c_{22}(0) + \hat{\alpha}_2 c_{22}(1) + \hat{\beta}_0 c_{12}(-1), \\ c_{22}(2) &\approx \hat{\alpha}_1 c_{22}(1) + \hat{\alpha}_2 c_{22}(0) + \hat{\beta}_0 c_{12}(-2), \\ c_{12}(0) &\approx \hat{\alpha}_1 c_{12}(-1) + \hat{\alpha}_2 c_{12}(-2) + \hat{\beta}_0 c_{11}(0). \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

Если взять для ковариаций их выборочные оценки из табл. П10.2, то решение системы уравнений (10.2.6) будет следующим: $\hat{\alpha}_1 = 0,072$, $\hat{\alpha}_2 = -0,276$, $\hat{\beta}_0 = 1,182$. Затем были вычислены остаточные ошибки по формуле

$$\begin{aligned} \hat{z}_t &= x_{2t} - \bar{x}_2 - \hat{\alpha}_1 (x_{2t-1} - \bar{x}_2) - \hat{\alpha}_2 (x_{2t-2} - \bar{x}_2) - \hat{\beta}_0 (x_{1t} - \bar{x}_1) = \\ &= (x_{2t} - 0,21) - 0,072 (x_{2t-1} - 0,21) + \\ &\quad + 0,276 (x_{2t-2} - 0,21) - 1,182 (x_{1t} - 0,17) \end{aligned}$$

и сосчитаны их автокорреляции. Первые 10 значений выборочной автокорреляционной функции остаточных ошибок приведены в табл. 10.2. Эти автокорреляции противоречат гипотезе о том, что остаточные ошибки z_t являются реализацией белого шума. Они наводят на мысль, что модель (10.2.5) нужно подправить и взять модель

$$\begin{aligned} X_{2t} - \mu_2 &= \alpha_1 (X_{2t-1} - \mu_2) + \alpha_2 (X_{2t-2} - \mu_2) + \\ &\quad + \beta_0 (X_{1t} - \bar{X}_1) + Z_t + \delta_1 Z_{t-1} + \delta_2 Z_{t-2}, \end{aligned}$$

чтобы учесть свойства скользящего среднего, которые проявляют автокорреляции остаточных ошибок.

Таблица 10.2

Автокорреляции остаточных ошибок после подгонки динамической модели

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------------|-------|------|-------|------|------|------|-------|-------|------|-------|
| $r_{zz}(k)$ | -0,14 | 0,31 | -0,02 | 0,08 | 0,05 | 0,05 | -0,07 | -0,08 | 0,00 | -0,12 |

При подгонке авторегрессионной модели для пары временных рядов вход — выход в том случае, когда на выходе имеется шум,

легко видеть, что остаточные ошибки будут иметь свойства процесса скользящего среднего. Порядок этого процесса равен порядку системы, связывающей пару рядов. Следовательно, в нашем случае, для того чтобы остаточные ошибки стали белым шумом, нужно взять два параметра скользящего среднего: δ_1 и δ_2 .

Был выбран некоторый набор значений пар (δ_1, δ_2) , и входной и выходной ряды пропускались через следующие фильтры:

$$y_{2t} - \delta_1 y_{2t-1} - \delta_2 y_{2t-2} = x_{2t},$$

$$y_{1t} - \delta_1 y_{1t-1} - \delta_2 y_{1t-2} = x_{1t}.$$

Затем для профильтрованных рядов y_{2t}, y_{1t} при каждой паре значений (δ_1, δ_2) вновь подгонялась модель (10.2.5) и вычислялись выборочные оценки (10.2.6) для параметров α_1, α_2 и β_0 . Окончательно были выбраны те оценки, которые минимизировали сумму квадратов остаточных ошибок. Для нашего примера наилучшими значениями δ_1 и δ_2 оказались $\hat{\delta}_1 = -0,3$ и $\hat{\delta}_2 = 0,8$, а соответствующие им выборочные оценки параметров подправленной системы были равны: $\hat{\alpha}_1 = 0,251$, $\hat{\alpha}_2 = -0,479$, $\hat{\beta}_0 = 1,10$. Выборочная автокорреляционная функция для этой модели принимает малые значения, что подтверждает адекватность модели.

Функция отклика на единичный импульс, соответствующая подправленной модели, приведена в табл. 10.3. Видно, что она гораздо лучше согласуется с теоретической, чем та, которая получена при непосредственном оценивании.

Таблица 10.3

Теоретическая функция отклика на единичный импульс и ее выборочные оценки, полученные при параметрическом оценивании

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| Теоретические значения h_m | 1,00 | 0,250 | -0,438 | -0,234 | 0,154 | 0,055 |
| Параметрическое оценивание h_m | 1,10 | 0,276 | -0,458 | -0,235 | 0,160 | 0,153 |
| m | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| Теоретические значения h_m | -0,066 | -0,044 | 0,022 | 0,028 | -0,004 | |
| Параметрическое оценивание h_m | -0,038 | -0,083 | -0,003 | 0,039 | 0,011 | |

10.3. ОЦЕНИВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

10.3.1. Оценки функций усиления и фазовой характеристики

Чтобы можно было применять спектральные методы для оценивания частотных характеристик, необходимо отбросить условие физической реализуемости системы: $h(u) = 0$ при $u < 0$, и рассмотреть модель

$$X_2(t) - u_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) [X_1(t-u) - \bar{X}_1] du + Z(t).$$

Если шум Z_t белый, то с помощью рассуждений, аналогичных использованным в Приложении П5.1, можно показать, что выборочная оценка наименьших квадратов $\hat{h}(u)$ для функции $h(u)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$c_{12}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(v) c_{11}(u-v) dv, \quad -T \leq u \leq T. \quad (10.3.1)$$

Если данные получены из линейной физической системы, то условие $h(u) = 0$ при $u < 0$ будет автоматически выполнено, если не учитывать выборочные ошибки, обусловленные конечной длиной записи. Фактически, если бы мы имели запись бесконечной длины, то уравнение (10.3.1) было бы справедливо для функции $\hat{h}(u)$, тождественно равной нулю при $u < 0$.

Решение интегрального уравнения (10.3.1) можно существенно упростить с помощью преобразования Фурье. Так, если от обеих частей (10.3.1) взять преобразования Фурье, то получим

$$C_{12}(f) = \hat{H}(f) C_{11}(f), \quad (10.3.2)$$

где

$$\hat{H}(f) = \int_0^{\infty} \hat{h}(u) e^{-j2\pi f u} du.$$

Отсюда оценка частотной характеристики равна

$$\hat{H}(f) = \frac{C_{12}(f)}{C_{11}(f)}, \quad (10.3.3)$$

т. е. оценка равна отношению оценки взаимного спектра к оценке входного спектра. Выражение (10.3.3) можно переписать в виде

$$\hat{G}(f) e^{j\hat{F}(f)} = \frac{A_{12}(f)}{C_{11}(f)} e^{jF_{12}(f)}, \quad (10.3.4)$$

где $\hat{H}(f) = \hat{G}(f) e^{i\hat{F}(f)}$. Таким образом, оценки функций усиления и фазы имеют вид

$$\hat{G}(f) = \frac{A_{12}(f)}{C_{11}(f)} \quad (10.3.5)$$

и

$$\hat{F}(f) = F_{12}(f). \quad (10.3.6)$$

В разд. 9.1.1 было показано, что дисперсию оценки фазового спектра в первом приближении можно считать не зависящей от длины записи T . Поскольку дисперсии функций $A_{12}(f)$ и $C_{11}(f)$ точно так же можно считать не зависящими от T , то дисперсия оценки $\hat{G}(f)$ не зависит от T . Следовательно, оценки (10.3.5) и (10.3.6) необходимо сгладить, чтобы уменьшить их дисперсию.

Один способ, с помощью которого можно этого добиться, состоит в том, что вместо несглаженных оценок в (10.3.5) и (10.3.6) подставляют их сглаженные варианты. Это приводит к следующим сглаженным оценкам функций усиления и фазы:

$$\bar{G}(f) = \frac{\bar{A}_{12}(f)}{\bar{C}_{11}(f)}, \quad (10.3.7)$$

$$\bar{F}(f) = \arctg \left[-\frac{\bar{Q}_{12}(f)}{\bar{L}_{12}(f)} \right]. \quad (10.3.8)$$

Смещения и ковариации этих оценок можно вывести с помощью методов, применявшихся в разд. 9.2. Другой способ сглаживания, рассматриваемый в следующем разделе, получается, если решать задачу оценивания частотной характеристики *методом наименьших квадратов в частотной области*. Этот подход имеет то преимущество, что приближенные доверительные интервалы вычисляются с помощью распределений, возникающих в методе наименьших квадратов, а не с помощью первых двух моментов спектральных оценок, как это делается в первом способе сглаживания.

10.3.2. Применение метода наименьших квадратов в частотной области

В этом разделе показано, что задача оценивания частотной характеристики формально эквивалентна задаче оценивания регрессии методом наименьших квадратов, проводимого на каждой из частот. Показано также, что многие из формул метода наименьших квадратов, выведенные в разд. 4.3, можно без изменений перенести в частотную область.

В разд. 6.4.1 было доказано, что равенство (10.1.1) приближенно выполняется для двух конечных отрезков процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$, если только отклик на единичный импульс $h(u)$ убывает

практически до нуля за время, малое по сравнению с T . Поэтому, если обозначить

$$X_i(f) = \int_0^T X_i(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

то преобразование Фурье выражения (10.1.1) запишется в виде

$$X_2(f) \approx H(f) X_1(f) + Z(f). \quad (10.3.9)$$

Далее, (10.3.9) также можно записать в виде

$$Z(f) \approx [X_2(f) - X_1(f) \hat{H}(f)] + X_1(f) [\hat{H}(f) - H(f)]$$

и, следовательно,

$$|Z(f)|^2 \approx |X_2(f) - X_1(f) \hat{H}(f)|^2 + |X_1(f)|^2 |\hat{H}(f) - H(f)|^2. \quad (10.3.10)$$

Перекрестные члены исчезают, так как из (10.3.2) следует, что

$$X_1^*(f) X_2(f) = \hat{H}(f) |X_1(f)|^2.$$

Отметим, что представление (10.3.10) по форме аналогично разложению (4.3.10) остаточной суммы квадратов в обычном регрессионном анализе, проводимом методом наименьших квадратов. Из (10.3.9) получаем наилучшую выборочную оценку шума на частоте f

$$\hat{Z}(f) = X_2(f) - \hat{H}(f) X_1(f).$$

Разделив (10.3.10) на T , находим

$$C_{ZZ}(f) \approx C_{\hat{Z}\hat{Z}}(f) + C_{11}(f) |\hat{H}(f) - H(f)|^2. \quad (10.3.11)$$

Входящий в (10.3.11) выборочный спектр процесса, образованного остаточными ошибками, можно вычислить с помощью (10.3.9). В результате получим

$$\begin{aligned} C_{\hat{Z}\hat{Z}}(f) &= \frac{1}{T} |\hat{Z}(f)|^2 = \frac{1}{T} |X_2(f) - X_1(f) \hat{H}(f)|^2 = \\ &= \frac{1}{T} \left[|X_2(f)|^2 - \frac{|X_1(f) X_2(f)|^2}{|X_1(f)|^2} \right] = \frac{|X_2(f)|^2}{T} [1 - K_{12}^2(f)], \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

где $K_{12}^2(f)$ — выборочный спектр квадрата коэффициента когерентности. Но в разд. 9.1.2 было показано, что $K_{12}^2(f) \equiv 1$, так что,

$$C_{\hat{Z}\hat{Z}}(f) = 0.$$

Из равенства (10.3.11) следует, что имеющиеся у $C_{ZZ}(f)$ две степени свободы целиком затрачиваются на регрессионный член $|X_1(f)|^2 \cdot |\hat{H}(f) - H(f)|^2$. Таким образом, из-за того, что выборочным автоспектру и взаимному спектру соответствует узкое спектр-

ральное окно, вся информация на каждой из частот f полностью уходит на оценивание функций усиления и фазы и не остается *никакой информации* на оценивание спектра шума. Сейчас мы покажем, что это положение можно исправить с помощью сглаживания.

10.3.3. Применение метода наименьших квадратов к сглаженным оценкам в частотной области

В этом разделе показано, что примененный в предыдущем разделе метод наименьших квадратов можно видоизменить так, что получатся эффективные сглаженные оценки функций усиления и фазы линейной системы, а также спектра шума $\Gamma_{ZZ}(f)$. Затем мы покажем, как использовать эти оценки при построении критерия значимости для проверки гипотезы о равенстве нулю истинной когерентности и при выводе приближенных доверительных интервалов для функций усиления и фазы.

Предположим, что сглаженные оценки функций усиления и фазы получаются по формулам (10.3.7) и (10.3.8). Тогда (10.3.11) можно заменить на формулу, содержащую соответствующие сглаженные величины:

$$\bar{C}_{ZZ}(f) \approx \bar{C}_{\hat{Z}\hat{Z}}(f) + \bar{C}_{11}(f) | \bar{H}(f) - H(f) |^2. \quad (10.3.13)$$

Когда операция сглаживания применялась к (10.3.11), то предполагалось, что истинная частотная характеристика $H(f)$ остается почти постоянной на интервале, равном ширине спектрального окна.

Как отмечалось в разд. 9.2, это предположение может быть неверным, если не произведено выравнивание рядов, в результате которого максимум модуля взаимной корреляционной функции достигается в нуле. Для того чтобы вывести приближенное распределение оценок, мы будем предполагать, что выравнивание рядов произведено.

Пусть в результате сглаживания авто- и взаимных спектров на выборочную оценку в каждой из оцениваемых частот приходится ν степеней свободы. Тогда величина

$$\frac{\nu \bar{C}_{ZZ}(f)}{\Gamma_{ZZ}(f)}$$

имеет χ^2 -распределение с ν степенями свободы, и (10.3.13) можно записать в виде

$$\frac{\nu \bar{C}_{ZZ}(f)}{\Gamma_{ZZ}(f)} \approx \frac{\nu \bar{C}_{\hat{Z}\hat{Z}}(f)}{\Gamma_{ZZ}(f)} + \frac{\nu \bar{C}_{11}(f)}{\Gamma_{ZZ}(f)} | \bar{H}(f) - H(f) |^2. \quad (10.3.14)$$

Разложение (10.3.14) показывает, что случайная χ^2 -величина с ν степенями свободы в левой части равенства разлагается на две случайные χ^2 -величины. Первая из них имеет $\nu - 2$ степени свободы

и может быть использована в качестве оценки спектра шума. Вторая имеет две степени свободы и может быть использована для оценивания функций усиления и фазы. Этот результат следует из того, что, как нетрудно показать с помощью методов разд. 3.2.5, второй член в (10.3.13) всегда имеет две степени свободы независимо от степени сглаживания. Кроме того, можно показать, что слагаемые в правой части (10.3.14) статистически независимы. Отсюда, пользуясь аддитивным свойством χ^2 -распределения, выведенным в разд. 3.3.5, находим, что первый член в (10.3.13) имеет χ^2 -распределение с $(\nu - 2)$ степенями свободы.

Наконец, взяв аналогичную (10.3.12) формулу для сглаженных спектральных оценок, можно найти сглаженную оценку спектра шума

$$\bar{C}_{\hat{z}\hat{z}}(f) = \bar{C}_{22}(f) [1 - \bar{K}_{12}^2(f)]. \quad (10.3.15)$$

Полученными формулами мы воспользуемся сейчас для построения критерия значимости.

Критерий значимости для проверки гипотезы о равенстве нулю истинной когерентности. Предположим, что $H(f)$ тождественно равна нулю для всех f , т. е. входной и выходной процессы полностью некоррелированы и, следовательно, теоретическая когерентность тождественно равна нулю.

Так как $H(f) \equiv 0$, то в силу (9.3.12) и (10.3.7) второй член в правой части (10.3.14) равен

$$\frac{\nu \bar{C}_{11}(f) \bar{G}^2(f)}{\Gamma_{ZZ}(f)} = \frac{\nu \bar{C}_{22}(f) \bar{K}_{12}^2(f)}{\Gamma_{ZZ}(f)}. \quad (10.3.16)$$

Разложение (10.3.14) показывает, что случайная величина (10.3.16) распределена приблизительно как χ^2 с двумя степенями свободы, а величина

$$\frac{\nu \bar{C}_{\hat{z}\hat{z}}(f)}{\Gamma_{ZZ}(f)} = \frac{\nu \bar{C}_{22}(f) [1 - \bar{K}_{12}^2(f)]}{\Gamma_{ZZ}(f)}$$

распределена приблизительно как χ^2 с $(\nu - 2)$ степенями свободы. Следовательно, если $H(f) \equiv 0$, то случайная величина

$$\frac{(\nu - 2) \bar{K}_{12}^2(f)}{2 [1 - \bar{K}_{12}^2(f)]} \quad (10.3.17)$$

распределена приближенно как $F_{2, \nu-2}$.

В качестве примера предположим, что выборочная оценка $\bar{K}_{12}^2(f) = 0,3$ получена при использовании окна Тьюки, причем $\Delta = 1$, $L = 20$, $N = 100$. Тогда

$$\nu = \frac{8}{3} \frac{100}{20} = 13$$

и

$$\frac{(\nu-2)\bar{K}_{12}^2}{2(1-\bar{K}_{12}^2)} = 2,36.$$

Из рис. 3.12 находим, что верхняя 95%-ная граница $f_{2,11}(0,95)$ равна 4,0. Так как наблюдаемое значение статистики (10.3.17) меньше 4,0, то можно заключить, что нет никаких признаков того, что истинная когерентность отлична от нуля.

Ситуации, когда требуется применять описанный выше критерий значимости, крайне редки. Его можно было бы, например, использовать в качестве грубого критерия наличия взаимной корреляции двух временных рядов, требующего меньше вычислений, чем описанный в разд. 9.1.2 критерий, использующий выборочную коспектральную функцию. Гораздо чаще возникает задача *оценивания* функций усиления и фазы и построения *доверительных интервалов* для них. Эти вопросы рассмотрены в следующем разделе.

10.3.4. Доверительные интервалы для функций усиления и фазы

Полученными в предыдущем разделе формулами можно воспользоваться, чтобы вывести приближенные доверительные интервалы для функций усиления и фазы. Из (10.3.14) получаем

$$\text{Pr} \left\{ \frac{\nu-2}{2} \frac{\bar{C}_{11}(f) |\bar{H}(f) - H(f)|^2}{\bar{C}_{\hat{Z}\hat{Z}}(f)} \leq f_{2, \nu-2}(1-\alpha) \right\} = 1-\alpha.$$

Отсюда находим доверительную область для неизвестной функции $H(f)$ с уровнем доверия $1-\alpha$:

$$|\bar{H}(f) - H(f)|^2 \leq \frac{2}{\nu-2} \frac{\bar{C}_{\hat{Z}\hat{Z}}(f)}{\bar{C}_{11}(f)} f_{2, \nu-2}(1-\alpha). \quad (10.3.18)$$

Из (10.3.18) получаем доверительную область для функций усиления и фазы:

$$\begin{aligned} (G \cos \varphi - \bar{G} \cos \bar{F}_{12})^2 + (G \sin \varphi - \bar{G} \sin \bar{F}_{12})^2 &\leq \\ &\leq \frac{2}{\nu-2} \frac{\bar{C}_{\hat{Z}\hat{Z}}(f)}{\bar{C}_{11}(f)} f_{2, \nu-2}(1-\alpha), \end{aligned} \quad (10.3.19)$$

где опущен аргумент f . Если рассматривать величины $G \cos \varphi$, $G \sin \varphi$ как новые параметры, то область (10.3.19) представляет собой круг радиуса k , как показано на рис. 10.1, а. Если отобразить этот круг на плоскость (G, φ) , то он перейдет в область, показанную на рис. 10.1, б. В качестве грубого приближения эту область

можно заменить почти покрывающим ее прямоугольником. В результате для функции усиления получится доверительный интервал $OT \pm TR$, а для функции фазы доверительный интервал будет ра-

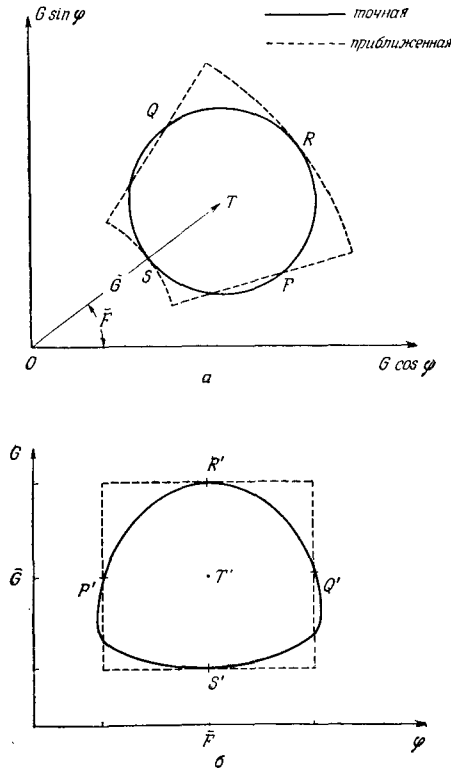


Рис. 10.1. Доверительные области для функций усиления и фазы.

вен углу, образованному прямыми OP и OQ . Эту область можно записать с помощью неравенств

$$|G - \bar{G}| \leq k, \quad \sin|\varphi - \bar{\varphi}| \leq \frac{k}{\bar{G}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{k^2}{\bar{G}^2} = \frac{2}{\nu - 2} \frac{1 - \bar{K}_{12}^2}{\bar{K}_{12}^2} f_{2, \nu - 2}(1 - \alpha),$$

100(1 - α) %-ные доверительные интервалы для G и φ можно записать в виде

$$\bar{G}(f) \left[1 \pm \sqrt{\frac{2}{\nu - 2} f_{2, \nu - 2}(1 - \alpha) \left(\frac{1 - \bar{K}_{12}^2(f)}{\bar{K}_{12}^2(f)} \right)} \right] \quad (10.3.20)$$

и

$$\bar{F}_{12}(f) \pm \arcsin \sqrt{\frac{2}{\nu-2} f_{2, \nu-2} (1-\alpha) \left(\frac{1-\bar{K}_{12}^2(f)}{\bar{K}_{12}^2(f)} \right)}. \quad (10.3.21)$$

Заметим, что доверительные интервалы уменьшаются с увеличением числа степеней свободы и когерентности $\bar{K}_{12}^2(f)$.

Пример. Предположим, выборочное значение \bar{K}_{12}^2 равно 0,8 и на выборочные оценки усиления $\bar{G} = 10$ и фазы $\bar{F}_{12} = 70^\circ$ приходится $\nu = 17$ степеней свободы. Тогда 95%-ные доверительные интервалы (10.3.20) и (10.3.21) имеют вид

$$10 \left[1 - \sqrt{\frac{2}{17} (3,68) \left(\frac{0,2}{0,8} \right)} \right] \leq G \leq 10 \left[1 + \sqrt{\frac{2}{17} (3,68) \left(\frac{0,2}{0,8} \right)} \right],$$

$$70 - \arcsin \sqrt{\frac{2}{17} (3,68) \left(\frac{0,2}{0,8} \right)} \leq \varphi \leq 70 + \arcsin \sqrt{\frac{2}{17} (3,68) \left(\frac{0,2}{0,8} \right)},$$

т. е.

$$6,7 \leq G \leq 13,3, \quad 51^\circ \leq \varphi \leq 89^\circ.$$

Смещение оценки функции усиления. Доверительные интервалы (10.3.20), (10.3.21) для функций усиления и фазы получены в предположении, что оценки $\bar{G}(f)$ и $\bar{F}(f)$ — несмещенные, что верно лишь с некоторым приближением. Как показано в разд. 9.3.3, смещение оценок спектров фазы и когерентности можно уменьшить, выравнивая временные ряды. Сейчас мы покажем, что смещение оценки функции усиления также можно уменьшить с помощью выравнивания. Чтобы показать это, воспользуемся методом, аналогичным методу разд. 9.3.3.

По определению смещение оценки функции усиления равно

$$B(f) = E[\bar{G}(f) - G(f)] = E\left[\frac{\bar{A}_{12}(f)}{\bar{C}_{11}(f)}\right] - \frac{\alpha_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)}. \quad (10.3.22)$$

Считая, что смещение оценки входного спектра пренебрежимо мало, (10.3.22) можно переписать в виде

$$B(f) \approx \frac{E[\bar{A}_{12}(f)] - \alpha_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)},$$

так что нужно определить лишь смещение $E[\bar{A}_{12}(f)] - \alpha_{12}(f)$. Действуя так же, как и в разд. 9.3.3, можно получить смещение оценки функции усиления при использовании окна Тьюки

$$B(f) \approx \frac{0,063}{M^2} \frac{1}{\Gamma_{11}} [\alpha_{12}^{(2)} - \alpha_{12}(\Phi_{12}^{(1)})^2 + 2\alpha_{12}^{(1)}\Phi_{12}^{(1)} \sin 2\Phi_{12}]. \quad (10.3.23)$$

Заметим, что в этом выражении появляется тот же член $\alpha_{12}(\Phi_{12}^{(1)})^2$, который входил в выражение (9.3.26) для смещения оценки

спектра когерентности. Следовательно, смещение оценки функции усиления уменьшается при выравнивании по тем же причинам, которые указаны в разд. 9.3.

10.4. ПРИМЕРЫ ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В этом разделе мы применим методы, развитые в разд. 10.3, для оценивания частотных характеристик искусственных рядов и рядов, полученных из реальных физических систем. Сначала мы кратко опишем стадии оценивания частотных характеристик.

10.4.1. Практическая методика оценивания частотных характеристик

Формулы оценивания в дискретном случае. Вычисления, необходимые для оценивания частотных характеристик, почти совпадают с вычислениями при оценке взаимных спектров, описанными в разд. 9.3.1. Дополнительно нужны лишь следующие вычисления:

1. *Вычисление выборочной оценки функции усиления*

$$\bar{G}(f) = \frac{\bar{A}_{12}(f)}{\bar{C}_{11}(f)}. \quad (10.4.1)$$

2. *Вычисление выборочной оценки спектра остаточного шума*

$$\bar{C}_{zz}(f) = \bar{C}_{22}(f) [1 - \bar{K}_{12}^2(f)]. \quad (10.4.2)$$

3. *Вычисление приближенных $100(1 - \alpha)\%$ -ных доверительных интервалов для функции усиления*

$$\bar{G}(f) \pm \bar{G}(f) \sqrt{\frac{2}{\nu - 2} f_{2, \nu - 2}(1 - \alpha) \left(\frac{1 - \bar{K}_{12}^2(f)}{\bar{K}_{12}^2(f)} \right)}, \quad (10.4.3)$$

где ν — число степеней свободы, соответствующее степени сглаживания выходного спектра, и $f_{2, \nu - 2}(1 - \alpha)$ есть $100(1 - \alpha)\%$ -ный квантиль F -распределения.

4. *Вычисление приближенных $100(1 - \alpha)\%$ -ных доверительных интервалов для функции фазы*

$$\bar{F}_{12}(f) \pm \arcsin \sqrt{\frac{2}{\nu - 2} f_{2, \nu - 2}(1 - \alpha) \left(\frac{1 - \bar{K}_{12}^2(f)}{\bar{K}_{12}^2(f)} \right)}. \quad (10.4.4)$$

Стадии оценивания функций усиления и фазы. Пять стадий, описанных в разд. 9.4.2 при оценивании взаимных спектров, применимы также и при оценивании усиления и фазы. Существенные изменения имеются лишь во второй стадии вычислений, которая должна теперь выглядеть следующим образом.

Вторая стадия вычислений

а) Вычисляются два автоспектра, спектр остаточного шума и функции усиления и фазы, причем используются взаимные корреляции выравненных рядов (9.3.28).

б) Строятся графики перечисленных выше спектров для нескольких точек отсечения. Оба автоспектра и спектр остаточного шума нужно строить в логарифмическом масштабе. Затем следует построить графики Бодэ для функций усиления и фазы, т. е. логарифм функции усиления нужно отложить в зависимости от логарифма частоты и фазовую функцию — в зависимости от логарифма частоты.

в) В некоторых случаях, возможно, потребуется построить график преобразованной когерентности.

Последнее изменение состоит в том, что на стадии 5в доверительные интервалы для функции усиления получаются по формуле (10.4.3), для фазовой функции — по формуле (10.4.4) и для коэффициента когерентности — по формуле (9.2.23). Логическая схема вычислений выборочных оценок частотных характеристик приводится в Приложении П10.2.

10.4.2. Анализ частотных характеристик искусственных систем

С помощью искусственных рядов была имитирована линейная система второго порядка. Выходные данные x_{2t} получались с помощью модели (10.2.1), а именно

$$X_{2t} = X_t + Z_t$$

и

$$X_t = 0,25X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + X_{1t}, \quad (10.4.5)$$

где Z_t — белый шум, а X_{1t} — вход.

В качестве входных данных x_{1t} использовалась реализация процесса авторегрессии второго порядка (7.1.9), т. е.

$$X_{1t} = X_{1t-1} - 0,5X_{1t-2} + Z'_t.$$

Входные и выходные данные приведены в Приложении П10.1.

Теоретический спектр входного процесса равен

$$\Gamma_{11}(f) = \frac{2}{2,25 - 3\cos 2\pi f + \cos 4\pi f}, \quad 0 \leq f \leq 0,5 \text{ гц.} \quad (10.4.6)$$

Этот спектр показан на рис. 7.7 сплошной линией. Поскольку шум белый, его спектр имеет вид

$$\Gamma_{ZZ}(f) = 2, \quad 0 \leq f \leq 0,5. \quad (10.4.7)$$

Теоретическая частотная характеристика линейной системы (10.4.5) равна

$$H(f) = \frac{1}{1 - 0,25e^{-j2\pi f} + 0,5e^{-j4\pi f}}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}. \quad (10.4.8)$$

Отсюда теоретические функции усиления и фазы имеют вид

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1,3125 - 0,75 \cos 2\pi f + \cos 4\pi f}} \quad (10.4.9)$$

и

$$\varphi(f) = \arctg \frac{\sin 2\pi f (4 \cos 2\pi f - 1)}{2 + \cos 2\pi f (4 \cos 2\pi f - 1)}. \quad (10.4.10)$$

Функция усиления (10.4.9) показана сплошной линией на рис. 10.3, а фазовая функция (10.4.10) — сплошной линией на рис. 10.4. Квадрат теоретического коэффициента когерентности равен

$$\kappa_{12}^2 = \frac{1}{1 + (1,3125 - 0,75 \cos 2\pi f + \cos 4\pi f) (2,25 - 3 \cos 2\pi f + \cos 4\pi f)}. \quad (10.4.11)$$

Эта функция показана сплошной линией на рис. 10.5. Видно, что коэффициент когерентности весьма высок в диапазоне от 0 до 0,25 гц, где велики входной спектр и функция усиления. Однако когерентность очень мала в диапазоне от 0,3 до 0,5 гц, где входной спектр и функция усиления системы также малы. Следовательно, можно ожидать, что для диапазона от 0 до 0,25 гц получатся хорошие оценки функций усиления, фазы и спектра когерентности, а для диапазона от 0,3 до 0,5 гц — плохие.

Поскольку используемые временные ряды были искусственными, многие стадии из описанной в разд. 9.4.2 и разд. 10.4.1 методики не нужны. Тем не менее поучительно проследить все эти стадии подряд, как если бы данные были получены из реального процесса.

1. Стадия предварительных решений

а) Данные не обнаруживают никаких трендов (что можно было бы предвидеть, ибо вход и выход были получены с помощью стационарных моделей). Поэтому цифровая фильтрация для устранения трендов не нужна.

б) Расфильтровывать данные на отдельные частотные полосы не требуется.

в) Так как входной и выходной ряды содержат по $N = 100$ членов, авто- и взаимные корреляции вычислялись первоначально до запаздывания 30.

2. Первая стадия вычислений

Вычислялись авто- и взаимные корреляции исходных данных и их первых разностей. Корреляции исходных данных показаны на рис. 10.2, а ковариации приведены в Приложении П10.2.

3. Стадия промежуточных решений

а) Корреляции исходных данных были использованы для спектрального анализа.

б) Так как взаимная корреляционная функция имела максимум в нуле, выравнивания не потребовалось.

в) Исходя из быстроты затухания корреляционных функций, для дальнейшего анализа были выбраны следующие точки отсечения: $L = 8, 12$ у 16 .

4. Вторая стадия вычислений

а) С помощью окна Тьюки были вычислены автоспектры, функции усиления и фазы, спектры когерентности и шума без применения выравнивания.

б) На рис. 10.3—10.6 показаны соответственно функция усиления, фазовая функция, квадрат спектра когерентности и спектр шума при $L = 8, 12$ и 16 .

5. Стадия интерпретации

а) Метод стягивания окна показывает, что во всех спектрах происходят некоторые изменения при переходе от $L = 8$ к $L = 12$, но при дальнейшем увеличении L до 16 изменения малы. Поэтому окончательно было выбрано $L = 16$. Отметим, что выборочные оценки функций усиления и фазы и квадрата спектра когерентности очень хорошо согласуются с теоретическими значениями в диапазоне частот от 0 до $0,35$ гц, но для более высоких частот появляются большие расхождения, так как коэффициент когерентности резко уменьшается. Как видно из рис. 10.6, выборочная оценка спектра остаточного шума превосходно согласуется с теоретическими значениями во всем диапазоне от 0 до $0,5$ гц.

б) Доверительные интервалы для функций усиления и фазы, вычисленные по формулам (10.4.3) и (10.4.4), показаны на рис. 10.3 и 10.4. Видно, что они резко увеличиваются для частот, превосходящих $0,35$ гц, из-за уменьшения коэффициента когерентности. Таким

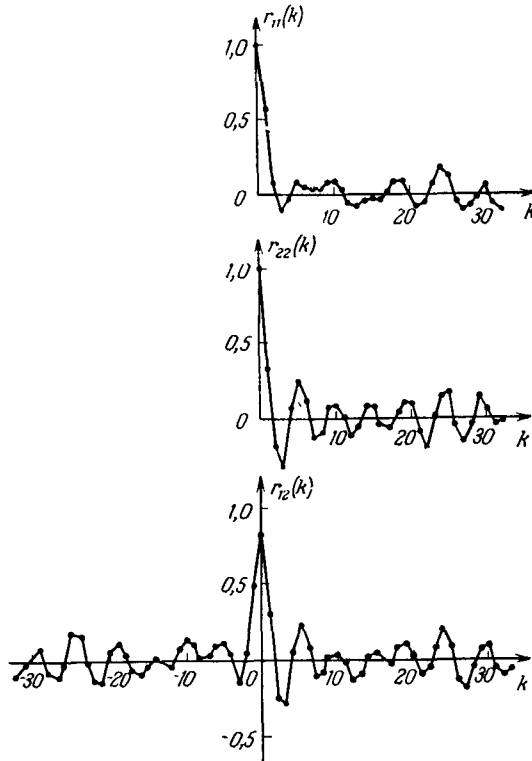


Рис. 10.2. Выборочные авто- и взаимные корреляции искусственной линейной системы ($N = 100$).

образом, доверительные интервалы дают полезную информацию при интерпретации графиков функций усиления и фазы.

Вычисление функции отклика на единичный импульс. Описанный в разд. 10.2 временной способ оценивания отклика на единичный импульс был сравнен с частотным способом. Для этого мы по

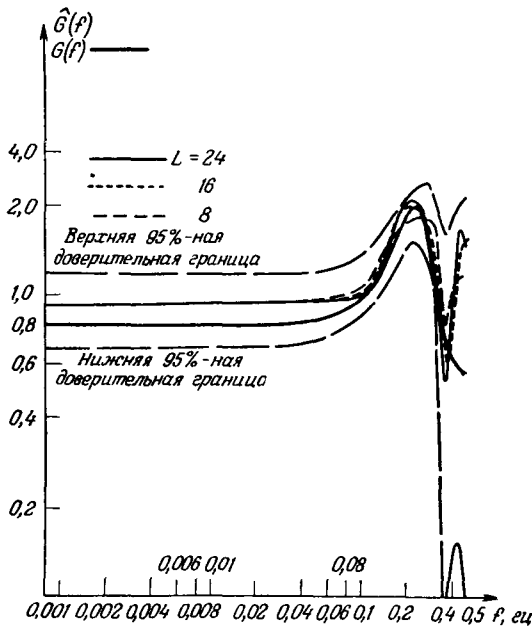


Рис. 10.3. Теоретическая функция усиления и ее выборочные оценки для искусственной линейной системы ($N = 100$).

выборочным оценкам взаимных спектров при $L = 16$ вычислили функцию отклика на единичный импульс

$$h_m = \int_0^{1/2} \frac{\bar{L}_{12}(f)}{\bar{G}_{11}(f)} \cos 2\pi f m df + \int_0^{1/2} \frac{\bar{Q}_{12}(f)}{\bar{C}_{11}(f)} \sin 2\pi f m df. \quad (10.4.12)$$

Эта функция сравнивалась с выборочными оценками отклика на единичный импульс, полученными непосредственно и с помощью параметрического оценивания во временной области. Все эти оценки приведены в табл. 10.4. Мы видим, что оценка, полученная из спектров, более плавно меняется, чем при непосредственном оценивании во временной области, и хорошо согласуется с теоретическими значениями. Однако она не так хороша, как параметрическая оценка.

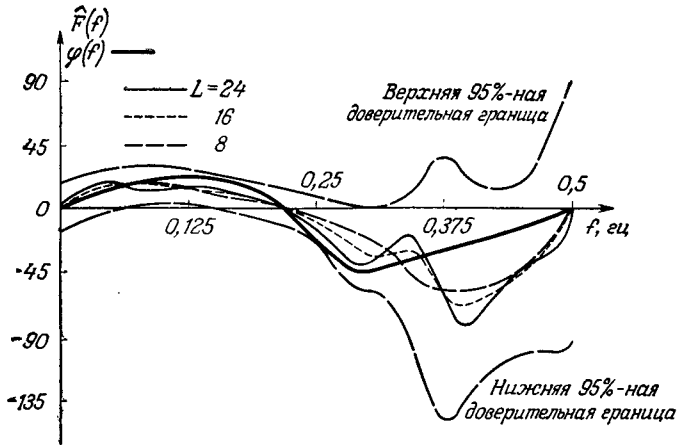


Рис. 10.4. Теоретическая фазовая функция и ее выборочные оценки для искусственной линейной системы ($N = 100$).

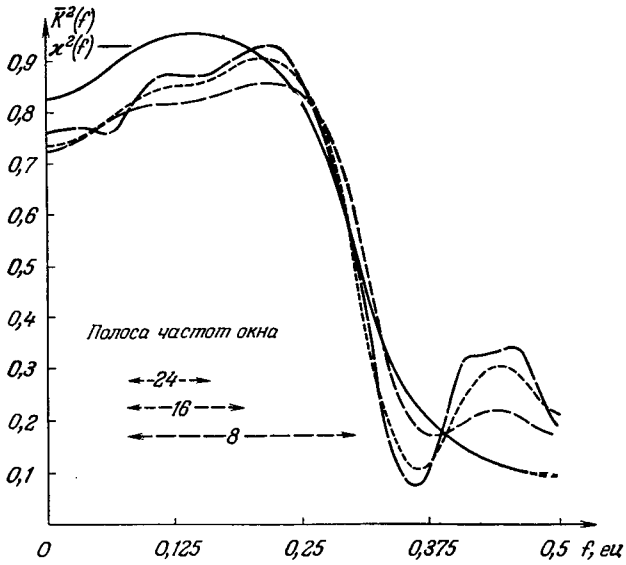


Рис. 10.5. Теоретический спектр когерентности и его выборочные оценки для искусственной линейной системы ($N = 100$).

В соответствии с рекомендацией, предложенной в [4], значения h_m были вычислены также для отрицательных m , чтобы определить, является ли система физически реализуемой. Наибольшим из них оказалось значение $h_{-1} = 0,11$, в то время как остальные не превос-

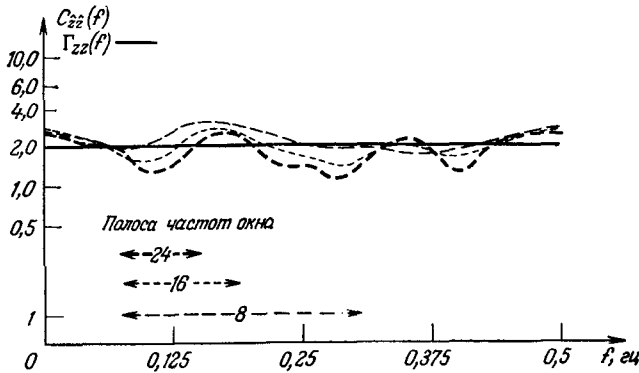


Рис. 10.6. Теоретический спектр остаточных ошибок и его выборочные оценки для искусственной линейной системы ($N = 100$).

ходят по модулю 0,1. Отсюда мы заключили, что выборочные оценки функций усиления и фазы приближенно описывают физически реализуемую систему.

Таблица 10.4

Сравнения трех способов оценивания функции отклика на единичный импульс

| m | h_m | | | | | | | | | | |
|-------------------------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Теоретические значения | 1,000 | 0,250 | -0,438 | -0,234 | 0,154 | 0,055 | -0,066 | -0,044 | 0,022 | 0,028 | -0,004 |
| Параметрический способ | 1,100 | 0,276 | -0,458 | -0,235 | 0,160 | 0,153 | -0,038 | -0,083 | -0,003 | 0,030 | 0,011 |
| Спектральный способ | 1,108 | 0,271 | -0,468 | -0,181 | 0,139 | 0,120 | -0,87 | -0,40 | -0,002 | 0,017 | -0,060 |
| Непосредственный способ | 1,056 | 0,324 | -0,572 | 0,037 | -0,141 | 0,373 | -0,249 | 0,107 | -0,289 | 0,220 | -0,163 |

10.4.3. Анализ данных о газовой печи

Описание данных. Изображенные на рис. 8.3 данные полученные при наблюдении за работой газовой печи, вырабатывающей углекислый газ. Выходной переменной была концентрация углекис-

лого газа, измерявшаяся в процентах по отношению к выходу газа из печи. Эта концентрация зависит от двух входных переменных: скорости воздуха и скорости газа. В описываемых здесь экспериментах входная скорость воздуха была фиксирована, так что можно было определить частотную характеристику, связывающую входную скорость газа с выходной концентрацией.

Имелись непрерывные измерения как входного, так и выходного процессов. При просмотре непрерывных записей не было обнаружено сколько-нибудь заметных изменений на интервалах меньше

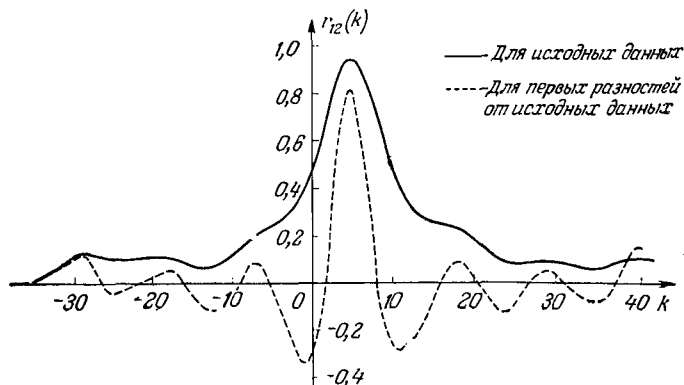


Рис. 10.7. Выборочные взаимные корреляции исходных данных о газовой печи и их первых разностей ($N = 296$).

9—10 сек, поэтому отсчеты на записях были взяты через 9 сек. В результате получилось 296 пар точек, которые приведены в Приложении П10.1.

Оценивание функций усиления и фазы. Ниже приводится описание процесса оценивания, в котором использовались основные стадии, описанные в разд. 9.4.2 и 10.4.1.

1. Стадия предварительных решений

а) При проверке данных (рис. 8.3) не обнаружено каких-либо явных трендов. Тем не менее были сосчитаны авто- и взаимные корреляции как исходных данных, так и их первых разностей по формулам (9.3.13), (9.3.14).

б) Частота Найквиста, соответствующая интервалу отсчета $\Delta = 9$ сек, равнялась $1/18$ гц.

в) Предварительно было решено вычислять корреляции до максимального запаздывания $L_{\max} = 80$.

2. Первая стадия вычислений

Авто-и взаимные корреляции были сосчитаны, нанесены на график и подвергнуты анализу. Взаимные корреляции исходных данных и их первых разностей изображены на рис. 10.7. Приближенные

значения ковариаций первых разностей приведены в Приложении П10.1.

3. Стадия промежуточных решений

а) Из графика взаимной корреляционной функции исходных данных видно, что имеется тренд. Поэтому было решено использовать корреляции первых разностей.

б) Взаимная корреляционная функция первых разностей имеет максимум, когда сдвиг S равен 5.

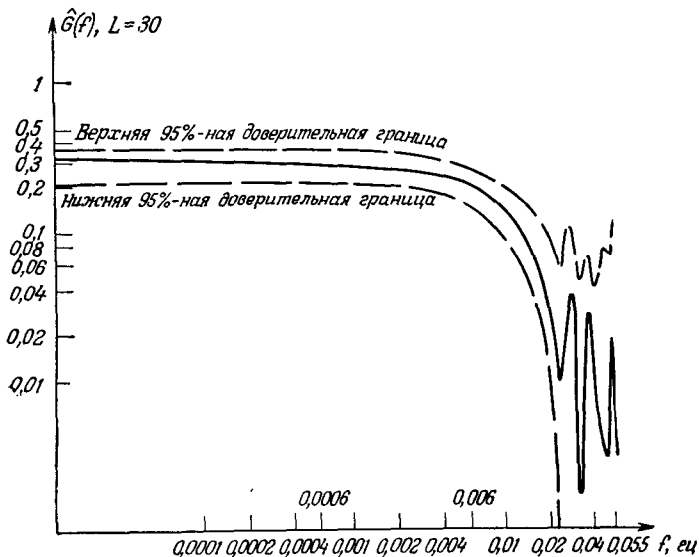


Рис. 10.8. Выборочная оценка функции усиления для данных о газовой печи ($N = 296$).

в) Принимая во внимание затухание этой взаимной корреляционной функции, для оценивания спектров были выбраны следующие значения точек отсечения: $L = 20, 30$ и 40 .

4. Вторая стадия вычислений

После применения выравнивания со сдвигом $S = 5$ были вычислены автоспектры, функции усиления и фазы и спектр шума для указанных выше точек отсечения. График функции усиления показан на рис. 10.8, фазовой функции — на рис. 10.9 и спектра шума — на рис. 10.10.

5. Стадия интерпретации

Метод стягивания окна показывает, что очень незначительные изменения этих спектров получаются при изменении L от 30 до 40. На всех перечисленных рисунках изображены спектры, соответствующие значениям $L = 30$ и 40 , и мы видим, что уменьшение подо-

сы частот окна вызывает небольшие изменения в диапазоне до $0,02 \text{ гц}$, но для больших частот возникают резкие колебания.

Интерпретация выборочной оценки функции усиления. График Бодэ на рис. 10.8 показывает, что наблюдаемым данным соответствует система второго порядка. Выборочные оценки постоянных времени, полученные при подгонке всевозможных систем второго порядка до тех пор, пока не было получено хорошего визуального согласия, оказались равными $T_1 = 6,7 \text{ сек}$ и $T_2 = 13 \text{ сек}$. Отметим, что 95%-ные доверительные интервалы резко возрастают для частот, превосходящих $0,025 \text{ гц}$, из-за уменьшения коэффициента когерентности. Выборочная оценка функции усиления на нулевой частоте равна $0,31$. Следовательно, усиление постоянной составляющей в системе равно $0,31$.

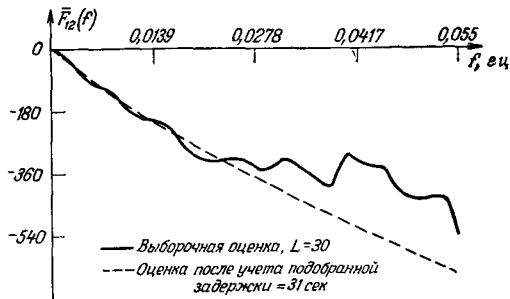


Рис. 10.9. Выборочные оценки фазовой функции для данных о газовой печи ($N = 296$).

Интерпретация выборочной оценки фазовой функции. Дискретная система второго порядка с постоянными времени $T_1 = 6,7 \text{ сек}$ и $T_2 = 13 \text{ сек}$ имеет следующую фазовую функцию:

$$\varphi_{12}(f) = \arctg \frac{0,13 \sin 2\pi f - 0,76 \sin 4\pi f}{1 - 0,76 \cos 2\pi f + 0,13 \cos 4\pi f}, \quad 0 \leq f \leq \frac{1}{2}. \quad (10.4.13)$$

Выборочная оценка фазовой функции при $L = 30$, показанная на рис. 10.9, намного больше (10.4.13), что наводит на мысль о том, что в системе имеется время нечувствительности, или задержка. Разность между выборочной оценкой фазовой функции и (10.4.13) была нанесена на график, и к этой разности была подобрана приближающая ее прямая. Этой прямой при $f = 0,055 \text{ гц}$ соответствовало значение $\varphi = -11$, поэтому была взята задержка $d = 11/(2\pi \cdot 0,055) = 31 \text{ сек}$. Полученная после учета этой задержки фазовая функция $F(f) = \bar{F}_{12}(f) - 62\pi f$ показана на рис. 10.9 пунктирной линией.

Таким образом, работу газовой печи можно описать с помощью системы второго порядка, имеющей усиление постоянной составляющей $0,31 \text{ ед.}$, постоянные времени $6,7$ и 13 сек и задержку 31 сек .

Интерпретация спектра шума. Поскольку мы использовали первые разности от исходных данных, шум z'_t , для которого

производилось оценивание спектра, связан с исходным шумом z_t соотношением $z'_t = z_t - z_{t-1}$. Отсюда, пользуясь формулой (6.2.17), выборочную оценку спектра шума в исходных данных $\bar{C}_{zz}(f)$

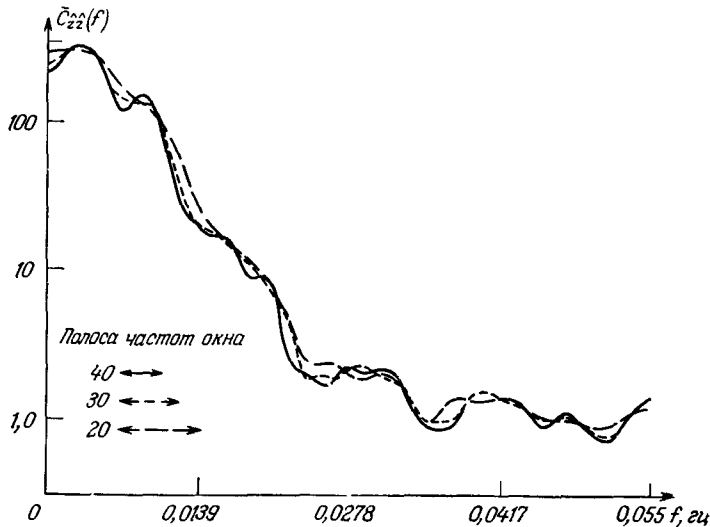


Рис. 10.10. Выборочные оценки спектра остаточных ошибок для данных о газовой печи ($N = 296$).

можно выразить через выборочную оценку спектра шума после взятия первых разностей $C_{z'z'}(f)$:

$$\bar{C}_{zz}(f) = \frac{\bar{C}_{z'z'}(f)}{4 \sin^2 \pi f \Delta}.$$

Спектр $\bar{C}_{zz}(f)$ показан на рис. 10.10, откуда видно, что он похож на белый шум, пропущенный через данную систему.

Дальнейшие примеры оценивания частотных характеристик.

Пример применения методов спектрального анализа взаимных спектров для оценивания частотной характеристики теплообменника приведен в [2]. Ряд интересных применений такого рода описан также в сборнике статей [3].

Общий вывод состоит в том, что спектральные методы часто очень полезны при выдвигании динамических моделей, описывающих физические системы, как это было в примере с газовой печью. Однако, поскольку при спектральном анализе для каждой частоты нужно оценивать свои параметры, эффективность этих методов не-

велика. Более убедительные результаты обычно можно получить с помощью параметризации задачи, рассматривая модели типа (10.1.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Box G. E. P., Jenkins G. M., Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco, 1970.
2. Jenkins G. M., An example of the estimation of a linear open-loop transfer function, *Technometrics*, 5, 227 (1963).
3. Matusita K. (ed.), Studies of the statistical estimation of frequency response functions, Reprinted from *Ann. Inst. Stat. Math., Suppl. III* (1964).
4. Akaike H., Some problems in the application of the cross-spectral method, Seminar on Spectral Analysis of Time Series, Madison, Wisconsin, 1966. Proc. of an Advanced Seminar on Spectral Analysis of Time Series, B. Harris (ed.), John Wiley, New York, 1967.

ПРИЛОЖЕНИЕ П10.1

ДАнные И Их КОВАРИАЦИИ ДЛя ДВУХ ЗАДАЧ
ОЦЕНИВАНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Таблица П10.1

Вход и выход искусственной линейной системы, $N = 100$

| | | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1-10 | -0,88 | -0,12 | -0,89 | -1,38 | -0,08 | 1,04 | 2,14 | 0,36 | -1,11 | -1,78 |
| 11-20 | -2,76 | -1,78 | 0,98 | 1,00 | -0,71 | -1,01 | -1,31 | -0,85 | -0,47 | 1,64 |
| 21-30 | 0,06 | -0,18 | -1,02 | -1,05 | -0,66 | -1,13 | -0,52 | -0,71 | -0,21 | -0,14 |
| 31-40 | 0,14 | 1,59 | -0,77 | -1,09 | -1,77 | -1,21 | 0,46 | -0,08 | -0,64 | -0,36 |
| 41-50 | -0,88 | -0,62 | 0,29 | 1,91 | 2,15 | 1,05 | 0,32 | 1,07 | 2,67 | 2,45 |
| 51-60 | 1,31 | 1,11 | 1,94 | 0,34 | 1,83 | 1,16 | 0,62 | -1,09 | -1,62 | -0,40 |
| 61-70 | 0,19 | -1,60 | -2,26 | 0,30 | 1,73 | 2,31 | 0,81 | -0,40 | 0,30 | -0,51 |
| 71-80 | -2,12 | -2,43 | 0,73 | 3,09 | 4,97 | 1,81 | -0,46 | -0,34 | 0,04 | 0,82 |
| 81-90 | -1,64 | -2,29 | -0,77 | 1,92 | 1,93 | 0,85 | -0,65 | 0,35 | 0,79 | 1,62 |
| 91-100 | 3,25 | 1,87 | 0,76 | 2,25 | 0,77 | -0,16 | 0,19 | 0,61 | 0,92 | -0,70 |
| Вход: $X_{1t} = X_{1t-1} - 0,5X_{1t-2} + Z_{1t}$ | | | | | | | | | | |
| 1-10 | -1,03 | -1,09 | -0,47 | -2,07 | -1,52 | 2,27 | 3,14 | 0,26 | -1,78 | -1,82 |
| 11-20 | -2,81 | 0,11 | 3,22 | 1,92 | 0,06 | -3,48 | -2,37 | -0,34 | 0,43 | 1,97 |
| 21-30 | 2,01 | -2,39 | -0,94 | -0,67 | -1,25 | 0,05 | -1,32 | 0,52 | -1,15 | 0,40 |
| 31-40 | 0,80 | 2,09 | -0,46 | -2,66 | -1,95 | -0,84 | -0,51 | 0,82 | -1,62 | -0,16 |
| 41-50 | 0,48 | -0,36 | -0,55 | 1,54 | 2,83 | 2,68 | -0,57 | 0,54 | 4,70 | 1,90 |
| 51-60 | 1,23 | -0,40 | 1,20 | -2,02 | 1,97 | -0,93 | -0,12 | -2,34 | -4,42 | 0,10 |
| 61-70 | 1,06 | 0,06 | -3,25 | 0,21 | 2,59 | 4,48 | -0,92 | -1,55 | 0,77 | 0,34 |
| 71-80 | -3,27 | -3,84 | 0,53 | 4,73 | 5,84 | 1,24 | -3,62 | 0,59 | 1,04 | 3,56 |
| 81-90 | -0,63 | -2,09 | -1,38 | 4,42 | 3,86 | 0,03 | -2,11 | -0,18 | 4,13 | 2,67 |
| 91-100 | 2,73 | 2,02 | 0,15 | 1,28 | 3,49 | -0,73 | -0,28 | -0,84 | 1,37 | -0,34 |

Выход: $X_{2t} = X_t + Z_t$, $X_t = 0,25X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + X_{1t}$

Таблица П10.2

Выборочные ковариации данных из табл. П10.1

| k | $c_{11}(k)$ | k | $c_{11}(k)$ | k | $c_{11}(k)$ | k | $c_{11}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 1,984 | 10 | 0,219 | 20 | 0,070 | 30 | 0,119 |
| 1 | 1,153 | 11 | 0,082 | 21 | -0,136 | 31 | -0,051 |
| 2 | 0,180 | 12 | -0,138 | 22 | -0,136 | | |
| 3 | -0,257 | 13 | -0,174 | 23 | 0,142 | | |
| 4 | -0,105 | 14 | -0,095 | 24 | 0,391 | | |
| 5 | 0,164 | 15 | -0,067 | 25 | 0,297 | | |
| 6 | 0,123 | 16 | -0,063 | 26 | -0,056 | | |
| 7 | 0,049 | 17 | 0,000 | 27 | -0,233 | | |
| 8 | 0,081 | 18 | 0,168 | 28 | -0,173 | | |
| 9 | 0,206 | 19 | 0,210 | 29 | 0,034 | | |

Автоковариации входа

| k | $c_{12}(k)$ | k | $c_{12}(k)$ | k | $c_{12}(k)$ | k | $c_{12}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 2,374 | 10 | 0,184 | 20 | 0,155 | 30 | 0,283 |
| 1 | 1,185 | 11 | -0,007 | 21 | -0,195 | 31 | 0,039 |
| 2 | -0,645 | 12 | -0,349 | 22 | -0,397 | | |
| 3 | -0,972 | 13 | -0,205 | 23 | 0,081 | | |
| 4 | -0,064 | 14 | 0,107 | 24 | 0,526 | | |
| 5 | 0,615 | 15 | 0,195 | 25 | 0,501 | | |
| 6 | 0,234 | 16 | 0,042 | 26 | -0,064 | | |
| 7 | -0,283 | 17 | -0,019 | 27 | -0,447 | | |
| 8 | -0,244 | 18 | 0,126 | 28 | -0,073 | | |
| 9 | 0,150 | 19 | 0,284 | 29 | 0,304 | | |

Взаимные ковариации входа и выхода

| k | $c_{21}(k)$ | k | $c_{21}(k)$ | k | $c_{21}(k)$ | k | $c_{21}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 2,374 | 10 | 0,415 | 20 | 0,082 | 30 | 0,158 |
| 1 | 1,376 | 11 | 0,158 | 21 | -0,471 | 31 | -0,109 |
| 2 | 0,095 | 12 | -0,152 | 22 | -0,460 | | |
| 3 | -0,472 | 13 | -0,095 | 23 | 0,080 | | |
| 4 | 0,101 | 14 | 0,040 | 24 | 0,608 | | |
| 5 | 0,371 | 15 | -0,124 | 25 | 0,596 | | |
| 6 | 0,331 | 16 | -0,310 | 26 | -0,040 | | |
| 7 | 0,044 | 17 | -0,193 | 27 | -0,405 | | |
| 8 | 0,030 | 18 | 0,155 | 28 | -0,212 | | |
| 9 | 0,389 | 19 | 0,322 | 29 | 0,250 | | |

Взаимные ковариации входа и выхода

| k | $c_{22}(k)$ | k | $c_{22}(k)$ | k | $c_{22}(k)$ | k | $c_{22}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 4,400 | 10 | 0,412 | 20 | 0,449 | 30 | 0,280 |
| 1 | 1,522 | 11 | 0,142 | 21 | -0,564 | 31 | -0,203 |
| 2 | -0,991 | 12 | -0,605 | 22 | -1,021 | | |
| 3 | -1,521 | 13 | -0,258 | 23 | 0,044 | | |
| 4 | 0,302 | 14 | 0,333 | 24 | 0,724 | | |
| 5 | 1,220 | 15 | 0,319 | 25 | 0,903 | | |
| 6 | 0,573 | 16 | -0,272 | 26 | -0,338 | | |
| 7 | -0,530 | 17 | -0,233 | 27 | -0,769 | | |
| 8 | -0,499 | 18 | 0,073 | 28 | -0,237 | | |
| 9 | 0,366 | 19 | 0,326 | 29 | 0,688 | | |

Автоковариации выхода

Таблица П10.3

Условные значения входной скорости впуска газа в газовую печь

| | | | | | | | | | |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1—9 | -1,09 | 0,00 | 1,78 | 3,39 | 3,73 | 4,41 | 4,61 | 3,48 | 1,27 |
| 10—18 | -1,80 | -5,88 | -10,55 | -14,21 | -15,20 | -13,02 | -8,14 | -4,75 | -1,93 |
| 19—27 | 0,88 | 4,35 | 7,71 | 8,66 | 8,75 | 8,91 | 9,87 | 12,63 | 17,75 |
| 28—36 | 19,76 | 19,34 | 18,66 | 18,32 | 17,67 | 16,08 | 12,65 | 7,90 | 3,60 |
| 37—45 | 1,15 | 0,88 | 3,31 | 6,45 | 9,60 | 14,09 | 26,70 | 28,34 | 28,12 |
| 46—54 | 24,83 | 19,29 | 14,85 | 12,14 | 12,39 | 16,08 | 19,05 | 20,23 | 18,15 |
| 55—63 | 5,35 | 1,22 | 0,09 | 1,64 | 6,71 | 10,19 | 11,46 | 11,55 | 11,12 |
| 64—72 | 11,21 | 12,23 | 12,57 | 11,57 | 9,13 | 6,20 | 2,55 | -2,80 | -10,80 |
| 73—81 | -15,51 | -17,99 | -18,25 | -14,56 | -9,44 | -5,70 | -4,31 | -5,77 | -9,60 |
| 82—90 | -16,16 | -18,75 | -18,91 | -17,46 | -14,74 | -12,01 | -9,27 | -5,24 | 0,40 |
| 91—93 | 7,88 | 9,43 | 9,30 | 10,06 | 11,37 | 11,98 | 10,54 | 5,95 | -0,80 |
| 100—108 | -3,14 | -2,88 | -1,53 | -1,09 | -1,87 | -2,55 | -2,29 | -0,07 | 2,54 |
| 109—117 | 3,30 | 1,02 | -4,23 | -11,39 | -22,75 | -25,94 | -27,16 | -25,10 | -17,90 |
| 118—126 | -13,46 | -10,81 | -9,10 | -8,76 | -8,85 | -8,00 | -5,44 | -4,16 | -2,71 |
| 127—135 | 0,00 | 4,03 | 8,41 | 12,85 | 16,07 | 17,46 | 16,83 | 14,85 | 9,93 |
| 136—144 | 6,48 | 5,77 | 5,77 | 6,32 | 7,47 | 9,00 | 9,93 | 9,68 | 7,90 |
| 145—153 | 3,99 | -1,61 | -5,53 | -6,03 | -4,24 | -1,94 | -0,49 | 0,60 | 1,61 |
| 154—162 | 3,01 | 5,17 | 5,66 | 5,60 | 5,73 | 5,92 | 6,71 | 9,33 | 13,37 |
| 163—171 | 14,60 | 13,53 | 7,72 | 2,18 | -2,37 | -7,14 | -10,99 | -12,69 | -11,75 |
| 172—180 | -6,76 | -0,33 | 5,56 | 6,43 | 4,84 | 1,09 | -3,10 | -6,97 | -10,47 |
| 181—189 | -12,18 | -11,83 | -8,73 | -3,36 | 0,63 | 0,84 | 0,00 | 0,01 | 2,09 |
| 190—198 | 5,36 | 7,82 | 8,58 | 9,18 | 8,62 | 4,16 | -3,36 | -9,59 | -18,13 |
| 199—207 | -23,78 | -24,99 | -24,73 | -23,30 | -20,53 | -17,39 | -12,61 | -5,69 | -1,37 |
| 208—216 | -0,24 | -0,50 | -1,35 | -2,76 | -5,34 | -8,71 | -12,43 | -14,39 | -14,22 |
| 217—225 | -11,75 | -8,13 | -6,34 | -5,82 | -6,25 | -7,13 | -8,48 | -10,39 | -13,46 |
| 226—234 | -16,28 | -16,19 | -11,49 | -4,88 | -1,60 | -0,07 | -0,92 | -6,20 | -10,86 |
| 235—243 | -15,25 | -18,58 | -20,29 | -20,24 | -19,61 | -19,52 | -17,94 | -13,02 | -10,30 |
| 244—252 | -9,18 | -7,98 | -8,67 | -10,47 | -11,23 | -8,76 | -3,95 | 1,85 | 6,62 |
| 253—261 | 7,09 | 6,05 | 5,01 | 6,03 | 9,43 | 12,23 | 12,49 | 8,24 | 1,02 |
| 262—270 | 0,25 | 3,82 | 9,22 | 10,32 | 8,66 | 5,27 | 0,93 | -4,58 | -7,48 |
| 271—279 | -9,47 | -10,29 | -9,28 | -6,45 | -4,24 | -2,76 | -1,58 | -0,33 | 1,02 |
| 280—288 | 2,51 | 2,80 | -0,00 | -4,93 | -7,59 | -8,24 | -7,40 | -5,28 | -2,04 |
| 289—296 | 0,34 | 2,04 | 2,53 | 1,95 | 1,31 | 0,17 | -1,82 | -2,62 | |

Действительные значения скорости газа ($m^3/сек$) = $0,0028 - 1,87 \cdot 10^{-6}$ (условных значений).

Таблица П10.4

Концентрация углекислого газа в процентах к общему выходу газовой печи

| | | | | | | | | | |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1—9 | 53,8 | 53,6 | 53,5 | 53,5 | 53,4 | 53,1 | 52,7 | 52,4 | 52,2 |
| 10—18 | 52,0 | 52,0 | 52,4 | 53,0 | 54,0 | 54,9 | 56,0 | 56,8 | 56,8 |
| 19—27 | 56,4 | 55,7 | 55,0 | 54,3 | 53,2 | 52,3 | 51,6 | 51,2 | 50,8 |
| 28—36 | 50,5 | 50,0 | 49,2 | 48,4 | 47,9 | 47,6 | 47,5 | 47,5 | 47,6 |
| 37—45 | 48,1 | 49,0 | 50,0 | 51,1 | 51,8 | 51,9 | 51,7 | 51,2 | 50,0 |
| 46—54 | 48,3 | 47,0 | 45,8 | 45,6 | 46,0 | 46,9 | 47,8 | 48,2 | 48,3 |
| 55—63 | 47,9 | 47,2 | 47,2 | 48,1 | 49,4 | 50,6 | 51,5 | 51,6 | 51,2 |
| 64—72 | 50,5 | 50,1 | 49,8 | 49,6 | 49,4 | 49,3 | 49,2 | 49,3 | 49,7 |
| 73—81 | 50,3 | 51,3 | 52,8 | 54,4 | 56,0 | 56,9 | 57,5 | 57,3 | 56,6 |
| 82—90 | 56,0 | 55,4 | 55,4 | 56,4 | 57,2 | 58,0 | 58,4 | 58,4 | 58,1 |
| 91—99 | 57,7 | 57,0 | 56,0 | 54,7 | 53,2 | 52,1 | 51,6 | 51,0 | 50,5 |
| 100—108 | 50,4 | 51,0 | 51,8 | 52,4 | 53,0 | 53,4 | 53,6 | 53,7 | 53,8 |
| 109—117 | 53,8 | 53,8 | 53,3 | 53,0 | 52,9 | 53,4 | 54,6 | 56,4 | 58,0 |
| 118—126 | 59,4 | 60,2 | 60,0 | 59,4 | 58,4 | 57,6 | 56,9 | 56,4 | 56,0 |
| 127—135 | 55,7 | 55,3 | 55,0 | 54,4 | 53,7 | 52,8 | 51,6 | 50,6 | 49,4 |
| 136—144 | 48,8 | 48,5 | 48,7 | 49,2 | 49,8 | 50,4 | 50,7 | 50,9 | 50,7 |
| 145—153 | 50,5 | 50,4 | 50,2 | 50,4 | 51,2 | 52,3 | 53,2 | 53,9 | 54,1 |
| 154—162 | 54,0 | 53,6 | 53,2 | 53,0 | 52,8 | 52,3 | 51,9 | 51,6 | 51,6 |
| 163—171 | 51,4 | 51,2 | 50,7 | 50,0 | 49,4 | 49,3 | 49,7 | 50,6 | 51,8 |
| 172—180 | 53,0 | 54,0 | 55,3 | 55,9 | 55,9 | 54,6 | 53,5 | 52,4 | 52,1 |
| 181—189 | 52,3 | 53,0 | 53,8 | 54,6 | 55,4 | 55,9 | 55,9 | 55,2 | 54,4 |
| 190—198 | 53,7 | 53,6 | 53,6 | 53,2 | 52,5 | 52,0 | 51,4 | 51,0 | 50,9 |
| 199—207 | 52,4 | 53,5 | 55,6 | 58,0 | 59,5 | 60,0 | 60,4 | 60,5 | 60,2 |
| 208—216 | 59,7 | 59,0 | 57,6 | 56,4 | 55,2 | 54,5 | 54,1 | 54,1 | 54,4 |
| 217—225 | 55,5 | 56,2 | 57,0 | 57,3 | 57,4 | 57,0 | 56,4 | 55,9 | 55,5 |
| 226—234 | 55,3 | 55,2 | 55,4 | 56,0 | 56,5 | 57,1 | 57,3 | 56,8 | 55,6 |
| 235—243 | 55,0 | 54,1 | 54,3 | 55,3 | 56,4 | 57,2 | 57,8 | 58,3 | 58,6 |
| 244—252 | 58,8 | 58,8 | 58,6 | 58,0 | 57,4 | 57,0 | 56,4 | 56,3 | 56,4 |
| 253—261 | 56,4 | 56,0 | 55,2 | 54,0 | 53,0 | 52,0 | 51,6 | 51,6 | 51,1 |
| 262—270 | 50,4 | 50,0 | 50,0 | 52,0 | 54,0 | 55,1 | 54,5 | 52,8 | 51,4 |
| 271—279 | 50,8 | 51,2 | 52,0 | 52,8 | 53,8 | 54,5 | 54,9 | 54,9 | 54,8 |
| 280—288 | 54,4 | 53,7 | 53,3 | 52,8 | 52,6 | 52,6 | 53,0 | 54,3 | 56,0 |
| 289—296 | 57,0 | 58,0 | 58,6 | 58,5 | 58,3 | 57,8 | 57,3 | 57,0 | |

Таблица П10.5

**Выборочные ковариации первых разностей от исходных данных
для газовой печи**

| k | $c_{11}(k)$ | k | $c_{11}(k)$ | k | $c_{11}(k)$ | k | $c_{11}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 10,9 | 10 | 0,8 | 20 | -0,6 | 30 | -0,8 |
| 1 | 8,1 | 11 | 0,9 | 21 | 0,1 | 31 | 0,0 |
| 2 | 3,9 | 12 | 1,0 | 22 | 0,7 | 32 | -0,9 |
| 3 | -0,2 | 13 | 0,9 | 23 | 0,9 | 33 | 1,7 |
| 4 | -3,1 | 14 | 0,3 | 24 | 0,6 | 34 | 1,8 |
| 5 | -3,9 | 15 | -0,4 | 25 | 0,3 | 35 | 1,4 |
| 6 | -3,6 | 16 | -0,6 | 26 | -0,1 | 36 | 0,6 |
| 7 | -2,9 | 17 | -1,0 | 27 | -0,5 | 37 | 0,0 |
| 8 | -2,1 | 18 | -1,4 | 28 | -1,1 | 38 | -0,5 |
| 9 | -1,1 | 19 | -1,3 | 29 | -1,3 | 39 | -1,0 |

Автоковариации входа

| k | $c_{12}(k)$ | k | $c_{12}(k)$ | k | $c_{12}(k)$ | k | $c_{12}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 0,79 | 10 | 0,69 | 20 | -0,12 | 30 | -0,13 |
| 1 | 0,43 | 11 | 0,74 | 21 | 0,01 | 31 | 0,00 |
| 2 | -0,30 | 12 | 0,68 | 22 | 0,17 | 32 | 0,10 |
| 3 | -1,23 | 13 | 0,55 | 23 | 0,30 | 33 | 0,15 |
| 4 | -1,92 | 14 | 0,42 | 24 | 0,32 | 34 | 0,20 |
| 5 | -2,10 | 15 | 0,22 | 25 | 0,25 | 35 | 0,20 |
| 6 | -1,70 | 16 | 0,00 | 26 | 0,10 | 36 | 0,17 |
| 7 | -0,94 | 17 | -0,15 | 27 | -0,06 | 37 | -0,01 |
| 8 | -0,14 | 18 | -0,23 | 28 | -0,10 | 38 | -0,20 |
| 9 | 0,42 | 19 | -0,23 | 29 | -0,14 | 39 | -0,36 |

Взаимные ковариации входа и выхода

| k | $c_{21}(k)$ | k | $c_{21}(k)$ | k | $c_{21}(k)$ | k | $c_{21}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 0,79 | 10 | 0,17 | 20 | -0,05 | 30 | -0,27 |
| 1 | 0,89 | 11 | 0,26 | 21 | -0,01 | 31 | -0,15 |
| 2 | 0,79 | 12 | 0,30 | 22 | 0,01 | 32 | 0,02 |
| 3 | 0,55 | 13 | 0,29 | 23 | 0,04 | 33 | 0,09 |
| 4 | 0,29 | 14 | 0,24 | 24 | 0,09 | 34 | 0,12 |
| 5 | 0,05 | 15 | 0,13 | 25 | 0,12 | 35 | 0,15 |
| 6 | -0,15 | 16 | -0,02 | 26 | 0,06 | 36 | 0,11 |
| 7 | -0,20 | 17 | -0,12 | 27 | -0,10 | 37 | 0,02 |
| 8 | -0,15 | 18 | -0,13 | 28 | -0,28 | 38 | -0,13 |
| 9 | 0,02 | 19 | -0,08 | 29 | -0,33 | 39 | -0,20 |

Взаимные ковариации входа и выхода

Продолжение

| k | $c_{22}(k)$ | k | $c_{22}(k)$ | k | $c_{22}(k)$ | k | $c_{22}(k)$ |
|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|-----|-------------|
| 0 | 0,598 | 10 | -0,054 | 20 | -0,060 | 30 | -0,056 |
| 1 | 0,465 | 11 | 0,002 | 21 | -0,027 | 31 | -0,054 |
| 2 | 0,294 | 12 | 0,034 | 22 | 0,004 | 32 | -0,025 |
| 3 | 0,093 | 13 | 0,038 | 23 | 0,025 | 33 | 0,037 |
| 4 | -0,073 | 14 | 0,028 | 24 | 0,032 | 34 | 0,064 |
| 5 | -0,168 | 15 | -0,004 | 25 | 0,036 | 35 | 0,075 |
| 6 | -0,201 | 16 | -0,030 | 26 | 0,033 | 36 | 0,061 |
| 7 | -0,193 | 17 | -0,065 | 27 | 0,024 | 37 | 0,026 |
| 8 | -0,156 | 18 | -0,083 | 28 | 0,004 | 38 | -0,002 |
| 9 | -0,116 | 19 | -0,083 | 29 | -0,035 | 39 | -0,020 |

Автоковариации выхода

ПРИЛОЖЕНИЕ П10.2

ЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Ниже приводится логическая схема для вычислительной программы FRQRSP, входными данными которой служат те же величины, что и для программы CROSSPEC (Приложение П9.2). Входная печать программы FRQRSP состоит из ковариаций (повторная проверка), сглаженных автоспектров для каждой из точек отсечения M , функций усиления и фазы, квадрата спектра когерентности и спектра остаточного шума, а также из приближенных верхних и нижних 95%-ных доверительных границ для функций усиления и фазы. Графический выход состоит из графиков входных, выходных и остаточного спектров в логарифмическом масштабе, графика логарифма функции усиления в зависимости от логарифма частоты с верхними и нижними доверительными границами и графика фазовой функции в зависимости от частоты, причем для каждой из функций на одном и том же рисунке помещаются графики для всех используемых точек отсечения.

Программа FRQRSP

Пункты от 1 до 11 целиком переносятся из программы CROSSPEC, так что после этого уже вычислены следующие величины для $K = 0$, NF :

SPEC(K, 1), SPEC(K, 2), SQ(K)

PHASE(K), CONSQ(K).

12. Вычислить

$$\begin{aligned} \text{GAIN}(K) &= \text{SQRT}(\text{SQ}(K))/\text{SPEC}(K, 1), \\ \text{RESID}(K) &= \text{SPEC}(K, 2)(1. - \text{CONSQ}(K)). \end{aligned}$$

13. Вычислить приближенную 95%-ную границу $f_{2, D-2}(0,95)$ F-распределения по следующей формуле*):

$$\begin{aligned} D &= 8 * N / (3 * M), \\ E &= D - 3, \\ A &= 3. + 9.2/E + 6.8/E * E. \end{aligned}$$

14. Вычислить верхние и нижние 95%-ные доверительные интервалы для функций усиления и фазы

$$\begin{aligned} G(K) &= \text{SQRT}(A * \text{RESID}(K)/\text{SPEC}(K, 1)), \\ P(K) &= \text{ARCSIN}(G(K)/\text{GAIN}(K)), \\ \text{GU}(K) &= \text{GAIN}(K) + G(K), \\ \text{GL}(K) &= \text{GAIN}(K) - G(K), \\ \text{PU}(K) &= \text{PHASE}(K) + P(K), \\ \text{PL}(K) &= \text{PHASE}(K) - P(K). \end{aligned}$$

15. Вычислить логарифмы в правых частях равенств и обозначить полученные величины так, как указано в левых частях:

$$\begin{aligned} \text{LOGSPEC}(K, 1) &= \text{LOG } 10(\text{SPEC}(K, 1)), \\ \text{LOGSPEC}(K, 2) &= \text{LOG } 10(\text{SPEC}(K, 2)), \\ \text{LOGRESID}(K) &= \text{LOG } 10(\text{RESID}(K)), \\ \text{LOGGAIN}(K) &= \text{LOG } 10(\text{GAIN}(K)), \\ \text{LOGGU}(K) &= \text{LOG } 10(\text{GU}(K)), \\ \text{LOGGL}(K) &= \text{LOG } 10(\text{GL}(K)). \end{aligned}$$

16. Напечатать: автоспектры (входные, выходные и остаточного шума), квадрат спектра когерентности, функции усиления и фазы, а также верхние и нижние 95%-ные доверительные границы для функций усиления и фазы.

17. Построить графики: автоспектров (входных, выходных и остаточного шума) в логарифмическом масштабе в зависимости от частоты, фазовой функции с 95%-ными доверительными интерва-

* Для $f_{2, D-2}(0,95)$ использована следующая приближенная формула:

$$f_{2, D-2}(0,95) = 3 + \frac{9,2}{D-3} + \frac{6,8}{(D-3)^2}, \quad D \geq 4,$$

где $(D-2)$ — число степеней свободы. — Прим. перев.

лами в зависимости от частоты, логарифма функции усиления с 95%-ными доверительными интервалами в зависимости от логарифма частоты. Для разных точек отсечения графики соответствующих спектров построить вместе.

Замечание. Из-за того что фаза может делать резкие скачки от $+90$ до -90° , графики фазовой функции иногда очень трудно разобрать, особенно после наложения нескольких графиков, соответствующих точкам отсечения, а также при использовании логарифмического масштаба по частоте. Из-за этого предлагается каждый фазовый спектр строить на отдельном месте и в зависимости от частоты, а не от логарифма частоты.

МНОГОМЕРНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В этой главе методы анализа двумерных временных рядов, развитые в гл. 8—10, обобщаются на случай произвольного числа временных рядов. Показано, как можно описать в частотной области q временных рядов, которые не являются причиной и следствием по отношению друг к другу, и как оценить многомерную частотную характеристику системы с q входами и r выходами. До сих пор мы оставляли в стороне теорию матриц, чтобы свести к минимуму математический аппарат, необходимый для понимания основных идей спектрального анализа. Однако дальнейшее изложение невозможно без использования матричных методов.

В разд. 11.1 некоторые из понятий, применявшихся в анализе одномерных и двумерных рядов, заново формулируются в терминах теории матриц. В частности, дается определение матрицы ковариаций временного ряда и показывается, что спектр тесно связан с ее собственными числами. В разд. 11.2 вводится многомерная линейная система. Линейный многомерный процесс определяется как выход такой системы, когда на ее входы поступают несколько некоррелированных белых шумов. Важными частными случаями многомерных линейных процессов являются двумерные процессы авторегрессии и скользящего среднего.

В разд. 11.4 изложены основные идеи многомерного спектрального анализа и оценивания многомерных частотных характеристик. Для изложения этих идей потребовалось заново рассмотреть в разд. 11.3 важнейшие понятия многомерной регрессии и многомерного статистического анализа. Наконец, в разд. 11.5 обсуждаются наиболее важные практические аспекты оценивания многомерных частотных характеристик и приводится пример анализа данных турбогенератора, имеющего два входа и два выхода.

Обычно векторы обозначают строчными буквами, а матрицы — прописными. Однако в этой книге мы не сможем всегда пользоваться этим правилом, поскольку строчными буквами мы обозначили величины во временной области, а прописными — в частотной. Мы будем обозначать векторы и матрицы жирным шрифтом. По возможности прописными жирными буквами будут обозначаться матрицы, но иногда такие буквы будут относиться и к векторам. Точный смысл обозначения будет ясен в каждом конкретном случае из контекста.

11.1. СВОЙСТВА МАТРИЦЫ КОВАРИАЦИЙ

11.1.1. Матрица ковариаций действительного случайного процесса

В разд. 3.1.5 было показано, что зависящие от вторых моментов свойства набора случайных величин определяются их матрицей ковариаций (3.1.20). Поскольку случайный процесс содержит бесконечное множество случайных величин, его свойства, зависящие от моментов второго порядка, определяются матрицами ковариаций наборов значений процесса в произвольные моменты времени t_1, \dots, t_N . Для дискретного стационарного процесса и для равноотстоящих отсчетов по времени мы будем иметь

$$\text{Cov}[X(t_i), X(t_j)] = \sigma^2 \rho(i - j), \quad (11.1.1)$$

где $\rho(k)$ — автокорреляционная функция. Матрица ковариаций, соответствующая N таким отсчетам, представляет собой таблицу, в которой на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит элемент $\text{Cov}[X(t_i), X(t_j)]$. Таким образом, пользуясь равенством (11.1.1), матрицу ковариаций можно записать в виде

$$\mathbf{V}_N = \sigma^2 \begin{Bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(N-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(N-2) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 & \dots & \rho(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(N-1) & \rho(N-2) & \rho(N-3) & \dots & 1 \end{Bmatrix}. \quad (11.1.2)$$

Матрица, обладающая тем свойством, что ее элементы на линиях, параллельных главной диагонали, равны (как, например, в матрице (11.1.2)), называется *теплицевой*.

Свойство положительной полуопределенности. Как отмечалось в разд. 3.1.5, матрица ковариаций набора случайных величин является положительно полуопределенной. Следовательно, для любого N матрица ковариаций стационарного случайного процесса \mathbf{V}_N является положительно полуопределенной, т. е. все главные миноры определителя этой матрицы неотрицательны. Отсюда следует, что автокорреляции стационарного временного ряда должны подчиняться некоторому множеству ограничений. Например, при $N = 2$ из $|\mathbf{V}_2| \geq 0$ следует, что

$$|\rho(1)| \leq 1.$$

Аналогично, рассматривая пару случайных величин $X(t), X(t+s)$, получаем для любого s

$$|\rho(s)| \leq 1.$$

Более интересный пример получается при $N = 3$. В этом случае

$$|\mathbf{V}_3| = \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix} \geq 0. \quad (11.1.3)$$

Как нетрудно проверить, из (11.1.3) следует

$$\begin{aligned} |\rho(2)| &\leq 1, \\ \left| \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} \right| &\leq 1. \end{aligned} \quad (11.1.4)$$

Первое из условий (11.1.4) не добавляет ничего нового, но второе дает ограничение, которому должны удовлетворять $\rho(1)$ и $\rho(2)$. Чтобы проиллюстрировать это ограничение, рассмотрим процесс авторегрессии первого порядка, для которого $\rho(2) = \rho^2(1)$, $\rho(3) = \rho^3(1)$ и т. д. Функция

$$\pi(2) = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} \quad (11.1.5)$$

для процесса авторегрессии первого порядка равна нулю. Следовательно, когда $\pi(2)$ отлична от нуля, она дает меру *избыточной корреляции* по сравнению с процессом авторегрессии первого порядка. Таким образом, $\pi(2)$ можно использовать для проверки возможности описания эмпирического временного ряда с помощью процесса первого порядка (разд. 5.4.3).

В более общем случае, рассматривая $|\mathbf{V}_k|$, можно показать, что

$$\pi(k-1) = \frac{\|\mathbf{V}_k\|}{|\mathbf{V}_{k-1}|} \quad (11.1.6)$$

лежит между -1 и $+1$, где $\|\mathbf{V}_k\|$ — алгебраическое дополнение элемента $\rho(k-1)$ в матрице \mathbf{V}_k . Зависящая от k функция $\pi(k)$ называется *частной автокорреляционной функцией*. Она обладает тем свойством, что для процесса авторегрессии m -го порядка

$$\begin{aligned} \pi(k) &\neq 0, & k \leq m, \\ \pi(k) &= 0, & k > m. \end{aligned}$$

Следовательно, $\pi(k)$ можно использовать для проверки возможности описания эмпирического временного ряда с помощью процесса авторегрессии данного порядка.

11.1.2. Собственные числа матрицы ковариаций и спектр

В этом разделе мы покажем, что собственные числа матрицы ковариаций \mathbf{V}_N приблизительно равны значениям спектра мощности на частотах i/N . Некоторые элементарные свойства собственных

чисел и собственных векторов, которые понадобятся в этом разделе, изложены в Приложении П11.1.

Линейное преобразование коррелированных случайных величин в некоррелированные. Предположим, что матрица ковариаций случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_N) = \mathbf{X}'$ равна \mathbf{V} . Рассмотрим линейные функции $\mathbf{l}'_i \mathbf{X}$ и $\mathbf{l}'_j \mathbf{X}$ от этих случайных величин, где $\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j$ — левосторонние собственные векторы матрицы \mathbf{V} . Из (П11.1.7) получаем

$$\text{Cov}[\mathbf{l}'_i \mathbf{X}, \mathbf{l}'_j \mathbf{X}] = \mathbf{l}'_i \mathbf{V} \mathbf{l}_j = \begin{cases} \lambda_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (11.1.7)$$

Поэтому преобразование

$$Y_i = \mathbf{l}'_i \mathbf{X}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (11.1.8)$$

переводит коррелированные случайные величины X_i в некоррелированные величины Y_i . Далее, дисперсия Y_i равна λ_i — собственному числу, соответствующему вектору \mathbf{l}_i . Например, при $N = 2$ собственные числа получаются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & \rho \\ \rho & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (11.1.9)$$

так что $\lambda_1 = 1 + \rho$, $\lambda_2 = 1 - \rho$. Собственные векторы равны

$$\begin{aligned} \mathbf{l}'_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \mathbf{l}'_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (11.1.10)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 + X_2), \\ Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 - X_2) \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

и можно проверить, что Y_1 и Y_2 некоррелированы и $\text{Var}[Y_1] = 1 + \rho$, $\text{Var}[Y_2] = 1 - \rho$. Обратное (11.1.8) преобразование, а именно

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{l}'_i \mathbf{Y} = l_{i1} Y_1 + l_{i2} Y_2 + \dots + l_{iN} Y_N, \quad (11.1.12)$$

показывает, что X_i можно записать в виде линейной функции от некоррелированных случайных величин Y_i . Наконец, с помощью (3.2.18) дисперсию X_i можно разложить на слагаемые

$$\text{Var}[X_i] = \sum_{j=1}^N l_{ji}^2 \lambda_j. \quad (11.1.13)$$

Собственные числа циклического случайного процесса. В общем случае собственные векторы матрицы ковариаций (11.1.2) случайного процесса зависят от ковариаций очень сложным образом. Однако ситуация существенно упрощается для *периодического*, или *циклического*, процесса с периодом N . Это означает, что

$$X(t) = X(t + N),$$

и, следовательно, автокорреляции удовлетворяют условию

$$\rho(k) = \rho(N - k). \quad (11.1.14)$$

Если циклический процесс построен из обычного процесса с помощью первых N членов, то при $N \rightarrow \infty$ он будет стремиться к этому исходному процессу. Следовательно, при конечном N , свойства циклического процесса будут приближенно совпадать со свойствами исходного процесса.

В силу условия (11.1.14) матрица ковариаций циклического процесса имеет вид

$$\mathbf{W}_N = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(N-1) \\ \rho(N-1) & 1 & \rho(1) & \dots & \rho(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(1) & \rho(2) & \dots & \rho(N-1) & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.1.15)$$

Собственные числа матрицы \mathbf{W}_N удовлетворяют уравнению

$$|\mathbf{W}_N - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_N \\ a_N & a_1 & \dots & a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (11.1.16)$$

где $a_1 = 1 - \lambda$, $a_2 = \rho(1)$, \dots , $a_N = \rho(N-1)$. Определитель (11.1.16) называется *циркулянт*. Его можно представить в виде следующего разложения:

$$|\mathbf{W}_N - \lambda \mathbf{I}| = \prod_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_i \omega_k^{i-1}, \quad (11.1.17)$$

где $\omega_k = \exp[j(2\pi k/N)]$ — один из корней N -й степени из единицы. Подставляя вместо a_i их значения в (11.1.17) и считая, что $N = 2n$, собственные числа матрицы \mathbf{W}_N можно записать в виде

$$\lambda_k = 1 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \rho(i) \cos \frac{2\pi i k}{N} + \rho\left(\frac{N}{2}\right) \cos \pi k. \quad (11.1.18)$$

Все собственные значения, за исключением значений с индексами $k = N$ и $k = N/2$, попарно равны, а именно $\lambda_k = \lambda_{N-k}$. Собственные векторы, соответствующие значениям λ_k и λ_{N-k} , имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_k &= \left(\cos \frac{2\pi k}{N}, \cos \frac{4\pi k}{N}, \dots, \cos 2\pi k \right), \\ \mathbf{I}_{N-k} &= \left(\sin \frac{2\pi k}{N}, \sin \frac{4\pi k}{N}, \dots, \sin 2\pi k \right), \end{aligned}$$

т. е. они представляют собой синусоидальную и косинусоидальную волны с частотой $f_k = k/N$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Отсюда, применяя преобразование (11.1.8), получаем некоррелированные величины

$$\begin{aligned} U(i) &= \sum_{t=1}^N X_t \cos \frac{2\pi t i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ V(i) &= \sum_{t=1}^N X_t \sin \frac{2\pi t i}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{11.1.19}$$

Далее, с помощью (11.1.12) находим

$$X_t = \sum_{i=0}^n U(i) \cos \frac{2\pi t i}{N} + \sum_{i=1}^{n-1} V(i) \sin \frac{2\pi t i}{N} \tag{11.1.20}$$

и с помощью (11.1.13) получаем

$$\text{Var}[X_t] = \lambda_0 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j + \lambda_n. \tag{11.1.21}$$

Равенство (11.1.18) показывает, что при $N \rightarrow \infty$ собственное число $\lambda_k \rightarrow 2\Gamma(k/N)$, т. е. собственные числа выписывают кривую спектра. Аналогично, при $N \rightarrow \infty$ равенства (11.1.19) и (11.1.20) переходят в

$$\begin{aligned} U(f) &= \sum_{t=1}^{\infty} X_t \cos 2\pi f t, \\ V(f) &= \sum_{t=1}^{\infty} X_t \sin 2\pi f t \end{aligned} \tag{11.1.22}$$

и

$$X_t = \int_0^{1/2} U(f) \cos 2\pi f t df + \int_0^{1/2} V(f) \sin 2\pi f t df. \tag{11.1.23}$$

Равенство (11.1.23) показывает, что процесс X_t можно представить в виде суммы синусоидальных и косинусоидальных волн

в непрерывном диапазоне частот. Амплитуды (11.1.22) этих волн сами образуют ортогональный (некоррелированный) процесс, или процесс с ортогональными приращениями, обсуждавшийся в разд. 5.2.2.

11.1.3. Матрица ковариаций комплексного случайного процесса

В разд. 8.2.1 было показано, что при спектральном анализе нескольких временных рядов появляются комплексные случайные величины, например случайная оценка, соответствующая выборочному взаимному спектру двух процессов. Хотя можно обойтись действительными величинами, рассматривая отдельно синфазную и сдвинутую по фазе компоненты, большее математическое изящество достигается при их совместном использовании как вещественной и мнимой частей некоторой комплексной величины. В этом разделе излагается исчисление комплексных случайных величин.

Среднее значение и ковариация комплексных случайных величин. Комплексная случайная величина определяется равенством

$$X_1 = U_1 + jV_1,$$

где U_1, V_1 — действительные случайные величины. С помощью (3.2.15) находим среднее значение этой комплексной величины

$$E[X_1] = E[U_1] + jE[V_1].$$

Ковариация двух комплексных случайных величин определяется равенством

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_1, X_2^*] &= E[(X_1 - E[X_1])(X_2^* - E[X_2^*])] = \\ &= \text{Cov}[(U_1 + jV_1), (U_2 - jV_2)] = \\ &= \text{Cov}[U_1, U_2] + \text{Cov}[V_1, V_2] + \\ &+ j\{\text{Cov}[V_1, U_2] - \text{Cov}[U_1, V_2]\}, \end{aligned} \quad (11.1.24)$$

где звездочки обозначают комплексное сопряжение. Мы видим, что ковариация комплексных величин будет, вообще говоря, комплексным числом, но дисперсия — всегда действительное число, так как

$$\text{Var}[X_1] = \text{Cov}[X_1, X_1^*] = \text{Var}[U_1] + \text{Var}[V_1]. \quad (11.1.25)$$

Ковариация двух действительных величин симметрична, в то время как ковариация комплексных величин удовлетворяет соотношению

$$\text{Cov}[X_1, X_2^*] = \{\text{Cov}[X_2, X_1^*]\}^*, \quad (11.1.26)$$

которое получается непосредственно из определения (11.1.24).

Матрица ковариаций комплексных случайных величин. Предположим, что $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ — вектор-строка, состоящая из

N комплексных случайных величин. Тогда матрица ковариаций этих величин имеет вид

$$\mathbf{V}_N = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X}^* - E[\mathbf{X}^*])'] =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2^*] & \dots & \text{Cov}[X_1, X_N^*] \\ \text{Cov}[X_2, X_1^*] & \text{Var}[X_2] & \dots & \text{Cov}[X_2, X_N^*] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[X_N, X_1^*] & \text{Cov}[X_N, X_2^*] & \dots & \text{Var}[X_N] \end{bmatrix}.$$

Из (11.1.26) следует, что матрица \mathbf{V}_N — эрмитова, а, кроме того, она положительно полуопределенна, т. е. все главные миноры \mathbf{V}_N неотрицательны. Например, при $N = 2$ имеем

$$\begin{vmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2^*] \\ \text{Cov}[X_2, X_1^*] & \text{Var}[X_2] \end{vmatrix} \geq 0,$$

откуда

$$\kappa_{12}^2 = \frac{|\text{Cov}[X_1, X_2^*]|^2}{\text{Var}[X_1] \text{Var}[X_2]} \leq 1. \quad (11.1.27)$$

Таким образом, κ_{12}^2 похож на квадрат коэффициента корреляции и называется *квадратом коэффициента когерентности* двух комплексных величин.

Авто- и взаимные ковариационные функции комплексных процессов. Предположим, что средние значения комплексных процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ равны μ_1 и μ_2 соответственно. Тогда автоковариационные функции этих процессов определяются равенствами

$$\gamma_{ii}(u) = E[(X_i(t) - \mu_i)(X_i^*(t+u) - \mu_i^*)], \quad i = 1, 2, \quad (11.1.28)$$

а их взаимная ковариационная функция

$$\gamma_{12}(u) = E[(X_1(t) - \mu_1)(X_2^*(t+u) - \mu_2^*)]. \quad (11.1.29)$$

Из (11.1.26) следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_{ii}(u) &= \gamma_{ii}^*(-u), \\ \gamma_{12}(u) &= \gamma_{21}^*(-u). \end{aligned} \quad (11.1.30)$$

Для действительных процессов (11.1.30) сводится к равенствам

$$\begin{aligned} \gamma_{ii}(u) &= \gamma_{ii}(-u), \\ \gamma_{12}(u) &= \gamma_{21}(-u), \end{aligned} \quad (11.1.31)$$

что совпадает с формулами (8.1.2) и (8.1.3), приводившимися ранее.

С помощью (11.1.24) авто- и взаимные ковариации комплексных процессов можно выразить через ковариации соответствующих действительных процессов. Таким образом, мы получаем

$$\gamma_{X_1, X_2}(u) = \gamma_{U_1, U_2}(u) + \gamma_{V_1, V_2}(u) + j \{ \gamma_{V_1, U_2}(u) - \gamma_{U_1, V_2}(u) \}.$$

Спектры и взаимные спектры комплексных процессов. Рассуждения, приведенные для действительных процессов в разд. 6.2.1 и 8.3.3, полностью применимы и к комплексным процессам. Таким образом, взаимный спектр комплексного процесса определяется равенством

$$\Gamma_{ii}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{ii}(u) e^{-f2\pi i u} du.$$

Автоспектр комплексного процесса является действительной и неотрицательной функцией, но она не является, вообще говоря, четной, и, следовательно, ее нельзя записать в виде косинус-преобразования от ковариационной функции на полуоси в силу свойства (11.1.30). Для действительных процессов такое представление автоспектра в виде косинус-преобразования (7.1.3) имеет место в силу свойства (11.1.31).

Взаимный спектр двух комплексных процессов обладает теми же свойствами, что и взаимный спектр двух действительных процессов (эти свойства указаны в разд. 8.3.3).

11.2. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В этом разделе с помощью теории матриц выводятся основные свойства многомерных случайных процессов. В результате понятия, введенные в гл. 8—10, приобретают большую общность. Мы увидим, что при рассмотрении более чем двух процессов появляются новые и интересные особенности.

11.2.1. Матричная ковариационная функция

Действительные процессы. В разд. 8.1.2 было показано, что два стационарных случайных процесса удобно описывать во временной области с помощью их авто- и взаимной ковариационных функций. Предположим теперь, что требуется описать *действительный* многомерный случайный процесс, т. е. векторный процесс

$$\mathbf{X}'(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_q(t)),$$

компоненты которого являются одномерными процессами. Если ограничиться свойствами, зависящими от моментов второго порядка,

то многомерный процесс можно описать матричной функцией, определяемой для каждого значения запаздывания u соотношением

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(u) &= E[(\mathbf{X}(t) - \mu)(\mathbf{X}(t+u) - \mu)'] = \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11}(u) & \gamma_{12}(u) & \dots & \gamma_{1q}(u) \\ \gamma_{21}(u) & \gamma_{22}(u) & \dots & \gamma_{2q}(u) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{q1}(u) & \gamma_{q2}(u) & \dots & \gamma_{qq}(u) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11.2.1)$$

Матричная функция $\mathbf{V}(u)$, $-\infty \leq u \leq \infty$, называется *матричной ковариационной функцией* (lagged covariance matrix) многомерного случайного процесса. Так как $\gamma_{ij}(u)$, вообще говоря, не равно $\gamma_{ji}(u)$, матрица $\mathbf{V}(u)$ в общем случае несимметрична. Однако она удовлетворяет соотношению*)

$$\mathbf{V}'(u) = \mathbf{V}(-u), \quad (11.2.2)$$

так как

$$\mathbf{V}'(u) = E[(\mathbf{X}(t+u) - \mu)(\mathbf{X}(t) - \mu)'] = \mathbf{V}(-u).$$

Комплексные процессы. Матричная ковариационная функция комплексного многомерного случайного процесса определяется соотношением

$$\mathbf{V}(u) = E[(\mathbf{X}(t) - \mu)(\mathbf{X}(t+u) - \mu)^*].$$

Ее элементы такие же, как и у матрицы (11.2.1), но комплексные ковариации определяются равенствами

$$\gamma_{ij}(u) = E[(X_i(t) - \mu_i)(X_j(t+u) - \mu_j)^*].$$

Другой способ представления вторых моментов многомерного процесса состоит в том, что задаются таблицы каждой авто- и взаимной ковариационной функции. Для наглядности предпочтительно иметь графики отдельных авто- и взаимных ковариационных функций.

Матричная корреляционная функция. Для многих практических целей и, в частности, для анализа временных рядов с различными масштабами измерения удобнее работать с матричной корреляционной функцией, состоящей из корреляций $\rho_{ij}(u)$.

*) В (11.2.2) и далее $\mathbf{V}'(u)$ означает транспонированную матрицу $\mathbf{V}(u)$. ---
Прим. перев.

11.2.2. Спектральная матрица

Далее мы всюду будем считать, что каждый отдельный процесс, входящий в многомерный процесс, является комплексным. Как показано в разд. 11.1.3, каждой паре процессов соответствует взаимный спектр, определяемый равенством

$$\Gamma_{il}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{il}(u) e^{-j2\pi fu} du. \quad (11.2.3)$$

Обратное (11.2.3) преобразование имеет вид

$$\gamma_{il}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{il}(f) e^{j2\pi fu} df. \quad (11.2.4)$$

Состоящая из авто- и взаимных спектров матрица

$$\mathbf{\Gamma}(f) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}(f) & \Gamma_{12}(f) & \dots & \Gamma_{1q}(f) \\ \Gamma_{21}(f) & \Gamma_{22}(f) & \dots & \Gamma_{2q}(f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{q1}(f) & \Gamma_{q2}(f) & \dots & \Gamma_{qq}(f) \end{pmatrix} \quad (11.2.5)$$

называется *спектральной матрицей* случайного многомерного процесса.

Свойства эрмитовости и положительной полуопределенности. Сейчас мы выведем очень важное свойство, которым обладает спектральная матрица. Это свойство заключается в том, что авто- и взаимные спектры должны удовлетворять некоторым совместным ограничениям.

Поступая так же, как и в разд. 6.2.1 при введении автоспектра, определим комплексный случайный процесс $Y(t)$, являющийся линейной комбинацией q отдельных случайных процессов, а именно

$$Y(t) = \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{X}(t) = \lambda_1^* X_1(t) + \lambda_2^* X_2(t) + \dots + \lambda_q^* X_q(t),$$

где λ_i — произвольные комплексные константы. Тогда автоковариационная функция процесса $Y(t)$ равна

$$\begin{aligned} \gamma_{YY}(u) &= E\{(Y(t) - \mu_Y)(Y(t+u) - \mu_Y)^*\} = \\ &= E\{\boldsymbol{\lambda}^* (\mathbf{X}(t) - \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{X}(t+u) - \boldsymbol{\mu})^* \boldsymbol{\lambda}\} = \\ &= \boldsymbol{\lambda}^* \mathbf{V}(u) \boldsymbol{\lambda}. \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

Взяв преобразование Фурье от (11.2.6) и используя равенство (11.2.4), автоспектр процесса $Y(t)$ можно выразить через спект-

ральную матрицу многомерного процесса. В результате получим

$$\Gamma_{YY}(f) = \lambda^* \Gamma(f) \lambda. \quad (11.2.7)$$

Так как $\Gamma_{YY}(f)$ — действительная скалярная функция, то $\Gamma_{YY}(f) = \Gamma_{YY}^*(f) = \Gamma_{YY}^{\prime}(f)$. Поэтому из (11.2.7) следует, что

$$\begin{aligned} \Gamma_{YY}^{\prime}(f) &= (\lambda^* \Gamma(f) \lambda)^{\prime} = \\ &= (\lambda^{\prime} \Gamma^*(f) \lambda^*)^{\prime} = \\ &= \lambda^* \Gamma^{\prime}(f) \lambda = \Gamma_{YY}(f) = \lambda^* \Gamma(f) \lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\Gamma(f) = \Gamma^*(f), \quad (11.2.8)$$

так что спектральная матрица — эрмитова, т. е.

$$\Gamma_{ii}(f) = \Gamma_{ii}^*(f).$$

Кроме того, так как квадратичная форма (11.2.7) неотрицательна при всех значениях λ , то $\Gamma(f)$ — эрмитова, положительно полуопределенная матрица. Это значит, что любой главный минор $\Gamma(f)$ неотрицателен. Например, при $q = 2$ мы имеем

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}(f) & \Gamma_{12}(f) \\ \Gamma_{21}(f) & \Gamma_{22}(f) \end{vmatrix} \geq 0,$$

откуда следует, что квадрат коэффициента когерентности удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \kappa_{12}^2(f) = \frac{|\Gamma_{12}(f)|^2}{\Gamma_{11}(f) \Gamma_{22}(f)} \leq 1.$$

Аналогично, при $q = 3$ получаем

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}(f) & \Gamma_{12}(f) & \Gamma_{13}(f) \\ \Gamma_{21}(f) & \Gamma_{22}(f) & \Gamma_{23}(f) \\ \Gamma_{31}(f) & \Gamma_{32}(f) & \Gamma_{33}(f) \end{vmatrix} \geq 0. \quad (11.2.9)$$

В разд. 11.3 будет показано, что, пользуясь (11.2.9), можно определить квадрат множественного коэффициента когерентности $\kappa_{123}^2(f)$, такого, что

$$0 \leq \kappa_{123}^2(f) \leq 1.$$

11.2.3. Многомерные линейные системы

В разд. 10.3 была описана методика оценивания частотной характеристики системы, имеющей один вход и один выход. В общем случае физическая система имеет несколько входов и несколько

выходов. Например, на рис. 11.1 приведены участки некоторых непрерывных записей, соответствующих двум входам и двум выходам турбогенератора. Теперь мы покажем, что многомерную линейную систему во временной области можно описать матрицей откликов

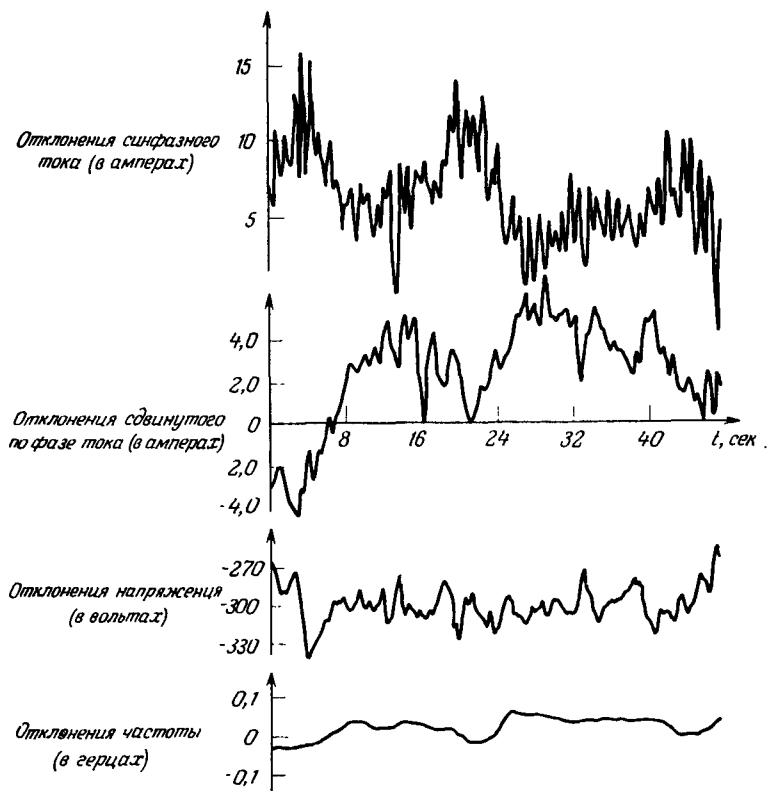


Рис. 11.1. Входные и выходные процессы 50-мегаваттного турбогенератора.

на единичный импульс, а в частотной — матрицей частотных характеристик.

Матрица откликов на единичный импульс. Если многомерная система является линейной, то любой ее выход представляет собой сумму вкладов от q входных переменных, т. е.

$$X_i(t) - \mu_{X_i} = \int_0^{\infty} h_{i1}(u) [Z_1(t-u) - \mu_{Z_1}] du + \dots \\ \dots + \int_0^{\infty} h_{iq}(u) [Z_q(t-u) - \mu_{Z_q}] du.$$

Полный отклик системы, состоящий из r выходов $X_i(t)$, $i = q+1, \dots, q+r$, можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{X}(t) - \boldsymbol{\mu}_X = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(u) [\mathbf{Z}(t-u) - \boldsymbol{\mu}_Z] du, \quad (11.2.10)$$

где матрица откликов на единичный импульс $\mathbf{h}(u)$ задается соотношением

$$\mathbf{h}(u) = \begin{pmatrix} h_{(q+1)1}(u) & h_{(q+1)2}(u) & \dots & h_{(q+1)q}(u) \\ h_{(q+2)1}(u) & h_{(q+2)2}(u) & \dots & h_{(q+2)q}(u) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_{(q+r)1}(u) & h_{(q+r)2}(u) & \dots & h_{(q+r)q}(u) \end{pmatrix}. \quad (11.2.11)$$

Пример. Рассмотрим общую многомерную систему, которая в двумерном случае имеет вид (8.1.17),

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{X}(t) = \mathbf{Z}(t).$$

Эта система имеет следующую матрицу откликов на единичный импульс:

$$\mathbf{h}(u) = \mathbf{B}'e^{-u\mathbf{S}}.$$

Например, в двумерном случае, когда

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} + 2X_1 + \frac{1}{2}X_2 &= Z_1, \\ \frac{dX_2}{dt} + 2X_1 + 2X_2 &= Z_2, \end{aligned}$$

матрица откликов на единичный импульс равна

$$\mathbf{h}(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{-u} + e^{-3u}) & -(e^{-u} - e^{-3u}) \\ -\frac{1}{4}(e^{-u} - e^{-3u}) & \frac{1}{2}(e^{-u} + e^{-3u}) \end{pmatrix}. \quad (11.2.12)$$

Матрица частотных характеристик. Другой способ описания многомерной системы состоит в задании матрицы частотных характеристик, т. е. матрицы, элементы которой являются преобразованиями Фурье от элементов матрицы откликов на единичный импульс, а именно

$$H_{il}(f) = \int_0^{\infty} h_{il}(u) e^{-j2\pi fu} du.$$

Таким образом, матрицу частотных характеристик можно записать в виде

$$\mathbf{H}(f) = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(u) e^{-j2\pi f u} du. \quad (11.2.13)$$

Взяв преобразование Фурье от (11.2.10), мы находим, что спектральные амплитуды выходов на частоте f можно получить из равенства

$$\mathbf{X}(f) = \mathbf{H}(f) \mathbf{Z}(f), \quad (11.2.14)$$

которое является матричным аналогом равенства (2.3.23). Например, для двух выходов и трех входов из (11.2.14) получаем

$$\begin{aligned} X_4(f) &= H_{41}(f) Z_1(f) + H_{42}(f) Z_2(f) + H_{43}(f) Z_3(f), \\ X_5(f) &= H_{51}(f) Z_1(f) + H_{52}(f) Z_2(f) + H_{53}(f) Z_3(f). \end{aligned}$$

В частном случае, когда на входы подается комплексный сигнал $\exp(j2\pi f t)$, отклик i -го выхода равен

$$X_i(t) = [H_{i1}(f) + H_{i2}(f) + \dots + H_{iq}(f)] e^{j2\pi f t}. \quad (11.2.15)$$

Для всей системы равенства (11.2.15) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{H}(f) \mathbf{1} e^{j2\pi f t}, \quad (11.2.16)$$

где $\mathbf{1}$ — вектор, целиком состоящий из единиц.

Из (11.2.14) можно получить полную частотную характеристику системы на данной частоте. Таким образом, полные функции усиления равны

$$G_i(f) = [G_{i1}^2(f) + \dots + G_{iq}^2(f)]^{1/2},$$

а полные фазовые сдвиги равны

$$\varphi_i(f) = \varphi_{i1}(f) + \varphi_{i2}(f) + \dots + \varphi_{iq}(f).$$

Пример. Рассмотрим многомерную систему

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Z}.$$

Ее матрица частотных характеристик равна

$$\mathbf{H}(f) = (j2\pi f \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}, \quad (11.2.17)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а на остальных местах — нули.

Для обсуждавшейся выше системы второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} + 2X_1 + \frac{1}{2}X_2 &= Z_1, \\ \frac{dX_2}{dt} + 2X_1 + 2X_2 &= Z_2 \end{aligned}$$

мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(f) &= \begin{pmatrix} j2\pi f + 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & j2\pi f + 2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{(j2\pi f + 2)^2 - 1} \begin{pmatrix} j2\pi f + 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & j2\pi f + 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{j2\pi f + 2}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 1)} & \frac{-2}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 1)} \\ \frac{-\frac{1}{2}}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 1)} & \frac{j2\pi f + 2}{(j2\pi f + 3)(j2\pi f + 1)} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{j2\pi f + 1} \cdot \frac{1}{j2\pi f + 3} & \frac{-1}{j2\pi f + 1} \cdot \frac{1}{j2\pi f + 3} \\ \frac{-\frac{1}{4}}{j2\pi f + 1} \cdot \frac{1}{j2\pi f + 3} & \frac{\frac{1}{2}}{j2\pi f + 1} \cdot \frac{1}{j2\pi f + 3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Взяв обратное преобразование Фурье от этого выражения, получаем уже упоминавшуюся выше формулу (11.2.12)

$$\mathbf{h}(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{-u} + e^{-3u}) & -(e^{-u} - e^{-3u}) \\ -\frac{1}{4}(e^{-u} - e^{-3u}) & \frac{1}{2}(e^{-u} + e^{-3u}) \end{pmatrix}.$$

11.2.4. Многомерные линейные процессы

Стационарность. Если входы $Z_i(t)$ в (11.2.10) представляют собой набор белых шумов, то модель (11.2.10) определяет многомерный линейный процесс. Для полной общности предполагается, что эти белые шумы коррелированы в одинаковые моменты времени, а в остальные моменты некоррелированы. Таким образом,

$$\text{Cov}[Z_i(t), Z_k(t')] = w_{ik} \delta(t - t').$$

Отсюда матричная ковариационная функция белых шумов имеет вид

$$\mathbf{V}_Z(u) = \mathbf{W} \delta(u). \quad (11.2.18)$$

С помощью (11.2.10) находим матричную ковариационную функцию процесса $\mathbf{X}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_X(u) &= \text{Cov}[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}^*(t+u)] = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{h}(v) \text{Cov}[\mathbf{Z}(t-v), \mathbf{Z}^*(t+u-s)] \mathbf{h}^*(s) dv ds. \quad (11.2.19) \end{aligned}$$

Если матричная ковариационная функция $\mathbf{Z}(t)$ имеет вид (11.2.18), то (11.2.19) сводится к

$$\mathbf{V}_X(u) = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(v) \mathbf{W} \mathbf{h}^{*'}(v+u) dv. \quad (11.2.20)$$

Следовательно, этот многомерный процесс является стационарным второго порядка, так как его матричная ковариационная функция зависит только от запаздывания u . Впрочем, для стационарности $\mathbf{X}(t)$ нужно, чтобы выполнялось еще одно условие. Поскольку при любом u элементы матрицы $\mathbf{V}_X(u)$ не превосходят по модулю соответствующих диагональных элементов матрицы $\mathbf{V}_X(0)$, нужно еще потребовать, чтобы $\mathbf{V}_X(0)$ была конечной, т. е.

$$\int_0^{\infty} \mathbf{h}(v) \mathbf{W} \mathbf{h}^{*'}(v) dv < \mathbf{M},$$

где неравенство выполняется для всех элементов матрицы.

Спектральная матрица линейного процесса. Взяв преобразование Фурье от (11.2.19), находим спектральную матрицу линейного процесса (11.2.10)

$$\Gamma_X(f) = \mathbf{H}(-f) \Gamma_Z(f) \mathbf{H}^{*'}(-f), \quad (11.2.21)$$

$$\text{где } \mathbf{H}^*(f) = \int_0^{\infty} \mathbf{h}^*(u) e^{j2\pi fu} du.$$

В частном случае, когда матричная ковариационная функция имеет вид (11.2.18), спектральная матрица (11.2.21) переходит в

$$\Gamma_X(f) = \mathbf{H}(-f) \mathbf{W} \mathbf{H}^{*'}(-f). \quad (11.2.22)$$

Пример. Предположим, что

$$\mathbf{H}(f) = (j2\pi f \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1},$$

где \mathbf{A} — действительная матрица. Так как для действительной $\mathbf{h}(u)$ имеет место равенство $\mathbf{H}^*(-f) = \mathbf{H}(f)$, то

$$\Gamma_X(f) = (-j2\pi f \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} \mathbf{W} (j2\pi f \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}.$$

Для случая с двумя входами и двумя выходами, который мы обсуждали выше,

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} + 2X_1 + \frac{1}{2}X_2 &= Z_1, \\ \frac{dX_2}{dt} + 2X_1 + X_2 &= Z_2, \end{aligned}$$

отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(f) &= (j2\pi f \mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1} = \\ &= \frac{1}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f + 3)} \begin{pmatrix} j2\pi f + 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & j2\pi f + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma_X(f) &= \frac{1}{(-j2\pi f + 1)(-j2\pi f + 3)} \begin{pmatrix} -j2\pi f + 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -j2\pi f + 2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \mathbf{W} \times \begin{pmatrix} j2\pi f + 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & j2\pi f + 2 \end{pmatrix} \frac{1}{(j2\pi f + 1)(j2\pi f + 3)} = \\ &= \frac{1}{[1 + (2\pi f)^2][9 + (2\pi f)^2]} \begin{pmatrix} -j2\pi f + 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -j2\pi f + 2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \mathbf{W} \times \begin{pmatrix} j2\pi f + 2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & j2\pi f + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то это выражение сводится к

$$\Gamma_X(f) = \frac{1}{[1 + (2\pi f)^2][9 + (2\pi f)^2]} \begin{pmatrix} 8 + (2\pi f)^2 & -5 - j3\pi f \\ -5 + j3\pi f & \frac{17}{4} + (2\pi f)^2 \end{pmatrix}.$$

11.2.5. Многомерные процессы авторегрессии и скользящего среднего

Многомерные процессы авторегрессии и скользящего среднего получаются из линейных процессов, когда матрица откликов на единичный импульс принимает специальную форму. Эти процессы можно выписать, если в их одномерном представлении заменить скаляры на векторы и матрицы. Например, дискретный многомерный процесс авторегрессии получится, если переделать запись (5.2.26) следующим образом:

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{Z}_t. \quad (11.2.23)$$

Равенство (11.2.23) для случая, скажем, двух переменных можно расписать в виде

$$\begin{aligned} X_{1t} - \mu_1 &= \alpha_{1,11}(X_{1t-1} - \mu_1) + \alpha_{1,12}(X_{2t-1} - \mu_2) + Z_{1t}, \\ X_{2t} - \mu_2 &= \alpha_{1,21}(X_{1t-1} - \mu_1) + \alpha_{1,22}(X_{2t-1} - \mu_2) + Z_{2t}. \end{aligned}$$

Аналогично, дискретный многомерный процесс скользящего среднего первого порядка имеет вид

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{Z}_t + \beta_1 \mathbf{Z}_{t-1},$$

и в случае двух переменных он записывается в виде равенств

$$\begin{aligned} X_{1t} - \mu_1 &= Z_{1t} + \beta_{1,11} Z_{1t-1} + \beta_{1,12} Z_{2t-1}, \\ X_{2t} - \mu_2 &= Z_{2t} + \beta_{1,21} Z_{1t-1} + \beta_{1,22} Z_{2t-1}. \end{aligned}$$

Процессы скользящего среднего. Общий многомерный процесс скользящего среднего можно записать в виде

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{Z}_t + \beta_1 \mathbf{Z}_{t-1} + \dots + \beta_l \mathbf{Z}_{t-l}. \quad (11.2.24)$$

Соответствующую матричную ковариационную функцию можно вычислить с помощью определения (11.2.1)

$$\mathbf{V}_X(k) = \begin{cases} \beta_1 \mathbf{V}_Z \beta'_{1+k} + \beta_2 \mathbf{V}_Z \beta'_{2+k} + \dots + \beta_{l-k} \mathbf{V}_Z \beta'_k, & k \leq l, \\ 0, & k > l. \end{cases} \quad (11.2.25)$$

Процессу (11.2.24) соответствует частотная характеристика

$$\mathbf{H}(f) = \mathbf{I} + \beta_1 e^{-j2\pi f} + \dots + \beta_l e^{-j2\pi l f}$$

и, следовательно, спектральная матрица

$$\mathbf{\Gamma}_X(f) = (\mathbf{I} + \beta_1 e^{j2\pi f} + \dots + \beta_l e^{j2\pi l f}) \mathbf{W} (\mathbf{I} + \beta'_1 e^{-j2\pi f} + \dots + \beta'_l e^{-j2\pi l f}). \quad (11.2.26)$$

Процессы авторегрессии. Общий дискретный многомерный процесс авторегрессии можно записать в виде

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \alpha_1 (\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \dots + \alpha_m (\mathbf{X}_{t-m} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{Z}_t. \quad (11.2.27)$$

Его матричная ковариационная функция удовлетворяет разностному уравнению

$$\mathbf{V}_X(k) = \alpha_1 \mathbf{V}_X(k-1) + \dots + \alpha_m \mathbf{V}_X(k-m), \quad k > 0.$$

В частном случае $m = 1$ это уравнение имеет решение

$$\mathbf{V}_X(k) = \alpha_1^k \mathbf{V}_X(0),$$

так что матричная ковариационная функция легко находится с помощью возведения в степени матрицы α_1 . Остается еще вычислить матрицу $\mathbf{V}_X(0)$, что можно сделать прямыми методами, проиллюстрированными в примере из разд. 8.1.5.

Рассматривая (11.2.27) как линейную систему с матрицей частотных характеристик

$$\mathbf{H}(f) = [\mathbf{I} - \alpha_1 e^{-j2\pi f} - \dots - \alpha_m e^{-j2\pi m f}]^{-1}$$

и пользуясь равенством (11.2.21), находим спектральную матрицу

$$\Gamma_X(f) = [\mathbf{I} - \alpha_1 e^{j2\pi f} - \dots - \alpha_m e^{j2\pi m f}]^{-1} \times \\ \times \mathbf{W} \times [\mathbf{I} - \alpha'_1 e^{-j2\pi f} - \dots - \alpha'_m e^{-j2\pi m f}]^{-1}. \quad (11.2.28)$$

Аналогично матричная ковариационная функция непрерывного процесса авторегрессии

$$\mathbf{a}_m \frac{d^m \mathbf{X}(t)}{dt^m} + \dots + \mathbf{a}_0 \mathbf{X}(t) = \mathbf{Z}(t) \quad (11.2.29)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathbf{a}_m \frac{d^m \mathbf{V}(u)}{du^m} + \dots + \mathbf{a}_0 \mathbf{V}(u) = 0.$$

Пусть, например, $m = 1$ и $\mathbf{a}_m = \mathbf{I}$. Тогда

$$\mathbf{V}(u) = e^{-\mathbf{a}_0 u} \mathbf{V}(0).$$

Спектральную матрицу, соответствующую процессу (11.2.29), можно получить, рассматривая его как линейную систему с матрицей частотных характеристик

$$\mathbf{H}(f) = [\mathbf{a}_m (j2\pi f)^m + \dots + \mathbf{a}_0 \mathbf{I}]^{-1}.$$

Смешанные процессы. Еще более общим является многомерный смешанный процесс авторегрессии — скользящего среднего

$$\mathbf{X}_t - \mu = \alpha_1 (\mathbf{X}_{t-1} - \mu) + \dots + \alpha_m (\mathbf{X}_{t-m} - \mu) + \mathbf{Z}_t + \beta_1 \mathbf{Z}_{t-1} + \dots + \beta_l \mathbf{Z}_{t-l}. \quad (11.2.30)$$

С помощью модели (11.2.30) можно получать разнообразные матричные ковариационные функции. Поэтому эта модель является мощным средством для описания многомерных временных рядов.

11.3. МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

В гл. 9—10 мы видели, что анализ взаимных спектров и оценивание частотных характеристик представляют собой распространение обычного корреляционного и регрессионного анализов на частотную область. Точно так же многомерный спектральный анализ и оценивание многомерных частотных характеристик представляют собой распространение идей анализа множественных корреляций и многомерного статистического анализа на частотную область. В этом разделе мы дадим обзор основных понятий множественной корреляции и множественного регрессионного анализа. Предполагается, что читателю полностью известен метод наименьших квадратов, изложенный в Приложении П4.1.

11.3.1. Множественный регрессионный анализ, единственный выходной процесс

Модель. Рассмотрим частный случай многомерной динамической модели (11.2.10), когда имеется только один выход, и предположим, что отклик системы на импульс затухает столь быстро, что ее можно эффективно описать с помощью установившихся усилений. Тогда после соответствующего изменения обозначений равенство (11.2.10) можно записать в виде

$$X_{t(q+1)} - \mu_{q+1} = h_1(X_{t1} - \bar{X}_1) + h_2(X_{t2} - \bar{X}_2) + \dots + h_q(X_{tq} - \bar{X}_q) + Z_t, \quad (11.3.1)$$

где Z_t — шум. Как отмечалось в разд. 4.3.4, из регрессионных переменных полезно вычесть их средние значения для того, чтобы при использовании метода наименьших квадратов оценки параметров оказались некоррелированными с оценкой среднего уровня μ_{q+1} .

Нормальные уравнения. Предполагая, что шум Z_t белый и что наблюдения производятся в моменты $t = 1, 2, \dots, N$, получаем, согласно (П4.1.7), следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}'\mathbf{X}) \hat{\mathbf{h}} &= \mathbf{X}'\mathbf{x}, \\ \hat{\mu}_{q+1} &= \bar{x}_{q+1}, \end{aligned} \quad (11.3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{12} - \bar{x}_2 & \dots & x_{1q} - \bar{x}_q \\ x_{21} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & \dots & x_{2q} - \bar{x}_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} - \bar{x}_1 & x_{N2} - \bar{x}_2 & \dots & x_{Nq} - \bar{x}_q \end{pmatrix}, \\ \mathbf{h}' &= (h_1, h_2, \dots, h_q), \\ \mathbf{x}' &= (x_{1q+1} - \bar{x}_{q+1}, x_{2q+1} - \bar{x}_{q+1}, \dots, x_{Nq+1} - \bar{x}_{q+1}). \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

С помощью выборочных оценок ковариаций

$$c_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_{ti} - \bar{x}_i)(x_{tj} - \bar{x}_j), \quad (11.3.4)$$

уравнения (11.3.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{qq} \hat{\mathbf{h}} &= \mathbf{c}_{q+1}, \\ \hat{\mu}_{q+1} &= \bar{x}_{q+1}, \end{aligned} \quad (11.3.5)$$

где \mathbf{C}_{qq} — матрица ковариаций входов, а \mathbf{c}_{q+1} — вектор взаимных ковариаций между входами и выходом.

Пример. При $q = 2$ модель (11.3.1) имеет вид

$$X_{t3} - \mu_3 = h_1(X_{t1} - \bar{X}_1) + h_2(X_{t2} - \bar{X}_2) + Z_t, \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

и оценочные уравнения (11.3.5) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 c_{11} + \hat{h}_2 c_{12} &= c_{13}, \\ \hat{h}_1 c_{21} + \hat{h}_2 c_{22} &= c_{23}, \\ \hat{\mu}_3 &= \bar{x}_3. \end{aligned}$$

11.3.2. Множественная корреляция

Выражение (П4.1.11) для остаточной суммы квадратов после подгонки линии регрессии имеет вид

$$\sum z_i^2 = \mathbf{x}'\mathbf{x} - \hat{\mathbf{h}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{h}}, \quad (11.3.6)$$

или, воспользовавшись (11.3.4) и (11.3.5), его можно переписать в виде

$$\sum z_i^2 = Nc_{(q+1)(q+1)} - \hat{\mathbf{h}}'\mathbf{c}_{q+1}. \quad (11.3.7)$$

Равенство (11.3.6) показывает, что остаточную сумму квадратов можно записать как разность между полной, или выходной, суммой квадратов и некоторой положительной величиной, называемой *регрессионной суммой квадратов*. Если регрессионную сумму квадратов записать в виде $r_{(q+1)12\dots q}^2$ -й доли полной суммы квадратов, то (11.3.7) перейдет в

$$\sum_{i=1}^N z_i^2 = Nc_{(q+1)(q+1)}(1 - r_{(q+1)12\dots q}^2), \quad (11.3.8)$$

причем $r_{(q+1)12\dots q}^2$ называется квадратом *множественного коэффициента корреляции* выхода x_{q+1} и q входов. Дисперсию выхода можно записать и по-другому:

$$c_{(q+1)(q+1)} = r_{(q+1)12\dots q}^2 c_{(q+1)(q+1)} + (1 - r_{(q+1)12\dots q}^2) c_{(q+1)(q+1)}. \quad (11.3.9)$$

Из (11.3.9) мы видим, что дисперсию выхода можно разложить на регрессионную сумму квадратов, представляющую ту часть выхода, которая может быть «учтена», или предсказана, по входам, и обусловленную шумом остаточную сумму квадратов, которую нельзя предсказать по входам. Таким образом, квадрат множественного коэффициента корреляции представляет собой ту долю дисперсии выхода, которую можно учесть, зная входы.

Из (11.3.7) и (11.3.8) мы видим, что множественный коэффициент корреляции можно оценить из уравнения

$$r_{(q+1)12\dots q}^2 c_{(q+1)(q+1)} = \hat{\mathbf{h}}'\mathbf{c}_{(q+1)}. \quad (11.3.10)$$

Если подставить сюда $\hat{\mathbf{h}}$ из уравнения (11.3.5), то получим другую форму выборочного множественного коэффициента корреляции

$$r_{(q+1)12 \dots q}^2 = 1 - \frac{|\mathbf{C}_{(q+1)(q+1)}|}{c_{(q+1)(q+1)} |\mathbf{C}_{qq}|}, \quad (11.3.11)$$

где $\mathbf{C}_{(q+1)(q+1)}$ — матрица ковариаций всех $q + 1$ переменных (одного выхода и q входов), а \mathbf{C}_{qq} — матрица ковариаций одних входов. Равенство (11.3.11) можно записать также через соответствующие корреляционные матрицы

$$r_{(q+1)12 \dots q}^2 = 1 - \frac{|\mathbf{R}_{(q+1)(q+1)}|}{|\mathbf{R}_{qq}|}. \quad (11.3.12)$$

Пример. При $q = 2$ равенство (11.3.10) переходит в

$$r_{312}^2 c_{33} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix} = \hat{h}_1 c_{13} + \hat{h}_2 c_{23}. \quad (11.3.13)$$

Пользуясь выражением (11.3.12), получаем

$$r_{312}^2 = 1 - \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{12}^2}. \quad (11.3.14)$$

Выборочная теория множественных коэффициентов корреляции.

Для применения выборочного подхода заменим в приведенных выше формулах все выборочные величины на соответствующие им случайные величины. Заметим, что эти случайные величины предполагаются гауссовскими, так же как и остаточные ошибки Z_i в (11.3.1). Тогда равенство (11.3.9) представляет собой разложение χ_{N-1}^2 на χ_q^2 и χ_{N-q-1}^2 . Таким образом, если верна нулевая гипотеза, согласно которой все параметры h_i в модели (11.3.1) равны нулю, то случайная величина, соответствующая выборочной величине

$$\frac{r_{(q+1)12 \dots q}^2}{1 - r_{(q+1)12 \dots q}^2} \cdot \frac{N-1-q}{q}, \quad (11.3.15)$$

будет распределена как $F_{q, N-1-q}$.

Доверительные интервалы. В общем случае, когда параметры модели отличны от нуля, совместная доверительная область для них дается неравенством (П4.1.14), которое в новых обозначениях имеет вид

$$(\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})' \mathbf{C}_{qq} (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}) \leq \frac{q}{N} f_{q, N-1-q} (1 - \alpha) s^2, \quad (11.3.16)$$

где s^2 — выборочная оценка остаточной дисперсии. Например, при $q = 2$ доверительная область для (h_1, h_2) выглядит следующим образом:

$$(h_1 - \bar{h}_1)^2 c_{11} + (h_2 - \bar{h}_2)^2 c_{22} + 2(h_1 - \bar{h}_1)(h_2 - \bar{h}_2) c_{12} \leq \frac{2}{N} f_{2, N-3}(1-\alpha) s^2. \quad (11.3.17)$$

Формулы для теоретических величин. Полученные выше формулы были выведены с помощью выборочных функций. При надлежащей интерпретации они применимы также и к теоретическим величинам. Так, например, вместо (11.3.8) мы будем иметь

$$\sigma_z^2 = \sigma_{q+1}^2 (1 - \rho_{(q+1)12 \dots q}^2), \quad (11.3.18)$$

где $\rho_{(q+1)12 \dots q}$ — теоретический множественный коэффициент корреляции.

11.3.3. Частная корреляция

Множественный коэффициент корреляции измеряет корреляцию между выходом и наилучшим прогнозом выхода с помощью *всех* входов. Однако полезно также уметь измерять корреляцию между выходом и одиночным входом. При решении этой задачи мы приходим к понятию частного коэффициента корреляции.

Чтобы проиллюстрировать основную идею, положим $q = 2$, так что модель (11.3.1) имеет вид

$$X_{t3} - \mu_3 = h_1(X_{t1} - \bar{X}_1) + h_2(X_{t2} - \bar{X}_2) + Z_t.$$

Если h_1 и h_2 отличны от нуля, то случайная величина X_3 , очевидно, будет коррелирована как с X_1 , так и с X_2 . Однако коэффициенты корреляции ρ_{31} и ρ_{32} , описывающие корреляцию внутри пар (X_3, X_1) и (X_3, X_2) по отдельности, не полностью характеризуют нужную нам корреляцию, так как сами X_1 и X_2 могут быть коррелированы. Если принимать в расчет лишь ρ_{32} и ρ_{31} , то могло бы случиться в качестве крайней ситуации, что X_3 и X_1 порознь сильно коррелированы с X_2 , в то время как «непосредственная» корреляция между X_3 и X_1 очень мала.

Таким образом, до вычисления корреляции между X_3 и X_1 необходимо устранить влияние переменной X_2 . Этого можно добиться, если взять наименьшую среднеквадратичную регрессию величины X_3 на X_2 и величины X_1 на X_2 . После этого частный коэффициент корреляции определяется как коэффициент корреляции между остаточными ошибками этих двух регрессий. Этим остаточным ошибкам соответствуют случайные величины

$$E_1 = X_1 - \mu_1 - \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{22}}(X_2 - \mu_2),$$

$$E_3 = X_3 - \mu_3 - \frac{\gamma_{32}}{\gamma_{22}}(X_2 - \mu_2),$$

где γ_{ik} — ковариация X_i и X_k . Тогда

$$\begin{aligned}\text{Cov}[E_1, E_3] &= \gamma_{13} - \frac{\gamma_{12}\gamma_{23}}{\gamma_{22}}, \\ \text{Var}[E_1] &= \gamma_{11}(1 - \rho_{12}^2), \\ \text{Var}[E_3] &= \gamma_{33}(1 - \rho_{23}^2).\end{aligned}\tag{11.3.19}$$

Отсюда корреляция между E_3 и E_1 равна

$$\rho_{31|2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{23}\rho_{12}}{\sqrt{(1 - \rho_{12}^2)(1 - \rho_{23}^2)}}.\tag{11.3.20}$$

Эта величина называется *частным коэффициентом корреляции* между X_3 и X_1 после учета влияния X_2 . Соответствующий выборочный частный коэффициент корреляции получается в результате замены теоретических корреляций ρ_{ij} на их выборочные оценки r_{ij} . Частный коэффициент корреляции $\rho_{32|1}$ получается с помощью перестановки индексов в (11.3.20).

Отметим, что в частном случае, когда случайные величины X_1 , X_2 и X_3 являются тремя последовательными значениями стационарного случайного процесса, мы имеем $\rho_{13} = \rho(2)$, $\rho_{12} = \rho_{23} = \rho(1)$, где $\rho(k)$ — автокорреляционная функция, зависящая от запаздывания k . В этом случае (11.3.20) сводится к

$$\frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)},$$

что совпадает с выражением для частного коэффициента автокорреляции, который мы обсуждали в разд. 5.4.3 и 11.1.1.

В общем случае для q входных переменных частный коэффициент корреляции между выходом X_{q+1} и любым из входов X_k определяется как обычный коэффициент корреляции между $(X_{q+1} - \hat{X}_{q+1})$ и $(X_k - \hat{X}_k)$, где \hat{X}_{q+1} , \hat{X}_k — полученные методом наименьших квадратов из всех величин X_i , кроме X_k , прогнозы случайных величин X_{q+1} , X_k . Величины, по которым строится прогноз, имеют индексы $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, q$. Это множество индексов мы обозначим K . Можно показать [1], что частный коэффициент корреляции записывается в следующем общем виде:

$$\rho_{(q+1)k|K} = \frac{\pi_{(q+1)k}}{\sqrt{\pi_{(q+1)(q+1)}\pi_{kk}}},\tag{11.3.21}$$

где π_{lm} — соответствующий элементу ρ_{lm} минор матрицы корреляций $\mathbf{R}_{(q+1)(q+1)}$ всех переменных.

Пример. Равенство (11.3.20) можно получить из (11.3.21) следующим образом:

$$\mathbf{R}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

так что

$$\pi_{31} = \rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23},$$

$$\pi_{33} = 1 - \rho_{12}^2,$$

$$\pi_{11} = 1 - \rho_{23}^2,$$

откуда и получается (11.3.20).

Дисперсионный анализ. Из (11.3.14) и (11.3.20), заменив теоретические корреляции на их выборочные аналоги, можно получить равенство

$$(1 - r_{312}^2) = (1 - r_{32}^2)(1 - r_{31|2}^2). \quad (11.3.22)$$

Если мы хотим проверить, насколько значимо величина (11.3.22) отличается от нуля, следует воспользоваться формулой (11.3.8), которая показывает, что остаточная сумма квадратов после подгонки x_1 и x_2 дает долю $1 - r_{312}^2$ от полной суммы квадратов. В этом случае равенство (11.3.22) показывает, что уменьшение суммы квадратов, обусловленное подгонкой x_2 , пропорционально величине $(1 - r_{32}^2)$, а дальнейшее уменьшение, обусловленное подгонкой x_1 , пропорционально $(1 - r_{31|2}^2)$. Заметим, впрочем, что если сначала подгонять x_1 , то (11.3.22) можно записать и в другом виде:

$$(1 - r_{312}^2) = (1 - r_{31}^2)(1 - r_{32|1}^2).$$

Таким образом, разложение (11.3.9) можно записать в виде двух таблиц дисперсионного анализа, как показано в табл. 11.1.

Если мы хотим проверить гипотезу, что x_1 не участвует в прогнозе x_3 , то надо взять отношение

$$\frac{(N-3)r_{31}^2}{1-r_{312}^2}$$

и сравнить его с вероятностной границей, получаемой из $F_{1, N-3}$ -распределения. Точно так же, если желательно проверить, что x_2 не дает вклада в прогноз x_3 , после того как x_1 уже подогнано, надо взять отношение

$$(N-3) \left\{ \frac{r_{312}^2 - r_{31}^2}{1 - r_{312}^2} \right\}$$

и сравнить его с вероятностной границей для $F_{1, N-3}$ -распределения.

Таблица 11.1

Таблица дисперсионного анализа для множественной регрессии

| Источник | Сумма квадратов | Число степеней свободы |
|---|--|------------------------|
| Случай, когда сначала подгоняется x_1 | | |
| Подгонка x_1 | $r_{31}^2 \sum (x_{t3} - \bar{x}_3)^2$ | 1 |
| Подгонка x_2 при заданном x_1 | $(r_{312}^2 - r_{31}^2) \sum (x_{t3} - \bar{x}_3)^2$ | 1 |
| Остаточная | $(1 - r_{312}^2) \sum (x_{t3} - \bar{x}_3)^2$ | $N - 3$ |
| Полная | $\sum (x_{t3} - \bar{x}_3)^2$ | $N - 1$ |
| Случай, когда сначала подгоняется x_2 | | |
| Подгонка x_2 | $r_{32}^2 \sum (x_{t3} - \bar{x}_3)^2$ | 1 |
| Подгонка x_1 при заданном x_2 | $(r_{312}^2 - r_{32}^2) \sum (x_{t3} - \bar{x}_3)^2$ | 1 |
| Остаточная | $(1 - r_{312}^2) \sum (x_{t3} - \bar{x}_3)^2$ | $N - 3$ |
| Полная | $\sum (x_{t3} - \bar{x}_3)^2$ | $N - 1$ |

Пример. Чтобы проиллюстрировать введенные выше понятия, рассмотрим данные, полученные при изучении работы электростанции (рис. 11.1). Эти данные были профильтрованы с помощью низкочастотного цифрового фильтра

$$H(z) = \left[\frac{1}{49} (z^{24} + \dots + z + 1 + z^{-1} + \dots + z^{-24}) \right]^4.$$

Выходной переменной была частота турбогенератора F , а входными переменными служили синфазный ток i_d и сдвинутый по фазе i_q . Поскольку цифровой фильтр устраняет большую часть мощности на частотах выше $f = 0,04$ гц, мы оставили в профильтрованном ряде лишь каждый двадцатый отсчет. В результате осталось 41 значение.

В модель

$$X_{3t} - \mu_3 = h_1 (X_{1t} - \bar{X}_1) + h_2 (X_{2t} - \bar{X}_2) + Z_t$$

входят параметры h_1 и h_2 , характеризующие установившиеся усиления, связывающие токи i_d и i_q с F . Нормальные уравнения (11.3.5) имеют вид

$$\begin{aligned} 100\hat{\mu}_3 &= 82,558, \\ 5,879\hat{h}_1 + 2,907\hat{h}_2 &= 1,145, \\ 2,907\hat{h}_1 + 43,488\hat{h}_2 &= 2,033, \end{aligned}$$

откуда получаем выборочные оценки: $\hat{\mu}_3 = 0,8256$, $\hat{h}_1 = -0,2253$ и $\hat{h}_2 = 0,06181$. Множественный коэффициент корреляции, вычислен-

ный по формуле (11.3.14), равен 0,977, а частные коэффициенты корреляции, вычисленные по формуле (11.3.20), равны $r_{31|2} = -0,98$ и $r_{32|1} = 0,97$. Результаты дисперсионного анализа этих данных приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Таблица дисперсионного анализа для данных о токах и частоте турбогенератора

| Источник | Сумма квадратов | Число степеней свободы | Источник | Сумма квадратов | Число степеней свободы |
|---|-----------------|------------------------|---|-----------------|------------------------|
| Подгонка синфазного тока | 9,1265 | 1 | Подгонка сдвинутого по фазе тока | 3,8958 | 1 |
| Подгонка сдвинутого по фазе тока при заданном синфазном | 6,5825 | 1 | Подгонка синфазного тока при заданном сдвинутом по фазе | 11,8132 | 1 |
| Остаточная | 0,3655 | 38 | Остаточная | 0,3655 | 38 |
| Полная | 16,0745 | 40 | Полная | 16,0745 | 40 |

Имеющие F -распределение отношения, приведенные в табл. 11.2, очень велики. Поэтому можно считать, что вклад обоих токов в прогноз частоты весьма значителен. Это сразу видно и из больших значений частных коэффициентов корреляции. Из табл. 11.2 видно также, что синфазный ток более важен для прогноза частоты, так как соответствующая ему доля уменьшения полной суммы квадратов больше, чем для тока, сдвинутого по фазе. Это следует из того, что $r_{13} = 0,75$, в то время как $r_{23} = 0,49$. Однако большая величина частного коэффициента корреляции $r_{32|1} = 0,97$ показывает, что сдвинутый по фазе ток также вносит существенный вклад в прогноз частоты.

11.3.4. Многомерный анализ, несколько выходных процессов

Модель. В предыдущих разделах предполагалось, что имеется лишь одна выходная переменная и несколько входных переменных. В общем случае будет несколько выходных переменных, так что модель регрессии можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 X_{t(q+1)} - \mu_{q+1} &= h_{(q+1)1}(X_{t1} - \bar{X}_1) + \dots + h_{(q+1)q}(X_{tq} - \bar{X}_q) + Z_{(q+1)t}, \\
 X_{t(q+2)} - \mu_{q+2} &= h_{(q+2)1}(X_{t1} - \bar{X}_1) + \dots + h_{(q+2)q}(X_{tq} - \bar{X}_q) + Z_{(q+2)t}, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 X_{t(q+r)} - \mu_{q+r} &= h_{(q+r)1}(X_{t1} - \bar{X}_1) + \dots + h_{(q+r)q}(X_{tq} - \bar{X}_q) + Z_{(q+r)t}.
 \end{aligned}
 \tag{11.3.23}$$

Раздел статистики, в котором рассматриваются модели вида (11.3.23), называется многомерным статистическим анализом. Такой анализ изложен в [1].

Нормальные уравнения. Можно показать [1], что выборочные оценки параметров, минимизирующие определитель матрицы выборочных ковариаций, совпадают со значениями параметров, минимизирующими по отдельности остаточные суммы квадратов

$$\sum_{t=1}^N z_{kt}^2, \quad k = q + 1, q + 2, \dots, q + r.$$

Это означает, что во всем, что касается оценочных уравнений, многомерный анализ сводится к q отдельным схемам многомерного регрессионного анализа. Отсюда с помощью (11.3.5) получаем нормальные уравнения

$$\mathbf{C}_{qq} \hat{\mathbf{h}}_k = \mathbf{c}_{q+k}, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (11.3.24)$$

Уравнения (11.3.24) можно записать после транспонирования в виде одного матричного уравнения

$$\hat{\mathbf{H}} \mathbf{C}'_{qq} = \mathbf{C}'_{qr}, \quad (11.3.25)$$

где \mathbf{C}_{qq} — матрица ковариаций входных переменных, имеющая размеры $q \times q$, а \mathbf{C}_{qr} — матрица взаимных ковариаций входных и выходных переменных, имеющая размеры $q \times r$.

Пример. Рассмотрим систему с двумя входами и двумя выходами, в которой

$$X_{t3} - \mu_3 = h_{31}(X_{t1} - \bar{X}_1) + h_{32}(X_{t2} - \bar{X}_2) + Z_{3t},$$

$$X_{t4} - \mu_4 = h_{41}(X_{t1} - \bar{X}_1) + h_{42}(X_{t2} - \bar{X}_2) + Z_{4t}.$$

Выборочные оценки $\hat{\mu}_3$ и $\hat{\mu}_4$ равны

$$\hat{\mu}_3 = \bar{x}_3,$$

$$\hat{\mu}_4 = \bar{x}_4,$$

а нормальные уравнения имеют вид

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_{31} \\ \hat{h}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_{41} \\ \hat{h}_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{14} \\ c_{24} \end{pmatrix}$$

или в единой матричной форме (11.3.25)

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_{31} & \hat{h}_{32} \\ \hat{h}_{41} & \hat{h}_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{13} & c_{23} \\ c_{14} & c_{24} \end{pmatrix}.$$

Матрица ковариаций остаточных ошибок. Так как с помощью модели (11.3.23) описываются системы со взаимодействием между

входами, естественно считать, что случайные величины $Z_{(q+k)t}$, $Z_{(q+l)t}$ коррелированы в одинаковые моменты времени и имеют матрицу ковариаций с элементами σ_{kl}^2 . Соответствующая матрица \mathbf{V}_2 матрица выборочных ковариаций имеет элементы

$$s_{(q+k)(q+l)}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{z}_{(q+k)t} \hat{z}_{(q+l)t} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [x_{t(q+k)} - \bar{h}_{(q+k)1} x_{t1} - \dots - \bar{h}_{(q+k)q} x_{tq}] \times [x_{t(q+l)} - \bar{h}_{(q+l)1} x_{t1} - \dots - \bar{h}_{(q+l)q} x_{tq}]. \quad (11.3.26)$$

Равенства (11.3.26) можно упростить с помощью нормальных уравнений (11.3.24), что дает

$$s_{(q+k)(q+l)}^2 = c_{(q+k)(q+l)} - \bar{h}_{(q+k)1} c_{1(q+l)} - \bar{h}_{(q+k)2} c_{2(q+l)} - \dots - \bar{h}_{(q+k)q} c_{q(q+l)}. \quad (11.3.27)$$

Матрица ковариаций оценок. Поскольку нормальные уравнения получены при отдельном рассмотрении каждой из регрессий в (11.3.23), из (П4.1.9) следует, что матрица ковариаций оценок параметров, входящих в какое-нибудь одно из уравнений (11.3.23), равна

$$\mathbf{V}[\hat{\mathbf{h}}_{q+k}] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \sigma_{(q+k)(q+k)}^2 = \mathbf{C}_{qq}^{-1} \sigma_{(q+k)(q+k)}^2.$$

С помощью (11.3.24) остальные ковариации оценок параметров, входящих в разные уравнения (11.3.24), можно найти из равенств

$$E[\hat{\mathbf{h}}_{q+k}, \hat{\mathbf{h}}'_{q+l}] = E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{x}_{q+k} \mathbf{x}'_{q+l} \mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \sigma_{(q+k)(q+l)}. \quad (11.3.28)$$

Отсюда матрицу ковариаций оценок всех параметров, имеющую размеры $qr \times qr$, можно записать в виде

$$\mathbf{V}(\hat{\mathbf{h}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+1)(q+1)}^2 & \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+1)(q+2)}^2 & \dots & \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+1)(q+r)}^2 \\ \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+2)(q+1)}^2 & \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+2)(q+2)}^2 & \dots & \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+2)(q+r)}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+r)(q+1)}^2 & \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+r)(q+2)}^2 & \dots & \mathbf{C}_{qq} \sigma_{(q+r)(q+r)}^2 \end{pmatrix}, \quad (11.3.29)$$

где $\hat{\mathbf{h}}' = (\hat{\mathbf{h}}_{q+1}, \hat{\mathbf{h}}_{q+2}, \dots, \hat{\mathbf{h}}_{q+r})$. Матрицу (11.3.29) можно компактнее записать в виде *прямого произведения* матрицы входных ковариаций \mathbf{C}_{qq} и матрицы ковариаций остаточных ошибок \mathbf{C}_{ZZ}

$$\mathbf{V}(\hat{\mathbf{h}}) = \mathbf{C}_{qq} \oplus \mathbf{C}_{ZZ}. \quad (11.3.30)$$

Выборочную оценку матрицы (11.3.30) можно получить, если заменить σ_{kl}^2 в (11.3.29) на выборочные оценки (11.3.27). С помощью (11.3.30) можно получить доверительную область для полного вектора параметров \mathbf{h}'

$$(\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})' \mathbf{V}(\hat{\mathbf{h}}) (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}) \leq \frac{qr}{N} S^2 f_{qr, q(N-1-r)}(1 - \alpha). \quad (11.3.31)$$

Пример. Для упоминавшейся выше системы с двумя входами и двумя выходами выборочная матрица ковариаций остаточных ошибок из (11.3.27) равна

$$\mathbf{V}_{zz} = \begin{pmatrix} S_{33}^2 & S_{34}^2 \\ S_{43}^2 & S_{44}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{33} - \hat{h}_{31}c_{13} - \hat{h}_{32}c_{23} & c_{34} - \hat{h}_{31}c_{14} - \hat{h}_{32}c_{24} \\ c_{43} - \hat{h}_{41}c_{13} - \hat{h}_{42}c_{23} & c_{44} - \hat{h}_{41}c_{14} - \hat{h}_{42}c_{24} \end{pmatrix}.$$

Матрицы ковариаций оценок параметров, входящих либо в одно уравнение, либо в другое, по отдельности равны

$$\mathbf{V}[\hat{\mathbf{h}}_3] = \frac{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}}{D} \sigma_{33}^2, \quad \mathbf{V}[\hat{\mathbf{h}}_4] = \frac{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}}{D} \sigma_{44}^2,$$

где $D = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{h}_{31}] &= \frac{c_{11}}{D} \sigma_{33}^2, & \text{Var}[\hat{h}_{41}] &= \frac{c_{11}}{D} \sigma_{44}^2, \\ \text{Cov}[\hat{h}_{31}, \hat{h}_{32}] &= \frac{c_{21}}{D} \sigma_{33}^2, & \text{Cov}[\hat{h}_{41}, \hat{h}_{42}] &= \frac{c_{21}}{D} \sigma_{44}^2, \\ \text{Cov}[\hat{h}_{32}, \hat{h}_{31}] &= \frac{c_{12}}{D} \sigma_{33}^2, & \text{Cov}[\hat{h}_{42}, \hat{h}_{41}] &= \frac{c_{12}}{D} \sigma_{44}^2, \\ \text{Var}[\hat{h}_{32}] &= \frac{c_{22}}{D} \sigma_{33}^2, & \text{Var}[\hat{h}_{42}] &= \frac{c_{22}}{D} \sigma_{44}^2. \end{aligned}$$

Далее, матрица ковариаций оценок всех параметров (11.3.29) равна

$$\mathbf{V}(\hat{\mathbf{h}}) = \begin{pmatrix} \text{Cov}[\hat{h}_{31}, \hat{h}_{31}] & \text{Cov}[\hat{h}_{31}, \hat{h}_{32}] & \text{Cov}[\hat{h}_{31}, \hat{h}_{41}] & \text{Cov}[\hat{h}_{31}, \hat{h}_{42}] \\ \text{Cov}[\hat{h}_{32}, \hat{h}_{31}] & \text{Cov}[\hat{h}_{32}, \hat{h}_{32}] & \text{Cov}[\hat{h}_{32}, \hat{h}_{41}] & \text{Cov}[\hat{h}_{32}, \hat{h}_{42}] \\ \text{Cov}[\hat{h}_{41}, \hat{h}_{31}] & \text{Cov}[\hat{h}_{41}, \hat{h}_{32}] & \text{Cov}[\hat{h}_{41}, \hat{h}_{41}] & \text{Cov}[\hat{h}_{41}, \hat{h}_{42}] \\ \text{Cov}[\hat{h}_{42}, \hat{h}_{31}] & \text{Cov}[\hat{h}_{42}, \hat{h}_{32}] & \text{Cov}[\hat{h}_{42}, \hat{h}_{41}] & \text{Cov}[\hat{h}_{42}, \hat{h}_{42}] \end{pmatrix}.$$

И наконец, выборочная оценка матрицы $\mathbf{V}(\hat{\mathbf{h}})$ дается равенством

$$\mathbf{V}(\hat{\mathbf{h}}) = \mathbf{C}_{qq} \oplus \mathbf{V}_{zz} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} c_{11}S_{33}^2 & c_{11}S_{34}^2 & c_{12}S_{33}^2 & c_{12}S_{34}^2 \\ c_{11}S_{43}^2 & c_{11}S_{44}^2 & c_{12}S_{43}^2 & c_{12}S_{44}^2 \\ c_{21}S_{33}^2 & c_{21}S_{34}^2 & c_{22}S_{33}^2 & c_{22}S_{34}^2 \\ c_{21}S_{43}^2 & c_{21}S_{44}^2 & c_{22}S_{43}^2 & c_{22}S_{44}^2 \end{pmatrix}.$$

11.4. МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

В этом разделе мы обобщим методы разд. 11.3 таким образом, что их можно будет применять в частотной области. Имеются два основных отличия моделей, используемых в этом разделе, от моделей разд. 11.3. Во-первых, модели разд. 11.3 описывали регрессии и корреляции в одинаковые моменты времени, так что они фактически описывали лишь свойства установившихся значений системы. В этом разделе мы рассмотрим динамические модели, являющиеся обобщением моделей предыдущего раздела. Во-вторых, в разд. 11.3 предполагалось, что шум (остаточные ошибки) является белым. В настоящем же разделе шум может быть совершенно произвольным стационарным процессом.

11.4.1. Анализ многомерных частотных характеристик, единственный выходной процесс

В этом разделе мы покажем, как можно оценить частотные характеристики модели

$$\begin{aligned}
 X_{(q+1)}(t) - \mu_{(q+1)} = & \int_{-\infty}^{\infty} h_{(q+1)1}(u) [X_1(t-u) - \bar{X}_1] du + \dots \\
 & \dots + \int_{-\infty}^{\infty} h_{(q+1)q}(u) [X_q(t-u) + \bar{X}_q] du + Z(t), \quad (11.4.1)
 \end{aligned}$$

которая является динамическим обобщением модели установившихся состояний (11.3.1). Для того чтобы не усложнять изложение основных идей анализа, мы предположим, что имеются записи бесконечной длины единственного выходного процесса $X_{(q+1)}(t)$ и q входных процессов. Чтобы еще более упростить задачу, рассмотрим частный случай, когда число входов q равно 2.

Действуя так же, как и в Приложении П5.1, можно показать, что выборочные оценки функций отклика на единичный импульс $h_{31}(u)$ и $h_{32}(u)$, дающие минимальную среднеквадратичную ошибку, должны удовлетворять системе уравнений Винера — Хопфа

$$\begin{aligned}
 \gamma_{13}(u) = & \int_{-\infty}^{\infty} h_{31}(v) \gamma_{11}(u-v) dv + \int_{-\infty}^{\infty} h_{32}(v) \gamma_{12}(u-v) dv, \\
 \gamma_{23}(u) = & \int_{-\infty}^{\infty} h_{31}(v) \gamma_{21}(u-v) dv + \int_{-\infty}^{\infty} h_{32}(v) \gamma_{22}(u-v) dv.
 \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

Заметим, что уравнения (11.4.2) можно получить также, умножая все члены равенства (11.4.1) сначала на $X_1(t-u) - \bar{X}_1$ и беря ма-

тематическое ожидание, а затем на $X_2(t-u) - \bar{X}_2$ и также беря математическое ожидание.

Взяв от (11.4.2) преобразование Фурье, получим уравнения в частотной области

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}(f) &= H_{31}(f)\Gamma_{11}(f) + H_{32}(f)\Gamma_{12}(f), \\ \Gamma_{23}(f) &= H_{31}(f)\Gamma_{21}(f) + H_{32}(f)\Gamma_{22}(f).\end{aligned}\quad (11.4.3)$$

Решая эти уравнения относительно $H_{31}(f)$ и $H_{32}(f)$, получаем следующие выражения для частотных характеристик, включающие авто- и взаимные спектры:

$$\begin{aligned}H_{31}(f) &= \frac{\Gamma_{13}(f)\Gamma_{22}(f) - \Gamma_{23}(f)\Gamma_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(f) - |\Gamma_{12}(f)|^2}, \\ H_{32}(f) &= \frac{\Gamma_{23}(f)\Gamma_{11}(f) - \Gamma_{13}(f)\Gamma_{21}(f)}{\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(f) - |\Gamma_{12}(f)|^2}.\end{aligned}\quad (11.4.4)$$

Чтобы получить выражения для функций усиления и фазы, нужно взять модули и аргументы комплексных функций (11.4.4). Например,

$$G_{31} = \sqrt{A_{31}^2 + B_{31}^2}, \quad \varphi_{31} = \arctg\left(-\frac{B_{31}}{A_{31}}\right), \quad (11.4.5)$$

где

$$\begin{aligned}A_{31} &= \frac{(\Lambda_{13}\Gamma_{22} + \Psi_{23}\Psi_{12} - \Lambda_{23}\Lambda_{12})}{(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - |\Gamma_{12}|^2)}, \\ B_{31} &= \frac{(\Psi_{13}\Gamma_{22} - \Psi_{23}\Lambda_{12} - \Lambda_{23}\Psi_{12})}{(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - |\Gamma_{12}|^2)}.\end{aligned}\quad (11.4.6)$$

Для q входов уравнения (11.4.2) имеют вид

$$\mathbf{y}_{(q+1)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}_{qq}(u-v) \mathbf{h}_{(q+1)}(v) dv, \quad (11.4.7)$$

где $\mathbf{y}_{(q+1)}(u)$ — имеющая порядок $q+1$ матричная ковариационная функция одного выхода и q входов, $\mathbf{h}'_{(q+1)} = (h_{(q+1)1}, h_{(q+1)2}, \dots, h_{(q+1)q})$, а $\mathbf{y}_{qq}(u)$ — матричная ковариационная функция входов. Взяв преобразование Фурье от (11.4.7), получаем

$$\mathbf{\Gamma}_{(q+1)}(f) = \mathbf{\Gamma}_{qq}(f) \mathbf{H}_{(q+1)}(f), \quad (11.4.8)$$

где $\mathbf{\Gamma}_{(q+1)}(f)$ — вектор взаимных спектров выхода $X_{(q+1)}(t)$ и входов, $\mathbf{\Gamma}_{qq}(f)$ — спектральная матрица входов и $\mathbf{H}'_{(q+1)}(f) = (H_{(q+1)1}(f), H_{(q+1)2}(f), \dots, H_{(q+1)q}(f))$. Решая эти уравнения и беря модули и аргументы решений, как это делалось выше, можно найти функции усиления и фазы.

11.4.2. Спектр множественной когерентности

В этом разделе мы дадим определение спектра множественной когерентности. Он является частотным аналогом множественного коэффициента корреляции, введенного в разд. 11.3.2. Прежде всего необходимо вывести выражение для спектра шума (или остаточных ошибок), которое необходимо для получения выборочных оценок функций усиления и фазы и само по себе представляет значительный интерес.

Спектр остаточных ошибок. Чтобы вычислить спектр остаточных ошибок $\Gamma_{ZZ}(f)$ в модели (11.4.1), необходимо найти их автоковариационную функцию. Действуя так же, как и в разд. 11.3.2, находим, что автоковариационная функция процесса $Z(t)$ равна

$$\begin{aligned} \gamma_{ZZ}(u) = & \gamma_{(q+1)(q+1)}(u) - \int_0^{\infty} h_{(q+1)1}(v) \gamma_{(q+1)1}(u-v) dv - \dots \\ & \dots - \int_0^{\infty} h_{(q+1)q}(v) \gamma_{(q+1)q}(u-v) dv. \end{aligned}$$

Взяв от этого выражения преобразование Фурье, получим спектр остаточных ошибок

$$\begin{aligned} \Gamma_{ZZ}(f) = & \Gamma_{(q+1)(q+1)}(f) - H_{(q+1)1}(f) \Gamma_{(q+1)1}(f) - \dots \\ & \dots - H_{(q+1)q}(f) \Gamma_{(q+1)q}(f), \end{aligned} \quad (11.4.9)$$

что является частотным аналогом выражения (11.3.7).

Квадрат спектра множественной когерентности. Действуя так же, как и в разд. 11.3.2, выражение (11.4.9) можно записать в виде

$$\Gamma_{ZZ}(f) = \Gamma_{(q+1)(q+1)}(f) [1 - \kappa_{(q+1)12\dots q}^2(f)], \quad (11.4.10)$$

где величина

$$\kappa_{(q+1)12\dots q}^2(f) = H_{(q+1)1}(f) \Gamma_{(q+1)1}(f) + \dots + H_{(q+1)q}(f) \Gamma_{(q+1)q}(f)$$

называется *квадратом спектра множественной когерентности* выходного процесса и q входных процессов. Спектр множественной когерентности дает долю спектра выхода, которая может быть предсказана по входам. Как показывает равенство (11.4.10), оставшаяся доля $[1 - \kappa_{(q+1)12\dots q}^2(f)]$ спектра выхода представляет собой шум.

Подставляя в (11.4.9) выражения (11.4.8) для частотных характеристик, мы получим другую форму записи квадрата спектра

множественной когерентности, аналогичную записи (11.3.11), а именно

$$\kappa_{(q+1)12 \dots q}^2(f) = 1 - \frac{|\Gamma_{(q+1)(q+1)}(f)|}{\Gamma_{(q+1)(q+1)}(f) |\Gamma_{qq}(f)|}. \quad (11.4.11)$$

В (11.4.11) $\Gamma_{(q+1)(q+1)}(f)$ — спектральная матрица всех $(q+1)$ переменных, а $\Gamma_{qq}(f)$ — спектральная матрица q входных переменных. При $q=2$ равенство (11.4.11) запишется, если опустить аргумент f , следующим образом:

$$\kappa_{312}^2 = 1 - \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix}}{\Gamma_{33} \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{vmatrix}}, \quad (11.4.12)$$

что соответствует выражению (11.3.14). Если разложить определитель в (11.4.12), то получим

$$\kappa_{312}^2 = \frac{\Gamma_{22} |\Gamma_{31}|^2 + \Gamma_{11} |\Gamma_{32}|^2 - 2\operatorname{Re} [\Gamma_{12}\Gamma_{23}\Gamma_{31}]}{\Gamma_{33} (\Gamma_{11}\Gamma_{22} - |\Gamma_{12}|^2)}, \quad (11.4.13)$$

где действительную часть

$$\operatorname{Re}[\Gamma_{12}\Gamma_{23}\Gamma_{31}] = \Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{13} + \Lambda_{12}\Psi_{23}\Psi_{13} - \Psi_{12}\Psi_{23}\Lambda_{13} + \Psi_{12}\Psi_{13}\Lambda_{23} \quad (11.4.14)$$

можно выразить через коспектры и квадратурные спектры этих трех процессов.

11.4.3. Взаимные спектры частной когерентности и фазы

Как и в анализе множественной регрессии, полезно знать взаимный спектр выходного и одного из входных процессов после учета влияния остальных входных процессов. Эта задача приводит к понятию взаимного спектра частной корреляции, который является частотным аналогом частного коэффициента корреляции (11.3.21).

Чтобы проиллюстрировать основную идею изложения, предположим, что имеется всего две входные переменные. Обобщая методы разд. 11.3.3, будем считать, что выход $X_3(t)$ предсказывается сначала только по прошлым значениям процесса $X_2(t)$, что дает остаточную ошибку

$$\varepsilon_3(t) = (X_3(t) - \mu_3) - \int_0^\infty \hat{g}_{32}(u) (X_2(t-u) - \mu_2) du,$$

где $\hat{g}_{32}(u)$ — решение соответствующего интегрального уравнения Винера — Хопфа. Аналогично прогноз входа $X_1(t)$ только по прошлым значениям $X_2(t)$ приводит к остаточной ошибке

$$\varepsilon_1(t) = (X_1(t) - \mu_1) - \int_0^\infty \hat{g}_{12}(u) (X_2(t-u) - \mu_2) du.$$

Взаимная частная ковариационная функция. Теперь можно определить взаимную частную ковариационную функцию между $X_1(t)$ и $X_3(t+u)$ после учета влияния $X_2(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_{13|2}(u) &= \text{Cov}[\varepsilon_1(t), \varepsilon_3(t+u)] = \\ &= \gamma_{13}(u) - \int_0^\infty \hat{g}_{32}(v) \gamma_{12}(u-v) dv - \int_0^\infty \hat{g}_{12}(v) \gamma_{23}(u+v) dv + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \hat{g}_{12}(v) \hat{g}_{32}(w) \gamma_{22}(u+v-w) dv dw. \end{aligned} \quad (11.4.15)$$

Взаимный частный спектр. Взаимный частный спектр можно получить, если взять преобразование Фурье от (11.4.15) и заменить \hat{G}_{12} на Γ_{12}/Γ_{22} , а \hat{G}_{32} на Γ_{23}/Γ_{22} . В результате получим

$$\Gamma_{13|2}(f) = \Gamma_{13}(f) - \frac{\Gamma_{23}(f) \Gamma_{12}(f)}{\Gamma_{22}(f)}. \quad (11.4.16)$$

Нормированный взаимный частный спектр

$$\kappa_{13|2}(f) = \frac{\Gamma_{13|2}(f)}{\sqrt{\Gamma_{11}(f) (1 - \kappa_{12}^2(f)) \Gamma_{33}(f) (1 - \kappa_{23}^2(f))}} \quad (11.4.17)$$

получается из (11.4.16) с помощью соответствующей нормировки.

Спектр частной когерентности. Квадрат спектра частной когерентности равен квадрату модуля величины $\kappa_{13|2}(f)$. Проще всего его вычислить, используя спектральный аналог равенства (11.3.22), а именно

$$1 - \kappa_{13|2}^2(f) = \frac{1 - \kappa_{312}^2(f)}{1 - \kappa_{23}^2(f)}. \quad (11.4.18)$$

Коэффициент $\kappa_{13|2}^2(f)$ равен квадрату коэффициента корреляции двух процессов «на частоте f » после учета влияния процесса $X_2(t)$.

Частный фазовый спектр. Частный фазовый спектр равен аргументу комплексного выражения (11.4.16) или выражения (11.4.17).

Его можно записать в виде

$$\varphi_{13|2}(f) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\Lambda_{12}\Psi_{23} - \Psi_{12}\Lambda_{23} - \Psi_{13}\Gamma_{22}}{\Lambda_{12}\Lambda_{23} + \Psi_{12}\Psi_{23} - \Lambda_{13}\Gamma_{22}} \right]. \quad (11.4.19)$$

Аналогичные выражения для квадрата частной когерентности $\kappa_{23|1}^2(f)$ и частной фазы $\varphi_{23|1}$ можно получить с помощью перестановки индексов в (11.4.18) и (11.4.19).

Следует отметить отличие частной фазы $\varphi_{13|2}(f)$ от фаз $\varphi_{31}(f)$ и $\varphi_{32}(f)$, полученных из частотных характеристик модели (11.4.1). Фаза $\varphi_{31}(f)$ является мерой фазового сдвига между $X_1(t)$ и $X_3(t)$, когда $X_1(t)$ изменяется по синусоидальному закону, но $X_2(t)$ не меняется. А частная фаза $\varphi_{13|2}(f)$ является мерой «непосредственного» фазового сдвига между $X_1(t)$ и $X_3(t)$, после того как учтены фазовые сдвиги между $X_2(t)$ и $X_3(t)$ и между $X_2(t)$ и $X_1(t)$. В случае когда имеется только одна входная переменная, частный фазовый угол равен обычному фазовому углу.

Для q входов взаимный частный спектр является частотным аналогом (11.3.21), а именно

$$\kappa_{(q+1)k|K}(f) = \frac{\pi_{(q+1)k}(f)}{\sqrt{\pi_{(q+1)(q+1)}(f) \pi_{kk}(f)}}, \quad (11.4.20)$$

где π_{lm} — соответствующий элементу Γ_{lm} минор спектральной матрицы всех $(q+1)$ переменных.

Из (11.4.20) можно получить частные спектры когерентности и фазы.

Резюме. Как и при анализе двумерных временных рядов, основной интерес для нас представляют различные виды спектральных оценок: либо для случая, когда ряды находятся в одинаковом положении по отношению друг к другу, либо же когда некоторые из них являются входами, а остальные — выходами физической системы. Если все ряды равноправны, то основной интерес представляет спектр множественной когерентности. Кроме него, обычно вычисляют еще спектры частной когерентности и фазы для некоторых отобранных пар переменных. Если же часть рядов представляет собой входы, а остальные ряды — выходы некоторой физической системы, то самая важная часть анализа заключается в оценивании частотных характеристик системы. Другую важную выборочную оценку представляет собой спектр остаточных ошибок, описывающий шум в системе. В этом случае спектр множественной когерентности интересен лишь постольку, поскольку от него зависят доверительные интервалы для функций усиления и фазы. Оценивание спектра множественной когерентности обсуждается в разд. 11.4.5. Доверительные интервалы для функций усиления и фазы выводятся в разд. 11.4.6.

**11.4.4. Анализ многомерных частотных характеристик;
несколько выходных процессов**

Модель. В этом разделе мы перенесем в частотную область многомерный анализ, который для временной области был изложен в разд. 11.3.4. В качестве обобщения модели установившихся состояний (11.3.23) рассмотрим динамическую модель

$$\mathbf{x}_{(q+r)}(t) - \boldsymbol{\mu}_{(q+r)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(u) [\mathbf{x}_q(t-u) - \bar{\mathbf{x}}_q] du + \mathbf{z}_{(q+r)}(t), \quad (11.4.21)$$

где $\mathbf{x}_{(q+r)}(t)$ — вектор выходных переменных, $\mathbf{x}_q(t)$ — вектор входных переменных и $\mathbf{z}_{(q+r)}(t)$ — вектор переменных шума. Например, для $q = 2$ входов и $r = 2$ выходов модель (11.4.21) можно записать в виде

$$\begin{aligned} X_3(t) - \mu_3 = & \int_{-\infty}^{\infty} h_{31}(u) [X_1(t-u) - \bar{X}_1] du + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} h_{32}(u) [X_2(t-u) - \bar{X}_2] du + Z_3(t), \end{aligned} \quad (11.4.22)$$

$$\begin{aligned} X_4(t) - \mu_4 = & \int_{-\infty}^{\infty} h_{41}(u) [X_1(t-u) - \bar{X}_1] du + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} h_{42}(u) [X_2(t-u) - \bar{X}_2] du + Z_4(t). \end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, предположим сначала, что имеются записи бесконечной длины для всех входов и выходов.

Оценочные уравнения. Как и в разд. 11.3.4, выборочные оценки функций отклика на единичный импульс $h_{ij}(u)$, минимизирующие среднеквадратичную ошибку, можно получить, минимизируя по отдельности среднеквадратичные ошибки

$$E \left[\int_{-\infty}^{\infty} Z_i^2(t) dt \right].$$

Этот процесс приводит к системе уравнений вида (11.4.7), а именно

$$\mathbf{y}_{(q+k)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}_{qq}(u-v) \mathbf{h}_{(q+k)}(v) dv, \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (11.4.23)$$

Эти уравнения можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\mathbf{y}_{qr}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{y}_{qq}(u-v) \mathbf{h}'(v) dv, \quad (11.4.24)$$

где $\mathbf{y}_{qr}(u)$ — матричная взаимная ковариационная функция между q входами и r выходами, $\mathbf{h}(u)$ — матрица откликов на единичный импульс и \mathbf{y}_{qq} — матричная ковариационная функция входов.

Взяв преобразования Фурье от (11.4.23), получаем оценочные уравнения для частотных характеристик

$$\Gamma_{(q+k)}(f) = \Gamma_{qq}(f) \mathbf{H}_{(q+k)}(f), \quad k = 1, 2, \dots, r. \quad (11.4.25)$$

Как и (11.4.23), уравнения (11.4.25) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\Gamma_{qr}(f) = \Gamma_{qq}(f) \mathbf{H}'(f). \quad (11.4.26)$$

Спектральная матрица остаточных ошибок. Кроме оценивания матрицы частотных характеристик, нужно еще охарактеризовать свойства шума. Для этой цели вычисляется спектральная матрица Γ_{ZZ} остаточных ошибок, или шума, элементами которой служат авто- и взаимные спектры $\Gamma_{h_l}(f)$ процессов $Z_h(t)$ и $Z_l(t)$. Действуя так же, как и в разд. 11.3.4, находим корреляционные функции

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{Z_k Z_l}(u) &= \mathbf{y}_{(q+k)(q+l)}(u) - \int_{-\infty}^{\infty} h_{(q+k)l}(v) \mathbf{y}_{(q+l)l}(u-v) dv - \dots \\ &\dots - \int_{-\infty}^{\infty} h_{(q+k)q}(v) \mathbf{y}_{(q+l)q}(u-v) dv. \end{aligned} \quad (11.4.27)$$

Взяв преобразования Фурье от (11.4.27), получаем авто- и взаимные спектры

$$\begin{aligned} \Gamma_{Z_k Z_l}(f) &= \Gamma_{(q+k)(q+l)}(f) - H_{(q+k)l}(f) \Gamma_{(q+l)l}(f) - \dots \\ &\dots - H_{(q+k)q}(f) \Gamma_{(q+l)q}(f). \end{aligned} \quad (11.4.28)$$

Равенства (11.4.28) можно объединить в одно матричное равенство

$$\Gamma'_{ZZ}(f) = \Gamma'_{(q+r)(q+r)}(f) - \mathbf{H}(f) \Gamma'_{qr}(f). \quad (11.4.29)$$

Отметим, что с помощью равенства (11.4.29) можно вычислить спектральную матрицу остаточного шума, если известны матрица частотных характеристик $\mathbf{H}(f)$, теоретическая спектральная матрица $\Gamma_{(q+r)(q+r)}(f)$ всех переменных и теоретическая спектральная матрица взаимных корреляций входов и выходов $\Gamma_{qr}(f)$. Соответствующая задача оценивания рассматривается в разд. 11.4.6.

11.4.5. Оценивание многомерных спектров

В разд. 11.4.2 и 11.4.3 было показано, как вычислить спектры множественной и частной когерентностей, зная авто- и взаимные спектры входов и выходов. В этом разделе мы рассмотрим задачу оценивания этих спектров по записям конечной длины. Метод представляет собой непосредственное обобщение метода, использованного в разд. 9.3.1. Поэтому детали будут опущены.

Оценивание множественной когерентности. По определению (11.4.11) квадрат множественной когерентности выражается через авто- и взаимные спектры. Случайная величина, соответствующая выборочной оценке множественной когерентности, получается при замене теоретических спектров их сглаженными оценками. Например, при $q = 2$ сглаженная оценка множественной когерентности равна

$$\bar{K}_{312}^2(f) = \frac{\bar{C}_{22} |\bar{C}_{13}|^2 + \bar{C}_{11} |\bar{C}_{23}|^2 - 2\text{Re} [\bar{C}_{12} \bar{C}_{23} \bar{C}_{31}]}{\bar{C}_{33} (\bar{C}_{11} \bar{C}_{22} - |\bar{C}_{12}|^2)}, \quad (11.4.30)$$

где

$$\text{Re} [\bar{C}_{12} \bar{C}_{23} \bar{C}_{31}] = \bar{L}_{12} \bar{L}_{23} \bar{L}_{13} + \bar{L}_{12} \bar{Q}_{23} \bar{Q}_{13} - \bar{Q}_{12} \bar{Q}_{23} \bar{L}_{13} + \bar{Q}_{12} \bar{Q}_{13} \bar{L}_{23}.$$

Так как оценка (11.4.30) является функцией от оценок авто- и взаимных спектров, ее дисперсию можно вычислить с помощью метода разд. 3.2.5 и формулы (П9.1.28). В результате получим

$$\text{Cov} [\bar{C}_{ij}(f_1), \bar{C}_{kl}(f_1)] \approx \Gamma_{ij}(f_1) \Gamma_{kl}(f_1) \frac{1}{T}. \quad (11.4.31)$$

Действуя так же, как и в разд. 9.2.2, находим окончательный результат

$$\text{Var} [\bar{K}_{312}^2] \approx \frac{1}{2T} 4\kappa_{312}^2 (1 - \kappa_{312}^2)^2,$$

что совпадает с формулой (9.2.19) для дисперсии оценки обычной когерентности \bar{K}_{12}^2 . В разд. 11.4.6 мы выведем для \bar{K}_{312}^2 подходящее распределение, рассматривая задачу оценивания множественной когерентности как задачу множественной регрессии в частотной области.

Оценивание частной когерентности и частной фазы. Сглаженные оценки спектров взаимной частной когерентности и фазы получаются при подстановке в (11.4.17) вместо теоретических спектров их сглаженных оценок и последующем взятии квадрата модуля и аргумента. Например, при $q = 2$ сглаженные оценки двух

частных когерентностей можно получить, подставляя сглаженную оценку множественной когерентности \bar{K}_{312}^2 в (11.4.18):

$$1 - \bar{K}_{23|1}^2 = \frac{1 - \bar{K}_{312}^2}{1 - \bar{K}_{13}^2}, \quad (11.4.32)$$

$$1 - \bar{K}_{13|2}^2 = \frac{1 - \bar{K}_{312}^2}{1 - \bar{K}_{23}^2}.$$

Аналогично получаем сглаженные оценки спектров частной фазы

$$\bar{F}_{13|2} = \arctg \left[\frac{\bar{L}_{12}\bar{Q}_{23} - \bar{Q}_{12}\bar{L}_{23} - \bar{Q}_{13}\bar{C}_{22}}{\bar{L}_{12}\bar{L}_{23} + \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{23} - \bar{L}_{13}\bar{C}_{22}} \right], \quad (11.4.33)$$

$$\bar{F}_{23|1} = \arctg \left[\frac{\bar{L}_{12}\bar{Q}_{13} + \bar{Q}_{12}\bar{L}_{13} - \bar{Q}_{23}\bar{C}_{11}}{\bar{L}_{12}\bar{L}_{13} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{13} - \bar{L}_{23}\bar{C}_{11}} \right]. \quad (11.4.34)$$

11.4.6. Оценивание многомерных частотных характеристик

В этом разделе мы покажем, как оценить частотные характеристики модели (11.4.1) и вывести доверительные области для функций усиления и фазы. Эти результаты будут получены с помощью простого распространения результатов разд. 10.3.3 на многомерный случай.

Выборочные оценки, получаемые из выборочных спектров. Рассмотрим, как мы это делали и раньше, случайную функцию, являющуюся преобразованием Фурье от отрезка случайного процесса:

$$X_i(f) = \int_0^T X_i(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Взяв преобразование Фурье от (11.4.1) и предполагая, что функции отклика на единичный импульс $h_{(q+1)i}(u)$ убывают почти до нуля за достаточно малое по сравнению с длиной записи время, найдем преобразование Фурье от выхода

$$X_{(q+1)}(f) \approx H_{(q+1)1}(f) X_1(f) + \dots + H_{(q+1)q}(f) X_q(f) + Z_{(q+1)}(f). \quad (11.4.35)$$

Как и в разд. 10.3.1, оценки наименьших квадратов для функций отклика на единичный импульс можно получить, заменяя в (11.4.7) теоретические авто- и взаимные корреляции на их оценки. В результате получим

$$\mathbf{c}_{(q+1)}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_{qq}(u-v) \hat{\mathbf{h}}_{(q+1)}(v) dv, \quad -T \leq u \leq T. \quad (11.4.36)$$

Взяв преобразование Фурье от (11.4.36), найдем оценочные уравнения в частотной области

$$C_{(q+1)}(f) = C_{qq}(f) \hat{H}_{(q+1)}(f). \quad (11.4.37)$$

Если в (11.4.37) заменить оценки спектров их теоретическими значениями, то получатся уравнения (11.4.8).

Случайная оценка, соответствующая выборочному спектру остаточных ошибок. Действуя так же, как и в разд. 10.3.2, получаем случайную оценку, соответствующую выборочному спектру остаточных ошибок

$$C_{zz}(f) \approx C_{\hat{z}\hat{z}}(f) + \frac{1}{T} |X_1(f) [H_{(q+1)1}(f) - \hat{H}_{(q+1)1}(f)] + \dots \\ \dots + X_q(f) [H_{(q+1)q}(f) - \hat{H}_{(q+1)q}(f)]|^2. \quad (11.4.38)$$

Выборочный спектр остаточных ошибок имеет аналогичный вид

$$C_{\hat{z}\hat{z}}(f) = C_{(q+1)(q+1)}(f) - \hat{H}_{(q+1)1}(f) C_{(q+1)1}(f) - \dots \\ \dots - \hat{H}_{(q+1)q}(f) C_{(q+1)q}(f), \quad (11.4.39)$$

или

$$C_{\hat{z}\hat{z}}(f) = C_{(q+1)(q+1)}(f) [1 - K_{(q+1)12\dots q}^2(f)]. \quad (11.4.40)$$

Равенства (11.4.39) и (11.4.40) являются соответственно аналогами равенств (11.4.9) и (11.4.10). Однако, как отмечалось в разд. 10.3.2, $C_{zz}(f)$ тождественно равно нулю, так как выборочный коэффициент когерентности тождественно равен единице. Вследствие этого, а также из-за того, что дисперсии этих оценок не убывают с увеличением длины записи, нужно применить сглаживание.

Сглаженные оценки наименьших квадратов. Уравнения для сглаженных оценок частотных характеристик получаются при замене спектральных оценок в (11.4.37) на соответствующие сглаженные оценки. Аналогичным образом получаются из (11.4.39) или из (11.4.40) сглаженные спектральные оценки остаточных ошибок.

Критерий отличия множественной когерентности от нуля. Предположим, что в (11.4.38) $H_{(q+1)k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, q$. Тогда процессы на выходе совпадают с соответствующими шумами. Используя (11.4.40), можно написать разложение (11.4.38), но для сглаженных оценок:

$$\frac{\sqrt{C}_{(q+1)(q+1)}(f)}{\Gamma_{(q+1)(q+1)}(f)} = \frac{\sqrt{C}_{(q+1)(q+1)}(f)}{\Gamma_{(q+1)(q+1)}(f)} (1 - \bar{K}_{(q+1)12\dots q}^2(f)) + \\ + \frac{\sqrt{C}_{(q+1)(q+1)}(f)}{\Gamma_{(q+1)(q+1)}(f)} \bar{K}_{(q+1)12\dots q}^2(f). \quad (11.4.41)$$

Равенство (11.4.41) показывает, что случайная величина в левой части, имеющая χ^2 -распределение с ν степенями свободы, разлагается на две χ^2 -величины с $(\nu - 2q)$ и $2q$ степенями свободы соответственно. Отсюда случайная величина

$$\frac{\bar{K}_{(q+1)12 \dots q}^2(f)}{1 - \bar{K}_{(q+1)12 \dots q}^2(f)} \left(\frac{\nu - 2q}{2q} \right) \quad (11.4.42)$$

распределена как $F_{2q, \nu-2q}$. Как показано в разд. 10.3.2 для случая $q = 2$, формулу (11.4.42) можно использовать для критерия отличия множественной когерентности от нуля.

Доверительные интервалы для функций усиления и фазы. Чтобы проиллюстрировать общий метод, рассмотрим случай, когда имеются два входа, т. е. $q = 2$. Тогда, опуская аргумент f , вариант формулы (11.4.38) для сглаженных оценок можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ZZ} = & \bar{C}_{\hat{Z}\hat{Z}} + \bar{C}_{11} |H_{31} - \hat{H}_{31}|^2 + \bar{C}_{22} |H_{32} - \hat{H}_{32}|^2 + \\ & + 2|\bar{C}_{12}| |(H_{31} - \hat{H}_{31})(H_{32} - \hat{H}_{32})|. \end{aligned} \quad (11.4.43)$$

Действуя так же, как и в разд. 10.3.4, получим из (11.4.43) совместную доверительную область для G_{31} , G_{32} , φ_{31} и φ_{32} :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{C}_{11} |H_{31} - \hat{H}_{31}|^2 + \bar{C}_{22} |H_{32} - \hat{H}_{32}|^2 + 2|\bar{C}_{12}| |(H_{31} - \hat{H}_{31})(H_{32} - \hat{H}_{32})|}{\bar{C}_{ZZ}} & \leq \\ & \leq \frac{4}{\nu - 4} f_{4, \nu-4} (1 - \alpha). \end{aligned} \quad (11.4.44)$$

По-видимому, не существует простого способа записать эту область в виде отдельных областей для спектров усиления и фазы. Однако иногда бывает полезным грубое приближение этой области, состоящее в том, что левая часть в (11.4.44) заменяется ее нижней границей

$$\frac{\bar{C}_{11} |H_{31} - \hat{H}_{31}|^2 + \bar{C}_{22} |H_{32} - \hat{H}_{32}|^2}{\bar{C}_{ZZ}}.$$

Это приближение эквивалентно тому, что мы пренебрегаем ковариациями членов, образующих $H_{31}(f)$ и $H_{32}(f)$, и поэтому получаются независимые доверительные области для G_{31} , φ_{31} и для G_{32} , φ_{32} . Применяя к полученной области дальнейшее приближение, которое мы уже совершали в разд. 10.3.4, находим отдельные

доверительные интервалы:

$$\begin{aligned} |G_{31} - \hat{G}_{31}| &\leq k_1, & k_1^2 &= \frac{4}{\nu-4} \frac{\bar{C}_{\hat{z}\hat{z}}}{\bar{C}_{11}} f_{4, \nu-4} (1-\alpha), \\ \sin|\varphi_{31} - \hat{\varphi}_{31}| &\leq \frac{k_1}{G_{31}}, \\ |G_{32} - \hat{G}_{32}| &\leq k_2, & k_2^2 &= \frac{4}{\nu-4} \frac{\bar{C}_{\hat{z}\hat{z}}}{\bar{C}_{22}} f_{4, \nu-4} (1-\alpha), \\ \sin|\varphi_{32} - \hat{\varphi}_{32}| &\leq \frac{k_2}{G_{32}}, \end{aligned} \quad (11.4.45)$$

Отметим, что этими интервалами можно пользоваться лишь для очень грубой ориентировки, так как они могут давать ошибочные значения при наличии сильной корреляции оценок двух частотных характеристик.

Смещение и выравнивание. Как показано в гл. 9 и 10, если ряды не выравнены, то при оценивании взаимных спектров появляется заметное смещение, которое переходит в оценки функций усиления и фазы. Это смещение сведется к минимуму, если все входные ряды выравнивать по отношению к выходному ряду по модели (11.4.1). Приближение распределения величины, встречающихся в спектральном анализе, с помощью χ^2 -распределения допустимо лишь в том случае, когда произведено выравнивание.

11.4.7. Оценивание многомерных частотных характеристик

В данном разделе кратко описывается оценивание матриц частотных характеристик модели (11.4.21).

Оценочные уравнения. Оценочные уравнения можно получить из (11.4.26), заменяя там спектры на их сглаженные оценки. В результате получим

$$\bar{C}_{qr}(f) = \bar{C}_{qq}(f) \hat{H}'(f). \quad (11.4.46)$$

Например, при $q=2$ имеются две пары оценочных уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{13}(f) &= \hat{H}_{31}(f) \bar{C}_{11}(f) + \hat{H}_{32}(f) \bar{C}_{12}(f), \\ \bar{C}_{23}(f) &= \hat{H}_{31}(f) \bar{C}_{21}(f) + \hat{H}_{32}(f) \bar{C}_{22}(f) \end{aligned} \quad (11.4.47)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{C}_{14}(f) &= \hat{H}_{41}(f) \bar{C}_{11}(f) + \hat{H}_{42}(f) \bar{C}_{12}(f), \\ \bar{C}_{24}(f) &= \hat{H}_{41}(f) \bar{C}_{21}(f) + \hat{H}_{42}(f) \bar{C}_{22}(f). \end{aligned} \quad (11.4.48)$$

Оценивание спектральной матрицы остаточных ошибок. Элементы спектральной матрицы остаточных ошибок получаются при

подстановке в (11.4.28) сглаженных оценок. Таким образом, для взаимного спектра процессов $Z_k(t)$ и $Z_l(t)$ получаем оценку

$$\begin{aligned} \bar{C}_{Z_k Z_l}(f) = & \bar{C}_{(q+k)(q+l)}(f) - \hat{H}_{(q+k)l}(f) \bar{C}_{(q+l)l}(f) - \dots \\ & \dots - \hat{H}_{(q+k)q}(f) \bar{C}_{(q+l)q}(f). \end{aligned} \quad (11.4.49)$$

Равенство (11.4.49) является частотным аналогом равенства (11.3.27).

Доверительные интервалы. Получить из неравенства (11.3.31) отдельные доверительные области для функций усиления и фазы нелегко. Для практических целей часто достаточно рассмотреть по отдельности каждое из соотношений (11.4.21) и получить доверительные интервалы способом, описанным в разд. 11.4.6.

11.5. ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МНОГОМЕРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В этом разделе приводится краткая сводка формул, необходимых для оценивания двумерных частотных характеристик. В разд. 11.5.2 кратко изложены стадии, из которых состоит практическая методика оценивания этих функций. Наконец, в разд. 11.5.3 проводится оценивание частотных характеристик реальной системы, имеющей два входа и два выхода (система описывает работу турбогенератора).

11.5.1. Формулы дискретного оценивания

Уравнения, описывающие дискретную систему, имеют вид

$$\begin{aligned} X_{3t} = & \sum_{j=0}^{\infty} h_{31j} X_{1t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} h_{32j} X_{2t-j} + Z_{3t}, \\ X_{4t} = & \sum_{j=0}^{\infty} h_{41j} X_{1t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} h_{42j} X_{2t-j} + Z_{4t}. \end{aligned}$$

Для этой системы получаются следующие дискретные оценочные уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{1k}(f) = & \hat{H}_{k1}(f) \bar{C}_{11}(f) + \hat{H}_{k2}(f) \bar{C}_{12}(f), \\ \bar{C}_{2k}(f) = & \hat{H}_{k1}(f) \bar{C}_{21}(f) + \hat{H}_{k2}(f) \bar{C}_{22}(f). \end{aligned}$$

при $k = 3, 4$ и

$$\hat{H}_{kl}(f) = \bar{G}_{kl}(f) e^{j\bar{\Phi}_{kl}(f)}, \quad l = 1, 2.$$

Опуская аргумент f , выборочные оценки можно записать в следующем виде.

Выборочные оценки функций усиления и фазы

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_{kl} &= \sqrt{\bar{A}_{kl}^2 + \bar{B}_{kl}^2}, \\ \bar{\Phi}_{kl} &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{\bar{B}_{kl}}{\bar{A}_{kl}} \right), \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} k = 3, 4, \\ l = 1, 2, \end{array}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{k1} &= \frac{\bar{L}_{1k}\bar{C}_{22} + \bar{Q}_{2k}\bar{Q}_{12} - \bar{L}_{2k}\bar{L}_{12}}{D}, \\ \bar{B}_{k1} &= \frac{\bar{Q}_{1k}\bar{C}_{22} - \bar{Q}_{2k}\bar{L}_{12} - \bar{L}_{2k}\bar{Q}_{12}}{D}, \\ \bar{A}_{k2} &= \frac{\bar{L}_{2k}\bar{C}_{11} - \bar{Q}_{1k}\bar{Q}_{12} - \bar{L}_{1k}\bar{L}_{12}}{D}, \\ \bar{B}_{k2} &= \frac{\bar{Q}_{2k}\bar{C}_{11} - \bar{Q}_{1k}\bar{L}_{12} + \bar{L}_{1k}\bar{Q}_{12}}{D}, \\ D &= \bar{C}_{11}\bar{C}_{22} - |\bar{C}_{12}|^2. \end{aligned}$$

Выборочные оценки когерентности

Квадраты спектров когерентности

$$\bar{K}_{lk}^2 = \frac{(\bar{L}_{lk}^2 + \bar{Q}_{lk}^2)}{\bar{C}_{kk}\bar{C}_{ll}}, \quad l = 1, 2, \quad k = 3, 4.$$

Квадраты спектров множественной когерентности

$$\bar{K}_{k12}^2 = \frac{[\bar{C}_{22}(\bar{L}_{1k}^2 + \bar{Q}_{1k}^2) + \bar{C}_{11}(\bar{L}_{2k}^2 + \bar{Q}_{2k}^2) - 2R]}{\bar{C}_{kk}D},$$

где

$$R = \bar{L}_{12}\bar{L}_{2k}\bar{L}_{1k} + \bar{L}_{12}\bar{Q}_{2k}\bar{Q}_{1k} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{2k}\bar{L}_{1k} + \bar{Q}_{12}\bar{L}_{2k}\bar{Q}_{1k}.$$

Квадраты спектров частной когерентности

$$\bar{K}_{kl|m}^2 = 1 - \frac{(1 - \bar{K}_{klm}^2)}{(1 - \bar{K}_{km}^2)}, \quad \begin{array}{l} l = 1, 2, \\ m = 1, 2 \neq l, \\ k = 3, 4. \end{array}$$

Спектры остаточных ошибок

$$\bar{R}_{kk} = \bar{C}_{kk}(1 - \bar{K}_{k12}^2), \quad k = 3, 4.$$

Логическая схема программы MULTSPEC, выполняющей все эти вычисления, прилежена в приложении П11.2.

11.5.2. Практическая методика оценивания многомерных спектров

Стадии оценивания многомерных частотных характеристик очень похожи на соответствующие стадии оценивания взаимных спектров (разд. 9.4.2) и частотной характеристики системы с одним входом и одним выходом (разд. 10.4.1). Поэтому мы опишем здесь эти стадии лишь очень кратко.

1. *Стадия предварительных решений.* Как и в разд. 9.4.2, данные наносятся на график и просматриваются с целью обнаружить очевидные тренды, а также для решения вопроса о том, следует или нет расфильтровывать процесс на несколько компонент. Выбирается максимальное запаздывание для вычисления автоковариационных и автокорреляционных функций.

2. *Первая стадия вычислений.* Вычисляются и наносятся на график авто- и взаимные корреляции исходных данных и их первых разностей. Графики автокорреляций проверяются, чтобы обнаружить отличия в затухании корреляций исходных данных и их разностей. Если такое отличие есть, то необходимо избавиться от трендов. Находятся пики взаимных корреляций.

3. *Стадия промежуточных решений.* Решается вопрос о том, использовать исходные данные или их первые разности. Определяются величины сдвигов для выравнивания и выбираются три значения точки отсечения для последующих вычислений спектров.

4. *Вторая стадия вычислений.* Вычисляются спектры и для каждого из них на одном и том же рисунке строятся три варианта, соответствующие выбранным точкам отсечения.

5. *Стадия интерпретации.* Производится анализ и интерпретация графиков и с помощью полученной информации решается вопрос о необходимости дополнительного спектрального анализа.

11.5.3. Анализ данных о турбогенераторе

Описываемые ниже данные были проанализированы ранее в [3]. Они получены с работавшего в обычном режиме 50-мегаваттного турбогенератора, действовавшего параллельно с объединенной системой, имевшей мощность примерно 5000 Мвт. Турбогенератор можно рассматривать как изображенную на рис. 8.1 систему с двумя входами и двумя выходами. Входными переменными являются синфазная (или активная) мощность и сдвинутая по фазе (или реактивная) мощность, измеряющая нагрузку на турбогенератор со стороны энергетической системы. Выходными переменными являются амплитуда и частота напряжения, создаваемого на клеммах турбогенератора. Знание передаточных функций, связывающих эти переменные, очень важно при конструировании систем

регулирования, в особенности для распределения нагрузки и частоты.

Делая замену переменных, можно вместо синфазной и сдвинутой по фазе мощностей использовать соответствующие токи. Поэтому измерялись следующие переменные: отклонения синфазного и сдвинутого по фазе токов от их номинальных значений и соответствующие им отклонения амплитуды и частоты напряжения от их номинальных значений. Отсчеты токов и напряжения брались 8 раз в 1 сек, в результате чего получилось 4808 значений, а частота измерялась 2 раза в 1 сек, что дало 1202 значения.

Линеаризация системы теоретических уравнений [2] показала, что турбогенератор приближенно можно рассматривать как линейную двумерную систему, входами которой являются отклонения синфазного и сдвинутого по фазе токов, а выходами — соответствующие им отклонения амплитуды и частоты напряжения. В обозначениях разд. 11.4.4 $x_1(t)$ — синфазный ток, $x_2(t)$ — сдвинутый по фазе ток, $x_3(t)$ — выходное напряжение и $x_4(t)$ — частота напряжения на выходе.

Анализ аналогичных данных от этой же самой системы [2] показал, что токи и напряжения почти не несут мощности в диапазоне частот выше 2,5 гц, а изменения частоты на выходе очень малы в диапазоне выше 0,8 гц. Поэтому было решено отфильтровать записи токов и напряжения с помощью цифрового фильтра с передаточной функцией

$$H(z) = \left[\frac{1}{7} (z^3 + z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) \right]^4.$$

Частотная характеристика этого фильтра равна

$$H(f) = \left[\frac{\sin 7\pi f \Delta}{7 \sin \pi f \Delta} \right]^4, \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta}.$$

Фильтр является низкочастотным, причем мощностью, которую он пропускает на частотах выше 0,75 гц, можно пренебречь. Поэтому отсчет отфильтрованных данных производился лишь 2 раза в секунду. Затем были подвергнуты анализу первые 1000 значений отфильтрованных токов и напряжения, а также частоты, причем анализ проводился по стадиям, описанным в разд. 11.5.2.

1. *Стадия предварительных решений.* Графики данных, приведенные на рис. 11.1, проверялись с целью обнаружить тренды или другие нежелательные особенности. Не было замечено никаких явных трендов, но тем не менее из-за большого количества наблюдений можно было ожидать, что некоторые тренды все же существуют. Первоначально в качестве максимального запаздывания было выбрано 125.

2. *Первая стадия вычислений.* Были вычислены авто- и взаимные ковариации исходных данных и их первых разностей и построены графики корреляционных функций.

3. Стадия промежуточных решений. Автокорреляционные функции $r_{11}(k)$ и $r_{44}(k)$ синфазного тока и частоты почти не обнаруживали трендов и имели довольно сильные осцилляции с частотой примерно 0,06—0,08 гц. Наоборот, автокорреляционные функ-

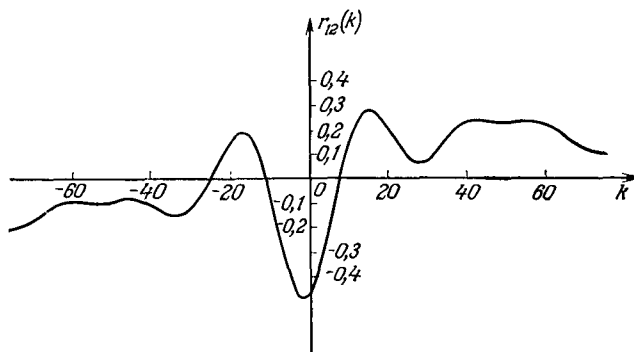


Рис. 11.2. Взаимная корреляционная функция входных токов.

ции сдвинутого по фазе тока и напряжения $r_{22}(k)$ и $r_{33}(k)$ имеют незначительные осцилляции и значительный тренд.

Взаимная корреляционная функция $r_{12}(k)$ показана на рис. 11.2, $r_{13}(k)$ и $r_{23}(k)$ — на рис. 11.3 и $r_{14}(k)$ и $r_{24}(k)$ — на рис. 11.4. Эти

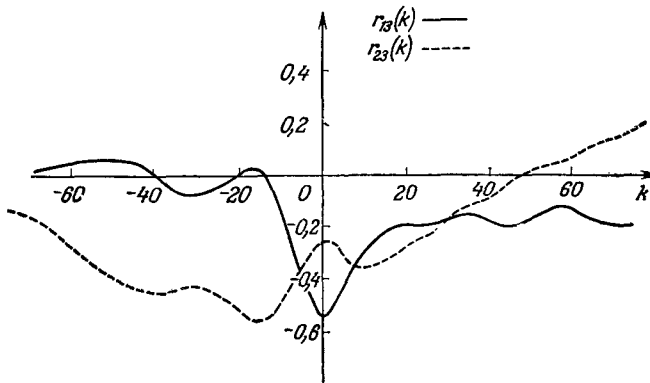


Рис. 11.3. Взаимные корреляционные функции токов и напряжения.

рисунки еще раз подтверждают наличие трендов и, следовательно, необходимость использования первых разностей от данных. Первоначально были выбраны значения точек отсечения 32, 48 и 64, так как казалось, что этих значений достаточно для выявления пиков, существование которых можно было предвидеть по осциллирующему поведению некоторых корреляционных функций. Исходя из положения максимумов взаимных корреляций, были

выбраны следующие параметры сдвигов для выравнивания: $S_{12} = -2$, $S_{13} = 0$, $S_{23} = 2$, $S_{14} = 3$ и $S_{24} = 5$.

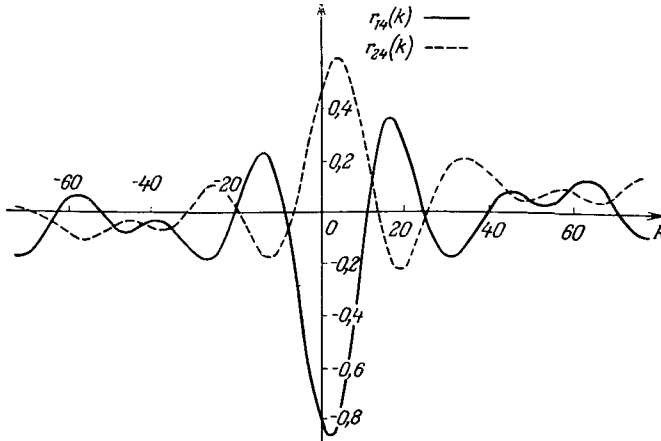


Рис. 11.4. Взаимные корреляционные функции токов и частоты.

4. *Вторая стадия вычислений.* Были проведены описанные в разд. 11.5.1 спектральные вычисления, относящиеся к выравненным рядам, образованным первыми разностями исходных данных. Затем были построены графики спектров.

5. *Стадия интерпретации.* Поскольку в подобном спектральном анализе имеется очень много графиков, мы приведем здесь для обсуждения лишь самые важные из них. Для всех спектров метод стягивания окна показал незначительные изменения при переходе от $L = 32$ к $L = 64$. Ввиду того что для анализа использовалось 1000 точек, окончательно

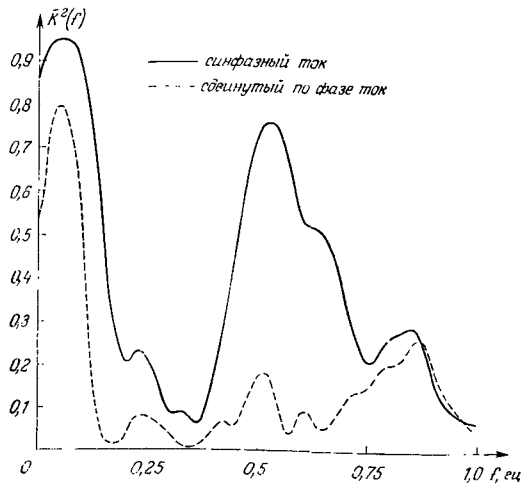


Рис. 11.5. Спектры когерентности между токами и частотой.

было принято значение $L = 32$, для которого выборочная оценка автоспектра имеет 83 степени свободы.

Спектры когерентности. Квадраты спектров когерентности синфазного и сдвинутого по фазе токов показаны на рис. 11.5, а спек-

тры множественной и частной когерентностей этих токов и отклонений частоты на выходе приведены на рис. 11.6.

Эти рисунки показывают, что когерентность между синфазным током и отклонениями частоты велика в большей части частотного диапазона. Рис. 11.5 наводит на мысль о том, что когерент-

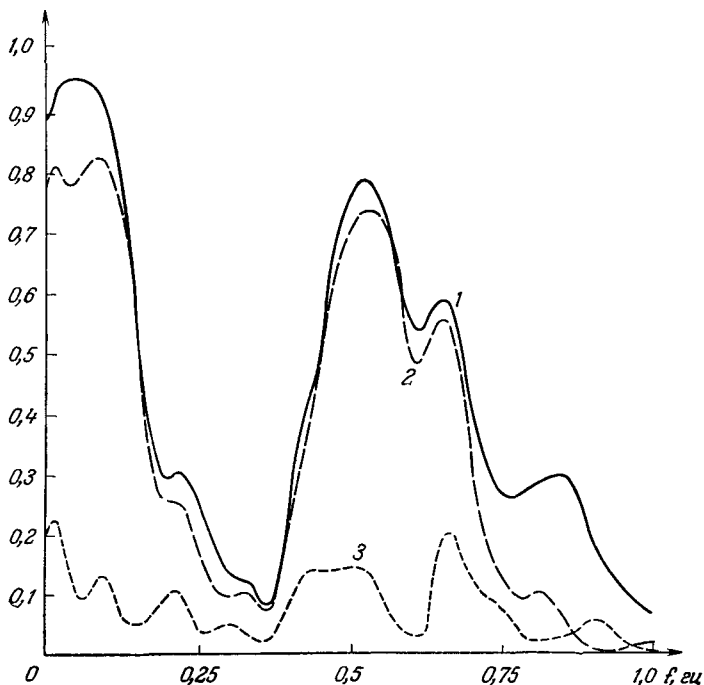


Рис. 11.6. Спектры множественной и частных когерентностей между токами и частотой.

1 — множественная когерентность между токами и частотой, 2 — частная когерентность между частотой и синфазным током при учете сдвинутого по фазе тока, 3 — частная когерентность между частотой и сдвинутым по фазе током при учете синфазного тока.

ность сдвинутого по фазе тока и отклонений частоты также велика. Однако показанный на рис. 11.6 спектр частной когерентности между отклонениями частоты и сдвинутым по фазе током принимает очень малые значения. Это указывает на то, что высокая когерентность сдвинутого по фазе тока и отклонений частоты обусловлена не их прямой связью, а очень высокой когерентностью между токами. Поэтому следует ожидать, что выборочные оценки функций усиления и фазы между сдвинутым по фазе током и отклонениями частоты будут давать мало информации.

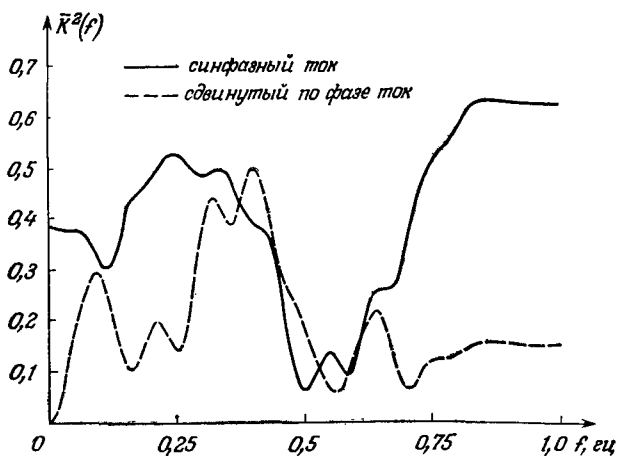


Рис. 11.7. Спектры когерентности между токами и напряжением.

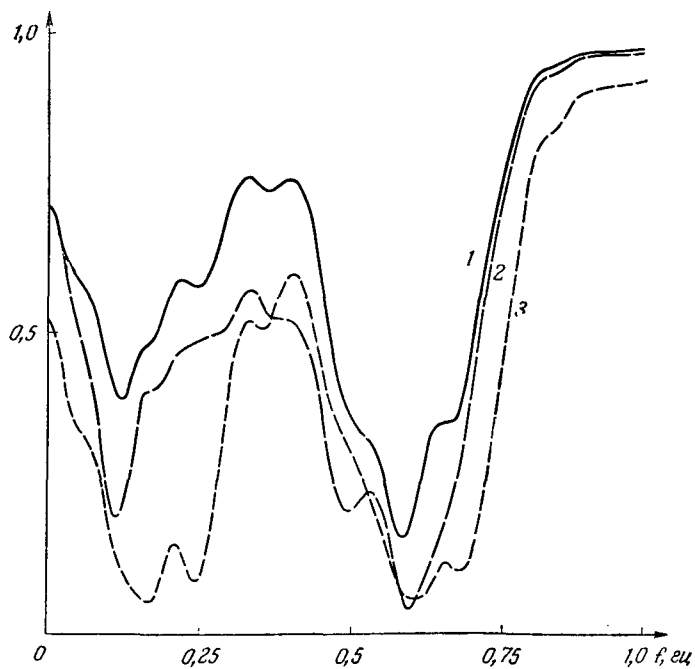


Рис. 11.8. Спектры множественной и частных когерентностей между токами и напряжением.
 1 — множественная когерентность между токами и напряжением, 2 — частная когерентность между напряжением и синфазным током при учете сдвинутого по фазе тока, 3 — частная когерентность между напряжением и сдвинутым по фазе током при учете синфазного тока.

Квадраты спектров когерентности, множественной когерентности и частной когерентности между двумя токами и напряжениями на выходе показаны на рис. 11.7 и 11.8. Значения когерентности между синфазным током и напряжением на выходе отно-

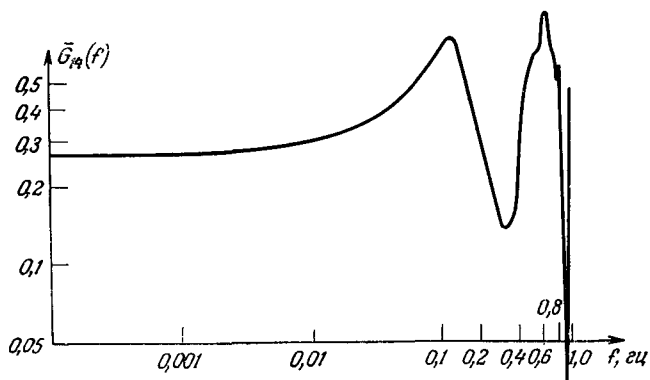


Рис. 11.9. Функция усиления между синфазным током и частотой.

сительно велики вплоть до 0,5 гц, где они начинают уменьшаться и затем снова возрастают на частоте 0,7 гц. Очень высокие значения когерентности за частотой 0,75 гц, по-видимому, ложные и не считаются надежными из-за очень малой мощности на этих ча-

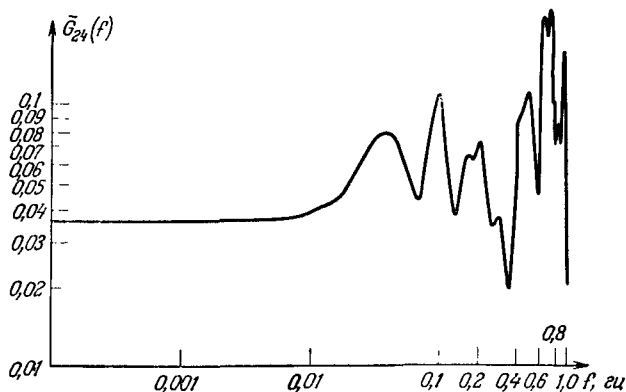


Рис. 11.10. Функция усиления между сдвинутым по фазе током и частотой.

стотах. Значения когерентности между сдвинутым по фазе током и напряжением, как правило, меньше, причем большие значения лежат вблизи нуля и в диапазоне от 0,25 до 0,5 гц. Как и раньше, очень большие значения когерентности для частот больше 0,75 гц, по-видимому, являются ложными.

Функции усиления. На рис. 11.9—11.12 показаны четыре функции усиления. Функция усиления между синфазным током и отклонениями частоты приведена на рис. 11.9. Она имеет пик приблизительно на частоте 0,12 гц, от которого убывает с наклоном

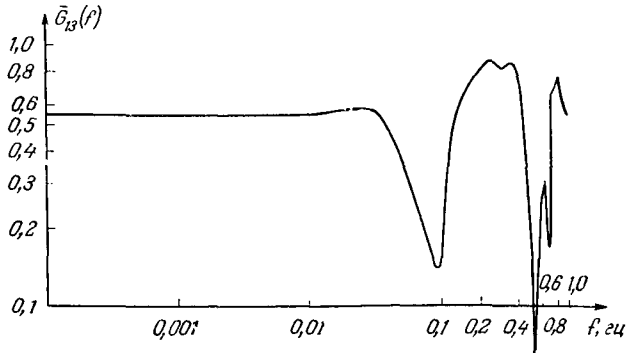


Рис. 11.11. Функция усиления между синфазным током и напряжением.

примерно 2 : 1 в логарифмическом масштабе, что наводит на мысль о том, что система имеет второй порядок. Фактор затухания системы, полученный с помощью отношения максимального значения функции усиления к ее значению на нулевой частоте,

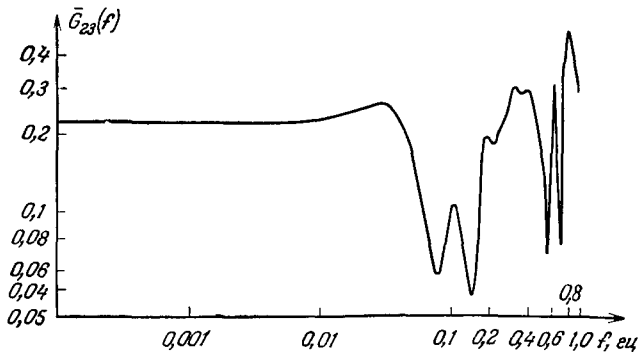


Рис. 11.12. Функция усиления между сдвинутым по фазе током и напряжением.

равен приблизительно 0,2. Функция усиления между сдвинутым по фазе током и отклонениями частоты показана на рис. 11.10. Она ведет себя крайне неустойчиво, что можно было предвидеть по спектру частной когерентности. Можно сделать вывод, что сдвинутый по фазе ток и отклонения частоты, по-видимому, не связаны линейным соотношением.

Функции усиления между каждым из двух токов и напряжением похожи на упомянутые выше, но их пики выражены не столь четко. Так, показанная на рис. 11.11 функция усиления между синфазным током и напряжением имеет небольшой уплощенный

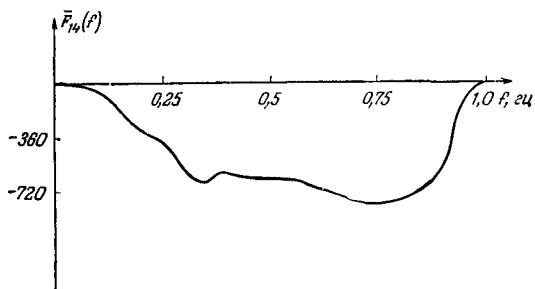


Рис. 11.13. Фазовая функция между синфазным током и частотой.

пик на частоте около 0,025 гц, от которого она убывает с наклоном 2 : 1 в логарифмическом масштабе, что говорит о том, что система имеет небольшие осцилляции, усиление имеет завал на частоте около 0,05 гц и фактор затухания равен 0,6. Принимая во внимание поведение функции усиления между сдвинутым по фазе

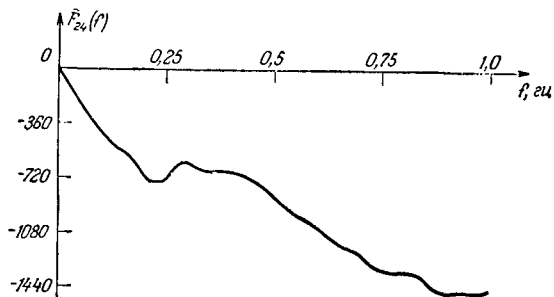


Рис. 11.14. Фазовая функция между сдвинутым по фазе током и частотой.

током и напряжением, можно предложить систему третьего порядка, составленную из системы первого порядка с постоянной времени 20 сек, и системы второго порядка с точкой завала около 0,04 гц и фактором затухания 0,5. В этом анализе мы не принимали во внимание значения функций усиления на частотах выше 0,1 гц из-за малой мощности входных токов в этом диапазоне.

Фазовые спектры. При интерпретации фазовых спектров, сосчитанных по выравненным рядам, возникают трудности, поскольку в формулы для вычисления фаз входят взаимные корреляции, со-

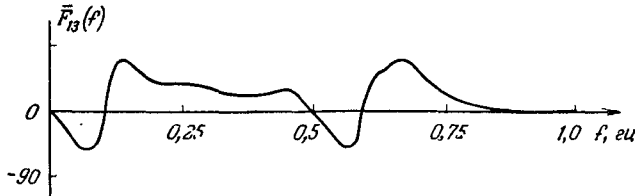


Рис. 11.15. Фазовая функция между синфазным током и напряжением.

считанные при разных сдвигах. Чтобы обойти эту трудность, мы вычислили фазовые спектры без применения выравнивания. Они показаны на рис. 11.13—11.16. Поскольку смещение фазовых спек-

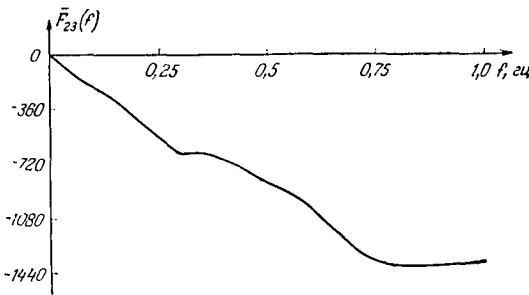


Рис. 11.16. Фазовая функция между сдвинутым по фазе током и напряжением.

тров, обусловленное тем, что выравнивание не применяется, не столь велико, как смещение спектров усиления, мы считали, что при этом не возникнет серьезных ошибок.

11.5.4. РЕЗЮМЕ

Результаты спектрального анализа данных о работе турбогенератора удобно представить в виде частотных характеристик, полученных из графиков функций усиления и фазы.

Частотная характеристика между синфазным током и напряжением. Из рис. 11.11 и 11.15 находим выборочную оценку $\hat{H}_{31}(j)$ частотной характеристики $H_{31}(f)$:

$$\hat{H}_{31}(f) = \frac{0,55}{1 + j48f - 1600f^2}.$$

Эта характеристика соответствует системе второго порядка с фактором затухания 0,6, резонансной частотой 0,025 *гц*, усилением на нулевой частоте 0,55 и нулевой задержкой.

Частотная характеристика между синфазным током и отклонениями частоты. Из рис. 11.9 и 11.13 находим

$$\hat{H}_{41}(f) = \frac{0,26e^{-j4\pi f}}{1 + j3,3f - 70f^2},$$

т. е. соответствующая система имеет второй порядок, фактор затухания равен 0,2, резонансная частота 0,12 *гц*, усиление на нулевой частоте 0,26 и задержка равна двум интервалам отсчета, т. е. 1 *сек*.

Частотная характеристика между сдвинутым по фазе током и напряжением. Из рис. 11.12 и 11.16 находим

$$\hat{H}_{32}(f) = \frac{0,22e^{-j6\pi f}}{(1 + j125f)(1 + j25f - 625f^2)}.$$

Соответствующая система составлена из системы второго порядка с фактором затухания 0,5, резонансной частотой 0,04 *гц*, усилением на нулевой частоте 0,22 и задержкой 1,5 *сек* и системы первого порядка с постоянной времени 20 *сек*.

Следует подчеркнуть, что графическое оценивание параметров этих систем, которыми мы пользовались, не очень эффективно. Поэтому полученные таким путем модели следует рассматривать как пробные модели, которые затем, если потребуются, нужно тщательнее подогнать к данным с помощью параметрических методов. Примеры подобных методов мы проиллюстрировали в гл. 5. Впрочем, для многих задач регулирования достаточно графиков функций усиления и фазы, приведенных на рис. 11.9—11.16.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson T. W., Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley, New York, 1958. (Русский перевод: Т. Андерсон, Введение в многомерный статистический анализ, Физматгиз, М., 1963.)
2. Slanton K. N., Estimation of turbo-alternator transfer functions using normal operating data, Proc. Inst. Electr. Engrs., 112, 9, 1713 (1965).
3. Slanton K. N., Measurement of turbo-alternator transfer functions using normal operating data, Proc. Inst. Electr. Engrs., 110, 11, 2001 (1963).

ПРИЛОЖЕНИЕ П11.1
СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ВЕКТОРЫ

Собственные значения λ_i , $i = 1, \dots, N$, и соответствующие правосторонние собственные векторы \mathbf{r}_i матрицы \mathbf{A} по определению должны удовлетворять уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_i. \quad (\text{П11.1.1})$$

Уравнения (П11.1.1) можно записать в скалярной форме:

$$\begin{aligned} a_{11}r_{1i} + a_{12}r_{2i} + \dots + a_{1N}r_{Ni} &= \lambda_i r_{1i}, \\ a_{21}r_{1i} + a_{22}r_{2i} + \dots + a_{2N}r_{Ni} &= \lambda_i r_{2i}, \\ \vdots & \\ a_{N1}r_{1i} + a_{N2}r_{2i} + \dots + a_{NN}r_{Ni} &= \lambda_i r_{Ni}. \end{aligned}$$

Геометрически (П11.1.1) означает, что в N -мерном векторном пространстве векторы \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, N$, инвариантны при линейном преобразовании \mathbf{A} . Инвариантным правосторонним векторам \mathbf{r}_i соответствует *двойственная*, или *сопряженная*, система векторов \mathbf{l}_i , удовлетворяющих левосторонним уравнениям

$$\mathbf{l}'_i\mathbf{A} = \lambda_i\mathbf{l}'_i. \quad (\text{П11.1.2})$$

Можно показать, что левосторонние векторы ортогональны к правосторонним. Умножая справа (П11.1.2) на \mathbf{r}_j , получаем

$$\mathbf{l}'_i\mathbf{A}\mathbf{r}_j = \lambda_i\mathbf{l}'_i\mathbf{r}_j.$$

Отсюда с помощью (П11.1.1)

$$(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{l}'_i\mathbf{r}_j = 0.$$

Предполагая, что собственные значения различны, отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{l}'_i\mathbf{r}_j &= 0, \quad \text{если } i \neq j, \\ \mathbf{l}'_i\mathbf{r}_j &\neq 0, \quad \text{если } i = j. \end{aligned}$$

При соответствующей нормировке векторов будем иметь

$$\mathbf{l}'_i\mathbf{r}_i = 1,$$

т. е. правосторонние и левосторонние векторы ортонормальны. Если собственные векторы объединить в матрицы \mathbf{L} и \mathbf{R}

$$\mathbf{L} = (\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_N) \quad \text{и} \quad \mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

у которых столбцы образованы соответственно левосторонними и правосторонними векторами матрицы \mathbf{A} , то приведенные выше условия ортонормальности можно записать в виде

$$\mathbf{LR} = \mathbf{I}, \quad (\text{П11.1.3})$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, имеющая на главной диагонали единицы, а на остальных местах нули.

Симметричные матрицы. Матрица ковариаций набора действительных случайных величин действительна и симметрична. Поэтому ее собственные значения действительны, собственные векторы ортогональны и, следовательно, матрицы \mathbf{L} и \mathbf{R} являются ортогональными. Из последнего свойства следует, что различные векторы, инвариантные при преобразовании, ортогональны. Чтобы показать это, удобно записать равенства (П11.1.1) и (П11.1.2) в матричной форме

$$\mathbf{AR} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}, \quad (\text{П11.1.4})$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, образованная собственными значениями. Аналогично,

$$\mathbf{L}'\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}'\mathbf{L}'. \quad (\text{П11.1.5})$$

Транспонируя матрицы в (П11.1.5) и пользуясь тем, что $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ и $\mathbf{L}' = \mathbf{L}$, получаем

$$\mathbf{A}\mathbf{L}' = \mathbf{L}'\mathbf{\Lambda}.$$

Сравнивая это равенство с (П11.1.4), находим

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}',$$

и (П11.1.3) переходит в

$$\mathbf{L}\mathbf{L}' = \mathbf{I} = \mathbf{R}'\mathbf{R}, \quad (\text{П11.1.6})$$

т. е. собственные векторы ортогональны. Отсюда, умножая (П11.1.4) слева на \mathbf{R}' , получаем

$$\mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}'\mathbf{R}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}. \quad (\text{П11.1.7})$$

Геометрический смысл равенства (П11.1.7) для симметричной \mathbf{A} состоит в том, что квадратичная форма

$$\mathbf{y}'\mathbf{A}\mathbf{y} = C \quad (\text{П11.1.8})$$

задает в многомерном пространстве поверхность эллипсоида, оси которого проходят через начало координат. После преобразования

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (\text{П11.1.9})$$

равенство (П.11.1.8) переходит в

$$\mathbf{x}'\mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{x} = C,$$

т. е.

$$\mathbf{x}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} = C$$

или

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_N x_N^2 = C.$$

Следовательно, эллипсоид преобразуется к каноническому виду с помощью преобразования (П11.1.9), а собственные значения равны квадратам обратных длин главных осей эллипсоида.

ПРИЛОЖЕНИЕ П11.2

ЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ МНОГОМЕРНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Ниже приводится логическая схема вычислительной программы MULTSPEС, входными данными для которой служат выборочные оценки ковариаций двух входных рядов $X_1(t)$, $X_2(t)$ и двух выходных рядов $X_3(t)$, $X_4(t)$. Программа вычисляет частотные характеристики H_{31} , H_{32} , H_{41} , H_{42} , связывающие эти ряды. Предусмотрен вывод на печать основных функций, по более важным являются графики этих функций. Вывод на график состоит из всех автоспектров (в логарифмическом масштабе, в зависимости от частоты); обоих спектров остаточных ошибок (в логарифмическом масштабе, в зависимости от частоты); квадратов спектров всех полных и частных когерентностей и графиков всех функций усиления и фазы, причем для каждого спектра на одном рисунке строятся графики, соответствующие всем выбранным точкам отсечения.

Программа MULTSPEС

- 1) Ввести N , $MAXM$, NF , $DELTA$, M .
- 2) Ввести $COV(K, I, I)$, $K = 0$, $MAXM$, $I = 1, 2$.
- 3) Вычислить автоспектры $SPEC(K, I)$, $K = 0$, NF , $I = 1, 2$ с помощью подпрограммы AUTOSPEС (приложение П7.1).
- 4) Произвести считывание массива $COV(K, 3, 3)$, $K = 0$, $MAXM$.
- 5) Вычислить $SPEC(K, 3)$ с помощью подпрограммы AUTOSPEС.
- 6) Произвести считывание массивов
 - $COV(K, 1, 2)$, $COV(K, 2, 1)$, $K = 0$, $MAXM$, со сдвигом $S12$,
 - $COV(K, 1, 3)$, $COV(K, 3, 1)$, $K = 0$, $MAXM$, со сдвигом $S13$,
 - $COV(K, 2, 3)$, $COV(K, 3, 2)$, $K = 0$, $MAXM$, со сдвигом $S23$.
- 7) Воспользоваться подпрограммой EVOD (Приложение П9.2) для вычисления четных и нечетных частей.

- 8) *Вызвать* подпрограмму CROSPEC (Приложение П9.2) для вычисления
- $$\begin{aligned} & \text{COSPEC}(K, 1, 2), \text{QSPEC}(K, 1, 2), \text{SQ}(K, 1, 2), \\ & \text{COSPEC}(K, 1, 3), \text{QSPEC}(K, 1, 3), \text{SQ}(K, 1, 3), \\ & \text{COSPEC}(K, 2, 3), \text{QSPEC}(K, 2, 3), \text{SQ}(K, 2, 3). \end{aligned}$$
- 9) *Вычислить* $\text{DENOM}(K) = \text{SPEC}(K, 1) * \text{SPEC}(K, 2) - \text{SQ}(K, 1, 2)$.
- 10) *Вызвать* подпрограмму ENDALL.
- 11) *Запомнить* для последующего вывода на график все те величины, выдаваемые подпрограммой ENDALL, которые отмечены звездочкой на полях.
- 12) *Произвести считывание* $\text{COV}(K, 4, 4)$, $K = 0$, MAXM.
- 13) *Вычислить* с помощью подпрограммы AUTOSPEC величины $\text{SPEC}(K, 4)$.
- 14) *Произвести считывание*

$\text{COV}(K, 1, 4)$, $\text{COV}(K, 4, 1)$, $K = 0$, MAXM, со сдвигом S14,
 $\text{COV}(K, 2, 4)$, $\text{COV}(K, 4, 2)$, $K = 0$, MAXM, со сдвигом S24.

Повторить пункты 7–11, затем произвести считывание другого значения M и воспользоваться хранящимися в памяти автоковариациями, а также четными и нечетными частями взаимных ковариаций для вычисления с помощью подпрограмм AUTOSPEC, CROSPEC и ENDALL функций усиления, фазы, квадратов спектров когерентностей и спектров остаточных ошибок. После того как все выбранные значения M использованы, построить и расположить все логарифмические спектры, все фазовые спектры и квадраты спектров когерентностей в зависимости от частоты, а все логарифмы функций усиления в зависимости от логарифма частоты.

Подпрограмма ENDALL

Эта подпрограмма вычисляет функции усиления и фазы, полные и частные когерентности и спектры остаточных ошибок. Если опустить индекс K , то формулы для вычислений будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{31} = & \text{COSPEC}(1, 3) * \text{SPEC}(2) + \text{QSPEC}(2, 3) * \text{QSPEC}(1, 2) - \\ & - \text{COSPEC}(2, 3) * \text{COSPEC}(1, 2). \end{aligned}$$

$$\text{SQA } 31 = A_{31} * A_{31}.$$

$$\begin{aligned} B_{31} = & \text{QSPEC}(1, 3) * \text{SPEC}(2) - \text{QSPEC}(2, 3) * \text{COSPEC}(1, 2) - \\ & - \text{COSPEC}(2, 3) * \text{QSPEC}(1, 2). \end{aligned}$$

$$\text{SQB } 31 = B_{31} * B_{31}.$$

* $\text{PHASE } 31 = \text{ARCTAN}(-B_{31}/A_{31})$.

$$\text{GAIN } 31 = \text{SQRT}(\text{SQA}_{31} + \text{SQB}_{31})/\text{DENOM}.$$

- * $\text{LOGGN } 31 = \text{LOG } 10 (\text{GAIN } 31).$
- $A \ 32 = \text{COSPEC } (2, 3) * \text{SPEC } (1) - \text{COSPEC } (1, 2) * \text{COSPEC } (1, 3) -$
 $- \text{QSPEC } (1, 2) * \text{QSPEC } (1, 3).$
- $\text{SQA } 32 = A \ 32 * A \ 32.$
- $B \ 32 = \text{QSPEC } (2, 3) * \text{SPEC } (1) - \text{COSPEC } (1, 2) * \text{QSPEC } (1, 3) +$
 $+ \text{COSPEC } (1, 2) * \text{QSPEC } (1, 3).$
- $\text{SQB } 32 = B \ 32 * B \ 32.$
- ∴ $\text{PHASE } 32 = \text{ARCTAN } (- B \ 32/A \ 32).$
- $\text{GAIN } 32 = \text{SQRT } (\text{SQA } 32 + \text{SQB } 32)/\text{DENOM}.$
- * $\text{LOGGN } 32 = \text{LOG } 10 (\text{GAIN } 32).$
- * $\text{COHSQ } (1, 3) = \text{SQ } (1, 3)/(\text{SPEC } (1) * \text{SPEC } (3)).$
- * $\text{COHSQ } (2, 3) = \text{SQ } (2, 3)/(\text{SPEC } (2) * \text{SPEC } (3)).$
- $R = \text{COSPEC } (1, 2) * \text{COSPEC } (2, 3) * \text{COSPEC } (1, 3) +$
 $+ \text{COSPEC } (1, 2) * \text{QSPEC } (2, 3) * \text{QSPEC } (1, 3) -$
 $- \text{QSPEC } (1, 2) * \text{QSPEC } (2, 3) * \text{COSPEC } (1, 3) +$
 $+ \text{QSPEC } (1, 2) * \text{QSPEC } (1, 3) * \text{COSPEC } (2, 3).$
- * $\text{COHSQ} = (\text{SPEC } (2) * \text{SQ } (1, 3) + \text{SPEC } (1) * \text{SQ } (2, 3) -$
 $- 2 * R)/(\text{SPEC } (3) * \text{DENOM}).$
- $\text{COMP} = 1 - \text{COHSQ}.$
- $\text{RESID} = \text{COMP} * \text{SPEC } (3).$
- * $\text{LOGRESID} = \text{LOG } 10 (\text{RESID}).$
- * $\text{COH } 132 = 1 - (\text{COMP}/(1 - \text{COHSQ } (2, 3))).$
- * $\text{COH } 231 = 1 - (\text{COMP}/(1 - \text{COHSQ } (1, 3))).$

ПРИЛОЖЕНИЕ П11.3

ДАННЫЕ ДЛЯ ПРИМЕРА С ТУРБОГЕНЕРАТОРОМ

Таблица П11.1.1

100 значений из данных турбогенератора в условных величинах

| | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0,92 | 0,95 | 0,99 | 1,07 | 1,13 | 1,16 | 1,15 | 1,08 | 0,97 |
| 0,89 | 0,85 | 0,76 | 0,65 | 0,59 | 0,59 | 0,58 | 0,58 | 0,60 |
| 0,60 | 0,55 | 0,54 | 0,60 | 0,62 | 0,54 | 0,50 | 0,58 | 0,65 |
| 0,65 | 0,69 | 0,74 | 0,76 | 0,72 | 0,69 | 0,71 | 0,81 | 0,96 |
| 1,09 | 1,10 | 1,05 | 1,04 | 1,05 | 1,03 | 1,00 | 0,92 | 0,81 |
| 0,73 | 0,60 | 0,48 | 0,45 | 0,44 | 0,37 | 0,30 | 0,27 | 0,30 |
| 0,33 | 0,33 | 0,34 | 0,36 | 0,38 | 0,41 | 0,46 | 0,50 | 0,50 |
| 0,47 | 0,44 | 0,47 | 0,52 | 0,52 | 0,50 | 0,50 | 0,49 | 0,48 |
| 0,47 | 0,46 | 0,43 | 0,42 | 0,46 | 0,52 | 0,58 | 0,61 | 0,66 |
| 0,72 | 0,72 | 0,68 | 0,70 | 0,77 | 0,75 | 0,64 | 0,56 | 0,50 |
| 0,40 | 0,28 | 0,24 | 0,26 | 0,21 | 0,16 | 0,18 | 0,19 | 0,18 |
| 0,19 | | | | | | | | |

Отклонения синфазного тока

Продолжение табл. П11.1.

| | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -0,75 | -0,32 | -1,04 | -1,01 | -0,83 | -0,64 | -0,55 | -0,46 | -0,31 |
| -0,14 | -0,02 | 0,12 | 0,32 | 0,54 | 0,68 | 0,72 | 0,77 | 0,82 |
| 0,87 | 0,91 | 0,98 | 1,10 | 1,17 | 1,09 | 1,00 | 1,06 | 1,17 |
| 1,18 | 0,96 | 0,64 | 0,60 | 0,80 | 0,84 | 0,68 | 0,63 | 0,74 |
| 0,81 | 0,67 | 0,38 | 0,17 | 0,17 | 0,29 | 0,41 | 0,52 | 0,67 |
| 0,77 | 0,80 | 0,86 | 1,01 | 1,22 | 1,10 | 1,49 | 1,49 | 1,47 |
| 1,54 | 1,64 | 1,60 | 1,46 | 1,41 | 1,41 | 1,39 | 1,26 | 1,04 |
| 0,89 | 0,93 | 1,21 | 1,31 | 1,25 | 1,13 | 1,04 | 0,98 | 0,93 |
| 0,86 | 0,79 | 0,80 | 0,91 | 1,10 | 1,26 | 1,26 | 1,10 | 0,92 |
| 0,79 | 0,67 | 0,53 | 0,44 | 0,43 | 0,39 | 0,32 | 0,29 | 0,34 |
| 0,38 | 0,37 | 0,33 | 0,26 | 0,25 | 0,31 | 0,40 | 0,47 | 0,45 |
| 0,36 | | | | | | | | |

Отклонения тока, сдвинутого по фазе

| | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -2,11 | -2,08 | -2,10 | -2,22 | -2,39 | -2,50 | -2,49 | -2,13 | -2,37 |
| -2,30 | -2,25 | -2,21 | -2,20 | -2,22 | -2,21 | -2,21 | -2,20 | -2,22 |
| -2,22 | -2,21 | -2,22 | -2,25 | -2,26 | -2,20 | -2,15 | -2,18 | -2,21 |
| -2,25 | -2,27 | -2,28 | -2,28 | -2,26 | -2,19 | -2,13 | -2,15 | -2,25 |
| -2,33 | -2,32 | -2,25 | -2,21 | -2,23 | -2,28 | -2,32 | -2,33 | -2,34 |
| -2,32 | -2,26 | -2,22 | -2,23 | -2,27 | -2,30 | -2,30 | -2,28 | -2,26 |
| -2,26 | -2,25 | -2,23 | -2,21 | -2,23 | -2,25 | -2,26 | -2,22 | -2,14 |
| -2,10 | -2,15 | -2,23 | -2,27 | -2,26 | -2,22 | -2,20 | -2,19 | -2,17 |
| -2,14 | -2,10 | -2,09 | -2,14 | -2,24 | -2,32 | -2,34 | -2,30 | -2,28 |
| -2,28 | -2,26 | -2,22 | -2,20 | -2,20 | -2,17 | -2,11 | -2,07 | -2,05 |
| -1,98 | -1,90 | -1,83 | -1,78 | -1,77 | -1,78 | -1,81 | -1,83 | -1,82 |
| -1,77 | | | | | | | | |

Отклонения напряжения

| | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 4,75 | 4,75 | 4,74 | 4,75 | 4,75 | 4,77 | 4,78 | 4,76 | 4,81 |
| 4,81 | 4,84 | 4,88 | 4,94 | 4,96 | 4,99 | 5,05 | 5,11 | 5,11 |
| 5,10 | 5,10 | 5,05 | 5,00 | 5,01 | 5,00 | 5,00 | 5,01 | 5,04 |
| 5,09 | 5,09 | 5,06 | 5,06 | 5,04 | 5,01 | 4,99 | 4,97 | 4,99 |
| 5,00 | 5,01 | 4,97 | 4,88 | 4,81 | 4,81 | 4,79 | 4,79 | 4,85 |
| 4,88 | 4,90 | 5,00 | 5,11 | 5,15 | 5,24 | 5,20 | 5,20 | 5,20 |
| 5,20 | 5,21 | 5,20 | 5,15 | 5,15 | 5,14 | 5,10 | 5,11 | 5,10 |
| 5,10 | 5,09 | 5,11 | 5,08 | 5,10 | 5,10 | 5,15 | 5,15 | 5,15 |
| 5,10 | 5,15 | 5,10 | 5,10 | 5,10 | 5,11 | 5,11 | 5,10 | 5,11 |
| 5,11 | 5,08 | 5,05 | 5,01 | 4,90 | 4,90 | 4,95 | 4,94 | 4,90 |
| 4,96 | 4,97 | 4,93 | 5,08 | 5,16 | 5,21 | 5,19 | 5,19 | 5,20 |
| 5,16 | | | | | | | | |

Отклонения частоты

УКАЗАТЕЛЬ

- Автоковариационные функции 80
Анализ частотных характеристик 203
Быстрое преобразование Фурье (БПФ) 68
- Взаимные ковариационные функции** 89
— — — выборочные 93
— — — корреляционные функции 81, 90
— — — линейного процесса 82
— спектры 98, 103
— — амплитудные 105
— — выборочные 99
— — линейных процессов 107
— — — — двумерных 112
— — — фазовые 116, 138
— — частной когерентности и фазы 256
Взаимный спектральный анализ 146
Влияние на сглаживание полосы частот 12
— — — формы окна 21
Выборочная коспектральная функция 127
Выборочные характеристики 10
Выборочный взаимный спектр 123, 131
Выравнивание 160
- Данные** ионосферные 71
— об атмосферной турбулентности 55
— о выходе продукции 57
— о газовой печи 216
— о нервностах взлетной полосы 59
— о партиях продукта 39, 44
— радиолокационные 45, 53
— турбогенератора 234, 249, 268, 283
Двумерные временные ряды 77
— — — лизейные операции 119
— линейные процессы 85
— процессы авторегрессии и скользящего среднего 87
Дисперсионный анализ 247
Дисперсия оценок наклона 66
— — — сглаженных 140
Доверительные интервалы коэффициентов когерентности и фазы 165
— — спектра когерентности 141
— — фазового спектра 142
— — функций усиления и фазы 199, 264
- Изучение частотных характеристик** 58
- Квадрат спектра когерентности** 112, 115, 138
— коэффициента когерентности 112
Квадратурный спектр 101, 106
Квантование 8
Ковариации 89
Ковариационная матрица оценок 125, 131
— — — обобщенная 132, 179
— — — сглаженных 137
Ковариация оценок ковариационной функции 174
Корреляция множественная 243
— частная 245
Коспектр 100, 106
Критерии значимости 198
— корреляции 126
— оптимальности 24
- Матрица ковариаций действительного процесса** 223
— — — комплексного процесса 228
— — — остаточных ошибок 250
— — — оценок 251
— — — собственные числа 224
— откликов на единичный импульс 234
— частотных характеристик 235
Матрицы симметричные 280
— тензидефы 223
- Матричная функция ковариационная** 230
— — — корреляционная 231
Методика оценивания спектров 41
— — — многомерных 268
— — частотных характеристик 202
Метод наименьших квадратов 195
Многомерный анализ во временной области 241
— — — в частотной области 253
Моменты выборочного коспектра 124
- Наложение частот** 36
- Оценивание спектров** 8, 35
— — — взаимных 167
— — — сглаженных 144, 162
— — — многомерных 261
— — функций отклика на единичный импульс 187, 206
— — — усиления и фазы 209
— — частотных характеристик 186, 191, 214
— — — — методом наименьших квадратов 195
— — — — многомерных 262, 265
- Планирование анализа взаимных спектров** 166
— — — спектрального 36
— — — экспериментов 57
Построение моделей 55
Пробный анализ 38
Программа вычислений 64
— CROSSPEC 182
— FRQRSP 219
— MULTSPEC 281
Процессы авторегрессии второго порядка 19, 74
— — — двумерные 150
— — — многомерные 239
— — — первого порядка 12, 147
— — — скользящего среднего 240
— — смешанные 241
- Разрешающая способность** 28
Регрессионный анализ 242
- Сглаженные оценки взаимных спектров** 135
Смещение оценок когерентности 157
— — — фазы 161
— — — функции усиления 201
Собственные значения 279
Спектральная матрица 232
— — — линейного процесса 238
— — — остаточных ошибок 260
Спектральное окно Барлетта 21, 25
— — — Парзена 22, 25
— — — Тьюки 23, 25, 41
Спектр множественной когерентности 255
Степень искажения 27
Стягивание окна 21, 31
- Теорема Слуцкого** 49
- Устойчивость** 27, 29
Утечка 33
- Фазовый спектр** 129
Формирование окна 24, 35
Формулы взаимных спектров 104
Функция отклика на единичный импульс 206
- Цифровые фильтры** 48
— — — использование 51
— — — биномиальные 52
- Частный коэффициент корреляции** 246